

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA, DEPARTAMENT DE FÍSICA

**DIAGNÒSTICS MAGNÈTICS AL LISA
PATHFINDER**
TREBALL DE FINAL DE GRAU

Alejandro Encalado Masià

Setembre de 2017

ÍNDEX

1 Abstract	2
2 Introducció	3
3 Missió LISA	3
3.1 Ones gravitacionals	4
3.2 Lisa Pathfinder	6
3.3 Objectius	7
3.4 LISA Technology Package (LTP)	9
3.4.1 Optical Metrology System (OMS)	9
3.4.2 Gravitational Reference System	11
3.4.3 Masses de prova (TM)	11
3.4.4 Capacitive sensor electrode housing	12
3.4.5 GRS subsystem	12
3.4.6 Drag-free control	12
3.5 Subsistema d'adquisició de dades i diagnòstics (Data and Diagnostic subsystem)	13
4 Inferència Bayesiana	15
4.1 Funció Likelihood	16
4.2 Cadenes de Markov- Algoritme Metropolis Hasting	16
4.3 Model Magnètic	18
4.4 Tractament del soroll magnètic	19
5 Processament i implementació de l'algoritme a les dades.	21
5.1 Implementació de l'algoritme	21
5.2 Processament previ de les dades amb LTPDA Toolbox	24
5.3 Implementació de l'algoritme a les dades reals amb LTPDA Toolbox	27
5.3.1 Obtenció de paràmetres amb dades simulades	31
6 Conclusions	35
7 Annex	36
7.1 Power spectral density function	36
7.2 Codi utilitzat al capítol 5.1	36
7.3 Lectura dels magnetòmetres a les simulacions fetes al capítol 5.3.1	39

1 ABSTRACT

El treball de final de grau anomenat Diagnòstics Magnètics al LISA Pathfinder es centrarà en dos aspectes relacionats amb la missió LISA Pathfinder. En primer lloc, es detallarà què és i què fa el LISA Pathfinder i quins objectius busca. En segon lloc, s'exposaran els diagnòstics magnètics que actualment s'estan duent a terme. Es comentaran els algoritmes utilitzats en la diagnosi del camp magnètic a l'interior del satèl·lit i s'aplicaran aquests fent servir dades reals obtingudes de la mateixa missió. Finalment, els resultats de l'aplicació dels algoritmes en certs casos es comentaran a l'última secció d'aquest treball.

2 INTRODUCCIÓ

L'ànim d'aquest treball de grau és estudiar i conèixer els mètodes d'anàlisi de dades utilitzats per a l'adquisició del camp magnètic a l'interior del satèl·lit del projecte *LISA Pathfinder*. A la part pràctica, s'utilitzaran dades reals per mostrar com s'apliquen aquests mètodes que, principalment, seran de Monte Carlo.

L'experiment que la *Agencia espacial Europea* està duent a terme. L'objectiu principal de la missió és poder posar a prova la tecnologia actual per tal de construir un interferòmetre d'ones gravitacionals a l'espai, que per això s'ha construït el satèl·lit *LISA Pathfinder*, situat actualment al punt de Lagrange 1, on, al seu interior, disposa d'una sèrie de detectors per dur a terme aquesta tasca.

Així doncs, el propòsit d'aquest treball de grau no és aprofundir en la tecnologia que utilitza el satèl·lit, sinó en les tècniques emprades per detectar i analitzar les diferents fonts de camp magnètic que presenta l'experiment. En aquest cas, a l'interior de la nau es disposa de 4 detectors de camp situats a unes posicions conegeudes, i una multitud de fonts de camp magnètic, algunes conegeudes, amb una localització determinada i altres no. Per tant, emprant la inferència Bayesiana i altres mètodes d'anàlisi estadístic, aconseguirem donar una millor aproximació al valor del camp en els punts que ens interessa de l'interior de la nau *LISA Pathfinder*. Principalment, es tractarà de resoldre un problema de caracterització de dipols magnètics, on tindrem 3 dipols magnètics (un per a cada direcció de l'espai) per cada possible font de camp. Amb aquestes dades hem d'afrontar un problema d'optimització on tenim un nombre considerablement gran de paràmetres.

3 MISSIÓ LISA

La missió Laser Interferometer Space Antena (LISA) és un projecte impulsat per l'Agència espacial Europea (d'ara endavant, ESA) que té com a objectiu la construcció d'un interferòmetre òptic situat a l'espai per a la detecció i caracterització d'ones gravitacionals que es durà a terme al voltant de l'any 2034. Per a aconseguir-ho es llençaran 3 satèl·lits a una distància aproximada de 1 AU i inclinada respecte a la eclíptica en uns 60 graus. Es presentaran en disposició de triangle equilàter amb una distància entre ells de 2.5 milions de kilòmetres. Aquesta serà mesurada amb un interferòmetre làser de manera que petites pertorbacions en la mètrica podran ser detectades. El propòsit de la missió LISA serà detectar ones gravitatòries en el rang d'entre 0.1 mHz i 1 Hz. La detecció d'ones gravitatòries en aquest rang de freqüències és inviable dur-la a terme a la Terra. És per això que per tal de reduir el soroll associat a múltiples fonts és necessària la construcció de nous detectors i laboratoris a l'espai.

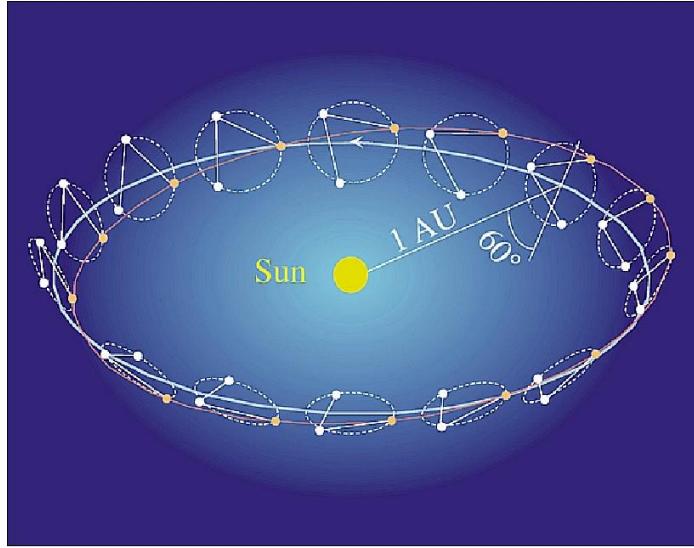


Figura 3.1: Esquema de la disposició dels satèl.lits del projecte LISA. Figura extreta de [11]

3.1 ONES GRAVITACIONALS

Respecte a les ones gravitacionals, en aquesta secció s'exposarà breument quin és el seu fonament matemàtic emprant la notació d'Einstein i partint de la linealització de les seves equacions.

Com s'ha esmentat anteriorment, la finalitat de LISA és detectar pertorbacions en la mètrica provocades per objectes molt massius.

Pel que fa a les ones gravitacionals que s'estudiaran, seran les provocades per sistemes binaris que es troben oscil·lant al voltant del seu centre de masses. Aquesta rotació d'objectes tant massius provocarà una perturbació descrita per la següent expressió:

$$\left(-\frac{\delta^2}{\delta t^2} + \vec{\nabla} \right) h_{ij} = 0 \quad (3.1)$$

Aquesta última expressió és una derivació de l'Equació d'Einstein en el cas que el tensor d'energia-moment és 0, és a dir, es tractarà de buscar una solució per a l'equació d'Einstein al buit.

De l'expressió anterior se'n deriva el següent resultat

$$\bar{h}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} \exp(iK_\mu x^\nu) \quad (3.2)$$

L'anterior expressió ens diu que en aquest cas la perturbació de la mètrica és igual a una constant A vegades l'exponencial complexa del producte de K_μ , que és el 4-vector

d'ona, anàleg al nombre d'ona d'una ona tridimensional amb el vector de posició x^ν . Suposant que ens trobem amb el cas d'una ona gravitacional movent-se en l'eix z la constant A anterior pren la següent forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_+ & A_x & 0 \\ 0 & A_x & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3.3)

Com podem veure, aquesta matriu conté nomes dos components independents, que corresponen a estats de polarització plus; A_+ i cross; A_x . A més, és completament espacial $A^{0i} = 0$ transversa i de traça nulla.

Aquests estats de polarització, a l'igual que en una ona electromagnètica, indiquen en quina direcció vibra el camp elèctric o magnètic; en aquest cas indica en quina direcció oscil·len les masses en caiguda lliure en trobar-se amb l'ona gravitacional.

L'efecte directe d'una ona d'aquest tipus en travessar una partícula massiva vindrà descrit per una perturbació en l'eix x i y de la següent forma:

$$\delta X(t) = \delta X(0) + \frac{1}{2} A_+ \exp(iKx) \times \delta X(0) \quad (3.4)$$

$$\delta Y(t) = \delta Y(0) - \frac{1}{2} A_+ \exp(iKx) \times \delta Y(0) \quad (3.5)$$

Si es tracta per a una polarització de tipus plus.

$$\delta X(t) = \delta X(0) + \frac{1}{2} A_x \exp(iKx) \times \delta Y(0) \quad (3.6)$$

$$\delta Y(t) = \delta Y(0) + \frac{1}{2} A_x \exp(iKx) \times \delta X(0) \quad (3.7)$$

Si es tracta d'una polarització del tipus cross.

Una representació gràfica de com afectaria una ona gravitacional que creués un conjunt de masses formant un cercle a les distàncies al llarg del temps seria la següent:

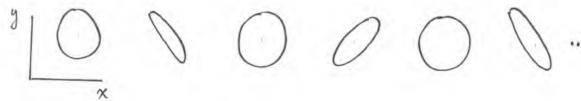


Figura 3.2: Moviment de masses en disposició circular al travessar una ona gravitatòria amb polarització cross. Figura extreta de [7]



Figura 3.3: Moviment de masses en disposició circular al travessar una ona gravitòria amb polarització plus. Figura extreta de [7]

1

3.2 LISA PATHFINDER

El satèl·lit *LISA Pathfinder* és una sonda que pertany a la ESA amb col·laboració de la NASA, amb la finalitat d'estudiar la viabilitat del projecte LISA. Aquest projecte consisteix en l'estudi del moviment i acceleració relatiu d'unes masses de prova (que, d'ara endavant, anomenaré TM) en caiguda lliure i controlades amb un nivell de precisió com el que requerirà la missió LISA. Aquestes TM han de ser lliures de qualsevol acceleració relativa entre elles, excepte aquelles acceleracions produïdes per les forces de marea causades per una ona gravitòria. Les TM es troben a l'interior del satèl·lit, suspeses al final d'un braç interferomètric que malgrat que és insensible a les ones gravitatóries degut a la seva curta distància, si que és sensible a acceleracions diferencials (Δg) sobre les TM produïdes per diverses fonts d'error.

El projecte LISA Pathfinder sortí de la Terra el 3 de Desembre de l'any 2015 i arribà a L1 50 dies després del llançament. Degut a les mesures que va realitzar, el punt de Lagrange 1 (L1) és ideal pel que fa la interacció gravitòria entre el sistema Terra-Sol en primer ordre, ja que és categoritzada com una zona "tranquil.la". Per altra banda, també és un lloc interessant pel que fa a les comunicacions, ja que el satèl·lit manté una posició fixe respecte de la terra. Més tard, 76 dies després del llançament, quan la sonda es va estabilitzar a L1, les TM es van alliberar i van quedar suspeses en caiguda lliure, és aleshores, el dia 1 de Març de 2016 que es comencen a prendre mesures sobre la posició d'aquestes TM fins al Juliol del 2017. Actualment s'estan estudiant i analitzant les dades recollides durant la missió.

Així doncs, l'objectiu principal d'aquesta sonda és caracteritzar les diferents fonts de soroll que les masses de prova ($TM's$) pateixen en les condicions en les que l'experiment es troba. Algunes d'aquestes fonts de soroll són, fluctuacions de la temperatura, fluctuacions en la càrrega elèctrica de les TM, variacions en el camp magnètic a l'interior de la nau i variacions en la posició relativa de les TM degudes a l'acció dels propulsors de la sonda entre d'altres.

¹Per a una derivació més detallada de les equacions relacionades amb les ones gravitatóries, així com de les aproximacions i simetries que s'utilitzen, consultar [7]

3.3 OBJECTIUS

L'Objectiu principal de la missió és posar a prova la tecnologia necessària per dur a terme observatoris d'ones gravitacionals a l'espai. Per dur a terme aquesta tasca, la missió LISA Pathfinder inclou Lisa Technology Package (LTP) . Aquest conjunt de tecnologia, construïda i desenvolupada tant per la indústria privada com per agències espacials com la ESA i la NASA, busca acomplir tres objectius:

- Demostrar l'eficàcia de l'anomenat Drag-Free control per tal d'isolar les masses de prova amb els requeriments necessaris, que correspon a $3 \times 10^{-14} m\sqrt{Hz}$ amb una freqüència superior a 3mHz dins del rang de freqüències d'entre 1 – 30mHz.
- Demostrar la viabilitat de l'interferòmetre en el règim de baixa freqüència requerit, amb una precisió propera a $10^{-12} m\sqrt{Hz}$ en el rang de freqüències d'entre 1 – 30mHz.
- Estimar la durada i viabilitat dels instruments en l'entorn espacial.

L'experiment com hem comentat abans consisteix en determinar $\Delta g_{(t)}$ que apareixen entre dos masses. L'expressió més general amb la que es pot obtenir un valor per a l'acceleració diferencial és:

$$\Delta g_{(t)} = \Delta g_{x(t)} + \omega_2^2 \Delta x_{(t)} + \Delta \omega_{12}^2 x_1(t) - g_c(t) - g_{\Omega(t)} \quad (3.8)$$

On $\Delta g_{x(t)}$ és l'acceleració mesurada per l'interferòmetre, Δx és la distància entre TM, $\Delta \Omega_{12}$ és una mesura de l'acoblament entre el moviment relatiu de la nau amb les TM, mentre que ω_1 i ω_2 són els acoblaments individuals de cada massa de prova amb la nau. Δg_c és el diferencial d'acceleració produït pel sistema d'estabilització de les TM, mentre que Δg_{Ω} fa referència a l'acceleració produïda pel moviment de rotació que presenta el satèl.lit.

Per a calcular aquesta acceleració diferencial es fan servir quatre interferòmetres òptics de tipus Mach-Zhender. El principi d'aquest experiment és el seguent: Dos cossos en repòs, un respecte de l'altre, situats en un sistema de referència inercial, en aquest cas, sobre un espai-temps curvat, que s'intercanvien un pols electromagnètic, observaran variacions temporals respecte les mesures en la freqüència del pols electromagnètic. Aquest fenomen és indistingible de l'efecte Doppler en Relativitat Especial, on aquesta diferència de mesura en la freqüència del feix electromagnètic es deguda a l'acceleració relativa dels cossos. Això vol dir que en condicions ideals la diferència en la lectura de la freqüència del pols electromagnètic dependrà de la distància relativa entre les TM. En el cas que les forces externes siguin nul·les, qualsevol canvi en la lectura de la freqüència, haurà de ser deguda a pertorbacions en l'espai-temps que poden ser explicades per la presència d'ones gravitacionals. En el cas del projecte LISA Pathfinder, l'interferòmetre es farà servir per detectar acceleracions sobre les TM produïdes per les diverses fonts d'error per tal de minimitzar-les *a posteriori*.

La precisió demandada per LISA és tal que la Amplitude Spectral Density (ASD) de l'acceleració, definida com l'arrel quadrada de la Power Spectral Density (PSD)²,

²A l'Annex es trobarà una explicació sobre el càlcul de la PSD

provocada per les forces aleatòries hauria de ser almenys del següent ordre:

$$S_{g(f)}^{(1/2)} = 3 \times \frac{\text{fm s}^{-2}}{\sqrt{\text{Hz}}} \times \sqrt{1 + (f/8\text{mHz})^4} \quad (3.9)$$

Per a freqüències d'entre 0.1mHz i 1Hz Malgrat això, per a LPF les condicions demandades són

$$S_{g(f)}^{(1/2)} = 30 \times \frac{\text{fm s}^{-2}}{\sqrt{\text{Hz}}} \times \sqrt{1 + (f/3\text{mHz})^4} \quad (3.10)$$

Per una banda de freqüències d'entre 1mHz i 30Hz

Com veiem els requeriments per a la ASD de LISA són menors que el de LPF. Així doncs, el dia 127 després del llançament i durant 6.5 dies es van dur a terme les tasques pertinents per dur a terme el càlcul de la ASD patida per les TM i poder comprovar la viabilitat del projecte LISA.

Els resultats obtinguts foren significativament positius i tal i com es mostra a la següent figura, la missió LPF va complir amb èxit els requeriments dessitjats.

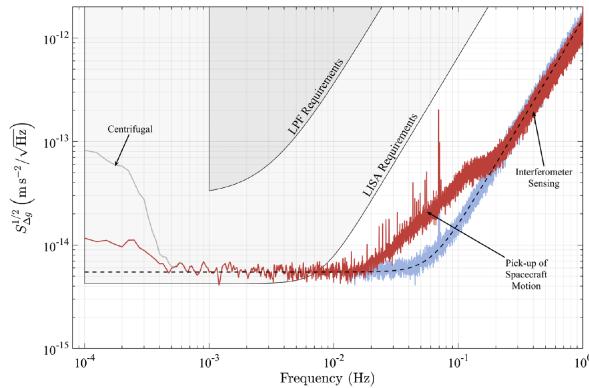


Figura 3.4: Representació de la ASD patida per les TM en funció de la freqüència.

Amb gris fosc, es mostra la zona requerida per dur a terme el projecte LPF, amb gris clar, la requerida per LISA. En vermell, els resultats obtinguts sense tenir la correcció del moviment de la nau, en blau el mateix, però tenint en compte el moviment d'aquesta. Figura extreta de [4]

Com podem observar els requeriments per a LPF restringien el valor de ASD per sota de l'àrea tancada de gris fosc. Inicialment des de $0.5 \times 10^{-13} \text{m s}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$ per a la freqüència de 10^{-3}Hz . Per altra banda, els requeriments per a LISA començaven amb $0.5 \times 10^{-13} \text{m s}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$ per a una freqüència de 10^{-4}Hz i la ASD de g quedava restringida a valors per sota de l'àrea tancada de gris clar. Els resultats obtinguts són que per a freqüències inferiors a 10^{-2}Hz el valor de la ASD està rallant els requeriments del satèl·lit LISA, per tant, s'ha superat satisfactòriament els requeriments inicials de la missió. Més enllà d'aquest resultat trobem que per a freqüències superiors a 10^{-2} els resultats són inclús suficients per al que fa la missió LISA.

3.4 LISA TECHNOLOGY PACKAGE (LTP)

D'una manera esquematitzada podríem distingir quatre elements bàsics en l'ensamblatge de la sonda:

- Optical Metrology Subsystem (OMS)
- Gravitational Reference System (GRS)
- Drag Free control system (DFCS)
- Data and Diagnostic Subsystem (DDS)

3.4.1 OPTICAL METROLOGY SYSTEM (OMS)

L'Optical Metrology System es el sistema compost per l'interferòmetre, detectors i controladors encarregats de mesurar Δg en les masses de prova.

Aquests sistema utilitza un banc òptic ultra estable amb un detector encarregat d'obtenir la fase relativa de dos feixos de llum làser de baix soroll.

L'interferòmetre emprat en l'experiment és un interferòmetre del tipus March-Zender, dissenyat per assolir una precisió de l'ordre del picòmetre, treballant en una banda de freqüències d'entre $10^{-3} Hz$ - $10^{-1} Hz$.

L'aparell consisteix en l'emissió d'un feix làser de Nd:YAG de $1064nm$ amb una potència de 40mW. Aquest làser es separat en dos feixos emprant un mirall semitransparent, i a cada feix se li canvia la freqüència amb modulador acusto-òptic. El primer genera un canvi en la freqüència de $80Mhz + 0.5kHz$ mentre que l'altre és de $80Mhz - 0.5kHz$. Aquesta diferència entre modulacions ($1kHz$) s'anomena *Heterodyne frequency*. Aquests dos feixos làser modulats són després injectats cap al banc a través d'una fibra òptica.

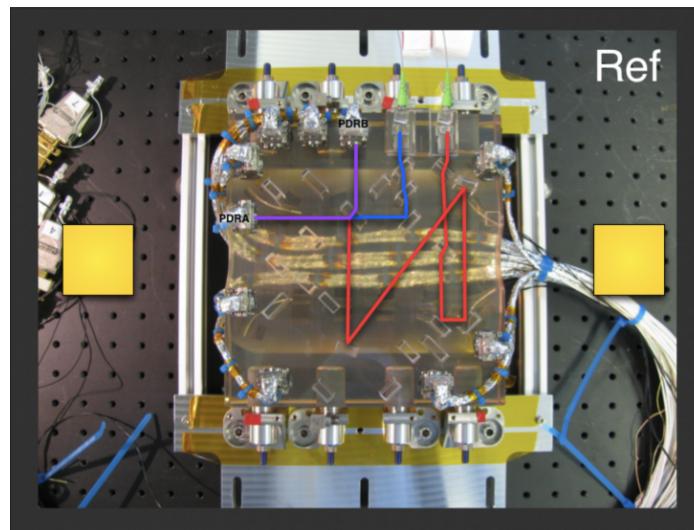


Figura 3.5: Aquest camí òptic és emprat com a referència per a les mesures. Imatge extreta de [12]

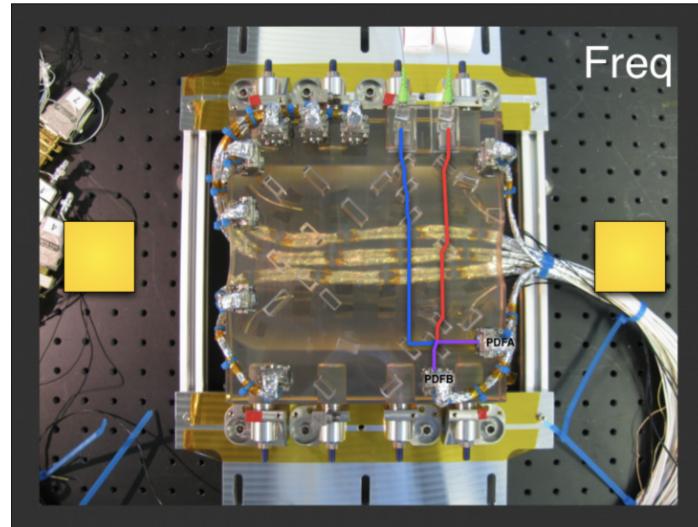


Figura 3.6: Aquest camí òptic és per a mesurar la freqüència relativa entre els feixos, aquesta serà diferent ja que les fibres òptiques tenen llargades diferents. Aquesta lectura serveix per donar una mesura de l'estabilitat en la freqüència del làser, per o bé monitoritzar-la o corregir-la amb un altre procés. Imatge extreta de [12]

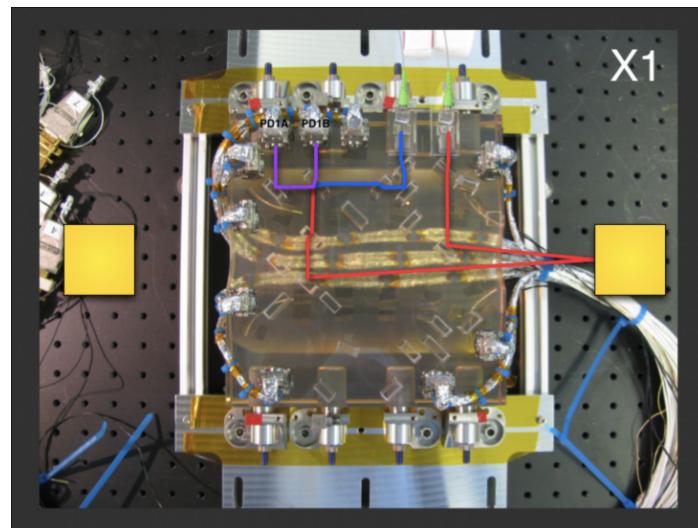


Figura 3.7: Aquest camí òptic inclou una de les masses de prova, i dona una mesura del moviment que pateix aquesta respecte la sonda. Imatge extreta de [12]

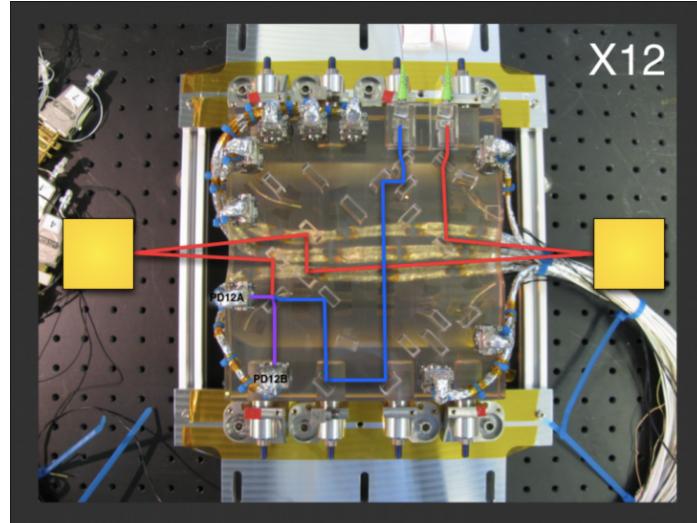


Figura 3.8: Aquest camí òptic inclou les dos masses de prova, de manera que és emprat per donar una mesura de la distància entre elles i l'acceleració diferencial que pateixen. Imatge extreta de [12]

Els canvis produïts en la posició de les masses són mesurats i enviats cap a LTP computer (*Data – Management Unit – DMU*), que s'encarrega de processar en temps real les posicions de les TM, la seva separació angular i la distància entre elles. Aquestes dades són transmeses cap al sistema de control de circuit tancat. Que actua corregint la posició d'aquestes segons convingui.

3.4.2 GRAVITATIONAL REFERENCE SYSTEM

Gravitational Reference System o GRS està format per les masses de prova (*TM*) i pels sensors i *actuadors*. Aquest sistema està contingut dins d'una cambra de buit amb tecnologia emprada per descarregar les TM a través de l'efecte foto-elèctric, unes fonts de rajos UV que eliminan la càrrega acumulada en les TM deguda als rajos còsmics.

3.4.3 MASSES DE PROVA (TM)

Aquestes dos masses quasi-cúbiques de tamany $(46.000 \pm 0.005) \text{mm}$ i de massa $(1.928 \pm 0.001) \text{Kg}$ i formades per una aleació d'Or i Platí, han estat disposades al final del braç de l'interferòmetre per tal de poder ser susceptibles a variacions en la seva acceleració relativa. Aquestes es troben en caiguda lliure situades al centre de la nau i amb una distància relativa entre elles de $(376.00 \pm 0.05) \text{mm}$ i són l'element de control de tot l'experiment.

3.4.4 CAPACITIVE SENSOR ELECTRODE HOUSING

Aquests sensors consten de 6 parells d'elèctrodes encapsulant les TM sense entrar en contacte amb elles. Variacions en la posició d'aquestes produueixen canvis en la capacitància dels elèctrodes, podent així convertir una variació en la posició en senyal elèctric. La lectura simultànea dels 6 elèctrodes dona informació tant de la posició com de les rotacions d'aquesta TM.

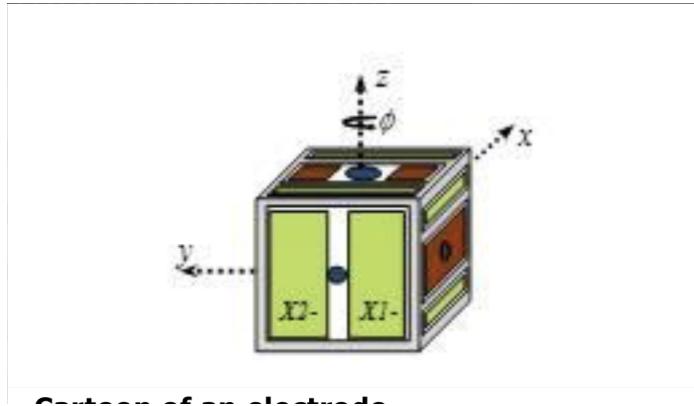


Figura 3.9: En color verd els elèctrodes. La distància entre TM i els elèctrodes es de 4mm. Imatge extreta de [12]

Apart, el sensor és capaç de produir forces electrostàtiques per tal de compensar les TM amb una precisió del micro-Newton. Aquesta capacitat s'aconsegueix aplicant voltatges de freqüències entre (60 – 270Hz).

El soroll degut a la força aplicada en aquests elèctrodes escala amb la quantitat de força que reben aquestes TM.

3.4.5 GRS SUBSYSTEM

Aquesta secció fa referència als sistemes de recolzament per al bon funcionament i estructura tant de les TM com dels sensors i detectors que els envolten. El sistema GRS està contingut en una cambra de buit de $10^{-7} mBar$. GRS subsystem també inclou un seguit de fibres òptiques emissores de radiació UV que com s'ha comentat abans, són les encarregades d'eliminar l'excés de càrrega elèctrica en les TM. També inclou un mecanisme que encapsula tots els elements anteriorment comentats i els protegeix de les violentes vibracions que presenta la sonda en el moment de llançament

3.4.6 DRAG-FREE CONTROL

L'últim dels sistemes de control consisteix en l'ordinador i els elements necessaris per estabilitzar la nau. S'encarrega de comandar forces i torques a les TM's.

Per tal de mantenir-les centrades en les seves respectives posicions, la sonda disposa de 3 propulsors de gas fred que operen amb forces de l'ordre del micro-Newton. Aquest sistema de control corregeix la posició de TM1 desplaçant la sonda per tal de mantenir les masses centrades. Un segon controlador alhora s'encarrega de mantenir la TM2 centrada i tancada a l'interior dels elèctrodes que l'encapsulen. Aquest controlador rep com a input l'error en la posició desitjada de TM1 i la que manté realment (Δx).

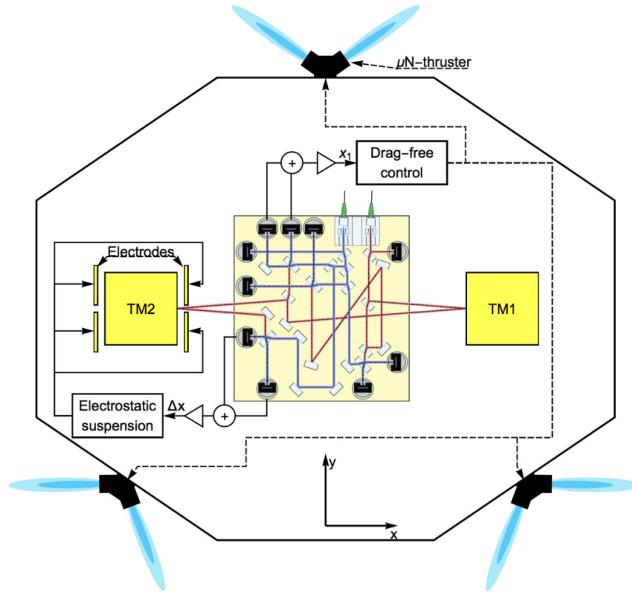


Figura 3.10: Esquema de la disposició de les TM dins de la nau amb els seu sistema d'estabilització. A la figura podem observar com els elèctrodes reben una senyal provenint de l'error en la posició de TM2 així com que el drag-free control, que rep com a input el mateix error relatiu de la posició i el corregeix donant una senyal als propulsors. Imatge extreta de [12]

3.5 SUBSISTEMA D'ADQUISICIÓ DE DADES I DIAGNÒSTICS (DATA AND DIAGNOSTIC SUBSYSTEM)

Aquest últim sistema està format pel conjunt de sensors i detectors encarregats de monitoritzar possibles canvis en les condicions de l'experiment a l'interior del satèl.lit. Els subsistemes són els següents

- Magnetòmetres: Consisteixen en 4 magnetòmetres al voltant de les TM de tipus *fluxgate* encarregats de recollir valors del camp magnètic. Degut a que inclouen un nucli magnetoactiu no poden disposar-se a prop de les TM.
- Espires magnètiques: Aquestes espires magnètiques situades just a fora de la

cambra de buit i centrades entre les TM, s'encarreguen de generar camps magnètics oscil.lants per tal de calcular el moment magnètic d'aquestes.

- Sensors de temperatura: Monitorean la temperatura a l'interior de la sonda, donat que els canvis en aquesta provoquen una força residual a les TM considerable.
- *Heaters*: Encarregats d'aportar els increments de temperatura necessaris per tal de mantenir constants el nivell d'aquesta.
- Monitor de radiació: Comptador de partícules carregades que travessen el satèlлит i es depositen a les TM. Són necessaris degut a que les partícules provinents dels rajos còsmics ($\geq 100\text{MeV}$) són capaces de carregar elèctricament les TM i induir una força electrostàtica.
- *Data Management Unit* (DMU): El sistema de gestió de dades es tracta de l'ordinador d'abord, encarregat de comandar el DDS per tal de mantenir estable les condicions de l'experiment i també s'encarrega de monitoritzar i processar les dades provinents de l'interferòmetre.

4 INFERÈNCIA BAYESIANA

La manera d'obtenir els moments magnètics serà d'origen probabilístic, on emprarem el teorema de Bayes com a eix central alhora d'obtenir aquests valors. El teorema diu així:

$$P_{(A|B)} = P_{(B|A)} \frac{P_{(A)}}{P_{(B)}} \quad (4.1)$$

Aquesta expressió diu que la probabilitat que es doni l'esdeveniment A condicionat a un altre esdeveniment B està regit per la probabilitat que es doni l'esdeveniment B condicionat al A multiplicat per la probabilitat que es doni l'esdeveniment A dividit per la probabilitat que es doni l'esdeveniment B.

En el nostre cas, podem substituir l'esdeveniment A per un cert model magnètic amb uns paràmetres determinats $M_{(\vec{\theta})}$ i l'esdeveniment B per una certa sèrie de dades donades pel magnetòmetre \vec{D}

Aleshores l'anterior expressió pot ser re-expressada de la següent manera

$$\pi_{(\vec{\theta}|\vec{D})} = \pi_{(\vec{D}|M, \vec{\theta})} \times \frac{P_{(\vec{\theta})}}{\pi_{(\vec{D}|M)}} \quad (4.2)$$

l'objectiu és obtenir una sèrie de $\vec{\theta}$ que maximitzi la probabilitat $\pi_{(\vec{\theta}|\vec{D})}$, és a dir, que el conjunt de paràmetres magnètics segons un model expliquin amb suficient certesa les dades recollides pels magnetòmetres.

En l'expressió anterior podem identificar tres altres funcions de probabilitat. Les més senzilles serien tant $P_{(\vec{\theta})}$ com $\pi_{(\vec{D}|M, \vec{\theta})}$. La primera s'anomena *Prior* i es podria identificar com la probabilitat amb la que nosaltres creiem que la una sèrie de paràmetres $\vec{\theta}$ segons un model determinat M és la que més s'ajusta a la realitat. La segona correspondria a la *evidence*, interpretada com una constant de normalització. La manera d'obtenir-la seria integrant sobre tot l'espai de fases corresponents al model escollit. Més concretament seria sumar totes les possibles contribucions que un model ens podria donar.

$$\pi_{(\vec{D}|M, \vec{\theta})} = \int_{\theta} \exp\left(\frac{-1}{2}(\vec{D} - M(\vec{\theta}))^T \Sigma^{-1} (\vec{D} - M(\vec{\theta}))\right) d\theta \quad (4.3)$$

Aquesta integral pot requerir molt temps de computació, no obstant, podem prescindir d'ella si el estem segurs del model a emprar i el que variem són els paràmetres d'aquest. D'aquesta manera en fer el ratio entre posteriors, la *evidence* s'anulla.

Així doncs, una manera d'enfrontar en problema es suposant que el model utilitzat és el correcte, i comparar el mateix model emprant moments diferents per a cada dipol, que és el que es farà en aquest treball.

4.1 FUNCIÓ LIKELIHOOD

La funció Likelihood es podria dir que és la que juga el paper més important alhora de resoldre aquest tipus de problemes d'optimització. Es tracta d'una funció de probabilitat arbitraria que ens doni una relació entre els paràmetres \vec{D} i $\vec{\theta}$ que hem comentat abans. La relació ha de ser de tal manera que aquesta funció sigui màxima quan un conjunt de paràmetres aplicats a un altre cert model ,que haurem de conèixer prèviament, s'ajusti al màxim amb una serie de dades D . En altres paraules, volem una funció que prengui el valor màxim quan la diferència entre \vec{D} i $M(\vec{\theta})$ és la mínima possible.

Per conveniència però, en el cas d'aquest problema escollim una funció Gaussiana d'aquest tipus.

$$\pi_{(\vec{D}|M,\vec{\theta})} = C \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{D} - M(\vec{\theta}))^T \Sigma^{-1} (\vec{D} - M(\vec{\theta}))\right) \quad (4.4)$$

On C és una constant de normalització que dependrà de la següent manera

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi^k |\Sigma|}} \quad (4.5)$$

On Σ és la covariància, un paràmetre que exten el concepte de variància d'una funció gaussiana a múltiples dimensions. El calcul d'aquesta ve donat per la següent expressió:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_c \sigma_1 \sigma_2 & \rho_c \sigma_1 \dots \sigma_n \\ \rho_c \sigma_2 \sigma_1 & \dots & \dots \\ \rho_c \sigma_n \dots \sigma_1 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

On ρ_c és el correlador que hi ha entre les variàncies que accompanya.

Amb això l'objectiu com s'ha comentat es trobar un conjunt de $\vec{\theta}$ que maximitzin aquesta funció, i per dimensions suficientment grans utilitzem mètodes de Monte Carlo per tal de trobar una solució.

4.2 CADENES DE MARKOV- ALGORITME METROPOLIS HASTING

Les cadenes de Markov (MC) són uns objectes matemàtics que poden ser representats com un vector on cada "estat" o component del vector depèn exclusivament del l'estat immediatament anterior. La manera en que la cadena de Markov salta d'un estat al següent s'anomena Kernel o nucli de la cadena, i ve donat per una funció que nosaltres escollim.

Una de les propietats destacables d'una cadena de Markov es la seva ergodicitat. Es diu que una cadena és ergòdica si és aperiodica i amb recurrència positiva, és a dir, els estats d'aquesta cadena no tenen probabilitat 0 de passar a un altre estat. En resum, una cadena és ergòdica si existeix una probabilitat no nul·la de passar de l'estat $X_{(t)}$ a l'estat $X_{(t+1)}$.

La utilitat d'aquesta ergodicitat aplicada a les MC rau en la capacitat de calcular valors esperats que analíticament requeririen de molt temps de computació.

Imaginem que estem interessats en trobar el valor esperat d'una certa funció $g(x)$ amb una densitat de probabilitat $f(x)$

$$E[g(x)] = \int g(x)f(x)dx \quad (4.7)$$

El teorema d'ergodicitat ens diu que aquesta integral es pot reduir al següent sumatori

$$\frac{1}{T} \sum g(X_{(t)}) = \int g(x)f(x)dx \quad (4.8)$$

Quan T tendeix a infinit. Aleshores, en aquesta aproximació, la funció $g(x_{(t)})$ arriba a un valor estacionari quan T assoleix un valor prou gran, de manera que en un nombre finit d'iteracions podem aproximar la integral emprant aquest mètode. En aquest treball, l'algoritme emprat és l'anomenat algoritme de Metropolis Hastings Monte Carlo Markov Chain (MHMCMC)

Aquest algoritme ens proporciona una manera de crear una cadena de markov i veure si arriba a una distribució estacionaria, l'algoritme és basa en que el Kernel dependrà de la funció Likelihood, per tant, la distribució estacionaria a la que arribarà serà una bona aproximació per a la funció Likelihood maximitzada que volem obtenir.

Els passos a seguir per obtenir una distribució estacionaria són els següents.

- Definim un estat de la cadena $X(t) = X$
- Creem un segon estat $X(t+1) = X'$ utilitzant una distribució de probabilitat proposada $q(X'|X)$
- Generem un nombre aleatori β emprant una distribució uniforme
- Prenem el valor del nou estat seguint la següent condició

$$X(t+1) = X' \quad (4.9)$$

Si $\beta \leq \rho(x', x)$

$$X(t+1) = X \quad (4.10)$$

Si $\beta \geq \rho(x', x)$

On

$$\rho(x', x) = \min \left(\frac{f(x')q(x|x')}{f(x)q(x'|x)}, 1 \right) \quad (4.11)$$

- Repetir fins a que convergeixi

En la implementació de l'algoritme, la distribució proposada $q(x'|x)$ coincideix amb la funció Likelihood, mentre que la funció $\rho(x',x)$ s'anomena *Metropolis – Hasting acceptance probability*. Aquesta ultima funció determina si la cadena de markov avança d'un estat al següent. Mentre aquesta probabilitat sigui positiva i no nula la sempre s'acabarà assolint un estat estacionari, no obstant, escollir una bona *acceptance probability* determinarà si el temps de convergència és raonable o no.

Existeixen a més altres mètodes per a disminuir aquest temps de computació, és el cas de la tècnica de l'annealing. Consisteix en modificar el ratio d'acceptació de salts. Per fer això s'escala la funció Likelihood amb un paràmetre h (factor d'escalfament). Aquest factor "aplanallà" la funció, de manera que l'algoritme MHMCMC és capaç de recórrer àmpliament gairebé tot l'espai de fases. Quan ha passat un cert nombre d'iteracions, aquest factor d'escalfament es fa disminuir, entrant en fase de "refredament", fins a deixar-ho en un mínim o fins eliminar aquest factor d'escala. Aleshores, durant aquest temps s'ha aconseguit que l'algoritme no es quedi en un extrem relatiu alhora que s'ha explorat àmpliament l'espai de fases.

4.3 MODEL MAGNÉTIC

L'elecció d'un bon model que s'ajusti a les necessitats del problema serà un factor clau alhora de solucionar-lo. Com bé sabem, existeix un conjunt indeterminat de models tals que generen un camp magnètic d'acord amb el que llegeixen els magnetòmetres, però només un serà el bo. Podem estar segurs que el model magnètic dependrà tant de les posicions de les fonts, com del moment magnètic dipolar, quadripolar, octopolar, etc... Cal recordar que el nombre de dimensions del problema escala amb $D = k * 3 * n * V$ on k és una constant, n el nombre de fonts i V el nombre de variables. Com podem veure, si busquem una exactitud i precisió molt elevada, obtindriem un model amb un alt nombre de fonts i variables, cosa que portaria a plantejar un problema de dimensions ridículament grans. Així doncs, per evitar tots aquests conflictes és necessari assumir certes aproximacions. Les que s'han utilitzat per computar els resultats de la missió són les següents:

- Considerarem que les fonts de camp és situen suficientment allunyades de les TM's com per considerar-les dipols puntuals m_i
- Les posicions d'aquestes fonts seran fixes al llarg de tota la missió.

D'aquesta manera, un bon model que compleix les esmentades condicions serà el següent.

$$B_i = \frac{\mu_{i0}}{4\pi} \times \left(\frac{3\vec{r}_i(\vec{m}_i\vec{r}_i)}{|r_i|^5} - \frac{\vec{m}_i}{|r_i|^3} \right) \quad (4.12)$$

On B_i serà el camp magnètic que produeix una font amb moment m_i i posició r_i .

Aleshores, el camp magnètic total serà:

$$B_{total} = \sum_{i=1}^N B_i \quad (4.13)$$

Com hem comentat breument abans, la dificultat d'aquesta tasca es trobarà en la caracterització de m_i i/o de r_i de cadascuna de les fonts. Així doncs, ens podem enfocar a dos situacions.

- \vec{m}_i desconeguda amb \vec{r}_i coneuguda: Aquest és el cas principal a estudiar, es tracta de donar un valor aproximat de m_i als diferents aparells que sabem que són font de camp magnètic i en coneixem la posició determinada. Entrarien en aquest apartat tots aquells aparells de mesura i detectors que envolten a les TM.
- \vec{m}_i i \vec{r}_i desconeguts: Aquest seria el cas més complicat i es tractaria de donar un valor de M a una regió de l'espai que no correspon a cap detector o aparell de mesura, es tractaria doncs de caracteritzar amb un moment magnètic donat una certa regió on podria haver circuits electrònics o peces que poguessin ser susceptibles de produir un camp magnètic.

En aquest treball es tractarà només el primer cas, emprant el model magnètic i es faran servir dades llegides pels magnetòmetres alhora que 116 fonts de camp, amb la seva posició coneuguda.

4.4 TRACTAMENT DEL SOROLL MAGNÈTIC

La contribució de força magnètica induïda a les TM vindrà donada per la següent expressió:

$$F = < (\vec{M} + \frac{\chi}{\mu_0} \vec{B}) \nabla \cdot \vec{B} > \quad (4.14)$$

On \vec{M} és la magnetització de les TM, que considerarem com a paràmetre coneugut, χ la susceptibilitat magnètica i μ_0 la constant magnètica al buit. \vec{B} serà el camp magnètic que sentiran les TM i serà el valor a determinar emprant els magnetòmetres.

Per tal d'obtenir un valor per la susceptibilitat magnètica de les TM, caldrà previament calibrar el sistema. Això s'aconsegueix a través de dos bobines, un camp magnètic controlat i coneugut.

Un cop coneuguda χ , la presencia de \vec{B} serà deguda principalment per les fonts de camp magnètic que envolten les TM, ja siguin aparells de mesura, circuits integrats, fonts d'alimentació... Totes aquestes possibles contribucions seran tractades com dipols magnètics, ja que les suposarem suficientment allunyades de les masses com per tenir en consideració efectes d'ordre superior a 1. Per a detectar el camp magnètic, es fan servir 4 magnetòmetres pertanyents al DDS, tri-axials encarregats d'obtenir dades del camp magnètic en temps real i que estan situats en la posició que mostra la següent figura:

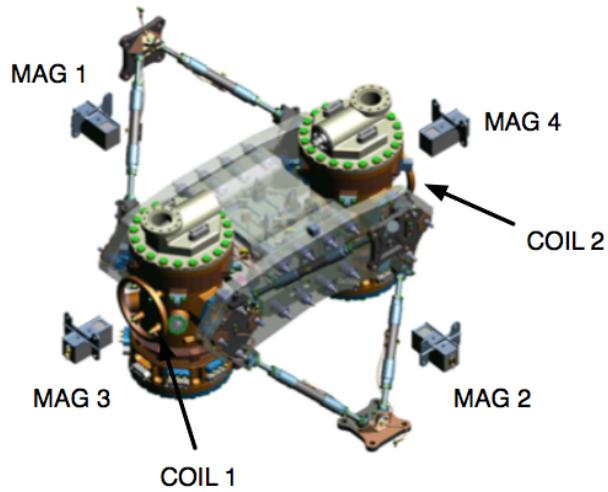


Figura 4.1: Esquema de la disposició dels magnetòmetres a l'interior de la nau.

Per a donar un valor del camp al centre de les TM, la informació recollida pels magnetòmetres serà recollida i posteriorment processada a través de l'anomenada LTPDA Toolbox. Aquest analitzador de dades es una sèrie d'scripts i codis programats en MATLAB. Utilitza com a eina bàsica un objecte anomenat *Analisis Object* (AO). Aquestes AO són paquets d'informació que emmagatzemem dades sobre el fenomen físic a estudiar (per exemple, sobre el camp magnètic llegit un dia concret en unes hores determinades) i apart, guarden la història de qui ha fet servir aquesta informació i quins processos ha dut a terme entre d'altres. Aquestes AO són peça fonamental ja que es pot fer un seguiment online i complet de com s'han tractat les dades des de que han estat llegides pels magnetòmetres fins que s'han determinat el valor dels dipols.

Les eines matemàtiques emprades per al tractament de les dades inclouen la inferència Bayesiana com a base teòrica i algoritmes basats en tècniques de Monte Carlo per computar els resultats. Als següents capítols es tractarà d'explicar amb més detall els fonaments pels quals treballa la LTPDA Toolbox.

5 PROCESSAMENT I IMPLEMENTACIÓ DE L'ALGORITME A LES DADES.

Per a computar els resultats s'ha fet servir un script de MATLAB dissenyat per la LTPDA Toolbox. Aquest script consta de diferents fases que exposaré breument a continuació:

- Adquisició de dades: El primer pas de l'script demana si volem utilitzar les dades de la base de dades recollida per la missió, o bé emprar dades del nostre ordinador. Donat a l'accés restringit de la primera opció, utilitzaré les dades prèviament descarregades.
- Comprovació de dades: Aquest pas comprova que les dades no estiguin corruptes i puguin ser processades.
- Pre-processament de les dades: Pas previ a la implementació de l'algoritme. Explicat detalladament a continuació.
- Conversió als eixos LTP: Pas de conversió de les dades recollides dels magnetòmetres individualment al sistema de coordenades de les TM.
- Simulació de dipols (Opcional): Pas encarregat de fer servir dades simulades provinents dels moments dels dipols coneguts. També es té en compte en aquest pas quins dipols es volen utilitzar alhora d'implementar l'algoritme.
- Construcció del model magnètic: En aquest pas s'escull amb quin model es vol treballar i quin o quins dipols es voles utilitzar. És aquí on s'indiquen les posicions on volem trobar quin seria el moment magnètic si existís un dipol.
- Construcció de la Log-Likelihood: Pas on es defineixen tots els paràmetres necessaris per a l'ensamblatge d'aquesta funció.
- Construcció de la matriu de covariància: El mateix que el cas anterior
- Iniciació del *Simplex*: El *Simplex* és la primera implementació de l'algoritme, però es tracta d'un mecanisme més senzill per trobar rangs més reduïts en els quals es podria trobar la solució als moments que busquem. Requereix de menor temps de computació i redueix el problema per evitar que l'algoritme s'aturi en zones de no convergència.
- Implementació de l'algoritme MCMC-MH: Aplicació directa de l'algoritme. És el pas que consumeix més recursos i aplica els passos comentats en els apartats anteriors
- Càlcul del camp magnètic: En aquest pas es computa el camp magnètic en diverses regions del satèl·lit (Concretament, en els magnetòmetres, en cadascuna de les TM i en el centre d'elles) donat els resultats obtinguts en el pas anterior.

5.1 IMPLEMENTACIÓ DE L'ALGORITME

Escollit el model de caldrà implementar-lo tal i com s'ha explicat a l'apartat de Inferència Bayesiana. La implementació d'aquest model constarà de dos parts. En

la primera d'una manera s'escolliran 3 valors numèrics de manera aleatòria, un cop escollides, emprant un script de Matlab es recuperaran els valors tal i com mostraran les següents figures:

Primerament s'escolleixen 3 valors inicials des-correlacionats i pseudoaleatoris.

```
clear all
close all
%Dades a recuperar
Data=[rand()*200,rand()*200,rand()*200]

%Punts inicials
X(1,1)=rand()*200;
X(1,2)=rand()*200;
X(1,3)=rand()*200;
```

Figura 5.1: Captura del script, adquisició de dades.

Després es defineix tant el nombre d'iteracions del mètode com la variància dels nombres aleatoris proposats durant els salts realitzats pel mètode, apart, també es defineix un paràmetre h , que és l'encarregat d'augmentar les variàncies.

```
%nombre d'iteracions
iteracions = 2e4;
%Sigma dels nombres aleatoris proposats
sigma=3;
%Sigma de la gaussiana multivariable
h=10000;

accept=0;
```

Figura 5.2: Captura del script, definició de variables

En les següents dos figures, el paràmetre $all\sigma$ varia de la següent manera; quan s'assoleixen la meitat d'iteracions descrites a l'inici del programa, aquest disminueix el paràmetre h fins arribar a un valor de 1. Es tracta doncs d'una implementació de la tècnica d'annealing, esmentada en els apartats anteriors.

```
for q=1:iteracions
    allsigma=h*[0.5,0.5,0.5];
    %Variables per fer el plot
    pas(q)=q;
    P(q)=X(q,1);
    Q(q)=X(q,2);
    R(q)=X(q,3);
    %Salts proposats a partir d'una distribuci? Gaussiana
    salt(1)=X(q,1)+randn()*sigma;
    salt(2)=X(q,2)+randn()*sigma;
    salt(3)=X(q,3)+randn()*sigma;
```

Figura 5.3: Captura del script, processos iteratius 1/2

```

if q>(1e4)/2
    if h==1
        %No fer res
    else
        h=h-1;
        %disminueix el parametre h en una unitat
    end

end

```

Figura 5.4: Captura del script, processos itertius 2/2

Finalment, el programa s'executa mostrant els resultats següents:

Paràmetre	Valors inicials (aleatoris)	Valors finals	Discrepància
Paràmetre 1	162.9447	164.6848	0.0107
Paràmetre 2	181.1584	181.2795	6.6834e-04
Paràmetre 3	25.3974	23.9921	0.0553

Taula 5.1:

Com podem veure l'algoritme ens retorna uns valors molt propers als escollits, veiem que la discrepància d'aquests no supera el 0.06% de manera que per aquest nombre de dimensió podem afirmar que els valors recuperats són suficientment acurats.

També podem veure com la cadena de Markov acaba convergint segons la següent figura

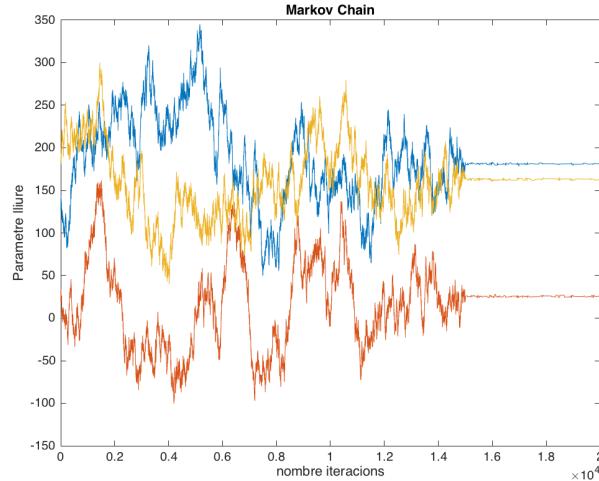


Figura 5.5:

Podem apreciar dos segments diferenciats, el primer, corresponent a la zona d'escalfament, el paràmetre variacional recorre amb relativa llibertat l'espai de paràmetres, i per tant, el ratio d'acceptació del salt és elevat. Quan arriba aproximadament a la iteració número $1.5e + 4$ aquest, restringeix el seu moviment a uns valors estacionaris, que corresponen amb l'extrem de la funció Likelihood, i que per tant, amb alta probabilitat correspondran al valors inicialment proposats.

Per altra banda, per implementar l'algoritme amb 116 fonts o amb les dades recollides pels magnetòmetres, s'ha fet servir una Toolbox, proporcionada i dissenyada per membres de l'ICE. El procediment per trobar els paràmetres que millor s'ajustin a les dades seguint el model anterior serà igual que en l'apartat anterior amb dos principals diferencies.

- Les dades vindran donades per la lectura dels magnetòmetres o bé per dades simulades emprant un model descrit per l'equació 4.12 amb 116 fonts de camp.
- La complexitat dels scripts continguts a la Toolbox són molt superiors al script indicat anteriorment, malgrat que l'algoritme utilitzat és en essència el mateix, aquesta eina proporcionada per l'ICE conté tractaments previs de les dades, així com millores en el codi per fer-lo més eficient. De manera que quedarà fora de l'abast d'aquest treball el entrar en els detalls del codi d'aquesta eina.

5.2 PROCESSAMENT PREVI DE LES DADES AMB LTPDA TOOLBOX

Prèviament a la implementació directa de l'algoritme, s'ha de dur a terme un processament previ de les dades dels magnetòmetres utilitzades en aquest treball i recollides durant dos dies, el 27 de Gener del 2017 i el 8 de Desembre del 2016. Aquest processos són, aplicar el calcul *Power spectral Density function* i per altra banda, aplicar una serie de canvis de coordenades per tenir sota el mateix sistema de referència.

Pel que fa la PSD ,aquesta funció en aquest cas ens dona una mesura de la potència associada al camp magnètic al llarg d'unes determinades freqüències. ³

³Les mesures van ser preses també pels magnetòmetres disposats a l'eix positiu de les X i al positiu i negatiu de Y respectivament, però ja que no mostren una diferencia substancial respecte a les figures indicades, les imatges seran excloses del treball.

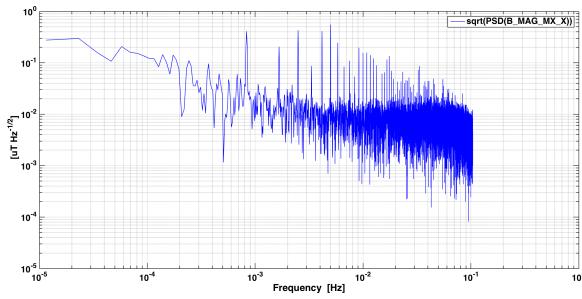


Figura 5.6: PSD magnetòmetre eix X negatiu al llarg de l'eix X

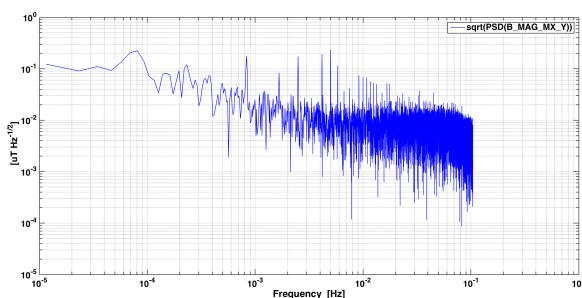


Figura 5.7: PSD magnetòmetre eix X negatiu al llarg de l'eix Y

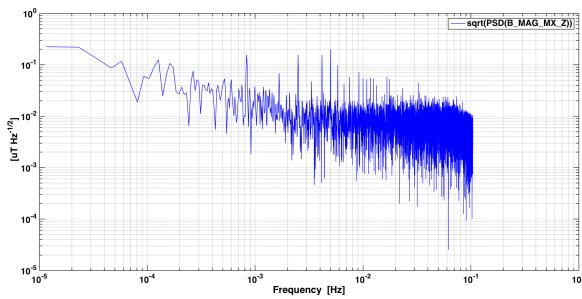


Figura 5.8: PSD magnetòmetre eix X negatiu al llarg de l'eix Z

Pel que fa a les dades del 27 de Gener del 2017, podem apreciar com per a baixes

freqüències, la potència associada al camp magnètic segueix una tendència mes o menys continua. Conforme es va augmentant la freqüència aquesta potència disminueix alhora que va presentant una sèrie de salts que ens podrien recordar a les pròpies d'una senyal de soroll blanc. De totes maneres no és tracta de soroll blanc, ja que a simple vista podem veure que presenta una mena de tendència decreixent.

Cal esmentar que el rang de freqüències interessant per al que fa LPF, 1 – 30mHz, correspon a una zona on els salts son força pronunciades, així que és necessari un tractament per al soroll adequat.

La continuïtat relativa de la PSD a baixes freqüències es molt probable que sigui deguda a camps magnètics interplanetaris. Com per exemple el camp magnètic oscillatori del Sol, de totes maneres no es profunditzarà en aquestes ja que no entra dins del rang de freqüències al que treballa la missió.

Per un'altra banda, aquesta funció és útil per detectar anomalies en el fenomen que vulguem estudiar, en el nostre cas, per al camp magnètic. Com és el cas de la comparativa entre les dades del 27 de Gener i el 8 de Desembre.

No obstant, la figura més rellevant podria ser la que mostrarem a continuació degut a que aquesta ens mostra la utilitat d'aquest tipus de processament de les dades, com és l'aplicació de la *LPSD*⁴

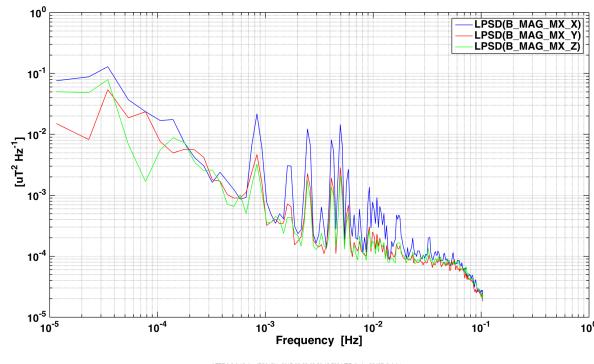


Figura 5.9: LPSD magnetòmetre eix X negatiu el 27 de gener de 2017

⁴LPSD és log-psd, és a dir, la mateixa operació comentada abans però mostrada en escala logarítmica

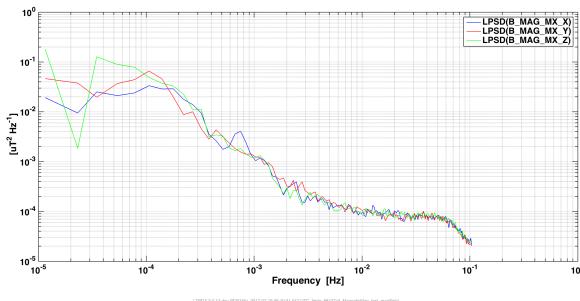


Figura 5.10: PSD magnetòmetre eix X negatiu el 8 de desembre de 2016

Clarament podem apreciar com en el rang de freqüències d'entre $10^{-3} - 10^{-2}$ observem una diferència de potències que supera almenys fins a un ordre de magnitud. Aquest fenomen és fàcilment explicable sabent que aquest mateix dia es van estar fent test en diversos aparells, de manera que es van generar camps magnètics degut a l'activitat d'aquests.

5

5.3 IMPLEMENTACIÓ DE L'ALGORITME A LES DADES REALS AMB LTPDA TOOLBOX

Un cop finalitzat el processament previ de les dades, és dona pas a la mateixa implementació de l'algoritme. En aquest cas, només s'han avaluat les dades del dia 8 de desembre de 2016, ja que al no presentar cap anomalia les podríem considerar com les dades pròpies del sistema en repòs (Sense cap anomalia momentània).

L'algoritme s'ha dut a terme per dos vessants. La primera consisteix en la determinació d'uns moments magnètics en unes posicions determinades, és a dir, donat el camp llegit pels magnetòmetres, s'indiquen unes posicions es situaran uns dipols virtuals i L'algoritme mirarà de donar un valor per al moment d'aquests de tal manera que les dades llegides puguin ser explicada per la presencia d'aquests dipols virtuals.

En aquest cas s'ha volgut comprovar quin seria el valor de 4 dipols virtuals, situats just davant de cada magnetòmetre i comprovar en aquest cas quin seria el camp creat al centre de les TM's i a l'interior d'aquests. La posició dels dipols vindrà donada per la següent taula i corresponen a moments magnètics situats just al davant de cadascun dels magnetòmetres.

⁵Malauradament tinc el accés restringit al servidor on s'indica quin tipus de test magnètic es va realitzar el dia 27 de gener de 2017, així que no es profunditzarà en aquest aspecte.

Nombre magnetòmetre	Pos X (m)	Pos Y (m)	Pos Z (m)
MAG 1	0.0758	-0.3694	0.6093
MAG 2	0.3765	0	0.6093
MAG 3	-0.0758	0.3694	0.6093
MAG 4	-0.3765	0	0.6093

Taula 5.2:

Taula 5.3: Posicions dels magnetòmetres.

Aquestes posicions corresponen a 4 dipols situats al voltant dels magnetòmetres. Aquest exercici es va realitzar de la mateixa manera al Capítol 5.3 corresponent a [5]. La diferència ara rau en que en aquest treball es faran servir dades reals, mentre que en l'anterior van ser dades simulades per diverses fonts.

Nombre dipol	Pos X (m)	Pos Y (m)	Pos Z (m)
Dipol 1	0.00	-0.70	0.60
Dipol 2	0.00	0.65	0.61
Dipol 3	0.60	0.00	0.59
Dipol 4	-0.65	0.00	0.60

Taula 5.4:

Taula 5.5: Posicions dipols hipotètics.

Al dur a terme la simulació s'ha obtingut la següent matriu de correlacions



Figura 5.11: Matriu de correlacions corresponent a 4 dipols situats davant dels magnetòmetres

En aquesta podem apreciar dos seccions diferenciades; A la diagonal apareixen unes figures aparentment gaussianes centrades en els valors mes probables trobats per l'algoritme, aquestes figures representen a l'eix horitzontal el moment magnètic en $\mu T/m$ l'eix vertical el nombre d'iteracions que l'algoritme s'ha mantingut en un valor determinat. Idealment, un bon resultat serà aquell que convergeixi a algun valor estacionari en la cadena de markov, i que per tant, presenti un perfil concret en aquesta figura. Generalment, el perfil de distribucions que apareix sol ser gaussià, però no té necessàriament per que ser-ho, tot i que es una molt bona senyal de que hem obtingut un resultat corresponent a un màxim a la funció Likelihood.

Cal esmentar però que el trobar un perfil d'aquest tipus és un indicador de que l'algoritme ha trobat un mínim relatiu per a la funció Likelihood, però en cap moment és garantia de que aquest sigui un extrem absolut, ja que podria tractar-se d'un extrem relatiu.

També podem apreciar a les zones a fora de la diagonal com de correlacionats estan els valors dels moments magnètics trobats. Una figura circular indica una correlació baixa, en el límit on l'excentricitat de la circumferència és 1 indica una correlació nul·la, mentre que una figura el·iptica indica l'existència de correlacions entre valors.

En les figures següents es poden veure amb més detall els resultats obtinguts en la diagonal.

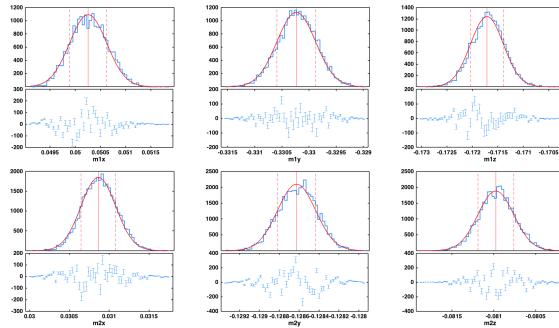


Figura 5.12: Valor estimat dels dipols hipotètics 1/2

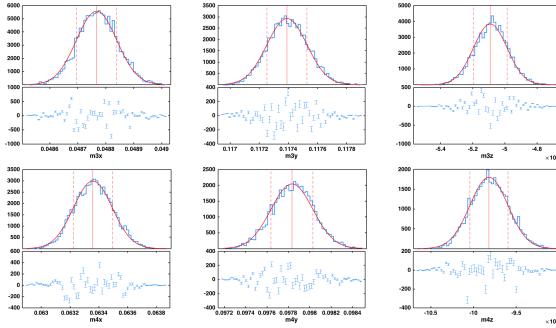


Figura 5.13: Valor estimat dels dipols hipotètics 2/2

Veient això podríem resumir que l'algoritme per a aquest cas ens ha donat els següents resultats:

Nombe dipol	Moment X ($\text{mA } \text{m}^2$)	Moment Y ($\text{mA } \text{m}^2$)	Moment Z ($\text{mA } \text{m}^2$)
Dipol 1	0.050246 ± 0.000365	-0.33025 ± 0.0003535	-0.17173 ± 0.0003214
Dipol 2	0.030857 ± 0.0002157	-0.12863 ± 0.0001903	-0.080983 ± 0.000212
Dipol 3	$0.048765 \pm 7.15e-05$	0.11739 ± 0.0001363	-0.0050948 ± 0.0001039
Dipol 4	0.063355 ± 0.0001338	0.097828 ± 0.0001952	-0.0098265 ± 0.0002214

Taula 5.6:

Taula 5.7: Moments dipols hipotètics

Eix	Camp mesurat (μT)	Camp estimat (μT)
X	$0.73466 \pm 3e-05$	0.038282 ± 0
Y	$-0.89881 \pm 3e-05$	0.012817 ± 0
Z	$0.10374 \pm 4e-05$	0.050261 ± 0

Taula 5.8:

Taula 5.9: Comparativa de \vec{B} mesurat i estimat al magnetòmetre PX.

Eix	Camp mesurat (μT)	Camp estimat (μT)
X	$0.69358 \pm 3e - 05$	-0.25125 ± 0
Y	$-0.43232 \pm 3e - 05$	-0.00061281 ± 0
Z	$0.10079 \pm 4e - 05$	0.26095 ± 0

Taula 5.10:

Taula 5.11: Comparativa de \vec{B} mesurat i estimat al magnetòmetre MX.

Eix	Camp mesurat (μT)	Camp estimat (μT)
X	$-0.13374 \pm 3e - 05$	-0.014397 ± 0
Y	$0.58098 \pm 3e - 05$	0.012834 ± 0
Z	$0.39781 \pm 4e - 05$	0.039578 ± 0

Taula 5.12:

Taula 5.13: Comparativa de \vec{B} mesurat i estimat al magnetòmetre PY.

Eix	Camp mesurat (μT)	Camp estimat (μT)
X	$-0.11096 \pm 3e - 05$	-0.43997 ± 0
Y	$1.0059 \pm 4e - 05$	-0.31498 ± 0
Z	$0.54522 \pm 4e - 05$	0.75725 ± 0

Taula 5.14:

Taula 5.15: Comparativa de \vec{B} mesurat i estimat al magnetòmetre MY.

Malgrat que trobem que sembla que s'ha assolit un extrem relatiu a la funció Likelihood, indicat així per les figures Gaussianes que es presenten, la diferència entre el camp lleigit pels magnetòmetres i el camp creat pels 4 dipols virtuals continua sent significatiu. Així que s'hauria de descartar aquest resultat com un resultat vàlid.

Amb aquests resultats podem afirmar que amb les dades reals utilitzades el problema no es pot reduir a 4 dipols virtuals al voltant dels magnetòmetres, amb les posicions anteriorment citades. Així doncs, per a donar una explicació del camp magnètic s'haurà de requerir a un altre tipus de disposició i/o a la utilització de més dipols.

5.3.1 OBTENCIÓ DE PARÀMETRES AMB DADES SIMULADES

Finalment, i en l'última part de l'aplicació de l'algoritme s'ha intentat trobar fent servir dades simulades amb el model anteriorment comentat. En aquesta part s'ha indicat de

simular només una de les 116 fonts de camp i comparar-la amb el moment magnètic mostrat a la llista de moments continguda a la Toolbox. Els resultats es mostren a la següent taula.

Nom de la font	Moment tabulat ($mA \times m^2$)	Moment obtingut ($mA \times m^2$)
IS FEE SAU 1 D1 (Dip 8)	$1.31720 \pm 1e - 5$	$0.00244 \pm 1.866e - 05$
Laser Assembly D3 (Dip 14)	$-5.73509 \pm 1e - 5$	$-0.00020 \pm 3.512e - 05$
Laser Modulation Unit D1 (Dip 16)	$-0.51420 \pm 1e - 5$	$-0.00038 \pm 1.357e - 05$

Taula 5.16:

Taula 5.17: Comparativa entre moments magnètics tabulats i obtinguts després de la simulació de 4 fonts a l'eix X

Nom de la font	Moment tabulat ($mA \times m^2$)	Moment obtingut ($mA \times m^2$)
IS FEE SAU 1 D1 (Dip 8)	$-2.09346 \pm 1e - 5$	$-0.00087 \pm 1.866e - 05$
Laser Assembly D3 (Dip 14)	$0.73348 \pm 1e - 5$	$-0.00098 \pm 3.512e - 05$
Laser Modulation Unit D1 (Dip 16)	$-0.46662 \pm 1e - 5$	$-0.00059 \pm 2.128e - 05$

Taula 5.18:

Taula 5.19: Comparativa entre moments magnètics tabulats i obtinguts després de la simulació de 4 fonts a l'eix Y

Nom de la font	Moment tabulat ($mA \times m^2$)	Moment obtingut ($mA \times m^2$)
IS FEE SAU 1 D1 (Dip 8)	$5.06122 \pm 1e - 5$	$0.00526 \pm 1.866e - 05$
Laser Assembly D3 (Dip 14)	$-16.29940 \pm 1e - 5$	$-0.00010 \pm 3.512e - 05$
Laser Modulation Unit D1 (Dip 16)	$-3.28935 \pm 1e - 5$	$-0.00324 \pm 2.607e - 05$

Taula 5.20:

Taula 5.21: Comparativa entre moments magnètics tabulats i obtinguts després de la simulació de 4 fonts a l'eix Z

Podem apreciar que els resultats obtinguts difereixen molt del moment que esperaríem trobar. No obstant, al analitzar amb més detall un dels resultats trobats obtenim el següent

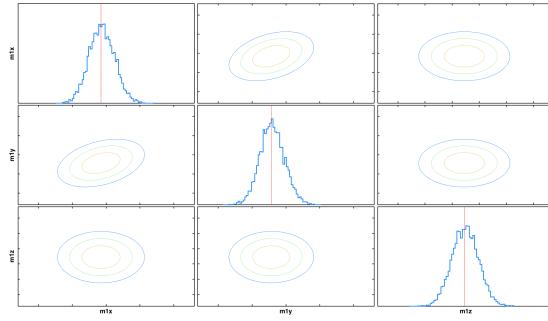


Figura 5.14: Taula de covariància per a la simulació de la font IS FEE SAU 1 D1 (Dip 8)

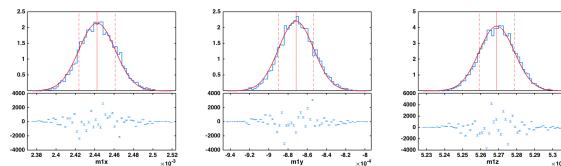


Figura 5.15: Figura dels perfils trobats per a la simulació de la font IS FEE SAU 1 D1 (Dip 8)

	MagPX_meanDCvals	MagPX_meanDCvals (error)	Units
B_MAG_PX_X_measured	0.73466	3e-05	[uT]
B_MAG_PX_X_estimated	0.73461	0	[uT]
B_MAG_PX_Y_measured	-0.89881	3e-05	[uT]
B_MAG_PX_Y_estimated	-0.89893	0	[uT]
B_MAG_PX_Z_measured	0.10374	4e-05	[uT]
B_MAG_PX_Z_estimated	0.10372	0	[uT]
	MagMX_meanDCvals	MagMX_meanDCvals (error)	Units
B_MAG_MX_X_measured	0.69358	3e-05	[uT]
B_MAG_MX_X_estimated	0.69302	0	[uT]
B_MAG_MX_Y_measured	-0.43232	3e-05	[uT]
B_MAG_MX_Y_estimated	-0.43177	0	[uT]
B_MAG_MX_Z_measured	0.10079	4e-05	[uT]
B_MAG_MX_Z_estimated	0.10098	0	[uT]
	MagPY_meanDCvals	MagPY_meanDCvals (error)	Units
B_MAG_PY_X_measured	-0.13374	3e-05	[uT]
B_MAG_PY_X_estimated	-0.13381	0	[uT]
B_MAG_PY_Y_measured	0.58098	3e-05	[uT]
B_MAG_PY_Y_estimated	0.58003	0	[uT]
B_MAG_PY_Z_measured	0.39781	3e-05	[uT]
B_MAG_PY_Z_estimated	0.39751	0	[uT]
	MagMY_meanDCvals	MagMY_meanDCvals (error)	Units
B_MAG_MY_X_measured	-0.11096	3e-05	[uT]
B_MAG_MY_X_estimated	-0.11108	0	[uT]
B_MAG_MY_Y_measured	1.0059	4e-05	[uT]
B_MAG_MY_Y_estimated	1.006	0	[uT]
B_MAG_MY_Z_measured	0.54526	4e-05	[uT]
B_MAG_MY_Z_estimated	0.54527	0	[uT]

Figura 5.16: Lectura dels magnetòmetres per a la simulació de la font IS FEE SAU 1 D1 (Dip 8)

Podem apreciar com la lectura dels magnetòmetres coincideix amb el camp generat per aquest dipol. Així doncs l'algoritme ens ha retornat el valor que minimitza la funció Likelihood. Al analitzar els altres dipols el que observem ⁶ és que tots presenten exactament la mateixa lectura, independentment de que estiguem simulant diferents fonts. La conclusió és que almenys en aquesta secció el codi està fallant alhora de carregar les dades simulades o d'executar el model emprant les fonts indicades. Amb les figures mostrades però, sí que podem afirmar que l'algoritme està assolint un mínim i aquest funciona correctament.

⁶A l'annex s'exposaran les figures corresponents a la lectura dels magnetòmetres de la resta de fonts

6 CONCLUSIONS

Per una banda, s'ha pogut comprovar que la missió LPF ha esdevingut satisfactòria a l'hora de presentar els resultats requerits per a la missió LISA. L'èxit de la missió depèn de múltiples factors, sent un d'ells la capacitat per reduir els errors associats al soroll en l'experiment. Ja sigui soroll mecànic, tèrmic, elèctric, magnètic...

Pel que fa aquest treball centrat en el tractament del soroll magnètic, podem afirmar basant-nos en els resultats anteriors que, tant l'anàlisi estadístic com l'algoritme utilitzat, esdevenen unes eines molt útils i potents alhora de resoldre problemes d'optimització d'aquest tipus, tot i així actualment s'estan desenvolupant la implementació d'aquests algoritmes per a les dades ja obtingudes de la missió.

Primerament hem pogut comprovar tant amb el primer exercici que l'algoritme és capaç de recuperar dades o paràmetres si la complexitat de l'exercici és "senzilla".

Malauradament, en el segon exercici, l'elecció de les posicions per als dipols virtuals no és trivial. Hem pogut veure que malgrat que obtenim uns resultats per al moment magnètic d'aquests dipols, no concorden amb les dades llegides pels magnetòmetres, així doncs, caldria incloure la posició dels dipols virtuals com a paràmetre lliure per tal de poder comprovar si almenys amb 4 dipols es poden explicar les dades llegides pels magnetòmetres o si el problema requereix d'algun altre tipus de solució, com per exemple, fer servir més fonts.

Per altra banda, tampoc s'ha pogut retrobar amb èxit el valor dels moments magnètics emprant dades simulades, però com s'ha comentat en el capítol 5.3.1, l'error es creu que prové d'una mala execució del codi alhora de carregar les dades simulades, sembla que les obvia. Actualment s'està treballant per resoldre aquest problema.

Finalment, més enllà de d'una aplicació en aquest àmbit, l'algoritme pot ser utilitzat en altres aplicacions. Ja que es tracta d'un "minimitzador de funcions" podria ser aplicable a la indústria, l'economia, tractament de big data, epidemiologia... En resum, en aquelles disciplines que requereixin de solucionar problemes amb múltiples variables.

7 ANNEX

7.1 POWER SPECTRAL DENSITY FUNCTION

La PSD és una funció que mesura la potència d'un senyal segons la freqüència d'aquest. Sigui x_t un senyal qualsevol dependent del temps t , la PSD s'expressa de la següent manera:

$$S_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau) \exp(2\pi i f\tau) d\tau [\text{W/Hz}] \quad (7.1)$$

On la funció r_{xx} és l'autocorrelació del senyal, definida per la següent expressió.

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)x^*(t) dt \quad (7.2)$$

7.2 CODI UTILITZAT AL CAPÍTOL 5.1

```

close all
clear all
%Dades a recuperar

%Recuperació de parametres emprant mcmc montecarlo markov chains
%Autor :Alejandro Encalado Masià

%Punts inicials
X(1,1)=rand()*200
X(1,2)=rand()*200
X(1,3)=rand()*200

Data(1) = X(1,1);
Data(2) = X(1,2);
Data(3) = X(1,3);
%nombre d'iteracions
iteracions = 15e4;
%Sigma dels nombres aleatoris proposats
sigma=3;
%Sigma de la gaussiana multivariable
h=100000;

accept=0;

```

```

for q=1:iteracions
    allsigma=h*[0.5,0.5,0.5];
    %Vatiables per fer el plot
    pas(q)=q;
    P(q)=X(q,1);
    Q(q)=X(q,2);
    R(q)=X(q,3);
    %Salts proposats a partir d'una distribuci? Gaussiana
    salt(1)=X(q,1)+randn()*sigma;
    salt(2)=X(q,2)+randn()*sigma;
    salt(3)=X(q,3)+randn()*sigma;

    if q>(1e4)/2
        if h==1
            %No fer res
        else
            h=(h-0.1);
            %disminueix el parametre h en una unitat
        end

    end
    %Funcions Likelihood, la Old es refereix a la que te com variable un
    %valor X(q) de la cadena, i la New la que te com a variable el salt
    %proposat
    Old_Likely=mvnpdf (X(q,:), Data, allsigma);
    New_Likely=mvnpdf (salt, Data, allsigma);
    %Condicions per acceptar o refusar els salts
    cond= New_Likely/Old_Likely;

    if New_Likely==0 && Old_Likely==0
        X(q+1,:)=X(q,:);
    end

    if abs(Old_Likely)<abs(New_Likely)
        X(q+1,:)=salt(:);
        accept=accept+1;
    end

    if abs(Old_Likely)>= abs(New_Likely)

```

```
coin=rand();

if coin<cond
X(q+1,:)=salt(:);
accept=accept+1;
end

if coin>=cond
X(q+1,:)=X(q,:);
end
end

figure
plot(pas,Q,pas,R,pas,P);
title('Markov Chain');
xlabel( 'nombre iteracions');
ylabel('Parametre lliure');

X(iteracions,1)
X(iteracions,2)
X(iteracions,3)
ratio=accept/iteracions
%discrepancia entre valors obtinguts i dades de prova
Disc1= abs((X(iteracions,1)-Data(1))/Data(1))
Disc2= abs((X(iteracions,2)-Data(2))/Data(2))
Disc3= abs((X(iteracions,3)-Data(3))/Data(3))
```

7.3 LECTURA DELS MAGNETÒMETRES A LES SIMULACIONS FETES AL CAPÍTOL 5.3.1

	MagPX_meanDCvals	MagPX_meanDCvals (error)	Units
B_MAG_PX_X_measured	0.73466	3e-05	[uT]
B_MAG_PX_X_estimated	0.73468	0	[uT]
B_MAG_PX_Y_measured	-0.89881	3e-05	[uT]
B_MAG_PX_Y_estimated	-0.89892	0	[uT]
B_MAG_PX_Z_measured	0.10374	4e-05	[uT]
B_MAG_PX_Z_estimated	0.10379	0	[uT]
	MagMX_meanDCvals	MagMX_meanDCvals (error)	Units
B_MAG_MX_X_measured	0.69358	3e-05	[uT]
B_MAG_MX_X_estimated	0.69359	0	[uT]
B_MAG_MX_Y_measured	-0.43232	3e-05	[uT]
B_MAG_MX_Y_estimated	-0.43236	0	[uT]
B_MAG_MX_Z_measured	0.10079	4e-05	[uT]
B_MAG_MX_Z_estimated	0.10083	0	[uT]
	MagPY_meanDCvals	MagPY_meanDCvals (error)	Units
B_MAG_PY_X_measured	-0.13374	3e-05	[uT]
B_MAG_PY_X_estimated	-0.13373	0	[uT]
B_MAG_PY_Y_measured	0.58098	3e-05	[uT]
B_MAG_PY_Y_estimated	0.58096	0	[uT]
B_MAG_PY_Z_measured	0.39781	3e-05	[uT]
B_MAG_PY_Z_estimated	0.39784	0	[uT]
	MagMY_meanDCvals	MagMY_meanDCvals (error)	Units
B_MAG_MY_X_measured	-0.11096	3e-05	[uT]
B_MAG_MY_X_estimated	-0.11084	0	[uT]
B_MAG_MY_Y_measured	1.0059	4e-05	[uT]
B_MAG_MY_Y_estimated	1.0058	0	[uT]
B_MAG_MY_Z_measured	0.54526	4e-05	[uT]
B_MAG_MY_Z_estimated	0.54526	0	[uT]

Figura 7.1: Lectura dels magnetòmetres per a la simulació de la font Laser Assembly D3 (Dip 14)

	MagPX_meanDCvals	MagPX_meanDCvals (error)	Units
B_MAG_PX_X_measured	0.73466	3e-05	[uT]
B_MAG_PX_X_estimated	0.73468	0	[uT]
B_MAG_PX_Y_measured	-0.89881	3e-05	[uT]
B_MAG_PX_Y_estimated	-0.89892	0	[uT]
B_MAG_PX_Z_measured	0.10374	4e-05	[uT]
B_MAG_PX_Z_estimated	0.10379	0	[uT]
	MagMX_meanDCvals	MagMX_meanDCvals (error)	Units
B_MAG_MX_X_measured	0.69358	3e-05	[uT]
B_MAG_MX_X_estimated	0.69359	0	[uT]
B_MAG_MX_Y_measured	-0.43232	3e-05	[uT]
B_MAG_MX_Y_estimated	-0.43236	0	[uT]
B_MAG_MX_Z_measured	0.10079	4e-05	[uT]
B_MAG_MX_Z_estimated	0.10083	0	[uT]
	MagPY_meanDCvals	MagPY_meanDCvals (error)	Units
B_MAG_PY_X_measured	-0.13374	3e-05	[uT]
B_MAG_PY_X_estimated	-0.13373	0	[uT]
B_MAG_PY_Y_measured	0.58098	3e-05	[uT]
B_MAG_PY_Y_estimated	0.58096	0	[uT]
B_MAG_PY_Z_measured	0.39781	3e-05	[uT]
B_MAG_PY_Z_estimated	0.39784	0	[uT]
	MagMY_meanDCvals	MagMY_meanDCvals (error)	Units
B_MAG_MY_X_measured	-0.11096	3e-05	[uT]
B_MAG_MY_X_estimated	-0.11084	0	[uT]
B_MAG_MY_Y_measured	1.0059	4e-05	[uT]
B_MAG_MY_Y_estimated	1.0058	0	[uT]
B_MAG_MY_Z_measured	0.54526	4e-05	[uT]
B_MAG_MY_Z_estimated	0.54526	0	[uT]

Figura 7.2: Lectura dels magnetòmetres per a la simulació de la font Laser Modulation Unit D1 (Dip 16)

	MagPX_meanDCvals	MagPX_meanDCvals (error)	Units
B_MAG_PX_X_measured	0.73466	3e-05	[uT]
B_MAG_PX_X_estimated	0.73471	0	[uT]
B_MAG_PX_Y_measured	-0.89881	3e-05	[uT]
B_MAG_PX_Y_estimated	-0.89869	0	[uT]
B_MAG_PX_Z_measured	0.10374	4e-05	[uT]
B_MAG_PX_Z_estimated	0.10391	0	[uT]
	MagMX_meanDCvals	MagMX_meanDCvals (error)	Units
B_MAG_MX_X_measured	0.69358	3e-05	[uT]
B_MAG_MX_X_estimated	0.69354	0	[uT]
B_MAG_MX_Y_measured	-0.43232	3e-05	[uT]
B_MAG_MX_Y_estimated	-0.4323	0	[uT]
B_MAG_MX_Z_measured	0.10079	4e-05	[uT]
B_MAG_MX_Z_estimated	0.10083	0	[uT]
	MagPY_meanDCvals	MagPY_meanDCvals (error)	Units
B_MAG_PY_X_measured	-0.13374	3e-05	[uT]
B_MAG_PY_X_estimated	-0.13375	0	[uT]
B_MAG_PY_Y_measured	0.58098	3e-05	[uT]
B_MAG_PY_Y_estimated	0.58103	0	[uT]
B_MAG_PY_Z_measured	0.39781	3e-05	[uT]
B_MAG_PY_Z_estimated	0.39784	0	[uT]
	MagMY_meanDCvals	MagMY_meanDCvals (error)	Units
B_MAG_MY_X_measured	-0.11096	3e-05	[uT]
B_MAG_MY_X_estimated	-0.11111	0	[uT]
B_MAG_MY_Y_measured	1.0059	4e-05	[uT]
B_MAG_MY_Y_estimated	1.006	0	[uT]
B_MAG_MY_Z_measured	0.54526	4e-05	[uT]
B_MAG_MY_Z_estimated	0.54548	0	[uT]

Figura 7.3: Lectura dels magnetòmetres per a la simulació de la font Reference Laser Unit D1 (Dip 21)

Veiem que per a les 3 figures totes presenten la mateixa lectura als magnetòmetres.

REFERÈNCIES

- [1] Steier, F., Cervantes, F. G., Marin, A. G., Gerardi, D., Heinzel, G., Danzmann, K. (2009). *The end-to-end testbed of the optical metrology system on-board LISA Pathfinder*. *Classical and Quantum Gravity*, 26(9), 094010.
- [2] Armano, M., Audley, H., Auger, G., Baird, J., Binetruy, P., Born, M., ... Cavalleri, A. (2015). *Disentangling the magnetic force noise contribution in LISA Pathfinder*. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 610, No. 1, p. 012024). IOP Publishing. .
- [3] Karnesis, N., Nofrarias Serra, M., Fernández Sopuerta, C., Pavón Coloma, D. (2015). *Bayesian data analysis is for lisa pathfinder. Techniques applied to system identification experiments*.
- [4] Armano, M., Audley, H., Auger, G., Baird, J. T., Bassan, M., Binetruy, P., ... Carbone, L. (2016). *Sub-femto-g free fall for space-based gravitational wave observatories: LISA pathfinder results*. *Physical review letters*, 116(23), 231101.
- [5] Lopez, J. (2014). *Magnetic fields analysis in the LISA PathFinder mission*.
- [6] Sivia, D., Skilling, J. (2006). *Data analysis: a Bayesian tutorial*. OUP Oxford.
- [7] Schutz, B. (2009). *A first course in general relativity*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [8] En.wikipedia.org. (2017). *Laser Interferometer Space Antenna*. [online] Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Laser_Interferometer_Space_Antenna [Accessed 8 May 2017].
- [9] Ca.wikipedia.org. (2017). *LISA Pathfinder*. [online] Available at: https://ca.wikipedia.org/wiki/LISA_Pathfinder [Accessed 8 May 2017].
- [10] En.wikipedia.org. (2017). *Multivariate normal distribution*. [online] Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_normal_distribution [Accessed 11 Apr. 2017].
- [11] Sci.esa.int. (2017). *ESA Science Technology: Home page*. [online] Available at: <http://sci.esa.int> [Accessed 19 Mar. 2017].
- [12] Elisascience.org. (2017). *LISA Gravitational Wave Observatory / We will observe gravitational waves in space / New Astronomy / LISA Pathfinder*. [online] Available at: <https://www.elisascience.org> [Accessed 23 May 2017].