پروژه‌ی درس آمار و احتمال مهندسی

مقدمه‌ای بر تئوری صف

استاد درس: دکتر محمدمهدی مجاهدیان

فرنوش چوگانی ۴۰۲۱۰۰۶۹۱

محمدرضا آجورلو ۴۰۲۱۰۱۱۵۸

دانشکده‌ی مهندسی برق

دانشگاه صنعتی شریف

دی ماه ۱۴۰۳

پاسخ پرسش تئوری ۱:

اگر $\lambda > \mu$ باشد، یعنی نرخ متوسط ورود کارها به سرور از نرخ خدمت دهی متوسط بیشتر است یعنی صف ها طولانی تر می شوند.

پاسخ پرسش تئوری ۲:

C نمایانگر کل کارهایی است که در مدت زمان T در دستگاه i به اتمام رسیده اند B مدت زمانی است که دستگاه در طول دوره مشاهده مشغول کار بوده است $\frac{C}{B}$ نمایانگر کل کارهایی است که دستگاه در مدت زمانی که مشغول کار بوده است انجام داده است.

پاسخ پرسش تئوری ۳:

متوسط تعداد کارها در یک سیستم برابر است با متوسط زمان پاسخ یک کار ضربدر نرخ ورود متوسط کارها به سرور و همچنین چون سیستم بسته است N ثابت می ماند.

پاسخ پرسش تئوری ۴:

می دانیم که λ تعداد کارها در ثانیه است و μ نرخ خدمت دهی متوسط است و می دانیم که ρ بهره سیستم می باشد پس یعنی برابر است با تعداد کارهایی که در ثانیه به سیستم وارد می شود تقسیم بر نرخ خدمت دهی متوسط. یعنی به عبارتی داریم : $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

پاسخ پرسش تئوری ۵:

$$E[T] = E[R] + E[Z] = ۱۵ + ۵ = ۲۰,\ N = XE[T] \quad \rightarrow \quad X = ۰/۵$$

پاسخ پرسش تئوری ۶:

(a)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda E[S], \quad \lambda = X_۳ \quad \rightarrow \quad \rho = ۴۰ \times ۰/۰۲۲۵ = ۰/۹$$

(b)

$$E[TQ_۳] = E[T_۳] - E[S_۳], \quad E[T_۳] = \frac{E[N]}{X} = \frac{۴}{۴۰} = ۰/۱ \quad \rightarrow \quad E[TQ_۳] = ۰/۱ - ۰/۰۲۲۵ = ۰/۰۷۷۵$$

(c)

$$\bar{N}_Q = X\bar{T}_Q \quad \rightarrow \quad \bar{N}_Q = ۴۰ \times ۰/۰۷۷۵ = ۳/۱ \quad \rightarrow \quad E[\bar{N}_Q] = ۳/۱$$

(d)

$$E(Z) = \frac{۷/۵}{۱۰} = ۰/۷۵$$

(e) توان عملیاتی سیستم را می توان با فرمول $\frac{N}{E[T]}$ محاسبه کرد یعنی تعداد کل کاربران در سیستم تقسیم بر میانگین زمان چرخش یک کار در سیستم.

پاسخ پرسش تئوری ۷:

$$E[V_b] = \frac{۱۰۰}{۱۸۱} \times ۱۰ \qquad E[V_a] = \frac{۸۰}{۱۸۱} \times ۱۰ \qquad E[V_{\text{cpu}}] = \frac{۱۰}{۱۸۱}$$

پاسخ پرسش تئوری ۸:

$$E[T] = \frac{E[N_{\text{central}}]}{X} = \frac{N - E[N_{getmemory}]}{X} = \frac{۱۱/۳۵}{۰/۴۵} = ۲۵/۲۲$$

پاسخ پرسش تئوری ۹:

$$\begin{aligned} E[D_i] &= E\left[\sum_{j=۱}^{v_i} S_i^{(j)}\right] \\ S_i^{(j)} &\sim \text{i.i.d.} \quad \rightarrow \quad E[S_i^{(j)}] = E[S_i] \\ E[D_i] &= \sum_{j=۱}^{v_i} E[S_i] = v_i \times E[S_i] = E[v_i] \times E[S_i] \end{aligned}$$

پاسخ پرسش تئوری ۱۰:

بهره دستگاه برابر است با تقاضای دستگاه در توان عملیاتی دستگاه یعنی تعداد کل کاری که دستگاه انجام می دهد در مجموع زمانی که یک کار در دستگاه پردازش شده برابر است با بهره دستگاه.

پاسخ پرسش تئوری ۱۲:

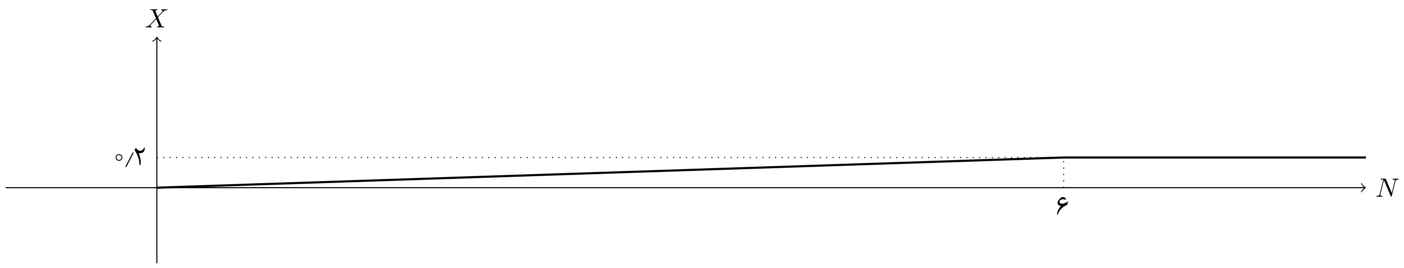
$$D_{\max} = ۵ \quad D_{\text{total}} = ۱۲ \quad \frac{N}{D + E[Z]} = \frac{N}{۳۰}$$
$$X \leq \min\left(\frac{N}{۳۰}, ۰/۲\right)$$
$$E[R] \geq \max\left(۱۲, ۵N - ۱۸\right)$$

برای X:

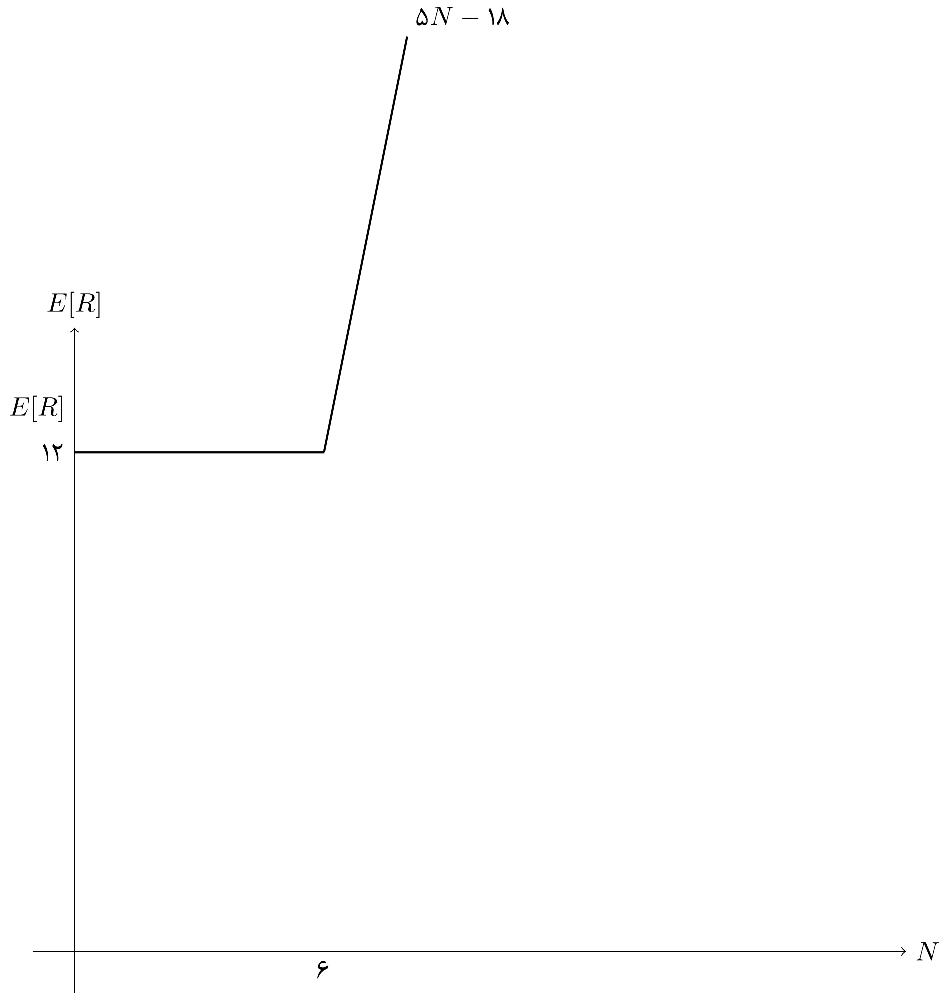
$$X \leq \begin{cases} \frac{N}{۳۰} & N < ۶ \\ ۰/۲ & N \geq ۶ \end{cases}$$

برای $E[R]$:

$$E[R] \geq \begin{cases} ۱۲ & N < ۶ \\ ۵N - ۱۸ & N \geq ۶ \end{cases}$$



به ازای N های بزرگ مقدار کران بالای X ثابت می ماند.



به ازای N های بزرگ کران پایین $E[R]$ افزایش می یابد.

پاسخ پرسش تئوری ۱۳:

$$D = \sum_{i=۱}^{m} E[D_i] = \sum_{i=۱}^{m} E[\sum_{j=۱}^{v_i} s_i^{(j)} = \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{v_i} E[s_i]$$

$$D_a = ۰/۵ \times ۳ + ۰/۵ \times ۳ = ۳ \quad D_{\max} = ۳$$
$$D_b = ۰/۵ \times ۲ + ۰/۵ \times ۳ = ۲/۵ \quad D_{\max} = ۳$$

پاسخ پرسش تئوری ۱۴ :

$$\frac{N}{E[R]+E[Z]} \quad E[R] = D_{\text{cpu}} + D_{\text{disk}} \quad \rightarrow \quad \frac{۲۰}{E[R]+۵}$$
$$X_۱ \leq \min(۱/۴۷, ۰/۲۱) \quad X_۱ \leq ۰/۲۱, \quad X_۲ \leq \min(۱/۶۹, ۰/۲) \quad X_۲ \leq ۰/۲$$

کران بالای توان عملیاتی سیستم ۱ با اختلاف کمی از سیستم ۲ بیشتر است.

پاسخ پرسش تئوری ۱۶:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq ۰ \\ ۰, & x < ۰ \end{cases}$$
$$E[X] = \int_۰^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx \quad E[X] = \frac{۱}{\lambda}$$
$$E[X^۲] = \int_۰^{\infty} x^۲ \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx \quad E[X^۲] = \frac{۲}{\lambda^۲}$$
$$\text{Var}(X) = E[X^۲] - (E[X])^۲$$
$$\text{Var}(X) = \frac{۲}{\lambda^۲} - \left(\frac{۱}{\lambda}\right)^۲ = \frac{۱}{\lambda^۲}$$
$$E[X] = \frac{۱}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{۱}{\lambda^۲}$$

پاسخ پرسش تئوری ۱۷:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$P(X > s + t \mid X > t) = \frac{P(X > s + t)}{P(X > t)}$$

$$P(X > s + t) = e^{-\lambda(s+t)}, \quad P(X > s) = e^{-\lambda s}$$

$$P(X > s + t \mid X > t) = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$

$$P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s)$$

پاسخ پرسش تئوری ۱۸:

برای $n = 2$ داریم:

$$T_1 \sim \exp(\lambda_1), \quad T_2 \sim \exp(\lambda_2)$$

$$T^* = \min(T_1, T_2)$$

$$P(T^* \leq t) = 1 - P(T^* > t)$$

$$P(T^* > t) = P(T_1 > t, T_2 > t) = P(T_1 > t)P(T_2 > t)$$

$$P(T_1 > t) = e^{-\lambda_1 t}, \quad P(T_2 > t) = e^{-\lambda_2 t}$$

$$P(T^* > t) = e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

$$F_{T^*}(t) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

$$f_{T^*}(t) = \frac{dF_{T^*}(t)}{dt} = (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

$$T^* \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$\min(T_1, T_2, \ldots, T_n) \sim \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

$$\min(T_1, T_2, \dots, T_k, T_{k+1}) = S_{k+1} \quad \Rightarrow \quad \min(S_k, T_{k+1}) = S_{k+1}$$

$$S_k \sim \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)$$

$$S_{k+1} = \min(S_k, T_{k+1}) \sim \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \lambda_{k+1}\right)$$

این نتیجه برای هر n برقرار است، بنابراین:

$$\min(T_1, T_2, \dots, T_n) \sim \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

پاسخ پرسش تئوری ۱۹:

$$T_1 \sim \exp(\lambda_1), \quad T_2 \sim \exp(\lambda_2)$$

$$P(X_1 < X_2) = \int_0^{\infty} P(X_1 < X_2 \mid X_2 = x) f_{X_2}(x)\, dx$$

$$P(X_1 < X_2) = \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-\lambda_1 x}\right) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\, dx$$

$$P(X_1 < X_2) = \int_0^{\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\, dx - \lambda_2 \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_2+\lambda_1)x}\, dx = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

پاسخ پرسش تئوری ۲۰:

$$P(Z \leq x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x)$$

$$P(Z \leq x) = P(X_1 \leq x) P(X_2 \leq x) \dots P(X_n \leq x)$$

$$F_Z(x) = F_{X_1}(x) F_{X_2}(x) \dots F_{X_n}(x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x) = [F_X(x)]^n$$

$$F_Z(x) = (1 - e^{-\lambda x})^n$$

$$f_Z(x) = \frac{d}{dx} F_Z(x)$$

$$f_Z(x) = n(1 - e^{-\lambda x})^{n-1} \lambda e^{-\lambda x}$$

$$E[Z] = \int_0^\infty z f_Z(z)\, dz = \int_0^\infty zn(1 - e^{-\lambda z})^{n-1} \lambda e^{-\lambda z}\, dz$$

$$E[Z] = \int_0^1 \frac{-n}{\lambda} \frac{ln(1-u)}{\lambda} (u)^{n-1}\, du = \frac{-n}{\lambda^2} \int_0^1 \ln(1-u)(u)^{n-1}\, du$$

پاسخ پرسش تئوری ۲۱:

$$X \sim \exp(\lambda_x), \quad Y \sim \exp(\lambda_y), \quad X \perp Y$$

$$Z = \min\{X, Y\}$$

$$P[X > t \mid X < Y] = \frac{P[X > t, X < Y]}{P[X < Y]}$$

$$p(X > t, X < Y) = \int_t^\infty P(Y > x) f_X(x)\, dx$$

$$= \int_t^\infty e^{-\lambda_y x} \lambda_x e^{-\lambda_x x}\, dx$$

$$= \int_t^\infty \lambda_x e^{-(\lambda_x + \lambda_y)x}\, dx$$

$$= \frac{\lambda_x}{\lambda_x + \lambda_y} e^{-(\lambda_x + \lambda_y)t}$$

از سوال ۱۹ می دانیم $\quad p(X < Y) = \frac{\lambda_x}{\lambda_x + \lambda_y}$

$$P[X > t \mid X < Y] = \frac{\lambda_x}{\lambda_x + \lambda_y} e^{-(\lambda_x+\lambda_y)t}$$

$$Z = \min\{X, Y\} \implies P(Z > t) = e^{-(\lambda_x+\lambda_y)t}$$

$$P(Z > t) = P(X > t \mid X < Y)$$

پاسخ پرسش تئوری ۲۲:

$$X \sim \text{poisson}(\lambda)$$

$$P(X = n) = \lambda^n \times \frac{e^{-\lambda}}{n!} \qquad E[X] = \lambda$$

$$E[X(X-1)] = E[X^2] - E[X] = \lambda(\lambda+1) - \lambda = \lambda^2$$

$$E[X(X-1)(X-2)] = E[X^3] - 3E[X^2] + 2E[X] = \lambda^3$$

$$X(X-1)(X-2)...(X-k+1) = (X)_k$$

طبق جملات بالا برای $k = 2$ و $k = 3$ و با استقرا ثابت می شود: $E[(X)_k] = \lambda^k$

پاسخ پرسش تئوری ۲۳ :

$$X_i \sim \text{Poi}(\lambda_i)$$

می دانیم برای دو متغیر تصادفی داریم: $X_1 + X_2 \sim Poi(\lambda_1 + \lambda_2)$

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} = S_{n-1}$$

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = S_n \quad \Rightarrow \quad S_{n-1} + X_n \sim \text{Poi}(\lambda(S_{n-1}) + \lambda_n)$$

به همین ترتیب با دوتا دوتا گرفتن متغیر ها داریم :

$$\lambda(S_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i$$

$$S_{n-۱} + X_n \sim \text{Poi}\left(\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i\right)$$

$$\Rightarrow S_n \sim \text{Poi}\left(\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i\right)$$

$$\Rightarrow X_۱ + X_۲ + \cdots + X_n \sim Poi(\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i)$$

پاسخ پرسش تئوری ۲۴:

$$\lambda = \frac{n}{T}$$

$$X \sim \text{Poi}(\lambda\tau), \quad p = \frac{\tau}{T} = \frac{\lambda\tau}{n}$$

A**: وجود** k **نقطه در بازه** τ

$$P(A) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (۱ - p)^{n-k}$$

$$P(A) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda\tau}{n}\right)^k \left(۱ - \frac{\lambda\tau}{n}\right)^{n-k}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda\tau}{n}\right)^k \left(۱ - \frac{\lambda\tau}{n}\right)^{n-k}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(A) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(۱ - \frac{\lambda\tau}{n}\right)^{n-k}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(A) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-(\lambda\tau)}$$

$$X \sim \text{Poi}(\lambda\tau)$$

پاسخ پرسش تئوری ۲۵:

$$X_i \sim X_i \quad \text{for} i = ۲, ۳, \ldots, n - ۱$$

$$N(t) \sim \text{Poi}(\lambda t)$$

تابع توزیع تجمعی متغیر D به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_D(d) = \lambda e^{-\lambda d}$$

احتمال اینکه هیچ نقطه‌ای در یک بازه به طول d وجود نداشته باشد:

$$P(D > d) = P(\text{هیچ نقطه ای در بازه ای به طول } d \text{نباشد})$$

که برابر است با:

$$P(D > d) = P(N(d) = ۰) = e^{-\lambda d}$$

در نتیجه تابع توزیع تجمعی به صورت زیر است:

$$F_D(d) = P(D \leq d) = ۱ - P(D > d) = ۱ - e^{-\lambda d}$$

تابع چگالی احتمال:

$$f_D(d) = \frac{d}{dd} F_D(d) = \lambda e^{-\lambda d}$$

پس:

$$D \sim \text{Exp}(\lambda)$$

پاسخ پرسش تئوری ۲۶:

$$N(t) = N_۱(t) + N_۲(t)$$

$$P(N(t) = k) = \sum_{i=۰}^{k} P(N_۱(t) = i) P(N_۲(t) = k - i)$$

$$P(N_۱(t) = i) = \frac{(\lambda_۱ t)^i e^{-\lambda_۱ t}}{i!}, \quad P(N_۲(t) = k - i) = \frac{(\lambda_۲ t)^{k-i} e^{-\lambda_۲ t}}{(k - i)!}$$

$$P(N(t) = k) = \sum_{i=۰}^{k} \frac{(\lambda_۱ t)^i e^{-\lambda_۱ t}}{i!} \cdot \frac{(\lambda_۲ t)^{k-i} e^{-\lambda_۲ t}}{(k - i)!}$$

$$P(N(t)=k)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\cdot\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(\lambda_1 t)^i(\lambda_2 t)^{k-i}$$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(\lambda_1 t)^i(\lambda_2 t)^{k-i}=(\lambda_1 t+\lambda_2 t)^k$$

$$P(N(t)=k)=\frac{\big((\lambda_1+\lambda_2)t\big)^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{k!}$$

$$\Rightarrow N(t)\sim Poi(\lambda_1+\lambda_2)$$

پاسخ پرسش تئوری ۲۷:

$$P(0,a)=P(N(a)=0)=e^{-\lambda a}$$

$$P(a,t)=P(N(t)-N(a)=0)=e^{-\lambda(t-a)}$$

$$P(0,t)=P(N(a)=0\,|\,P(N(t)-N(a)=1)+P(N(a)=1\,|\,N(t)-N(a)=0)$$

$$P(N(t)=1)=\lambda e^{-\lambda t}$$

$$\lambda e^{-\lambda(t-a+a)}=\lambda e^{-\lambda t}$$

پس به a بستگی ندارد و با احتمال یکسان در هر ناحیه رخ می دهد.

پاسخ پرسش تئوری ۲۸:

$$E(T\,|\,T\geq c)=\frac{\int_c^\infty tf_T(t)\,dt}{P(T\geq c)}=c+\frac{1}{\lambda}$$

$$P(T\geq c)=\int_c^\infty \lambda e^{-\lambda t}dt=-e^{-\lambda t}\Big|_c^\infty=e^{-\lambda c}$$

$$\int_c^\infty te^{-\lambda t}dt=\left(\frac{c+1/\lambda}{\lambda}\right)e^{-\lambda c}$$

$$E(T\,|\,T<c)=\frac{\int_0^c tf_T(t)\,dt}{P(T<c)}$$

$$P(T<c)=\int_0^c \lambda e^{-\lambda t}dt=-e^{-\lambda t}\Big|_0^c=1-e^{-\lambda c}$$

$$\int_0^c tf_T(t)\,dt=-te^{-\lambda t}\Big|_0^c-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\Big|_0^c=\frac{1}{\lambda}-\left(c+\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda c}$$

خب حالا از دو روش محاسبه می کنیم.

$$E(T\,|\,T<c)=\frac{\frac{۱}{\lambda}-\left(c+\frac{۱}{\lambda}\right)e^{-\lambda c}}{۱-e^{-\lambda c}}$$

$$\frac{۱}{\lambda}=۱-e^{-\lambda c}\times E(T\,|\,T<c)+e^{-c\lambda}\times\frac{(c+\frac{۱}{\lambda})e^{-\lambda c}}{e^{-\lambda c}}$$

$$\Rightarrow E(T\,|\,T<c)=\frac{\frac{۱}{\lambda}-\left(c+\frac{۱}{\lambda}\right)e^{-\lambda c}}{۱-e^{-\lambda c}}$$

پاسخ پرسش تئوری ۲۹:

$$J=\min(j|t_j>c)$$

هر t_j که داریم از توزیع نمایی پیروی می کند

$$f_{tj}=\lambda e^{-\lambda t_j},\quad t\geq \circ$$

$$P(t_j>c)=\int_c^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}dt=e^{-\lambda c}$$

$$E(t_j<c)=۱-e^{-\lambda c}$$

می دانیم که J یک متغیر تصادفی هندسی است پس:

$$P(J=j)=(۱-e^{-\lambda c})^{j-۱}\times e^{-\lambda c}$$

J تعداد رخداد هایی است که t_i تا $t_{i+۱}$ کمتر از c باشند و t_j بیشتر از c باشد

خب $T_{j-۱}$ مجموع $j-۱$ تا t مستقل است یعنی :

$$T_{j-۱}=t_۱+t_۲+t_۳+\cdots+t_{j-۱}$$

و چون $T_{j-۱}$ با t_j مستقل هستند پس :

$$E[T_{j-۱}]=E[j-۱]\times E[t]$$

$$E[j-۱]=E[j]-۱=\frac{۱}{e^{-\lambda c}}-۱$$

$$\Rightarrow E[T_{j-۱}]=(\frac{۱}{e^{-\lambda c}}-۱)\times\frac{۱}{\lambda}$$

$$E[T_{j+۱} + c] = \frac{e^{\lambda c} - ۱}{\lambda}$$

پاسخ پرسش تئوری ۳۰:

ماتریس احتمال انتقال به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} ۰/۹۵ & ۰/۰۵ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

چون وقتی دستگاه جدید جایگزین شود حتما باید کار کند پس احتمال اینکه از حالت خراب به حالت کارکردن برود ۱ است.

پاسخ پرسش تئوری ۳۱:

P_{ij}^{n} نشان دهنده این است که با چه احتمالی ما بعد از m مرحله به کدام استیت می رویم.

$$P^{۴} = \begin{bmatrix} ۰/۳ & ۰/۷ \\ ۰/۲ & ۰/۸ \end{bmatrix}$$

مثلا در این ماتریس اگر ما در استیت ۱ باشیم با احتمال ۰/۳ بعد از ۴ مرحله به استیت ۱ می رسیم و با احتمال ۰/۷ به استیت ۲ می رسیم.

پاسخ پرسش تئوری ۳۲:

چون وقتی n خیلی بزرگ می شود تاثیر اینکه ما ازکدام استیت شروع کردیم خیلی کم می شود به همین خاطر احتمال اینکه از استیت ۱ به ۲ برویم با اینکه از استیت ۲ به ۳ برویم در $n \to \infty$ یکسان می شود. البته به شرطی که از هر استیت به استیت دیگر راهی وجود داشته باشد چون در غیر این صورت اگر مثلا یک دو راهی وجود داشته باشد که قابل رفتن از این یکی به آن یکی نباشد چنین فرضی برقرار نیست.

پاسخ پرسش تئوری ۳۳:

اینکه در کدام زیر مارکوف قرار می گیریم خیلی مهم است یعنی وقتی بین a و b مسیری وجود ندارد خیلی مهم است که در کدام زیر مارکوف چین قرار گرفته ایم چون کل ادامه ی مسیر را مشخص می کند و مارا به دو مسیر متفاوت میفرستد. خب اگر هیچ عضوی وجود نداشته باشد می توانیم از هرکدام از حالت ها به هر حالت برویم. در نتیجه: اگر زنجیره مارکوف تقلیل ناپذیر نباشد فضای حالت ممکن است به چندین زیرمجموعه جدا تقسیم شود که زنجیر نمی تواند از یکی به یکی دیگر حرکت کند. در این صورت می تواند خیلی به شرایط اولیه وابسته باشد زیرا مسیر زنجیره تنها به زیرمجموعه ای از فضای حالت محدود می شود.

پاسخ پرسش تئوری ۳۴:

$$M_n = \max\{\|P^n e_j\|\}$$

$$m_n = \min\{\|P^n e_j\|\}$$

$$P^n e_j = P \times P^{n-۱} e_j$$

درایه i بردار $P^n e_j$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$[P^n e_j]_i = \sum_k p_{ik} \cdot \left(P^{n-۱} e_j\right)_k$$

از دو طرف تساوی ماکزیمم می گیریم.

$$M_n = \max \sum_k p_{ik} \cdot \left(P^{n-۱} e_j\right)_k$$

از آنجایی که $P_{ik} > ۰$ و مجموع درایه های هر سطر برابر ۱ است پس M_n تو سط بزرگترین مقدار $(P^{n-۱} e_j)_k$ توان دار می شود

$$(P^{n-۱} e_j)_k \leq M_{n-۱}$$

$$M_n \leq \sum_k P_{ik} \cdot M_{n-۱}$$

$$\Rightarrow M_n \leq \delta \cdot m_{n-۱} + (۱ - \delta) \cdot M_{n-۱}$$

می توانیم به جای $\sum_k P_{ik} \cdot M_{n-۱}$ از عبارت بالا استفاده کنیم یعنی کوچکترین سهم را برای $m_{n-۱}$ بگذاریم و بیشتر سهم را برای $M_{n-۱}$ بگذاریم.

پاسخ پرسش تئوری ۳۵:

$$M_n \leq \delta \cdot m_{n-۱} + (۱ - \delta) \cdot M_{n-۱}$$

$$m_n > \delta \cdot M_{n-۱} + (۱ - s) m_{n-۱}$$

$$M_n - m_n \leq (۱ - ۲s)\big(M_{n-۱} - m_{n-۱}\big)$$

که نامساوی چگونگی اختلاف بین بزرگترین و کوچکترین درایه را در هر توان(مرحله) نشان می دهد و توصیف می کند.

δ سه حالت دارد. الف) $۰٫۵ > \delta$. به صورت هندسی و به آرامی کاهش می یابد ب) $۰٫۵ < \delta$ باعث واگرایی و افزایش اخلاف می شود

ج) $۰٫۵ = \delta$ می بینیم که $۰٫۵ < \delta$ شود باعث واگرایی و افزایش اختلاف می شود پس ماکزیمم مقدار δ همان $\frac{۱}{۲}$ است که باعث واگرایی نشود.

پاسخ پرسش تئوری ۳۶:

$$n = \alpha \cdot n_۱ + \beta \cdot n_۲ \qquad \alpha, \beta \in N$$

اگر $n_۱$ و $n_۲$ نسبت به هم اول باشند آنگاه تمام اعداد صحیح بزرگتر مساوی $(n_۱ - ۱)$ و $(n_۲ - ۱)$ را می توان به صورت ترکیب خطی از $n_۱$ و $n_۲$ با ضرایب طبیعی بیان شود.

پس هر $n\prime = (n_۱ - ۱)(n_۲ - ۱)$ به ازای هر $n > n\prime$ می توان به صورت $n = \alpha \cdot n_۱ + \beta \cdot n_۲ \qquad \alpha, \beta \in N$ نوشت.

در صورتی که یکی از ضرایب αو β منفی باشد مقدار مناسبی از $n_۱$ و $n_۲$ را به ترکیب اضافه یا از ان کم می کینم تا ضریب مثبت شود.

پاسخ پرسش تئوری ۳۷:

$$\pi_۰ \times r = \pi_۱ \times s$$

$$\pi_۱ \times r = \pi_۲ \times s$$

$$\vdots$$

$$\pi_{i+۱} = \left(\frac{r}{s}\right) \pi_i$$

$$\pi_{i+۱} = \left(\frac{r}{s}\right)^i \pi_۱ = \left(\frac{r}{s}\right)^{i+۱} \pi_۰$$

$$\sum_{i=۰}^{\infty} \pi_i = \pi_۰ + \pi_۱ + \pi_۲ \ldots = ۱$$

$$\pi_۰ + \frac{r}{s}\pi_۰ + \left(\frac{r}{s}\right)^۲ \pi_۰ + \ldots = ۱$$

$$\pi_۰ \left(۱ + \frac{r}{s} + \left(\frac{r}{s}\right)^۲ + \ldots\right) = ۱$$

$$\text{جمع سری هندسی :} \qquad \sum_{n=۰}^{\infty} x^n = \frac{۱}{۱ - x} \quad \text{for} |x| < ۱$$

$$\pi_۰ \times \frac{۱}{۱ - \frac{r}{s}} = ۱$$

$$\pi_\circ = ۱ - \frac{r}{s}$$

$$\pi_i = \left(\frac{r}{s}\right)^i \times \left(۱ - \frac{r}{s}\right)$$

پاسخ پرسش تئوری ۳۸:

$$E[L] = \sum_{i=\circ}^{\infty} i\,\pi_i$$

$$\pi_i = \left(\frac{r}{s}\right)^i \left(۱ - \frac{r}{s}\right)$$

$$E[L] = \left(۱ - \frac{r}{s}\right) \sum_{i=\circ}^{\infty} i \left(\frac{r}{s}\right)^i$$

$$\sum_{i=\circ}^{\infty} i \left(\frac{r}{s}\right)^i = \frac{\frac{r}{s}}{\left(۱ - \frac{r}{s}\right)^۲} \quad \text{جمع سری هندسی}$$

$$E[L] = \left(۱ - \frac{r}{s}\right) \cdot \frac{\frac{r}{s}}{\left(۱ - \frac{r}{s}\right)^۲}$$

$$E[L] = \frac{\frac{r}{s}}{۱ - \frac{r}{s}}$$

$$E[L] = \frac{r}{s - r}$$

پاسخ پرسش تئوری ۳۹:

اگر j بازگشتی باشد آنگاه $f_j = ۱$ و اگر j گذرا باشد آنگاه $f_j < ۱$

P_i^n : احتمال حضور زنجیره در حالت i در زمان n با فرض شروع از i

$$E[\text{تعداد بازدید از حالت گذرا}i] = \sum_{n=\circ}^{\infty} P_i^n = \frac{۱}{۱ - P_i} \quad |P_i| < ۱$$

$$\Rightarrow E[\text{تعداد بازدید از حالت گذرا}i] = \frac{1}{1-P_i}$$

پاسخ پرسش تئوری ۴۰:

در حالت بازگشتی احتمال بازگشت به حالت i برابر با ۱ و احتمال ماندن در همان حالت به P_i وابسته است . چون حالت بازگشتی است مجموع بازدید ها بی نهایت است.

پاسخ پرسش تئوری ۴۱:

$$E[i] = \sum_{n=0}^{s} p_{ii}^n$$

$E[i]$ نشان دهنده میانگین تعداد بازدید از حالت i است و همچنین P_{ii}^n احتمال بودن در حالت i در مرحله n است. می دانیم احتمال بودن در استیتi در مرحله n برابر است با P_{ii}^n پس تعداد کل بازدید ها از حالت i از بازه زمانی $n=0$ تا $n=s$ برابر است با $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^n$. این رابطه مقدار میانگین بازدید در یک بازه زمانی محدود را محاسبه می‌کند.

$$E[i] = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n$$

$E[i]$ در اینجا میانگین تعداد کل بازدید ها از حالت i در طول زمان $n \to \infty$ است. اگر حالت i بازگشتی باشد: احتمال بازگشت به حالت i برابر با یک است و جمع $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n$ ممکن است به بی نهایت میل کند. اگر حالت i گذرا باشد: احتمال بازگشت به حالت i کمتر از یک است و P_{ii}^n به مرور زمان به صفر میل می کند در این صورت جمع فوق به یک مقدار محدود همگرا می شود.

احتمال بازگشت به حالت i برابر با f_{ii} است:

$$f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^n \qquad E[i] = 1 + f_{ii}E[i]$$

$$E[i](1-f_{ii}) = 1 \Rightarrow E[i] = \frac{1}{1-f_{ii}}$$

اااین رابطه نشان می هد که $E[i] = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n$ تعداد کل بازدید ها از حالت i را بیان می کند.

پاسخ پرسش تئوری ۴۲:

اگر $i \leftrightarrow j$ و i بازگشتی باشد آنگاه j نیز بازگشتی است

P_{ij}: احتمال بازگشت به i بعد از خروج از آن

P_{jj}: احتمال بازگشت به j بعد از خروج از ان

حالت i بازگشتی است اگر $f_{ii} = 1$

از فرض $i \leftrightarrow j$هر مسیر که از i به j وجود دارد یک مسیر برگشت از j به i نیز وجود دارد

$P(i \to j)$: احتمال رسیدن از i به j

$P(j \to i)$: احتمال رسیدن ازj به i

$$f_{jj} \geq P(i \to j) \cdot P(j \to i)$$

بنابراین $f_{jj} = ۱$.است و بازگشتی است

پاسخ پرسش تئوری ۴۳:

حد مقابل به معناست که هیچ حالتی برای سیستم وجود نداره که احتمال باقی ماندن در ان پس از n مرحله غیر صفر باشد

پس چنین سیستمی توزیع ایستا نمی تواند وجود داشته باشد چون در زنجیره ی گذر هیچ توزیع ثابتی وجود ندارد.

اگر زنجیر مارکوف غیر متناوب باشد هم تقلیق ناپذیر باشد برای برخی حالات راه برگشتی وجود ندارد و سیستم به طور داعم در حالت های خاص حرکت می کند این خاصیت باعث می شود احتمال انتقال به باقی حالا صفر باشد و درنتیجه هیچ توزیع ایستا وجود نخواهد داشت.

پاسخ پرسش تئوری ۴۴:

$$n! \sim \sqrt{۲\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\frac{۴^n}{۲n+۱} < \binom{۲n}{n} < ۴^n$$

$$\frac{۴^n}{۲n+۱} < \frac{\sqrt{۲\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{۲n}}{(\sqrt{۲\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n)^۲} < ۴^n$$

$$\binom{۲n}{n} \approx \frac{۴^n}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\Rightarrow \frac{۴^n}{۲n+۱} \leq \frac{۴^n}{\sqrt{\pi n}}$$

پاسخ پرسش تئوری ۴۵:

p احتمال حرکت یک قدم به راست $q = ۱ - p$ احتمال یک قدم به چپ

$$P_r = \sum_{n=۱}^{\infty} p^n(۱-p)^n\binom{۲n}{n}$$ مجموع این سری به pq بستگی دارد.

$$p \cdot q < \frac{۱}{۴}$$ به سرعت همگرا می شود

$$p \cdot q = \frac{۱}{۴}$$ با سرعت کمتر همگرا می شود.

چون حرکت با احتمال کمتر محدود کننده است p یا q هر کدام کوچکتر تعیین کننده اند

$$p = q = \frac{۱}{۲} \Rightarrow P_r = ۲p = ۲q$$

$$\binom{۲n}{n} \approx \frac{۴^n}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow p^n q^n \binom{۲n}{n} = \frac{(۴pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(۴pq)^n}{\sqrt{\pi n}} = P_r = ۲min(p,q)$$

اگر $p \cdot q < \frac{۱}{۴}$ سری مقابل همگرا می شود.

پاسخ پرسش تئوری ۴۶:

باید ثابت کنیم بازگشتی مثبت بودن نتیجه ی تجزیه ناپذیری است (برای زنجیره ی مارکوف با تعداد حالت محدود) می دانیم در زنجیره های تجزیه ناپذیر هیچ حالتی نمی تواند جذب کننده باشد این ویژگی باعث می شود که هر حالت به دلیل اینکه تعداد حالت ها محدود هستند قابل بازگشت باشد و چون هیچ مسیر بسته ای وجود ندارد (به دلیل تجزیه ناپذیری احتمال i به j و j به i صفر نیست) و هر حالت در زمان محدود به خودش برمی گردد میانگین مدت زمان برگشتن به خود هم محدود خواهد بود.

پاسخ پرسش تئوری ۴۸:

$E(T_i) = i$ زمان متوسط بازگشت به حالت.

پس با میانگین T_i و احتمال ۱ بازگشت سریع می‌گردد و:

$$E(T_i) = \frac{۱}{\pi_i}.$$

بر اساس رابطه بالا، احتمال پایدار π_i برابر است با نسبت زمان اقامت در حالت i تقسیم بر زمان کل:

$$\pi_i = \lim_{t\to\infty} \frac{۱}{t} \int_{۰}^{t} ۱(X_s = i)\, ds = \frac{۱}{E(T_i)}.$$

و با تعریف:

$N(t) = t$ تعداد بازدیدها از حالت i تا زمان.

و همچنین رابطه انتگرالی و در نهایت محاسبات حدی داریم:

$$\pi_i = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} \sum_{k=۱}^{n} f(X_k).$$

برای مجموع کلی به‌صورت:

$\sum_i \pi_i f(i) = f$ مقدار متوسط تابع.

پاسخ پرسش تئوری ۴۹:

خب ابتدا معنای $\pi_i \cdot P_{ij}$ را بررسی می کنیم که نرخ انقال از i به j در طولانی مدت را نشان می دهد.

در واقع این سری جمع روی کل نرخ خروجی از استیت i است وا از انجایی که مجموع هر سطر برابر ۱ است این تساوی هم نشان دهنده ی حفط حالت پایدار است چون مهم نیست که ما از i به کدام حالت می رویم باز هم احتمال رفتن ما به i $\pi_i \cdot P_{ij}$باقی میماند.

پاسخ پرسش تئوری ۵۰:

$\pi_j \cdot P_{ji}$ به معنای انتقال از حالت j به حالت i در طولانی مدت است. در واقع $\sum_j \pi_j \cdot P_{ij}$مجموع کل نرخ ورودی به حالت i را نشان می دهد. چون نرخ خروجی و نرخ ورودی در حالت پایا برابر است زیرا نرخ خروجی و ورودی باید برابر باشد تا باعث حفط تعادل شود که در نهایت منجر به یک توزیع پایا می شود.این تعادل به این معناست که در بلند مدت فرایند هیچ گونه تمایلی به تغییر توزیع خود ندارد و احتمالات پایا حفظ می شود. پس نرخ ورودی و خروجی برابرند.

پاسخ پرسش تئوری ۵۱:

بیان می کند که توزیع τ_i یک توزیع بی حافظه است و اثبات شده که تنها توزیع پیوسته بی حافظه توزیع نمایی می باشد. که پارامتر این توزیع نمایی λ_i است که نرخ خروج از i است این ویژگی فرایند مارکوف تحلیل انها را بسیار ساده تر می کند چون که در تحلیل انها گذشته مهم نیست و فقط آینده اهمیت دارد (به دلیل بی حافظه بودن)