Devoir math – HANI Fara

HANI FARA :

DEVOIR NOTE MATHS 02

On considère l'équation différentielle linéaire (E) :

$$4y' + y = 3e^{\frac{x}{2}} - 1$$

Conditions initiales : $y(0) = 1$

(1) Donnant l'équation homogène (H) associé :

$$\boxed{4y' + y = 0}$$

(2) Calculons y_H, la solution de l'équation (H) par la méthode de séparation des variable :

$$4y' + y = 0$$

$$4\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$4dy = -y\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{4}\int dx$$

$$\ln y + c_1 = -\frac{1}{4}x + c_2$$

$$\ln y = -\frac{1}{4}x + \ln K$$

$$y_H = e^{-\frac{1}{4}x \cancel{+\ln k}}$$

$$\boxed{y_H = k e^{-\frac{1}{4}x}}$$

(3) Calcule d'une solution particulière de (E) par la méthode de la variation de la constante

Soté : la solution particulière y_P

$$y = y_H + y_P$$

$$y_H = k e^{-\frac{1}{4}x} \quad \text{où } K \in \mathbb{R}$$

$$y_P = K(x)\,e^{-\frac{1}{4}x}$$

On dérive :

$$y'_P = K'(x)\,e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}K(x)$$

$$4y'_P + y_P = 3e^{\frac{x}{2}} - 1$$

$$4\left(K'(x)\,e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}\cdot K(x)\right) + K(x)\,e^{-\frac{1}{4}x} = 3e^{\frac{x}{2}} - 1$$

$$4K'(x)\,e^{-\frac{1}{4}x} \cancel{- e^{-\frac{1}{4}x}K(x)} + \cancel{K(x)\,e^{-\frac{1}{4}x}} = 3e^{\frac{x}{2}} - 1$$

$$4K'(x)\,e^{-\frac{1}{4}x} = 3e^{\frac{x}{2}} - 1$$

$$K'(x) = \frac{3e^{\frac{x}{2}} - 1}{4e^{-\frac{1}{4}x}}$$

$$K'(x) = \frac{3}{4}e^{\frac{x}{2} + \frac{1}{4}x} - \frac{1}{4}e^{+\frac{1}{4}x}$$

$$K'(x) = \frac{3}{4}e^{\frac{3}{4}x} - \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}x}$$

$$\int K'(x)\,dx = \frac{3}{4}\int e^{\frac{3}{4}x}dx - \frac{1}{4}\int e^{\frac{1}{4}x}dx$$

$$K(x) + C_1 = \frac{3}{4}\int e^{\frac{3}{4}x}dx - \frac{1}{4}\int e^{\frac{1}{4}x}dx$$

$$\cancel{\left(K(x) = 2e^{\frac{3}{4}x}\right)}$$

$$K(x) + C_1 = \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}e^{\frac{3}{4}x} - \frac{\cancel{1}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{1}}e^{\frac{1}{4}x} + C_2$$

$$K(x) = e^{\frac{3}{4}x} - e^{\frac{1}{4}x} + \lambda$$

$$y_P = K(x)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}.$$

$y_p = (e^{\frac{3}{4}x} \cdot e^{-\frac{1}{4}x} - e^{\frac{1}{4}x} e^{-\frac{1}{4}x} + \lambda e^{-\frac{1}{4}x})$

$$\boxed{y_p = e^{\frac{1}{2}x} - 1 + \lambda e^{-\frac{1}{4}x}}$$

La solution de l'équation linéaire (E), y :

$$y = y_H + y_P$$

$$y = K \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + e^{\frac{1}{2}x} - 1 + \lambda e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$y = (K + \lambda) e^{-\frac{1}{4}x} + e^{\frac{1}{2}x} - 1$$

$$\boxed{y = \gamma e^{-\frac{1}{4}x} + e^{\frac{1}{2}x} - 1}$$