Checkliste

Kapitel I – ohne Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

		☺	😐	☹	Wiederholung/ Übungen im Buch
1.	Ich kann die **Ableitung** einer Funktion an einer Stelle näherungsweise grafisch bestimmen und damit den Graphen der Ableitungsfunktion dieser Funktion skizzieren. Zudem kann ich Aussagen über Schaubilder von Funktionen und zugehöriger erster und zweiter Ableitungsfunktion begründen oder widerlegen.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 9 • S. 35 Nr. 4 • S. 38 Nr. 1 • S. 39 Nr. 1
2.	Ich kann mithilfe der **Potenz-, der Faktor- und der Summenregel** die Ableitung und höhere Ableitungen einer Funktion berechnen. Zudem kann ich zusammengesetzte Funktionen mit der **Produkt- und Kettenregel** ableiten. Damit kann ich auch die Steigung eines Graphen in einem Punkt berechnen. Diese Ableitungsregeln kann ich auch anwenden, wenn die Funktion einen Parameter enthält.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 11 Beispiel 2, Seite 12 • S. 19 Nr. 10 • S. 19 Nr. 12 • S. 35 Nr. 2 • S. 35 Nr. 3 • S. 36 Nr. 11
3.	Ich kann die **Verkettung** zweier Funktionen bilden und eine geeignete Funktion als Verkettung zweier Funktionen darstellen.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 15 • S. 16 Nr. 7 • S. 16 Nr. 8 • S. 36 Nr. 12
4.	Ich kann das **Monotonie- und Krümmungsverhalten** von Funktionen untersuchen.	☐	☐	☐	Beispiel 1, Seite 24 Beispiel 2, Seite 24 • S. 35 Nr. 7 • S. 35 Nr. 9 • S. 35 Nr. 10
5.	Ich kann lokale und globale **Extremstellen** mit Hilfe der ersten und zweiten Ableitung berechnen und hierbei die Rechenschritte verständlich dokumentieren. Zudem kann ich Graphen auf **Wende- und Sattelpunkte** untersuchen und diese im Sachzusammenhang interpretieren sowie Wendestellen als Stellen mit extremaler Änderungsrate identifizieren.	☐	☐	☐	Beispiel, Seite 27 • S. 36 Nr. 13 • S. 38 Nr. 6 • S. 39 Nr. 3 • S. 39 Nr. 6
6.	Ich kann **Tangenten- Normalengleichungen** an einen Graphen in einem beliebigen Punkt und eine Tangente von außen bestimmen.	☐	☐	☐	Beispiele siehe Hefteintrag • S. 38 Nr. 9

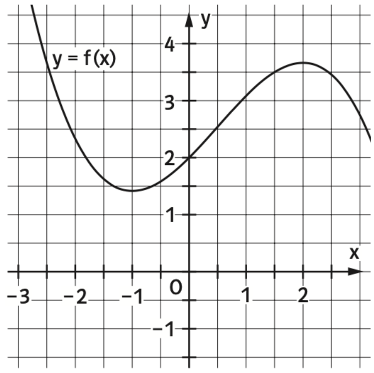
Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse selbst. Die Lösungen finden Sie auf der letzten Seite.

1 Grafisch ableiten

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.

a) Bestimmen Sie näherungsweise $f'(0)$.

b) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f'.



2 Mithilfe der Potenz-, Faktor- und Summenregel ableiten

Bestimmen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$.

a) $f(x) = -3x^3 + 0{,}5x^2 - 6x + 1$ b) $f(x) = \frac{3}{x} - 2\sqrt{x}$ c) $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 4}{x^2}$

3 Funktionen verketten

a) Bilden Sie $u \circ v$ und $v \circ u$ für $u(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ und $v(x) = \frac{1}{x}$.

b) Stellen Sie die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{(2x - 1)^2}$ als Verkettung zweier Funktionen u und v dar.

4 Mithilfe der Kettenregel ableiten

Bestimmen Sie $f'(x)$ und vereinfachen Sie das Ergebnis.

a) $f(x) = (2x^2 - 4)^4$ b) $f(x) = 2\sqrt{1 + x^2}$

5 Mithilfe der Produktregel ableiten

Bestimmen Sie $f'(x)$.

a) $f(x) = (1 - x)\sin(x)$ b) $f(x) = (x + 1)(2x - 1)^3$ c) $f(x) = (2x - 1)\cos(2x)$

6 Monotonieverhalten untersuchen

Bestimmen Sie für die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$ alle Intervalle, auf denen f streng monoton wachsend ist.

7 Krümmungsverhalten untersuchen

Bestimmen Sie die Intervalle, auf denen der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 6x^2 + 2x - 1$ linksgekrümmt ist.

8 Extrem- und Wendepunkte bestimmen

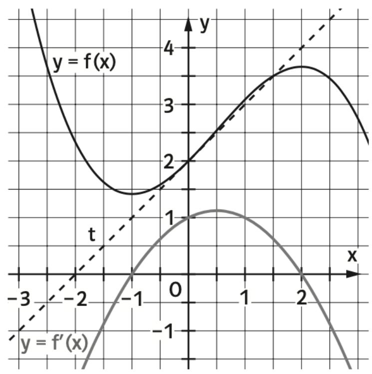
Bestimmen Sie die Extrem- und Wendestellen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 1$. Geben Sie die Extrem- und Wendepunkte des Graphen von f an.

9 Tangente und Normale

a) Stellen Sie die Gleichung der Tangente und Normalen von f mit $f(x) = 4 \cdot \frac{1}{x^2}$ an den Graphen G_f an der Stelle b = 2 auf.

b) Legen Sie vom Punkt P(3|2) aus die Tangenten an den Graphen von f mit mit $f(x) = x^2 - 2x$. Stellen Sie die Gleichung der Tangente auf und nennen Sie den Berührpunkt.

Lösungen



1 a) $f'(0)$ ist gleich der Steigung der Tangente im Punkt $P(0|2)$.
Aus der Zeichnung liest man ab: $f'(0) \approx 1$.
b) Graph von f': vgl. Abbildung

2 a) $f'(x) = -9x^2 + x - 6$; $f''(x) = -18x + 1$

b) $f'(x) = -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$; $f''(x) = \frac{6}{x^3} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

c) $f(x) = x^2 - 2 + \frac{4}{x^2}$; $f'(x) = 2x - \frac{8}{x^3}$; $f''(x) = 2 + \frac{24}{x^4}$

3 a) $(u \circ v)(x) = u(v(x)) = \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1}$; $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

b) $f(x) = u(v(x))$ mit $u(x) = \frac{1}{x}$ und $v(x) = (2x-1)^2$ oder $u(x) = \frac{1}{x^2}$
und $v(x) = 2x - 1$

4 a) $f'(x) = 4(2x^2 - 4)^3 \cdot 4x = 16x(2x^2 - 4)^3$

b) $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

5 a) $f'(x) = -\sin(x) + (1-x)\cos(x)$
b) $f'(x) = (2x-1)^3 + (x+1) \cdot 3(2x-1)^2 \cdot 2 = (2x-1)^2(2x - 1 + 6x + 6) = (2x-1)^2(8x+5)$
c) $f'(x) = 2\cos(2x) - (2x-1)\sin(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x) - 2(2x-1)\sin(2x)$

6 $f'(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$
Nullstellen von f': -2, 0 und 2.
Es ist $f'(x) > 0$ für $x \in (-2; 0)$ und für $x \in (2; \infty)$.

7 $f'(x) = 2x^3 - 12x + 2$; $f''(x) = 6x^2 - 12 = 6(x^2 - 2)$

Es ist $f''(x) > 0$ für $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right)$ und für $x \in \left(\sqrt{2}; \infty\right)$.

8 $f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 = \frac{1}{3}x^2(x-3)$; $f''(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$; $f'''(x) = 2x - 2$

$f'(x) = 0$ liefert $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$. Es ist $f''(3) = 3 > 0$, d.h., x_2 ist eine Minimumstelle.
Wegen $f''(0) = 0$ hat f' hat an der Stelle $x_1 = 0$ keinen Vorzeichenwechsel, d.h., x_1 ist keine Extremstelle.
$f''(x) = 0$ liefert $x_1 = 0$ und $x_3 = 2$. Es ist $f'''(0) = -2 \neq 0$ und $f'''(2) = 2 \neq 0$, d.h., x_1 und x_3 sind Wendestellen.
Der Graph von f hat den Tiefpunkt $T\left(3\middle|-\frac{5}{4}\right)$ sowie die Wendepunkte $W_1(0|1)$ (mit waagerechter Tangente)
und $W_2\left(2\middle|-\frac{1}{3}\right)$.

9 a) t: $y = -\ x + 3$ n: $y = x - 1$
b) $f(u) = u^2 - 2u$ $P(3|2)$
$f'(u) = 2u - 2$
$y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$
$2 = (2u - 2)(3 - u) + u^2 - 2u$
$2 = 6u - 6 - 2u^2 + 2u + u^2 - 2u$
$2 = 6u - u^2 - u$
$-u^2 + 6u - 8 = 0$ ➔ Mitternachtsformel $u_1 = 2$; $u_2 = 4$

$f(2) = 4 - 4 = 0$ $f'(2) = 2$ t_1: $y = 2(x - 2) + 0 = 2x + 4$ $B_1(2\|0)$	$f(4) = 8$ $f'(4) = 6$ t_2: $y = 6(x - 4) + 8 = 6x - 16$ $B_2(4\|8)$