

3. Ableitung einer Verkettung von Funktionen (Kettenregel)

Ziel: Regel zur Bestimmung der Ableitung einer Verkettung $f(x) = g(h(x))$.

Einstiegsbeispiel: $f(x) = (3x)^2$ ist eine Verkettung der Funktionen $g(x) = x^2$ und $h(x) = 3x$.

Aufgrund der Potenzregel lässt folgende Ableitung f' vermuten: $18x$ ✓ $6x$.

$f(x) = (3x)^2$ ist eine Verkettung, die man aber auch zu $f(x) = (3x) \cdot (3x) = 9x^2$ umformen kann.

Die Ableitung von $f(x) = 9x^2$ lautet: $f'(x) = \underline{18x}$.

⇒ Fazit: Verkettung: Potenzregel ist nicht anwendbar.

Aufgabe 1

In der Tabelle werden nur Verkettungen $f(x) = g(h(x))$ untersucht, die man nach Umformen des Funktionsterms mit den schon bekannten Ableitungsregeln ableiten kann.

a) Ergänze die Tabelle. In der rechten Spalte liegt das Problem!

Funktion f als Verkettung	f umgeformt	$f'(x)$	Wie ergibt sich $f'(x)$ direkt aus der Verkettung?
$f(x) = g(h(x)) = (3x)^2$ $g(x) = x^2; h(x) = 3x$	$9x^2$	$18x$	$18x = ?$ $2 \cdot (3x)^1 = 6x$ ist falsch; Korrekturfaktor? $\cdot 3$
$f(x) = g(h(x)) = (2x)^2$ $g(x) = x^2; h(x) = 2x$	$(2x) \cdot (2x) = 4x^2$	$8x$	$8x = ?$ $2 \cdot 2x = 4x$ Korrekturfaktor $\cdot 2$
$f(x) = g(h(x)) = (2x+1)^2$ $g(x) = x^2; h(x) = 2x+1$	$4x^2 + 4x + 1$	$8x + 4$	$8x + 4 = ?$ $2(2x+1) = (4x+2) \cdot 2$
$f(x) = g(h(x)) = (x^2+1)^2$ $g(x) = x^2; h(x) = x^2+1$	$x^4 + 2x^2 + 1$	$4x^3 + 4x$	$4x^3 + 4x = ?$ $2(x^2+1) = (2x^2+2) \cdot 2x$
$f(x) = g(h(x)) = (x-3)^2$ $g(x) = x^2; h(x) = x-3$	$x^2 - 6x + 9$	$2x - 6$	$2x - 6 = ?$ $2 \cdot (x-3) = (2x-6) \cdot 1$

b) Aus der Tabelle kann man eine Vermutung zur Ableitung einer Verkettung erschließen.

Ergänze die Worte „innere(n)“ bzw. „äußere(n)“. Vermutung:

Leite zunächst die äußere Funktion ab; behandle dabei die innere Funktion als Variable. Multipliziere diesen Term mit der Ableitung der inneren Funktion.

c) Beurteile, ob hier richtig abgeleitet wurde.

$f(x) = (6x + 4)^2; f'(x) = 2 \cdot (6x+4) \cdot 6$

☒ richtig ☐ falsch. Korrektur: $f'(x) = \dots\dots\dots$

$f(x) = (2x - 4)^3; f'(x) = 3 \cdot (2x - 4)^2$

☐ richtig ☒ falsch. Korrektur: $f'(x) = 3 \cdot (2x-4)^2 \cdot 2$

$f(x) = (2x - 4)^3; f'(x) = 3 \cdot (2x - 4) \cdot 2$

☐ richtig ☒ falsch. Korrektur: $f'(x) = 3 \cdot (2x-4)^2 \cdot 2$

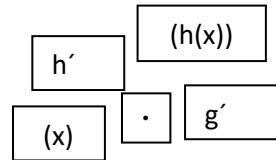
$f(x) = (x^2 + 7)^2; f'(x) = 2 \cdot (x^2 + 7) \cdot 2$

☐ richtig ☒ falsch. Korrektur: $f'(x) = 2 \cdot (x^2+7) \cdot 2x = 4x(x^2+7)$

WAS?

Aufgabe 2

- a) Die in Aufgabe 1 gefundene Ableitungsregel für Verkettungen heißt **Kettenregel**. Ergänze die mathematische Formulierung von f' .
(Kärtchen dürfen mehrfach verwendet werden!)



Ist $f(x) = g(h(x))$ eine Verkettung von g und h , dann lautet die Ableitung:

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

„äußere Ableitung“
mal „innere
Ableitung“

Wie?

- b) Leite mit der Kettenregel ab. (Ergänze)

$$f(x) = (\sin(x))^2; f'(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$f(x) = (4x + 1)^{-2}; f'(x) = (-2) \cdot (4x + 1)^{-3} \cdot 4 = (\text{mit Bruchstrich}) \cdot \frac{-8}{(4x+1)^3} \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{3x+5} = (\text{ohne Bruchstrich}) \cdot (3x+5)^{-1}; f'(x) = -3(3x+5)^{-2} = (\text{mit Bruchstrich}) \cdot \frac{-3}{(3x+5)^2}$$

S. 18/1 a b d e f h

○ 1 Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = (8x^4 + 2)^3$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2} - 5x\right)^3$

c) $f(x) = (x + 2)^4$

d) $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 5)^2$

e) $f(x) = (8x - 7)^{-1}$

f) $f(x) = (5 - x)^{-4}$

g) $f(x) = (15x^3 - 3)^{-2}$

h) $f(x) = (15x - 3x^2)^{-2}$

a) $f'(x) = 3(8x^4 + 2)^2 \cdot 32x^3 = 96x^3(8x^4 + 2)^2$

b) $f'(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} - 5x\right)^2 \cdot (-5) = -15\left(\frac{1}{2} - 5x\right)^2$

d) $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{4}(x^2 - 5) \cdot 2x = x(x^2 - 5)$

e) $f'(x) = (-1) \cdot (8x - 7)^{-2} \cdot 8 = -8(8x - 7)^{-2}$

f) $f'(x) = -4(5 - x)^{-5} \cdot (-1) = 4(5 - x)^{-5}$

h) $f'(x) = -2(15x - 3x^2)^{-3} \cdot (15 - 6x)$

Bearbeite folgende Aufgaben &
kontrolliere dein Ergebnis:

▷ S. 181 □ 3 b c d, e-i, l

□ 4

□ 6

▷ Für ALLE, da wichtig:
Kettenregel mit Parametern

S. 18/3 b c d, e-i, l

○ 3 Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Ableitung von f.

a) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$

b) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$

c) $f(x) = \frac{1}{(3x+2)^2}$

d) $f(x) = \frac{1}{3}(x+2)^{-2}$

e) $f(x) = \sqrt{x+3}$

f) $f(t) = \sqrt{3t+1}$

g) $f(x) = \sqrt{5x^2+1}$

h) $f(t) = \sqrt{\frac{2}{t}}$

i) $f(x) = 2\cos(3x)$

j) $f(t) = \sin(5t^3+1)$

k) $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$

l) $f(t) = \frac{1}{\sin(t)}$



S. 18/4

In einigen Lösungen der Aufgaben sind Fehler enthalten. Um welche Aufgaben handelt es sich? Beschreiben Sie die Fehler und korrigieren Sie diese.

A $f(x) = (x^4 + 2)^3$ $f'(x) = 4x \cdot (x^4 + 2)^2$

B $f(x) = (2x - 5)^5$ $f'(x) = 5(2x - 5)^4$

C $f(x) = \sqrt{2x+1}$ $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

D $f(x) = 4 \sin(3x)$ $f'(x) = 12 \cos(x)$

E $f(x) = \sin(x^2)$ $f'(x) = \cos(2x)$

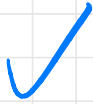
F $f(x) = (x^3 - 2x)^3 + 2$ $f'(x) = 3(x^3 - 2x)^2(3x^2 - 2)$



S. 18/6

6 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{9}(3x + 2)^3$.

- Bestimmen Sie die Steigung des Graphen von f im Punkt $P(2 | f(2))$.
- Untersuchen Sie, ob der Graph von f Punkte mit waagerechter Tangente besitzt.
- Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte, an denen die Tangente den Steigungswinkel 45° hat.



Übungen Kettenregel mit Parametern

Leiten Sie ab und vereinfachen Sie das Ergebnis.

a) $f(x) = (ax^3 + 1)^2$

b) $f(x) = \sin(ax^2)$

c) $f(x) = (\sin(ax))^2$

d) $f(x) = \sin(a^2x)$

e) $f(x) = \frac{3a}{1+x^2}$

f) $f(x) = \sqrt{ax^2 - 3}$

g) $f(a) = \sqrt{ax^2 - 3}$

h) $g(x) = \sqrt{t^2x + 2t}$

10 a) $f'(x) = 2(ax^3 + 1)^1 \cdot 3ax^2 = 6ax^2(ax^3 + 1)$

b) $f'(x) = 2ax \cos(ax^2)$

c) $f'(x) = 2a \sin(ax) \cdot \cos(ax)$

d) $f'(x) = a^2 \cos(a^2x)$

e) $f(x) = 3a \cdot (1 + x^2)^{-1};$

$$f'(x) = -3a(1 + x^2)^{-2} \cdot 2x = -\frac{6ax}{(1 + x^2)^2}$$

f) $f(x) = (ax^2 - 3)^{\frac{1}{2}}; f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (ax^2 - 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2ax = \frac{ax}{\sqrt{ax^2 - 3}}$

g) $f(a) = (ax^2 - 3)^{\frac{1}{2}};$

$$f'(a) = \frac{1}{2} \cdot (ax^2 - 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2) = \frac{x^2}{2 \cdot \sqrt{ax^2 - 3}}$$

h) $g(x) = (t^2x + 2t)^{\frac{1}{2}};$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot (t^2x + 2t)^{-\frac{1}{2}} \cdot (t^2) = \frac{t^2}{2 \cdot \sqrt{t^2x + 2t}}$$