19.9.24

3. Ableitung einer Verkettung von Funktionen (Kettenregel)

Ziel: Regel zur Bestimmung der Ableitung einer Verkettung $f(x) = g(h(x))$.

Einstiegsbeispiel: $f(x) = (3x)^2$ ist eine Verkettung der Funktionen $g(x) = x^2$ und $h(x) = 3x$.

Aufgrund der Potenzregel lässt folgende Ableitung f‘ vermuten: $18x \vee 6x$.

$f(x) = (3x)^2$ ist eine Verkettung, die man aber auch zu $f(x) = (3x)\cdot(3x) = 9x^2$ umformen kann.

Die Ableitung von $f(x) = 9x^2$ lautet: $f'(x) = 18x$.

⇨ Fazit: Verkettung: Potenzregel ist nicht anwendbar.

Aufgabe 1

In der Tabelle werden nur Verkettungen $f(x) = g(h(x))$ untersucht, die man nach Umformen des Funktionsterms mit den schon bekannten Ableitungsregeln ableiten kann.

a) Ergänze die Tabelle. In der rechten Spalte liegt das Problem!

Funktion f als Verkettung	f umgeformt	f‘(x)	Wie ergibt sich f´(x) direkt aus der Verkettung?
$f(x) = g(h(x)) = \mathbf{(3x)^2}$ $g(x) = x^2$; $h(x) = 3x$	$9x^2$	$18x$	$\underline{18x} = ?$ $\quad 2\cdot(3x)^1 = 6x$ ist falsch; Korrekturfaktor? $\cdot 3$
$f(x) = g(h(x)) = \mathbf{(2x)^2}$ $g(x) = x^2$; $h(x) = 2x$	$(2x)\cdot(2x)$ $= 4x^2$	$8x$	$8x = ?$ $2\cdot 2x = 4x$ Korrekturfaktor „$(\cdot 2)$
$f(x) = g(h(x)) = \mathbf{(2x+1)^2}$ $g(x) = x^2$; $h(x) = 2x+1$	$4x^2+4x+1$	$8x+4$	$8x+4 = ?$ $2(2x+1) = (4x+2)\cdot 2$
$f(x) = g(h(x)) = \mathbf{(x^2+1)^2}$ $g(x) = x^2$; $h(x) = x^2+1$	x^4+2x^2+1	$4x^3+4x$	$4x^3+4x = ?$ $2(x^2+1) = (2x^2+2)\cdot 2x$
$f(x) = g(h(x)) = \mathbf{(x-3)^2}$ $g(x) = x^2$; $h(x) = x-3$	x^2-6x+9	$2x-6$	$2x-6 = ?$ $2\cdot(x-3) = (2x-6)\cdot 1$

b) Aus der Tabelle kann man eine Vermutung zur Ableitung einer Verkettung erschließen.

Ergänze die Worte „innere(n)“ bzw. „äußere(n)“. Vermutung:

Leite zunächst die äußere Funktion ab; behandle dabei die innere Funktion als Variable. Multipliziere diesen Term mit der Ableitung der inneren Funktion.

c) Beurteile, ob hier richtig abgeleitet wurde.

$f(x) = (6x + 4)^2$; $f'(x) = 2\cdot(6x+4)\cdot 6$ ☒ richtig ☐ falsch. Korrektur: $f'(x) =$ . . . .

$f(x) = (2x - 4)^3$; $f'(x) = 3\cdot(2x - 4)^2$ ☐ richtig ☒ falsch. Korrektur: $f'(x) = 3\cdot(2x-4)^2\cdot 2$

$f(x) = (2x - 4)^3$; $f'(x) = 3\cdot(2x - 4)\cdot 2$ ☐ richtig ☒ falsch. Korrektur: $f'(x) = 3(2x-4)^2\cdot 2$

$f(x) = (x^2 + 7)^2$; $f'(x) = 2\cdot(x^2 + 7)\cdot 2$ ☐ richtig ☒ falsch. Korrektur: $f'(x) = 2(x^2+7)\cdot 2x$
$= 4x(x^2+7)$

WAS?

Aufgabe 2

a) Die in Aufgabe 1 gefundene Ableitungsregel für Verkettungen heißt **Kettenregel**. Ergänzedie mathematische Formulierung von f´. (Kärtchen dürfen mehrfach verwendet werden!)

h´	(h(x))	(x)	·	g´

Ist f(x) = g(h(x)) eine Verkettung von g und h, dann lautet die Ableitung:

f´(x) = $g'(h(x)) \cdot h'(x)$

„äußere Ableitung" mal „innere Ableitung"

WIE?

b) Leite mit der Kettenregel ab. (Ergänze)

$f(x) = (\sin(x))^2$; $f'(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$

$f(x) = (4x + 1)^{-2}$; $f'(x) = (-2) \cdot (4x + 1)^{-3} \cdot 4$ = (mit Bruchstrich) $\dfrac{-8}{(4x+1)^3}$

$f(x) = \dfrac{1}{3x+5}$ = (ohne Bruchstrich) $(3x+5)^{-1}$; $f'(x) = -3(3x+5)^{-2}$ = (mit Bruchstrich) $\dfrac{-3}{(3x+5)^2}$

S.18/1 abdefh

○ **1** Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = (8x^4 + 2)^3$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{2} - 5x\right)^3$ c) $f(x) = (x + 2)^4$ d) $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 5)^2$

e) $f(x) = (8x - 7)^{-1}$ f) $f(x) = (5 - x)^{-4}$ g) $f(x) = (15x^3 - 3)^{-2}$ h) $f(x) = (15x - 3x^2)^{-2}$

a) $f'(x) = 3(8x^4+2)^2 \cdot 32x^3 = 96x^3(8x^4+2)^2$

b) $f'(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} - 5x\right)^2 \cdot (-5) = -15\left(\frac{1}{2} - 5x\right)^2$

d) $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{4}(x^2-5) \cdot 2x = x(x^2-5)$

e) $f'(x) = (-1) \cdot (8x-7)^{-2} \cdot 8 = -8(8x-7)^{-2}$

f) $f'(x) = -4(5-x)^{-5} \cdot (-1) = 4(5-x)^{-5}$

h) $f'(x) = -2(15x-3x^2)^{-3} \cdot (15-6x)$

Bearbeite folgende Aufgaben &
Kontrolliere dein Ergebnis:

- S. 181
  - 3 b c d, e – i, l
  - 4
  - 6

- Für ALLE, da wichtig:
  Kettenregel mit Parametern

S. 18/3 b c d, e – i, l

○ **3** Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Ableitung von f.

a) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ b) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$ c) $f(x) = \frac{1}{(3x+2)^2}$ d) $f(x) = \frac{1}{3}(x+2)^{-2}$

e) $f(x) = \sqrt{x+3}$ f) $f(t) = \sqrt{3t+1}$ g) $f(x) = \sqrt{5x^2+1}$ h) $f(t) = \sqrt{\frac{2}{t}}$

i) $f(x) = 2\cos(3x)$ j) $f(t) = \sin(5t^3+1)$ k) $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$ l) $f(t) = \frac{1}{\sin(t)}$

✓

S. 181/4

In einigen Lösungen der Aufgaben sind Fehler enthalten. Um welche Aufgaben handelt es sich? Beschreiben Sie die Fehler und korrigieren Sie diese.

A	$f(x) = (x^4+2)^3$	$f'(x) = 4x \cdot (x^4+2)^2$	D	$f(x) = 4\sin(3x)$	$f'(x) = 12\cos(x)$
B	$f(x) = (2x-5)^5$	$f'(x) = 5(2x-5)^4$	E	$f(x) = \sin(x^2)$	$f'(x) = \cos(2x)$
C	$f(x) = \sqrt{2x+1}$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$	F	$f(x) = (x^3-2x)^3+2$	$f'(x) = 3(x^3-2x)^2(3x^2-2)$

✓

S. 18/6

6 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{9}(3x + 2)^3$.

a) Bestimmen Sie die Steigung des Graphen von f im Punkt $P(2|f(2))$.

b) Untersuchen Sie, ob der Graph von f Punkte mit waagerechter Tangente besitzt.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte, an denen die Tangente den Steigungswinkel 45° hat.

✓

Übungen Kettenregel mit Parametern

Leiten Sie ab und vereinfachen Sie das Ergebnis.

a) $f(x) = (ax^3 + 1)^2$ b) $f(x) = \sin(ax^2)$ c) $f(x) = (\sin(ax))^2$ d) $f(x) = \sin(a^2x)$

e) $f(x) = \frac{3a}{1 + x^2}$ f) $f(x) = \sqrt{ax^2 - 3}$ g) $f(a) = \sqrt{ax^2 - 3}$ h) $g(x) = \sqrt{t^2x + 2t}$

10 a) $f'(x) = 2(ax^3 + 1)^1 \cdot 3ax^2 = 6ax^2(ax^3 + 1)$

b) $f'(x) = 2ax\cos(ax^2)$

c) $f'(x) = 2a\sin(ax) \cdot \cos(ax)$

d) $f'(x) = a^2\cos(a^2x)$

e) $f(x) = 3a \cdot (1 + x^2)^{-1}$;

$f'(x) = -3a(1 + x^2)^{-2} \cdot 2x = -\frac{6ax}{(1 + x^2)^2}$

f) $f(x) = (ax^2 - 3)^{\frac{1}{2}}$; $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (ax^2 - 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2ax = \frac{ax}{\sqrt{ax^2 - 3}}$

g) $f(a) = (ax^2 - 3)^{\frac{1}{2}}$;

$f'(a) = \frac{1}{2} \cdot (ax^2 - 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2) = \frac{x^2}{2 \cdot \sqrt{ax^2 - 3}}$

h) $g(x) = (t^2x + 2t)^{\frac{1}{2}}$;

$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot (t^2x + 2t)^{-\frac{1}{2}} \cdot (t^2) = \frac{t^2}{2 \cdot \sqrt{tx^2 + 2t}}$