Лабораторная работа 6.
Динамическое программирование

Во всех задачах исходные данные считываются из файла.

Часть А. Решить обе задачи.

1. Черепашка находится в городе, все кварталы которого имеют прямоугольную форму и ей необходимо попасть с крайнего северо-западного перекрестка на крайний юго-восточный. На некоторых улицах проводится ремонт и по ним запрещено движение, стоимость проезда по остальным улицам задается. Кроме того, для каждого перекрестка определена стоимость поворота. Найти для черепашки маршрут минимальной стоимости.
   Исходные данные:
   - N – количество перекрестков, определяется через 2 числа l, m и N=l*m (l<11, m<11);
   - стоимость проезда и стоимость поворота на перекрестках – целые числа.
2. Реализовать классическую задачу о треугольнике. Натуральные числа выстроены в треугольник. Разработать программу для поиска наибольшей возможной суммы при спуске от вершины треугольника к его основанию. Разрешенные перемещения: вниз влево, вниз вправо.

Часть Б. Решить одну задачу из двух.

3. Реализовать классическую задачу о степени числа. Даны два натуральных числа N и k. Требуется определить выражение, которое вычисляет k^N. Разрешается использовать операции умножения и возведения в степень, круглые скобки и переменную с именем k. Умножение считается одной операцией, возведению в степень q соответствует q–1 операция. Найти минимальное количество операций, необходимое для возведения в степень N.
4. Реализовать классическую задачу о выражении. Дано арифметическое выражение, операндами которого являются целые положительные числа, а разрешенными операциями «+» и «*». Требуется расставить скобки так, чтобы результат вычисления выражения был максимальным.

Часть В. Решить одну задачу из четырех.

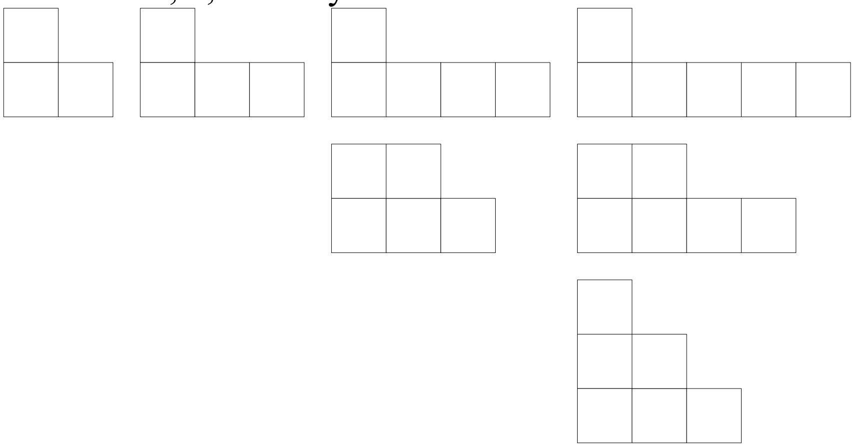
5. Реализовать классическую задачу «Алгоритм Нудельмана–Вунша».
6. Реализовать классическую задачу о разбиении выпуклого N-угольника.
7. Реализовать классическую задачу о камнях.
8. Реализовать классическую задачу о рюкзаке.

Часть Г. Решить одну задачу из четырех.

9. На каждой из n+2 ступенек лестницы записано целое число, причем на первой и последней ступеньке записано число ноль. На первой ступеньке стоит человек, которому необходимо подняться на последнюю ступеньку. За один шаг он может подниматься на любое число ступенек, не превосходящее k. Подсчитаем сумму всех чисел, написанных на ступеньках, на которые наступил человек. Требуется найти наибольшее возможное значение этой суммы.
10. «Мячик на лесенке». На вершине лесенки, содержащей n (0<n<31) ступенек, находится мячик, который начинает прыгать по ним вниз, к основанию. Мячик

может прыгнуть на следующую ступеньку, на ступеньку через одну или через 2. (То есть если мячик лежит на 8-й ступеньке, то он может переместиться на 5, 6 или 7-ю.) Определить число всевозможных «маршрутов» мячика с вершины лесенки на землю.

11. Фишка может двигаться по игровому клеточному полю длины n (клеток) только вперед. Длина хода фишки не более k клеток. Требуется подсчитать количество различных путей, по которым фишка может пройти поле от начала до конца.
12. Лесенка. Дано натуральное число n (n кубиков). Лесенка – это набор из ступенек, размер которых уменьшается снизу вверх. Лесенка состоит по крайней мере из двух ступенек, ступенька состоит по крайней мере из одного кубика. На рисунке показаны ступеньки из 3, 4, 5 и 6 кубиков.



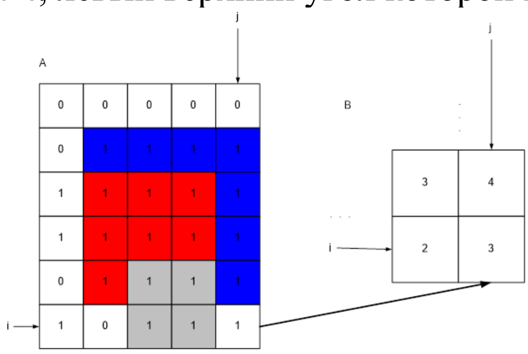
Примеры лесенок

Необходимо подсчитать количество лесенок, которые можно составить из n кубиков.

Часть Д. Решить одну задачу из трех.

13. Наибольший квадрат. Дана матрица A из $0<n\le1000$ строк и $0<m\le1000$ столбцов. Элементы матрицы A принимают только два значения 0 или 1. Найти «наибольший квадрат» – подматрицу, состоящую из одних единиц, которая есть в A.

Пример. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Наибольший квадрат – это подматрица размером $4\cdot4$, левый верхний угол которой находится в позиции A[3,3] или A[3,4].



Связь подзадач фиксируется следующим рекуррентным соотношением:

$$B[i,j]=\begin{cases} A[i,j], \text{если } i=1 \text{ или } j=1 \\ 0, \text{если } A[i,j]=0 \\ \mathrm{Min}(B[i-1,j],B[i,j-1],B[i-1,j-1])+1, \text{если } A[i,j]=1 \end{cases}.$$

14. Дана матрица A[1..n,1..m] ($0<n\le1000$, $0<m\le1000$). Элементами матрицы являются целые числа, по модулю не превосходящие 103. Подматрица – это часть матрицы из l строк и k столбцов ($0<l\le n$, $0<k\le m$). Требуется найти количество подматриц матрицы A, сумма элементов которых в точности равна заданному числу s.
    Пример. В матрице $3\cdot3$, состоящей из единиц, количество подматриц размера $2\cdot2$ с суммой элементов 4 равно 4.
15. Дана матрица A[1..n, 1..m] ($1\le n,m\le100$). Элементами матрицы являются целые числа d ($-105\le d\le105$). Требуется найти квадратную подматрицу с максимальной суммой элементов.

Баллы: все задачи оцениваются по одному баллу. Обязательны 6 задач.