

В.С. Моисеев

ПРИКЛАДНАЯ  
ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ  
БЕСПИЛОТНЫМИ  
ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ



Казань  
2013

*Светлой памяти моих родителей Марии Ивановны и Сергея Дмитриевича посвящается*

**В.С. Моисеев**

**ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ  
БЕСПИЛОТНЫМИ ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ**

**МОНОГРАФИЯ**

**Казань**

**2013**

УДК 629.7:629:195

ББК 39.56

М 74

**Редактор серии:**

**В.С. Моисеев** – заслуженный деятель науки и техники Республики Татарстан, д-р техн. наук, профессор.

**Моисеев В.С.**

М 74      Прикладная теория управления беспилотными летательными аппаратами: монография. – Казань: ГБУ «Республиканский центр мониторинга качества образования» (Серия «Современная прикладная математика и информатика»). – 768 с.

**ISBN 978-5-906158-53-6**

Предлагаются определения и классификация существующих и перспективных образцов беспилотной авиационной техники. Рассматриваются основные вопросы организации ее применения. Формулируются базовые положения прикладной теории управления БЛА, ориентированной на ее использование персоналом беспилотных авиационных комплексов различного назначения. Приводятся краткие сведения по математическим основам этой теории и численным методам, применяемым при формировании программного управления БЛА. Предлагаются общие и частные модели управляемого движения БЛА самолетной и вертолетной конструктивных схем.

Для формирования управления БЛА используются методы теории обратных задач динамики управляемого движения, вариационного исчисления и оптимального управления.

Рассматриваются основные подходы к реализации перспективных задач интеллектуального управления БЛА.

Книга предназначена для специалистов по эксплуатации БЛА, разработчиков и испытателей БЛА, а также для студентов, курсантов, аспирантов и докторантов, специализирующихся по направлениям, связанным с управлением различными видами беспилотной авиационной техники.

**ISBN 978-5-906158-53-6**

© Моисеев В.С., 2013

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора серии .....	9
Введение .....	22
Глава 1. Основные положения прикладной теории управ- ления беспилотными летательными аппаратами .....	26
1.1. Состав и классификация беспилотных ЛА .....	29
1.2. Структура современных беспилотных авиацион- ных комплексов .....	36
1.3. Организация функционирования беспилотных авиационных комплексов .....	48
1.4. Жизненный цикл БЛА и основные задачи его реали- зации .....	52
1.5. Общая характеристика прикладной теории управ- ления БЛА .....	59
Глава 2. Математические основы прикладной теории управления БЛА .....	73
2.1. Краткая характеристика теории обыкновенных дифференциальных уравнений .....	74
2.2. Безусловные и условные экстремумы функций многих переменных .....	92
2.3. Элементарная теория обратных задач управления динамическими объектами .....	99
2.4. Основы вариационного исчисления .....	118
2.4.1. Безусловные вариационные задачи .....	120
2.4.2. Вариационные задачи с подвижными грани- цами .....	127
2.4.3. Вариационные задачи с запрещенными облас- тями .....	130
2.4.4. Вариационные задачи на условный экстремум .....	133
2.4.5. Вариационные задачи в параметрической форме .....	136

2.5. Основы теории оптимального управления динамическими объектами . . . . .	141
2.5.1. Основные понятия теории . . . . .	142
2.5.2. Принцип максимума Л.С. Понtryгина . . . . .	145
2.5.3. Пример использования принципа максимума Л.С. Понtryгина . . . . .	149
Глава 3. Общие и специальные численные методы прикладной теории управления БЛА . . . . .	159
3.1. Численные методы решения систем дифференциальных уравнений . . . . .	159
3.1.1. Метод Эйлера . . . . .	160
3.1.2. Метод Рунге-Кутта . . . . .	164
3.2. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений . . . . .	166
3.2.1. Метод простых итераций . . . . .	167
3.2.2. Метод Зейделя . . . . .	169
3.3. Методы решения нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений . . . . .	173
3.4. Методы решения систем нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений . . . . .	177
3.5. Методы решения систем нелинейных параметрических уравнений . . . . .	187
3.6. Методы решения краевых задач . . . . .	196
3.7. Методы решения задач вариационного исчисления .	204
3.8. Градиентные методы решения задач оптимального управления . . . . .	214
Глава 4. Ветровые возмущения траекторий движения БЛА .	220
4.1. Общая характеристика ветровых возмущений . . . .	221
4.2. Оценки влияния ветровых возмущений на параметры полета БЛА . . . . .	231
4.3. Общий метод моделирования движения БЛА в неспокойной атмосфере . . . . .	242

Глава 5. Математические модели управляемого полета БЛА самолетных схем . . . . .	253
5.1. Модели пространственного движения БЛА . . . . .	254
5.2. Модели управляемых полетов БЛА в вертикальной и горизонтальной плоскостях . . . . .	282
5.3. Модели движения БЛА в географических координатах . . . . .	291
5.4. Модели управляемых установившихся режимов полетов БЛА . . . . .	299
5.5. Формирование требуемых законов прямого управления БЛА . . . . .	309
Глава 6. Модели управляемого полета БЛА одновинтовой вертолетной схемы . . . . .	329
6.1. Основные сведения из теории полета одновинтовых вертолетов . . . . .	329
6.2. Общая математическая модель управляемого полета беспилотного вертолета . . . . .	345
6.3. Частные модели управляемых полетов беспилотного вертолета . . . . .	355
Глава 7. Модели динамики старта, взлета и посадки БЛА .	366
7.1. Модели старта БЛА с мобильной пусковой установки . . . . .	367
7.2. Модель парашютной посадки БЛА . . . . .	377
7.3. Моделирование процессов аэродромного взлета и посадки БЛА . . . . .	391
7.4. Модели взлета и посадки беспилотного вертолета .	404
Глава 8. Траекторные методы формирования управления различными видами БЛА . . . . .	414
8.1. Управление полетами БЛА по требуемым плоским траекториям . . . . .	415
8.2. Управление полетами БЛА по требуемым пространственным траекториям . . . . .	434

8.3. Управление информационными БЛА . . . . .	446
8.3.1. Управление БЛА оптико-электронной видовой разведки и мониторинга наземных (надводных) объектов . . . . .	448
8.3.2. Управление БЛА разведки и мониторинга загрязнений воздушного бассейна . . . . .	486
8.3.3. Управление БЛА радиотехнической разведки .	493
8.3.4. Управление БЛА ретрансляции связи воздушных и наземных объектов . . . . .	498
8.4. Управление имитационными БЛА . . . . .	511
8.4.1. Общие рекомендации по применению авиационных ложных целей . . . . .	512
8.4.2. Управление одиночными авиационными ложными целями . . . . .	514
8.4.3. Управление групповыми полетами авиационных ложных целей . . . . .	536
8.4.4. Об одном теоретико-игровом подходе к применению авиационных ложных целей . . . . .	569
8.5. Управление боевыми БЛА . . . . .	577
8.5.1. Управление ударными БЛА . . . . .	577
8.5.2. Управление БЛА радиоэлектронной борьбы .	588
8.5.3. Адаптивное управление БЛА-истребителем при перехвате воздушной цели . . . . .	598
8.5.4. Управление вспомогательными боевыми БЛА	603
Глава 9. Некоторые задачи оптимального управления движением БЛА . . . . .	610
9.1. Управление противозенитными маневрами БЛА .	612
9.2. Управление полетами БЛА в плоских неодносвязных областях . . . . .	616
9.2.1. Управление полетом БЛА с максимальной площадью охвата ограниченной наземной поверхности . . . . .	616

9.2.2. Управление БЛА при облете зоны действия средств ПВО противника . . . . .	622
9.3. Управление полетами БЛА по замкнутой траекто- рии с максимальной площадью охвата наземной по- верхности . . . . .	626
9.3.1. Полет БЛА в спокойной атмосфере . . . . .	626
9.3.2. Полет БЛА при действии ветровых возмуще- ний . . . . .	633
9.3.3. Учет основных характеристик целевой аппа- ратуры БЛА оптико-электронной разведки и мо- ниторинга . . . . .	641
9.4. Управление БЛА при перелете между заданными точками маршрута в неспокойной атмосфере . . . . .	644
9.5. Управление торможением и разгоном БЛА . . . . .	655
9.6. Управление набором высоты БЛА . . . . .	665
9.7. Управление разбегом БЛА по взлетно-посадочной полосе аэродрома . . . . .	679
9.8. Оптимизация установившихся режимов полета БЛА . . . . .	682
9.8.1. Прямолинейный горизонтальный полет БЛА .	683
9.8.2. Барражирование БЛА по круговой траектории	685
Глава 10. Интеллектуальное управление БЛА . . . . .	690
10.1. Постановка проблемы интеллектуального управ- ления БЛА . . . . .	691
10.2. Структура перспективной интегрированной ин- теллектуальной системы управления БЛА . . . . .	712
10.3. Базовая бортовая экспертная система БЛА . . . . .	732
10.4. Основные вопросы реализации бортовой экспер- тной системы подсистемы «Полет» интегрированной интеллектуальной системы управления БЛА . . . . .	746
Заключение . . . . .	753
Список литературы . . . . .	756

## **Предисловие редактора серии**

В серии книг «Современная прикладная математика и информатика», ориентированных на специалистов в этих областях, а также на студентов, аспирантов и докторантов соответствующих специальностей, выходит очередная монография, посвящённая математическим моделям и методам решения основных задач прикладной теории управления беспилотными летательными аппаратами. Полученные в ней результаты могут быть использованы при разработке инженерных методик и прикладных информационных технологий создания и применения беспилотных авиационных комплексов различного назначения.

В течение 2004-2013 г.г. в этой серии опубликованы следующие работы:

**1. Моисеев В.С., Козар А.Н. Основы теории применения управляемых артиллерийских снарядов. Казань: Изд-во КВАКУ, 2004.**

Рассмотрена теория применения управляемых артиллерийских снарядов, даны модели и методы их оптимального планирования. Особое внимание уделяется методам преодоления управляемыми артиллерийскими снарядами зон активной защиты целей и планированию одновременного удара по цели несколькими управляемыми артиллерийскими снарядами.

Книга может быть полезна как для слушателей и курсантов высших военных учебных заведений, так и для работников научно-исследовательских институтов.

**2. Медведев В.И. Программирование на C++, C++.NET и C#. Казань: Мастер Лайн, 2005.**

Излагаются основные понятия и методика разработки объектно-ориентированных программ на языках C++, C++.NET и C# с использованием библиотеки классов Framework .NET платформы. Особое внимание удалено разработке Windows приложений из потоковых объектов и компонентов.

Монография предназначена для студентов вузов по направлению вычислительная техника и информатика, а также для всех, владеющих

языком программирования С и желающих освоить .NET технологию программирования.

**3. Зайдуллин С.С., Моисеев В.С. Математические модели и методы управления территориально распределёнными системами. Казань: Мастер Лайн, 2005.**

Рассмотрены теоретические основы управления сложными территориально распределёнными организационно-техническими системами. Решение задач анализа, синтеза и управления такими системами выполняется на основе специальных прикладных информационных технологий.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки территориально распределённых систем.

**4. Медведев В.И. Разработка компонентов и контейнеров на C++.NET и C#. Казань: Мастер Лайн, 2005.**

Углублённо рассмотрено построение компонентов, контейнеров и объединение компонентов в контейнере с предоставлением сервисных услуг на базе библиотеки классов .NET Framework.

Монография имеет практическую направленность и предназначена для всех, владеющих объектно-ориентированным программированием на языках C++.NET и C# и желающих освоить программирование .NET компонентов.

**5. Рахматуллин А.И., Моисеев В.С. Математические модели и методы оптимизации нестационарных систем обслуживания: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2006.**

Рассмотрены теоретические основы оптимизации и адаптивного управления процессами обслуживания в сложных информационных и организационно-технических системах. Применение разработанных математических моделей, методов и алгоритмов иллюстрируется на практических задачах оптимизации и адаптивного управления функционированием систем обслуживания.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами исследования и оптимизации нестационарных процессов в сложных системах различного назначения.

**6. Медведев В.И. .NET компоненты, контейнеры и удаленные объекты. Казань: РИЦ «Школа», 2006.**

Книга посвящена компонентам – основным программным единицам при построении Windows-приложений в .NET технологии. Кроме компонентов и контейнеров, объединяющих компоненты в коллекции, значительное внимание удалено удалённым объектам и событиям, а также разработке использующих их распределённых приложений.

Для студентов и преподавателей вузов по направлению вычислительной техники и информатики. Представляет интерес для всех, знающих основы языков C++ .NET и C# и желающих овладеть технологией создания и использования .NET компонентов для распределённых Windows приложений.

**7. Козар А.Н., Борзов Г.Е., Рахматуллин А.И., Сотников С.В. Информатика ракетных войск и артиллерии. -Казань: «Отечество», 2006.**

Работа посвящена применению современных программных оболочек типа Delphy для создания информационных технологий управления действиями ракетных войск и артиллерией тактического звена.

**8. Габитов Р.И., Емалетдинова Л.Ю. Модели и методы разработки автоматизированных систем организационного управления: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2007. – 120 с., ил.**

В монографии рассмотрены теоретические основы проектирования унифицированного программного обеспечения автоматизированных систем организационного управления технологическими процессами деятельности специалистов, а также оптимизационные модели, методы и алгоритмы, обеспечивающие эффективное функционирование проектируемой распределенной системы.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки автоматизированных систем организационного управления.

**9. Литвин В.М., Набережнов Г.М., Песошин В.А., Шлеймович М.П. Сжатие данных в системах числового программного управления. монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2007. – 108 с.**

Монография предназначена для широкого круга научных и инженерно-технических работников и студентов, занимающихся вопросами проектирования и моделирования систем числового программного управления.

**10. Валеев М.Ф., Емалетдинова Л.Ю. Автоматизация организационного управления технологическими процессами налогообложения граждан: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2007. – 136 с., ил.**

В монографии рассмотрены теоретические основы проектирования программного обеспечения автоматизированных систем организационного управления технологическими процессами налогообложения граждан, а также предлагается методика краткосрочного прогнозирования доходов граждан на основе автоматизированного построения моделей временных рядов.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки автоматизированных систем организационного управления.

**11. Тутубалин П.И., Моисеев В.С. Вероятностные модели обеспечения информационной безопасности автоматизированных систем обработки информации и управления: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2008. – 151 с.**

В монографии рассмотрены теоретические и практические основы создания максимально информационно безопасных, с точки зрения вероятностных критериев, автоматизированных систем обработки информации и управления, а также разработаны подходы и методы повышения эффективности использования средств информационной безопасности.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки автоматизированных систем специального назначения.

**12. Зиновьев П.А., Мейко А.В., Моисеев В.С. Инженерные методы расчета функциональной надежности и живучести корпоративных информационных систем: монография. Казань: Отечество, 2009. – 256 с.**

В монографии рассматриваются состав, структура и характеристики корпоративных информационных систем (КИС), обсуждаются их основные показатели надежности и живучести, формулируется постановка задач оценки функциональной надежности и живучести таких систем. Предлагаются математические модели и инженерные методы расчета этих критически важных показателей функционирования КИС.

Монография предназначена для широкого круга специалистов-разработчиков и инженерно-технических работников, занимающихся вопросами проектирования, внедрения и эксплуатации информационных систем корпоративного масштаба, а также оптимизацией режимов их функционирования на всех этапах жизненного цикла. Она может быть полезна также студентам старших курсов ВУЗов, бакалаврам, магистрам и аспирантам соответствующих специальностей.

**13. Красильников В.Н., Козар А.Н., Моисеев В.С., Красильников О.В. Переносные комплексы автоматизированного управления огнем артиллерии тактического звена: монография. Казань, Отечество, 2009. – 108 с.**

В книге проведен анализ и сравнительная оценка отечественных и зарубежных комплексов автоматизированного управления огнем тактического звена управления. Предложена методика построения перспективного переносного комплекса автоматизированного управления огнем. Дан обзор современных средств управления огнем в тактическом звене, в том числе и компонентов двойного назначения. Представлена методика разработки математического, программного, информационного и методического обеспечения переносного комплекса автоматизированного управления огнем. Рассмотрены перспективы включения переносного комплекса в интегрированную АСУ артиллерии тактического звена. Приведено расчетно-экспериментальное обоснование результатов проведенной работы.

Книга может быть полезна как для слушателей и курсантов высших военных учебных заведений, так и для работников научно-исследовательских институтов Министерства обороны Российской Федерации, занимающихся вопросами разработок и применения АСУ.

**14. Борзов Г.Е., Козар А.Н., Моисеев В.С. Применение беспилотных разведывательно-корректировочных вертолетов в перспективных комплексах автоматизированного управления огнем артиллерии тактического звена. Научное издание. Казанское высшее военное командное училище (военный институт), 2009. – 148 с.**

В монографии проведен анализ существующих и перспективных разведывательно-огневых комплексов (РОК) артиллерии тактического звена. Приведен анализ существующих и перспективных БЛА вертолетного типа. Предложена общая структура, функции и принципы по-

строения на базе АСУ садн перспективного РОК с применением БРКВ. Описан процесс функционирования РОК. Предложены математические модели и методы разведки, целеуказания и выбора начальных параметров стрельбы управляемых артиллерийских снарядов (УАС) с применением БРКВ. Предложены математические модели и методы управления БРКВ, целеуказания и выбора начальных параметров стрельбы УАС в вертикальной плоскости с использованием БРКВ в режимах «висения», вертикального подъема/снижения и горизонтального полета. Рассмотрены основные принципы, направления и рекомендации по созданию перспективной АСУ садн как среды для применения РОК. Предложена общая ИТ разведки, целеуказания и применения УАС в составе РОК перспективной АСУ садн. Предложена вероятностная оценка эффективности РОК для стрельбы УАС с использованием БРКВ.

Монография может быть использована как для слушателей и курсантов высших военных учебных заведений, так и для работников научно-исследовательских институтов Министерства обороны Российской Федерации, занимающихся вопросами разработок и применения беспилотных летательных аппаратов.

**15. Новикова С.В., Роднищев Н.Е. Основы идентификации динамических систем: монография. Казань: РИЦ «Школа», 2009. – 192 с.**

В монографии рассмотрены теоретические и практические основы создания эффективных методов и процедур адаптивной коррекции параметрической динамической системы в условиях неоднородности и неопределенности ее параметров при наличии внешних возмущающих факторов. Приводится разработка методов и процедур идентификации и коррекции управляемых стохастических систем с ограничениями на вектор состояния и параметры.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки и доводки автоматизированных технических систем.

**16. Альмухаметова А.Ф., Моисеев В.С. Математические модели и методы комплексного управления запасами и спросом в территориально-распределенной торговой корпорации: монография. Казань: РИЦ «Школа», 2010. – 170с.**

В монографии рассмотрена проблема управления основной деятельностью территориально-распределенной торговой корпорации,

сформулированы основные задачи комплексного управления запасами и спросом. Разработаны математические модели, методы, алгоритмы и прикладная информационная технология, обеспечивающие решение и реализацию представленных в работе задач.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами математического моделирования процессов оптимального управления запасами и спросом в логистике, а также разработкой и развитием корпоративных информационных систем в крупных торговых корпорациях. Книга может быть полезна студентам и аспирантам соответствующих специальностей.

**17. Моисеев В.С., Гущина Д.С., Моисеев Г.В. Основы теории создания и применения информационных беспилотных авиационных комплексов: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2010. - 189с., ил.**

В монографии рассмотрены основы прикладной теории создания на этапе аналитического проектирования и применения беспилотных авиационных комплексов, решающих задачи информационного обеспечения. Приводится научно-методический аппарат для выбора оптимальных проектных и эксплуатационных параметров таких комплексов.

Монография рассчитана на широкий круг специалистов, связанных с разработкой и эксплуатацией беспилотных авиационных комплексов, а также для студентов и аспирантов, специализирующихся в этой области.

**18. Ризаев И.С., Рахал Я. Интеллектуальный анализ данных для поддержки принятия решений: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2011. - 170с.**

Рассматриваются модели и алгоритмы в области интеллектуального анализа данных с использованием технологии Data Mining: классификация, кластеризация, поиск ассоциативных правил, прогнозирование. Методы проектирования хранилищ данных различной архитектуры. Разработка программного комплекса системы поддержки принятия решений.

Монография предназначена для широкого круга научных и инженерно-технических работников, преподавателей и студентов, занимающихся вопросами интеллектуального анализа данных на основе баз и хранилищ данных.

**19. Моисеев В.С., Матвеев И.В., Нестерова Л.Е. Модели и методы создания перспективных учебно-тренировочных вертолетов: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2011. - 160с., ил.**

В монографии рассмотрены теоретические и практические основы создания перспективных учебно-тренировочных вертолетов на базе существующих образцов, разработан научно-методический аппарат выбора оптимального для модернизации вертолета, и решения круга задач его модернизации в учебно-тренировочный вариант применения.

Монография предназначена для широкого круга специалистов, занимающихся исследованиями в области разработки цифровых систем управления современных пилотируемых и беспилотных летательных аппаратов вертолетной схемы.

**20. Бутузова А.В., Моисеев В.С., Тутубалин П.И. Теоретические основы информатизации службы скорой медицинской помощи: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2011. - 242с., ил.**

В монографии изложены результаты оригинальных научных исследований и практические реализации, связанные с актуальной задачей разработки математических моделей и методов информатизации лечебно-профилактических учреждений и защиты персональных данных в них, в частности в работе рассмотрены подходы к информатизации деятельности такой жизненно важной структуры как служба скорой медицинской помощи.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки автоматизированных систем специального назначения.

**21. Горбунов Д.А., Моисеев В.С. Основы прикладной теории неявных математических моделей и методов: монография. – Казань: РИЦ, 2012. – 172 с.**

В монографии изложены результаты оригинальных научных исследований и практические реализации, связанные с актуальной задачей разработки математических моделей и методов построения и оптимизации неявно заданных функциональных моделей в задачах анализа и синтеза реальных технических систем.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки автоматизированных систем специального назначения.

**22. Иванов К.В., Тутубалин П.И. Марковские модели защиты автоматизированных систем управления специального назначения: монография. – Казань: РЦ МКО, 2012. – 216 с., ил.**

В монографии изложены результаты оригинальных научных исследований и практические реализации, связанные с актуальной задачей разработки математических моделей и методов обеспечения информационной безопасности автоматизированных систем управления специального назначения.

В работе рассмотрены подходы по информатизации таких особо важных структур как военные и полевые мобильные автоматизированные системы управления на основе предложенных новых образцов информационного оружия. Анализ защищённости систем, оснащённых новыми образцами информационного оружия, проводится с применением теории вероятностей и марковских процессов.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки автоматизированных систем специального назначения.

**23. Медведев В.И. .NET компонентно-ориентированное программирование. – Казань: РИЦ, 2012 – 276 с.: ил**

Книга посвящена компонентам. Являясь особыми объектами объектно-ориентированного программирования, объекты компонентов обладают дополнительными свойствами и поведением, позволяющими построение из них надежных программ.

Компонентно-ориентированное программирование рассматривает особенности поведения и взаимосвязи компонентов, предлагая общие правила их построения и использования при разработке надежных и безопасных многокомпонентных программ.

В книге излагаются основы программирования .NET компонентов совместно с контейнерами, существенно облегчающих их совместное применение. Уделено внимание базовым интерфейсам и классам компонентов и контейнеров, а также активно используемым компонентам и асинхронными вызовам и событиям, потокам и их синхронизации, освобождению ресурсов, сериализации объектов, удаленным компонентам.

Изложение сопровождается многочисленными примерами законченных консольных программ и Windows приложений на языках объектно-ориентированного программирования C++/CLI и C#.

Книга завершается разработкой распределенных многокомпонентных приложений с объектами компонентов, объединенных в объекте контейнера на сервере и управляемых клиентом через удаленный компонент. Программы поясняются диаграммами языка UML.

Для студентов и преподавателей вузов по направлению вычислительной техники и информатики. Представляет интерес для всех, знакомым с объектно-ориентированным программированием на языках C# и C++/CLI и желающих овладеть основами технологии .NET компонентно-ориентированного программирования.

**24. Козар А.Н., Моисеев В.С. Информационные технологии оптимального применения управляемых артиллерийских снарядов: монография. – РЦ МКО, 2012. – 348 с.**

В книге рассмотрена теория применения управляемых артиллерийских снарядов, даны модели и методы их оптимального планирования. Особое внимание уделяется методам преодоления управляемыми артиллерийскими снарядами зон активной защиты целей и планированию одновременного удара по цели неуправляемыми и управляемыми артиллерийскими снарядами. Излагаются модели и методы организации подсвета целей с беспилотных летательных аппаратов. Сделан обзор опубликованных исследований ряда авторов, работающих в области применения управляемых артиллерийских снарядов. Приводится описание перспективного бортового оборудования управляемых артиллерийских снарядов и рассмотрены информационные технологии и их применения.

Книга может быть полезна как для слушателей и курсантов высших военных учебных заведений, так и для работников научно-исследовательских институтов Министерства обороны Российской Федерации, занимающихся вопросами применения управляемых артиллерийских снарядов.

**25. Моисеев Г.В., Моисеев В.С. Основы теории создания и применения имитационных беспилотных авиационных комплексов: монография. – Казань: РЦ МКО, 2013. – 207 с., ил.**

В монографии рассмотрены основы прикладной теории создания и применения имитационных беспилотных авиационных комплексов.

На основе результатов системного анализа предметной области определены роль и место, особенности проектирования и типовые эпизоды применения комплексов авиационных ложных целей воздушного

старта. Рассмотрен типовой состав и функции воздушного пункта управления авиационными ложными целями.

Предложен комплекс математических моделей и методов определения оптимального состава смешанных авиационных группировок, продолжительности их применения, оценки потерь и требуемого количества воздушных пунктов управления. Предложен оригинальный метод формирования законов управления авиационной ложной целью на основе бортовых полетных данных самолета-имитатора.

Приводятся постановки и методы решения основных задач создания авиационных ложных целей, обеспечивающих формирование оптимальных проектных и управлений решений в процессе их разработки, в том числе при определении проектных параметров системы «самолет-носитель – авиационные ложные цели».

Монография рассчитана на широкий круг специалистов, связанных с разработкой и эксплуатацией беспилотных авиационных комплексов, а также на студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

**26. Медведев В.И. Особенности объектно-ориентированного программирования на C++/CLI, C# и Java: 4-е изд., испр. и доп. - Казань: РЦ МКО, 2013. 450 с.: ил.**

Излагаются основные понятия и методика разработки объектно-ориентированных программ на языках C++/CLI, C# и Java (J#) с применением пакетов языка Java и библиотеки .NET Framework языков C++/CLI и C#.

Изложение сопровождается многочисленными примерами законченных программ. Программы поясняются диаграммами языка UML.

Особое внимание акцентировано на наиболее сложных для понимания делегатах, событиях уведомлениях, потоках и их синхронизации, преобразовании данных.

Параллельное изложение схожих основных языковых конструкций позволит лучше выявить не только близость и различие языков C++/CLI, C# и Java, но и лучше понять особенности этих языков.

В четвертом издании книги добавлен раздел о данных и их преобразовании, расширены ряд разделов, заменена поэтапно разрабатываемая много объектная программа на более интересную, также содержащую абстрактный класс, множество потоков, событий и уведомлений, наглядно иллюстрирующих особенности написания программ на языках C++/CLI, C# и Java.

Для студентов и преподавателей вузов и специалистов по направлению вычислительной техники и информатики. представляет интерес для всех, знающих язык С и изучающих объектно-ориентированное программирование, а также для тех, кто, овладев языком С++, интересуется особенностями и различиями программирования на языках С++/CLI, Java и С#.

**27. Моисеев Г.В. Методы параллельных вычислений: учебное пособие. Казань: РЦ МКО, 2013. 117 с.**

Приводятся принципы построения параллельных вычислительных систем, модели и методы анализа параллельных вычислений, методы оценки коммуникационной трудоемкости параллельных алгоритмов и принципы их разработки.

Предназначено для бакалавров техники и технологии по направлению 230100.62 – «Информатика и вычислительная техника».

**28. Гимадеев Р.Г., Моисеев В.С., Арутюнова Н.К. Обратные задачи управления беспилотными летательными аппаратами артиллерийской разведки: монография. – Казань: РЦ МКО, 2013. – 245 с.**

На основе результатов системного анализа предметной области определены требования, предъявляемые к беспилотным летательным аппаратам артиллерийской разведки и разработана их классификация. Предложена структура и функции беспилотных авиационных комплексов ближней, средней и дальней артиллерийской разведки. Рассмотрены вопросы эксплуатации таких комплексов.

Предложены методы расчета характеристик областей обзора наземной поверхности средствами воздушной артиллерийской разведки – бортовыми оптико-электронными системами и радиолокационными станциями. Сформированы типовые траектории полетов беспилотных летательных аппаратов артиллерийской разведки.

Разработаны методы решения обратных задач управления динамическими системами при наличии ограничений на управления и для случаев, когда число управляемых воздействий больше числа фазовых координат объектов.

Эти методы предложено использовать совместно с типовыми траекториями полетов беспилотных летательных аппаратов артиллерийской разведки для формирования программного управления их реализацией.

Приведены примеры решения задач формирования управлений для поиска и обнаружения различных видов объектов артиллерийской разведки.

Монография рассчитана на широкий круг специалистов, связанных с разработкой и эксплуатацией беспилотных авиационных комплексов, а также на студентов (курсантов) и аспирантов (адъюнктов) соответствующих специальностей.

Авторами опубликованных в серии «Современная прикладная математика и информатика» монографий и учебников являются сотрудники кафедр «Прикладная математика и информатика», «Автоматизированные системы обработки информации и управления», «Компьютерные системы» Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева (КНИТУ-КАИ), преподаватели Казанского высшего военного командного артиллерийского училища (ныне КВВКУ), ученые Института проблем информатики АН РТ и специалисты ОАО ICL-КПОВС, ОАО ОКБ «Сокол».

Многие из полученных научных и прикладных результатов внедрены в практику работы предприятий и организаций г. Казани и получили положительные оценки военных специалистов, ученых и ИТ-специалистов РФ. Материалы, опубликованных монографий активно использовались в учебном процессе и научной работе студентами, аспирантами и докторантами КНИТУ-КАИ и других вузов г. Казани.

Редактор серии благодарит руководителей ОАО ICL-КПО ВС В.В. Дьячкова и А.В. Артамонова за долголетнее спонсорское содействие в издании книг серии «Современная прикладная математика и информатика».

*Заслуженный деятель науки и техники РТ,  
доктор технических наук,  
профессор В.С. Моисеев*

## **ВВЕДЕНИЕ**

В настоящее время беспилотные летательные аппараты (БЛА) самолетной и вертолетной схем разрабатываются и производятся в более чем 30 странах мира. Отечественная беспилотная авиационная техника, которая зародилась в 60-70 г.г. XX века переживает в настоящее время кризис своего развития. Это связано с высоким уровнем аварийности существующих образцов БЛА. Причинами аварийности являются неудовлетворительные характеристики управляемости и устойчивости БЛА, недостатки в их системах управления, линиях передачи информации, недостаточной прочности конструкции БЛА и плохими навыками операторов управления. Это вызвано отсутствием у разнообразных фирм-разработчиков российских БЛА требуемой квалификации, а также нормативно-технической и регламентирующей документации типа «Руководств для конструкторов БЛА» и «Норм летной годности» (НЛГ) БЛА» на разработку и эксплуатацию различных видов и типов БЛА.

На наш взгляд, такая документация должна базироваться, как в пилотируемой авиации, на результатах отсутствующей к настоящему времени *теории автоматизированного проектирования, управления и применения БЛА различного назначения*. Эта теория должна обобщить имеющийся более чем 70-летний мировой опыт активного создания и применения БЛА.

Другой причиной высокой аварийности БЛА является тот факт, что до настоящего времени БЛА рассматриваются и эксплуатируются на практике в основном как дистанционно пилотируемые ЛА (ДПЛА). Последнее означает, что основным режимом управления полетом БЛА является ручной радиокомандный режим, реализуемый оператором с мобильного наземного пункта управления, входящего в состав беспилотного авиационного комплекса.

Пренебрежение сложными программными режимами управления полетами БЛА, когда программируются только их

прямолинейные траектории движения между поворотными пунктами маршрута, за счет объективных ошибок операторов управления и приводит к их высокой аварийности. К причинам таких ошибок можно отнести сложность точного пилотирования ДПЛА по удаленному изображению местности на экране АРМ оператора, запаздывание и помехи в радиолинии управления, внезапные порывы ветра, усталость операторов и др. Кроме этого, применение БЛА как ДПЛА не позволит по психофизиологическим ограничениям операторов обеспечить применение крупных группировок БЛА, когда каждый оператор должен управлять несколькими находящимися в воздухе БЛА.

Анализ работ, посвященных вопросам управления БЛА, показал, что в практических задачах формирования управления БЛА не используются достаточно разработанные современные методы управления ЛА, такие как методы теории обратных задач динамики управляемых систем, вариационного исчисления и оптимального управления.

Применение этих методов позволяет использовать в практике программирования полетов БЛА траекторный подход вместо использования для этих целей применяемых в настоящее время координатных и координатно-временных графиков движения БЛА.

Такой подход позволяет эксплуатантам БЛА при получении полетного задания выбрать наиболее подходящую под конкретную ситуацию траекторию полета БЛА. При этом будет учитываться, как желание эксплуатантов наиболее эффективно выполнить полученное задание, так и опыт выполнения предыдущих полетов БЛА. После формирования требуемой траектории полета БЛА методами теории обратных задач определяется управление, обеспечивающее движение БЛА по этой траектории. Последнее проверяется путем моделирования полета БЛА при найденном управлении.

Задачи оптимального управления БЛА самолетной и вертолетной схем в существующей литературе практически не рассматриваются, хотя возможностей оптимизации в этой области за счет многообразия образцов БЛА и решаемых ими задач значительно больше, чем в ракетной технике и пилотируемой авиации.

Теория управления различными видами объектов начала развиваться в нашей стране с конца 50-х годов прошлого века. Наибольшие достижения она получила в 70-х годах при решении в СССР ракетно-космической проблемы.

Следует отметить, что к настоящему времени результаты в области практического использования задач управления различными видами ЛА являются весьма незначительными.

Вследствие широкого распространения БЛА в мировой практике и активного начала этого процесса в РФ теория и практика эффективного управления этим видом ЛА должна получить новый импульс к своему развитию.

При этом необходимо добиться того, чтобы методы этой теории не вызвали неприятие практиками ее результатов, как это было в свое время с теорией оптимального управления ЛА.

Одним из важнейших направлений этого процесса является достаточно простое доведение до сведения эксплуатантов БЛА целей, задач и методов формирования требуемых управлений различными видами и типами БЛА. Важность решения этих вопросов объясняется тем, что именно они должны формулировать, формализовать и решать эти задачи в своей практической деятельности.

Целью данной работы является систематизация существующих и новых подходов к решению практических задач управления БЛА самолетной и вертолетной схем, получивших наибольшее распространение у нас в стране и за рубежом. Материал монографии ориентирован в основном на эксплуатантов БЛА, обладающих вузовскими знаниями в области высшей ма-

тематики и теоретической механики, а также имеющими первичные знания по аэродинамике, конструкции и динамике полета ЛА.

Прикладная теория управления БЛА подразумевает активное использование в их практической деятельности соответствующих моделей и численных методов формирования управлений, требуемых для выполнения полетных заданий. Поэтому в книге приводится краткий справочный материал по теории дифференциальных уравнений, обратных задач управления, вариационного исчисления и теории оптимального управления.

Кроме этого, излагаются сведения по общим и специальным численным методам решения систем дифференциальных, линейных и нелинейных алгебраических и параметрических уравнений, а также задач вариационного исчисления и оптимального управления.

Предлагаемые в работе упрощенные с точки зрения практического использования математические модели управляемого движения БЛА на различных этапах их полетов и методы формирования требуемых при этом управлений сопровождаются подробными объяснениями их математического содержания со ссылками на соответствующие численные методы, применяемые при их практической реализации.

В заключительной главе монографии рассматривается такое перспективное направление современной теории управления, как интеллектуальное управление БЛА.

Автор благодарит Е.М. Комисарову за предоставленные материалы по общим численным методам, а также Н.К. Арутюнову и Л.Т. Моисееву за большой труд по подготовке рукописи к изданию и выполнению расчетов в приведенных в ней примерах.

Все замечания по материалам, представленным в монографии, будут с благодарностью приняты автором по электронному адресу [em131@yandex.ru](mailto:em131@yandex.ru).

# **Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ БЕСПИЛОТНЫМИ ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ**

Беспилотные летательные аппараты (БЛА) являются уникальным, бурно развивающимся во всём мире видом авиационной техники, предназначенным в основном для применения в условиях, когда применение пилотируемых ЛА невозможно либо нецелесообразно [43, 101, 106].

Основными свойствами БЛА самолётного и вертолётного типов, выгодно отличающими их от пилотируемых самолётов и вертолётов, являются:

- более высокая выживаемость БЛА в условиях противодействия средств ПВО противника вследствие их меньшей заметности во всех диапазонах длин радиоволн;
- возможность их взлета практически при любом рельефе местности без проведения подготовительных инженерных работ;
- способность пребывания в высоких степенях готовности практически неограниченное время;
- более короткие сроки и меньшая стоимость обучения операторов наземных пунктов управления БЛА по сравнению с подготовкой экипажей пилотируемых ЛА;
- значительно меньшие стоимость (на один-два порядка в зависимости от целевого предназначения и параметров БЛА) и сроки развертывания их серийного производства;
- возможность выдачи информации потребителям практически в реальном масштабе времени;
- способность функционировать в условиях высокого радиоактивного, химического и бактериологического заражения воздуха и местности, а также при неблагоприятных метеоусловиях;

В настоящее время БЛА широко используются для ведения воздушной разведки и выдачи данных целеуказания. При этом

остро ощущается недостаток данных воздушной разведки, передаваемых в реальном времени при ведении боевых действий в локальных войнах и вооружённых конфликтах.

В ведущих странах мира активно проводятся мероприятия, направленные на дальнейшее повышение эффективности применения ударных ЛА и авиационного вооружения, снижение потерь авиационной техники и личного состава, а также расхода сил и средств на её обслуживание. Одним из направлений работ при решении этой проблемы является создание боевых БЛА, и в первую очередь специализированных БЛА многоразового использования, основным предназначением которых будет обнаружение, идентификация и поражение критических наземных стационарных и мобильных целей, огневое подавление средств системы ПВО противника, а в отдаленной перспективе – и борьба с воздушными целями. Основными требованиями к таким БЛА являются сравнительно невысокая стоимость производства, простота технического обслуживания и эксплуатации.

На современном этапе развития БЛА зарубежные военные специалисты планируют существенно расширить зону возможного применения БЛА не только для решения задач разведки и наблюдения, но и для поражения наземных и воздушных целей, а также выполнения ряда задач боевого обеспечения.

В частности проводятся эксперименты, связанные с разведкой погоды в районе боевых действий (сбор и передача данных о скорости ветра и атмосферном давлении), для чего применяются БЛА, оборудованные специальной метеорологической аппаратурой. Кроме того, с использованием БЛА изучается возможность выполнения лазерного подсвета наземных целей для применения высокоточного оружия (ВТО) наземного или воздушного базирования. При этом следует заметить, что основным видом БЛА в настоящее время являются БЛА самолетных схем.

Разработкой БЛА вертолётного типа занимаются специалисты практически всех ведущих стран мира. Их основным заказчиком являются различные военные и гражданские специальные службы.

Управление такими БЛА осуществляется в настоящее время по командам оператора или в полуавтоматическом режиме с использованием навигации по опорным точкам.

Главное преимущество беспилотного комплекса с БЛА вертолётного типа состоит в вертикальном взлёте и посадке, значительно упрощающих вопросы эксплуатации с точки зрения применяемого стартово-посадочного оборудования.

Анализ существующей отечественной и зарубежной литературы по БЛА [2, 4, 7, 31, 43, 44, 50, 57, 74, 83, 84, 91, 101, 102 и др.] показывает, что к настоящему времени отсутствует единый общепринятый подход к разработке и применению беспилотной авиационной техники в военной и гражданской областях. Этим, на наш взгляд, вызвано многообразие используемой терминологии, а также понятий и классификаций беспилотных ЛА и комплексов различного назначения.

Для разработки и успешного использования в этих областях беспилотных средств авиационной техники необходима единая терминология и их классификация, отражающие состав, назначение и область применения [106].

На базе такой терминологии, единой классификации и существующих методов описания движения и управления БЛА должны быть разработаны прикладные модели и методы программирования их полетов, пригодные для использования персоналом беспилотных комплексов в его повседневной деятельности. Все эти модели и методы предполагается объединить в рамках прикладной теории управления БЛА различного назначения.

## **1.1. Состав и классификация беспилотных ЛА**

Основным системообразующим элементом рассматривающихся авиационных комплексов являются применяемые в их составе беспилотные ЛА.

*Беспилотным ЛА (БЛА)* будем обозначать ЛА, не имеющий на борту пилота, использующий силу тяги двигателей и аэродинамические силы для многократных полетов в атмосфере, имеющий целевую нагрузку, определяющую его назначение, и осуществляющий полет как по заранее заданной программе, так и при необходимости с использованием дистанционного (радиокомандного) управления [1].

Это определение включает в себя существующие в настоящее время понятия БПЛА, ДПЛА и др. Кроме этого, оно отделяет этот вид ЛА от управляемых (крылатых) ракет и автоматических космических аппаратов, для обозначения которых в нашей стране была принята аббревиатура «БЛА» [2, 4, 5, 7, 15].

В настоящее время резко возрастает роль программного управления БЛА. Это связано с общемировой тенденцией увеличения уровня автономности БЛА [43] при решении поставленных целевых задач, особенно в составе находящихся в воздухе группировок БЛА.

Преимущественное использование программного управления БЛА дополнительно объясняется необходимостью разгрузки операторов, позволяющей им управлять несколькими находящимися в воздухе аппаратами, что повышает эффективность и оперативность группового решения целевых задач.

Типовой состав БЛА [1] представлен на Рис. 1.1.

Основным компонентом комплекса бортового оборудования БЛА является система автоматического управления (САУ).

В ее составе выделяются подсистемы директёрного (траекторного) управления и стабилизации параметров полета БЛА.

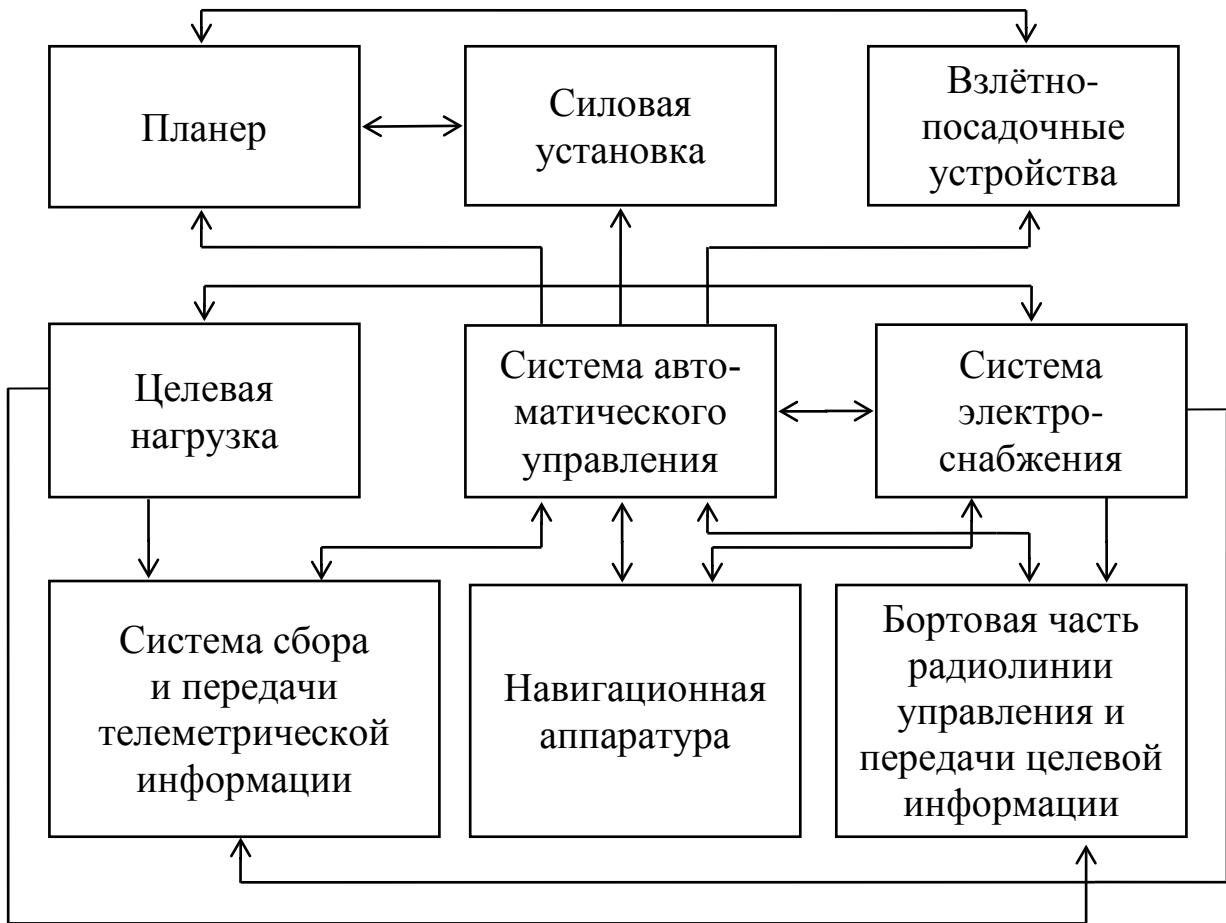


Рис. 1.1

Первая подсистема предназначена для реализации программного управления БЛА с помощью исполнительных механизмов двигателя и планера. Назначением второй важнейшей для БЛА подсистемы САУ, называемой системой стабилизации (автопилотом), является выработка управляющих воздействий на эти механизмы, ликвидирующих отклонения БЛА от программной траектории и недопустимые с точки зрения его устойчивости и управляемости угловые вращения БЛА. Навигационная аппаратура современных БЛА в основном реализуется с использованием приемников спутниковых навигационных систем GPS и ГЛОНАСС [49]. Эти системы выдают текущие координаты и составляющие скорости БЛА в геоцентрических прямоугольных системах координат ПЗ-90.02 (ГЛОНАСС) и WGS-84 (GPS). В существующих образцах спутниковой навигационной аппаратуры БЛА имеется возможность настройки на

тип координат (геоцентрические или геодезические) и на используемую систему координат (WGS-84, ПЗ-90, ПЗ-90.02, СК-42, СК-95).

Отметим, что для некоторых БЛА система сбора и передачи телеметрической информации может отсутствовать.

Приведём классификацию БЛА по основным конструкционным и функциональным признакам.

По конструкционным признакам существующие и перспективные БЛА разбиваются на следующие виды:

1. БЛА самолётных схем (СС);
2. БЛА вертолётных схем (ВС).

В составе БЛА СС в настоящее время имеются образцы с компоновками типов классической схемы, схемы «утка», схемы «бесхвостка» и схемы «летающее крыло» [46].

Вертолетные БЛА в настоящее время представляются образцами традиционных одно- и двухвинтовых схем [47].

Большинство беспилотных вертолётов имеют одновинтовую схему. Это объясняется сравнительной простотой конструкции и более благоприятными аэродинамическими характеристиками изолированного несущего винта. Основные недостатки вертолёта одновинтовой схемы – непроизводительные затраты мощности силовой установки на привод рулевого винта, а также необходимость хвостовой и концевой балок и агрегатов хвостовой трансмиссии.

У беспилотных вертолётов двухвинтовой схемы, например Ка-137с реактивные моменты несущих винтов взаимно уравновешиваются благодаря вращению винтов в противоположные стороны, а мощность силовой установки используется в основном для создания подъёмной и движущей сил. В этом состоит главное преимущество двухвинтового вертолёта перед одновинтовым. К основным недостаткам этой схемы можно отнести неблагоприятное взаимное аэродинамическое влияние несущих

винтов, достаточно сложную конструктивную синхронизацию их вращения и высокую трудоемкость изготовления малогабаритного автомата перекоса.

Преимуществами БЛА вертолётного типа являются [31]:

- более высокая мобильность;
- быстрое развёртывание и приведение в готовность к полетам;
- отсутствие дополнительного оборудования при старте и посадке;
- наличие режима «висения», который позволяет более достоверно определять оперативную обстановку;
- возможность посадки в режиме авторотации при отказе двигателя БЛА;
- возможность оперативного взлёта и старта, практически из любой точки местности.

Отметим, что в мировой практике значительно меньшее распространение получили БЛА ВС с соосными винтами.

БЛА нетрадиционных схем в настоящее время находятся в основном на стадии экспериментальных разработок и в данной работе не рассматриваются.

При этом по способам взлета и посадки БЛА СС делятся на БЛА, совершающие эти действия «по-самолетному» (с помощью шасси) и БЛА, стартующие с помощью специальных устройств (пусковая установка, «жгут», «с руки» и т.п.) и приземляющиеся с помощью парашютов.

По типу использования в составе БЛА силовых установок выделяются:

- БЛА с электродвигателем (ЭД);
- БЛА с поршневым двигателем (ПД);
- БЛА с воздушно-реактивным двигателем (ВРД).

Описание этих видов силовых установок приведено в работе [102].

По возможностям решения целевых задач БЛА подразделяются на следующие типы [1]:

- БЛА ближнего действия (БЛА БД) с длительностью полета 1-2 часа;
- БЛА среднего действия (БЛА СД) с полетным временем 6-12 часов;
- БЛА дальнего действия (БЛА ДД) с продолжительностью полетов 24-48 часов.

Первый тип БЛА составляют БЛА СС и ВС, оснащённые ЭД и ПД. При этом БЛА СС осуществляют старт «с руки» или «жгута» и парашютную посадку в заданном районе.

Для БЛА СД, осуществляющих более длительные полёты, применяются БЛА СС и ВС, оснащённые ПД. Самолётные БЛА этого типа производят взлет и посадку с помощью пусковых установок и парашютов, а также шасси с использованием специально подготовленных площадок. Вертолётные БЛА СД из-за малой крейсерской скорости и возможности «зависания» используются в основном для разведки и подсвета целей при стрельбе ВТО.

В состав БЛА ДД обычно входят БЛА СС, оснащённые ПД и ВРД, осуществляющие взлет и посадку с помощью шасси.

По дополнительной классификации конкретный образец БЛА можно отнести [1]:

- а) по взлётной массе – к сверхлёгким (до 5 кг), лёгким (до 200 кг), средним (до 1000 кг) и тяжелым (свыше 1000 кг) БЛА;
- б) по продолжительности полёта – к малой (до 1 ч.), средней (до 10 ч.) и большой (свыше 10 ч.) длительности нахождения БЛА в воздухе;
- в) по высоте полёта – к низковысотным (до 1000 м), средневысотным (до 10000 м) и высотным (до 15000-20000 м) БЛА.

По скорости полета практически все существующие БЛА можно отнести к дозвуковым ЛА с числом Маха  $M < 1$ . Вместе с тем, в мировой практике ведутся исследования и разработки по созданию сверхзвуковых и гиперзвуковых БЛА.

Конкретизируя классификацию БЛА по функциональному назначению, приведенную в работе [1], задачи прикладной теории управления будем рассматривать применительно к их видам и типам, представленным на Рис. 1.2.



Рис. 1.2

Назначение, состав и функции наиболее распространенных в настоящее время информационных БЛА (ИнБЛА), кроме БЛА радиотехнической разведки и БЛА-ретрансляторов, описаны в монографии [1]. Имитационные БЛА, воспроизводящие летно-технические и отражательные характеристики реальных воздушных целей, представлены в предлагаемой классификации как авиационные ложные цели (АЛЦ) [89].

При этом учебно-испытательные АЛЦ (УИАЛЦ), применяемые для обучения персонала ПВО и испытаний новых образцов средств борьбы с воздушными целями, должны имитировать образцы зарубежных ЛА, а боевые АЛЦ, используемые в операциях ВВС, – образцы отечественных самолетов и вертолетов.

Относительно новым, но бурно развивающимся видом беспилотной авиационной техники являются боевые БЛА. Обобщая имеющийся в этой области опыт и перспективы их развития [43-45 и др.], предлагается выделить в составе боевых БЛА следующие типы:

- Ударные БЛА, предназначенные для борьбы с наземными целями с использованием авиационных средств поражения;
- БЛА радиоэлектронной борьбы (БЛА-РЭБ), применяемые для вывода из строя наземных и воздушных средств связи и управления противника;
- БЛА-истребители (БЛА-И) для борьбы с беспилотными и пилотируемыми ЛА;
- Вспомогательные БЛА, предназначенные для выполнения определенных функций по обеспечению боевых действий подразделений сухопутных войск.

Отметим, что БЛА гражданского назначения (БЛА-ГН) в настоящее время находится в стадии становления [1, 50].

К основным задачам таких БЛА предлагается относить [1]:

- 1) мониторинг (контроль) подстилающей поверхности, атмосферы, объектов инфраструктуры и других объектов;
- 2) ретрансляцию радиосигналов;
- 3) доставку и сброс грузов.

Областями возможного применения БЛА-ГН являются [50]:

- a) топливно-энергетический комплекс (контроль состояния нефте- и газопроводов, линий электропередач и др.).

- б) службы ликвидации чрезвычайных ситуаций (мониторинг техногенных и природных катастроф, обеспечение спасательных операций и др.),
- в) службы безопасности (контроль нарушения границ объектов, поиск нарушителей и т.п.),
- г) судоходство (поиск и обнаружение судов, терпящих бедствие, судов-нарушителей, контроль границ и правил рыболовства и др.),
- д) сельское хозяйство (наблюдение за состоянием земель и определение характеристик почв, распыление удобрений и ядохимикатов и т.д.),
- е) океанология (мониторинг воздушной и водной сред, ледовой обстановки и др.),
- ж) метеорология (контроль гидрометеообстановки, экологический мониторинг и т.п.),
- з) геологоразведка (поиск полезных ископаемых в труднодоступных районах, подповерхностное зондирование Земли и др.).

Из приведенного перечня задач гражданских БЛА видно, что в основном они являются частными случаями более широкого класса задач, решаемых БЛА военного назначения, для которых в основном предназначена предлагаемая прикладная теория управления БЛА.

## **1.2. Структура современных беспилотных авиационных комплексов**

Введём следующее определение, которое должно быть использовано в теории разработки и применения беспилотных авиационных комплексов различного назначения.

*Беспилотным авиационным комплексом (БАК)* будем называть эргатическую (человеко-машинную) систему, включающую в себя определённое число БЛА, мобильные наземные пункты управления, получения, обработки и передачи целевой

информации, технические средства взлета (старта) и посадки БЛА, их ремонта и технического обслуживания и персонал, обеспечивающий функционирование комплекса [1].

Отметим, что термин «БАК» в отличие от используемых в настоящее время понятия «беспилотная авиационная система» и «комплексы с БЛА» является общепринятым в ВВС и широко используется в практической деятельности ведущих отечественных предприятий – разработчиков БЛА.

Типовой состав БАК [1] приведен на Рис.1.3.



Рис. 1.3

Как правило, современные БАК включают в себя в составе соответствующих автоматизированных рабочих мест (АРМ)

персонала аппаратно-программные средства для разработки программ полётов БЛА, предполетного, полётного и послеполётного контроля их технического состояния, радиокомандного управления выполнением полётных заданий, а также для сбора, обработки и передачи потребителям получаемой бортовой информации. Функционирование БАК осуществляется с помощью расчётов комплекса, приведенных на Рис. 1.3.

Непосредственное управление функционированием БАК осуществляет его командир, которому подчиняются командиры расчетов мобильных наземных пунктов управления (МНПУ), стартовых и обслуживающих расчетов комплекса.

Подготовкой и выполнением полетных заданий занимаются расчеты МНПУ, состав которых представлен на Рис. 1.4.



Рис. 1.4

В зависимости от числа БЛА, одновременно выполняющих полетные задания и реализованных в составе МНПУ средств автоматизации деятельности его персонала, в его работе принимают участие от одного до нескольких операторов первых двух категорий.

По сравнению с существующим составом персонала МНПУ БЛА новым его субъектом является «математик – системный программист», на которого возлагаются следующие функции:

1. Программирование совместно с командиром расчета МНПУ траекторий полетов БЛА, применяемых в конкретной операции.

2. Дистанционное сопровождение и администрирование программного обеспечения АРМ персонала БАК.

3. Обеспечение информационной безопасности функционирования БАК.

При выполнении основной первой функции этот член расчета МНПУ должен применять в конкретной обстановке методы прикладной теории управления БЛА.

Для этих целей используется функциональное программное обеспечение его АРМ, в состав которого включен пакет программ численных методов, приведенных в Главе 3.

В состав МНПУ БЛА БД входят командир расчета, выполняющий функции операторов целевой нагрузки, управления и математика-программиста; оператор-радиомеханик; техник по обслуживанию БЛА.

Обеспечивающие средства БАК предназначены для подготовки БЛА к полёту, обслуживания БЛА после полёта, проведения текущих регламентных и ремонтных работ, а также для хранения средств комплекса. Эта группа средств обслуживается техническими расчётами БАК. Выдвижение всех БАК комплексов в назначенные места их дислокации осуществляется с использованием специальных транспортных средств на базе автомобильных шасси повышенной проходимости. При этом некоторые БАК БД могут транспортироваться в переносном виде.

Состав видов БАК, основанный на приведенной выше классификации БЛА, представлен на Рис.1.5.

Более подробная классификация БАК приведена в работе [1].

В связи с тем, что вместо общепринятого понятия «воздушная мишень» [101] вводится более общее понятие «авиационная ложная цель» [89], приведем более подробные определения имитационных БАК и классификацию АЛЦ.

Первыми представителями имитационных БЛА являются воздушные мишени, достаточно активное применение которых

было начато в 40-х годах прошлого века [101]. Такие мишени использовались для обучения персонала средств ПВО и летчиков ВВС и представляли собой самолеты, которые выводились на определенный маршрут полета, после чего экипажи покидали их, предварительно задав автопилоту требуемые значения полетных параметров.

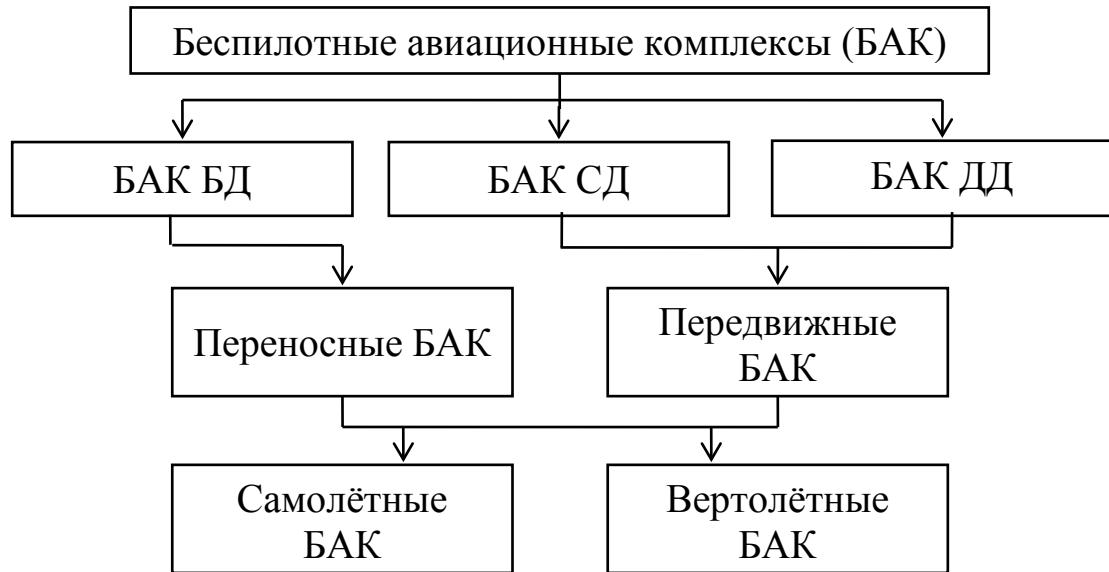


Рис. 1.5

В 60-70 годы появились первые образцы беспилотных воздушных мишеней, осуществляющих старт с наземных пусковых установок и парашютную посадку в заданном районе приземления [101]. Следует отметить, что такая практика применения БЛА-мишеней в основном сохраняется в ведущих странах мира до настоящего времени.

В Разд. 1.1 такие БЛА были отнесены к классу имитационных БЛА (ИмБЛА), целевой задачей которых является воспроизведение летно-технических характеристик (ЛТХ) и информационных признаков воздушных целей (ВЦ) при решении отмеченных выше задач, а также при испытаниях новых и модернизируемых образцов средств ПВО и боевых ЛА [89].

Эту целевую задачу предлагается распространить на применение ИмБЛА в боевых операциях ВВС, в которых они выступают для противника в роли авиационных ложных целей.

Отсюда следует что понятие «авиационная ложная цель» является более общим, чем понятие воздушная мишень».

Анализ доступных источников показал отсутствие четкого определения, классификации, теории создания и тактики применения такого класса БАК, как имитационные БАК.

Под *имитационным БАК* (ИмБАК) будем понимать комплекс с БЛА, имитирующими летно-технические характеристики (ЛТХ) и информационные признаки (отражательные и излучательные характеристики) ВЦ для решения учебных и боевых задач ВВС и ПВО, а также для испытаний перспективных образцов вооружения и военной техники [89].

В связи с использованием введенного понятия «авиационная ложная цель» конкретизируем определения и функции видов ИмБАК.

Под *боевыми ИмБАК* понимаются БАК, системообразующими элементами которого являются АЛЦ, разработанные для применения в боевых операциях ВВС и предназначенные для создания на экранах радиолокаторов контуров целераспределения противника информации, подобной информации от отечественных ЛА. Этот вид ИмБАК предназначен для решения следующих основных задач:

- вскрытие системы ПВО противника;
- усложнение воздушной обстановки и отвлечение на АЛЦ активных средств ПВО;
- провоцирование и истощение средств поражения системы ПВО противника;
- размножение боевых порядков ЛА в зоне действия ПВО противника;
- имитация действий ЛА на ложных направлениях.

*Учебно-испытательные ИмБАК* представляют собой комплексы, системообразующими элементами которых являются АЛЦ, предназначенные для имитации отдельных или ком-40

плексных характеристик зарубежных ЛА, применяющиеся индивидуально или в составе мишенной обстановки при боевой подготовке личного состава ПВО и ВВС, а также при отработках и испытаниях разрабатываемых и модифицируемых образцов вооружений и военной техники (ВВТ), предназначенных для борьбы с ВЦ.

Боевые и учебно-испытательные ИмБАК имеют значительное техническое и функциональное сходство, однако обладают рядом существенных отличительных особенностей, влияющих на все этапы их жизненного цикла и позволяющих рассматривать их как два различных подкласса ИмБАК.

Основными общими чертами этих БАК являются их назначение (имитация ЛТХ и информационных признаков реальных ВЦ), общие основные положения методики проектирования и способы эксплуатации комплексов.

Основные отличительные особенности учебно-испытательных и боевых ИмБАК представлены в сравнительной табл. 1.1.

Таблица 1.1

№	Учебно-испытательные ИмБАК	Боевые ИмБАК
1	Полигонное применение комплексов в мирное время	Боевое применение комплексов в военное время
2	Возможна частичная имитация ЛТХ и информационных признаков ВЦ	Максимально возможная степень имитации ЛТХ и информационных признаков ВЦ
3	Допустимо снижение эффективности применения за счет снижения стоимости АЛЦ.	Недопустимо снижение эффективности применения за счет снижения стоимости АЛЦ.
4	Менее жесткие требования к технологическому совершенству, резервированию систем, надежности и др.	Полноценные требования к комплексу как к образцу ВВТ.
5	Более жесткие требования к безопасности полетов, точности движения по маршруту, сопровождения АЛЦ по радиолинии,	Менее жесткие требования к безопасности применения, возможность автономного полета без радиолинии, самоуничтожения в

	нештатной парашютной посадке и др.	случае непредвиденной ситуации и др.
6	Предпочтительно многоразовое применение АЛЦ с возможностью спасения после выполнения задания	Возможно использования АЛЦ в качестве одноразовых расходуемых средств ВВТ.
7	В основном комплексы наземного базирования и старта	В большинстве комплексы воздушного старта, с дополнительными требованиями к минимальным массогабаритным характеристикам, наличию воздушного пункта управления и др.

В практике применения отечественных и зарубежных ВВС кроме АЛЦ получили распространение такие виды ложных целей, предназначенные для защиты ЛА, как выбрасываемые ложные тепловые цели (ИК-ловушки), ложные радиолокационные цели (дипольные отражатели), имитаторы постановки помех, активные буксируемые радиолокационные ловушки, комбинированные ложные цели (плазменные образования).

В связи с тем, что эти виды ложных целей не решают все задачи, стоящие перед боевыми и учебно-испытательными ИмБАК, будем рассматривать как наиболее перспективные средства комплексы с АЛЦ на базе БЛА.

Под *авиационной ложной целью* будем понимать БЛА с ЛТХ, воспроизводящими соответствующие летные характеристики ВЦ, целевая нагрузка которого состоит из радиолокационных и тепловых имитаторов воспроизводимого ЛА. Кроме этого в состав целевой нагрузки учебно-испытательных АЛЦ включается аппаратура измерения промахов действующих против них боеприпасов.

В дополнение к приведенной на Рис. 1.2 классификации БЛА предлагается следующая классификация АЛЦ, представленная на Рис. 1.6.

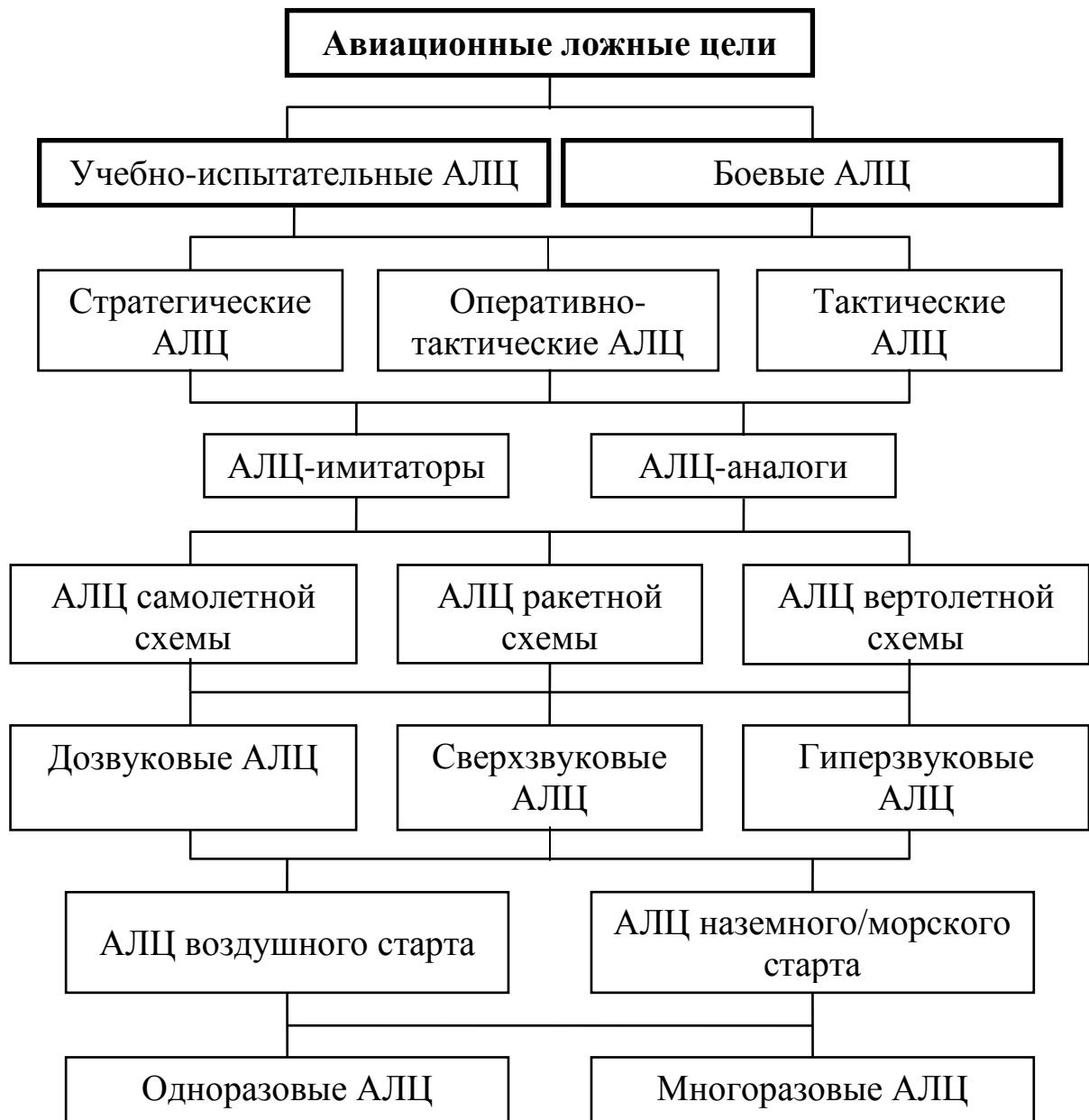


Рис. 1.6

По воспроизводимым ЛТХ и информационным признакам классов ЛА выделяются стратегические, оперативно-тактические и тактические АЛЦ.

В зависимости от типа платформы построения этот вид БЛА предлагается подразделять на следующие типы:

1. АЛЦ-аналоги;
2. АЛЦ-имитаторы.

Первый тип АЛЦ формируется путем переоборудования в беспилотные образцы выработавших эксплуатационный ресурс

и выведенных за штат ЛА. Такой тип АЛЦ как правило имитируют собственные информационные признаки, но при установке дополнительной целевой аппаратуры способны имитировать информационные признаки других ЛА. Преимуществом АЛЦ-аналогов является практически полное соответствие ЛТХ и информационных признаков реальных и ложных целей. Основными недостатками АЛЦ-аналогов являются высокая стоимость их эксплуатации и ограниченное количество выводимых за штат ЛА. Примерами АЛЦ-аналогов являются мишени ВМ М-21, построенная путем переоборудования самолета МиГ-21, и ВМ МА-31, построенная на базе противокорабельной ракеты Х-31.

Второй тип АЛЦ представляют собой специально разработанные БЛА, с соответствующими имитируемым целям ЛТХ и оснащенными целевой аппаратурой имитации отражательных и излучательных характеристик воспроизводимых ЛА. Преимуществами АЛЦ-имитаторов перед АЛЦ-аналогами являются относительно низкая стоимость разработки и эксплуатации, возможность воздушного старта с самолетов-носителей и простота в перенастройке имитируемых параметров целей. Основным недостатком такого типа АЛЦ является сложность в достижении требуемого уровня имитации ЛТХ и информационных признаков реальных ВЦ.

В зависимости от типа аэродинамической схемы АЛЦ подразделяются на АЛЦ самолетной, ракетной и вертолетной схемы.

АЛЦ самолетной схемы используют аэродинамические плоскости для создания подъемной силы и управления, в качестве маршевого двигателя применяются, как правило, воздушно-реактивные двигатели. Данный тип АЛЦ отличается сравнительно большой продолжительностью полета (до нескольких десятков минут) и маневренными характеристиками, соответствующими пилотируемым самолетам (нормальная перегрузка до 7-10g). Такие АЛЦ применяются для имитации самолетов тактиче-

ской, армейской, оперативно-тактической, стратегической, дальней и военно-транспортной авиации, а также крылатых ракет.

В АЛЦ ракетной схемы управление осуществляется с помощью воздушных X-образных рулей или газовых рулей двигателя. Для создания тяги используются жидкостные или твердотопливные ракетные двигатели и комбинированные силовые установки. За счет этого ракетные АЛЦ имеют небольшое время полета (до нескольких минут) и высокие скоростные и маневренные характеристики (перегрузки до 47g). В настоящее время АЛЦ ракетной схемы применяются для имитации зенитных, противокорабельных и баллистических ракет, а также сверхзвуковых ЛА.

АЛЦ вертолетной схемы предназначены для имитации вертолетов армейской авиации и малоскоростных БЛА. В настоящее время данный тип АЛЦ отсутствует в мировой практике, однако на необходимость его создания указывает широкое применение вертолетных группировок в боевых действиях и их малая защищенность от средств ПВО.

По скорости полета, влияющей на большое количество конструкторско-технологических решений, АЛЦ классифицируются на дозвуковые, сверхзвуковые и гиперзвуковые. Дозвуковые АЛЦ предназначены для имитации самолетов и вертолетов армейской авиации, крылатых ракет и крейсерских режимов полета самолетов тактической, оперативно-тактической и военно-транспортной авиации. Сверхзвуковые АЛЦ должны применяться для имитации режимов боевого маневрирования самолетов оперативно-тактической и истребительной авиации и крейсерских режимов полета самолетов стратегической авиации. Гиперзвуковые АЛЦ предназначены для имитации разрабатываемых в настоящее время перспективных боевых гиперзвуковых ЛА.

По типу старта АЛЦ делятся на АЛЦ воздушного и наземного/морского старта.

АЛЦ воздушного старта осуществляют старт с самолета (вертолета)-носителя. В соответствие с этим на них накладываются более жесткие требования по массогабаритным характеристикам. Данный тип АЛЦ отличается меньшим запасом топлива и, как правило, отсутствием посадочных устройств. Среди АЛЦ воздушного старта преобладают боевые АЛЦ, стартующие в непосредственной близости от зоны их применения.

АЛЦ наземного/морского старта осуществляют взлет с пусковой установки при помощи стартового ускорителя или по самолетному. Вследствие этого на них накладываются менее жесткие требования по массогабаритным характеристикам. Данный тип АЛЦ встречается реже и применяется при необходимости использования габаритной целевой нагрузки или обеспечения большой продолжительности полета.

По кратности применения АЛЦ делятся на многоразовые и одноразовые БЛА. Многоразовые АЛЦ имеют кратность применения до одного-двух десятков раз, ограниченную межремонтным ресурсом двигателя и планера. Они оснащены посадочными устройствами, как правило, в виде основного парашюта и дополнительными пневматическими или гидравлическими амортизаторами. Одноразовые АЛЦ не имеют системы спасения и применяются однократно. По завершении полетного задания они осуществляют либо самоликвидацию, либо при оснащении их боевой частью могут применяться в качестве средств поражения наземных и воздушных объектов противника. Как было отмечено выше, к данному типу относятся, как правило, АЛЦ воздушного старта.

### **1.3. Организация функционирования беспилотных авиационных комплексов**

Как было отмечено в монографии [1], в существующих отечественных и зарубежных работах практически не рассматриваются вопросы организации функционирования БАК.

Для реализации системного подхода к вопросу эффективного применения БАК необходимо решить следующие основные задачи:

1. Формирование организационно-штатной структуры процесса эксплуатации БАК.

2. Разработка методики (алгоритма) применения БАК при решении различных целевых задач.

3. Определение информационного взаимодействия внутри и между БАК, а также с подразделениями, которым приданы соответствующие комплексы.

При решении первой задачи предлагается два варианта формирования организационно-штатных структур:

а) объединить БАК в беспилотную авиационную эскадрилью (БАЭ) по аналогии с пилотируемыми ЛА;

б) включить БАК в состав соответствующих подразделений в качестве функциональных элементов.

В первом случае, оргструктура управления применяемыми беспилотными ЛА будет иметь вид, представленный на Рис. 1.7. На этом рисунке обозначены все находящиеся в воздухе БЛА, управляемые с помощью МНПУ, входящими в состав соответствующих БАК.

Штаб БАЭ должен размещаться на существующих образцах командно-штабных машин, оснащенных соответствующими АРМ и средствами связи.

Рассмотрим организацию работы БАЭ на примере такой перспективной в настоящее время проблемы как формирование единого информационного пространства обстановки в некотором районе путём ведения разведки с помощью совокупности ИнБЛА [1].

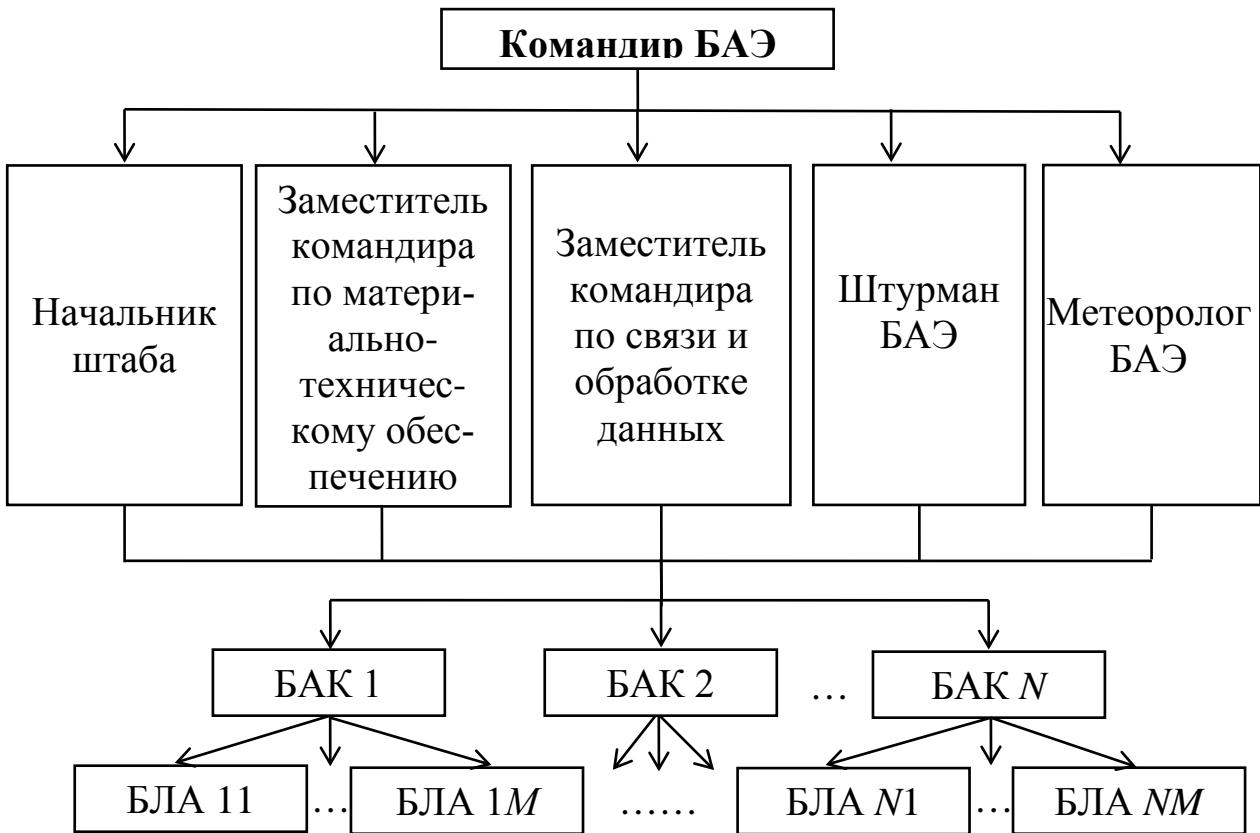


Рис. 1.7

Алгоритм функционирования БАЭ состоит из следующих этапов:

1. Получение командиром БАЭ от вышестоящего командинра распоряжения (приказа) о проведении разведки в конкретном районе в заданном интервале времени.
2. Планирование командинром совместно с начальником штаба БАЭ требуемого числа БЛА и мест дислокации применяемых в операции БАК.
3. Формирование штурманом БАЭ полетных заданий для всех БАК, участвующих в операции.
4. Определение метеорологом БАЭ условий выполнения полетов БЛА в районе проведения операции, а также их взлета (старта) и посадки.
5. Передача метеоданных командинрам БАК.

6. Принятие решений командирами БАК в зависимости от поставленных задач и метеоусловий по типам целевой нагрузки, устанавливаемой на применяемые БЛА.

7. Проведение математиками – системными программистами и командирами расчетов МНПУ программирования траекторий БЛА и согласование результатов со штурманом БАЭ.

8. Выдвижение всех компонентов БАК в назначенные места дислокации, их развертывание и проверка техническими расчёты комплексов используемого оборудования и аппаратуры.

9. Предполётная подготовка БЛА (ввод в систему автоматического управления БЛА (см. Рис. 1.1) программ полётов, установка требуемой целевой аппаратуры, предстартовый контроль бортовых систем) и доклады командиров БАК командиру БАЭ о готовности комплексов к работе.

10. Старт (взлёт) БЛА согласно графику их полётов, утвержденному штурманом и начальником штаба БАЭ.

11. Контроль операторами управления БЛА их движения в заданные контролируемые районы. По завершению этих этапов полетов БЛА доклады командиров расчётов МНПУ командиру БАК о начале выполнения целевых задач, состоящих в поиске, обнаружении и идентификации объектов разведки (доразведки).

12. Получение операторами целевой нагрузки МНПУ бортовой информации от установленной на БЛА аппаратуры, анализ обстановки в областях их ответственности и доклады командиру расчета МНПУ о текущей обстановке в контролируемом районе.

13. При обнаружении, распознавании и идентификации целей в зоне ответственности МНПУ командир его расчёта ставит задачу оператору связи передать информацию о них (в виде фрагментов электронных карт областей с нанесенными на них координатами и характеристиками целей) командиру БАЭ, который после контроля передаёт их в общую сеть сбора и обра-

ботки информации. В противном случае (отсутствие обнаруженных целей) продолжается выполнение работ по п.12 данного алгоритма.

14. При неудовлетворительных результатах разведки получение командиром БАК от командира БАЭ приказа о доразведке выявленных целей либо повторном контроле определённых областей.

15. Командир БАК передает этот приказ командиру расчёта соответствующего МНПУ, который отдает распоряжение оператору управления конкретного БЛА о переходе на радиокомандный режим его управления. При выполнении этим оператором требуемых действий параллельно выполняются работы по п.12 алгоритма.

16. По завершению полётных заданий каждый БЛА в программном или радиокомандном режимах управления осуществляет полёты в зоны их посадки.

17. Посадка БЛА и проведение персоналом технических расчётов БАК их послеполётного контроля, технического обслуживания и ремонта с отправкой годных к применению БЛА на стартовые позиции БАК.

18. Доклад командиров БАК командиру БАЭ о завершении полетов БЛА.

Аналогичные алгоритмы могут быть разработаны для группового применения других типов БЛА, представленных на Рис. 1.2. Отдельные этапы этого алгоритма используются при втором варианте эксплуатации БАК.

Информационное взаимодействие субъектов и объектов, участвующих в операции с применением БЛА, должно основываться на использовании современных инфокоммуникационных технологий, базирующихся на сети АРМ персоналов БАК и БАЭ, связанных между собой и с БЛА цифровыми радиоканалами связи.

Перспективной формой организации крупномасштабного использования БЛА при решении военных и гражданских задач является применение беспилотных группировок, состоящих из нескольких БАЭ [55].

В заключение данного раздела можно заметить, что в развитии прикладной теории управления БЛА должна быть разработана общая теория их применения, которая наряду с методами управления БЛА рассматривает модели и методы принятия решений по организации эффективного применения БЛА в соответствующих операциях.

#### **1.4. Жизненный цикл БЛА и основные задачи его реализации**

Одним из недостатков в развитии отечественных БЛА является отсутствие четкой и общепринятой структуры их жизненного цикла (ЖЦ) [106].

Рассмотрим перспективные методы и технологии реализации стадий ЖЦ БЛА, представленного на Рис. 1.8.

Для эффективной организации работ на **стадии 1** необходима разработка *теории и систем автоматизированного проектирования БЛА* различного назначения, представленных на Рис. 1.2. Необходимость таких средств определяется тем, что применяемые в настоящее время отечественными разработчиками средства локальной автоматизации проектно-конструкторских работ не позволяет добиться резкого сокращения времени разработки БЛА с одновременной оптимизацией формируемых проектных решений.

Обязательным условием для получения таких решений является разработка математических моделей, методов и алгоритмов *теории оптимального проектирования БЛА*.

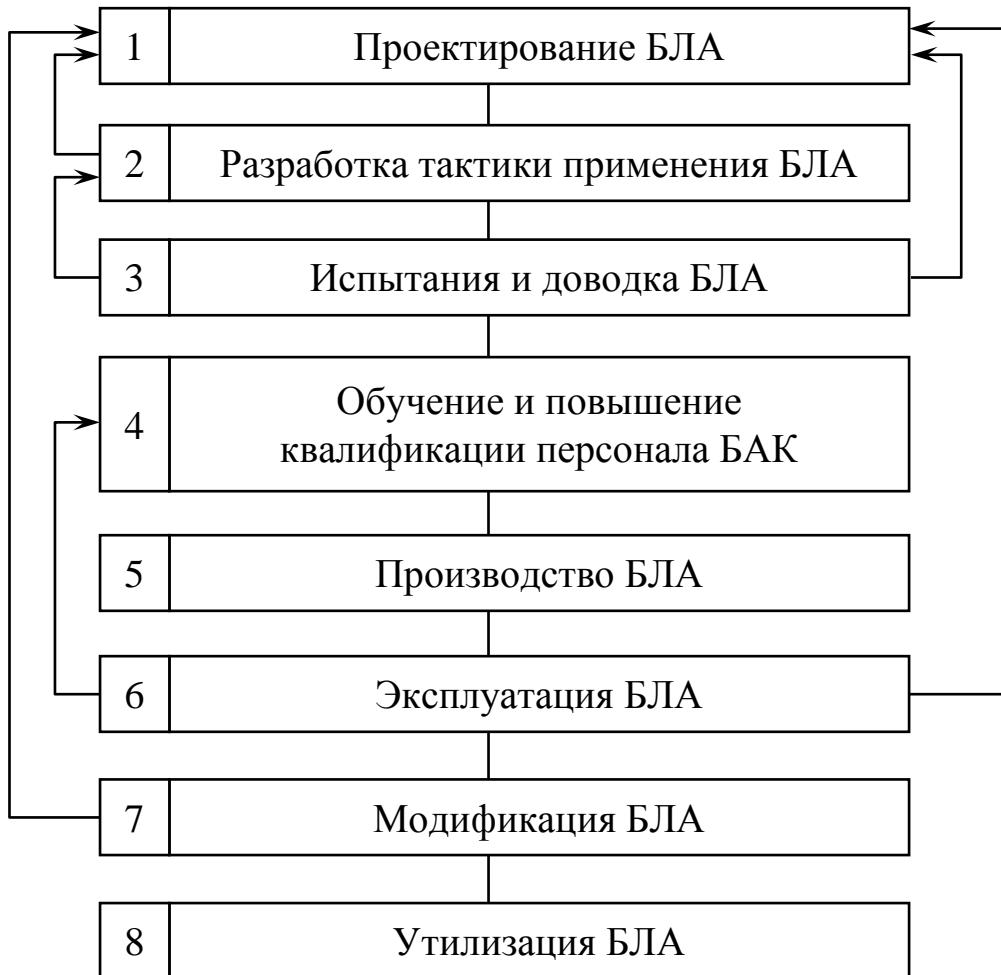


Рис. 1.8

Эта теория может быть построена на имеющемся достаточно богатом научно-техническом заделе 70-80 г.г. прошлого века по оптимальному проектированию самолетов и вертолетов с соответствующими корректировками, связанными, например, с более широким использованием в конструкции БЛА перспективных композиционных материалов, отсутствием на борту экипажа и т.п.

Следует отметить, что для успешного решения проблемы создания эффективных БЛА необходимо разработать семейство малогабаритных поршневых и воздушно-реактивных двигателей высокой тяговооруженности. В перспективе должны быть созданы силовые установки для сверхзвуковых и гиперзвуковых БЛА.

Разработанные методы теории оптимального проектирования БЛА должны быть реализованы в составе распределенной

САПР [76] проектной организации, которая включает в себя следующие комплексы программ коллективного пользования:

- «Предпроектные оценки и системная оптимизация БЛА»;
- «Аэродинамика, динамика полета и управление БЛА»;
- «Конструкция и силовая установка БЛА»;
- «Прочность БЛА»;
- «Технология БЛА»;
- «Комплекс бортового оборудования (КБО) БЛА»;
- «Целевая аппаратура (нагрузка) БЛА».

Для эффективной эксплуатации САПР БЛА создается распределенный банк данных системы [76], содержащий наряду с нормативно-справочной информацией исходные данные для проектирования и конструирования, а также результаты аэrodинамических, прочностных, весовых и других расчетов, промежуточные и окончательные проектно-конструкторские решения по узлам и агрегатам БЛА. Обязательным компонентом этого банка должна быть цифровая модель разрабатываемого БЛА. Все эти данные должны быть доступны в пределах компетенции пользователям САПР БЛА с их рабочих станций (АРМ). Обязательным компонентом САПР БЛА должна быть подсистема «Управление проектом», с помощью которой осуществляется планирование разработки БЛА и контроль выполнения соответствующих работ и сроков.

Как показал анализ состояния вопроса, **стадия 2 ЖЦ** БЛА практически не отражена в существующей литературе. Исключением являются работы [44, 45], в которых рассматриваются некоторые частные вопросы применения БЛА.

На наш взгляд в составе этой стадии ЖЦ должны решаться следующие основные задачи:

- выделение совокупности типовых тактических ситуаций (ТТС) применения разрабатываемого образца БЛА;

- определение для каждой ТТС потребного числа БЛА и типовых траекторий их полетов;
- выбор для каждой ТТС и применяемых в ней БЛА состава и характеристик целевого оборудования (целевой нагрузки);
- определение параметров и характеристик используемых в каждой ТТС информационных и командных радиолиний связи с БЛА;
- формирование временного графика применения БЛА в каждой ТТС.

Как отмечено на Рис. 1.8, работы данного этапа итерационным образом взаимодействуют со **стадией 1 ЖЦ БЛА**.

**Стадия 3 ЖЦ** является важнейшей и достаточно трудоемкой стадией его создания. Следуя общему подходу к автоматизации испытаний изделий авиационной техники [86], на этой стадии выделяются два этапа:

1. Автоматизированные наземные испытания БЛА.
2. Автоматизированные летные испытания БЛА.

Автоматизированные системы испытаний и доводки проектно-конструкторских решений, сформированные с использованием современной измерительной, компьютерной и коммуникационной техники [86], должны в автоматическом режиме передавать на **стадию 1 ЖЦ** полученные результаты в соответствующие базы данных САПР БЛА. Отметим, что в связи с нарастающей тенденцией компьютеризации КБО БЛА резко возрастает необходимость использования на этапе 1 автоматизированных полунатурных стендов испытаний и доводки БЛА с имитацией их полетов. При практической реализации этой стадии ЖЦ БЛА можно воспользоваться современным опытом предприятий-разработчиков БЛА ракетных схем, в частности ОАО «ГНЦ МКБ «РАДУГА» [87].

При автоматизации летных испытаний БЛА необходимо разработать программно-аппаратные средства обработки телевидения

метрических данных и информации, поступающей от трассовых измерительных комплексов испытательного полигона.

Обучение и повышение квалификации персонала БАК на **стадии 4 ЖЦ** возлагается на разработчиков БЛА. Для повышения эффективности данного этапа здесь должны широко использоваться компьютерные технологии, пример которой приведен в работе [88]. В общем случае можно констатировать, что в РФ в настоящее время не ведется подготовка и переподготовка специалистов по разработке и эксплуатации БЛА. Неудачей окончилась попытка обучения таких специалистов на базе одного из российских военных авиационных училищ. Отрицательную роль сыграло и закрытие Центра беспилотной авиации в г. Егорьевске. На наш взгляд подготовкой разработчиков и эксплуатантов БЛА должны заняться вузы, обучающие студентов по специальностям «Самолето- вертолетостроение» и «Техническая эксплуатация летательных аппаратов и авиационных двигателей». Кроме этого необходимо на новом качественном уровне восстановить работу указанного выше Центра [106].

Отметим особенности реализации **стадии 5 ЖЦ** БЛА. При производстве БЛА должно широко использоваться оборудование с ЧПУ, базовые программы для которого разрабатываются в комплексе программ «Технология БЛА» САПР БЛА и передаются совместно с конструкторской и технологической документацией предприятию-изготовителю БЛА. Кроме этого для повышения качества изготовления и надежности БЛА [3] необходимо, как это делается в пилотируемой авиации, включить в производственный процесс автоматизированные наземные контрольные и приемо-сдаточные летные испытания БЛА [86]. В качестве средств автоматизации таких испытаний могут быть использованы упрощенные образцы средств, примененных на **стадии 3 ЖЦ** БЛА.

Для успешной реализации на практике **стадии 6** ЖЦ необходимым условием является разработка методов *прикладной теории программного управления БЛА* и моделирования их полетов при выбранном персоналом БАК управлении [54]. Суть этой теории заключается в использовании конкретных видов траекторий БЛА, формируемых математиком – системным программистом и командиром расчета МНПУ БАК с использованием методов теории обратных задач [9] и методов теории оптимального управления [4, 5, 11]. В этом состоит отличие методов прикладной теории управления БЛА от использования общепринятых в настоящее время координатных и координатно-временных графиков движения БЛА [85] при выполнении конкретного полетного задания.

Целью моделирования движения БЛА, которое осуществляется на вычислительных средствах МНПУ БАК, является принятие решения о возможности его полета при выбранном управлении в условиях действия существующих внешних факторов (ветер, состояние ВПП и т.п.).

Отметим, что для реализации на **стадии 5** ЖЦ БЛА моделей и методов прикладной теории управления БЛА персонал БАК должен в обязательном порядке получить от разработчиков используемых БЛА аналитические выражения для аэродинамических и моментных коэффициентов и высотно-скоростной характеристики силовой установки БЛА. Кроме задач выбора управления движением БЛА на этой стадии необходимо решать ряд организационных задач:

- выбор мест дислокации МНПУ, мобильных пусковых установок (МПУ) и временных площадок (аэродромов) взлета и посадки БЛА;
- определение потребного количества БЛА для проведения конкретной операции;

- расчет требуемых и гарантированных запасов топлива для используемых в операции БЛА;
- расчет требуемого количества запасных элементов БЛА для оперативного послеполетного ремонта поврежденных образцов;

Эти задачи должны быть сформулированы в рамках перспективной *прикладной теории применения БЛА* как задачи принятия персоналом БАЭ оптимальных организационных и оперативных решений. Постановки и методы решения некоторых таких задач применительно к ИнБАК приведены в работах [77-81]. Задачи выбора управления БЛА и принятия решений по их применению должны быть реализованы в форме функционального программного обеспечения АРМ персонала БАК и БАЭ и решаться с использованием соответствующих информационно-коммуникационных технологий.

Заметим, что для успешного развития теории создания и применения беспилотной техники необходимо организовать издание электронного научно-технического журнала по этой тематике, включенного в перечень ВАК РФ, а также регулярно проводить международную научно-техническую конференцию «Проблемы, перспективы и опыт применения беспилотной авиационной техники» взамен ранее регулярно проводимой на базе ныне расформированной ВВИА им. Н.Е. Жуковского конференции «Комплексы с БЛА России». Существующее в настоящее время периодическое издание [83] публикует в основном новостные, рекламные и исторические материалы по беспилотной авиации.

В практическом аспекте создания и эксплуатации БЛА существенно необходимым является разработка ведущими организациями РФ в области авиационной науки и техники (ЦАГИ, ЛИИ, МАИ, НИЦ ЭРАТ и др.) серии «Руководства для конструкторов» (РДК) различных видов БЛА (см. Рис. 1.2) и «Норм

летной годности (НЛГ) БЛА» [3] для их обязательного использования отечественными предприятиями и организациями.

Одной из проблем рассматриваемой стадии ЖЦ является практически нерешенная комплексная проблема обеспечения информационной безопасности функционирования БАК [71].

Модификация БЛА (**стадия 7 ЖЦ**) проводится по результатам **стадии 6 ЖЦ** и при появлении более эффективных образцов целевой аппаратуры (нагрузки) и бортовых систем БЛА. Задание на модификацию действующего образца БЛА формируется его Заказчиком и передается Разработчику на **стадию 1 ЖЦ**. Здесь можно отметить опыт КНР, в которой «старые» образцы БЛА военного назначения передаются для гражданского использования в народном хозяйстве. В нашей стране широкое применение БЛА в гражданских целях в настоящее время невозможно из-за отсутствия правовых актов, разрешающих полеты БЛА в общем воздушном пространстве РФ.

Последняя **стадия 8 ЖЦ** подразумевает утилизацию БЛА по правилам, принятым для изделий авиационной техники.

В заключение можно отметить, что эффективное и конкурентоспособное развитие отечественной беспилотной авиационной техники возможно только при условии комплексного подхода к БЛА как перспективным и сложным изделиям авиационной техники и при широком использовании на практике теории их создания и применения в совокупности с принятыми на государственном уровне НЛГ БЛА.

## **1.5. Общая характеристика прикладной теории управления БЛА**

К настоящему времени имеется значительное число работ, в которых рассматриваются различные вопросы управления ЛА [4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 16, 33, 39, 49 и др.]. Как показал проведенный анализ, основная масса существующих работ ориентирована

на на задачи создания систем автоматического управления (САУ) ЛА и используют при этом весьма сложные или значительно упрощенные модели движения ЛА. Следует отметить, что применяемые методы формирования управлений ЛА являются весьма громоздкими и требуют при их использовании достаточно больших затрат машинного времени.

Другой особенностью существующих работ является практическое отсутствие в них рассмотрения задач траекторного управления пилотируемых ЛА, то есть задач выбора управления ЛА, формирующего требуемую траекторию его движения. Исключением здесь являются работы [9,11], в которых такие задачи излагаются на академическом уровне без указания практических методик их решения.

Работы по управлению БЛА либо рассматривают вопросы управления ракетами и космическими аппаратами [2, 6, 11, 13, 29], либо посвящены задачам формирования управлений БЛА, рассмотренных в Разд. 1.1, на отдельных этапах их полетов [1, 31].

Отмеченные выше недостатки существующих подходов к формированию управлений БЛА определяют необходимость разработки прикладной теории решения таких задач, ориентированную на ее использование в процессах эксплуатации БАК, рассмотренных в Разд. 1.2.

Сформируем основные принципы прикладной теории управления БЛА:

1. Принцип комплексного охвата моделями и методами теории всех этапов полета БЛА.

Применение этого принципа подразумевает возможность программирования методами этой теории всей совокупности этапов движения конкретного БЛА от его старта (взлета) до приземления (посадки) в заданном районе (аэродроме).

2. Принцип учета возмущений, в частности ветровых, действующих на всех этапах полета БЛА.

Как было отмечено в Разд. 1.1, существующие БЛА имеют значительный разброс таких характеристик как масса, скорость и высота полета при небольших значениях показателей их тяго-вооруженности [46]. Поэтому реализация такого преимущества БЛА как возможность эксплуатации в неблагоприятных для пилотируемых ЛА метеоусловиях требует использования этого принципа при разработке методов прикладной теории управления БЛА.

### 3. Принцип формирования траектории полета БЛА, наиболее подходящей для решения конкретной целевой задачи.

Реализация данного принципа позволяет соответствующему персоналу БАК формировать требуемые траектории полета БЛА, учитывающие конкретные текущие условия решения поставленных целевых задач, а также опыт выполнения предыдущих полетов БЛА. При этом рекомендуется использовать соответствующие методы теории обратных задач управления, вариационного исчисления и оптимального управления динамическими объектами, теоретические основы которых приведены в Главе 2.

### 4. Принцип обеспечения минимальной трудоемкости решения задач программирования полетов БЛА.

Этот принцип обеспечивает применение методов и алгоритмов теории, которые позволяют определять требуемое управление конкретным БЛА и провести моделирование его движения на ограниченных по вычислительной мощности программно-аппаратных средствах АРМ математика – системного программиста МНПУ за минимальное время.

*Предметом прикладной теории управления БЛА является разработка математических методов и алгоритмов формирования управления различными видами БЛА при решении с их использованием соответствующих целевых задач.*

*Методами теории управления БЛА* в общем случае являются методы формирования программного и командного управления БЛА с использованием методов теории обратных задач динамики, вариационного исчисления, оптимального управления, математического программирования, теории игр, интеллектуального управления, общих и специальных численных методов и методов обработки полетных данных. Основным требованием к этим методам является простота реализации на вычислительных средствах мобильных наземных пунктов управления (МНПУ) БЛА.

Решение прикладных задач управления БЛА как динамических объектов должно основываться на активном использовании дифференциальных уравнений их движения. Это объясняется тем, что целью выбора эффективных законов управления БЛА является реализация требуемых траекторий его движения, решающих поставленные перед БЛА задачи.

Уравнения движения различных видов ЛА приведены в работах [2, 4, 6, 7, 9, 13, 15, 19, 21, 23, 24, 27-30, 33, 39]. В этих работах движение ЛА в каждый момент времени представляется как поступательное движение его центра масс (ЦМ) и вращательное движение ЛА как твердого тела вокруг ЦМ.

При этом полностью отсутствуют работы, в которых рассматриваются не только уравнения полета БЛА самолетных и вертолетных схем, но и описания процессов их старта (взлета) с пусковых установок и с постоянных и временных площадок (аэродромов), а также посадки с помощью парашютных систем, по «самолетному» и «вертолетному». Следует заметить, что одной из важнейших особенностей БЛА, отличающих их от пилотируемых ЛА, должна быть способность решения поставленных перед ними задач в сложных метеоусловиях. Эти вопросы также не отражены в существующей литературе по БЛА [2, 15,

102], хотя они являются весьма актуальными при их массовой эксплуатации в различных климатических условиях.

Приведем основные определения, используемые в предлагаемой теории.

Комплекс математических выражений (уравнений), описывающих отмеченные выше задачи, будем называть *математическими моделями движения БЛА* на различных этапах его полета.

Одним из главных требований к таким моделям, кроме их адекватности и достаточной для практического применения точности, будем считать простоту и понятность моделей специалистам по управлению БЛА соответствующих БАК. Выполнение этого требования обуславливается необходимостью их активного участия в выработке на основе этих моделей эффективных законов управления БЛА.

Кроме этого, простота применяемых моделей движения БЛА подразумевает, как показала практика, относительно небольшую трудоемкость используемых при формировании таких законов математических методов и алгоритмов. Последнее влечет за собой простоту их программной реализации в среде автоматизированных рабочих мест (АРМ) специалистов по управлению БЛА. В данной теории предлагается использовать упрощенные уравнения управляемого полета БЛА самолетной и вертолетной схем, описывающие движение в пространстве центра масс (ЦМ) соответствующего БЛА. Следуя работе [28], такое движение будем называть *опорным движением БЛА*. Движение БЛА вокруг его ЦМ, которое вызывается взаимовлиянием его органов управления, внутренними и внешними факторами, для недопущения значительных отклонений должно обеспечиваться работой подсистемы стабилизации (автопилотом) САУ БЛА или корректирующими радиокомандами оператора управления БЛА.

В прикладной теории управления БЛА будут рассматриваться следующие виды их движения:

1. Программное движение БЛА.
2. Радиокомандное движение БЛА.
3. Движение БЛА в режиме самонаведения.

Первые два вида движений используют практически все виды БЛА, представленные на Рис. 1.2.

Третий вид движения характерен для АЛЦ в режимах их уклонения от перехватчиков и для БЛА-истребителей в процессе перехвата целей.

При решении задач предлагаемой теории будем использовать общепринятую модель управляемого движения ЛА, которая в векторной форме записывается как [4, 5, 11, 52]:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in [t_0, t_k]; \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.1)$$

Здесь  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – вектор состояния ЛА, называемый вектором фазовых координат ЛА;  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  – управляющий вектор,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  – вектор-функция своих аргументов;  $[t_0, t_k]$  – интервал времени  $t$ , на котором выполняется полет ЛА.

На управления ЛА накладываются ограничения вида:

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (1.2)$$

Для снижения трудоемкости решения задач выбора вектора  $u(t)$  предлагается использовать упрощенные модели движения центра масс (ЦМ) БЛА [4, 7, 27, 34, 40], которые в общем случае представляются в следующем виде:

$$\dot{V} = f_1(V, \theta, \Psi, y, u); \quad t \in [t_0, t_k]; \quad (1.3)$$

$$\dot{\theta} = f_2(V, \theta, \Psi, y, u); \quad (1.3)$$

$$\dot{\Psi} = f_3(V, \theta, \Psi, y, u);$$

$$\dot{x} = V \cos \theta \cos \Psi;$$

$$\dot{y} = V \sin \theta; \quad (1.4)$$

$$\dot{z} = V \cos \theta \sin \Psi.$$

Здесь  $V = V(t)$  – скорость БЛА в момент времени  $t \in [t_0, t_k]$ ;  $\theta = \theta(t)$  и  $\Psi = \Psi(t)$  – углы наклона и поворота траектории БЛА в этот момент времени;  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  – координаты БЛА в нормальной земной системе координат с центром в точке расположения МНПУ соответствующего БАК. При сопоставлении уравнений (1.1) и (1.3), (1.4) имеем, что фазовый вектор БЛА состоит из координат  $V, \theta, \Psi, x, y, z$ .

Начальные условия для этой системы дифференциальных уравнений имеют вид:

$$V(t_0) = V_0; \quad \theta(t_0) = \theta_0; \quad \Psi(t_0) = \Psi_0; \quad (1.5)$$

$$x(t_0) = x_0; \quad y(t_0) = y_0; \quad z(t_0) = z_0. \quad (1.6)$$

Заметим, что правые части динамических уравнений (1.3) движения БЛА будут конкретизироваться в предлагаемой теории применительно к различным видам БЛА и этапам их движения.

При построении динамических уравнений (1.3) движения БЛА будут использованы следующие общепринятые в динамике полета ЛА системы координат (СК) [7]:

1. Скоростная СК ЦМ $x_{\text{ск}}y_{\text{ск}}z_{\text{ск}}$  с началом в ЦМ БЛА, осью ЦМ $x_{\text{ск}}$  направленной по вектору скорости БЛА, осью ЦМ $y_{\text{ск}}$  – вертикально вверх и осью ЦМ $z_{\text{ск}}$  – влево с образованием левой СК [13].

2. Связанная СК ЦМ $x_{\text{св}}y_{\text{св}}z_{\text{св}}$ , в которой ось ЦМ $x_{\text{св}}$  совпадает с горизонтальной строительной осью БЛА, а оси ЦМ $y_{\text{св}}$  и ЦМ $z_{\text{св}}$  ортогональны ей, также образуя левую СК.

3. Левая связанная с БЛА земная СК ЦМ $x_{\text{уз}}y_{\text{уз}}z_{\text{уз}}$  с осями, параллельными осям СК, использованными в кинематических уравнениях (1.4) движения БЛА.

Применение в данной теории левых СК объясняется требованием пользователей БЛА по использованию в их задачах положительных значений координаты  $z$ .

Формирование программного управления БЛА предлагаются проводить в два этапа:

1. Определение *вектора  $u(t)$  косвенного управления* БЛА с использованием модели (1.3)-(1.6).

2. Формирование *вектора  $\Delta(t)$  прямого управления* БЛА, описывающего законы изменения положения его органов управления, которые вычисляются с использованием значений вектора  $u(t)$ , фазовых координат  $V(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\Psi(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , моментных и конструктивных характеристик конкретного образца БЛА.

Для БЛА СС вектор косвенного управления, не зависящий от их компоновочных схем, в общем случае имеет следующий вид:

$$u(t) = (P(t), \alpha(t), \beta(t), \gamma(t)), \quad (1.7)$$

где  $P(t)$  – сила тяги двигателей БЛА;  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\gamma(t)$  – углы атаки, скольжения и крена БЛА в момент времени  $t \in [t_0, t_k]$ .

Вектор прямого управления БЛА классической самолетной схемы представляется как

$$\Delta(t) = (\delta_P(t), \delta_B(t), \delta_H(t), \delta_E(t)). \quad (1.8)$$

Здесь  $\delta_P(t)$  – закон изменения положения управляющего органа силовой установки БЛА;  $\delta_B(t)$ ,  $\delta_H(t)$ ,  $\delta_E(t)$  – законы отклонения рулей высоты, направления и элеронов БЛА в момент времени  $t \in [t_0, t_k]$ .

Компоненты вектора (1.8) предлагается вычислять с использованием зависимостей вида:

$$\begin{aligned} \delta_P(t) &= \psi_1(P(t), V(t), y(t)); \\ \delta_B(t) &= \psi_2(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), m, p); \\ \delta_H(t) &= \psi_3(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), m, p); \\ \delta_E(t) &= \psi_4(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), m, p), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где  $m$  – вектор моментных коэффициентов и их производных конкретного образца БЛА;  $p$  – вектор конструктивных характеристик этого образца.

Метод построения зависимостей вида (1.9) будет рассмотрен в Главе 5. Для БЛА СС неклассических типов компоновок («утка», «бесхвостка», «летающее крыло» и др.) применяется инвариантный вектор  $u(t)$  вида (1.7) и векторы  $\Delta(t)$  с соответствующими компонентами, описывающими законы отклонения их органов аэродинамического управления.

Состав векторов косвенного и прямого управления БЛА ВС предлагается в Главе 6.

Отметим, что сформированный с использованием определенных методов вектор  $u(t)$  оценивается путем подстановки в систему уравнений (1.3), (1.4) и моделирования движения БЛА путем ее численного интегрирования при заданных начальных условиях (1.5), (1.6).

После принятия решения о его полном соответствии программируемому полетному заданию вычисляются компоненты вектора  $\Delta(t)$  прямого управления БЛА, которые записываются в БЦВМ САУ на этапе предполетной подготовки БЛА.

Важную роль в эксплуатации БЛА играет командный режим управления их полетами, который практически не отражен в существующей литературе.

Отметим, что вопросы командного управления аэрокосмическими ЛА подробно рассматривались в монографии [6], где предлагаемый режим управления полностью соответствует режиму стабилизации полета БЛА.

В дополнение к традиционному описанию управляемого движения БЛА вида (1.1) предлагается использовать формальное представление командно-управляемого полета БЛА, которое в общем случае описывается векторной системой дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{x} = f(t, x, K), \quad t \in [t_0, t_k], \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.10)$$

Множество  $K$  команд управления БЛА, входящее в правую часть этих уравнений имеет вид:

$$K = \{k_1(a), k_2(a), \dots, k_m(a)\}, \quad (1.11)$$

где  $k_j(a)$  – наименование (шифр код, номер)  $j$ -ой управляющей команды;  $a$  – вектор параметров, описывающих требуемые маневры БЛА при реализации конкретных управляющих команд,  $j \in (\overline{1, m})$ .

В настоящее время эти команды передаются оператором управления БЛА по радиоканалу «МНПУ-БЛА» и используются для «ручного» управления ДПЛА [102].

Например, для реализации маневра «пикирование» БЛА с высоты  $h_1$  под углом  $\theta$  с выходом на горизонтальный полет на высоте  $h_2$  используется команда  $k_r$  – «спуск БЛА с вектором параметров  $a = (h_1, \theta, h_2)$ ». Для выполнения маневра «вираж» БЛА с радиусом  $r$  на высоте  $h$  применяется команда  $k_s$  – «правый разворот с вектором  $a = (+1, r, h)$ », где (+1) означает реализацию указанного вида разворота,  $r, s \in (\overline{1, m})$ .

Отметим, что в каждый момент времени  $t \in [t_0, t_k]$  в правой части уравнений (1.10) должен присутствовать один и только один элемент множества  $K$ . Это означает, что на БЛА в каждый момент времени  $t$  воздействует одна конкретная управляющая команда  $k_j(a)$ ,  $j \in (\overline{1, m})$ .

Введем в рассмотрение булевскую функцию:

$$w_j(t) = \begin{cases} 1, & \text{если в моменты времени } t \in [\tau_j, \tau_{j+1}] \\ & \text{для выполнения выбрана команда } k_j(a) \in K; \\ 0, & \text{в противном случае, } j = (\overline{1, m}) \end{cases} \quad (1.12)$$

Условие того, что в каждый момент времени полета БЛА выполняется одна и только одна управляющая команда, формируется следующим образом:

$$\sum_{j=1}^m w_j(t) = 1, \quad t \in [t_0, t_k] \quad (1.13)$$

Тогда модель командно-управляемого движения БЛА запишется как:

$$\dot{x} = f\left(t, x, \sum_{j=1}^m k_j(a) w_j(t)\right), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (1.14)$$

Здесь в качестве системы уравнений (1.1) выступают уравнения (1.14). В этом случае, выбор управляющих воздействий на БЛА может рассматриваться как выбор на интервале времени  $t \in [t_0, t_k]$  функций  $w_1(t), w_2(t), \dots, w_m(t)$ , удовлетворяющих условиям (1.12), (1.13) и требованиям решаемой целевой задачи.

Радиокомандное управление БЛА осуществляется оператором управления, входящим в состав персонала МНПУ БАК (см. Рис. 1.4), следующим образом.

Оператор выбирает реализуемую команду управления из каталога номеров и наименований команд (1.11), представленных на экране монитора его АРМ. Для выбранной команды  $k_j$  с помощью клавиатуры оператор задает значения параметров вектора  $a$ , отражающих требуемые значения полетных параметров выполняемого режима полета (маневра) БЛА и интервал времени  $[\tau_j, \tau_{j+1}]$  его выполнении,  $j \in (1, m)$ . Эти данные передаются по радиоканалу на борт БЛА, где в БЦВМ САУ производится настройка конкретных стандартных программ прямого управления БЛА и выполнение исполнительными механизмами системы результатов вычисления вектора прямого управления  $\Delta(t)$ ,  $t \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$ .

В предлагаемой теории формирование косвенного управления  $u(t)$  видами БЛА, представленными на Рис. 1.2, осуществляется с привлечением следующих подходов:

1. Использование концепции обратных задач динамики управляемых систем [1, 9].

2. Применение методов вариационного исчисления и теории оптимального управления [11, 13, 20, 52].
3. Использование теоретико-игрового подхода [4, 10, 14, 29].
4. Применение методов математического программирования [17, 108].
5. Программирование траекторий полета БЛА с использованием полетных данных пилотируемых ЛА-имитаторов соответствующих видов.
6. Применение интеллектуального управления ЛА.

При практическом решении задач управления в полетах всех видов БЛА на интервале времени  $[t_0, t_k]$  предлагается выделить следующие этапы:

1. Взлет и набор заданной высоты полета в течение времени  $[t_0, t_1]$ .
2. Горизонтальный полет на интервале времени  $[t_1, t_2]$  в зону выполнения полетного задания (ПЗ).
3. Выполнение ПЗ в течение запланированного времени  $[t_2, t_3]$ .
4. Полет в зону посадки при  $t \in [t_3, t_4]$ .
5. Снижение и посадка БЛА в интервале времени  $[t_4, t_5]$ .

Основной задачей предлагаемой теории является разработка методов формирования векторов  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_5(t)$ , обеспечивающих выполнение полетов БЛА на интервале  $[t_0, t_5]$ . При программировании каждого этапа полета БЛА с помощью соответствующих численных методов решаются следующие задачи:

- а) выбор или формирование вида требуемой траектории полета БЛА;
- б) формирование косвенного и прямого управления, обеспечивающего движение БЛА по такой траектории.

Для упрощения методов решения задач управления полетом БЛА на отмеченных выше этапах предлагается использо-

вать совокупность вспомогательных СК, представленных на Рис. 1.9.

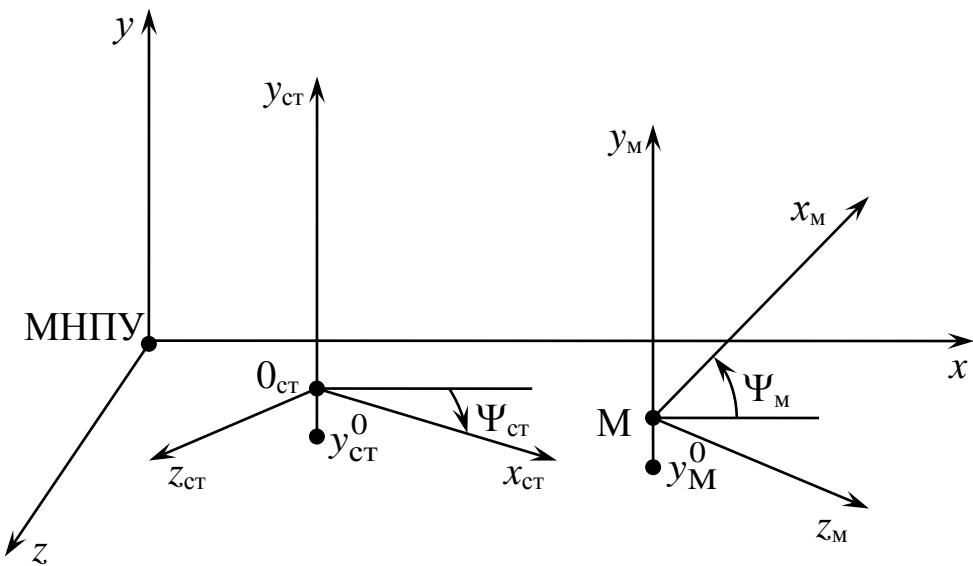


Рис. 1.9

Положение *стартовой* СК [13] относительно нормальной земной системы МНПУ $xyz$  определяется углом поворота  $\Psi_{\text{ст}}$ , определяющим направление полета при старте БЛА с МПУ БАК или осью площадки (аэродрома) взлета и посадки БЛА. В этом случае ось  $0_{\text{ст}}x_{\text{ст}}$  направлена под углом  $\Psi_{\text{ст}}$  к оси МНПУ $x$ . На тот же угол повернута и ось  $0_{\text{ст}}z_{\text{ст}}$  относительно оси МНПУ $z$ . Оси МНПУ $y$  и  $0_{\text{ст}}y_{\text{ст}}$  совпадают. При этом точка  $0_{\text{ст}}$  может находиться на высоте  $y_{\text{ст}}^0$  относительно высоты размещения МНПУ БАК.

Кроме этого введем в рассмотрение *маневренную* СК с началом в заданной точке М. Ось  $Mx_M$  этой системы повернута на угол  $\Psi_m$  относительно оси МНПУ $x$ , а направления осей  $M_y_M$  и МНПУ $y$  совпадают.

Если обозначить через  $(x_{\text{ст}}^0, y_{\text{ст}}^0, z_{\text{ст}}^0)$  координаты точки  $0_{\text{ст}}$  в базовой СК МНПУ $xyz$ , то формулы пересчета значений координат БЛА, полученных в стартовой СК, в базовую СК имеют вид [17]:

$$\begin{aligned}
x(t) &= (x_{ct}(t) - x_{ct}^0) \cos \Psi_{ct} + (z_{ct}(t) - z_{ct}^0) \sin \Psi_{ct}; \\
y(t) &= y_{ct}^0 + y_{ct}(t); \\
z(t) &= -(x_{ct}(t) - x_{ct}^0) \sin \Psi_{ct} + (z_{ct}(t) - z_{ct}^0) \cos \Psi_{ct},
\end{aligned} \tag{1.15}$$

где  $x_{ct}(t)$ ,  $y_{ct}(t)$ ,  $z_{ct}(t)$  – параметрическое представление траектории движения БЛА в стартовой СК.

Аналогичные формулы перехода из маневренной СК с центром М в точке  $(x_M^0, y_M^0, z_M^0)$  в базовую СК записываются как:

$$\begin{aligned}
x(t) &= (x_M(t) - x_M^0) \cos \Psi_M + (z_M(t) - z_M^0) \sin \Psi_M; \\
y(t) &= y_M^0 + y_M(t); \\
z(t) &= -(x_M(t) - x_M^0) \sin \Psi_M + (z_M(t) - z_M^0) \cos \Psi_M.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Здесь  $x_M(t)$ ,  $y_M(t)$ ,  $z_M(t)$  – параметрическое представление траектории движения БЛА в СК  $Mx_My_Mz_M$ .

Для ориентации базовой СК МНПУ $xyz$  примем направление осей местной геодезической СК [7]. В этом случае ось МНПУ $x$  имеет направление на север, ось МНПУ $z$  – на восток, а ось МНПУ $y$  – по местной вертикали вверх.

В связи с тем, что современная спутниковая навигационная аппаратура БЛА (см. Рис. 1.1) работает с системами ГЛОНАСС/GPS [49], для задания местоположения МНПУ БАК предлагается использовать современную геодезическую систему координат СК-95, которая привязана к отечественной геоцентрической СК ПЗ-90.02. Начальная точка СК-95 расположена в Пулковской астрономической обсерватории (Ленинград. обл.). Конкретные значения координат МНПУ БАК определяются с помощью наземных приемников ГЛОНАСС/GPS, входящих в состав их аппаратных средств.

В последующих главах работы будут рассмотрены математические и вычислительные основы предлагаемой теории, модели управляемого движения БЛА и методы программирования

старта, взлета, посадки и полетов различных видов БЛА, представленных на Рис. 1.2.

## **Глава 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ БЛА**

Выбор управления БЛА для эффективного достижения целей проводимой операции является достаточно сложной инженерной задачей. При ее решении в рамках предлагаемой теории управления БЛА необходимо активно использовать аппарат классической и современной математики с обязательным применением средств вычислительной техники. Последнее объясняется тем, что для получения в решаемой задаче практически значимых результатов необходимо использовать достаточно сложные математические модели движения БЛА, учитывающие условия их применения. Как показала практика, при их использовании весьма маловероятным является возможность получения законов управления БЛА в аналитическом (формульном) виде. Формирование таких законов, к которым необходимо стремиться, оправдано тем, что их достоверность может быть проверена «на земле» специалистом по управлению БЛА существующими методами математического анализа. Кроме того, «простые» законы управления БЛА подразумевают менее трудоемкие процессы их бортовой реализации.

Изложение математических методов формирования управления БЛА начинается с основных понятий теории обыкновенных дифференциальных уравнений, которые широко используются как в разнообразных математических моделях движения БЛА, так и в методах оптимизации таких движений путем выбора соответствующих управлений.

Далее приводятся краткое описание методов безусловной и условной оптимизации функций и элементарная теория обратных задач управления динамическими объектами, используемых при программировании требуемых траекторий полетов БЛА.

Значительное место в материале главы отводится таким основным методам формирования оптимальных управлений БЛА, как методы классического вариационного исчисления и их развитию в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Материал данной главы рекомендуется достаточно подробно изучить математику - системному программисту из состава персонала МНПУ БАК для выработки твердых навыков решения практических задач управления БЛА методами предлагаемой теории.

## **2.1. Краткая характеристика теории обыкновенных дифференциальных уравнений**

В материале последующих глав данной работы широко используются дифференциальные уравнения, как средства решения поставленных в них задач.

Дифференциальные уравнения позволяют находить неизвестные функции, удовлетворяющие, кроме порождающих их уравнений, некоторым дополнительным требованиям.

В выражения, представляющие такие уравнения, неизвестные функции обязательно входят вместе с их производными по рассматриваемым в решаемой задаче аргументам.

При наличии у неизвестных функций более одного аргумента соответствующие выражения называются дифференциальными уравнениями в частных производных.

Если неизвестные функции зависят только от одной переменной (аргумента), то такие выражения называются обыкновенными дифференциальными уравнениями [20]. Такие уравнения являются основным математическим аппаратом задач динамики полета и управления ЛА [4, 6, 7, 9, 11, 13, 21, 23, 27-30, 52].

Порядком дифференциального уравнения называется максимальный порядок входящей в него производной неизвестной функции.

В ситуации, когда в задаче участвуют несколько неизвестных функций, математические выражения для их определения называются системой дифференциальных уравнений.

Количество таких уравнений, которое должно обязательно совпадать с числом неизвестных функций, называется порядком системы дифференциальных уравнений.

Заметим, что на практике имеют место системы дифференциальных уравнений, состоящие из уравнений первого, второго, третьего и др. порядков.

В науке и технике выделяются следующие подходы к построению дифференциальных уравнений и их систем:

1. Построение зависимостей, описывающих исследуемое явление или процесс, которые наряду с их характеристиками содержат производные определенного порядка, отражающие развитие изучаемых свойств в пространстве и (или) во времени. Такой метод называется непосредственным выводом дифференциальных уравнений.

2. Использование дифференциальных уравнений, описывающих фундаментальные законы, установленные в соответствующих областях науки и техники. В этом случае исследователь или инженер формирует требуемые ему уравнения путем конкретизации применительно к решаемой задаче характеристик и параметров выбранного им закона. Этот подход с использованием законов теоретической механики [22] применен для построения дифференциальных уравнений движения БЛА, приведенных в Главах 5, 6, 7 данной работы.

3. Применение в исследованиях и разработках задач вариационного исчисления, в которых формирование дифференциальных уравнений является первым этапом их решения. Данний подход описан в Разд. 2.4. Примеры построения дифференциальных уравнений в вариационных задачах оптимизации траекторий полетов БЛА представлены в Главах 8 и 9.

Рассмотрим основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений [17, 20].

Обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка относительно неизвестной функции  $y = y(x)$  в общем виде представляется выражением вида:

$$F(x, y, y') = 0. \quad (2.1.1)$$

Здесь  $y' = \frac{dy}{dx}$  – производная искомой функции  $y = y(x)$ .

Выделив из этого выражения производную  $y'$ , т.е. переписав его в форме:

$$y' = f(x, y), \quad (2.1.2)$$

получаем стандартную форму записи дифференциального уравнения 1-го порядка.

Если функция  $f(x, y)$  является линейной функцией своих аргументов, то имеем линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка.

Примером выражения (2.1.2) является уравнение вида:

$$y' = 2x^2 y. \quad (2.1.3)$$

Уравнение

$$y' = ax + by, \quad a = \text{const}, \quad b = \text{const}, \quad (2.1.4)$$

является примером линейного дифференциального уравнения 1-го порядка с постоянными коэффициентами.

Решением уравнения (2.1.1) или (2.1.2) называется функция  $y(x)$ , которая после ее подстановки в эти выражения превращает их в тождества.

В общем случае уравнению (2.1.2) удовлетворяет некоторое семейство функций  $y(x)$ , представленное на Рис. 2.1.

Для нахождения единственного решения  $y = y(x)$  уравнения (2.1.2) на плоскости  $Oxy$  задается точка с координатами  $(x_0, y_0)$ , через которую должна пройти искомая кривая (см. Рис. 2.1, a).

Это требование записывается в форме выражения:

$$y(x_0) = y_0, \quad (2.1.5)$$

которое называется начальным условием для уравнения (2.1.2).

Интегрирование уравнения (2.1.2) с учетом условия (2.1.5) называется решением задачи Коши вида (2.1.2), (2.1.5).

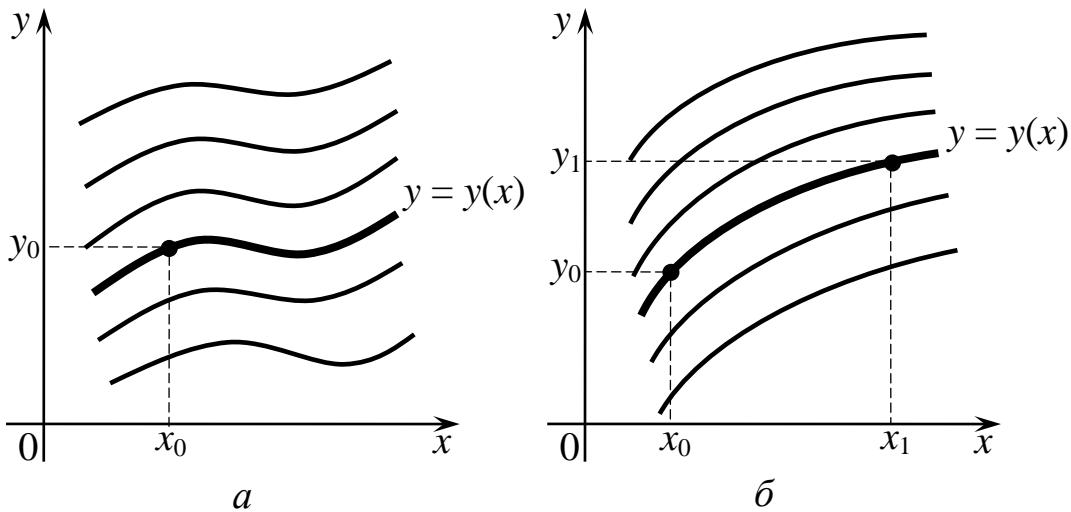


Рис. 2.1

Функция  $y = y(x)$  может определяться из решения дифференциального уравнения  $n$ -го порядка, которое по аналогии с выражением (2.1.1) представляется в общем виде как:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (2.1.6)$$

Здесь  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ , ...,  $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$  – соответственно производные второго, третьего и  $n$ -го порядков функции  $y = y(x)$ .

В этом случае для получения единственного решения уравнения (2.1.6) задается совокупность начальных условий вида:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, & y'(x_0) &= y'_0, \\ y''(x_0) &= y''_0, \dots, & y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

которые дополнительно к значению искомой функции в точке  $x = x_0$  определяют в ней значения входящих в уравнение производных этой функции до  $(n - 1)$ -го порядка включительно.

Кроме задачи Коши (2.1.6), (2.1.7) с помощью таких уравнений решаются так называемые краевые задачи, в которых

решение  $y = y(x)$  должно проходить через две заданные точки (см. Рис. 2.1,б).

В этом случае число граничных условий, задаваемых в точках  $x = x_0$  и  $x = x_1$ , должно равняться порядку уравнения (2.1.6).

Например, граничные условия для уравнения 4-го порядка записываются как:

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y'_0; \quad y(x_1) = y_1; \quad y'(x_1) = y'_1.$$

Уравнение (2.1.6) в зависимости от вида функции  $F$  могут быть линейным или нелинейным уравнением.

Примером линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами является следующее уравнение:

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y - \varphi(x) = 0, \quad (2.1.8)$$

где  $a_0 \neq 0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  – заданные значения коэффициентов;  $\varphi(x)$  – заданная (известная) функция.

Уравнение (2.1.8) как задача Коши может решаться при начальных условиях:

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y'_0.$$

Граничные условия для этого уравнения, с помощью которых формулируется соответствующая краевая задача, имеют вид:

$$y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1.$$

На практике для определения неизвестных функций  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , ...,  $y_n(x)$  используются системы дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка, которые в общем случае записываются как:

$$\begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ y'_2 &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ &\dots \\ y'_n &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Для получения единственного решения таких систем используют начальные условия вида:

$$y_1(x_0) = y_{10}; \quad y_2(x_0) = y_{20}; \dots, y_n(x_0) = y_{n0}, \quad (2.1.10)$$

которые задают требуемые значения неизвестных функций в конкретной точке  $x = x_0$ .

Интегрирование системы уравнений (2.1.9) с начальными условиями (2.1.10) называется, как и выше, решением задачи Коши (2.1.9), (2.1.10).

Примером системы линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами являются выражения:

$$\begin{aligned} y'_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \varphi_1(x); \\ y'_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \varphi_2(x), \end{aligned}$$

где  $a_{ij} = \text{const}$  – заданные значения коэффициентов системы,  $i = (\overline{1,2})$ ,  $j = (\overline{1,2})$ ;  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$  – известные функции переменной  $x$ .

В теории дифференциальных уравнений доказывается, что любая система вида (2.1.9) может быть сведена путем специальных преобразований к уравнению вида (2.1.6) и наоборот [20].

В приложениях теории дифференциальных уравнений неизвестные функции могут иметь аргумент отличный от переменной  $x$ . Очень часто в качестве такой переменной используется время  $t$ .

Если применить для неизвестной функции  $z = z(t)$  следующие обозначения первой и второй производных:

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z},$$

то уравнения (2.1.2) и (2.1.8) принимают вид:

$$\dot{z} = f(t, z); \quad a_0\ddot{z} + a_1\dot{z} + a_2z - \psi(t) = 0.$$

Начальные условия для этих уравнений записываются соответственно как  $z(t_0) = z_0$  и  $z(t_0) = z_0$ ;  $\dot{z}(t_0) = \dot{z}_0$ .

Общая форма записи задачи Коши для определения функций  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$ , ...,  $z_i(t)$ , ...,  $z_n(t)$  имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= f_i(t, z_1, z_2, \dots, z_n), \quad i = \overline{1, n} \\ z_i(t_0) &= z_{i0}, \quad i = \overline{1, n}.\end{aligned}\tag{2.1.11}$$

Рассмотрим наиболее часто используемые на практике методы получения аналитических (формульных) решений дифференциальных уравнений.

Метод разделения переменных при решении уравнения (2.1.2) применяется в тех случаях, когда функцию  $f(x, y)$  можно представить как произведение или частное от деления функций  $f_1(x)$  и  $f_2(y)$ .

Пусть уравнение (2.1.2) имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x)}{f_2(y)}.$$

Избавляясь от дробей, представим его в следующей форме:

$$f_2(y) dy = f_1(x) dx.$$

Интегрируя обе части этого равенства, имеем:

$$\int f_2(y) dy = \int f_1(x) dx + C.$$

Здесь  $C$  – произвольная постоянная, которая появляется при вычислении неопределенных интегралов [8].

Вычисляя интегралы, получим выражение вида:

$$\Psi_2(y) = \Psi_1(x) + C. \tag{2.1.12}$$

Из этого соотношения путем его преобразований выделяется зависимость вида:

$$y = \Phi(x_0, C). \tag{2.1.13}$$

Постоянная интегрирования  $C$  определяется с помощью начального условия (2.1.5) как решение уравнения:

$$\Phi(x_0, C) - y_0 = 0.$$

При сложности решения этого уравнения значение  $C$  можно определить как

$$C = \Psi_2(y_0) - \Psi_1(x_0).$$

## Пример 2.1

Решим с помощью этого метода уравнение (2.1.3) с начальным условием:

$$y(1) = e. \quad (2.1.14)$$

Запишем это уравнение в следующей форме:

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 y = f_1(x)f_2(y),$$

где  $f_1(x) = 2x^2$ ,  $f_2(y) = y$ .

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Подставляя в это равенство конкретный вид функций  $f_1(x)$  и  $f_2(y)$ , имеем:

$$\frac{dy}{y} = 2x^2 dx.$$

Вычисляя интегралы от правой и левой частей этого выражения, получаем решение уравнения в форме (2.1.12):

$$\ln y = \frac{2}{3}x^3 + C. \quad (2.1.15)$$

Потенцируя обе части этого равенства, запишем конкретизацию выражения (2.1.13) в виде следующей формулы:

$$y = e^{\left(\frac{2}{3}x^3 + C\right)} = \exp\left(\frac{2}{3}x^3 + C\right). \quad (2.1.16)$$

Эта формула при различных значениях постоянной  $C$  задает семейство интегральных кривых  $y = y(x)$ , изображенных на Рис. 2.1,*a*, каждая из которых является решением уравнения (2.1.3). Для указания конкретной кривой (см. Рис. 2.1,*б*) значение  $C$  определим с помощью выражений (2.1.14) и (2.1.15):

$$C = \ln e - \frac{2}{3} \cdot 1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

В этом случае решение (2.1.16) конкретизируется следующим образом:

$$y = \exp\left[\frac{1}{3}(2x^3 + 1)\right]. \quad (2.1.17)$$

Другие методы интегрирования дифференциальных уравнений 1-го порядка приведены в работе [20].

В некоторых приложениях встречаются разрывные дифференциальные уравнения, в которых правая часть представляет собой совокупность функций, заданных в различных интервалах изменения независимой переменной.

Разрывное дифференциальное уравнение 1-го порядка имеет вид:

$$y' = \begin{cases} f_1(x, y), & x \in [x_0, x_1); \\ f_2(x, y), & x \in [x_1, \infty). \end{cases} \quad (2.1.18)$$

Начальное условие для этого уравнения записывается как:

$$y(x_0) = y_0. \quad (2.1.19)$$

На практике решение задачи Коши (2.1.18), (2.1.19) сводится к последовательному решению двух задач Коши:

$$y'_1 = f_1(x, y_1), \quad y_1(x_0) = y_0; \quad (2.1.20)$$

$$y'_2 = f_2(x, y_1), \quad y_2(x_1) = y_1(x_1). \quad (2.1.21)$$

Начальное условие для определения функции  $y_2(x)$  формируется с использованием решения задачи Коши (2.1.20).

Таким образом, решение уравнения (2.1.18) представляется в виде:

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in [x_0, x_1); \\ y_2(x), & x \in [x_1, \infty). \end{cases} \quad (2.1.22)$$

### Пример 2.2

Пусть уравнение (2.1.18) имеет вид:

$$y' = \begin{cases} x, & x \in [0; 1); \\ -2y, & x \in [1, \infty). \end{cases} \quad (2.1.23)$$

и задано начальное условие:

$$y(0) = 1.$$

Задача Коши (2.1.20) в данном случае записывается как:

$$y'_1 = x, \quad y_1(0) = 1.$$

Семейство кривых, являющихся решением этого уравнения, имеет вид:

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Постоянную интегрирования  $C_1$  определим из начального условия как:

$$1 = 0 + C_1.$$

Отсюда единственное решение первого дифференциального уравнения записывается как:

$$y_1(x) = 1 + 0,5x^2.$$

Определим из этого выражения начальное условие для второго дифференциального уравнения:

$$y'_2 = -2y_2,$$

которое будет иметь вид:

$$y_2(1) = y_1(1) = 1,5.$$

В общем случае решение второго дифференциального уравнения как уравнения с разделяющимися переменными записывается как:

$$y_2(x) = C_2 e^{-2x}.$$

Постоянная  $C_2$  определяется следующим образом:

$$1,5 = C_2 e^{-2}.$$

Откуда:

$$C_2 = 1,5e^2.$$

Тогда единственное решение второго уравнения будет иметь вид:

$$y_2(x) = 1,5e^{2(1-x)}.$$

Графически результаты решения разрывного дифференциального уравнения (2.1.23) представлены на Рис. 2.2.

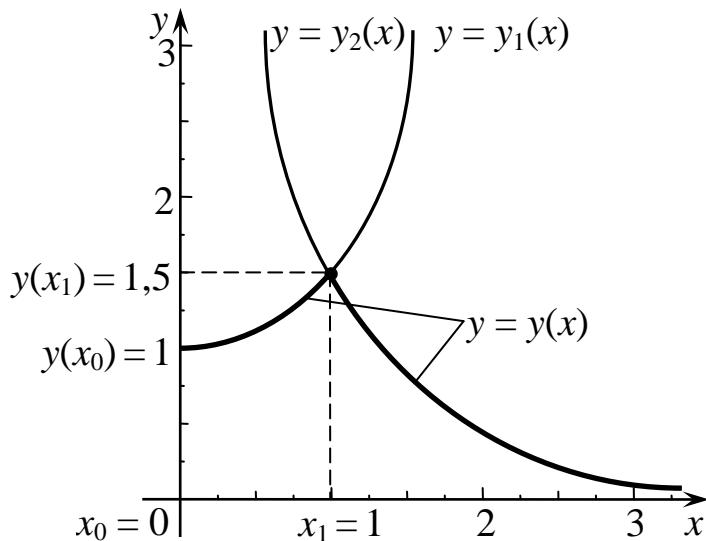


Рис. 2.2

Из этого рисунка видно, что в точке  $x = 1$  функция  $y(x)$  имеет излом, а производная  $y'(x)$  претерпевает разрыв.

Решение любого дифференциального уравнения, содержащее постоянные интегрирования, называется его общим решением. После конкретизации их значений с помощью начальных или граничных условий полученное решение называется частным решением дифференциального уравнения.

В смысле этих определений выражение (2.1.16) является общим, а (2.1.17) – частным решениями уравнения (2.1.3).

Заметим, что решения уравнения  $n$ -го порядка вида (2.1.6) и систем уравнений вида (2.1.9) и (2.1.11) включают  $n$  постоянных интегрирования  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

Рассмотрим некоторые методы получения общих и частных решений дифференциальных уравнений.

Приведенным выше методом разделения переменных можно решать уравнения вида:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by), \quad (2.1.24)$$

где  $a, b$  – постоянные величины.

В данном случае используется замена переменных:

$$w = ax + by. \quad (2.1.25)$$

Дифференцируя по  $x$  обе части этого равенства, имеем:

$$\frac{dw}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}.$$

С учетом этого исходное уравнение преобразуется в уравнение с искомой функцией  $w = w(x)$  вида:

$$\frac{dw}{dx} = a + bf(w).$$

Разделяя переменные в этом уравнении, получим:

$$\frac{dw}{a + bf(w)} = dx.$$

Интегрируя это равенство, имеем:

$$x = \int \frac{dw}{a + bf(w)} + C.$$

Действия по возврату к функции  $y(x)$  проиллюстрируем на примере решения конкретного уравнения вида (2.1.24).

### Пример 2.3

Пусть решаемое уравнение имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y.$$

Полагая  $w = 2x + y$ , будем иметь:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dw}{dx} - 2, \quad \frac{dw}{dx} = w + 2.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{w+2} &= dx; \quad \ln|w+2| = x + \ln C; \\ w &= Ce^x - 2; \quad 2x + y = Ce^x - 2. \end{aligned}$$

Отсюда общее решение рассматриваемого уравнения имеет вид:

$$y = Ce^x - 2x - 2.$$

Заметим, что с помощью замены (2.1.25) методом разделения переменных можно решать линейные неоднородные уравнения 1-го порядка вида (2.1.4).

Рассмотрим метод решения линейного однородного уравнения 2-го порядка:

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad (2.1.26)$$

которое получается из уравнения (2.1.8) при  $\varphi(x) \equiv 0$ .

Для построения общего решения уравнения (2.1.26) формируется характеристическое уравнение вида [17]:

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \quad (2.1.27)$$

Решая это квадратное уравнение, имеем

$$k_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}.$$

Если корни  $k_1$  и  $k_2$  этого уравнения действительны и различны, то общее решение уравнения (2.1.26) записывается как:

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \quad (2.1.28)$$

При  $a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0$  уравнение (2.1.27) имеет два одинаковых корня:

$$k_1 = k_2 = -\frac{a_1}{2a_0}.$$

В этом случае общее решение уравнения (2.1.26) имеет вид:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{a_1}{2a_0} x}.$$

Характеристическое уравнение (2.1.27) при  $a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0$  имеет комплексно-сопряженные корни:

$$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta.$$

Тогда общее решение уравнения (2.1.6) представляется выражением:

$$y(x) = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x),$$

где

$$\alpha = -\frac{a_1}{2a_0}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4a_0 a_2 - a_1^2}}{2a_0}.$$

Для получения частного решения уравнения (2.1.26) необходимо определить с помощью указанных выше начальных или граничных условий значения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$ .

### Пример 2.3

Построим общее и частные решения следующего линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$y'' - 5y' + 6y = 0. \quad (2.1.29)$$

Характеристическое уравнение (2.1.27) записывается как

$$k^2 - 5k + 6 = 0.$$

Корни этого уравнения будут соответственно равны:

$$k_1 = 3; \quad k_2 = 2.$$

В этом случае общее решение рассматриваемого уравнения с учетом выражения (2.1.28) будет иметь вид:

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}. \quad (2.1.30)$$

Пусть для уравнения (2.1.29) заданы следующие начальные условия:

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = 1. \quad (2.1.31)$$

Тогда для получения частного решения задачи Коши (2.1.29), (2.1.31) необходимо решить систему уравнений вида:

$$C_1 + C_2 = 0;$$

$$3C_1 + 2C_2 = 1.$$

Из этой системы следует, что

$$C_1^0 = 1; \quad C_2^0 = -1.$$

Подставляя эти значения в выражение (2.1.30), получим искомое решение задачи Коши:

$$y(x) = e^{3x} - e^{2x}.$$

Пусть решение уравнения (2.1.29) должно проходить через следующие точки:

$$y(0) = 0; \quad y(1) = 2. \quad (2.1.32)$$

Для учета этих граничных условий с использованием формулы (2.1.30) сформируем систему уравнений вида:

$$C_1 + C_2 = 0;$$

$$e^3 C_1 + e^2 C_2 = 2.$$

Решая эту систему, получим

$$C_1^0 = -\frac{2}{e^2 - e^3}; \quad C_2^0 = \frac{2}{e^2 - e^3}.$$

Подставляя эти значения в выражение (2.1.30), запишем частное решение краевой задачи (2.1.29), (2.1.32):

$$y(x) = \frac{2}{e^2 - e^3} (e^{2x} - e^{3x}).$$

В работе [17] приведены методы решения линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка и систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим общий подход к решению уравнения (2.1.1), из которого невозможно получить стандартную форму записи уравнения 1-го порядка вида (2.1.2) [20].

Заменим аргументы функции  $F$  их параметрическими представлениями:

$$x = \varphi(u, v); \quad y = \psi(u, v); \quad y' = \chi(u, v). \quad (2.1.33)$$

где  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\chi$  – выбранные функции;  $u$ ,  $v$  – параметры.

Пользуясь представлением дифференциала функции  $y = y(x)$  вида:

$$dy = y' dx,$$

получаем, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = \chi(u, v) \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \right].$$

Разрешая это выражение относительно производной  $\left( \frac{dv}{du} \right)$ ,

имеем:

$$\frac{dv}{du} = \frac{\chi(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}}{\frac{\partial \psi}{\partial v} - \chi(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial v}}.$$

Это выражение является уравнением 1-го порядка, разрешенным относительно производной неизвестной функции  $v = v(u)$ , для решения которого в общем случае используются описанные в Разд. 3.1 численные методы интегрирования дифференциальных уравнений.

Первым этапом при решении нелинейных уравнений вида (2.1.6) является анализ возможности понижения их порядка.

Особенно часто в приложениях используются следующие виды уравнений 2-го порядка, допускающие их сведение к уравнениям 1-го порядка:

1. Уравнение вида:

$$F(x, y'') = 0$$

упрощается с помощью следующих приемов:

а) выделение из уравнения зависимости

$$y'' = f(x),$$

которая дважды интегрируется для получения искомой функции  $y = y(x)$ ;

б) введение новой неизвестной функции  $p = p(x)$ , использование подстановки:

$$y' = p$$

и сведение к уравнению:

$$F\left(x, \frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

Если это уравнение невозможно разрешить относительно производной, то можно заменить его двумя параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t); \quad \frac{dp}{dx} = \psi(t),$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  – выбранные функции.

Так как  $dp = p'dx$ , то в данном случае  $dp = \psi(t)\varphi'(t)dt$ .

Откуда:

$$p = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C_1.$$

Искомое решение получается в параметрической форме как:

$$\begin{aligned}y(t) &= \int \int \psi(t) \varphi'(t) dt dt + C_1 t + C_2; \\x(t) &= \varphi(t).\end{aligned}$$

## 2. Уравнение

$$F(y', y'') = 0$$

представляется в параметрическом виде:

$$y' = \varphi(t), \quad y'' = \psi(t).$$

Дифференциал от производной  $y'$  представим как:

$$dy' = y'' dx.$$

Отсюда:

$$dx = \frac{dy'}{y''} = \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)}.$$

Проводя интегрирование этого выражения, получим:

$$x(t) = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C_1.$$

Для получения функции  $y(t)$  используем представление вида:

$$dy = y' dx = \varphi(t) \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt.$$

Интегрируя это равенство, получим:

$$y(t) = \int \frac{\varphi(t) \varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C_2.$$

## 3. Уравнение

$$F(y, y'') = 0$$

можно упростить, полагая:

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}.$$

В этом случае исходное уравнение превращается в уравнение 1-го порядка вида:

$$F\left(y, p \frac{dp}{dy}\right) = 0 \quad (2.1.34)$$

относительно неизвестной функции  $p = p(y)$ . Искомая функция  $y(x)$  определяется из уравнения с разделяющимися переменными вида:

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1),$$

где  $p(y, C_1)$  – общее решение уравнения (2.1.34).

С существующими подходами к интегрированию различных видов уравнений можно ознакомиться в работе [20] и др.

В заключение данного раздела уточним постановку краевых задач для дифференциальных уравнений 2-го порядка и выше.

Простейшей краевой задачей является двухточечная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$y'' = f(x, y, y') \quad (2.1.35)$$

с граничными условиями, заданными на концах отрезка  $[a, b]$ :

$$y(a) = y_0; \quad y(b) = y_1. \quad (2.1.36)$$

В этой задаче следует найти такое решение  $y(x)$  уравнения (2.1.35) на отрезке  $[a, b]$ , которое принимает на его концах значения  $y_0$  и  $y_1$ . Если функция  $f(x, y, y')$  линейна по аргументам  $y$ ,  $y'$ , то задача (2.1.35), (2.1.36) является линейной краевой задачей (см. пример 2.3), в противном случае – это нелинейная краевая задача.

Кроме граничных условий (2.1.36), называемых *граничными условиями 1-го рода*, в прикладных задачах используются условия, накладываемые на производные от решения на концах интервала  $[a, b]$  (*граничные условия 2-го рода*) [25]:

$$y'(a) = y'_0; \quad y'(b) = y'_1 \quad (2.1.37)$$

или линейная комбинация решений и их производных (*граничные условия 3-го рода*):

$$\alpha y(a) + \beta y'(b) = A; \quad \delta y(a) + \gamma y'(b) = B, \quad (2.1.38)$$

где  $\alpha, \beta, \delta, \gamma$  – такие числа, что  $|\alpha| + |\beta| \neq 0, |\delta| + |\gamma| \neq 0$ ;  $A, B$  – заданные константы.

Отметим, что из условий 3-го рода как частные случаи при определенных значениях параметров  $\alpha, \beta, \delta, \gamma$  получаются условия вида (2.1.36) и (2.1.37).

В практических задачах на разных концах отрезка  $[a, b]$  могут использоваться условия различных типов. В некоторых из таких задач применяются нелинейные граничные условия вида:

$$\phi_1(y(a), y'(a)) = 0; \quad \phi_2(y(b), y'(b)) = 0. \quad (2.1.39)$$

Общие постановки краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений приведены в работах [25, 104].

## 2.2. Безусловные и условные экстремумы функций многих переменных

При формировании управлений БЛА возникают экстремальные задачи, в которых требуется определить значения переменных, доставляющих минимум (максимум) некоторой зависящей от них функции.

Такие задачи относятся к классическим задачам нахождения экстремума функций одной или нескольких переменных [8, 17]. Для функций многих переменных выделяются задачи нахождения безусловных или условных точек их минимума (максимума). В последнем случае в решаемых задачах минимизации (максимизации) значения искомых переменных должны дополнительно удовлетворять ограничениям типа равенств [8].

В данном разделе приводятся краткие сведения по решению таких задач, необходимые для использования в последующих главах монографии.

Рассмотрим задачу определения минимального (максимального) значения дважды дифференцируемой функции одной переменной  $y = f(x)$ .

Необходимое условие того, что в некоторых точках эта функция имеет экстремум (минимум или максимум), имеет вид [8, 17]:

$$\frac{df}{dx} = 0. \quad (2.2.1)$$

Точки, в которых выполняется это условие, называются точками, подозрительными на экстремум, или стационарными точками функции  $f(x)$ .

При решении практических задач используются достаточные условия достижения функцией  $f(x)$  максимума или минимума в таких точках, которые формулируются как: «Если в точке  $x = x_0$  выполняется неравенство:

$$f''(x_0) = \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_0} < 0, \quad (2.2.2)$$

то функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  максимум. При противоположном неравенстве в этой точке достигается минимум функции  $f(x)$ . Если вторая производная в рассматриваемой точке равна 0, то в ней функция  $f(x)$  имеет точку перегиба» (Рис. 2.3).

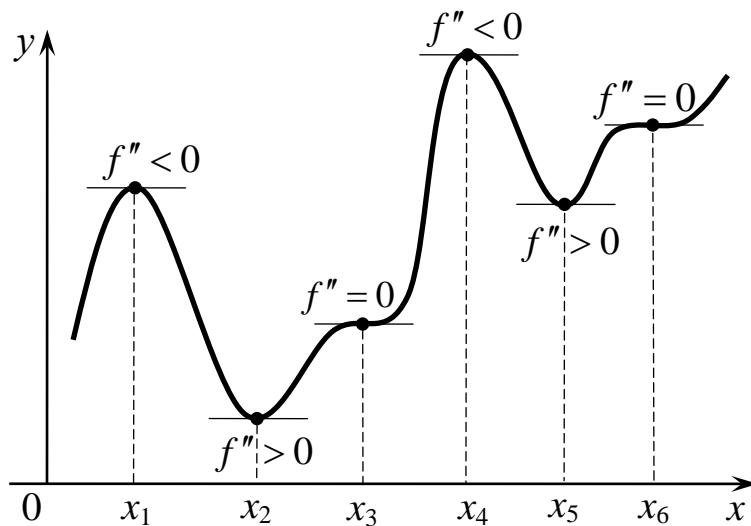


Рис. 2.3

Схема нахождения точек максимума (минимума) дважды дифференцируемой функции  $f(x)$  включает в себя три этапа:

1°. Составление и решение уравнения (2.2.1) для определения значений стационарных точек  $x_k$  ( $k > 0$ ) функции  $f(x)$ .

2°. Вычисление значения второй производной функции  $f(x)$  в каждой точке  $x_k$  и определение ее знака.

3°. Выводы о наличии в каждой стационарной точке  $x_k$  точек максимума, минимума или точек перегиба исследуемой функции  $f(x)$  с использованием приведенного выше правила.

На Рис. 2.3 в составе стационарных точек  $x_1, x_2, \dots, x_6$  функции  $y = f(x)$  с помощью достаточных условий ее экстремума выделены точки максимума ( $x_1, x_4$ ), минимума ( $x_2, x_5$ ) и точки перегиба ( $x_3, x_6$ ).

При минимизации или максимизации функций многих переменных решается задача вида:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{extr.} \quad (2.2.3)$$

Стационарные точки этой функции по аналогии с формулой (2.2.1) находятся из решения следующей системы нелинейных уравнений  $n$ -го порядка [8, 17]:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = (1, n), \quad (2.2.4)$$

которые являются необходимыми условиями экстремума функции (2.2.3).

Достаточные условия минимума или максимума функции (2.2.3) на решениях системы (2.2.4) приведены в работе [8].

Заметим, что задачи определения глобального (наибольшего) максимума и глобального (наименьшего) минимума многоэкстремальных функций  $y = f(x)$  и  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  рассматриваемый классический подход не решает. Такие точки находятся путем перебора значений функции  $f$  в выявленных точках ее максимума и минимума. На Рис. 2.3 точками глобальных максимума и минимума функции  $y = f(x)$  являются соответственно точки  $x_4$  и  $x_2$ .

Задача (2.2.3) является задачей поиска безусловного экстремума функции  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Наряду с этой задачей в приложениях используется задача определения условного экстремума такой функции, которая формулируется следующим образом: «Найти значения переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , доставляющих минимум (максимум) функции (2.2.3) при выполнении условий вида

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad j = (\overline{1, m}). \quad (2.2.5)$$

При этом предполагается, что  $m < n$  и функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $j = (\overline{1, m})$  непрерывны вместе со своими первыми производными.

Будем решать задачу (2.2.3), (2.2.5) методом Лагранжа [17, 108].

Введем дополнительные переменные  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  и составим функцию Лагранжа вида:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) &= \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Необходимые условия экстремума этой функции предполагает равенство нулю частных производных [17, 108]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = (\overline{1, n}); \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} &= g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad j = (\overline{1, m}). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

В работе [108] отмечается, что, если функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в точке  $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  имеет экстремум, то существует такой вектор множителей Лагранжа  $\Lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)})$ , что точка с координатами

$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)})$  является решением системы уравнений (2.2.7).

Отсюда следует, что, решая эту систему  $(n + m)$ -го порядка аналитическими или численными методами, изложенными в Главе 3, можно определить стационарные точки функции  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , в которых она может принимать экстремальные значения.

Как и выше, точки глобального максимума или минимума определяются путем вычисления и сравнения значений функции  $f$  в найденных стационарных точках.

#### Пример 2.4

Найти точку условного экстремума функции:

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3 \quad (2.2.8)$$

при выполнении условий (ограничений) вида:

$$\begin{aligned} g_1 &= x_1 + x_2 - 2 = 0; \\ g_2 &= x_2 + x_3 - 2 = 0. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Функция Лагранжа (2.2.6) с учетом выражений (2.2.8) и (2.2.9) конкретизируется как:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) &= \\ &= x_1 x_2 + x_2 x_3 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2(x_2 + x_3 - 2). \end{aligned}$$

Система уравнений (2.2.7) для определения значений переменных  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}$  примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= x_2 + \lambda_1 = 0; & \frac{\partial L}{\partial x_2} &= x_1 + x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} &= x_2 + \lambda_2 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= x_1 + x_2 - 2 = 0; & \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= x_2 + x_3 - 2 = 0. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Из первого и третьего уравнений этой системы следует, что

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -x_2.$$

Подставляя эти значения в остальные уравнения системы (2.2.10), получаем систему линейных алгебраических уравнений третьего порядка:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0;$$

$$x_1 + x_2 = 2;$$

$$x_2 + x_3 = 2,$$

решая которую находим следующие значения искомых переменных и целевой функции:

$$x_1^{(0)} = 1; \quad x_2^{(0)} = 1; \quad x_3^{(0)} = 1; \quad y_{\text{extr}} = 2.$$

Изложенный выше классический подход к безусловной и условной минимизации (максимизации) функций многих переменных был в XX веке обобщен и развит в составе такой научной дисциплины как *математическое программирование* [108].

Общая постановка решаемой численными методами задачи математического программирования имеет вид:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min_{x_1, \dots, x_n}; \quad (2.2.11)$$

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \quad j = (\overline{1, m}); \quad (2.2.12)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = (\overline{1, n}). \quad (2.2.13)$$

Сравнение задач (2.2.3), (2.2.5) и (2.2.11)-(2.2.13) позволяет выделить их следующие отличия:

а) искомые переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  должны доставлять минимум целевой функции (2.2.11), а не являться стационарными точками этой функции,

б) ограничения типа равенств (2.2.5) заменены неравенствами вида (2.2.12),

в) на значения искомых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  задачи наложены требования их неотрицательности в форме неравенств (2.2.13).

В некоторых прикладных задачах часть или все такие неравенства заменяются условиями вида:

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i \in (\overline{1, m}), \quad (2.2.14)$$

которые описывают требования того, что значения искомых переменных задачи должны принадлежать заданным интервалам  $[a_i, b_i]$ ,  $i \in (\overline{1, n})$ .

В зависимости от вида функций  $f$  и  $g_j$ ,  $j = (\overline{1, m})$  в составе задач математического программирования выделяются задачи линейного и нелинейного программирования [108].

Первый класс задач, который характерен тем, что эти функции являются линейными функциями переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , в общей форме записывается как:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \min_{x_1, x_2, \dots, x_n}; \\ g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i - b_j \geq 0, \quad j = (\overline{1, m}); \quad (2.2.15) \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0, \dots, \quad x_n \geq 0, \end{aligned}$$

где  $c_i, a_{ij}, b_j$  – заданные числа,  $i = (\overline{1, n})$ ,  $j = (\overline{1, m})$ .

Любая задача вида (2.2.11)-(2.2.13), которая не соответствует полностью выражениям в форме (2.2.15), является задачей нелинейного программирования.

К таким задачам с ограничениями (2.2.12), представленными в форме равенств, и с заменой условий вида (2.2.13) на условия

$$-\infty \leq x_i \leq \infty, \quad i = (\overline{1, n}) \quad (2.2.16)$$

относится рассмотренная выше задача (2.2.3), (2.2.5) [108].

В отмеченной работе при наличии в выражениях (2.2.15) зависимостей коэффициентов  $c_i, a_{ij}, b_j$ ,  $i = (\overline{1, n})$ ,  $j = (\overline{1, m})$  от некоторого параметра  $t$  вводится понятие параметрической задачи линейного программирования, и предлагаются методы ее решения.

Задачи параметрического нелинейного программирования в существующей литературе практически отсутствуют.

В предлагаемой теории управления БЛА используются задачи параметрического нелинейного программирования вида (2.2.3), (2.2.5), в которых в качестве искомых переменных выступают функции:

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \dots, \quad x_n = x_n(t), \quad (2.2.17)$$

где  $t$  – параметр, имеющий смысл текущего времени и принимающий значения из заданного интервала моментов времени  $[t_0, t_k]$ .

В общем случае этот параметр может входить в состав аргументов целевой функции  $f$  и функций  $g_j$ ,  $j = (\overline{1, m})$ , описывающих ограничения задачи.

С учетом этого и выражений (2.2.17) функция Лагранжа (2.2.6) будет зависеть от параметра  $t \in [t_0, t_k]$ . Необходимые условия экстремума этой функции вида (2.2.7) превращаются в этом случае в систему нелинейных параметрических уравнений, решениями которой являются функции (2.2.7) и зависимости  $\lambda_j = \lambda_j(t)$ ,  $j = (\overline{1, m})$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ .

В простейших случаях эта система может быть решена аналитически. В общем случае для ее решения используются численные методы, описанные в Разд. 3.5.

Отметим, что задачи параметрического нелинейного программирования могут решаться с использованием ограничений (2.2.14) или (2.2.16).

Параметрический метод Лагранжа будет использован в главах 5 и 6 для определения векторов косвенного и прямого управления БЛА самолетной и вертолетной схем. Классический метод Лагранжа будет применен в Главе 9 для оптимизации установившихся параметров полета БЛА.

### **2.3. Элементарная теория обратных задач управления динамическими объектами**

В инженерных приложениях теории управления динамическими объектами имеется необходимость обеспечения их движения по заданным (требуемым) фазовым траекториям.

Для модели управляемого движения объекта вида (1.1) такая задача формулируется следующим образом: «Определить управления  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ , обеспечивающие на интервале времени  $[t_0, t_1]$  выполнение условий:

$$x_j(t) = \psi_j(t); \quad \dot{x}_j(t) = \dot{\psi}_j(t), \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.3.1)$$

где  $\psi_j = \psi_j(t)$  – заданные функции. При этом в общем случае на выбор функций  $u_r(t)$ ,  $r = \overline{1, m}$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , могут быть наложены ограничения вида (1.2)».

Такую задачу будем называть обратной задачей управления динамическим объектом [114]. Отметим, что обширная библиография по таким задачам приведена в монографии [9].

Функции  $\psi_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , входящие в равенства (2.3.1), могут либо назначаться разработчиком (пользователем) системы управления объектом, либо быть результатом решения некоторых вспомогательных задач, в частности, задач оптимизации.

Одной из первых рассмотренных обратных задач была задача Е.А. Барбашина об осуществлении объектом назначенной траектории движения [9].

В этой задаче управляемый объект описывался дифференциальным уравнением 2-го порядка (см. Разд. 2.1):

$$\ddot{x} = g(x, \dot{x}, u), \quad (2.3.2)$$

где  $x = x(t)$  – управляемая переменная,  $u = u(t)$  – управляющая функция.

В уравнении (2.3.2) нелинейная функция  $g(x, \dot{x}, u)$  такова, что существует однозначная обратная функция  $g^{-1}$  [8] относительно переменной  $u$ .

Предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  объект находится в следующем состоянии:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (2.3.3)$$

Требуется найти такую управляющую функцию  $u^* = u^*(t)$ , при которой движение объекта из точки (2.3.3) происходит по траектории:

$$x(t) = x^*(t), \quad t \in [0, T], \quad T < \infty.$$

Считается, что назначенная траектория  $x^* = x^*(t)$  является осуществимой и дважды дифференцируемой функцией времени.

Искомое управление  $u^*$  предлагается определять с использованием уравнения (2.3.2) как:

$$u^*(t) = g^{-1}(\ddot{x}^*, \dot{x}^*, x^*). \quad (2.3.4)$$

Это управление подставляется в модель вида (2.3.2), и движение объекта по назначенной траектории  $x^*(t)$  описывается уравнением:

$$\ddot{x} = g(x, \dot{x}, g^{-1}(\ddot{x}^*, \dot{x}^*, x^*)). \quad (2.3.5)$$

Заметим, что в данной задаче предполагается, что начальные условия (2.3.3) соответствуют траектории  $x^* = x^*(t)$ . Последнее требует разработки дополнительного закона управления  $\bar{u}(t)$ , который должен переводить объект из начального состояния (2.3.3) на кривую  $x^* = x^*(t)$ . Различные подходы к формированию такого управления предлагаются в монографии [9].

Конкретизируем рассматриваемую задачу.

Пусть движение объекта описывается уравнением 1-го порядка:

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.3.6)$$

которое получается из системы (1.1) при  $n = 1$ ,  $m = 1$ ,  $f_1 = f$ ;  $x_1 = x$  и  $u_1 = u$ .

В этом случае выражения (2.3.1) конкретизируются как:

$$x(t) = \psi(t); \quad \dot{x}(t) = \dot{\psi}(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.3.7)$$

где  $\psi(t)$  – заданная функция.

Начальное условие для уравнения (2.3.6) будет иметь вид:

$$x(t_0) = \psi(t_0). \quad (2.3.8)$$

Это условие описывает требование, что начальная точка  $(t_0, x_0)$  должна лежать на кривой  $x = \psi(t)$  (Рис. 2.4).

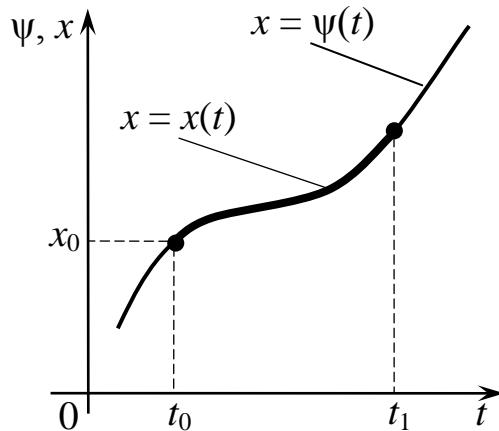


Рис. 2.4

Будем считать, что функция  $f(t, x, u)$  обладает однозначной обратной функцией по аргументу  $u = u(t)$ .

Тогда по аналогии с выражением (2.3.4) имеем:

$$u^*(t) = f^{-1}(t, \psi(t), \dot{\psi}(t)), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (2.3.9)$$

Примерами однозначных и обратных к ним функций являются выражения:

$$\begin{aligned} y = f(x) &= ax + b; \quad f^{-1}(y) = \frac{y - b}{a}; \\ y = f(x) &= \ln x; \quad f^{-1}(y) = e^y. \end{aligned}$$

Функции  $y = x^2$ ,  $y = \sin x$  являются неоднозначными, так как  
 $x = \pm\sqrt{y}$ ;  $x = \arcsin y$ .

Управление (2.3.9) подставляется в выражение (2.3.6), что позволяет получить модель движения объекта по траектории  $x = \psi(t)$  вида:

$$\dot{x} = f\left(t, x, f^{-1}(\psi(t), \dot{\psi}(t))\right). \quad (2.3.10)$$

Это уравнение в общем случае интегрируется с начальным условием (2.3.8) одним из численных методов, описанных в Разд. 3.1.

Отметим, что при практическом формировании управления вида (2.3.9) вычисление обратной функции  $f^{-1}(\cdot)$  реализуется путем численного решения параметрического уравнения:

$$f(t, \psi(t), u) - \dot{\psi}(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1]$$

относительно неизвестной функции  $u(t)$  методами, представленными в Разд. 3.5.

### Пример 2.5

Пусть уравнение (2.3.6) имеет вид:

$$\dot{x} = 2x + 4u, \quad t \in [0; 1]. \quad (2.3.11)$$

Уравнение требуемой траектории движения рассматриваемого объекта конкретизируем как:

$$\psi(t) = 3t^2 + 2t + 1. \quad (2.3.12)$$

Считая, что  $x(t) = \psi(t)$  (см. выражение (2.3.7)), уравнение (2.3.11) принимает вид:

$$\dot{\psi} = 2\psi + 4u.$$

Отсюда выражение (2.3.9) конкретизируется как:

$$u^* = \frac{\dot{\psi} - 2\psi}{4}.$$

Подставляя в эту формулу функцию (2.3.12) и ее производную, получим управление вида:

$$u^*(t) = -\frac{3t^2 - t}{2}, \quad t \in [0; 1].$$

Уравнение (2.3.11), записанное в форме (2.3.10), примет вид:

$$\dot{x} = 2x - 2(3t^2 - t), \quad t \in [0; 1].$$

Начальное условие для этого уравнения определяется с помощью выражения (2.3.8) как:

$$x(0) = 1.$$

Результаты интегрирования уравнения (2.3.11) при подстановке в него управления  $u^*(t)$  и вычисления значений функции (2.3.12) приведены в Табл. 2.1.

Из этой таблицы следует, что траектория движения объекта  $x(t)$  располагается на кривой  $\psi(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  (см. Рис. 2.4).

Таблица 2.1

$t$	$x(t)$	$\psi(t)$	$u^*(t)$
0	1	1	0
0,1	1,23	1,23	0,035
0,2	1,52	1,52	0,040
0,3	1,87	1,87	0,015
0,4	2,28	2,28	-0,040
0,5	2,75	2,75	-0,125
0,6	3,28	3,28	-0,240
0,7	3,87	3,87	-0,385
0,8	4,52	4,52	-0,560
0,9	5,23	5,23	-0,765
1,0	6,00	6,00	-1,000

Рассмотрим подход, учитывающий наложенные на управление ограничения вида (1.2).

Пусть к модели движения объекта (2.3.6) добавлено условие:

$$a \leq u(t) \leq b, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.3.13)$$

где  $a$  и  $b$  – заданные константы.

Для учета этого ограничения используем замену управлений, предложенную в работе [11], которая в данном случае запишется как:

$$u(t) = 0,5[a + b + (b - a)\sin v(t)]. \quad (2.3.14)$$

Здесь  $v = v(t)$  – новая неограниченная управляющая функция.

Покажем, что подстановка (2.3.14) позволяет учитывать ограничение (2.3.13).

Известно [17], что значения функции  $\sin z$  при любом значении ее аргумента располагаются в интервале:

$$-1 \leq \sin z \leq +1.$$

Тогда, если при некотором  $t \in [t_0, t_1]$  функция  $\sin v(t)$  будет равна  $(-1)$ , то из формулы (2.3.14) следует, что  $u(t) = a$ . Соответственно, при  $\sin v(t) = +1$  получаем значение управления  $u(t) = b$ , а при  $\sin v(t) = 0$  имеем, что  $u(t) = 0,5(a + b)$ .

Подставляя это выражение в уравнение (2.3.6), получим:

$$\dot{x} = f(t; x; 0,5(a + b + (b - a)\sin v)). \quad (2.3.15)$$

Используя условие (2.3.7) и проводя соответствующие действия, имеем:

$$\sin v^*(t) = f^{-1}(\psi(t), \psi(t), t, a, b). \quad (2.3.16)$$

Подставляя левую часть этого выражения в формулу (2.3.14), получаем управление  $u^*$  объектом, удовлетворяющее ограничению (2.3.13).

Это управление с учетом (2.3.14) имеет вид:

$$u^*(t) = 0,5[a + b + (b - a)f^{-1}(\psi(t), \psi(t), t, a, b)]. \quad (2.3.17)$$

Если условие:

$$-1 \leq \sin v^*(t) \leq +1, \quad t \in [t_0, t_1]$$

нарушается хотя бы для одного значения  $t$ , то считается, что в решаемой задаче управления  $u^*(t)$ , удовлетворяющего условию (2.3.13), не существует.

### Пример 2.6

Пусть с использованием модели объекта (2.3.11) необходимо найти управление  $u(t)$ , обеспечивающее его движение по траектории (2.3.12) и при этом удовлетворяющее условию:

$$-0,5 \leq u(t) \leq +0,5, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.3.18)$$

Выражение (2.3.14) при  $a = -0,5$ ,  $b = +0,5$  примет вид:

$$u(t) = 0,5 \sin v(t). \quad (2.3.19)$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.3.11), имеем:

$$\dot{x} = 2x + 2 \sin v(t), \quad t \in [0, 1].$$

Отметим, что это соотношение является конкретизацией дифференциального уравнения (2.3.15).

Проводя в полученном уравнении замену:

$$x(t) = \psi(t) = 3t^2 + 2t + 1; \quad \dot{x}(t) = \dot{\psi}(t) = 6t + 2$$

и решая его относительно  $\sin v(t)$ , получим конкретизацию выражения (2.3.16) в следующей форме:

$$\sin v^*(t) = t - 3t^2.$$

Из этого соотношения следует, что при  $t = 1$  величина  $\sin v^*(t) = -2$ , то есть решения рассматриваемой обратной задачи на интервале времени  $[0, 1]$  не существует.

Из Табл. 2.1 следует, что эта задача имеет решение на интервале времени  $[0, t_1]$ , где  $t_1 \in [0,7; 0,8]$ .

Решим обратную задачу управления с использованием условий (2.3.12) и (2.3.18) для нелинейной модели объекта вида:

$$\dot{x} = 8xu, \quad t \in [0, 1].$$

Подставляя в это уравнение выражение (2.3.19), имеем:

$$\dot{x} = 4x \sin v(t), \quad t \in [0, 1].$$

Проводя указанную выше замену функций  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  на функции  $\psi(t)$  и  $\dot{\psi}(t)$ , после несложных преобразований получим следующее выражение:

$$\sin v^*(t) = \frac{3t + 1}{2(3t^2 + 2t + 1)}.$$

Исследование поведения этой функции, представленное в Табл. 2.2, показывает, что ее значения на интервале времени  $[0, 1]$  удовлетворяют условию:

$$-1 \leq \sin v^*(t) \leq 1, \quad t \in [0, 1].$$

Это означает, что управление:

$$u^*(t) = \frac{0,5(3t + 1)}{2(3t^2 + 2t + 1)}, \quad t \in [0, 1]$$

удовлетворяет ограничению (2.3.18).

Подставляя это управление в исходное уравнение используемой модели объекта, имеем:

$$\dot{x} = \frac{2(3t + 1)}{3t^2 + 2t + 1} x, \quad t \in [0, 1].$$

В Табл. 2.2 приведены результаты интегрирования этого уравнения с начальным условием  $x(0) = 1$ , а также значения функций  $\psi(t)$  и  $u^*(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Таблица 2.2

$t$	$\sin v^*$	$x(t)$	$\psi(t)$	$u^*(t)$
0	0,500	1	1	0,250
0,1	0,528	1,23	1,23	0,264
0,2	0,526	1,52	1,52	0,263
0,3	0,508	1,87	1,87	0,254
0,4	0,482	2,28	2,28	0,241
0,5	0,455	2,75	2,75	0,227
0,6	0,427	3,28	3,28	0,213
0,7	0,401	3,87	3,87	0,200
0,8	0,376	4,52	4,52	0,188
0,9	0,354	5,23	5,23	0,177
1,0	0,333	6,00	6,00	0,167

Из этой таблицы следует, что траектория движения объекта  $x(t)$  при всех  $t \in [0, 1]$  лежит на заданной кривой  $\psi(t)$ , а управление  $u^*(t)$  удовлетворяет требованию (2.3.18).

В приведенных выше моделях объектов правые части соответствующих дифференциальных уравнений линейным образом зависели от управления  $u(t)$ . Это позволило однозначно определить функцию  $\sin v(t)$ ,  $t \geq 0$  и соответственно новое управление  $v(t)$ .

Если управление  $u(t)$  входит в модель объекта нелинейным образом, такая однозначность теряется.

Пусть модель объекта имеет следующий вид:

$$\dot{x} = x(4u^2 - e^u); \quad t \in [0, 1];$$

$$x(0) = 1.$$

Требуется найти управление  $u^*(t)$ , удовлетворяющее ограничению (2.3.18), которое обеспечивает движение объекта по траектории:

$$\psi(t) = 1, \quad t \in [0, 1].$$

Используя замену (2.3.19) и тот факт, что

$$x = \psi = 1; \quad \dot{x} = \dot{\psi} = 0,$$

получаем следующее нелинейное уравнение для определения нового управления  $v(t) = \text{const}$ ,  $t \in [0, 1]$ :

$$\sin^2 v - \exp(0,5 \sin v) = 0.$$

Для решения этого уравнения одним из численных методов, приведенных в Разд. 3.3, необходимо задаться начальным приближением  $v^{(0)}$  искомого корня.

При использовании средств пакета MathCAD различные значения таких приближений дали следующие значения корней:

$$v_1^{(0)} = 1, v_1 = -0,954; \quad v_2^{(0)} = -20, v_2 = -19,803;$$

$$v_3^{(0)} = -2, v_3 = -2,188; \quad v_4^{(0)} = 50, v_4 = 48,078.$$

В результате проведенных расчетов установлено, что

$$\begin{aligned} 0,5\sin(-0,954) &= 0,5\sin(-19,803) = \\ &= 0,5\sin(-2,188) = 0,5\sin(48,078) = -0,408. \end{aligned}$$

Это объясняется периодичностью функции  $\sin v$ .

Таким образом, следуя формуле (2.3.19), получаем значение искомого управления  $u^* = -0,408 \in [-0,5; +0,5]$ .

Из проведенных вычислительных экспериментов можно сделать следующие выводы:

1) Решать уравнение для определения управления  $v$  можно при произвольно заданном начальном приближении;

2) Если решения этого уравнения не существует, то условие (2.3.18) выполнить невозможно.

Подставив найденное управление  $u^*$  в правую часть уравнения рассматриваемой модели объекта, нетрудно показать, что оно обеспечивает его движение по заданной траектории  $\psi(t) = 1$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Положим в модели (1.1)  $n = 2$ ,  $m = 2$  и введем обозначения:

$$x_1(t) = x(t); \quad x_2(t) = y(t).$$

В этом случае модель движения объекта примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y, u_1, u_2); \\ \dot{y} &= f_2(x, y, u_1, u_2). \end{aligned} \tag{2.3.20}$$

Требуемую траекторию его движения зададим функциями:

$$x(t) = \psi_1(t); \quad y(t) = \psi_2(t); \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (2.3.21)$$

Начальные условия для системы (2.3.20) определяются как:

$$x(t_0) = \psi_1(t_0); \quad y(t_0) = \psi_2(t_0). \quad (2.3.22)$$

В этом случае управления  $u_1^*(t)$  и  $u_2^*(t)$ , обеспечивающие движение объекта по траектории (2.3.21), определяются из решения системы параметрических уравнений вида:

$$\begin{aligned} f_1(\psi_1(t), \psi_2(t), u_1(t), u_2(t)) - \dot{\psi}_1(t) &= 0; \\ f_2(\psi_1(t), \psi_2(t), u_1(t), u_2(t)) - \dot{\psi}_2(t) &= 0, \quad t \in [t_0, t_1]. \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

В общем случае для каждого  $t \in [t_0, t_1]$  эта система решается соответствующими численными методами, описанными в Разд. 3.5.

### Пример 2.7

Пусть имеем линейную модель объекта вида:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2y + u_1 + 3u_2; \\ \dot{y} &= 4x + u_1, \end{aligned}$$

которая является частным случаем модели (2.3.20).

Будем считать, что функции (2.3.21) заданы следующими выражениями:

$$\psi_1(t) = 2t; \quad \psi_2(t) = t^2.$$

Тогда система уравнений (2.3.23) примет вид:

$$\begin{aligned} 2t^2 + u_1 + 3u_2 - 2 &= 0; \\ 8t + u_1 - 2t &= 0. \end{aligned}$$

Переписывая ее в форме:

$$\begin{aligned} u_1 + 3u_2 &= 2(1 - t^2); \\ u_1 &= -6t, \end{aligned}$$

получаем систему параметрических линейных алгебраических уравнений, правые части которых зависят от параметра  $t$ .

Решая эту систему, имеем следующих вид искомых управлений объектом:

$$u_1^*(t) = -6t; \quad u_2^*(t) = \frac{2}{3}(1 + 3t - t^2).$$

Для моделей вида (2.3.20) требуемая траектория может быть задана в координатной форме как функция:

$$y = \psi(x), \quad (2.3.24)$$

а координаты объекта  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  могут зависеть от выбора только одной управляющей функции  $u = u(t)$ .

В этом случае модель движения объекта (2.3.20) принимает вид:

$$\dot{x} = f_1(x, y, u), \quad \dot{y} = f_2(x, y, u). \quad (2.3.25)$$

Задача состоит в определении управления  $u^*$ , обеспечивающего движение объекта по траектории (2.3.24).

Используя соотношение:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{dy}{dx}$$

и поделив второе уравнение системы (2.3.25) на первое, получим дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x, y, u)}{f_1(x, y, u)}.$$

Будем считать, что путем преобразований это уравнение можно переписать в следующей форме:

$$y' = F(x, y, u). \quad (2.3.26)$$

Тогда с учетом (2.3.24) управление  $u^* = u^*(x)$  можно определить из решения нелинейного параметрического уравнения:

$$F(x, \psi(x), u) = \psi'(x). \quad (2.3.27)$$

Это решение по аналогии с приведенными выше выражениями, можно записать как:

$$u^*(x) = F^{-1}(x, \psi(x), \psi'(x)). \quad (2.3.28)$$

### Пример 2.8

Кинематические уравнения движения объекта на плоскости  $x0y$  со скоростью  $V = V(t)$  имеют вид [9]:

$$\dot{x} = V \cos u; \quad \dot{y} = V \sin u, \quad (2.3.29)$$

где  $u = u(t)$  – угол наклона вектора скорости объекта к оси  $0x$  (Рис. 2.5).

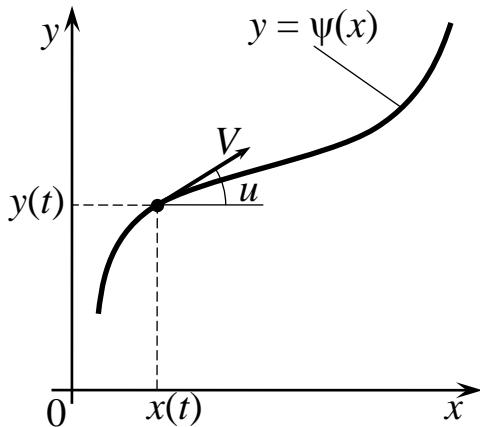


Рис. 2.5

Поделив второе уравнение на первое, получим уравнение:

$$y' = \operatorname{tg} u, \quad (2.3.30)$$

которое является примером уравнения (2.3.26).

Тогда при  $y' = \psi'(x)$  управление объектом в форме (2.3.28) будет иметь вид:

$$u^*(x) = \operatorname{arc tg} \psi'(x). \quad (2.3.31)$$

Требуемую траекторию движения объекта в случае многозначности функции (2.3.24) удобно задавать в виде неявной функции [8]:

$$\Phi(x, y) = 0. \quad (2.3.32)$$

Тогда, используя формулу для производной такой функции [8]:

$$y' = -\frac{\Phi_x(x, y)}{\Phi_y(x, y)}, \quad \Phi_y \neq 0, \quad (2.3.33)$$

где  $\Phi_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ,  $\Phi_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$  – частные производные функции

(2.3.32), выражение (2.3.30) можно переписать как:

$$\operatorname{tg} u = -\frac{\Phi_x(x, y)}{\Phi_y(x, y)}.$$

Управление объектом, обеспечивающее его движение по траектории, заданной уравнением (2.3.32), определяется как:

$$u^*(x, y) = -\operatorname{arc tg}\left(\frac{\Phi_x(x, y)}{\Phi_y(x, y)}\right). \quad (2.3.34)$$

Заметим, что выражения (2.3.31), (2.3.34) могут рассматриваться как решения задачи синтеза управлений объектом (см. Разд. 2.5).

Полученные законы управления подставляются в уравнения (2.3.29), которые после соответствующих тригонометрических преобразований [1] приобретают вид, обеспечивающий принадлежность координат  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  заданным траекториям.

Для движения по траектории (2.3.24) такие уравнения имеют вид:

$$\dot{x} = \frac{V(t)}{\sqrt{1 + \psi'^2(x)}}; \quad \dot{y} = \frac{V(t)\psi'(x)}{\sqrt{1 + \psi'^2(x)}}.$$

Если траектория описывается выражением (2.3.32), то имеем следующие уравнения движения объекта [114]:

$$\dot{x} = \frac{V(t)\Phi_y(x, y)}{\sqrt{\Phi_x^2(x, y) + \Phi_y^2(x, y)}}; \quad \dot{y} = -\frac{V(t)\Phi_x(x, y)}{\sqrt{\Phi_x^2(x, y) + \Phi_y^2(x, y)}}.$$

Заметим, что для использования представления (2.3.32) в общем случае необходимо, чтобы правая часть уравнения (2.3.26) не зависела от аргумента  $y$ .

Рассмотрим случай, когда требуемая траектория движения объекта (2.3.7) задается дифференциальным уравнением:

$$\dot{\psi} = \Psi(t, \psi), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.3.35)$$

с начальным условием

$$\psi(t_0) = \psi_0. \quad (2.3.36)$$

Отметим, что для уравнений (2.3.6) и (2.3.35) начальные условия должны удовлетворять соотношению (2.3.8).

Тогда, исходя из требований (2.3.7), управление  $u^*(t)$  будет определяться из следующего параметрического уравнения:

$$f(t, \psi(t), u) - \Psi(t, \psi(t)) = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.3.37)$$

где  $\psi(t)$  – решение задачи Коши (2.3.35), (2.3.36).

Сложность решения этой задачи в общем случае состоит в том, что нелинейное параметрическое уравнение (2.3.37) должно решаться численно (см. Разд. 3.5) на каждом шаге интегрирования уравнения (2.3.35) одним из методов, рассмотренных в Разд. 3.1.

### Пример 2.9

Пусть уравнения (2.3.6), (2.3.35) имеют вид:

$$\dot{x} = 6x + 2u; \quad \dot{\psi} = 3\psi, \quad t \in [0; 1]. \quad (2.3.38)$$

Начальные условия для этих уравнений будут равны:

$$x(0) = 1; \quad \psi(0) = 1.$$

Интегрируя второе уравнение из состава выражений (2.3.38) методом разделения переменных, описанным в Разд. 2.1, имеем:

$$\psi(t) = Ce^{3t}.$$

Используя начальное условие  $\psi(0) = 1$ , получаем, что  $C = 1$ . Тогда решение задачи Коши для определения функции  $\psi(t)$  запишется как:

$$\psi(t) = e^{3t}. \quad (2.3.39)$$

Уравнение (2.3.37) конкретизируется с учетом выражений (2.3.38) следующим образом:

$$6\psi(t) + 2u(t) - 3\psi(t) = 0, \quad t \in [0; 1].$$

Подставляя в это равенство выражение (2.3.39) и разрешая его относительно  $u(t)$ , получаем аналитическое решение уравнения вида (2.3.37):

$$u^*(t) = -\frac{3}{2}e^{3t}, \quad t \in [0;1].$$

Распространяя задачу (2.3.20)-(2.3.23) на общий случай использования модели движения объекта вида (1.1), можно утверждать, что она применима при решении обратных задач только в тех случаях, когда число фазовых координат  $n$  объекта совпадает с числом управляющих функций  $m$ , т.е. при  $m = n$ .

В этом случае, управления  $u_1^*(t)$ ,  $u_2^*(t)$ , ...,  $u_m^*(t)$  при конкретизации условий (2.3.1), определяются на интервале времени  $[t_0, t_1]$  путем решения системы параметрических уравнений:

$$\begin{aligned} f_j(t, \psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_m(t); u_1, u_2, \dots, u_m) - \dot{\psi}_j(t) &= 0, \\ j = (\overline{1, m}), \quad t \in [t_0, t_1] \end{aligned} \quad (2.3.40)$$

численными методами, предложенными в Разд. 3.5.

Если для задания функций  $\psi_i(t)$ ,  $i = (\overline{1, m})$ , используется задача Коши вида:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i &= \Psi_i(t, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m), \\ \psi_i(t_0) &= \psi_{i0}, \quad i = (\overline{1, m}), \quad t \in [t_0, t_1], \end{aligned} \quad (2.3.41)$$

то управлния  $u_1^*(t)$ ,  $u_2^*(t)$ , ...,  $u_m^*(t)$  определяются из совместного численного решения для каждого  $t \in [t_0, t_1]$  задачи Коши (2.3.41) и системы параметрических уравнений:

$$\begin{aligned} f_i(t, \psi_1(t), \dots, \psi_m(t); u_1, u_2, \dots, u_m) - \\ - \Psi_i(t, \psi_1(t), \dots, \psi_m(t)) &= 0, \\ i = (\overline{1, m}), \quad t \in [t_0, t_1]. \end{aligned} \quad (2.3.42)$$

При этом необходимо использовать численные методы, описанные в Разд. 3.1 и Разд. 3.5.

На практике имеются задачи, в которых имеет место неравенство:

$$m > n, \quad (2.3.43)$$

то есть число управляющих функций объекта больше числа его фазовых координат.

Рассмотрим метод нахождения управлений  $u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_m^*(t)$ , которые должны удовлетворять условиям:

$$f_j(t, \psi_1(t), \dots, \psi_n(t), u_1, u_2, \dots, u_m) - \psi_j(t) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.3.44)$$

В связи с тем, что в этой системе число неизвестных больше числа уравнений, будем определять их с помощью решения следующей вспомогательной задачи условной параметрической оптимизации: «Найти функции  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)$ , доставляющие минимум целевой функции:

$$U(t) = \sum_{r=1}^m u_r^2(t) \rightarrow \min_{u_r} \quad (2.3.45)$$

при выполнении ограничений (2.3.44)».

Заметим, что минимизация квадратичной функции  $U(t)$  соответствует минимальным управляющим воздействиям на объект.

Эту задачу предполагается решать методом Лагранжа, приведенным в Разд. 2.2 [114].

Функция Лагранжа вида (2.2.6) задачи (2.3.45), (2.3.44) записывается как:

$$\begin{aligned} L(t, u_1, \dots, u_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \\ &= \sum_{r=1}^m u_r^2(t) + \sum_{j=1}^n \lambda_j [f_j(t, \psi_1(t), \dots, \psi_n(t), u_1, \dots, u_m) - \psi_j(t)], \end{aligned} \quad (2.3.46)$$

где  $\lambda_1 = \lambda_1(t), \lambda_2 = \lambda_2(t), \dots, \lambda_n = \lambda_n(t)$  – значения множителей Лагранжа в момент времени  $t \in [t_0, t_1]$ .

По аналогии с выражениями (2.2.7) значения искомых управлений в каждый момент времени  $t$  будем определять из необходимых условий экстремума функции (2.3.46), которые имеют вид:

$$\frac{\partial L}{\partial u_r} = 2u_r(t) + \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) \frac{\partial f_j}{\partial u_r}, \quad r = \overline{1, m}, \quad t \in [t_0, t_1]; \quad (2.3.47)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = f_j(t, \psi_1(t), \dots, \psi_n(t), u_1, \dots, u_m) - \psi_j(t) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.3.48)$$

Из решения этой системы уравнений  $(m + n)$ -го порядка определяются искомые управлении  $u_r(t)$  и соответствующие им множители Лагранжа  $\lambda_j(t)$ ,  $r = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, n}$  для каждого момента времени  $t \in [t_0, t_1]$ .

Для решения параметрической системы уравнений (2.3.47), (2.3.48) в общем случае используются отмеченные выше численные методы.

### Пример 2.10

Пусть уравнение движения объекта имеет вид:

$$\dot{x} = 2xu_1 + u_2 \quad (2.3.49)$$

и заданы функция  $\psi = \psi(t)$  и ее производная  $\dot{\psi}(t)$ .

Требуется определить управления  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , обеспечивающие движение объекта по кривой  $x = \psi(t)$  с заданной скоростью  $\dot{x} = \dot{\psi}(t)$ .

В данной задаче имеем  $n = 1$  и  $m = 2$ .

Условия (2.3.44) с учетом уравнения (2.3.49) конкретизируются как:

$$2\psi(t)u_1(t) + 3u_2(t) - \dot{\psi}(t) = 0.$$

Целевая функция (2.3.45) имеет вид:

$$U(t) = u_1^2(t) + u_2^2(t) \rightarrow \min.$$

Функция Лагранжа (2.3.46) для решаемой задачи записывается как:

$$L(t, u_1, u_2, \lambda) = u_1^2 + u_2^2 + \lambda(2\psi u_1 + 3u_2 - \dot{\psi}).$$

Сформируем систему уравнений вида (2.3.47), (2.3.48):

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = 2u_1 + 2\lambda\psi = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = 2u_2 + 3\lambda = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2\psi u_1 + 3u_2 - \dot{\psi} = 0.$$

Из первых двух уравнений системы имеем, что

$$u_1 = -\lambda \psi; \quad u_2 = -\frac{3}{2} \lambda. \quad (2.3.50)$$

Для определения множителя Лагранжа  $\lambda$  подставим эти решения в третье уравнение системы:

$$-2\lambda\psi - \frac{9}{2}\lambda - \dot{\psi} = 0.$$

Откуда получим:

$$\lambda(t) = -\frac{2\dot{\psi}(t)}{4\psi^2(t) + 9}.$$

Подставляя правую часть этого выражения в формулы (2.3.50), получаем окончательный вид искомых управлений:

$$u_1^*(t) = -\frac{2\psi(t)\dot{\psi}(t)}{4\psi^2(t) + 9}; \quad u_2^*(t) = -\frac{3\dot{\psi}(t)}{4\psi^2(t) + 9}.$$

При решении практических задач с ограничениями вида (1.2) предлагается следующий подход [114].

Системы уравнений (2.3.40) или (2.3.47), (2.3.48) решаются с выполнением в соответствующей системе уравнений замены управлений вида:

$$u_r(t) = 0,5[u_{r\min} + u_{r\max} + (u_{r\max} - u_{r\min})\sin v_r(t)], \quad (2.3.51)$$

$$r = (\overline{1, m}),$$

где  $v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t)$  – неограниченные управление.

Эта система численно решается относительно неизвестных функций  $v_r(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  с использованием для рассматриваемых моментов времени  $t$  произвольных начальных приближений  $v_r^{(0)}(t)$ ,  $r = (\overline{1, m})$ . Полученные решения  $v_1^*(t), v_2^*(t), \dots, v_m^*(t)$  подставляются в выражения (2.3.51), с помощью которых определяются управления  $u_r^*(t)$ ,  $r = (\overline{1, m})$ , удовлетворяющие ограничениям (1.2).

Если при некотором значении  $t \in [t_0, t_1]$  решения системы (2.3.40) или (2.3.47), (2.3.48) не существует, то делается заключение о невозможности выполнения заданных условий вида (1.2) в рассматриваемой обратной задаче управления.

Отметим, что предложенные выше методы формирования управлений  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$  при наличии условий (1.2), (2.3.43), (2.3.44) в теории обратных задач управления [9] не рассматривались.

## 2.4. Основы вариационного исчисления

В некоторых прикладных задачах возникает необходимость нахождения максимальных и минимальных значений математических выражений, называемых функционалами, значения которых зависят от выбора одной или нескольких функций [11, 17, 20].

Примеры различных видов функционалов приведены на Рис. 2.6.

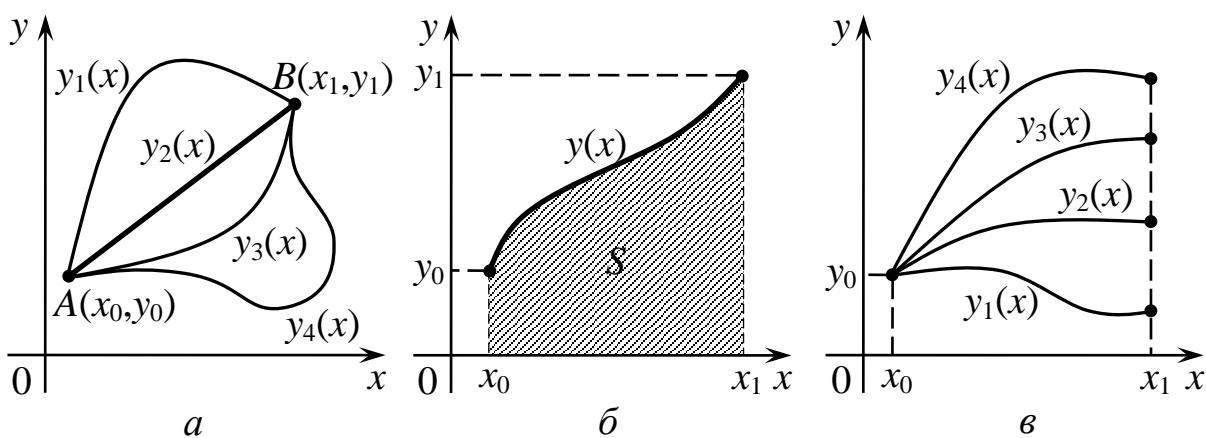


Рис. 2.6

На Рис. 2.6,а функционалом является длина  $l$  кривой, соединяющей на плоскости две заданные точки  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x_1, y_1)$ .

Каждой из кривых, задаваемых уравнениями  $y_i = y_i(x)$ ,  $i \geq 1$ , будет соответствовать собственное значение  $l_i$ , вычисляемое по формуле [20]:

$$l_i = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'_i(x))^2} dx, \quad i \geq 1, \quad (2.4.1)$$

где  $y'_i(x)$  – производная функции  $y_i(x)$ .

Функционалом также является площадь криволинейной трапеции [8]:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y(x) dx, \quad (2.4.2)$$

представленной на Рис. 2.6,б. В самом деле, подставляя в подынтегральное выражение различные функции  $y_1(x), y_2(x), \dots$  и вычисля значения определенного интеграла, будем получать различные числа  $S_1, S_2, \dots$

Функционалы вида  $l = l(y(x))$  и  $S = S(y(x))$  называются интегральными функционалами.

На Рис. 2.6,в приведен пример функционала вида:

$$y_1 = y(x_1), \quad (2.4.3)$$

который называется терминальным (конечным) функционалом.

При его вычислении заданными значениями являются исходная точка с координатами  $(x_0, y_0)$  и координата  $x_1$  конечной точки интервала  $[x_0, x_1]$ . Задаваясь различными функциями  $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots$  и вычисля их значения при  $x = x_1$ , получаем различные числа  $y_{11}, y_{12}, y_{13}, \dots$ , которые являются значениями рассматриваемого функционала.

Методы нахождения максимальных и минимальных значений функционалов разработаны в рамках специальной математической дисциплины, называемой вариационным исчислением [11, 17, 20].

Задачи, в которых необходимо найти одну или несколько функций, доставляющих максимум или минимум используемому функционалу, называются вариационными задачами.

В этих задачах функции, доставляющие максимум или минимум (экстремум) применяемым функционалам, называются экстремалями.

### 2.4.1. Безусловные вариационные задачи

В работах основателя вариационного исчисления Л. Эйлера была сформулирована следующая задача [20]: «Найти функцию  $y = y(x)$ , доставляющую максимум (минимум) функционалу:

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (2.4.4)$$

при заданных граничных значениях экстремали  $y(x_0) = y_0$  и  $y(x_1) = y_1$ .

В его работах было доказано, что необходимое условие того, что некоторая функция  $y_0(x)$  доставляет экстремум функционалу (2.4.4), определяется выражением:

$$\delta J[y_0(x)] = 0, \quad (2.4.5)$$

где  $\delta J$  – вариация (приращение) функционала в достаточно малой окрестности экстремали  $y_0(x)$ .

Кроме того, Л. Эйлером было доказано, что, если вторая вариация функционала (2.4.4) удовлетворяет условию:

$$\delta^2 J[y_0(x)] < 0, \quad (2.4.6)$$

то экстремаль  $y_0(x)$  доставляет максимум функционалу  $J$ , в противном случае – минимум.

Из условия (2.4.5) следует, что функция  $y = y(x)$ , доставляющая экстремальное значение функционалу (2.4.4), является решением дифференциального уравнения 2-го порядка [20]:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \quad (2.4.7)$$

удовлетворяющего граничным условиям:

$$y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1. \quad (2.4.8)$$

В выражении (2.4.7), которое называется уравнением Эйлера, использованы следующие обозначения частных производных функции  $F(x, y, y')$ :

$$F_y = \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y}; \quad F_{y'} = \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'}. \quad (2.4.9)$$

Заметим, что для построения уравнения (2.4.7) функция  $F_{y'}$  должна быть проинтегрирована по независимой переменной  $x$ .

Как было отмечено в Разд. 2.1, общее решение любого дифференциального уравнения 2-го порядка имеет вид:

$$y = y(x, C_1, C_2). \quad (2.4.10)$$

Такой же вид имеет результат интегрирования уравнения (2.4.7). При этом для полной конкретизации полученной экстремали постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определяются с помощью граничных условий (2.4.8) из решения системы уравнений:

$$\begin{aligned} y(x_0, C_1, C_2) &= y_0; \\ y(x_1, C_1, C_2) &= y_1. \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Таким образом, при решении вариационной задачи (2.4.4), (2.4.8) выполняются следующие действия:

1°. Вычисление производных (2.4.9) и формирование уравнения Эйлера вида (2.4.7).

2°. Интегрирование уравнения (2.4.7) известными методами, т.е. получение его решения в форме (2.4.10).

3°. Запись с помощью условий (2.4.8) системы уравнений (2.4.11) и определение из ее решения значений  $C_1^0$ ,  $C_2^0$  постоянных интегрирования уравнения (2.4.7).

4°. Формирование экстремали решаемой задачи в виде выражения:

$$y_0(x) = y\left(x, C_1^0, C_2^0\right). \quad (2.4.12)$$

### Пример 2.10

Пусть дана вариационная задача:

$$\begin{aligned} J[y(x)] &= \int_0^1 [y'^2 + 6xy + x] dx; \\ y(0) &= 0; \quad y(1) = 1. \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

В этой задаче функция  $F$  имеет вид:

$$F(x, y, y') = x + 6xy + y'^2.$$

Вычислим производные вида (2.4.9) и производную по переменной  $x$ :

$$F_y = 6x; \quad F_{y'} = 2y'; \quad \frac{d}{dx} F_{y'} = 2y''.$$

Тогда уравнение Эйлера (2.4.7) запишется как:

$$6x - 2y'' = 0.$$

Переписывая его в форме:

$$y'' = 3x$$

и дважды интегрируя по  $x$ , получим:

$$\begin{aligned} y' &= 3\left(\frac{x^2}{2}\right) + C_1 = \frac{3}{2}x^2 + C_1; \\ y &= \frac{3}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right) + C_1x + C_2 = 0,5x^3 + C_1x + C_2. \end{aligned}$$

Последнее выражение представляет собой конкретизацию формулы (2.4.10) для решаемой задачи.

Используя граничные условия (2.4.13), запишем систему уравнений вида (2.4.11) для определения значений постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$ :

$$0,5 \cdot 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0;$$

$$0,5 \cdot 1 + C_1 \cdot 1 + C_2 = 1.$$

Решая эту систему, получаем, что  $C_1^0 = 0,5$ ;  $C_2^0 = 0$ .

Тогда уравнение экстремали вида (2.4.12) запишется как:

$$y_0(x) = 0,5(x^3 + x).$$

Отметим особые случаи задачи (2.4.7), (2.4.8), в которых ее решение не существует:

1) Функция  $F$  не зависит от  $y'$ , то есть имеет вид:

$$F = F(x, y).$$

В этом случае уравнение (2.4.7) записывается как  $F_y = 0$  и не является дифференциальным уравнением, так как  $F_{y'} \equiv 0$ .

2) Функция  $F$  линейно зависит от  $y'$ :

$$F(x, y, y') = \varphi_1(x, y) + y' \varphi_2(x, y).$$

Уравнение Эйлера для такой функции имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} y' - \frac{d}{dx} \varphi_2(x, y) = 0.$$

Вычисляя производную по  $x$ , получим:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} y' - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} y' = 0.$$

Приводя подобные члены, имеем выражение:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0,$$

которое является конечным, а не дифференциальным уравнением.

Полученные в этих случаях конечные уравнения и выделенные из них функции  $y(x)$  не удовлетворяют в общем случае граничным условиям (2.4.8), то есть не являются экстремалями.

Отмеченные случаи необходимо учитывать при постановке вариационных задач.

Рассмотрим еще один частный случай задачи (2.4.4), когда функция  $F$  зависит только от  $y'$ :

$$F = F(y').$$

Уравнение Эйлера (2.4.7) для такой функции имеет вид:

$$F_{y'y'} y'' = 0.$$

Так как производная  $F_{y'y'} \neq 0$ , то уравнение Эйлера записывается как:

$$y'' = 0.$$

Проводя его последовательное интегрирование, получим:

$$y' = C_1, \quad y = C_1 x + C_2.$$

Последнее означает, что при  $F = F(y')$  любая вариационная задача имеет экстремали в виде всевозможных прямых.

### Пример 2.11

Пусть требуется найти кривую  $y = y(x)$  минимальной длины, соединяющую точки  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x_1, y_1)$  (см. Рис. 2.6,*a*). Вариационная задача (2.4.4), (2.4.8), записанная с использованием выражения (2.4.1), будет иметь следующий вид:

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx;$$

$$y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1.$$

Для этой задачи имеем, что

$$F_y \equiv 0; \quad F_{y'} = \frac{2y'}{2\sqrt{1 + y'^2}}; \quad \frac{d}{dx} F_{y'} = F_{y'y'} y''.$$

Если повторно продифференцировать по  $y'$  функцию  $F_{y'}$ , то можно показать, что  $F_{y'y'} \neq 0$ . Это следует из того, что производная  $y'$  не должна по условиям задачи обращаться в ноль при  $x \in [x_0, x_1]$ .

Тогда общее решение уравнения Эйлера:

$$y'' = 0$$

запишется как:

$$y = C_1x + C_2.$$

Уравнения (2.4.11) примут в этой задаче вид:

$$C_1x_0 + C_2 = y_0;$$

$$C_1x_1 + C_2 = y_1.$$

Решая эту систему, получим:

$$C_1^0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}; \quad C_2^0 = y_0 - \frac{x_0(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}.$$

Тогда уравнение экстремали будет иметь вид:

$$y_0(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0).$$

Эта экстремаль соответствует на Рис. 2.6,*a* прямой  $y_2(x)$  и подтверждает тот общеизвестный факт, что любая прямая кратчайшим образом соединяет две произвольные точки плоскости.

Пусть в функционале (2.4.4) функция  $F = F(x, y')$ . Тогда уравнение (2.4.6) приобретает вид:

$$\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y') = 0.$$

Интегрируя это соотношение, получим выражение:

$$F_{y'}(x, y') = C_1,$$

которое является первым интегралом уравнения Эйлера, представляющим собой уравнение 1-го порядка, решаемое соответствующим способом (см. Разд. 2.1).

В приложениях часто используются функционалы с подынтегральными функциями вида:

$$F = F(y, y').$$

Уравнение Эйлера для этого случая записывается как:

$$F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0.$$

Если умножить обе части этого равенства на  $y'$ , то левая часть приобретает вид:

$$\frac{d}{dx} [F(y, y') - y'F_{y'}(y, y')] = 0.$$

Следовательно, это уравнение Эйлера также имеет первый интеграл:

$$F(y, y') - y'F_{y'}(y, y') = C_1.$$

Данное уравнение 1-го порядка может быть проинтегрировано методами, рассмотренными в Разд. 2.1.

В большинстве прикладных задач функционалы зависят от нескольких функций, то есть имеют вид:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_i, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_i, \dots, y'_n) dx. \quad (2.4.14)$$

Для таких функционалов экстремали  $y_i(x)$  определяются из решения системы дифференциальных уравнений 2-го порядка [17, 20]:

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.4.15)$$

с граничными условиями вида:

$$y_i(x_0) = y_{i0}; \quad y_i(x_1) = y_{i1}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Функционал задачи может зависеть от производных порядка выше первого. В общем случае такие функционалы записываются как:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) dx, \quad (2.4.16)$$

Граничные условия, которым должна удовлетворять искомая функция  $y = y(x)$ , имеют вид:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0; \quad y'(x_0) = y'_0; \quad \dots \quad ; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}; \\ y(x_1) &= y_1; \quad y'(x_1) = y'_1; \quad \dots \quad ; y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

В данном случае экстремаль  $y = y(x)$  получается как решение дифференциального уравнения Эйлера  $2n$ -го порядка [20]:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0. \quad (2.4.18)$$

Общее решение этого уравнения содержит  $2n$  постоянных интегрирования, которые определяются с помощью граничных условий (2.4.17).

Для функционалов вида:

$$\begin{aligned} J = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n_1)}, y_2, y'_2, \dots, y_2^{(n_2)}, \dots \right. \\ \left. \dots, y_m, y'_m, \dots, y_m^{(n_m)}\right) dx \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

при определении экстремалей  $y_i = y_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , решается следующая система уравнений Эйлера [20]:

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} + \dots + (-1)^{n_i} \frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}} F_{y_i^{(n_i)}} = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.4.20)$$

## 2.4.2. Вариационные задачи с подвижными границами

Значительное место в прикладных задачах занимают вариационные задачи с подвижными границами, в которых одна или обе граничные точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$  искомых экстремалей могут перемещаться на плоскости.

Пример такой ситуации представлен на Рис. 2.6,в.

В этих задачах уравнение экстремали  $y = y(x, C_1, C_2)$  также определяется путем решения уравнения Эйлера (2.4.7).

Постоянные интегрирования  $C_1, C_2$  и неизвестные значения граничных условий находятся из специальных условий экстремума функционала (2.4.4), называемых условиями трансверсальности.

Рассмотрим представленный на Рис. 2.7 общий случай рассматриваемой вариационной задачи, когда начальная точка  $(x_0, y_0)$  экстремали  $y = y(x)$  должна лежать на заданной кривой  $y = \psi(x)$ , а конечная  $(x_1, y_1)$  – на кривой  $y = \phi(x)$ .

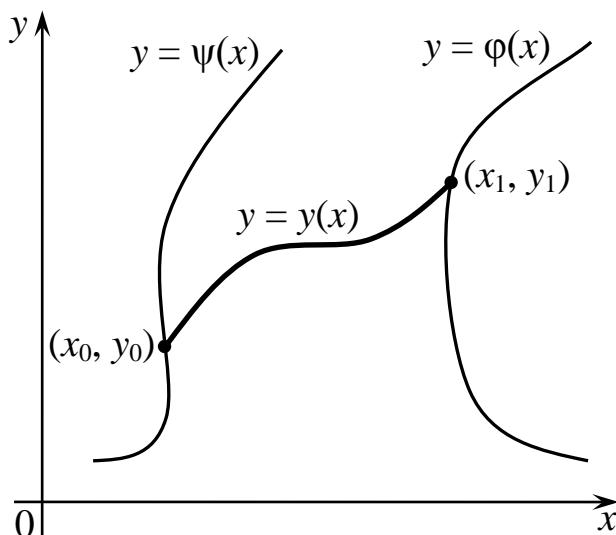


Рис. 2.7

Условия трансверсальности для этого случая имеют вид [20]:

$$\begin{aligned} [F + (\psi' - y')F_{y'}]_{x=x_0} &= 0; \\ [F + (\phi' - y')F_{y'}]_{x=x_1} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

Здесь  $\psi'$  и  $\phi'$  – производные граничных функций  $\psi(x)$  и  $\phi(x)$ .

В эти соотношения подставляются функции  $y = y(x, C_1, C_2)$  и  $y' = y'(x, C_1, C_2)$ . Для определения искомых параметров  $C_1, C_2, x_0, x_1$  к ним добавляются уравнения:

$$y(x_0, C_1, C_2) = \psi(x_0);$$

$$y(x_1, C_1, C_2) = \varphi(x_1).$$

После определения значений  $x_0$  и  $x_1$  оставшиеся неизвестные параметры задачи  $y_0$  и  $y_1$  вычисляются как:

$$y_0 = \psi(x_0);$$

$$y_1 = \varphi(x_1).$$

### Пример 2.12

Требуется построить экстремаль в задаче:

$$J = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dx \rightarrow \min$$

при ее закрепленном левом конце, заданном условием:

$$y(0) = 0,$$

и требовании, что правый конец экстремали  $y(x)$  должен лежать на прямой:

$$y = \varphi(x) = x - 5.$$

Общим решением уравнения Эйлера (2.4.7) в этой задаче является семейство окружностей [20]:

$$(x - C_1)^2 + y^2 = C_2^2.$$

Подставляя в него заданное граничное (левое) условие, получим

$$C_1 = C_2 = C.$$

Тогда явное представление искомой экстремали будет иметь вид:

$$y = \pm \sqrt{2Cx - x^2}.$$

Используя второе условие трансверсальности из состава выражений (2.4.21), имеем:

$$\left[ \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} + (1-y') \frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}} \right]_{x=x_1} = 0.$$

Исключив из этого выражения значение  $y \neq 0$  и проводя несложные преобразования, получим:

$$\left[ \frac{1+y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right]_{x=x_1} = 0.$$

Откуда предполагая, что  $\sqrt{1+y'^2} \neq 0$ , получаем равенство вида:

$$[1+y']_{x=x_1} = 0.$$

Перепишем его в следующей форме:

$$y'(x_1) = -1.$$

Это равенство означает, что в точке  $x = x_1$  тангенс угла наклона касательной к экстремали  $y(x)$  будет равен  $(-1)$ , то есть в этой точке она будет ортогональна прямой  $y = x - 5$ , так как тангенс угла ее «касательной» равен  $(+1)$ .

Возьмем для определенности уравнение экстремали  $y(x)$  со знаком  $(+)$ , вычислим производную от нее и конкретизируем полученное выше условие как:

$$\frac{C - x_1}{\sqrt{2Cx_1 - x_1^2}} = -1.$$

Кроме того, искомые параметры  $C$ ,  $x_1$ ,  $y_1$  должны удовлетворять условиям их принадлежности экстремали и заданной прямой, которые имеют вид:

$$\sqrt{2Cx_1 - x_1^2} = y_1;$$

$$x_1 - 5 = y_1.$$

Используя первое условие трансверсальности (2.4.21), из этих уравнений имеем:

$$-(C - x_1) = y_1.$$

Приравнивая это выражение второму уравнению, получим, что

$$C = 5.$$

Тогда уравнение полученной выше экстремали конкретизируется как:

$$y = \sqrt{10x - x^2}.$$

Неизвестные координаты  $(x_1, y_1)$  можно найти как точку пересечения окружности

$$(x - 5)^2 + y^2 = 25$$

и прямой:

$$x - 5 = y.$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$y_1 = \pm \frac{5}{\sqrt{2}}; \quad x_1 = 5 \left( \frac{\sqrt{2} \pm 1}{\sqrt{2}} \right).$$

Графическая иллюстрация результатов решения задачи приведена на Рис. 2.8.

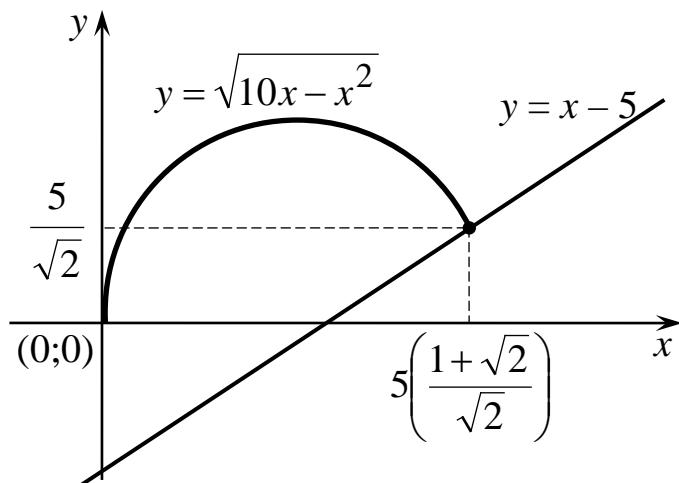


Рис. 2.8

### 2.4.3. Вариационные задачи с запрещенными областями

В некоторых вариационных задачах на экстремали  $y = y(x)$  может быть наложено ограничение, запрещающее им проходить через точки области  $G$ , ограниченной заданной кривой  $y = \varphi(x)$  (Рис. 2.9).

В таких задачах экстремаль  $y = y(x)$  может располагаться целиком вне области  $G$  либо она состоит из дуг, лежащих вне границы  $G$ , и из частей границы этой области.

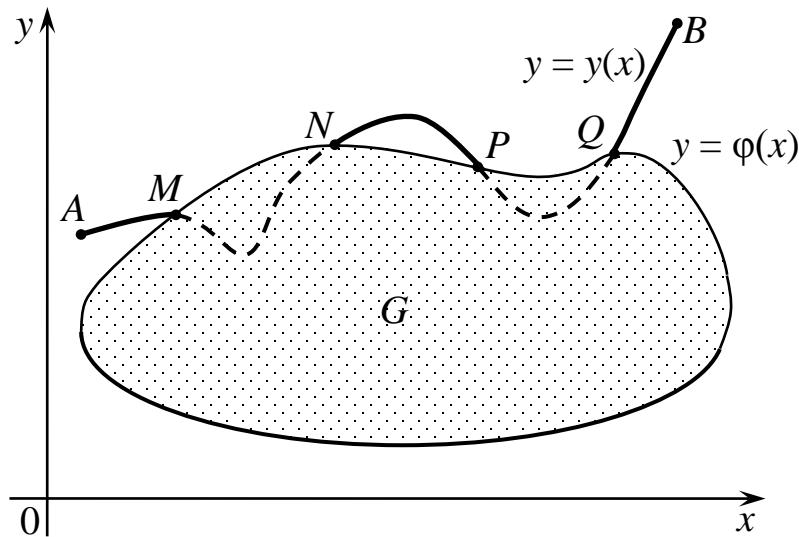


Рис. 2.9

В последнем случае необходимо определить координаты точек экстремали, лежащих на граничной кривой  $y = \varphi(x)$ . На Рис. 2.9 такими точками являются точки  $M, N, P, Q$ . Точки  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x_1, y_1)$  являются заданными граничными точками экстремали  $y = y(x)$ .

Штриховой линией обозначены участки экстремали, находящиеся в «запрещенной» области  $G$ .

Как и выше, будем считать, что из уравнения Эйлера (2.4.7) получено общее решение  $y = y(x, C_1, C_2)$  вариационной задачи.

Рассмотрим условия для определения координат точки  $M(x^*, y^*)$  перехода экстремали на границу области  $G$  и точки  $N(x^{**}, y^{**})$  ее «схода» с границы области  $G$ .

Запишем функционал (2.4.4) в виде [20]:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx = \int_{x_0}^{x^*} F(x, y, y') dx + \int_{x^*}^{x_1} F(x, y, y') dx = J_1 + J_2.$$

Функционал  $J_1$  имеет подвижную граничную точку, лежащую на кривой  $y = \varphi(x)$ . Следовательно, для ее определения

можно использовать одно из условий трансверсальности (2.4.21) вида:

$$[F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x^*} = 0. \quad (2.4.22)$$

Функционал  $J_2$  также имеет подвижную точку  $(x^*, y^*)$ , но в этой точке производные от экстремали  $y(x)$  и функции  $\varphi(x)$  должны быть равны.

Отсюда следует второе условие вида [20]:

$$[F(x, y, y') - F(x, y, \varphi') - (y' - \varphi')F_{y'}(x, y, y')]_{x=x^*} = 0. \quad (2.4.23)$$

Для определения параметров  $C_1, C_2, x^*$  к этим уравнениям необходимо добавить уравнение:

$$y(x^*, C_1, C_2) = \varphi(x^*). \quad (2.4.24)$$

Координата  $y^*$  при известном значении  $x^*$  вычисляется как:

$$y^* = \varphi(x^*). \quad (2.4.25)$$

Координату  $x^{**}$  точки  $N$  будем определять из уравнения:

$$\varphi'(x^{**}) = y'(x^{**}, C_{1M}, C_{2M}), \quad (2.4.26)$$

которое представляет собой условие гладкости «схода» откорректированной экстремали с кривой  $y = \varphi(x)$ . Параметры  $C_{1M}$  и  $C_{2M}$  – результаты решения уравнений (2.4.22)-(2.4.24).

Ордината точки  $N$  при вычисленном из уравнения (2.4.26) значении  $x^{**}$  определяется как:

$$y^{**} = \varphi(x^{**}). \quad (2.4.27)$$

Аналогичным образом находятся координаты остальных точек «входа» и «схода» экстремали (точки  $P$  и  $Q$  на Рис. 2.9) на границу и с границы «запрещенной» области  $G$ .

В этом случае искомая экстремаль  $Y(x)$  решаемой задачи представляется составной функцией, включающей в себя чередующиеся участки найденной из решения задачи (2.4.7), (2.4.8) экстремали и кривой  $y = \varphi(x)$ .

Для ситуации, представленной на Рис. 2.9, такая функция будет иметь вид:

$$Y(x) = \begin{cases} y(x, C_{1M}, C_{2M}), & x \in [x_0, x^*); \\ \varphi(x), & x \in [x^*, x^{**}); \\ y(x, C_{1M}, C_{2M}), & x \in [x^{**}, \bar{x}); \\ \varphi(x), & x \in [\bar{x}, \hat{x}); \\ y(x, C_{1M}, C_{2M}), & x \in [\hat{x}, x_1], \end{cases}$$

где  $\bar{x}$  и  $\hat{x}$  – абсциссы точек  $P$  и  $Q$ .

Заметим, что данная задача может не иметь решения, если система уравнений (2.4.22)-(2.4.24) несовместна. Это означает отсутствие такого значения  $x^*$ , при котором значения производных экстремали и граничной функции были бы равны. Такую ситуацию иллюстрирует Рис. 2.8, если в качестве граничной функции  $y = \varphi(x)$  рассматривать прямую  $y = x - 5$ .

#### 2.4.4. Вариационные задачи на условный экстремум

При наличии связей, накладываемых на искомые экстремали, используются вариационные задачи на условный экстремум.

Пусть требуется найти экстремум функционала (2.4.14) при выполнении следующих условий:

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad m < n. \quad (2.4.28)$$

Это означает, что экстремали  $y_j(x)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , должны не только доставлять максимальное (минимальное) значение функционалу  $J$ , но и удовлетворять при этом равенствам (2.4.28).

При решении задач вида (2.4.14), (2.4.28) используется вспомогательный функционал [20]:

$$\bar{J} = \int_{x_0}^{x_1} \bar{F}(x, y, y', \lambda) dx, \quad (2.4.29)$$

где

$$\bar{F}(x, y, y', \lambda) = F(x, y, y') + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \varphi_i(x, y). \quad (2.4.30)$$

В этих выражениях использованы вектор-функции:

$$y = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x));$$

$$y' = (y'_1(x), y'_2(x), \dots, y'_n(x));$$

$$\lambda = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)).$$

При этом функции  $\lambda_i(x)$  выполняют роль вспомогательных функций решаемой задачи и носят название множителей Лагранжа.

Экстремали  $y_j(x)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , функционала (2.4.29) формируются путем решения системы уравнений Эйлера:

$$\bar{F}_{y_j} - \frac{d}{dx} \bar{F}_{y'_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.4.31)$$

дополненной уравнениями связи (2.4.28).

Эта расширенная система  $(n + m)$  уравнений позволяет найти функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$ , а граничные условия:

$$y_j(x_0) = y_{j0}; \quad y_j(x_1) = y_{j1}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.4.32)$$

которые должны удовлетворять условиям (2.4.28), дают возможность определить  $2n$  постоянных интегрированием системы (2.4.31).

### Пример 2.13

Пусть требуется найти функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ , доставляющие минимальное значение функционалу:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + {y'_1}^2 + {y'_2}^2} dx,$$

при выполнении условий вида:

$$y_1(x_0) = y_{10}; \quad y'_1(x_0) = y'_{10}; \quad y_2(x_0) = y_{20}; \quad y'_2(x_0) = y'_{20}; \\ \varphi(x, y_1, y_2) = 0.$$

Вспомогательный функционал этой задачи, сформированный с использованием выражений (2.4.29) и (2.4.30), записывается как:

$$\bar{J} = \int_{x_0}^{x_1} \bar{F} dx = \int_{x_0}^{x_1} \left( \sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2} + \lambda(x) \varphi(x, y_1, y_2) \right) dx,$$

где  $\lambda = \lambda(x)$  – множитель Лагранжа.

Система уравнений Эйлера (2.4.31), дополненная уравнением связи, имеет вид:

$$\begin{aligned} \lambda(x) \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{y_1'}{\sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2}} &= 0; \\ \lambda(x) \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \frac{y_2'}{\sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2}} &= 0; \\ \varphi(x, y_1, y_2) &= 0. \end{aligned}$$

Из этой системы уравнений определяются искомые функции  $y_1 = y_1(x, C_1, C_2)$ ,  $y_2 = y_2(x, C_3, C_4)$  и  $\lambda(x)$  решаемой задачи.

Пусть уравнения связей являются дифференциальными уравнениями вида [20]:

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad m < n. \quad (2.4.33)$$

В этом случае так же, как для связей вида (2.4.28), с использованием этих уравнений составляется выражение (2.4.30), формируется система дифференциальных уравнений (2.4.31), (2.4.33), из решения которой определяются функции  $y_j$  и  $\lambda_i$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Для определения постоянных интегрирования используются условия (2.4.32).

Если требуется определить экстремум функционала (2.4.14) при удовлетворении интегральных условий:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx = l_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.4.34)$$

где  $l_i$  – заданные постоянные величины, то такие задачи называются изопараметрическими вариационными задачами [20].

Отметим, что число ограничений вида (2.4.34) в таких задачах может быть больше, меньше или равно числу искомых функций  $n$ .

Для решения таких задач используется вспомогательный функционал вида [20]:

$$\bar{J} = \int_{x_0}^{x_1} \left( F + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i \right) dx, \quad (2.4.35)$$

где  $\lambda_i = \text{const}$  – множители Лагранжа,  $i = \overline{(1, m)}$ .

Уравнения Эйлера (2.4.31) записываются для следующей подынтегральной функции:

$$\bar{F} = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i \quad (2.4.36)$$

функционала (2.4.35).

Постоянные интегрирования  $C_1, C_2, \dots, C_{2n}$  этих уравнений и множители Лагранжа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  определяются из граничных условий (2.4.32) и из изопериметрических условий (2.4.34).

Отметим основные этапы решения вариационных задач на условный экстремум:

1°. Составление вспомогательных функционалов вида (2.4.29) или (2.4.35).

2°. Запись уравнений Эйлера для выражений (2.4.30) или (2.4.36).

3°. Определение наряду с искомыми экстремалами вспомогательных функций  $\lambda_i(x)$  или параметров  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{(1, m)}$ .

Важным этапом решения таких задач является анализ соответствия граничных условий (2.4.32) используемым ограничениям вида (2.4.28) или (2.4.33) и, при необходимости, корректировка значений  $y_{j0}$  и  $y_{j1}$ ,  $j \in \overline{(1, n)}$ .

#### **2.4.5. Вариационные задачи в параметрической форме**

Вариационные задачи, используемые для оптимизации управления ЛА [4, 5, 11, 13, 29 и др.], обычно формулируются в параметрической форме, где в качестве аргумента искомых экстремалей используется параметр  $t$ , физически означающий время.

Параметрический вид задачи часто бывает удобнее рассмотренного выше классического вида вариационных задач.

Так в изопериметрической задаче вида (2.4.14), (2.4.34), в которой требуется найти замкнутую кривую  $y = y(x)$  заданной длины  $l$ , ограничивающую максимальную площадь  $S$ , неудобно искать решение в виде неоднозначной функции  $y(x)$ . Примером такой функции является уравнение окружности:

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

которое, будучи записано в виде:

$$y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$$

для каждого значения аргумента  $x$ , дает два значения  $y$ .

Если считать, что уравнение искомой кривой задается в параметрической форме [8, 17] как:

$$x = x(t); \quad y = y(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.4.37)$$

то такая изопериметрическая задача будет иметь вид [17]:

$$S[x(t), y(t)] = 0,5 \int_{t_0}^{t_1} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt \rightarrow \max; \quad (2.4.38)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = l, \quad (2.4.39)$$

где  $\dot{x} = \dot{x}(t)$ ,  $\dot{y} = \dot{y}(t)$  – производные функций  $x(t)$  и  $y(t)$ .

Рассмотрим общий подход, позволяющий переходить от задачи поиска экстремали в форме  $y = y(x)$  к параметрической вариационной задаче, где искомая экстремаль будет представляться функциями (2.4.37).

Пусть функционал задачи задан выражением (2.4.4).

Преобразуем производную  $y'$  следующим образом:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\left( \frac{dy}{dt} \right)}{\left( \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

Кроме этого, имеем, что

$$dx = \dot{x}(t)dt.$$

С учетом этих представлений и выражений (2.4.37) функционал (2.4.4) примет вид:

$$J[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) \dot{x}(t) dt.$$

Здесь  $t_0$  и  $t_1$  – значения параметра  $t$ , найденные из условий:

$$x(t_0) = x_0; \quad x(t_1) = x_1.$$

Общая форма параметрической вариационной задачи имеет вид:

$$J[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt \rightarrow \text{extr.} \quad (2.4.40)$$

При ее решении используются уравнения Эйлера [20]:

$$\Phi_x - \frac{d}{dt} \Phi_{\dot{x}} = 0; \quad \Phi_y - \frac{d}{dt} \Phi_{\dot{y}} = 0; \quad (2.4.41)$$

и граничные условия:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0; & y(t_0) &= y_0; \\ x(t_1) &= x_1; & y(t_1) &= y_1. \end{aligned} \quad (2.4.42)$$

Наряду с простейшей вариационной параметрической задачей (2.4.40), (2.4.42) в такой форме могут представляться все рассмотренные выше виды вариационных задач.

В приложениях вариационного исчисления к задачам динамики полета ЛА [11] широко используется следующая постановка задачи: «Найти функции  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , доставляющие максимум (минимум) функционалу:

$$\begin{aligned} J &= f_0(t_0, t_1, x_{10}, \dots, x_{n0}, x_{11}, \dots, x_{n1}) + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \rightarrow \text{extr}, \end{aligned} \quad (2.4.43)$$

при выполнении ограничений:

$$\varphi_i(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0, \quad i = (\overline{1, m}), \quad m < n, \quad (2.4.44)$$

и граничных условий:

$$x_j(t_0) = x_{j0}; \quad x_j(t_1) = x_{j1}, \quad j = (\overline{1, m}). \quad (2.4.45)$$

Здесь в отличие от рассмотренных выше функционалов в состав выражения (2.4.43) входит внеинтегральная составляющая  $f_0$ , которая зависит от начального ( $t_0$ ) и конечного ( $t_1$ ) моментов времени и граничных значений искомых функций (2.4.45).

В оптимальных задачах динамики полета [11] выражения (2.4.43)-(2.4.45) описывают вариационную задачу Больца. Из этой задачи при  $f_0 \equiv 0$  получается задача Лагранжа, а при  $\Phi \equiv 0$  – задача Майера [11].

Заметим, что в последнем случае функционал  $J$  становится терминальным функционалом, пример которого приведен на Рис. 2.6,в.

Использование задачи Майера позволяет находить не только оптимальные экстремали  $x_j(t)$ ,  $j = (\overline{1, n})$ , но и соответствующие им величины  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $x_{j0}$ ,  $x_{j1}$ ,  $j = (\overline{1, n})$ .

Задачи Больца, Майера и Лагранжа решаются с использованием множителей Лагранжа  $\lambda_i = \lambda_i(t)$ ,  $i = (\overline{1, m})$ .

Здесь, как и выше, формируется выражение:

$$\bar{\Phi} = \Phi + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i \quad (2.4.46)$$

и записываются уравнения Эйлера-Лагранжа вида:

$$\bar{\Phi}_{x_j} - \frac{d}{dt} \bar{\Phi}_{\dot{x}_j} = 0, \quad j = (\overline{1, n}). \quad (2.4.47)$$

Для определения функций  $x_j(t)$  и  $\lambda_i(t)$ ,  $j = (\overline{1, n})$ ,  $i = (\overline{1, m})$  эти уравнения при заданных значениях граничных условий (2.4.45) решаются совместно с дифференциальными уравнениями (2.4.44).

Если часть граничных условий задачи не определена, то для их нахождения, как в Разд. 2.4.2, используются условия трансверсальности, которые имеют следующий вид:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t_0} - \left[ \bar{\Phi} - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \bar{\Phi}_{\dot{x}_j} \right]_{t=t_0} = 0; \quad (2.4.48)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t_1} - \left[ \bar{\Phi} - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \bar{\Phi}_{\dot{x}_j} \right]_{t=t_1} = 0; \quad (2.4.49)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_{j0}} - \bar{\Phi}_{\dot{x}_j} \Big|_{t=t_0} = 0; \quad j \in (\overline{1, n}); \quad (2.4.50)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_{j1}} - \bar{\Phi}_{\dot{x}_j} \Big|_{t=t_1} = 0; \quad j \in (\overline{1, n}). \quad (2.4.51)$$

Заметим, что из этих выражений в каждой конкретной задаче используется только их часть, касающаяся «свободных» («подвижных») граничных параметров.

Например, если в решаемой задаче задан начальный момент времени  $t_0$  и значения  $x_{j0}, x_{j1}, j = (\overline{1, n})$ , а конечный момент времени  $t_1$  является «свободным», то для определения его оптимального значения из этих условий используется только выражение (2.4.49).

Если значения  $t_0$  и  $t_1$  заданы совместно с частью граничных значений  $x_{j0}$  и  $x_{j1}$ , то их оставшиеся «свободными» значения находятся из выражений (2.4.50) и (2.4.51).

При задании в решаемой прикладной задаче дифференциальных связей в явной форме вида:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_m), \quad i = (\overline{1, m}), \quad m < n,$$

они преобразуются в неявную форму (2.4.44) как:

$$\varphi_i = \dot{x}_i - f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \quad i = (\overline{1, m}). \quad (2.4.52)$$

Как было отмечено выше, методы поиска оптимальных решений в вариационных задачах основаны на необходимых ус-

ловиях экстремума применяемых в них функционалов вида (2.4.5). Вместе с тем в каждой практической задаче ее функционал должен быть либо максимизирован, либо минимизирован.

Поэтому после решения каждой вариационной задачи должен быть проведен анализ на достижение этой цели.

Здесь, как и в дифференциальном исчислении, имеются достаточные условия типа (2.4.6) максимума и минимума используемого функционала  $J$ .

Сформулируем достаточные условия экстремума для задачи Больца (2.4.43)-(2.4.45) в форме условия Лежандра-Клебша [11].

Это условие при достижении функционалом  $J$  максимума имеет вид:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \bar{\Phi}(t, x_1^0, \dots, x_n^0, \dot{x}_1^0, \dots, \dot{x}_n^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)}{\partial x_j \partial x_k} < 0. \quad (2.4.53)$$

Для нахождения минимума функционала  $J$  эта сумма должна быть больше нуля.

При проверке этого условия в смешанную производную от функции  $\bar{\Phi}$  подставляются результаты решения  $x_j^0(t)$ ,  $\dot{x}_j^0(t)$ ,  $\lambda_i^0(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , задачи (2.4.43)-(2.4.45).

Условие (2.4.53) может быть использовано и для других видов рассмотренных выше вариационных задач.

Примеры использования вариационного исчисления в задачах оптимизации управления БЛА представлены в Главе 9.

## 2.5. Основы теории оптимального управления динамическими объектами

Рассмотренные в предыдущем разделе методы вариационного исчисления предназначены для определения непрерывных и гладких экстремалей.

Вместе с тем, развитие техники в XX веке выдвинуло ряд задач нахождения экстремалей, которые должны лежать в не-

которых заданных областях и быть при этом кусочно-непрерывными функциями времени и других характеристик оптимизируемого объекта или процесса.

### 2.5.1. Основные понятия теории

Необходимость решения неклассических задач управления вызвало разработку в 60-70-ых годах прошлого столетия теории оптимального управления динамическими системами [4, 5, 11, 29, 52].

В этой теории функционирование объекта управления на интервале времени  $[t_0, t_1]$  описывается системой дифференциальных уравнений [11]:

$$\dot{x}_j = \varphi_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_k), \quad j = \overline{1, n}, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.5.1)$$

с граничными условиями:

$$x_j(t_0) = x_{j0}, \quad x_j(t_1) = x_{j1}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.5.2)$$

Здесь  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  – непрерывные кусочно-гладкие функции, называемые фазовыми координатами объекта, описывающие состояние объекта (положение в пространстве, скорость движения и т.п.) в момент времени  $t \in [t_0, t_1]$ ;  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)$  – управляющие кусочно-непрерывные функции, принадлежащие некоторой заданной области  $U$  и имеющие в промежутке времени  $[t_0, t_1]$  конечное число точек разрыва.

Примером такой системы являются выражения (1.3), (1.4), приведенные в Главе 1.

Управление объектом может быть реализовано методами, представленными на Рис. 2.10.

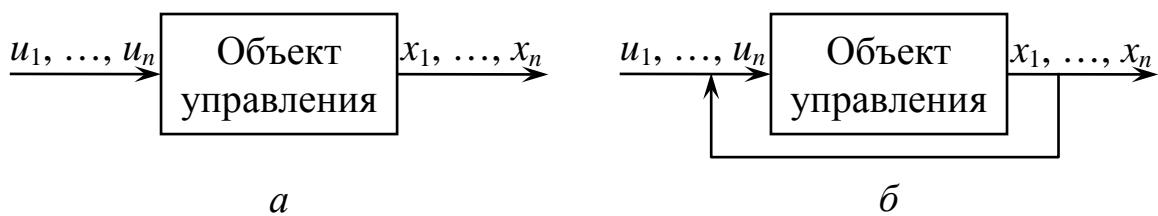


Рис. 2.10

Если управляющие функции имеют вид:

$$u_r = u_r(t), \quad r = (\overline{1, k}), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.5.3)$$

то имеем программное управление объектом (см. Рис. 2.10,*a*).

Если применяемое управление объектом имеет вид зависимостей:

$$u_r = u_r(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad r = (\overline{1, k}), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.5.4)$$

где  $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$  – текущие значения его фазовых координат, то управление осуществляется по принципу обратной связи (см. Рис. 2.10,*b*).

В задачах управления такими объектами как самолет, вертолет, ракета, космический корабль и т.п. область  $U$  обычно задается соотношениями:

$$u_{1r} \leq u_r \leq u_{2r}, \quad r = (\overline{1, k}), \quad (2.5.5)$$

где  $u_{1r}, u_{2r}$  – предельные состояния их органов управления (рулей и т.п.).

Управления объектом, удовлетворяющие этим условиям, называются допустимыми управлениями.

Как было отмечено выше, управляющие функции  $u_r, r = (\overline{1, k})$ , могут быть разрывными. Это приводит к тому, что вследствие уравнений (2.5.1) фазовые координаты  $x_j(t), j = (\overline{1, n})$  становятся кусочно-гладкими функциями.

На Рис. 2.11 приведены примеры таких функций.

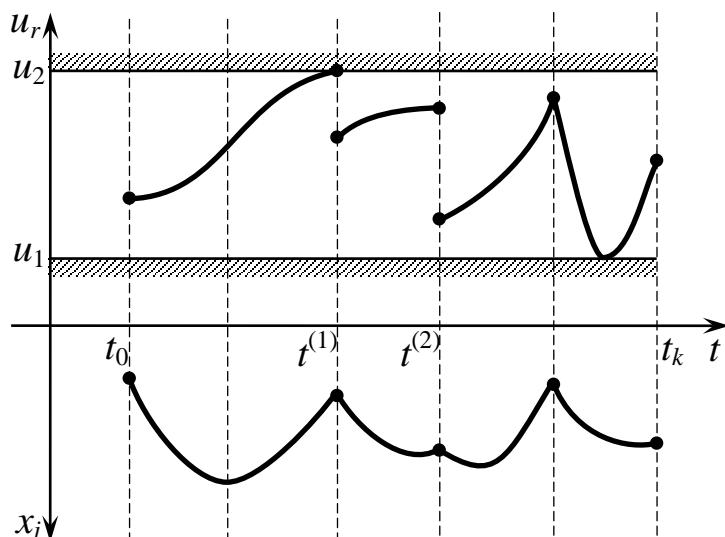


Рис. 2.11

В теории оптимального управления динамическими объектами в общем случае решается следующая задача [11]:

«Найти управлений  $u_1, u_2, \dots, u_k$ , доставляющие максимум функционалу:

$$\begin{aligned} J(u_1, u_2, \dots, u_k) &= f_0(t_0, t_1, x_{j0}, x_{j1}) + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_k) dt \rightarrow \max \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

при выполнении ограничений (2.5.5), (2.5.1), (2.5.2)».

Здесь функция  $f_0$ , как и в выражении (2.4.43), включает в себя «свободные» параметры конкретной решаемой задачи, то есть параметры, не заданные условиями (2.5.2).

В теории оптимального управления сформулированная задача, как и в вариационном исчислении, носит название задачи Больца, которая при  $f_0 \equiv 0$  превращается в задачу Лагранжа, а при  $F \equiv 0$  – в задачу Майера.

Заметим, что задачу Больца можно свести к задаче Майера путем введения в рассмотрение дополнительного дифференциального уравнения:

$$\dot{x}_{n+1} = F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_k) \quad (2.5.7)$$

с начальным условием:

$$x_{n+1}(t_0) = 0. \quad (2.5.8)$$

В этом случае значение интеграла, входящего в выражение (2.5.6), будет равно величине:

$$x_{n+1,1} = x_{n+1}(t_1), \quad (2.5.9)$$

и функционал (2.5.6) примет вид терминального функционала:

$$J(u_1, u_2, \dots, u_k) = f_0(t_0, t_1, x_{j0}, x_{j1}) + x_{n+1,1} \rightarrow \max. \quad (2.5.10)$$

Найденные из решения задачи (2.5.10), (2.5.5), (2.5.1), (2.5.7), (2.5.2) управлений  $u_1^0, u_2^0, \dots, u_k^0$  называются оптимальным управлением рассматриваемым объектом.

Если управление представлено в форме (2.5.3), то такое управление называют оптимальным программным управлением объектом.

При формировании оптимального управления в форме (2.5.4) решается задача синтеза оптимального закона управления объектом.

Отметим, что эта задача в общем случае не решена до настоящего времени.

### **2.5.2. Принцип максимума Л.С. Понtryгина**

Задача формирования оптимального программного управления чаще всего решается на практике с использованием принципа максимума Л.С. Понtryгина [11], который обеспечивает необходимые условия экстремума функционала:

$$J = f_0(t_0, t_1, x_{j0}, x_{j1}) \rightarrow \min \quad (2.5.11)$$

при выполнении условий (2.5.5), (2.5.1), (2.5.2).

Для формулировки таких условий вводится в рассмотрение функция Гамильтона:

$$H = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j. \quad (2.5.12)$$

Здесь  $\lambda_j = \lambda_j(t)$  – сопряженные функции;  $\varphi_j$  – правые части системы уравнений (2.5.1).

С учетом функции  $H$  сопряженные функции должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.5.13)$$

Принцип максимума. Для оптимальности допустимого управления  $u_1^0, u_2^0, \dots, u_k^0$  системы (2.5.1), доставляющего минимум (максимум) функционалу (2.5.11), необходимо существование ненулевых функций  $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)$ , определяемых выражениями (2.5.12), (2.5.13), при которых:

а) оптимальное управление  $u_1^0, u_2^0, \dots, u_k^0$  доставляет максимум (минимум) функции  $H = H(t, x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_k; \lambda_1, \dots, \lambda_n)$  переменных  $u_1, u_2, \dots, u_k$  для любого  $t \in [t_0, t_1]$ ;

б) неизвестные граничные значения функций  $x_j(t), \lambda_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$  и параметры  $t_0, t_1$  должны удовлетворять уравнениям:

$$\lambda_{j0} + \frac{\partial f_0}{\partial x_{j0}} = 0; \quad \lambda_{j1} + \frac{\partial f_0}{\partial x_{j1}} = 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad (2.5.14)$$

$$H|_{t=t_0} + \frac{\partial f_0}{\partial t_0} = 0; \quad H|_{t=t_1} + \frac{\partial f_0}{\partial t_1} = 0; \quad (2.5.15)$$

в) функция  $H$  остается непрерывной по  $t$  в точках разрыва оптимальных функций  $u_1^0, u_2^0, \dots, u_k^0$ .

Доказательство принципа максимума приведено в работе [11].

Функция  $H$  может достигать максимума как внутри области допустимых управлений (2.5.5), так и на ее границах. Отсюда следует, что каждая из оптимальных функций  $u_r^0 = u_r^0(t)$  должна на всем промежутке  $[t_0, t_1]$  или на отдельных его частях определяться одним из следующих условий:

$$\frac{\partial H(t, x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_k; \lambda_1, \dots, \lambda_n)}{\partial u_r} = 0; \quad (2.5.16)$$

$$u_r = u_{r1}; \quad (2.5.17)$$

$$u_r = u_{r2} \quad (2.5.18)$$

в зависимости от того, которое из них доставляет наибольшее значение функции  $H$ .

Возможные варианты поведения функции  $H = H(u_r)$  представлены на Рис. 2.12.

Согласно этим графикам, условию (2.5.16) могут соответствовать в отрезках  $[u_{r1}, u_{r2}]$  точки максимума, минимума и точки перегиба функции  $H$ . Наибольшие значения эта функция может достигать в граничных точках таких промежутков (см. Рис. 2.12, б и Рис. 2.12, в).

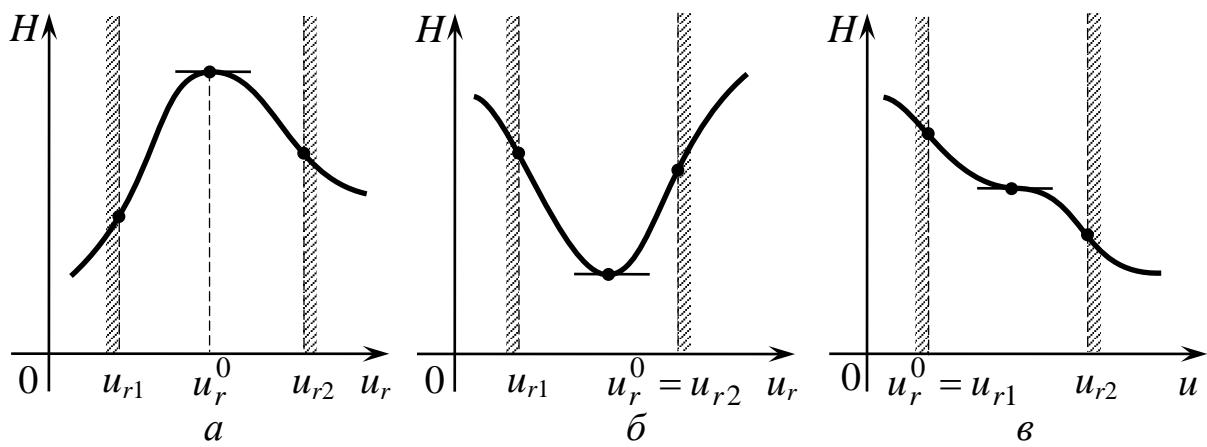


Рис. 2.12

Решение этого вопроса затрудняется тем, что  $x_j(t)$  и  $\lambda_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , входящие в выражение (2.5.12), неизвестны.

Задача становится определенной при совместном использовании уравнений (2.5.1), (2.5.13) и условий (2.5.2), (2.5.14)-(2.5.18).

Эти выражения образуют замкнутую систему с неизвестными функциями  $x_j(t)$  и  $\lambda_j(t)$ ,  $u_r(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $r = \overline{1, k}$ , позволяющую установить  $2n$  зависимостей между параметрами  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $x_{j0}$ ,  $x_{j1}$ ,  $\lambda_{j0}$ ,  $\lambda_{j1}$ ,  $j = \overline{1, n}$  и координатами  $t = t^{(s)}$ ,  $s > 1$  точек разрыва управлений  $u_r(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , представленных на Рис. 2.11.

Совместное рассмотрение этих уравнений сводит задачу определения оптимальных управлений к решению краевых задач для систем уравнений (2.5.1) и (2.5.13). При этом сложности возникают при определении на отрезке времени  $[t_0, t_1]$  точек сопряжения решений уравнений (2.5.16)-(2.5.18).

Установлено [11], что если в некоторой задаче оптимизации правые части уравнений (2.5.1) не зависят явно от времени  $t$ , а  $u_r(t)$  – кусочно-непрерывные кусочно-гладкие функции, то функция Гамильтона (2.5.12) обладает следующим свойством:

$$H(t, x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_k; \lambda_1, \dots, \lambda_n) = C, \quad t \in [t_0, t_1],$$

где  $C$  – некоторая константа.

Если ввести новые функции  $z_r(t)$ , такие, что

$$\dot{z}_r = u_r, \quad r = (\overline{1, k}),$$

и включить в уравнения (2.5.1) вместо управлений  $u_1, u_2, \dots, u_k$  производные этих функций, а также не учитывать условия (2.5.5), то получим вариационную задачу Майера (2.4.43)-(2.4.45), (2.4.48)-(2.4.51) при  $\Phi \equiv 0$ .

Таким образом, основным достоинством принципа Л.С. Понtryгина является возможность решения задач оптимального управления, в которых допускаются разрывы функций  $u_r(t)$  и их выходы на границы допустимых значений  $u_{1r}$  и  $u_{2r}$ ,  $r = (\overline{1, k})$ .

Как и в Разд. 2.3 от условий вида (2.5.5) можно избавиться путем использования новых управлений  $v_r(t)$ , которые связаны с управлениями  $u_r(t)$  соотношением [11]:

$$u_r(t) = 0,5[u_{1r} + u_{2r} + (u_{2r} - u_{1r})\sin v_r(t)]. \quad (2.5.19)$$

В связи с тем, что при  $v_r(t) \in (-\infty, \infty)$  синус этой функции изменяется в пределах  $[-1, +1]$ , функция  $u_r(t)$  будет при  $t \in [t_0, t_1]$  удовлетворять неравенству (2.5.5).

Проводя в уравнениях (2.5.1) замену (2.5.19), получаем функционал:

$$J = J[v_1(t), v_2(t), \dots, v_k(t)] \rightarrow \min. \quad (2.5.20)$$

При его минимизации можно отбросить условия (2.5.17), (2.5.18) и определять оптимальные управление из следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial H}{\partial v_r} = 0, \quad r = (\overline{1, k}). \quad (2.5.21)$$

В некоторых задачах оптимального управления на параметры начального и конечного состояний объекта налагаются граничные условия вида [11]:

$$f_s(t_0, t_1, x_{j0}, x_{j1}) = 0, \quad j \in (\overline{1, n}), \quad s = (\overline{1, r}). \quad (2.5.22)$$

Для таких задач оптимальное управление  $u_1, u_2, \dots, u_k$  определяется как управление, доставляющее минимум функционалу

(2.5.11) при выполнении ограничений (2.5.5), (2.5.1), (2.5.9) и (2.5.22). При этом, часть граничных условий, налагаемых на фазовые координаты объекта, может быть задана в форме выражений (2.5.2), а другая часть – в виде равенств (2.5.22).

При наличии ограничений (2.5.22) в п. б) принципа максимума вместо выражений (2.5.14), (2.5.15) используются следующие уравнения [11]:

$$\begin{aligned} \lambda_{j0} + \frac{\partial f_0}{\partial x_{j0}} + \sum_{s=1}^r \mu_s \frac{\partial f_s}{\partial x_{j0}} &= 0; \\ \lambda_{j1} + \frac{\partial f_0}{\partial x_{j1}} + \sum_{s=1}^r \mu_s \frac{\partial f_s}{\partial x_{j1}} &= 0; \end{aligned} \quad (2.5.23)$$

$$\begin{aligned} H|_{t_0} + \frac{\partial f_0}{\partial t_0} + \sum_{s=1}^r \mu_s \frac{\partial f_s}{\partial t_0} &= 0; \\ H|_{t_1} + \frac{\partial f_0}{\partial t_1} + \sum_{s=1}^r \mu_s \frac{\partial f_s}{\partial t_1} &= 0, \end{aligned} \quad (2.5.24)$$

где  $\mu_s = \text{const}$  – множители Лагранжа.

В практических задачах выбора оптимального управления возникает необходимость учета дополнительных ограничений на текущие значения фазовых координат и управлений, заданных в виде неравенств:

$$\begin{aligned} \Psi_l(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)) &\leq 0, \\ l = (\overline{1, L}), \quad t \in [t_0, t_k]. \end{aligned}$$

Формулировка принципа максимума для решения таких задач приведена в работе [52].

### 2.5.3. Пример использования принципа максимума Л.С. Понtryгина

Пусть функционирование объекта управления описывается дифференциальным уравнением:

$$\dot{x}_1 = 2x_1 u_1, \quad t \in [0, 1], \quad (2.5.25)$$

с заданным начальным условием:

$$x_1(0) = 4. \quad (2.5.26)$$

Функционал задачи выбора оптимального управления  $u_1^0 = u_1^0(t)$  имеет вид:

$$J[u_1(t)] = \int_0^1 (x_1 + 3u_1^2) dt \rightarrow \max. \quad (2.5.27)$$

Будем считать, что ограничение вида (2.5.5) на искомое управление отсутствует.

Выражения (2.5.25), (2.5.26) являются частными случаями соотношений (2.5.1) и (2.5.2) при  $n = 1$  и  $k = 1$ . Отметим, что в данной задаче  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1$ ,  $x_{10} = 4$ .

Выражения (2.5.25)-(2.5.27) описывают задачу оптимального управления в форме задачи Лагранжа.

Введем дополнительную фазовую координату  $x_2 = x_2(t)$  объекта и перейдем к задаче Майера.

Эта координата согласно (2.5.7) должна описываться дифференциальным уравнением вида:

$$\dot{x}_2 = x_1 + 3u_1^2 \quad (2.5.28)$$

с начальным условием:

$$x_2(0) = 0. \quad (2.5.29)$$

Тогда функционал (2.5.27) примет вид выражения (2.5.11) и запишется как:

$$J[u_1(t)] = x_{21} \rightarrow \max, \quad (2.5.30)$$

где  $x_{21} = x_2(1)$  – значение функции  $x_2(t)$  при  $t = 1$ .

Построим с использованием выражений (2.5.25) и (2.5.28) функцию Гамильтона вида (2.5.12):

$$H = 2\lambda_1 x_1 u_1 + \lambda_2 (x_1 + 3u_1^2), \quad (2.5.31)$$

где  $\lambda_1 = \lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2 = \lambda_2(t)$  – сопряженные функции решаемой задачи.

Система дифференциальных уравнений (2.5.13) записывается с учетом выражения (2.5.31) следующим образом:

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -2\lambda_1 u_1 - \lambda_2; \quad (2.5.32)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0. \quad (2.5.33)$$

Определим общий вид оптимального управления с помощью выражения вида (2.5.16), которое конкретизируется с учетом (2.5.31) как:

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 2\lambda_1 x_1 + 6\lambda_2 u_1 = 0.$$

Решая полученное уравнение, имеем:

$$u_1 = -\frac{\lambda_1 x_1}{3\lambda_2}. \quad (2.5.34)$$

Из этого выражения следует, что для определения оптимального управления  $u_1^0(t)$  требуется в это выражение подставить конкретный вид функций  $x_1 = x_1(t)$ ,  $\lambda_1 = \lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2 = \lambda_2(t)$ .

Для проверки достаточных условий экстремума функционала (2.5.30) в «стационарной точке» гамильтониана (2.5.31), определяемой выражением (2.5.34), вычислим производную [11]:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} = 6\lambda_2. \quad (2.5.35)$$

Используя достаточные условия максимума функции одной переменной вида (2.2.2), из этого выражения можно сделать вывод, что если функция  $\lambda_2(t) < 0$  при  $t \in [0, 1]$ , то управление (2.5.34) доставляет максимум функционалу (2.5.30). При  $\lambda_2(t) > 0$ ,  $t \in [0, 1]$ , этот функционал на управлении  $u_1 = u_1(t)$  принимает минимальное значение.

Подставляя управление (2.5.34) в уравнения (2.5.25), (2.5.28), (2.5.32), (2.5.33), получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{2\lambda_1 x_1^2}{3\lambda_2}; \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \frac{\lambda_1^2 x_1^2}{3\lambda_2^2}; \\ \dot{\lambda}_1 &= \frac{2\lambda_1^2 x_1}{3\lambda_2} - \lambda_2; \\ \dot{\lambda}_2 &= 0\end{aligned}\tag{2.5.36}$$

для нахождения на отрезке времени  $[0, 1]$  неизвестных функций  $x_1 = x_1(t)$ ,  $x_2 = x_2(t)$ ,  $\lambda_1 = \lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2 = \lambda_2(t)$ .

Начальные условия для первых двух уравнений этой системы задаются выражениями (2.5.26) и (2.5.29).

Начальные условия для остальных уравнений системы (2.5.36) будем определять с помощью условий (2.5.14) и (2.5.15).

В связи с тем, что при  $t = 0$  заданы значения всех фазовых координат  $x_1$  и  $x_2$  задачи, первое условие из состава (2.5.14) не используется.

Из выражения (2.5.30) следует, что значение  $x_{21} = x_2(1)$  является «свободным», т.е. подлежит определению в процессе решения задачи.

Производная по этому параметру функционала (2.5.30), который в форме (2.5.11) представляется как  $J = f_0(x_{11}) = x_{11}$ , равна единице.

Поэтому из второй группы уравнений (2.5.14) имеем, что

$$\lambda_{21} + 1 = 0.$$

Откуда начальное значение сопряженной функции  $\lambda_2(t)$  при  $t = 1$  будет равно:

$$\lambda_2(1) = -1.\tag{2.5.37}$$

Интегрируя последнее уравнение системы (2.5.36), получаем следующее выражение:

$$\lambda_2(t) = C_2,$$

где  $C_2$  – постоянная интегрирования.

Из выражения (2.5.37) следует, что  $C_2 = -1$  и функция  $\lambda_2(t)$  конкретизируется как:

$$\lambda_2(t) = -1, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.5.38)$$

Тогда из подстановки ее в выражение (2.5.35) следует, что функционал (2.5.30) на управлении (2.5.34) достигает максимума.

Для нахождения начального условия  $\lambda_{10} = \lambda_1(0)$  используем первое уравнение из состава выражений (2.5.15).

В связи с тем, что функционал (2.5.30) не зависит от начального момента времени, это условие примет вид:

$$H|_{t=0} = 0.$$

Используя выражение (2.5.31), полученное условие конкретизируется как:

$$2\lambda_{10}x_{10}u_{10} + \lambda_{20}x_{10} + 3\lambda_{20}u_{10}^2 = 0.$$

При  $t = 0$  с учетом (2.5.38) функция (2.5.34) имеет вид:

$$u_{10} = \frac{\lambda_{10}x_{10}}{3}.$$

Подставляя правую часть этой формулы в предыдущее выражение, получим:

$$\frac{2\lambda_{10}^2x_{10}^2}{3} + \lambda_{20}x_{10} + \frac{\lambda_{20}\lambda_{10}^2x_{10}^2}{3} = 0.$$

Используя в этой формуле известные значения  $\lambda_{20} = -1$ ,  $x_{10} = 4$ , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{32}{3}\lambda_{10}^2 - 4 - \frac{15}{3}\lambda_{10}^2 &= 0; \\ 5,333\lambda_{10}^2 - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Решая это уравнение, получаем следующие варианты начального условия для функции  $\lambda_1(t)$ :

$$\lambda_{10} = \pm 0,866 = \lambda_1(0). \quad (2.5.39)$$

С учетом соотношения (2.5.38) система (2.5.36) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{2}{3} \lambda_1 x_1^2; \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \frac{\lambda_1^2 x_1^2}{3}; \\ \dot{\lambda}_1 &= -\frac{2}{3} \lambda_1^2 x_1 + 1.\end{aligned}\tag{2.5.40}$$

Тогда решение задачи формирования оптимального управления  $u_1^0(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , завершается численным решением задачи Коши (2.5.40), (2.5.26), (2.5.29), (2.5.39) одним из методов, описанных в Разд. 3.1.

При этом для каждого значения начальных условий (2.5.39) анализируются полученные значения  $x_{21} = x_2(1)$ . Из этих значений с использованием функционала (2.5.30) выбирается наибольшее значение и соответствующие ему решения  $x_1^0(t)$ ,  $\lambda_1^0(t)$  системы (2.5.40). Эти значения используются для вычисления оптимального управления  $u_1^0(t)$  с помощью формулы:

$$u_1^0(t) = \frac{\lambda_1^0(t)x_1^0(t)}{3}, \quad t \in [0, 1],\tag{2.5.41}$$

которая получена путем подстановки в выражение (2.5.34) функции (2.5.38).

Указанная выше задача Коши была решена численным методом Рунге-Кутта (см. Разд. 3.1) для различных вариантов начальных условий (2.5.39). При этом оптимальные управлении определялись по формуле (2.5.41).

В табл. 2.3 представлены значения управления  $u_1(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  при  $\lambda_1(0) = +0,866$ .

Таблица 2.3

$t, \text{ с}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$u_1(t)$	1,155	1,049	0,952	0,866	0,793	0,732	0,683	0,645	0,615	0,591	0,574

При использовании этого управления получено следующее значение функционала (2.5.30):

$$J_1 = x_{12} = 6,775.$$

Для начального условия  $\lambda_1(0) = -0,866$  управление  $u_1(t)$  приведено в табл. 2.4.

Таблица 2.4

$t, \text{ с}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$u_1(t)$	-1,155	-0,737	-0,447	-0,237	-0,078	0,045	0,143	0,222	0,285	0,337	0,380

Отметим, что в данном случае в промежутке времени  $[0,4; 0,5]$  сек управление  $u_1(t)$  изменяет знак. Значение функционала (2.5.30) для полученного управления будет равно:

$$J_2 = x_{21} = 4,210.$$

В связи с тем, что  $J_1 > J_2$ , оптимальным будет управление, приведенное в табл. 2.3.

Пусть в рассматриваемой задаче (2.5.25)-(2.5.27) на управление  $u_1(t)$  наложено ограничение:

$$-1 \leq u_1(t) \leq +1, \quad t \in [0; 1], \quad (2.5.42)$$

которое является конкретизацией условий (2.5.5).

Из табл. 2.3 следует, что это ограничение нарушается в промежутке времени  $[0; 0,1]$ . Второе управление (см. табл. 2.4) не соответствует условию в окрестности начального момента времени  $t = 0$ . Это означает, что полученные управлении являются недопустимыми управлениями рассматриваемого объекта.

Согласно приведенным выше условиям оптимальности управления (2.5.16)-(2.5.18) проведем анализ оптимальности управлений:

$$u_1(t) = -1, \quad u_1 = +1, \quad t \in [0; 1].$$

Рассмотрим управление  $u_1(t) = +1$ . При подстановке этого значения в уравнения (2.5.25) и (2.5.28) получим следующую систему уравнений:

$$\dot{x}_1 = 2x_1; \quad (2.5.43)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + 3. \quad (2.5.44)$$

Проинтегрируем первое уравнение этой системы методом разделения переменных, описанным в Разд. 2.1.

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$x_1(t) = C_1 e^{2t}.$$

Постоянная интегрирования  $C_1$ , вычисленная с помощью начального условия (2.5.26), будет равна 4.

Тогда закон изменения первой фазовой координаты объекта запишется как:

$$x_1(t) = 4e^{2t}, \quad t \in [0, 1].$$

Подставляя эту функцию в уравнение (2.5.44), получим:

$$\dot{x}_2 = 4e^{2t} + 3.$$

Интегрируя это уравнение, имеем:

$$x_2(t) = 2e^{2t} + 3t + C_2.$$

Из начального условия (2.5.29) следует, что  $C_2 = -2$ . Отсюда вторая фазовая координата объекта определяется как:

$$x_2(t) = 2e^{2t} + 3t - 2. \quad (2.5.45)$$

Вычисляя значение функционала (2.5.30) на полученном решении (2.5.45), имеем:

$$J_3 = J[+1] = [2e^{2t} + 3t - 2]_{t=1} = 13,778.$$

Исследуем оптимальность управления  $u_1(t) = -1$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Уравнения (2.5.25) и (2.5.28) для этого случая будут иметь вид

$$\dot{x}_1 = -2x_1; \quad \dot{x}_2 = x_1 + 3. \quad (2.5.46)$$

Частное решение первого уравнения записывается как:

$$x_1(t) = 4e^{-2t}.$$

Подставляя это решение во второе уравнение системы (2.5.46) и интегрируя его, получим:

$$x_2(t) = -2e^{-2t} + 3t + C_3.$$

При  $x_2(0) = 0$  постоянная интегрирования  $C_3 = 2$ . Тогда окончательно имеем, что

$$x_2(t) = 2(1 - e^{-2t}) + 3t.$$

Значение функционала (2.5.30) на этом решении будет равно:

$$J_4 = J[-1] = [2(1 - e^{-2t}) + 3t]_{t=1} = 4,729.$$

Из сравнения значений  $J_1, J_2, J_3, J_4$  функционала (2.5.30) следует, что наибольшим из них является значение  $J_3 = 13,778$ . Это означает, что оптимальным управлением в задаче (2.5.25)-(2.5.27) является управление:

$$u_1^0(t) = +1, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.5.47)$$

Решим рассматриваемую задачу, применяя для учета ограничения (2.5.42) замену управления вида (2.5.19).

Подставляя в это выражение значения  $u_{1r} = -1$  и  $u_{2r} = +1$ , получаем следующее соотношение:

$$u_1(t) = \sin v_1(t), \quad t \in [0, 1], \quad (2.5.48)$$

где  $v_1(t)$  – неограниченное управление объектом.

Гамильтониан задачи (2.5.31) с учетом замены (2.5.47) примет вид:

$$H = 2\lambda_1 x_1 \sin v_1 + \lambda_2 x_1 + 3\lambda_2 \sin^2 v_1.$$

Необходимое условие его экстремума вида (2.5.21) конкретизируется как:

$$\frac{\partial H}{\partial v_1} = 2\lambda_1 x_1 \cos v_1 + 6\lambda_2 \sin v_1 \cos v_1 = 0. \quad (2.5.49)$$

Перепишем уравнение (2.5.49) относительно искомого управления  $v_1(t)$  в следующей форме:

$$\cos v_1(t) (\lambda_1(t)x_1(t) + 3\lambda_2(t) \sin v_1(t)) = 0, \quad t \in [0, 1].$$

Первый корень этого уравнения получим, приравнивая  $\cos v_1(t)$  к нулю. Тогда  $v_1(t) = \pi/2$  для всех  $t \in [0; 1]$ .

Второй корень будем искать, приравнивая к нулю второй сомножитель уравнения (2.5.49). Проводя соответствующие преобразования, получаем выражение вида:

$$\sin v_1(t) = -\frac{\lambda_1(t)x_1(t)}{3\lambda_2(t)}, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.5.50)$$

Подставляя в эту формулу начальные значения ее аргументов:

$$x_1(0) = 4; \quad \lambda_1(0) = \pm 0,866; \quad \lambda_2(0) = -1,$$

получаем, что

$$\sin v_1(0) = \pm 1,155.$$

Отсюда следует, что функция  $v_1(t)$ , определяемая выражением (2.5.50), не является решением уравнения (2.5.49), так как функция  $\sin$  любого значения аргумента не может по абсолютной величине превышать единицу.

Таким образом, оптимальным управлением является значение  $v^0(t) = \pi/2$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Подставляя это значение в формулу (2.5.48), имеем ранее полученный результат, описываемый выражением (2.5.47).

Отметим, что в работе [11], в которой была введена в рассмотрение замена управлений вида (2.5.19), отсутствуют примеры ее применения при решении различных задач оптимального управления.

Конкретные задачи формирования оптимального управления БЛА с применением принципа максимума Л.С. Понtryгина приведены в Главе 9.

В заключение данной главы необходимо отметить, что применение на практике изложенного в ней математического аппарата прикладной теории управления БЛА подразумевает активное применение общих и специальных численных методов решения соответствующих задач с их реализацией в составе программного обеспечения АРМ персонала БАК.

## **Глава 3. ОБЩИЕ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ БЛА**

В данной главе приводятся расчетные схемы методов приближенного решения систем дифференциальных и конечных уравнений. В составе последних рассматриваются линейные алгебраические, а также нелинейные классические и параметрические системы уравнений.

В связи с тем, что эти методы применяются при решении практических задач формирования программного управления БЛА, они определены как общие численные методы теории. Наряду с ними в главе приводятся специальные численные методы решения задач оптимизации управлений БЛА, основанные на применении методов вариационного исчисления и принципа максимума Л.С. Понтрягина.

### **3.1. Численные методы решения систем дифференциальных уравнений**

Как было отмечено в Разд. 2.1, с помощью аналитических методов можно интегрировать достаточно ограниченный круг дифференциальных уравнений. Численные методы позволяют получить с определенной точностью приближенное решение практически любой системы таких уравнений [25].

Сформируем простейшую задачу численного интегрирования дифференциального уравнения.

Решение дифференциального уравнения (2.1.2):

$$y' = f(x, y)$$

численным методом означает, что для заданной последовательности значений аргументов  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  и числа  $y_0 = y(x_0)$ , не определяя аналитического вида функции  $y = y(x)$ , нужно найти значения  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , удовлетворяющие условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y_k = y(x_k), \quad k = \overline{1, n}.$$

Рассмотрим два наиболее распространенных при решении практических задач численных методов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений и их систем [25, 52, 104].

### 3.1.1. Метод Эйлера

Метод Эйлера является наиболее простым с точки зрения его практической реализации, но обладает меньшей точностью по сравнению с другими численными методами [25, 104]. Вместе с тем, этот метод рекомендован в работе [7] в качестве приближенного метода моделирования различных режимов полета БЛА.

Пусть дано дифференциальное уравнение с начальным условием (задача Коши):

$$y' = f(x, y), \quad y_0 = y(x_0) \quad (3.1.1)$$

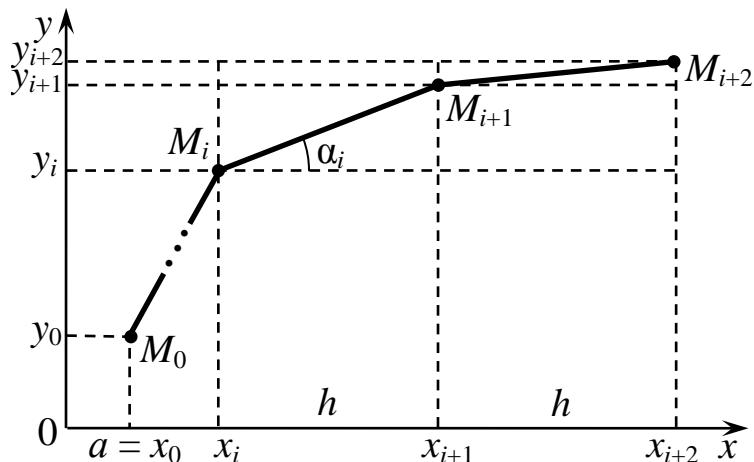
и выполняются условия существования и единственности решения, определенные теоремой Пикара [20].

Требуется найти численное решение  $y(x)$  задачи Коши (3.1.1) на интервале  $[a, b]$  значений независимой переменной  $x$ .

Выбрав шаг  $h$  достаточно малый и равный  $h = (b - a)/n$ , строим систему равноотстоящих точек (сетку)  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , по правилу:

$$x_i = x_0 + i h, \quad i = \overline{0, n}.$$

Искомую интегральную кривую  $y = y(x)$ , проходящую через точку  $M_0(x_0, y_0)$ , приближенно заменим ломаной Эйлера с вершинами в точках  $M_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  (Рис. 3.1).



### Рис. 3.1

Звено ломаной  $M_i M_{i+1}$ , заключенное между точками  $x_i$  и  $x_{i+1}$ , наклонено к оси Ох под углом  $\alpha_i$ . Тангенс этого угла вычисляется по формуле:

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = y'(x_i) = f(x_i, y_i).$$

Сделав соответствующее преобразование этого выражения, получим формулу Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i), \quad i = \overline{0, n}. \quad (3.1.2)$$

Вычисление значений  $y_1, y_2, \dots, y_n$  осуществляется с использованием формулы (3.1.2) следующим образом. По заданным начальным условиям  $x_0 = a$  и  $y_0$ , полагая  $i = 0$  в выражении (3.1.2), вычисляется значение:

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0). \quad (3.1.3)$$

Далее, определяя значение аргумента  $x$  по формуле  $x_1 = x_0 + h$ , используя найденное значение  $y_1$  и полагая в формуле (3.1.2)  $i = 1$ , вычисляем следующее приближенное значение искомой интегральной кривой  $y = y(x)$ :

$$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1). \quad (3.1.4)$$

Поступая аналогичным образом при  $i = \overline{2, n-1}$ , определяем все остальные значения  $y_i$ , в том числе последнее значение  $y_n = y_{n-1} + h f(x_{n-1}, y_{n-1})$ , которое соответствует значению аргумента  $x_n = b$ .

Таким образом, соединяя на координатной плоскости точки  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  отрезками прямых, получаем ломаную линию с вершинами в точках  $M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), \dots, M_n(x_n, y_n)$ , которая приближенно описывает искомую интегральную кривую  $y = y(x)$ .

Запишем разложение  $y_{i+1}$  в ряд Тейлора [8]:

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hy'(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i, y_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i, y_i) + \dots \quad (3.1.5)$$

Учитывая формулы (3.1.2) и (3.1.5), получим:

$$|y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1}| \leq \max_{x_i} \frac{h^2}{2!} y''(x_i, y_i) = \max_{x_i} \frac{h^2}{2!} f'(x_i, y_i) \quad (3.1.6)$$

Соотношение (3.1.6) может быть использовано для выбора шага интегрирования  $h$ . Как правило, шаг  $h$  выбирают таким образом, чтобы  $h^2 < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – заданная точность решения задачи Коши (3.1.1).

Метод Эйлера может быть применен к решению систем дифференциальных уравнений вида (2.1.9).

Пусть задана система двух дифференциальных уравнений относительно функций  $y(x)$  и  $z(x)$  вида:

$$\begin{aligned} y' &= f_1(x, y, z); \\ z' &= f_2(x, y, z), \quad x \in [a, b] \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

с начальными условиями:

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0. \quad (3.1.8)$$

Для решения этой задачи Коши по аналогии с выражением (3.1.2) получаем расчетные формулы вида:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h f_1(x_i, y_i, z_i); \\ z_{i+1} &= z_i + h f_2(x_i, y_i, z_i); \\ x_{i+1} &= x_i + i h; \quad i = (\overline{1, n}), \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

где  $h$  – шаг интегрирования.

В результате применения расчетной схемы (3.1.9) получается приближенное представление интегральных кривых  $y = y(x)$  и  $z = z(x)$  в форме двух ломаных Эйлера вида, показанного на Рис. 3.1, построенных по полученным точкам  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_i, z_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ .

С помощью расчетной схемы (3.1.9) можно получить численное решение задачи Коши для уравнения 2-го порядка:

$$y'' = F(x, y, y'); \quad y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y'_0.$$

Для этого вводится замена:

$$y' = z$$

и рассматриваемое уравнение представляется в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} y' &= z; \\ z' &= F(x, y, z). \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Расчетная схема (3.1.9) для интегрирования этой системы имеет вид:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h z_i; \\ z_{i+1} &= z_i + h F(x_i, y_i, z_i); \\ x_{i+1} &= x_i + i h, \quad i = (\overline{0, n}). \end{aligned}$$

Расчетная схема метода Эйлера для решения задачи Коши (2.1.11), широко применяемая при моделировании движения ЛА на интервале времени  $[t_0, t_k]$ , имеет следующий вид:

Здесь  $h$  – шаг интегрирования, определяемый как:

$$h = (t_k - t_0)/m,$$

где  $m$  – число узлов сетки моментов времени  $t_0, t_1, \dots, t_j, \dots, t_m = t_k$ , в которых вычисляются значения интегральных кривых функций  $z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ .

Достоинством метода Эйлера является его простота и высокая скорость получения решения. Недостатками метода Эйлера являются малая точность и систематическое накопление ошибок, так как при вычислении значений на каждом следующем шаге исходные данные не являются точными и содержат погрешности, зависящие от неточности предшествующих вычислений. Эти недостатки частично устраняются в различных модификациях метода, предложенных в работах [25, 52].

### 3.1.2. Метод Рунге-Кутта

Данный метод является одним из наиболее распространенных численных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений [52]. По сравнению с методом Эйлера метод Рунге-Кутта имеет более высокую точность, но низкую скорость получения решения, так как относится в отличие от метода Эйлера к классу многошаговых методов [25].

Пусть требуется получить численное решение задачи Коши (3.1.1).

Выберем шаг  $h$  и введем следующие обозначения:

$$x_i = x_0 + ih, \quad y_i = y(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Рассмотрим четыре числа, которые будем вычислять по следующим формулам:

$$\begin{aligned} k_{1i} &= h f(x_i, y_i); \\ k_{2i} &= h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_{1i}}{2}\right); \\ k_{3i} &= h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_{2i}}{2}\right); \\ k_{4i} &= h f(x_i + h, y_i + k_{3i}). \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

По методу Рунге-Кутта значения  $y_i$  искомой функции  $y(x)$  при  $x = x_i$  определяются по формуле:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i}). \tag{3.1.13}$$

Погрешность метода Рунге-Кутта, заданного расчетной схемой (3.1.13), на каждом шаге составляет величину порядка  $h^5$  [25].

Формулу (3.1.13) еще называют формулой Рунге-Кутта четвертого порядка точности.

Помимо этой формулы существуют еще другие формулы типа Рунге-Кутта с иными порядками точности. В частности формула  $y_{i+1} = y_i + k_{2i}$  является формулой Рунге-Кутта второго

порядка точности. Эта формула на каждом шаге дает погрешность порядка  $h^3$ .

Для определения правильности выбора шага  $h$  на практике обычно на каждом этапе вычислений применяют двойной пересчет. Исходя из текущего верного значения  $y(x_i)$ , вычисляют значение  $y_{i+1}$  двумя способами: вначале с шагом  $h$ , а затем с шагом  $2h$ . Если расхождение полученных результатов не превышает допустимой погрешности, то шаг  $h$  для данного этапа выбран правильно, и полученное с его помощью значение можно принять за искомую величину  $y_{i+1}$ . В противном случае шаг уменьшается в два раза. Эту вычислительную схему легко запрограммировать на ПЭВМ.

Метод Рунге-Кутта может быть использован и при решении систем дифференциальных уравнений. Рассмотрим задачу Коши для системы двух дифференциальных уравнений вида (3.1.7), (3.1.8).

Расчетная схема метода Рунге-Кутта для решения системы (3.1.7) примет вид [25]:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i}); \\ z_{i+1} &= z_i + \frac{1}{6}(m_{1i} + 2m_{2i} + 2m_{3i} + m_{4i}), \\ x_i &= x_0 + i h, \quad i = (\overline{0, n}), \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

где

$$\begin{aligned} k_{1i} &= hf_1(x_i, y_i, z_i); \\ m_{1i} &= hf_2(x_i, y_i, z_i); \\ k_{2i} &= hf_1(x_i + 0,5h, y_i + 0,5k_{1i}, z_i + 0,5m_{1i}); \\ m_{2i} &= hf_2(x_i + 0,5h, y_i + 0,5k_{1i}, z_i + 0,5m_{1i}); \\ k_{3i} &= hf_1(x_i + 0,5h, y_i + 0,5k_{2i}, z_i + 0,5m_{2i}); \\ m_{3i} &= hf_2(x_i + 0,5h, y_i + 0,5k_{2i}, z_i + 0,5m_{2i}); \\ k_{4i} &= hf_1(x_i + h, y_i + k_{3i}, z_i + m_{3i}); \\ m_{4i} &= hf_2(x_i + h, y_i + k_{3i}, z_i + m_{3i}). \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Данная схема легко преобразуется в расчетную схему решения системы дифференциальных уравнений вида (3.1.10), используемую для численного интегрирования уравнений 2-го порядка.

Аналогично формулам (3.1.14) и (3.1.15) можно записать расчетные выражения для решения систем уравнений вида (2.1.9) и (2.1.11). Расчетные схемы применения метода Рунге-Кутта для решения этих систем приведены в работах [25, 52].

Метод Рунге-Кутта обладает значительной точностью и, несмотря на свою трудоемкость, широко используется при численном решении дифференциальных уравнений и их систем. Важным преимуществом этого метода является возможность применения переменного шага, что позволяет учитывать локальные особенности искомых функций.

В работе [52] приведены другие численные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений.

Численные методы решения краевых задач для уравнений 2-го и более высоких порядков приведены в Разд. 3.6.

### **3.2. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений**

Как будет показано в последующих главах работы, при формировании управлений БЛА возникают задачи решения разнообразных систем линейных алгебраических уравнений, которые в общем виде записываются как:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2; \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Вводя в рассмотрение матрицу и вектор-столбцы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

систему (3.2.1) можно записать в виде матричного уравнения:

$$Ax = b. \quad (3.2.2)$$

Для решения систем линейных алгебраических уравнений существуют точные методы: метод Гаусса; метод обратной матрицы (матричный метод); метод, использующий формулы Крамера [26]. Например, решение системы уравнений (3.2.2) методом обратной матрицы имеет вид:

$$x = A^{-1}b,$$

где  $A^{-1}$  – матрица, обратная матрице коэффициентов  $A$  [17]. Однако при большом числе неизвестных применение точных методов решения затруднено. В этом случае для нахождения корней системы (3.2.1) целесообразнее пользоваться приближенными (численными) методами [26], основные из которых будут рассмотрены в данном разделе.

### 3.2.1. Метод простых итераций

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений вида (3.2.1). Предположим, что диагональные элементы матрицы  $A$  не равны нулю, т.е.  $a_{ii} \neq 0$ ,  $i = (\overline{1, n})$ . В случае равенства нулю одного или нескольких из них с помощью перестановки уравнений или других эквивалентных преобразований можно добиться, чтобы они были отличны от нуля. Разделив  $i$ -е уравнение системы на  $a_{ii}$ , получим:

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n; \\ x_2 &= \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n; \\ &\dots \\ x_n &= \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn-1}x_{n-1}, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

где коэффициенты  $\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$ ,  $\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$  при  $i \neq j$ ,  $\alpha_{ii} = 0$ .

Введем обозначения:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда система (3.2.3), записанная в векторно-матричной форме, примет вид:

$$x = \beta + \alpha x. \quad (3.2.4)$$

Систему (3.2.4) будем решать методом последовательных приближений. Выбираем начальное приближение  $x^{(0)} = \beta$  и вычисляем следующие приближения по формулам вида:

$$x^{(1)} = \beta + \alpha x^{(0)}, \quad x^{(2)} = \beta + \alpha x^{(1)}, \dots, \quad x^{(k+1)} = \beta + \alpha x^{(k)}, \dots$$

Расчетная схема этого метода, записанная в координатной форме, имеет вид:

$$x_j^{(k+1)} = \beta_j + \sum_{r=1}^n \alpha_{jr} x_r^{(k)}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.5)$$

Если последовательность значений векторов  $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots$  является сходящейся, то есть у нее существует предел  $\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$ , то этот предел  $\xi$  является решением системы (3.2.4). Действительно, имеем, что

$$\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\beta + \alpha x^{(k)}) = \beta + \alpha \xi. \quad (3.2.6)$$

В связи с тем, что вектор  $\xi$  является решением системы (3.2.4), которая получена из системы (3.2.1), то  $\xi$  будет являться решением и этой системы.

Требования (3.2.6) сходимости итерационного процесса нахождения значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  накладывает жесткие условия на коэффициенты системы (3.2.1). Однако, если  $\det A \neq 0$ , то с

помощью элементарных преобразований системы (3.2.1) ее можно заменить эквивалентной системой (3.2.3), такой, что условия сходимости будут выполнены.

В работе [104] приводится следующее условие сходимости итерационного процесса (3.2.5):

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{r=1}^n |\alpha_{jr}| < 1.$$

Итерационный процесс заканчивается, если для двух приближений в расчетной схеме (3.2.5) выполнено условие:

$$\Delta(k) = \sum_{j=1}^n |x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}| \leq \varepsilon, \quad (3.2.7)$$

где  $\Delta(k)$  – точность вычисления корней на  $k$ -м шаге;  $\varepsilon$  – заданная точность решения системы (3.2.1).

Пусть это условие выполнилось на шаге  $N = k + 1$ . Тогда в качестве корней системы (3.2.1) принимаются значения  $x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, \dots, x_n^{(N)}$ .

### 3.2.2. Метод Зейделя

Данный метод представляет собой некоторую модификацию метода простых итераций. Основная его идея состоит в том, что при вычислении  $(k + 1)$ -го приближения неизвестной  $x_i$  учитываются уже вычисленные ранее  $(k + 1)$ -е приближения неизвестных  $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}$ . Иначе говоря, найденное  $(k + 1)$ -е приближение сразу же используется для получения  $(k + 1)$ -го приближения последующих координат (Рис. 3.2).

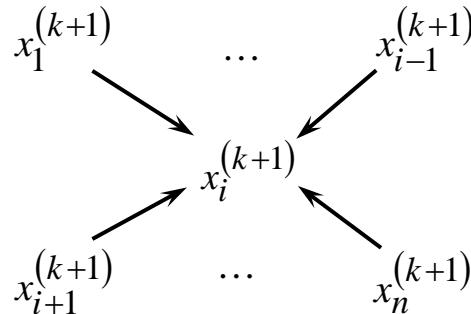


Рис. 3.2

Предположим, что  $k$ -е приближения  $x_i^{(k)}$  корней системы (3.2.3) известны. Тогда  $(k+1)$ -е приближения корней будут находиться по следующим итерационным формулам метода Зейделя:

Расчетная схема (3.2.8) этого метода в общей форме имеет вид:

$$x_j^{(k+1)} = \beta_j + \sum_{r=1}^{j-1} \alpha_{jr} x_r^{(k+1)} + \sum_{r=i}^n \alpha_{jr} x_r^{(k)}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.9)$$

Достаточные условия сходимости метода Зейделя определяются выполнением для всех  $i, j = (\overline{1, n})$  и параметра  $q < 1$  следующего неравенства [104]:

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| \leq q |a_{ii}|, \quad (3.2.10)$$

где  $a_{ij}$  – элементы матрицы  $A$ .

Условие завершения итерационного процесса (3.2.9) описывается неравенством (3.2.7). Таким же образом определяются искомые значения корней системы уравнений (3.2.1).

### Пример 3.1

Построить расчетную схему метода простых итераций и метода Зейделя для численного решения следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} 8x - 5y + z &= 1; \\ x + 6y - 2z &= 7; \\ -x - y + 4z &= 9. \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Заметим, что эта система имеет точное решение  $x = 1; y = 2; z = 3$ .

Из матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

видно, что модули диагональных коэффициентов  $a_{ii}$  в каждом уравнении отличны от нуля и больше суммы модулей всех ее остальных коэффициентов. Разделим каждое уравнение системы (3.2.11) на соответствующий диагональный коэффициент, сформируем столбец  $(x, y, z)$  в левой части и перенесем остальные слагаемые в правую часть. Проведя эти действия, получим расчетную схему вида (3.2.5) метода простых итераций для решения системы (3.2.11):

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \frac{1}{8} + \frac{5}{8}y^{(k)} - \frac{1}{8}z^{(k)}; \\ y^{(k+1)} &= \frac{7}{6} - \frac{1}{6}x^{(k)} + \frac{1}{3}z^{(k)}; \\ z^{(k+1)} &= \frac{9}{4} + \frac{1}{4}x^{(k)} + \frac{1}{4}y^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Начальное приближение в этой итерационной схеме обычно выбирают равным столбцу свободных членов преобразованной системы (3.2.12), то есть  $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) = \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{6}, \frac{9}{4}\right)$ .

В связи с тем, что

$$\max_{1 \leq j \leq 3} \sum_{r=1}^2 |\alpha_{jr}| = \max \left\{ \left( \frac{5}{8} + \frac{1}{8} \right), \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right), \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \right\} = \frac{3}{4} < 1,$$

приведенное в Разд. 3.2.1 условие сходимости итерационного

процесса (3.2.12) выполняется.

Расчетная схема метода Зейделя (3.2.9) для решения системы (3.2.11) записывается как:

$$\begin{aligned}x^{(k+1)} &= \frac{1}{8} + \frac{5}{8}y^{(k)} - \frac{1}{8}z^{(k)}; \\y^{(k+1)} &= \frac{7}{6} - \frac{1}{6}x^{(k+1)} + \frac{1}{3}z^{(k)}; \\z^{(k+1)} &= \frac{9}{4} + \frac{1}{4}x^{(k+1)} + \frac{1}{4}y^{(k+1)}, \quad k = 0,1,2,\dots.\end{aligned}\tag{3.2.13}$$

Здесь, как и выше, начальное приближение будет иметь вид:

$$\left(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}\right) = \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{6}, \frac{9}{4}\right) \cong (0,125; \quad 1,667; \quad 2,250).$$

Для проверки сходимости метода Зейделя при решении системы (3.2.11) запишем неравенства, входящие в условия (3.2.10). С учетом состава элементов матрицы  $A$  эти неравенства примут вид:

$$5 + 1 \leq q \cdot 8;$$

$$1 + 2 \leq q \cdot 6;$$

$$1 + 1 \leq q \cdot 4.$$

Эти неравенства выполняются при  $q = 0,9 < 1$ . Последнее означает, что итерационный процесс (3.2.13) будет сходиться к точному решению системы (3.2.11).

Результаты вычисления с точностью  $\varepsilon = 0,001$  по расчетной схеме (3.2.12) приведены в табл. 3.1.

Из таблицы видно, что условия (3.2.7) выполняются на 7-м шаге. Приближенные значения корней равны  $x = 0,999$ ;  $y = 2,000$ ;  $z = 2,999$ .

Таблица 3.1.

$k$	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$z^{(k)}$	$\Delta(k)$
0	1,125	1,667	2,250	—
1	0,573	1,896	2,573	1,5000
2	0,988	1,929	2,867	0,7426
3	0,972	1,958	2,979	0,1248
4	0,976	1,998	2,982	0,0473
5	1,001	1,998	2,993	0,0360
6	1,000	1,998	3,000	0,0047
7	0,999	2,000	2,999	0,0008

### 3.3. Методы решения нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений

Пусть дано нелинейное уравнение, которое в общем виде записывается как:

$$f(x) = 0, \quad (3.3.1)$$

где  $f(x)$  – нелинейная алгебраическая или трансцендентная функция, либо функция, включающая в себя различные комбинации таких функций.

Число  $\xi$  называется решением уравнения (3.3.1), если при его подстановке в левую часть (3.3.1) получается тождество.

Предполагается, что функция  $f(x)$  определена и непрерывна на некотором конечном или бесконечном интервале  $(a, b)$ .

Будем считать, что уравнение (3.3.1) имеет только изолированные корни, то есть для каждого  $k$ -го корня уравнения (3.3.1) существует окрестность:

$$\alpha_k < x_k < \beta_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

которая не содержит других корней этого уравнения.

Процесс нахождения изолированных корней уравнения (3.3.1) можно разделить на два этапа:

1) отделение корней, то есть нахождение интервалов  $(\alpha_k; \beta_k)$ , в которых находится один и только один корень;

2) уточнение корней, которое состоит в определении приближенных значений корней с определенной степенью точности.

**Метод простых итераций.** Пусть дано уравнение (3.3.1) и известно, что  $f(x)$  имеет на отрезке  $[a, b]$  один корень.

Уравнение (3.3.1) заменим эквивалентным уравнением вида:

$$x = \varphi(x). \quad (3.3.2)$$

Выберем некоторое начальное приближение  $x_0 \in [a, b]$  и с помощью итерационной формулы:

$$x_{i+1} = \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3.3)$$

будем вычислять значения  $x_1, x_2, \dots$

Метод итераций, заданный расчетной схемой (3.3.3), при условии, что

$$|\varphi'(x)| < 1, \quad (3.3.4)$$

сходится к единственному решению уравнения (3.3.2), следовательно, и (3.3.1) независимо от выбора начального приближения  $x_0 \in [a, b]$ .

При невозможности непосредственного получения из уравнения (3.3.1) выражения вида (3.3.2) применяется следующий прием.

Умножим обе части выражения (3.3.1) на параметр  $C$  и прибавим к ним переменную  $x$ . В результате получим равенство вида:

$$x + C f(x) = x. \quad (3.3.5)$$

Обозначив левую часть полученного соотношения через  $\varphi(x)$ , получим формулу (3.3.2).

Сформируем, исходя из формулы (3.3.5), ограничение, налагаемое на значение постоянной  $C$ , такое, что получаемый итерационный процесс будет сходящимся.

Как было указано выше, сходимость итерационного процесса (3.3.3) будет иметь место при выполнении условия (3.3.4). Кроме того, заметим, что  $\varphi(x) = x + C f(x)$ , поэтому имеем:

$$|1 + C f'(x)| < 1.$$

Проводя несложные преобразования, получаем следующие условия для выбора значения параметра  $C$ :

$$C \in \left( -\frac{2}{f'(x)}; 0 \right) \text{ при } f'(x) > 0, \quad x \in [a, b];$$

$$C \in \left( 0; -\frac{2}{f'(x)} \right) \text{ при } f'(x) < 0, \quad x \in [a, b].$$

При выборе значения  $C$  в этих выражениях полагают  $x = x_0$ .

После выбора конкретного значения  $C_0$  расчетная схема рассматриваемого метода будет иметь следующий вид:

$$x_{i+1} = x_i + C_0 f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Условия окончания итерационного процесса, заданного формулой (3.3.3) на некотором шаге  $N = i + 1$  подразумевают одновременное выполнение следующих неравенств:

$$|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon; \quad |f(x_{i+1})| \leq \delta,$$

где  $\varepsilon$  и  $\delta$  – заданные значения параметров точности решения уравнения (3.3.1).

При этом в качестве корня этого уравнения принимается значение  $x_N$ .

К достоинствам данного метода можно отнести то, что он является самоисправляющимся, так как сходится независимо от выбора начального приближения. Тот или иной выбор начального приближения может оказаться лишь на числе итераций  $N$ , но не на значении искомого корня решаемого уравнения.

**Метод Ньютона (метод касательных).** Пусть необходимо решить уравнение (3.3.1). Обозначим через  $\xi \in [a, b]$  корень этого уравнения. Будем считать, что на некотором  $N$ -м шаге вычислительного процесса выполняется условие:

$$|\xi - x_N| < \varepsilon.$$

где  $\varepsilon$  – заданная точность вычисления корня.

Пусть  $x_k$  –  $k$ -е приближение корня, то есть:

$$\xi = x_k + \alpha_k, \quad (3.3.6)$$

где  $\alpha_k = \xi - x_k$  – ошибка вычислений  $k$ -го приближения.

Подставляя (3.3.6) в (3.3.1), получим:

$$0 = f(\xi) = f(x_k + \alpha_k) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot \alpha_k,$$

Разрешая это уравнение относительно  $\alpha_k$ , имеем:

$$\alpha_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (3.3.7)$$

Подставляя (3.3.7) в (3.3.6), получаем расчетную схему метода Ньютона:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3.8)$$

По формуле (3.3.8) при задании начального приближения  $x_0$  получаем последовательность приближений:  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ . Если эта последовательность сходится, то, как и выше, некоторое  $N$ -е приближение считается корнем уравнения (3.3.1).

Метод Ньютона не является самоисправляющимся, то есть он сходится не при любом выборе начального приближения. Обычно в качестве значения  $x_0$  берется такой конец отрезка  $[a, b]$ , для которого выполняется условие:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0.$$

К достоинствам данного метода можно отнести его высокую скорость сходимости, близкую к квадратичной. Кроме того, расчётная формула (3.3.8) метода достаточно легко реализуется на ПЭВМ.

Недостатки метода Ньютона состоят в том, что итерационный процесс сходится не при любом выборе начального приближения, а также в том, что в процессе вычислений нужно следить, чтобы на отрезке  $[a, b]$  первая и вторая производные функции  $f(x)$  в точках  $x_k$  сохраняли свой знак.

Кроме того, можно заметить, что метод Ньютона является частным случаем метода простых итераций. Действительно, обозначив правую часть формулы (3.3.8) через  $\varphi(x_k)$ , получим расчётную формулу метода итераций (3.3.3).

**Модифицированный метод Ньютона.** Если на отрезке  $[a, b]$  функция  $f(x)$  в уравнении (3.3.1) такова, что  $f'(x) \approx f'(x_0)$ , то в формуле (3.3.8) целесообразно принять  $f'(x_k) \approx f'(x_0)$ . В этом случае получаем выражение вида:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3.9)$$

Формула (3.3.9) является расчетной схемой модифицированного метода Ньютона.

Наглядно различие методов Ньютона и модифицированного метода Ньютона представлено на Рис. 3.3.

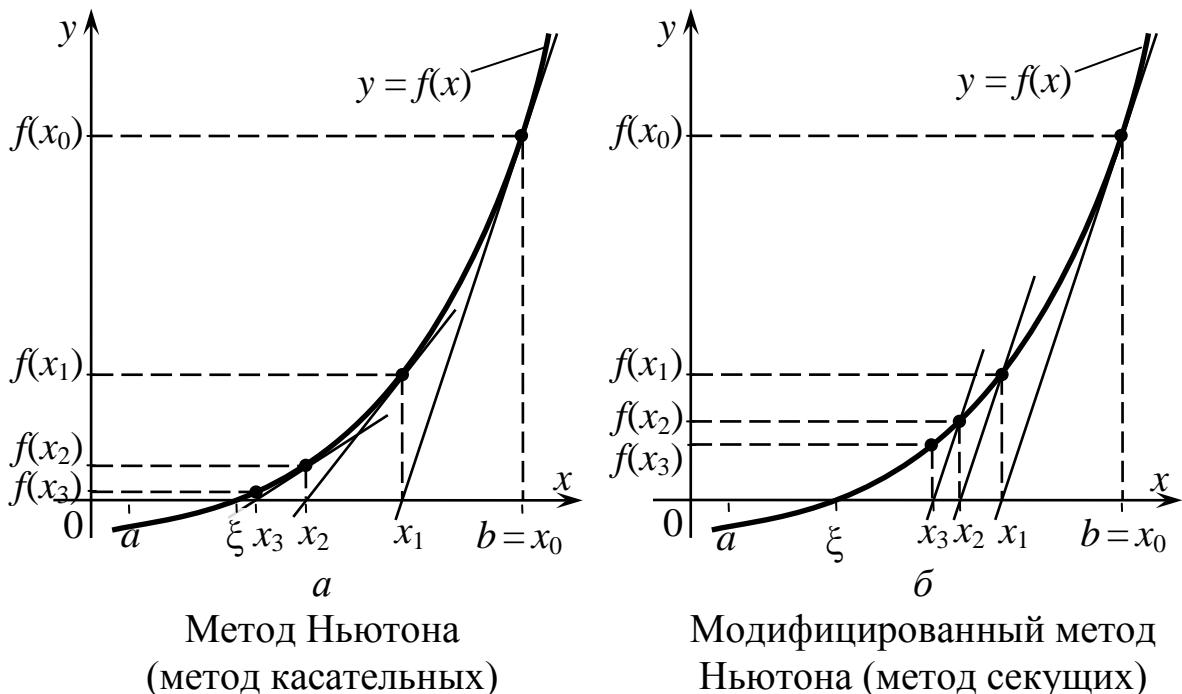


Рис. 3.3

Примеры применения рассмотренных выше методов, а также другие методы решения уравнений вида (3.3.1) приведены в работе [26].

### 3.4. Методы решения систем алгебраических и трансцендентных нелинейных уравнений

Классическими системами нелинейных уравнений называются выражения вида [26]:

где хотя бы одна из функций  $f_i(x_1, \dots, x_n)$ , является нелинейной функцией переменных  $x_1, \dots, x_n$ ,  $i = (\overline{1, n})$ .

Такие системы уравнений используются при формировании управлений БЛА в установившихся режимах их полетов (см. Разд. 5.4).

Решение систем нелинейных уравнений вида (3.4.1) является в общем случае задачей более сложной, чем решение систем линейных алгебраических уравнений и одного нелинейного уравнения вида (3.3.1) [26]. Следует отметить, что в настоящее время отсутствуют методы, которые гарантировали бы определение всех решений любой системы нелинейных уравнений.

Как и для отдельных уравнений, наибольшую проблему представляет задача отделения решений (корней). Для системы нелинейных уравнений с  $n$  неизвестными необходимо, во-первых, выяснить, сколько у нее может быть решений, а во-вторых, выделить области  $n$ -мерного пространства, в каждой из которых есть одно и только одно решение. Лишь после этого можно говорить о нахождении решений с заданной точностью.

Для отделения корней системы (3.4.1) общих методов не существует. В прикладных задачах, исследователь обычно имеет представление, где примерно находятся корни системы.

Методы, которым посвящен данный раздел, исходят из того, что задача отделения корней решена и имеется достаточно малая область  $n$ -мерного пространства, содержащая корень, подлежащий определению. Пусть функции  $f_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = (\overline{1, n})$  определены в некоторых областях  $n$ -мерного про-

странства  $\Omega_i$ ,  $i = (\overline{1, n})$  [8]. Тогда область  $\Omega = \bigcap_{i=1}^n \Omega_i$ , которая представляет собой пересечение отмеченных выше областей, является областью, где может находиться решение системы (3.4.1).

Наиболее распространенными на практике методами нахождения единственного решения систем нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений являются метод простых итераций, метод Ньютона и модифицированный метод Ньютона [26].

**Метод простых итераций.** Для применения этого метода от исходной системы (3.4.1) путем соответствующих преобразований необходимо перейти к эквивалентной системе вида:

Итерационный процесс поиска решения, определяемый формулами:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \Phi_1(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}); \\ x_2^{(k+1)} &= \Phi_2(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}); \\ &\dots \\ x_n^{(k+1)} &= \Phi_n(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

начинают, задав начальное приближение  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  в некоторой области  $\bar{\Omega} \subset \Omega$ .

Достаточным условием сходимости итерационного процесса (3.4.3) является выполнение условий [26]:

$$\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \right| < 1, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \right| < 1, \quad j = (\overline{1, n}).$$

Распишем первое неравенство:

$$\left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \right| + \dots + \left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \right| < 1 \quad \text{при } i = 1,$$

$$\left| \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} \right| + \dots + \left| \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \right| < 1 \quad \text{при } i = n.$$

Второе условие в развернутой форме имеет вид:

$$\left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} \right| + \dots + \left| \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} \right| < 1 \quad \text{при} \quad j = 1,$$

$$\left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \right| + \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n} \right| + \dots + \left| \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \right| < 1 \quad \text{при } j = n.$$

Рассмотрим один из способов приведения системы (3.4.1) к виду (3.4.2), допускающему сходящийся итерационный процесс.

Пусть задана система уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0; \\ f_2(x, y) &= 0. \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Требуется привести ее к виду:

$$\begin{aligned} x &= \Phi_1(x, y), \\ y &= \Phi_2(x, y). \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Умножим первое уравнение системы (3.4.4) на неизвестную постоянную  $\alpha$ , второе – на  $\beta$ , затем сложим их и прибавим к обеим частям уравнения величину  $x$ . Получим первое уравнение преобразованной системы (3.4.5) в виде:

$$x + \alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y) = x,$$

$$\text{где } \Phi_1(x, y) = x + \alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y).$$

Далее, умножим первое уравнение системы (3.4.4) на неизвестную постоянную  $u$ , второе – на  $\delta$ , затем сложим их и прибавим к третьему уравнению.

вим к обеим частям уравнения величину  $y$ . Тогда второе уравнение преобразованной системы (3.4.5) будет иметь вид:

$$y + \gamma f_1(x, y) + \delta f_2(x, y) = y,$$

где

$$\Phi_2(x, y) = y + \gamma f_1(x, y) + \delta f_2(x, y).$$

Неизвестные постоянные  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  определим из приведенных выше достаточных условий сходимости:

$$\left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right| < 1 \quad \text{и} \quad \left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right| < 1.$$

Запишем эти условия более подробно:

$$\begin{aligned} & \left| 1 + \alpha \frac{\partial f_1}{\partial x} + \beta \frac{\partial f_2}{\partial x} \right| + \left| \gamma \frac{\partial f_1}{\partial x} + \delta \frac{\partial f_2}{\partial x} \right| < 1; \\ & \left| \alpha \frac{\partial f_1}{\partial y} + \beta \frac{\partial f_2}{\partial y} \right| + \left| 1 + \gamma \frac{\partial f_1}{\partial y} + \delta \frac{\partial f_2}{\partial y} \right| < 1. \end{aligned}$$

Полагая равными нулю выражения под знаком модуля, получим систему, состоящую из четырех линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ :

$$\begin{aligned} & 1 + \alpha \frac{\partial f_1}{\partial x} + \beta \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0; \\ & \gamma \frac{\partial f_1}{\partial x} + \delta \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0; \\ & \alpha \frac{\partial f_1}{\partial y} + \beta \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0; \\ & 1 + \gamma \frac{\partial f_1}{\partial y} + \delta \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

При таком выборе параметров  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  условия сходимости будут выполнены, если частные производные функций  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, y)$  будут изменяться не очень быстро в окрестности точки  $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \bar{\Omega} \subset \Omega$ . Тогда, чтобы решить систему (3.4.4), нужно задать начальное приближение  $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \bar{\Omega} \subset \Omega$  и вычис-

лить значения производных  $\frac{\partial f_i}{\partial x}\Big|_{(x^{(0)}, y^{(0)})}$  и  $\frac{\partial f_i}{\partial y}\Big|_{(x^{(0)}, y^{(0)})}$ ,

$i = (\overline{1, 2})$  в этой точке. В противном случае, вычисление  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  осуществляется на каждом  $k$ -м шаге итераций с применением численных методов, изложенных в Разд. 3.2, с использованием производных:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}\Big|_{(x^{(k)}, y^{(k)})}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial y}\Big|_{(x^{(k)}, y^{(k)})}, \quad i = (\overline{1, 2}).$$

Метод простых итераций является самоисправляющимся, универсальным и простым для реализации на ПЭВМ. Если система имеет большой порядок, то применение данного метода, имеющего медленную скорость сходимости, не рекомендуется. В этом случае используют метод Ньютона, который имеет более высокую скорость сходимости.

### Пример 3.2

Построить расчетную схему метода простых итераций для решения следующей системы нелинейных уравнений 2-го порядка:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x + y - 5 = 0; \\ f_2(x, y) &= xy - 6 = 0 \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

при начальном приближении:

$$(x^{(0)}, y^{(0)}) = (2; 1). \tag{3.4.8}$$

Заметим, что точными решениями системы (3.4.7) являются значения  $x = 2, y = 3$  и  $x = 3, y = 2$ .

Для построения рабочих формул метода простых итераций необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений (3.4.6). Для ее решения вычислим частные производные  $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y}$  при начальном приближении (3.4.8):

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = y|_{(2;1)} = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = x|_{(2;1)} = 2.$$

Тогда система (3.4.6) примет следующий вид:

$$1 + \alpha + \beta = 0;$$

$$\gamma + \delta = 0;$$

$$\alpha + 2\beta = 0;$$

$$1 + \gamma + 2\delta = 0.$$

Решением этой системы являются значения  $\alpha = -2$ ,  $\beta = \gamma = 1$ ,  $\delta = -1$ . Тогда рабочие формулы метода простых итераций для решения системы нелинейных уравнений (3.4.7) примут вид:

$$x = x - 2(x + y - 5) + (xy - 6);$$

$$y = y - (x + y - 5) - (xy - 6).$$

Для преобразования в расчетную схему метода вида (3.4.3) эти формулы необходимо переписать в виде:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - 2(x^{(k)} + y^{(k)} - 5) + (x^{(k)}y^{(k)} - 6);$$

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - (x^{(k)} + y^{(k)} - 5) - (x^{(k)}y^{(k)} - 6);$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

**Метод Ньютона.** Пусть требуется решить систему нелинейных уравнений (3.4.1) с действительными функциями  $f_1, f_2, \dots, f_n$ .

Совокупность их аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  будем рассматри-

вать как  $n$ -мерный вектор  $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , а совокупность функций  $f_1, f_2, \dots, f_n$  – как вектор-функцию  $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ . Тогда система

(3.4.1) в векторной форме запишется как

$$F(\bar{x}) = 0. \quad (3.4.9)$$

Предположим, что найдено  $k$ -е приближение  $\bar{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$

одного из изолированных корней  $\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$  векторного уравнения (3.4.9). Тогда точный корень этого уравнения можно представить в виде:

$$\bar{\xi} = \bar{x}^{(k)} + \bar{\alpha}^{(k)}, \quad (3.4.10)$$

где  $\bar{\alpha}^{(k)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(k)} \\ \alpha_2^{(k)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(k)} \end{pmatrix}$  – погрешность определения корня.

Подставляя выражение (3.4.10) в формулу (3.4.9), получим:

$$F(\bar{x}^{(k)} + \bar{\alpha}^{(k)}) = 0. \quad (3.4.11)$$

Предположим, что функция  $F(\bar{x})$  непрерывно дифференцируема в некоторой области, содержащей  $\bar{\xi}$  и  $\bar{x}^{(k)}$ . Разложим левую часть уравнения (3.4.11) в ряд Тейлора по степеням  $\bar{\alpha}^{(k)}$ , ограничиваясь линейными членами:

$$F(\bar{x}^{(k)} + \bar{\alpha}^{(k)}) = F(\bar{x}^{(k)}) + F'(\bar{x}^{(k)}) \cdot \bar{\alpha}^{(k)} = 0, \quad (3.4.12)$$

где  $F'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = J(\bar{x})$  – матрица Якоби (яко-

бийан) системы функций  $f_1, f_2, \dots, f_n$  относительно переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  [8].

Система (3.4.12) является системой линейных уравнений относительно погрешностей  $\bar{\alpha}^{(k)}$ ,  $i = (\overline{1, n})$ , с матрицей  $J(\bar{x})$ , поэтому формулу (3.4.12) можно записать в виде:

$$F(\bar{x}^{(k)}) + J(\bar{x}^{(k)}) \cdot \bar{\alpha}^{(k)} = 0. \quad (3.4.13)$$

Если матрица  $J(\bar{x}^{(k)})$  невырожденная, то существует обратная матрица  $J^{-1}(\bar{x}^{(k)})$  и тогда, умножив обе части соотношения (3.4.12) на  $J^{-1}(\bar{x}^{(k)})$  слева, получим методом обратной матрицы следующее решение этой системы линейных уравнений:

$$\bar{\alpha}^{(k)} = -J^{-1}(\bar{x}^{(k)}) \cdot F(\bar{x}^{(k)}).$$

Следовательно:

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - J^{-1}(\bar{x}^{(k)}) \cdot F(\bar{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4.14)$$

Соотношение (3.4.14) является векторной записью расчетной схемы метода Ньютона для решения систем нелинейных уравнений вида (3.4.1).

Если начальное приближение  $\bar{x}^{(0)}$  выбрано достаточно близко к решению  $\bar{\xi}$  системы (3.4.9), то итерационная последовательность векторов  $\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(k)}, \dots$  сходится к этому решению, и сходимость является квадратичной.

Отметим недостатки метода Ньютона:

- 1) необходимость нахождения обратной матрицы  $J^{-1}(\bar{x}^{(k)})$  на каждом шаге итерационного процесса (3.4.14),
- 2) возможность выхода приближения  $\bar{x}^{(k+1)}$  за пределы области  $\bar{\Omega}$  и связанная с этим расходимость итерационного процесса.

**Модифицированный метод Ньютона.** Данный метод ликвидирует первый недостаток метода Ньютона. Если матрица  $J^{-1}(\bar{x}^{(k)})$  непрерывна в окрестности искомого решения  $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , и начальное приближение  $\bar{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  достаточно близко к  $\bar{\xi}$ , то приближенно можно считать  $J^{-1}(\bar{x}^{(k)}) \approx J^{-1}(\bar{x}^{(0)})$ . Тогда формула (3.4.14) принимает вид:

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - J^{-1}(\bar{x}^{(0)}) \cdot F(\bar{x}^{(k)}).$$

Эта формула является расчетной схемой модифицированного метода Ньютона.

Достоинством данного метода является то, что обратная матрица вычисляется только один раз. Но второй недостаток модифицированный метод Ньютона не ликвидирует.

### Пример 3.3

Построить расчетную схему метода Ньютона для численного решения системы нелинейных уравнений (3.4.7) при начальном приближении (3.4.8).

Для нахождения обратной матрицы в формуле (3.4.14) необходимо выполнить следующие действия:

1) найти матрицу частных производных:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix};$$

2) вычислить определитель этой матрицы:

$$\det J(x, y) = x - y;$$

3) сформировать обратную матрицу:

$$J^{-1}(x, y) = \frac{1}{\det J(x, y)} \begin{pmatrix} x & -y \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{x - y} \begin{pmatrix} x & -1 \\ -y & 1 \end{pmatrix}.$$

Проведя несложные преобразования с матрицами [17], получим для решения задачи конкретизацию формулы (3.4.14) в следующем виде:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \frac{-x^{(k)}y^{(k)} + 5x^{(k)} - 6}{x^{(k)} - y^{(k)}}; \\ y^{(k+1)} &= \frac{x^{(k)}y^{(k)} - 5y^{(k)} + 6}{x^{(k)} - y^{(k)}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Примеры решения различных систем нелинейных уравнений рассмотренными методами приведены в работе [26].

### 3.5. Методы решения нелинейных параметрических уравнений

Нелинейные алгебраические и трансцендентные параметрические уравнения используются в общем случае при получении решений вида (2.2.7) задач параметрического нелинейного программирования, рассмотренных в Разд. 2.2. Кроме этого, такими уравнениями являются системы (2.3.23), (2.3.43), (2.3.47), (2.3.48), которые используются для нахождения векторов  $u(t)$  управления динамическими объектами методами теории обратных задач управления такими объектами.

Отметим, что в литературе по вычислительной математике отсутствуют специальные методы решения нелинейных параметрических уравнений.

В общем виде система нелинейных параметрических уравнений задается следующими выражениями:

$$F_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad j = (\overline{1, n}), \quad t \in [t_1, t_k]. \quad (3.5.1)$$

Здесь  $t$  – некоторый параметр, при наличии которого искомые корни этой системы будут функциями вида:

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_j(t), \dots, x_n(t), \quad t \in [t_1, t_k].$$

Рассмотрение численных методов решения системы вида (3.5.1) начнем с разработки методов ее решения при  $n = 1$ .

Пусть необходимо решить следующее нелинейное параметрическое уравнение:

$$F(x, t) = 0, \quad t \in [t_1, t_k], \quad (3.5.2)$$

где  $t$  – некоторый скалярный параметр, который может принимать дискретное множество значений  $t_1, t_2, \dots, t_k$  или изменяться непрерывным образом в заданном интервале значений.

В первом случае для решения каждого уравнения:

$$F(x, t_i) = 0, \quad i = (\overline{1, k}), \quad (3.5.3)$$

можно воспользоваться численными методами решения нелинейных уравнений вида (3.3.1), изложенными в Разд. 3.3. Тру-

доемкость их использования будет пропорциональна числу  $k$  заданных значений параметра  $t$ . При непрерывном изменении значения  $t \in [t_1, t_k]$  существующий практический подход к решению уравнения (3.5.2) состоит в сведении ее к первому случаю, но со значительно более «густой» сеткой значений параметра  $t$ . В этом случае трудоемкость решения задачи за счет увеличения используемых значений параметра  $t$  резко возрастает.

Преимущество предлагаемого ниже метода состоит в сокращении числа итераций, необходимых для нахождения решения в каждом текущем узле сетки значений параметра  $t$ , за счет использования решения, полученного в предыдущем узле сетки [109].

Перепишем уравнение (3.5.3) в следующей форме:

$$F_i(x) = 0, \quad i = (\overline{1, k}), \quad (3.5.4)$$

где

$$F_i(x) = F(x, t_i).$$

Предположим, что каждое уравнение  $F_i(x) = 0$  из совокупности (3.5.4) имеет единственное решение  $\xi_i \in [a, b]$  и  $F_i(x) \neq F_j(x)$ , ( $i \neq j$ ) для всех  $x \in [a, b]$ ,  $i, j = (\overline{1, k})$ . Используем результаты теоремы о сходимости метода Ньютона для решения этой задачи: «Если  $F_i(a)F_i(b) < 0$ , а  $F'_i(x)$ ,  $F''_i(x)$  не равны нулю и сохраняют определенные знаки на отрезке  $[a, b]$ , то, исходя из начального приближения  $x_0$ , удовлетворяющего неравенству  $F'_i(x_0)F''_i(x_0) > 0$ , по методу Ньютона, заданного формулой  $x_{n+1}^{(i)} = x_n^{(i)} - \frac{F_i(x_n^{(i)})}{F'_i(x_n^{(i)})}$ , можно вычислить единственный корень  $\xi_i$  уравнения  $F_i(x) = 0$  с любой степенью точности» [26].

В качестве начального приближения  $x_0$  выбирается тот конец отрезка  $[a, b]$ , которому отвечают ординаты  $F_i(x_0)$  того же знака, что и  $F''_i(x_0)$ .

Будем считать известным значение искомого корня  $x^{(i)}$  урав-

нения  $F_i(x) = 0$  при фиксированном значении  $i = (\overline{1, k})$ . Положим  $i = i + 1$  и рассмотрим ситуацию, представленную на Рис. 3.4.

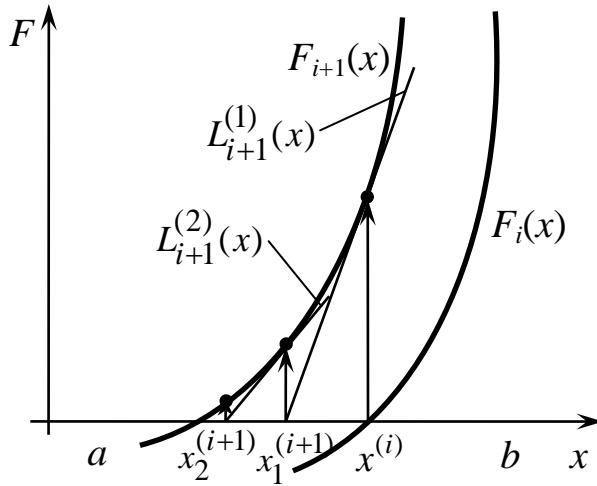


Рис. 3.4

Раскладывая правую часть уравнения:

$$F_{i+1}(x) = 0 \quad (3.5.5)$$

в ряд Тейлора в окрестности точки  $x = x^{(i)}$  [8] с сохранением линейных членов, получаем:

$$F_{i+1}(x) = F_{i+1}\left(x^{(i)}\right) + F'_{i+1}\left(x^{(i)}\right)\left(x - x^{(i)}\right).$$

Приравнивая к нулю правую часть этого выражения, получаем уравнение касательной  $L_{i+1}^{(i)}(x)$  к кривой  $F_{i+1}(x)$  в точке  $x = x^{(i)}$ :

$$F_{i+1}\left(x^{(i)}\right) + F'_{i+1}\left(x^{(i)}\right)\left(x - x^{(i)}\right) = 0.$$

Предполагая, что корень  $x^{(i)}$  является нулевым приближением к искомому корню  $x^{(i+1)}$ , получим первое приближение к нему по формуле:

$$x_1^{(i+1)} = x_0^{(i+1)} - \frac{F_{i+1}\left(x_0^{(i+1)}\right)}{F'_{i+1}\left(x_0^{(i+1)}\right)}, \quad \text{где } x_0^{(i+1)} = x^{(i)}.$$

Если выполняются неравенства:

$$\left|F_{i+1}\left(x_1^{(i+1)}\right)\right| \leq \varepsilon, \quad \left|\xi^{(i+1)} - x_1^{(i+1)}\right| \leq \left|x_1^{(i+1)} - x_0^{(i+1)}\right| \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – требуемая точность решения уравнения (3.5.5), то данное приближение принимается за искомое решение уравнения

$$F_{i+1}(x) = 0.$$

В противном случае в точке  $x = x_1^{(i+1)}$  строится касательная  $L_{i+1}^{(2)}(x)$  к кривой  $F_{i+1}(x)$ , которая описывается уравнением вида:

$$F_{i+1}\left(x_1^{(i+1)}\right) + F'_{i+1}\left(x_1^{(i+1)}\right)\left(x - x_1^{(i+1)}\right) = 0$$

Из этого уравнения получаем формулу для вычисления второго приближения к корню  $x^{(i+1)}$ :

$$x_2^{(i+1)} = x_1^{(i+1)} - \frac{F_{i+1}\left(x_1^{(i+1)}\right)}{F'_{i+1}\left(x_1^{(i+1)}\right)}.$$

Обобщая этот процесс, запишем рекуррентную формулу для вычисления  $j$ -го приближения к искомому корню:

$$x_j^{(i+1)} = x_{j-1}^{(i+1)} - \frac{F_{i+1}\left(x_{j-1}^{(i+1)}\right)}{F'_{i+1}\left(x_{j-1}^{(i+1)}\right)}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.5.6)$$

Начальное условие для нее имеет вид:

$$x_0^{(i+1)} = x^{(i)}.$$

Общие условия завершения на  $j$ -той итерации процесса поиска корня  $x^{(i+1)}$  записываются как:

$$\begin{aligned} \left|F_{i+1}\left(x_j^{(i+1)}\right)\right| &\leq \varepsilon, \quad j = 1, 2, 3, \dots \\ \left|\xi^{(i+1)} - x_j^{(i+1)}\right| &\leq \left|x_j^{(i+1)} - x_{j-1}^{(i+1)}\right| \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

Для случая, когда кривые  $F_i(x)$  могут пересекаться, следует применить рекуррентную процедуру, основанную на комбинированном численном методе, объединяющем метод Ньютона с методом хорд [26].

Аналогично этим выражениям записывается расчётная схема для решения системы уравнений (3.5.1).

Для случая, когда по условиям решаемой задачи параметр  $t$  должен непрерывно изменяться в заданном интервале  $[t_1, t_k]$ , для решения уравнения (3.5.2) предлагается использовать метод, основанный на разложении левой части этого уравнения в

ряд Тейлора [8] с сохранением линейных членов разложения [1]. Проводя это разложение в окрестности точки  $(t_{i-1}, x_{i-1})$ , которая является решением уравнения (3.5.2) при  $t = t_{i-1}$ , имеем:

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{i-1} (x - x_{i-1}) + \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_{i-1} (t - t_{i-1}) = 0. \quad (3.5.8)$$

Отсюда корень уравнения, решаемого при  $t = t_i$ , вычисляется как:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{\left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_{i-1}}{\left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{i-1}} (t_{i+1} - t_i). \quad (3.5.9)$$

Отметим, что для применения формулы (3.5.9) шаг сетки по параметру  $t$  должен быть достаточно малым.

Общая расчётная схема предлагаемого метода решения системы нелинейных параметрических уравнений вида (3.5.1) включает в себя следующие этапы [1]:

1. Строится сетка по параметру  $t$  с достаточно большим числом узлов, значения которых определяются как:

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t, \quad i = \overline{1, k}, \quad \Delta t = \frac{t_k - t_0}{N},$$

где  $N$  – число узлов сетки на отрезке  $[t_0, t_k]$ .

2. Функции  $F_j$  раскладываются в ряд Тейлора в окрестности точки  $(t_{i-1}, x_1^{(i-1)}, x_2^{(i-1)}, \dots, x_n^{(i-1)})$  с сохранением только линейных членов разложения:

$$\begin{aligned} F_j(t_{i-1}, x_1^{(i-1)}, x_2^{(i-1)}, \dots, x_n^{(i-1)}) &+ \sum_{r=1}^n \left( \frac{\partial F_j}{\partial x_r} \right)_{i-1} (x_r^{(i)} - x_r^{(i-1)}) + \\ &+ \left( \frac{\partial F_j}{\partial t} \right)_{i-1} (t_i - t_{i-1}) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

где

$$\left( \frac{\partial F_j}{\partial x_r} \right)_{i-1} = \frac{\partial}{\partial x_r} F_j(t_{i-1}, x_1^{(i-1)}, x_2^{(i-1)}, \dots, x_n^{(i-1)}),$$

$$\left( \frac{\partial F_j}{\partial t} \right)_{i-1} = \frac{\partial}{\partial t} F_j(t_{i-1}, x_1^{(i-1)}, x_2^{(i-1)}, \dots, x_n^{(i-1)}).$$

Заметим, что выражение (3.5.8) является частным случаем соотношения (3.5.10) при  $n = 1$ .

3. Система (3.5.10) записывается в виде:

$$\sum_{r=1}^n \left( \frac{\partial F_j}{\partial x_r} \right)_{i-1} \Delta x_r^{(i)} = - \left( \frac{\partial F_j}{\partial t} \right)_{i-1} \Delta t, \quad j = (\overline{1, n}), \quad (3.5.11)$$

где  $\Delta x_r^{(i)} = x_r^{(i)} - x_r^{(i-1)}$ ,  $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ ,  $r = (\overline{1, n})$ .

4. Используя полученные одним из численных методов, рассмотренных в Разд. 3.2, решения  $\Delta x_r^{(i)}$ ,  $r = (\overline{1, n})$ , системы линейных уравнений (3.5.11) находятся искомые решения  $x_r^{(i)} = x_r(t_i)$ ,  $r = (\overline{1, n})$ , исходной нелинейной системы уравнений (3.5.1) по следующим рабочим формулам:

$$x_r^{(i)} = x_r^{(i-1)} + \Delta x_r^{(i)}, \quad i = (\overline{1, k}), \quad r = (\overline{1, n}). \quad (3.5.12)$$

Условие завершения на  $i$ -той итерации процесса поиска решения  $x_r^{(i)}$  записывается как  $|F_j(x_r^{(i)})| \leq \varepsilon$ ,  $i = (\overline{1, k})$ ,  $r = (\overline{1, n})$ ,  $j = (\overline{1, n})$ .

Преимущество данной процедуры состоит в сокращении числа итераций, необходимых для нахождения решения системы в каждом узле достаточно «густой» сетки значений параметра  $t$ , за счет использования решения, полученного в предыдущем узле сетки.

Для решения нелинейных параметрических уравнений можно использовать метод малого параметра, предложенный в работе [110].

Пусть требуется получить решение  $x = x(t)$ ,  $t \in [t_1, t_k]$  уравнения (3.5.2). Данный метод предполагает замену этого

уравнения сингулярно возмущенным дифференциальным уравнением вида:

$$\mu \frac{dx}{dt} = F(x, t), \quad (3.5.13)$$

где  $0 < \mu \ll 1$  – малый параметр.

Начальное условие при  $t = \tau$  для этого уравнения запишется как:

$$x(\tau, \mu) = x_0. \quad (3.5.14)$$

Применение метода малого параметра при решении уравнения (3.5.2) обосновывается следующим утверждением, полученным на основе результатов работы [110]: «Корень  $x^* = x^*(t)$ , полученный путем решения задачи Коши (3.5.13), (3.5.14), будет устойчиво стремиться к искомому решению  $x^0 = x^0(t)$  при выполнении следующего условия:

$$F'_x(x^*(t), t) < 0, \quad (3.5.15)$$

где  $F'_x$  – частная производная функции  $F$  по переменной  $x$ .

Для выполнения этого условия выражение (3.5.2) может при необходимости быть переписано в форме:

$$-F(x, t) = 0.$$

Тогда уравнение (3.5.13) примет вид:

$$\mu \frac{dx}{dt} = -F(x, t).$$

Начальная точка  $(\tau, x_0)$  интегральной кривой  $x = x(t)$  уравнения (3.5.13) выбирается, исходя из условий:

$$\tau < t_1, F'_x(x_0, \tau) < 0. \quad (3.5.16)$$

Промежуток  $(\tau, t_0)$ , на котором реализуется быстрое изменение решения задачи Коши (3.5.13), (3.5.14) от начального значения  $x_0$  до значений, близких к  $x^*(t)$ , называется пограничным слоем. Множество значений  $(\tau, x_0)$ , удовлетворяющих условиям (3.5.16), называется областью притяжения корня  $x^*(t)$  [110].

На Рис. 3.5 представлено поведение решений задачи Коши (3.5.13), (3.5.14) при различных значениях  $\tau$  и  $x_0$ .

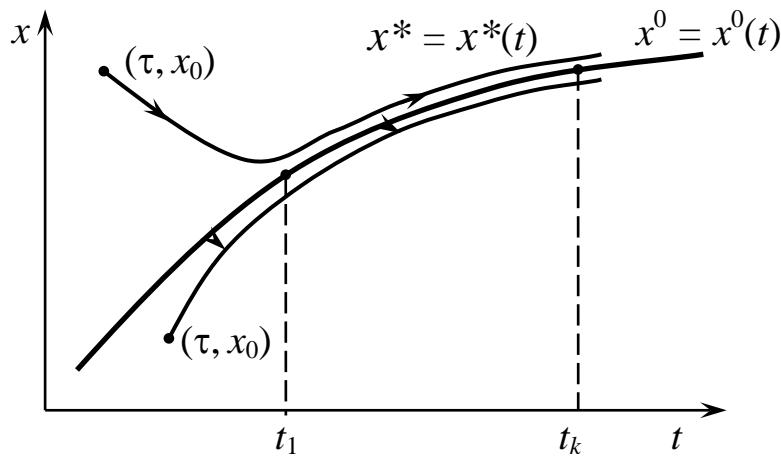


Рис. 3.5

Установлено, что при выборе любых начальных условий (3.5.14) из области притяжения можно получить путем интегрирования уравнения (3.5.13) приближенное решение  $x^*(t)$  уравнения (3.5.2).

Это решение должно удовлетворять условию:

$$|F(x^*(t_1), t_1)| < \varepsilon, \quad (3.5.17)$$

где  $\varepsilon$  – требуемая точность решения уравнения (3.5.2).

Заметим, что для применения соответствующих численных методов интегрирования (см. Разд. 3.1) уравнение (3.5.13) представляется в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\mu} F(x, t), \quad t \in [\tau, t_k]. \quad (3.5.18)$$

Таким образом, при использовании предлагаемого метода необходимо выполнить следующую последовательность действий:

1. Выбрать достаточно малое значение параметра  $\mu$ .
2. Установить область притяжения решения задачи и выбрать начальные значения  $\tau$  и  $x_0$ , удовлетворяющие условиям (3.5.16).
3. Выбрать и реализовать численный метод интегрирования уравнения (3.5.18).

4. В процессе получения решения этого уравнения при  $t = t_1$  проверять выполнение условия (3.5.17). При его выполнении процесс интегрирования продолжается до достижения параметром  $t$  значения  $t_k$ .

В противном случае процесс останавливается и производится с использованием неравенств (3.5.16) выбор новых значений  $\tau$  и  $x_0$  с повторным интегрированием уравнения (3.5.18). Последние действия выполняются до тех пор, пока не будет удовлетворено условие (3.5.17).

Аналогичный подход предлагается использовать при решении системы уравнений (3.5.1).

При его реализации формируется следующая система сингулярно возмущенных уравнений [110]:

$$\mu \frac{dx_j}{dt} = F_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = (\overline{1, n}), \quad t \in [\tau, t_k] \quad (3.5.19)$$

с начальными условиями:

$$x_j(\tau) = x_{j0}, \quad j = (\overline{1, n}). \quad (3.5.20)$$

Для получения решения  $x_1^* = x_1^*(t)$ ,  $x_2^* = x_2^*(t)$ , ...,  $x_n^* = x_n^*(t)$  этой системы, приближенно представляющего точные решения  $x_1^0 = x_1^0(t)$ ,  $x_2^0 = x_2^0(t)$ , ...,  $x_n^0 = x_n^0(t)$  системы уравнений (3.5.1), выбираются начальные значения  $\tau$ ,  $x_{0j}$ ,  $j = (\overline{1, n})$ , удовлетворяющие неравенствам вида:

$$\tau < t_1, \quad F'_{j x_j}(\tau, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) < 0, \quad j = (\overline{1, n}), \quad (3.5.21)$$

где  $F'_{j x_j}$  – частная производная функции  $F_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  по переменной  $x_j$ .

Здесь, как и выше, для выполнения этих неравенств в правой части уравнений (3.5.19) некоторые функции  $F_j$ ,  $j \in (\overline{1, n})$  могут быть умножены на  $(-1)$ .

Величины  $\tau$ ,  $x_{j0}$ ,  $j = (\overline{1, n})$  кроме выполнения условий (3.5.21) должны удовлетворять неравенству:

$$\sum_{j=1}^n \left| F_j \left( x_1^*(t_1), x_2^*(t_1), \dots, x_n^*(t_1), t_1 \right) \right| < \varepsilon, \quad (3.5.22)$$

обеспечивающему решение системы уравнений (3.5.1) при  $t \in [t_1, t_k]$  с заданной точностью  $\varepsilon$ .

При решении этой системы методом малого параметра выполняется указанная выше последовательность действий, в которых используются выражения (3.5.19)-(3.5.22). В п.п. 3 и 4 этой последовательности используется представление системы дифференциальных уравнений (3.5.19) в следующей форме:

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{1}{\mu} F_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = (\overline{1, n}), \quad t \in [\tau, t_k].$$

Основным достоинством применения метода малого параметра для решения линейных и нелинейных параметрических уравнений является возможность снизить трудоемкость процессов формирования искомых решений с привлечением численных методов интегрирования дифференциальных уравнений (3.5.13) или (3.5.19).

### **3.6. Методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений**

Задачи данного класса возникают при использовании на практике методов вариационного исчисления и оптимального управления, приведенных в Разд. 2.4 и 2.5.

Численные методы решения краевых задач применяются в тех случаях, когда невозможно получить аналитические (формульные) решения дифференциальных уравнений, получаемых этими методами.

В настоящее время для решения краевых задач широко применяются следующие основные численные методы [25, 104]:

- метод «пристрелки»;
- конечно-разностный метод.

Проиллюстрируем расчетные схемы этих методов на примерах краевых задач, описываемых выражениями (2.1.35)-(2.1.38).

**Метод «пристрелки».** Суть этого метода состоит в много-кратном решении уравнения (2.1.35) с изменяющимися начальными условиями до тех пор, пока не будет удовлетворено с заданной точностью условие «попадания» интегральной кривой в заданную граничную точку (Рис. 3.6).

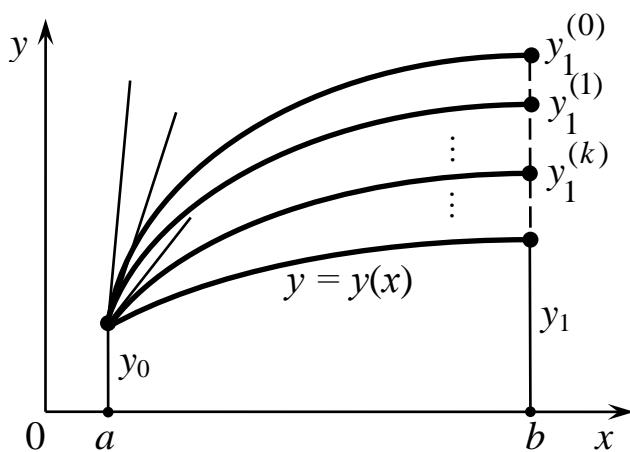


Рис. 3.6

Физическая сущность метода «пристрелки», основанная на процессе корректировки артиллерийского огня, приведена в работе [104].

Пусть на заданном интервале требуется решить краевую задачу (2.1.35), (2.1.36). Для ее решения рассматриваемым методом сформируем задачу Коши с дифференциальным уравнением (2.1.35) и начальными условиями вида:

$$y(a) = y_0; \quad y'(a) = \eta, \quad (3.6.1)$$

где  $\eta$  – вспомогательная переменная, определяющая тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой в точке  $x = a$ .

Заметим, что изменение значения этой переменной позволяет получить семейство интегральных кривых, представленное на Рис. 3.6.

Придадим некоторое начальное значение  $\eta_0$  этой переменной и решим одним из численных методов задачу Коши:

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y'); \\ y(a) &= y_0; \quad y'(a) = \eta_0. \end{aligned}$$

Обозначим через  $y_1^{(0)}$  значение решения этой задачи в точке  $x = b$ .

Решая задачу Коши (2.1.35), (3.6.1) для другого значения  $\eta = \eta_1$ , получим значение  $y_1^{(1)} \neq y_1^{(0)}$ .

Используя теорему о непрерывной зависимости решений дифференциального уравнения от значений используемых начальных условий [20], можно утверждать, что решение задачи Коши (2.1.35), (3.6.1) в общем случае описывается функцией:

$$y = y(x, y_0, \eta). \quad (3.6.2)$$

При  $x = b$  и заданном значении  $y_0$  это соотношение будет функцией одной переменной  $\eta$ .

Следуя этому, сформируем функцию вида:

$$\varphi(\eta) = y(b, y_0, \eta) - y_1, \quad (3.6.3)$$

которая описывает величину отклонения решения (3.6.2) в точке  $x = b$  от граничного значения  $y_1$ , заданного выражением (2.1.36).

Отсюда возникает задача определения значения  $\eta^*$  такого, что  $\varphi(\eta^*) = 0$ .

Эта задача представляет собой задачу нахождения корня уравнения:

$$\varphi(\eta) = 0. \quad (3.6.4)$$

Особенностью этого уравнения является его алгоритмический характер, который определяется тем, что функция (3.6.3) задается путем численного решения задачи Коши (2.1.35), (3.6.1) при конкретном значении вспомогательной переменной  $\eta$ .

В связи с невозможностью вычисления производной функции  $\varphi(\eta)$  при решении уравнения (3.6.4) будем использовать расчетную схему (3.3.8) метода Ньютона, в которой производ-

ная приближенно представлена ее разностным аналогом [26], вычисляемым по двум приближениям  $\eta_k$  и  $\eta_{k+1}$  искомого корня.

Вследствие этого расчетная схема решения уравнения (3.6.4) будет иметь вид:

$$\eta_{k+2} = \eta_{k+1} - \frac{\eta_{k+1} - \eta_k}{\varphi(\eta_{k+1}) - \varphi(\eta_k)} \varphi(\eta_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6.5)$$

где в соответствии с выражением (3.6.3) имеем, что

$$\varphi(\eta_k) = y_1^{(k)} - y_1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6.6)$$

Отметим, что для применения этой схемы необходимо задаться начальными значениями  $\eta_0$  и  $\eta_1$ .

Расчеты по формуле (3.6.5) выполняются до некоторого шага с номером  $N$ , при котором выполняется следующее условие останова итерационного процесса:

$$|\varphi(\eta_N)| < \varepsilon, \quad (3.6.7)$$

где  $\varepsilon$  – требуемая точность выполнения граничных условий (2.1.36).

#### Пример 3.4.

Пусть на интервале  $[0, 1]$  с точностью  $\varepsilon = 0,0001$  требуется решить краевую задачу:

$$y'' = e^x + \sin y; \quad (3.6.8)$$

$$y(0) = 1; \quad y(1) = 2, \quad (3.6.9)$$

которая является конкретизацией выражений (2.1.35), (2.1.36).

Представим дифференциальное уравнение (3.6.8) в виде системы (3.1.10):

$$\begin{aligned} y' &= z; \\ z' &= e^x + \sin y. \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

Начальные условия для этой системы будут иметь следующий вид:

$$y(0) = 1, \quad z(0) = \eta. \quad (3.6.11)$$

Задачу Коши (3.6.10), (3.6.11) будем решать с шагом интегрирования  $h = 0,1$  с применением расчетной схемы (3.1.14), (3.1.15) метода Рунге-Кутта (см. Разд. 3.1.2).

Для использования расчетной схемы (3.6.5), (3.6.6) зададимся значениями  $\eta_0 = 1,0$  и  $\eta_1 = 0,8$ .

Результаты применения метода «пристрелки» к решению краевой задачи (3.6.8), (3.6.9) приведены в табл. 3.2 и 3.3.

Таблица 3.2

$k$	$\eta_k$	$y_1^{(k)}$	$\varphi(\eta_k)$
0	+1,00000	3,16889	1,16889
1	+0,80000	2,97448	0,97448
2	-0,20466	1,95376	0,04624
3	-0,15916	2,00179	0,00179
4	-0,16086	2,00003	0,000003

Из этой таблицы видно, что условие (3.6.7) при заданном значении  $\varepsilon = 0,0001$  выполняется на четвертом шаге ( $N = 4$ ) итерационного процесса (3.6.5), (3.6.6).

Результаты решения рассматриваемой краевой задачи представлены в табл. 3.3.

Таблица 3.3

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$y_i$	0,1	0,993	1,006	1,039	1,094	1,174	1,279	1,412	1,575	1,777	2,000

Данная таблица значений функции  $y = y(x)$  получена путем решения задачи Коши (3.6.10), (3.6.11) при  $\eta = \eta_4 = -0,16086$ .

**Конечно-разностный метод.** Пусть требуется решить на отрезке  $[a,b]$  краевую задачу для линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (3.6.12)$$

и граничными условиями 1-го рода:

$$y(a) = y_a; \quad y(b) = y_b. \quad (3.6.13)$$

Введем на отрезке  $[a,b]$  сетку значений  $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_N = b$ , где  $x_k = a + hk$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ ,  $h = (b - a)/N$ . Решение задачи (3.6.12), (3.6.13) будем определять в виде множества значений  $\{y_k, k = (\overline{0, N})\}$ , где  $y_k = y(x_k)$ . Представим производные, входя-

щие в уравнение (3.6.12), их разностной аппроксимацией вида [25]:

$$y'_k = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}; \quad y''_k = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}. \quad (3.6.14)$$

Подставляя выражения (3.6.14) в уравнение (3.6.12), получим систему уравнений для нахождения значений  $y_k$ :

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p(x_k) \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + q(x_k)y_k = f(x_k), \\ k = (\overline{1, N-1}).$$

Здесь предполагается, что при использовании граничных условий (3.6.13) неизвестные  $y_0$  и  $y_N$  считаются заданными. Приводя подобные члены, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $y_1, y_2, \dots, y_{N-1}$ :

Для решения системы (3.6.15) при достаточно малых значениях шага сетки  $h$  и  $q(x_k) < 0$  применяется один из численных методов, приведенных в Разд. 3.2.

В случае использования граничных условий 2-го и 3-го ро-

да, описываемых выражениями (2.1.37), (2.1.38), аппроксимация производных, входящих в соответствующие краевые задачи в граничных точках, проводится с помощью следующих односторонних разностей 1-го и 2-го порядков [25]:

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h}; \quad y'_N = \frac{y_N - y_{N-1}}{h}; \quad (3.6.16)$$

$$y'_0 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}; \quad y'_N = \frac{y_{N-2} - 4y_{N-1} + 3y_N}{2h}; \quad (3.6.17)$$

В случае использования формул (3.6.16) линейная алгебраическая система (3.6.15) аппроксимирует краевую задачу с первым порядком точности. При использовании формул (3.6.17) получается второй порядок точности решения краевой задачи.

### Пример 3.5

Решить на интервале  $[0, 1]$  с шагом  $h = 0,2$  краевую задачу:

$$y'' - xy' - y = 0$$

с граничными условиями:

$$y(0) = 1; \quad y'(1) + 2y(1) = 0.$$

Данное уравнение является частным случаем уравнения (3.6.12) при следующих значениях его коэффициентов и правой части:

$$p(x) = x; \quad q(x) = 1; \quad f(x) = 0.$$

Параметры решаемой задачи имеют следующие значения:

$$N = 5; \quad x_0 = 0; \quad x_1 = 0,2; \quad x_2 = 0,4; \quad x_3 = 0,6; \quad x_4 = 0,8; \quad x_5 = 1,0.$$

Во всех внутренних узлах интервала  $[0, 1]$  после замены производных их разностными аналогами (3.6.14) получим выражения вида:

$$(1 - 0,1x_k)y_{k-1} + (-2,04)y_k + (1 + 0,1x_k)y_{k+1} = 0, \\ k = (1,4).$$

Из заданных граничных условий следует, что на левой границе значение  $y_0 = 1$ . На правой границе аппроксимируем производную  $y'(1)$  односторонней разностью 1-го порядка (3.6.16). В этом случае второе граничное условие примет вид:

$$\frac{y_5 - y_4}{0,2} + 2y_5 = 0.$$

С помощью группировки слагаемых, приведения подобных членов, подстановки значений  $x_k$  и с учетом того, что  $y_0 = 1$ , получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} -2,04y_1 + 1,02y_2 &= -0,98; \\ 0,96y_1 - 2,04y_2 + 1,04y_3 &= 0; \\ 0,94y_2 - 2,04y_3 + 1,06y_4 &= 0; \\ 0,92y_3 - 2,04y_4 + 1,08y_5 &= 0; \\ y_4 - 1,4y_5 &= 0. \end{aligned}$$

В результате решения этой системы методом простых итераций (см. Разд.3.2.1) получим следующие значения искомых переменных:

$$y_1 = 0,7719; y_2 = 0,5830; y_3 = 0,4311; y_4 = 0,3126; y_5 = 0,2233.$$

Решение краевой задачи приведено в табл. 3.4.

Таблица 3.4

$k$	0	1	2	3	4	5
$x_k$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$y_k$	1,0	0,77191	0,58303	0,43111	0,31265	0,22332

Пусть на интервале  $[a, b]$  требуется решить краевую задачу для системы дифференциальных уравнений (2.1.9).

Будем считать, что граничные условия 3-го рода этой задачи в точках  $x = a$  и  $x = b$  заданы в общем случае нелинейными функциями:

$$\begin{aligned} \varphi_1(a, y_{1a}, y_{2a}, y_{2a}, \dots, y_{na}) &= 0; \\ \varphi_2(b, y_{1b}, y_{2b}, y_{2b}, \dots, y_{nb}) &= 0. \end{aligned} \tag{3.6.18}$$

Выберем величину шага  $h$  и введем сетку значений  $x_0 = a, x_1, \dots, x_N = b$  по правилу:

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N,$$

где  $N = (b - a)/h$ .

Решение краевой задачи (2.1.9), (3.6.18) конечно-разностным методом, как и выше, заключается в определении

множества значений  $y_{jk}$ , где  $y_{jk} = y_j(x_k)$ ,  $j = (\overline{1, n})$ ,  $k = (\overline{0, N})$ .

Заменим производные в системе (2.1.9) их разностной аппроксимацией вида (3.6.14).

Проводя несложные преобразования, получаем с учетом выражений (3.6.18) следующую систему нелинейных уравнений:

$$\varphi_1(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) = 0;$$

.....

$$y_{jk+1} - y_{jk} - 2hf_j(x_k, y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{nk}) = 0, \quad k = (\overline{0, N-1}); \quad (3.6.19)$$

.....

$$\varphi_2(x_N, y_{1N}, y_{2N}, \dots, y_{nN}) = 0.$$

Решение этой системы уравнений может быть получено одним из численных методов, приведенных в Разд. 3.4.

Система (3.6.19) значительным образом упрощается, если решения системы (2.1.9) должны удовлетворять граничным условиям 1-го рода:

$$y_j(a) = y_{ja}, \quad y_j(b) = y_{jb}, \quad j = (\overline{1, n}). \quad (3.6.20)$$

Другие численные методы решения краевых задач для систем уравнений вида (2.1.9) и (2.1.11) приведены в работе [104].

### **3.7. Методы решения задач вариационного исчисления**

Приведенные в Разд. 2.4 дифференциальные уравнения Эйлера, с помощью которых осуществляется решение вариационных задач при сколь-нибудь сложном практическом применении, только в исключительных случаях интегрируются в аналитическом виде.

Как было показано в этом разделе, любая вариационная задача является краевой задачей с различными видами граничных условий, рассматриваемых в Разд. 2.1. Поэтому для решения полученных уравнений Эйлера используются численные методы решения краевых задач, описанные в Разд. 3.6. В частности, для решения задачи (2.4.7), (2.4.8) применяется метод «пристрелки». Вариационные задачи с подвижными границами (см. Разд. 2.4.2), которые сводятся к краевой задаче (2.4.4), (2.4.21),

могут быть решены конечно-разностным методом, где в качестве граничных условий (2.1.39) используются применяемые условия трансверсальности.

Практически одновременно с разработкой теоретических вопросов вариационного исчисления были начаты работы по разработке численных (приближенных) методов построения экстремалей, получившие название *прямых методов решения вариационных задач* [17, 20].

Характерной особенностью таких методов является отсутствие необходимости формирования и решения уравнений Эйлера.

Для иллюстрации сути прямых методов рассмотрим два наиболее распространенных численных метода этого класса.

**Конечно-разностный метод Эйлера.** Пусть дана вариационная задача вида:

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt \rightarrow \max; \quad (3.7.1)$$

$$x(t_0) = a; \quad x(t_1) = b.$$

Построим на интервале  $[t_0, t_1]$  сетку значений  $t_0 + \Delta t; t_0 + 2\Delta t; \dots; t_0 + (n-1)\Delta t$  аргумента  $t$  функции  $x(t)$ , где  $\Delta t = (t_1 - t_0)/n$ .

Каждому узлу этой сетки поставим в соответствие значения ординаты функции  $x(t)$ :

$$x_1 = x(t_0 + \Delta t); \quad x_2 = x(t_0 + 2\Delta t); \dots; x_{n-1} = x(t_0 + (n-1)\Delta t).$$

Отметим, что ординаты  $a$  и  $b$  являются заданными граничными условиями.

В этом случае искомая экстремаль  $x = x(t)$  заменяется ломаной Эйлера, представленной на Рис. 3.7.

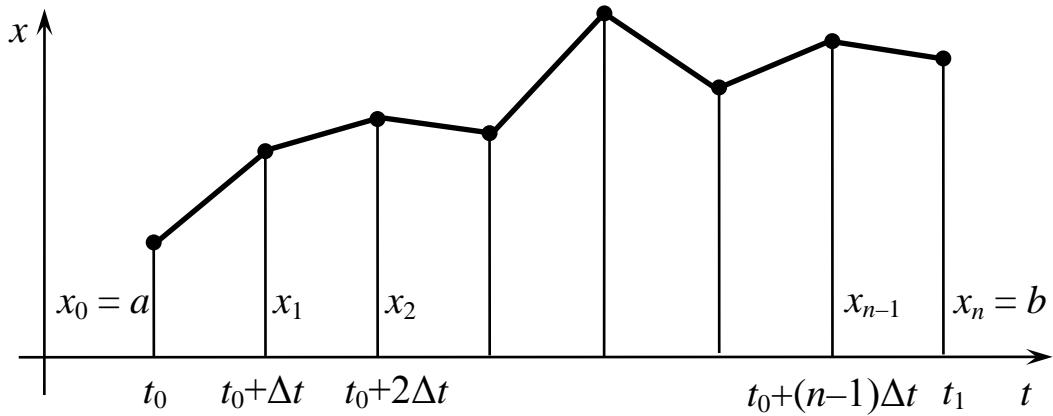


Рис. 3.7

На такой ломаной функционал  $J[x(t)]$  превращается в функцию  $J = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  ординат  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  ее вершин.

Эти ординаты выбираются из условия достижения максимума функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ .

Для решения этой задачи будем использовать уравнения вида (2.2.4), которые в данном случае принимают вид:

$$\frac{\partial J}{\partial x_j} = 0, \quad j = (1, n-1). \quad (3.7.2)$$

Для построения функции  $J$  заменим интеграл (3.7.1) его приближенным представлением, используемым в методе прямоугольников [8]:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt \approx \sum_{j=0}^n F(t_j, x_j, \dot{x}_j) \Delta t.$$

Для производной  $\dot{x}_j$  будем использовать приближенное представление:

$$\dot{x}_j \approx \frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t}.$$

Тогда имеем, что

$$J[x(t)] \approx f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} F\left(t_j, x_j, \frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t}\right) \Delta t.$$

В этой сумме от  $x_j$  зависят только  $(j-1)$ -е и  $j$ -е слагаемые:

$$F\left(t_{j-1}, x_{j-1}, \frac{x_j - x_{j-1}}{\Delta t}\right) \Delta t \text{ и } F\left(t_j, x_j, \frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t}\right) \Delta t.$$

Поэтому уравнения (3.7.1) могут быть представлены как:

$$\begin{aligned} & F_x\left(t_j, x_j, \frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t}\right) \Delta t + F_{\dot{x}}\left(t_j, x_j, \frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t}\right)\left(-\frac{1}{\Delta t}\right) \Delta t + \\ & + F_{\dot{x}}\left(t_{j-1}, x_{j-1}, \frac{x_j - x_{j-1}}{\Delta t}\right) \frac{1}{\Delta t} \Delta t = 0, \quad j = \overline{(1, n-1)}. \end{aligned}$$

Проводя несложные преобразования, получим окончательный вид системы уравнений для определения значений  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  искомых ординат экстремали  $x(t)$ :

$$\begin{aligned} & F_x\left(t_j, x_j, \frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t}\right) \Delta t + F_{\dot{x}}\left(t_{j-1}, x_{j-1}, \frac{x_j - x_{j-1}}{\Delta t}\right) - \\ & - F_{\dot{x}}\left(t_j, x_j, \frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t}\right) = 0, \quad j = \overline{(1, n-1)}. \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

В общем случае эта система нелинейных уравнений решается одним из численных методов, приведенных в Разд. 3.4.

### Пример 3.6

Запишем систему уравнений (3.7.3) для решения конечно-разностным методом Эйлера следующей вариационной задачи:

$$\begin{aligned} J[x(t)] &= \int_0^5 (3tx + 2\dot{x}^2) dt \rightarrow \max; \\ x(0) &= 1, \quad x(5) = 4. \end{aligned}$$

При  $F(t, x, \dot{x}) = 3tx + 2\dot{x}^2$  имеем:

$$F_x(t, x, \dot{x}) = 3t; \quad F_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) = 4\dot{x}.$$

Зададимся значением  $n = 100$  и определим шаг сетки значений  $t$ :

$$\Delta t = \frac{5-0}{100} = 0,05.$$

Узлы сетки вычислим по формуле:

$$t_j = 0 + j\Delta t = 0,05j, \quad j = \overline{1,99}.$$

Производные функции  $x(t)$  в узлах сетки представим как:

$$\dot{x}(t_j) \approx \frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t} = 20(x_{j+1} - x_j).$$

Тогда система уравнений (3.7.3) примет следующий вид:

$$3t_j + 80 \frac{(x_j - x_{j-1}) - (x_{j+1} - x_j)}{0,05} = 0, \quad j = \overline{1,99}.$$

Проводя несложные преобразования, получим окончательный вид формируемой системы:

$$-x_{j-1} + 2x_j - x_{j+1} = 0,000938j, \quad j = \overline{1,99}.$$

Таким образом, ломаная Эйлера может быть построена путем численного решения этой системы линейных алгебраических уравнений методами, изложенными в Разд. 3.2.

Аналогичным образом могут быть построены системы уравнений типа (3.7.3) для других видов вариационных задач.

Для получения с приемлемой для практики точностью решения вариационных задач методом Эйлера необходимо выбрать достаточно малую величину шага  $\Delta t$ . Это приводит к большой размерности системы уравнений (3.7.3) и, как следствие, значительной трудоемкости ее численного решения.

Для ликвидации этого недостатка разработана группа прямых методов, в которых искомая экстремаль приближенно представляется линейной комбинацией специальным образом выбранных функций. В этом случае решение вариационной задачи сводится к определению коэффициентов такой комбинации.

**Метод Ритца** является наиболее часто применяемым методом приближенного решения различных видов вариационных задач.

Пусть задан функционал (2.4.4) и требуется найти такую функцию  $y(x)$ , принимающую согласно выражениям (2.4.8) в точках  $x_0$  и  $x_1$  заданные значения  $y_0 = y(x_0)$  и  $y_1 = y(x_1)$ , на которой функционал  $J[y(x)]$  будет достигать экстремума. Значе-

ния исследуемого на экстремум функционала (2.4.4) рассматриваются не на всех допустимых в данной задаче функциях  $y(x)$ , а на функциях, описываемых линейной комбинацией функций некоторой выбранной системы  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ :

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x), \quad (3.7.4)$$

где  $\alpha_i$  – постоянные коэффициенты.

Отметим, что от удачного выбора этой системы функций зависит эффективность применения метода к решению конкретных вариационных задач. Необходимым условием выбора подходящей системы функций  $\varphi_i(x)$  является требование, чтобы функции  $y_n(x)$  удовлетворяли условиям  $y_n(x_0) = y_0$  и  $y_n(x_1) = y_1$  для всех значений параметров  $\alpha_i$ . Для выполнения этих условий в работе [20] предлагается использовать следующую зависимость:

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i,$$

где функция  $\varphi_0(x)$  имеет вид:

$$\varphi_0(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) + y_0,$$

а функции  $\varphi_i(x)$  выбираются так, чтобы  $\varphi_i(x_0) = \varphi_i(x_1) = 0$ .

Подставляя выражение (3.7.4) в функционал (2.4.4), имеем:

$$\begin{aligned} J_n &= \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_n(x), y'_n(x)) dx = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x), \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi'_i(x)\right) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \Phi(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) dx. \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

Вычисляя по соответствующим правилам [8] последний интеграл, получим функцию  $n$  переменных вида:

$$J_n = J_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \quad (3.7.6)$$

Неизвестные значения коэффициентов  $\alpha_i$ ,  $i = (\overline{1, n})$  будем определять из условия достижения экстремума функции (3.7.6).

Применяя к этой функции необходимые условия экстремума вида (2.2.4), запишем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial J_n}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = (\overline{1, n}). \quad (3.7.7)$$

Решая эту систему определенным численным методом из Разд. 3.2 или Разд. 3.4, получаем значения искомых коэффициентов  $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \dots, \alpha_n^{(0)}$  и приближенное решение вариационной задачи вида:

$$y_n^{(0)}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(0)} \varphi_i(x), \quad x \in [x_0, x_1]. \quad (3.7.8)$$

### Пример 3.7

Пусть требуется решить следующую вариационную задачу:

$$J = \int_0^1 (y'^2 - 2xy) dx \rightarrow \min; \quad (3.7.9)$$

$$y(0) = 0; \quad y(1) = 0. \quad (3.7.10)$$

В качестве функции (3.7.4) выберем зависимость вида:

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (1-x)x^i. \quad (3.7.11)$$

Нетрудно убедиться, что для такой функции граничные условия (3.7.10) выполняются.

Будем решать задачу (3.7.9), (3.7.10) при  $n = 2$ . В этом случае выражение (3.7.11) конкретизируется как:

$$y_2(x) = \alpha_1 (1-x)x + \alpha_2 (1-x)x^2.$$

Для выполнения требуемых вычислений перепишем эту функцию в следующей форме:

$$y_2(x) = (x - x^2)(\alpha_1 + \alpha_2 x). \quad (3.7.12)$$

Производная от функции (3.7.12) будет иметь вид:

$$y'_2(x) = \alpha_1(1 - 2x) + \alpha_2(2x - 3x^2).$$

Возводя это выражение в квадрат, имеем:

$$\begin{aligned} {y'_2}^2(x) &= \alpha_1^2(1 - 4x + 4x^2) + \\ &+ 2\alpha_1\alpha_2(2x - 7x^2 + 6x^3) + \\ &\alpha_2^2(4x^2 - 12x^3 + 9x^4). \end{aligned} \quad (3.7.13)$$

Подставляя соотношения (3.7.12) и (3.7.13) в функционал (3.7.9), получим выражение вида (3.7.5):

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^1 ({y'_2}^2 - 2xy_2) dx = \int_0^1 [\alpha_1^2(1 - 4x + 4x^2) + \\ &+ 2\alpha_1\alpha_2(2x - 7x^2 + 6x^3) + \alpha_2^2(4x^2 - 12x^3 + 9x^4) - \\ &- 2\alpha_1x^3 - 2\alpha_2x^2 + 2\alpha_1x^4 + 2\alpha_2x^3] dx. \end{aligned}$$

Вычисляя этот интеграл, сформируем функцию вида (3.7.6):

$$\begin{aligned} J_2 &= J_2(\alpha_1, \alpha_2) = \\ &= 0,333\alpha_1^2 + 0,334\alpha_1\alpha_2 + 1,634\alpha_2^2 - 0,100\alpha_1 - 0,166\alpha_2. \end{aligned}$$

С использованием этого выражения система уравнений (3.7.7) конкретизируется как:

$$\frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1} = 0,666\alpha_1 + 0,334\alpha_2 - 0,100 = 0;$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} = 0,334\alpha_1 + 3,258\alpha_2 - 0,166 = 0.$$

Решая полученную систему линейных алгебраических уравнений, получим следующие значения:

$$\alpha_1^{(0)} = 0,132; \quad \alpha_2^{(0)} = 0,038.$$

С учетом этих значений и формул (3.7.12) решение задачи (3.7.9), (3.7.10) в виде выражения (3.7.8) конкретизируется как:

$$y_2^{(0)}(x) = (x - x^2)(0,132 + 0,038x), \quad x \in [0, 1].$$

Вариационная задача (3.7.9), (3.7.10) имеет точное решение:

$$y(x) = \frac{x - x^3}{6},$$

которое получается при интегрировании уравнения Эйлера:

$$y'' + x = 0$$

с граничными условиями (3.7.10). Абсолютное отклонение точного и приближенного решений в точке  $x = 0,5 \in [0, 1]$  будет равно:

$$\Delta(0,5) = y(0,5) - y_2^{(0)}(0,5) = 0,0625 - 0,0378 = 0,0247.$$

Точность метода Ритца предлагается оценивать с помощью следующего практического приема [20].

В решаемой задаче используют функции  $y_n^{(0)}(x)$  и  $y_{n+1}^{(0)}(x)$ . Значения этих функций сравнивают между собой в нескольких точках интервала  $[x_0, x_1]$ . Если в пределах заданной точности решения задачи их значения совпадают, то в качестве результата принимают функцию  $y_n^{(0)}(x)$ , описываемую выражением (3.7.8). В противном случае строится функция  $y_{n+2}^{(0)}(x)$  и сравниваются значения функций  $y_{n+1}^{(0)}(x)$  и  $y_{n+2}^{(0)}(x)$ . Этот процесс продолжается до тех пор, пока значения  $y_{n+k}^{(0)}(x)$  и  $y_{n+k+1}^{(0)}(x)$  не совпадут в пределах заданной точности решаемой вариационной задачи.

Изложенный выше метод Ритца также может быть использован при решении изопериметрических вариационных задач вида (2.4.14), (2.4.34).

Проиллюстрируем его применение на примере задачи с функционалом (2.4.4) и ограничением:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_1(x, y, y') = l_1, \quad (3.7.14)$$

которое является частным случаем выражений (2.4.34).

Для ее решения выберем приближенное представление экстремали  $y(x)$  в форме зависимости (3.7.4).

Подставляя ее в функцию  $F_1$  и вычисляя интеграл, входящий в ограничение (3.7.14), получаем выражение вида:

$$\Phi_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) - l_1 = 0. \quad (3.7.15)$$

Искомые значения коэффициентов  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  определяются из решения задачи на условный экстремум целевой функции (3.7.6) при выполнении ограничений (3.7.15).

Данная задача решается методом Лагранжа, описываемого соотношениями (2.2.6), (2.2.7).

Для решения вариационных задач на условный экстремум вида (2.4.14), (2.4.28) и (2.4.14), (2.4.34) может быть применен метод малого параметра, предложенный в Разд. 3.4.

Суть такого подхода покажем на задаче из Примера 2.13.

Используя выражения (3.5.13), (3.5.14), заменим ограничение  $\varphi(x, y_1, y_2) = 0$  сингулярным дифференциальным уравнением относительно множителя Лагранжа  $\lambda(x)$ .

Тогда искомые функции  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ ,  $\lambda(x)$  решаемой задачи могут быть получены из решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{y'_1}{\sqrt{1 + y'_1 + y'_2}} &= 0; \\ \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \frac{y'_2}{\sqrt{1 + y'_1 + y'_2}} &= 0; \\ \mu \frac{d\lambda}{dx} &= -\varphi(x, y_1, y_2). \end{aligned} \quad (3.7.16)$$

с начальными условиями:

$$\begin{aligned} y_1(\xi) &= \bar{y}_{10}; \quad y'_1(\xi) = \bar{y}'_{10}; \\ y_2(\xi) &= \bar{y}_{20}; \quad y'_2(\xi) = \bar{y}'_{20}; \quad \lambda(\xi) = \lambda_0. \end{aligned} \quad (3.7.17)$$

Здесь  $\mu$  – малый параметр;  $\xi < x_0$  – начальная точка процесса решения задачи Коши (3.7.16), (3.7.17).

Начальные значения  $\xi, \bar{y}_{10}, \bar{y}'_{10}, \bar{y}_{20}, \bar{y}'_{20}, \lambda_0$  в этой задаче выбираются, исходя из того, что ее решения при  $x = x_0$  должны удовлетворять условиям вида:

$$\begin{aligned}|y_1(x_0) - y_{10}| &\leq \varepsilon; \quad |y'_1(x_0) - y'_{10}| \leq \varepsilon; \\|y_2(x_0) - y_{20}| &\leq \varepsilon; \quad |y'_2(x_0) - y'_{20}| \leq \varepsilon; \\|\varphi(x_0, y_1(x_0), y_2(x_0))| &\leq \varepsilon,\end{aligned}$$

где  $\varepsilon$  – требуемая точность решения рассматриваемой вариационной задачи.

Для численного решения системы уравнений (3.7.16) первые два дифференциальных уравнения 2-го порядка преобразуются с помощью замены:

$$y'_1 = z_1; \quad y'_2 = z_2$$

к четырем уравнениям 1-го порядка.

Полученная система уравнений 5-го порядка решается одним из методов, изложенных в Разд. 3.1.

### **3.8. Градиентные методы решения задач оптимального управления**

Как показала практика, применение принципа максимума Л.С. Понtryгина при решении реальных задач редко позволяет получать вид оптимального управления  $u_1^0(t), u_2^0(t), \dots, u_k^0(t)$  в аналитической форме. Основной причиной этого являются достаточно сложные математические модели управляемого движения вида (2.5.1), (2.5.2), (2.5.5) и необходимость доопределения «свободных» параметров таких моделей.

В этой связи резко возрастает роль численных методов формирования оптимального управления реальными объектами. Суть таких методов состоит в последовательном «улучшении» произвольно заданного управления  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t))$  до получения с некоторой точностью минимального (максимального) значения используемого в решаемой задаче функционала.

Для иллюстрации содержания этого вида численных методов рассмотрим метод скорейшего спуска для решения задач оптимального управления со свободными границами [11]. Использование термина «скорейший спуск» объясняется тем, что

на каждом этапе «улучшения» управления каждое предыдущее управление корректируется в направлении наибыстрейшего приближения к минимальному (максимальному) значению функционала  $J$ , описываемого вектором его градиента [17].

Пусть требуется решить задачу выбора оптимального управления (2.5.1), (2.5.2), (2.5.5), (2.5.11) при следующих допущениях:

- 1) моменты времени  $t_0$  и  $t_1$  являются заданными (фиксированными) величинами,
- 2) начальные условия (2.5.2) определены для всех фазовых координат  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_n(t)$  объекта, входящих в модель (2.5.1),
- 3) функционал (2.5.11) зависит только от неизвестных («свободных») граничных значений фазовых координат объекта в момент времени  $t = t_1$  и имеет вид:

$$J = f_0(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}) \rightarrow \max, \quad (3.8.1)$$

где  $x_{j1} = x_j(t_1)$ ,  $j = (\overline{1, n})$ .

Зададим произвольное управление  $u_r = u_r(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $r = (\overline{1, k})$ , удовлетворяющее ограничениям (2.5.5).

Поставим задачу формирования управления:

$$u_r^* = u_r + \delta u_r, \quad r = (\overline{1, k}), \quad (3.8.2)$$

которому соответствует максимальное значение приращения функционала (3.8.1), вычисляемого как:

$$\Delta J = J^* - J. \quad (3.8.3)$$

Здесь  $\delta u_r = \delta u_r(t)$  – искомое приращение функции  $u_r(t)$  в момент времени  $t \in [t_0, t_1]$ ;  $J^*[u_1^*, u_2^*, \dots, u_k^*]$  – значение функционала (3.8.1) при использовании управления вида (3.8.2).

Будем считать, что корректирующие поправки  $\delta u_r$ ,  $r = (\overline{1, k})$ , являются достаточно малыми по абсолютной величине. Это означает, что приращение  $\Delta J$ , описываемое выраже-

нием (3.8.3), достаточно точно представляется вариацией  $\delta J$  функционала (3.8.1).

Управления  $u_r^*$ ,  $r = (\overline{1, k})$ , подставленные в уравнения (2.5.1), после их решения при начальных условиях:

$$x_j(t_0) = x_{j0}, \quad j = (\overline{1, n}), \quad (3.8.4)$$

определяют траекторию  $x_1^* = x_1^*(t)$ ,  $x_2^* = x_2^*(t)$ , ...,  $x_n^* = x_n^*(t)$  движения объекта на интервале времени  $[t_0, t_1]$ .

В связи с малостью  $\delta u_r$ ,  $r = (\overline{1, k})$ , можно считать, что

$$x_j^* = x_j + \delta x_j, \quad j = (\overline{1, n}),$$

где  $\delta x_j = \delta x_j(t)$  – непрерывные функции, достаточно малые по абсолютной величине в любой момент времени  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $j = (\overline{1, n})$ .

При этом:

$$\delta x_j(t_0) = 0, \quad j = (\overline{1, n}).$$

Учитывая это допущение, представим вариацию функционала (3.8.1) как:

$$\delta J = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_0}{\partial x_{j1}} \delta x_{j1}, \quad (3.8.5)$$

где  $\delta x_{j1} = \delta x_j(t_1)$ ,  $j = (\overline{1, n})$ .

Из доказательства принципа максимума Л.С. Понtryгина [11] будем использовать следующее соотношение:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{j1} \delta x_{j1} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial H}{\partial u_r} \delta u_r \right) dt, \quad (3.8.6)$$

компоненты которого определяются выражениями (2.5.12) и (2.5.13).

Из второй группы условий (2.5.14) следует, что

$$\lambda_{j1} = - \frac{\partial f_0}{\partial x_{j1}}, \quad j = (\overline{1, n}). \quad (3.8.7)$$

Тогда с учетом этого равенства и выражений (3.8.5) и (3.8.6) получаем формулу вида:

$$\delta J = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial H}{\partial u_r} \delta u_r \right) dt,$$

отражающую непосредственную связь вариации функционала  $J$  с поправками управления  $\delta u_r$ ,  $r = (\overline{1, k})$ . Знаки этих поправок, которые должны доставлять максимум функционалу  $\delta J$ , должны определяться из следующих соотношений:

$$\delta u_r = \mu \left( \frac{\partial H}{\partial u_r} \right), \quad \text{sign } \delta u_r = \text{sign} \left( - \frac{\partial H}{\partial u_r} \right), \quad r = (\overline{1, k}), \quad (3.8.8)$$

где  $\mu$  – заданная константа,  $\text{sign}(\cdot)$  – символ знака величины  $(\cdot)$ .

Формируя достаточно малые значения поправок  $\delta u_r = \delta u_r(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  и конкретизируя их знаки из условий (3.8.8), находим «улучшенное» управление  $u_r^*(t)$ ,  $r = (\overline{1, k})$  по формуле (3.8.2).

Так как управлении  $u_r^*(t)$  не должны нарушать ограничений (2.5.5), то выбор поправок  $\delta u_r(t)$  необходимо проводить с учетом следующих неравенств:

$$u_{1r} - u_r(t) \leq \delta u_r(t) \leq u_{2r} - u_r(t), \quad r = (\overline{1, k}). \quad (3.8.9)$$

Алгоритм метода включает в себя следующие этапы:

1°. Выбор шага  $\Delta t$  и формирование на интервале  $[t_0, t_1]$  сетки значений  $t_s$ ,  $s = (\overline{0, N})$ .

2°. Задание в каждой точке сетки управлений  $u_r(t_s)$ ,  $s = (\overline{0, N})$ ,  $r = (\overline{1, k})$ .

3°. Численное интегрирование с шагом  $\Delta t$  системы уравнений (2.5.1) с начальными условиями (3.8.4).

4°. Вычисление значения функционала  $J$  и производных  $\partial f_0 / \partial x_{j1}$ ,  $j = (\overline{1, n})$  с помощью выражения (3.8.1) с использованием полученных значений  $x_j(t_s)$ ,  $s = (\overline{0, N})$ ,  $j = (\overline{1, n})$ .

5°. Численное интегрирование системы уравнений (2.5.13) с начальными условиями (3.8.1) в направлении от момента времени  $t = t_1$  к моменту  $t = t_0$  с шагом  $\Delta t$ .

6°. Нахождение значений производных  $\partial H / \partial u_r$ ,  $r = (\overline{1, k})$  в каждый момент времени  $t_s$ ,  $s = (\overline{0, N})$  для вычисленных значений сопряженных функций  $\lambda_j(t_s)$ ,  $j = (\overline{1, n})$ .

7°. Формирование значения поправок  $\delta u_r(t_s)$ ,  $s = (\overline{0, N})$ ,  $r = (\overline{1, k})$  и конкретизация их знаков с использованием условий (3.8.8) для выбранного значения параметра  $\mu$ .

8°. Определение управлений  $u_r^*(t_s)$  по формуле (3.8.2).

9°. Проверка выполнения условия (3.8.9) для каждого момента времени  $t = t_s$ ,  $s = (\overline{0, N})$ . При их нарушении – переход к п. 7° с уменьшением значения параметра  $\mu$ .

10°. Полагая  $u_r = u_r^*$ , переходим к п. 3° до тех пор, пока не будет выполнено условие  $|\Delta J| \leq \varepsilon$ , где  $\Delta J$  вычисляется по формуле (3.8.3), а величина  $\varepsilon$  определяет требуемую точность решения задачи.

#### Примечание.

Если на некотором шаге будет получено значение  $\Delta J < 0$ , то осуществляется возврат к п. 7° с уменьшением поправок  $|\delta u_r|$ ,  $r = (\overline{1, k})$ .

В п. 5° производится интегрирование уравнений (2.5.13) в «обратном» времени, тогда как в п. 3° система (3.6.1) интегрируется в «прямом» времени от  $t = t_0$  к  $t = t_1$ .

Для выполнения общего интегрирования систем уравнений (2.5.1) и (2.5.13) в «прямом» времени функции  $\lambda_j = \lambda_j(t)$ ,  $j = (\overline{1, n})$  предлагается вычислять по формулам:

$$\lambda_j = \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha \lambda_j^{(\alpha)}, \quad j = (\overline{1, n}),$$

где  $\lambda_j^{(\alpha)} = \lambda_j^{(\alpha)}(t)$  – вспомогательные сопряженные функции, определяемые из уравнений:

$$\dot{\lambda}_j^{(\alpha)} = -\frac{\partial H^{(\alpha)}}{\partial x_j}$$

с начальными условиями  $\lambda_j^{(\alpha)}(t_0) = \delta_{\alpha j}$ .

Здесь функции  $H^{(\alpha)}$  определяются с использованием правых частей уравнений (2.5.1) как:

$$H^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(\alpha)} \varphi_j, \quad \alpha = \overline{1, n}.$$

Применяемый в начальных условиях параметр  $\delta_{\alpha j}$  (символ Кронекера) имеет следующие значения:

$$\delta_{\alpha j} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = j, \\ 0, & \text{если } \alpha \neq j, \end{cases} \quad \alpha = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Постоянные  $c_1, c_2, \dots, c_\alpha, \dots, c_n$  определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений вида:

$$\sum_{\alpha=1}^n c_\alpha \lambda_j^{(\alpha)}(t_1) = -\frac{\partial f_0}{\partial x_{j1}}, \quad j = \overline{1, n},$$

одним из численных методов, приведенных в Разд. 3.2.

Метод скорейшего спуска для численного решения задачи оптимального управления с фиксированными граничными условиями вида (2.5.22) подробно изложен в работе [11]. Обзор существующих и перспективных численных методов решения задач оптимального управления с обширным списком использованной литературы приведен в статье [53].

Следует отметить перспективность применения в сложных задачах оптимального управления БЛА генетических алгоритмов формирования искомого управляемого вектора, которые позволяют обеспечить достижение глобального максимума (минимума) используемых в них функционалов.

В заключение главы отметим, что все приведенные в ней численные методы прошли многолетнюю практическую апробацию при решении сложных научно-технических задач, вклю-

чая задачи динамики полета и управления ЛА [52]. Эти методы в последующем реализуются в составе функционального программного обеспечения АРМ математика – системного программиста и используются персоналом БАК для решения задач формирования управлений БЛА при выполнении ими конкретных полетных заданий.

## **Глава 4. ВЕТРОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ БЛА**

Необходимость учета ветровых возмущений при формировании программного управления БЛА определяется следующими факторами, отмеченными в Главе 1:

- 1) БЛА имеют малую полетную массу и небольшие скорости полета по сравнению с современными пилотируемыми ЛА,
- 2) одним из преимуществ БЛА по сравнению с такими ЛА является возможность их применения в ночное время и при неблагоприятных метеоусловиях, в частности при наличии ветра.

Как показала практика эксплуатации пилотируемых ЛА, действие ветра вызывает изменение величины перегрузок, а также линейные колебание его центра масс (ЦМ) [48]. Последнее весьма отрицательно сказывается в процессе эксплуатации БЛА-РМ на результаты решения задачи анализа оператором целевой нагрузки получаемого изображения наземной поверхности.

Анализ литературы по БЛА [1, 2-4, 7, 15, 31] показал полное отсутствие рассмотрения вопросов влияния ветровых возмущений на параметры и характеристики их полетов, и, главное, на выбор соответствующих управлений, позволяющих эффективно выполнять поставленные перед БЛА целевые задачи.

Учет влияния действия ветра на различных частных режимах полета пилотируемых ЛА рассматривался в работах [13, 19, 23, 27-30, 39, 48]. Основным недостатком этих работ является отсутствие комплексного подхода, как к описанию произвольных ветровых возмущений, так и к их влиянию на совокупность параметров и характеристик полета ЛА.

В связи с приведенными выше особенностями беспилотной авиационной техники учет ветровых возмущений является одной из важных задач прикладной теории управления БЛА.

## **4.1. Общая характеристика ветровых возмущений**

Следует заметить, что в литературе [23, 30, 39, 40, 48], посвященной достаточно подробному изложению этих вопросов, отсутствует единый подход к определению понятия ветра и описанию его характеристик.

В работе [48] отмечается, что на силу тяги и аэродинамические силы существенное влияние оказывает распределение по траектории движения ЛА значений таких метеорологических параметров окружающей среды как ветер, давление, температура и влажность воздуха. При этом наибольшее прямое воздействие на динамику полета ЛА оказывает ветер, под которым в общем случае понимается любое движение воздуха относительно земной поверхности.

Воздушная среда, в которой осуществляется полет ЛА, практически всегда находится в непрерывном движении, вызываемом неравномерным распределением температур, плотностей и давлений воздуха в атмосфере. Вследствие этого движение воздуха в общем случае носит хаотический случайный характер.

Как показала практика, некоторые составляющие этих потоков имеют постоянную скорость. Такие потоки воздуха получили название *струйных течений*.

Струйные течения распространяются горизонтально земной поверхности и имеют четкий максимум скорости на определенной высоте. При этом отмечается, что средние направления таких течений в вертикальной плоскости практически совпадают в каждой точке с горизонтальным направлением. Длина и ширина струйных течений составляет величины порядка нескольких сотен километров [48].

Кроме таких потоков в атмосфере присутствуют *турбулентные течения*, которые характеризуются наличием в определенной области пространства случайных по величине и на-

правлению порывов ветра, протяженностью несколько километров и меньше [48].

В работе [19] под турбулентной атмосферой понимается состояние неспокойной атмосферы при наличии в ней вертикальных потоков воздуха. Турбулентность воздушных масс на малых высотах в основном возникает в теплое время года вследствие неравномерного нагрева земной поверхности (пашни, леса, водоемы и т.п.). На средних высотах турбулентность появляется на границах холодных и теплых фронтов воздуха, а также в кучевых и мощнокучевых облаках. На больших высотах ( $h = 11000\text{-}13000$  м) наблюдаются горизонтальные течения воздушных масс с различными распределениями скоростей по высоте. Здесь при большом перепаде скоростей образуется значительная турбулентность, вызывающая болтанку самолета. В этой работе отмечается, что скорость восходящих потоков в турбулентной атмосфере у земли, на средних и больших высотах достигает 10-17 м/с, а в грозовом фронте – 25-47 м/с. Скорости нисходящих потоков воздуха в такой атмосфере обычно несколько меньше скоростей восходящих потоков.

Для точного учета влияния ветровых возмущений необходимо при описании турбулентных течений иметь общие характеристики скорости и направления ветра в любой момент времени для каждой точки в районе взлета, полетов и посадки ЛА в интервале высот от нуля до предельной высоты его полета.

Следует отметить, что в настоящее время полные характеристики случайного поля скоростей ветра для любой точки земной атмосферы отсутствуют. Поэтому в практических расчетах пользуются понятием средней скорости ветра.

Современные ЛА имеют эксплуатационные высоты полета до 10-15 км. С точки зрения характера поля скоростей ветра этот диапазон высот разбивается на два участка [40]:

- 1) пограничный слой до высот 1-10 км,

2) свободная атмосфера с высотами более 10 км.

На первом участке высот возникновение турбулентного характера движения воздуха связано с его вязкостью и влиянием земной поверхности. На этом участке выделяются высоты до 50 м., которые называются приземным слоем, где наиболее сильное влияние оказывает характер подстилающей поверхности. В пограничном слое, особенно в приземной его части, присутствуют большие значения изменения вертикальной составляющей скорости ветра по высоте, а также изменчивость его направления.

В свободной атмосфере значения вертикальной составляющей ветра обычно малы и его направление более стабильное.

Для струйных течений максимальная средняя скорость ветра порядка 90 м/с. достигается на высоте около 10 км. Типовой интервал изменения этой скорости равен 30-50 м/с. с высотой струйных течений 5-17 км [48]. При этом отмечается, что в зимних условиях эта скорость увеличивается.

В приземном слое скорость ветра, начиная с высот 100-200 м. резко уменьшается с высотой. Для вычисления средней скорости ветра до высот  $h = 300$ -500 м. предлагается эмпирическая формула вида:

$$w_{cp}(h) = w_0 \left( \frac{h}{h_0} \right)^n. \quad (4.1.1)$$

Здесь  $w_0$  – скорость ветра на базовой высоте  $h_0$  (например,  $h_0 = 10$  м.);  $n$  – показатель градиента ветра по высоте, который обычно имеет значения 0,2-0,5, но при значительных температурных изменениях может достигать значений 0,7 и выше.

Величина средней скорости ветра зависит от времени суток. Так при  $h > 50$  м. ночью эта скорость выше, чем в дневные часы. Установлено, что максимальное значение такой скорости в Северо-западном регионе России составляет величину порядка 8-10 м/с. [48]. В этой же работе отмечается, что длина разбе-

га самолета среднего класса по ВВП при встречном ветре скорости 10 м/с. почти в 2 раза меньше, чем при таком же попутном ветре.

Наиболее часто в пограничном слое атмосферы возникают турбулентные течения. Установлено, что в таких течениях вихревые порывы ветра не имеют предпочтительного направления при размерах вихрей от нескольких сантиметров до нескольких сот метров [48].

Процессы возникновения, развития и завершения турбулентности являются достаточно длительными и при высокой скорости ЛА могут рассматриваться как установившиеся процессы.

Установлено [48], что толщина зон турбулентности менее 1000 м. встречается в северных широтах в 90% случаев, в умеренных – в 85% случаев, в южных – в 70% случаев. Максимальная толщина таких зон – не более 2000 м. Длина турбулентных течений в 20% случаев менее 20 км, а в 70% случаев – менее 100 км. В зонах турбулентности вертикальные и горизонтальные порывы ветра длиной несколько километров могут достигать значений  $\pm(20\text{-}40)$  м/с.

В работе [28] приводятся следующие количественные характеристики ветровых возмущений.

Горизонтальная составляющая ветра может достигать средней скорости 12-18 м/с на умеренных высотах и до 20-30 м/с в стратосфере. В струйных течениях эта скорость может равняться 50-80 м/с. На малых высотах изменение горизонтальной составляющей скорости ветра по высоте имеет значение порядка 0,2-0,3 м/с на метр.

Вертикальная составляющая скорости ветра при отдельных порывах может достигать значений 18-20 м/с.

Среднее значения такой составляющей в турбулентных потоках воздуха не превышает обычно 3-5 м/с при длине волны 100-500 м.

В качестве общей количественной характеристики действующего ветра будем рассматривать вектор его скорости  $\bar{W} = (w_x, w_y, w_z)$ . Компоненты этого вектора описывают составляющие скорости ветра, действующие в направлении соответствующих осей земной СК.

Непосредственное значение скорости действующего ветра вычисляется при известных значениях его компонент по формуле вида [17]:

$$W = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}. \quad (4.1.2)$$

Как было отмечено выше, для струйных течений воздуха считается, что величина  $W$  является постоянной и равной средней скорости действующего ветра.

В этом случае имеем, что:

$$w_x = w_{x\text{ср}} = \text{const}; \quad w_y = w_{y\text{ср}} = \text{const}; \quad w_z = w_{z\text{ср}} = \text{const}, \quad (4.1.3)$$

Турбулентные течения воздуха предлагаются также описывать вектором  $\bar{W}$ , который представляется как сумма двух векторов [48]:

$$\bar{W} = \bar{W}_{\text{пост}} + \bar{W}_{\text{пер}}, \quad (4.1.4)$$

где  $\bar{W}_{\text{пост}}$  – вектор постоянной составляющей средней скорости действующего ветра;  $\bar{W}_{\text{пер}}$  – вектор переменной составляющей скорости этого ветра, который является векторной случайной функцией времени и координат конкретной точки воздушного пространства.

Компоненты вектора  $\bar{W}_{\text{пост}}$  будем описывать выражениями вида (4.1.3). Как отмечается в работе [48], модуль этого вектора, то есть среднее значение постоянной составляющей скорости турбулентного течения воздуха обычно имеет порядок нескольких метров в секунду. Для описания турбулентных движений воздуха используются следующие подходы [48]:

- 1) метод дискретных порывов,
- 2) метод непрерывных случайных порывов.

Первый метод (Рис. 4.1) применяется для анализа свойств ЛА и предполагает, что форма порыва ветра фиксирована. При этом ЛА перемещается под его воздействием вертикально без изменения угла тангажа, и динамические свойства всех ЛА, попавших в порыв ветра, одинаковы.

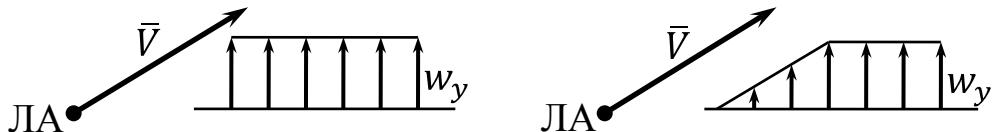


Рис. 4.1

Основной недостаток этого метода – неизвестная форма реального порыва ветра. Поэтому предлагается использовать второй метод, который применяется при следующих предположениях:

- поле скоростей ветра на определенных участках турбулентной атмосферы является однородным и изотропным,
- для движущегося ЛА поле скоростей ветра является «замороженным», то есть не изменяющимся во времени (гипотеза Тейлора).

Однородность поля скоростей ветра означает, что его вероятностные характеристики одинаковы для всего поля.

В работе [48] на основе полученных в экспериментальных полетах данных утверждается, что случайные значения компонент вектора  $\bar{W}_{\text{пер}}$  распределены по нормальному закону с практически нулевыми математическими ожиданиями и среднеквадратическими отклонениями (СКО)  $\sigma_{wx} \neq 0$ ,  $\sigma_{wy} \neq 0$ ,  $\sigma_{wz} \neq 0$ . При этом установлено, что  $w_x \text{ср} \approx w_y \text{ср}$  и  $\sigma_{wx} \approx \sigma_{wz}$ . Среднеквадратические отклонения с уменьшением высоты полета с 500 м. до 330 м. увеличиваются с 1,186 м/с. до 2,20 м/с. На трассе полета 15 км величины этих отклонений изменяются не более чем на 25%. Для грозовых условий погоды значения СКО равны (4,5-5,0) м/с. [48].

Для описания в рамках данного метода характеристик турбулентной атмосферы будем использовать известное в теории вероятности правило «трех сигм» [17]. Это правило утверждает, что реализации нормально распределенной случайной величины  $X$  с вероятностью не менее 0,995 лежат в интервале  $[m_x - 3\sigma_x; m_x + 3\sigma_x]$ , где  $m_x$  и  $\sigma_x$  – соответственно математическое ожидание и СКО случайной величины  $X$ .

Для получения гарантированных результатов при анализе влияния на движение БЛА турбулентных ветровых возмущений компоненты вектора (4.1.4) предлагаются вычислять по следующим формулам:

$$w_x = w_{x \text{ пост}} + 3\sigma_{wx}; \quad w_y = w_{y \text{ пост}} + 3\sigma_{wy}; \quad w_z = w_{z \text{ пост}} + 3\sigma_{wz}. \quad (4.1.5)$$

Классификация видов ветровых возмущений, действующих при движении БЛА, приведена на Рис. 4.2.

Отметим, что при учете первого вида возмущений используются выражения вида (4.1.3). Второй вид возмущений описывается формулами (4.1.5). Данные, входящие в эти соотношения для различных районов полетов БЛА должны храниться в базе данных АРМ метеоролога БАЭ (см. Рис. 1.7).

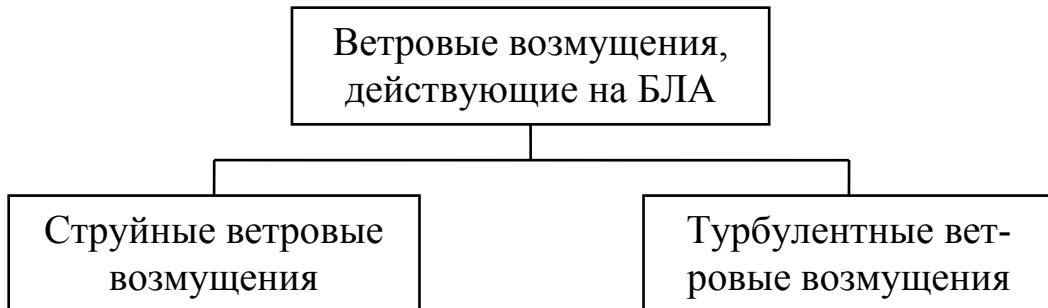


Рис. 4.2

На наш взгляд, наиболее точно учет ветровых возмущений проводится при использовании измеренных перед полетами БЛА компонент вектора скорости ветра  $\bar{W}$ , зависящих от времени.

Для района старта (взлета) и посадки БЛА метод расчета этих компонент иллюстрирует Рис. 4.3.

На этом рисунке представлена плоскость  $0_{\text{ст}}x_{\text{ст}}z_{\text{ст}}$  стартовой СК (см. Рис. 1.9). Угол  $\varphi$ , являющийся углом азимута ветра [82], определяет направление действия горизонтальной составляющей  $\bar{W}_{xz} = (w_x, w_z)$  пространственного вектора  $\bar{W}$ , измеренной с помощью соответствующей аппаратуры.

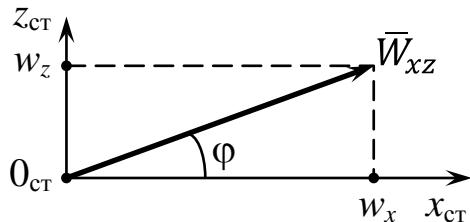


Рис. 4.3

Обозначим через  $W_{xz}(t)$  и  $\varphi(t)$  значения скорости этой составляющей и направления ее действия, измеренные в момент времени  $t$ .

Тогда изменение во времени значений соответствующих компонент вектора  $\bar{W}_{xz}$  в районе старта (взлета) и посадки БЛА вычисляются по формуле вида:

$$w_x(t) = w_{xz}(t) \cos \varphi(t); \quad w_z(t) = w_{xz}(t) \sin \varphi(t). \quad (4.1.6)$$

Распределение значений  $w_x(t)$  и  $w_z(t)$  по высоте может быть получено с использованием выражения (4.1.1). При этом вертикальная компонента  $w_y(t)$  скорости ветра измеряется отдельно.

Использование такого подхода предполагает наличие автоматической измерительной аппаратуры, устанавливаемой в рассматриваемом районе, данные от которой поступают по радиоканалам в АРМ метеоролога БАЭ для их анализа и последующей обработки.

Для определения зависимостей  $w_x(t)$ ,  $w_y(t)$ ,  $w_z(t)$  компонент вектора скорости ветра  $\bar{W}$ , действующего в районах выполнения БЛА полетных заданий, предлагается использовать специальные метеорологические БЛА (МБЛА).

Измерения параметров полета таких БЛА позволяют вычислить параметры действующего ветра по определенным расчетным формулам, которые в общем случае имеют вид:

$$\begin{aligned} w_x(t) &= f_1(p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t)); \\ w_y(t) &= f_2(p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t)); \\ w_z(t) &= f_3(p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t)), \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

где  $p_i(t)$  – фактические значения кинематических и динамических параметров полета МБЛА в момент времени  $t$ ,  $i = (\overline{1, k})$ . Отметим, что для достоверного измерения этих параметров МБЛА должен быть оснащен дополнительными датчиками.

В работе [48] приводятся следующие зависимости вида (4.1.7), использованные в летных экспериментах по измерению скорости ветра:

$$\begin{aligned} w_x(t) &= (V - V_{\text{зад}}) - g \int (n_x - \vartheta) dt; \\ w_y(t) &= V(\alpha_\phi - \vartheta) + g \int (n_y - 1) dt + l_x \dot{\vartheta}; \\ w_z(t) &= V(\psi - \beta_\phi) + g \int (n_z + \gamma) dt + l_y \dot{\gamma} - l_x \dot{\psi}. \end{aligned}$$

Здесь  $V$  – воздушная скорость самолета, измеренная с помощью приемника воздушного давления;  $V_{\text{зад}}$  – заданная скорость его полета по экспериментальному маршруту;  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  – перегрузки в ЦМ самолета;  $\alpha_\phi$  и  $\beta_\phi$  – углы атаки и скольжения самолета, измеренные флюгерным датчиком;  $\vartheta$ ,  $\psi$ ,  $\gamma$  – углы тангажа, рыскания и крена;  $l_x$ ,  $l_y$  – расстояния от места установки флюгерного датчика до ЦМ самолета.

Отмечается, что вместо такого датчика можно использовать приемник динамических давлений набегающего потока, но и тот и другой датчики должны быть установлены на штанге длиной не менее полутора диаметра фюзеляжа, отсчитываемого от его носка.

В качестве режима полета самолета для измерения случайной составляющей ветра был использован прямолинейный горизонтальный полет с постоянной скоростью  $V_{\text{зад}}$ .

В настоящее время в связи с широким распространением спутниковых навигационных систем (СНС) типа GPS и ГЛОНАСС [49] появилась возможность использования их инфор-

мации для измерения составляющих скорости действующего ветра.

При использовании этого подхода МБЛА должен быть оснащен антенной системой и приемником сигналов СНС, работающим в дифференциальном режиме [49]. С помощью этого приемника, который наряду с текущими координатами  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  МБЛА выдает значения компонент его скорости  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$ ,  $v_z(t)$ , можно осуществлять измерение составляющих  $w_x(t)$ ,  $w_y(t)$ ,  $w_z(t)$  вектора скорости ветра, действующего на трассе его полета.

Пусть известно, что полет МБЛА должен проводиться при заданных значениях  $V_x(t)$ ,  $V_y(t)$ ,  $V_z(t)$  компонент вектора  $\bar{V}$  его воздушной скорости.

Тогда компоненты вектора скорости действующего ветра определяются как:

$$w_x(t) = v_x(t) - V_x(t); \quad w_y(t) = v_y(t) - V_y(t); \quad w_z(t) = v_z(t) - V_z(t).$$

Известно [22], что  $V_x(t) = \dot{x}(t)$ ;  $V_y(t) = \dot{y}(t)$ ;  $V_z(t) = \dot{z}(t)$ .

В этом случае с использованием кинематических уравнений (1.4) получим следующую конкретизацию выражений (4.1.7):

$$\begin{aligned} w_x(t) &= v_x(t) - V_{\text{зад}}(t) \cos \theta_{\text{зад}}(t) \cos \Psi_{\text{зад}}(t); \\ w_y(t) &= v_y(t) - V_{\text{зад}}(t) \sin \theta_{\text{зад}}(t); \\ w_z(t) &= v_z(t) - V_{\text{зад}}(t) \cos \theta_{\text{зад}}(t) \sin \Psi_{\text{зад}}(t). \end{aligned}$$

Здесь  $V_{\text{зад}}(t)$ ,  $\theta_{\text{зад}}(t)$ ,  $\Psi_{\text{зад}}(t)$  – законы изменения воздушной скорости, углов наклона и поворота траектории МБЛА, определяющие программу его полета при измерении скорости ветра.

Если в качестве такого полета выполняется прямолинейный горизонтальный полет на постоянной высоте с постоянной скоростью, то при  $V_{\text{зад}}(t) = V_{\text{зад}}$ ,  $\theta_{\text{зад}}(t) = 0$ ,  $\Psi_{\text{зад}}(t) = \Psi_{\text{зад}}$ , получаем расчетные формулы вида:

$$w_x(t) = v_x(t) - V_{\text{зад}} \cos \Psi_{\text{зад}};$$

$$w_y(t) = v_y(t);$$

$$w_z(t) = v_z(t) - V_{\text{зад}} \sin \Psi_{\text{зад}}.$$

На эффективность предлагаемого подхода указывает тот факт, что один из существующих образцов аппаратуры СНС, используемой в отечественных БЛА, имеет предельную погрешность определения текущих значений  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$ ,  $v_z(t)$  в дифференциальном режиме с использованием микромеханических датчиков линейных ускорений (акселерометров) не более чем 0,2 м/с.

Текущие измеренные значения параметров, входящих в правые части выражений (4.1.7), передаются от МБЛА по радиоканалам на АРМ метеоролога БАЭ для вычисления зависимостей  $w_x(t)$ ,  $w_y(t)$ ,  $w_z(t)$ . В последующем файлы характеристик ветровых возмущений (4.1.3), (4.1.6) и (4.1.7) передаются по радиоканалам соответствующим МНПУ для программирования полетов конкретных БЛА. Отметим, что при использовании аппаратуры СНС «на землю» передаются только текущие значения  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$  и  $v_z(t)$  компонент путевой скорости МБЛА.

## **4.2. Оценки влияния ветровых возмущений на основные параметры полета БЛА**

Как было отмечено выше, полный анализ влияния ветровых возмущений на параметры и характеристики движения БЛА в современной литературе отсутствует.

Приведем количественные оценки воздействия ветра на процессы движения БЛА, основываясь на существующие подходы к анализу влияния ветровых возмущений на параметры и характеристики полета пилотируемых ЛА (самолетов и вертолетов) [27, 30, 48].

Вектор  $\bar{V}_\pi$  путевой скорости БЛА, то есть его скорости относительно земной поверхности, определяется как сумма векторов вида:

$$\bar{V}_\pi = \bar{V} + \bar{W}, \quad (4.2.1)$$

где  $\bar{V}$  – вектор скорости БЛА относительно воздуха.

Если векторы  $\bar{V}$  и  $\bar{W}$  параллельны, то этот факт в зависимости от направления вектора  $\bar{W}$  положительно или отрицательно влияет на километровый расход топлива ЛА [19]:

$$q_k = \frac{q_\chi}{3,6V_\pi} = \frac{q_\chi}{3,6(V \pm W)}, \quad (4.2.2)$$

где  $q_\chi$  – часовой расход топлива силовой установки БЛА (кГ/ч);  $V_\pi$ ,  $V$  – значения путевой и воздушной скоростей БЛА (м/с);  $W$  – скорость ветра (м/с).

При этом для попутного ветра в формуле (4.2.2) необходимо использовать знак «плюс». Это приводит к тому, что дальность полета и радиус действия БЛА при небольших значениях  $V$  увеличиваются. При встречном ветре в формулу (4.2.2) подставляется знак «минус». Отсюда следует, что за счет увеличения величины  $q_k$  дальность полета и радиус действия БЛА уменьшаются.

### Пример 4.1

Оценим влияние действующего ветра на дальность полета БЛА, которая вычисляется по следующей формуле [19]:

$$L = \frac{G_t}{q_k},$$

где  $G_t$  – запас топлива на борту БЛА (кГ);  $q_k$  – километровый расход топлива (кГ/км).

Отметим, что в этом и последующих примерах данной главы используются характеристики БЛА среднего класса, приведенные в Примере 5.1.

Силовая установка этого БЛА имеет часовой расход топлива  $q_{\text{ч}} = 90,1 \text{ кГ/ч}$  при его бортовом запасе  $G_{\text{т}} = 60 \text{ кГ}$ . В качестве скорости  $V$ , входящей в формулу (4.2.2), будем рассматривать крейсерскую скорость БЛА, равную 140 м/с.

Будем считать, что действующий ветер имеет скорость  $W = \pm 20 \text{ м/с}$ .

При отсутствии ветра, то есть для  $W = 0$  из выражения (4.2.2) и приведенной выше формулы получаем следующие значения:

$$q_{\text{k}}^{(0)} = \frac{90,1}{3,6 \cdot 140} = 0,179 \text{ кГ/км}; \quad L^{(0)} = \frac{60}{0,179} = 335,6 \text{ км.}$$

В условиях действия встречного и попутного ветра эти значения будут соответственно равны:

$$q_{\text{k}}^{(-)} = \frac{90,1}{3,6(140 - 20)} = 0,208 \text{ кГ/км}; \quad L^{(-)} = \frac{60}{0,208} = 287,7 \text{ км};$$

$$q_{\text{k}}^{(+)} = \frac{90,1}{3,6(140 + 20)} = 0,156 \text{ кГ/км}; \quad L^{(+)} = \frac{60}{0,156} = 383,6 \text{ км};$$

Из приведенных результатов расчетов следует, что при встречном ветре ( $W = -20 \text{ м/с}$ ) дальность полета БЛА уменьшается на 47,9 км, а при попутном ветре ( $W = +20 \text{ м/с}$ ) – увеличивается на 48 км. В процентном отношении изменение дальности полета БЛА составляет величину порядка  $\pm 15\%$ .

Пусть вектор  $\bar{W}$  скорости ветра составляет с вектором  $\bar{V}_{\text{п}}$  путевой скорости БЛА угол  $\epsilon$  (Рис. 4.4,*a*), называемый углом ветра [27].

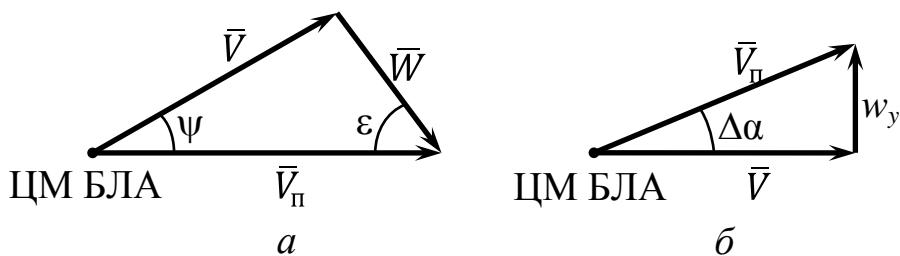


Рис. 4.4

Для того чтобы БЛА в условиях действия ветра имел заданное направление полета, необходимо обеспечить его движение таким образом, чтобы вектор  $\bar{V}$  составлял с этим направлением угол  $\psi$ , называемый углом сноса.

Используя теорему синусов [17] для треугольника, представленного на Рис. 4.4,*a* можно записать соотношение вида:

$$\sin \psi = \frac{W}{V} \sin \varepsilon.$$

Отсюда получаем выражение:

$$V_{\Pi} = V \cos \psi \pm W \sin \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{W^2}{V^2} \sin^2 \varepsilon} \pm W \cos \varepsilon. \quad (4.2.3)$$

Из этих формул следует, что максимальное значение угла  $\psi$  сноса БЛА получается при «поперечном» ветре, то есть при  $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ . При этом значение путевой скорости БЛА не зависит от направления ветра и определяется как  $V_{\Pi} = \sqrt{V^2 - W^2}$ .

Подстановка выражения (4.2.3) в первую часть формулы (4.2.2) позволяет вычислить величину  $q_k$  при произвольной ориентации векторов  $\bar{V}$  и  $\bar{W}$  в горизонтальной и вертикальной плоскостях полета БЛА.

Оценим изменения подъемной силы БЛА самолетной схемы при действии ветра с компонентами скорости  $w_x \neq 0$ ,  $w_y \neq 0$ ,  $w_z \neq 0$ .

Для вычисления подъемной силы БЛА используется формула вида [7]:

$$Y = c_y \frac{\rho V^2}{2} S, \quad (4.2.4)$$

где  $c_y$  – коэффициент подъемной силы;  $\rho$  – плотность воздуха на соответствующей высоте полета БЛА;  $V$  – воздушная скорость полета БЛА;  $S$  – площадь крыла БЛА.

Будем считать, что коэффициент  $c_y$  зависит только от его угла атаки  $\alpha$  и величина  $V = \text{const}$ . Тогда сила  $Y$  может рассматриваться как функция переменных  $\alpha$  и  $V$ .

Введем в рассмотрение величину:

$$\delta Y = \frac{\Delta Y}{Y} \cdot 100\%, \quad (4.2.5)$$

которая описывает относительное изменение значения подъемной силы БЛА при действии указанных выше ветровых возмущений.

Абсолютное изменение силы  $Y$  можно представить как ее приращение приближенной формулой [8] вида:

$$\Delta Y = Y^\alpha \Delta \alpha + Y^V \Delta V, \quad (4.2.6)$$

где  $Y^\alpha$ ,  $Y^V$  – частные производные функции  $Y = Y(\alpha, V)$  по углу атаки  $\alpha$  и скорости  $V$ ;  $\Delta \alpha$ ,  $\Delta V$  – приращения этих параметров под действием ветра.

Частные производные, входящие в это выражение, определяются как

$$Y^\alpha = 0,5 c_y^\alpha \rho V^2 S; \quad Y^V = c_y \rho V S, \quad (4.2.7)$$

где  $c_y^\alpha$  – производная по  $\alpha$  коэффициента подъемной силы БЛА.

Подставляя соотношения (4.2.6), (4.2.7) и (4.2.4) в формулу (4.2.5) и проводя несложные преобразования, получим следующее выражение:

$$\delta Y = \frac{c_y^\alpha}{c_y} \Delta \alpha + \frac{2}{V} \Delta V. \quad (4.2.8)$$

Предполагая, что  $w_x \ll V$ ,  $w_y \ll V$ , приращения значений угла атаки и скорости БЛА согласно Рис. 4.4,*б* и формуле (4.2.1), можно приближенно представить как:

$$\operatorname{tg} \Delta \alpha \approx \Delta \alpha = \pm \frac{w_y}{V}; \quad \Delta V \approx \pm w_x. \quad (4.2.9)$$

С учетом этих выражений формула (4.2.8) примет вид:

$$\delta Y = \left[ \pm \left( \frac{c_y^\alpha}{c_y} \right) \frac{w_y}{V} \pm 2 \left( \frac{w_x}{V} \right) \right] \cdot 100\%. \quad (4.2.10)$$

Известно, что в динамике полета дозвуковых ЛА зависимость  $c_y = c_y(\alpha)$  представляется следующим выражением [28]:

$$c_y = c_y^\alpha (\alpha - \alpha_0),$$

где  $\alpha_0 < 0$  – демпфирующий угол атаки ЛА.

Подставляя это выражение в формулу (4.2.10), имеем:

$$\delta Y = \left[ \pm \left( \frac{1}{\alpha + \alpha_0} \right) \frac{w_y}{V} \pm 2 \left( \frac{w_x}{V} \right) \right] \cdot 100\%. \quad (4.2.11)$$

Здесь  $\alpha_0$  – абсолютное значение демпфирующего угла атаки.

Первое слагаемое в этом выражении учитывает влияние на величину подъемной силы БЛА вертикальной составляющей скорости действующего ветра, вызывающей изменение направления вектора скорости его полета, а второе – влияние горизонтальной составляющей ветра, изменяющей величину этой скорости.

#### Пример 4.2

Пусть БЛА должен выполнить горизонтальный полет на постоянной высоте со скоростью  $V = 250$  км/ч = 69,4 м/с с углом атаки  $\alpha = 3^\circ = 0,052$  рад. и углом  $\alpha_0 = -0,4^\circ = -0,007$  рад.

Действующий в полете ветер описывается следующими характеристиками:

$$w_x = +12 \text{ м/с}; \quad w_y = -10 \text{ м/с}; \quad w_z = 0.$$

Приращения угла атаки и скорости БЛА, вычисленные по формулам (4.2.9), будут равны:

$$\Delta\alpha = -\frac{10}{69,4} = -0,144 \text{ рад.} = -8,25^\circ; \quad \Delta V = +12 \text{ м/с.}$$

Применяя к приведенным выше исходным данным формулу (4.2.11), получим:

$$\delta Y = \left[ \frac{1}{0,052 - 0,007} (-0,144) + 2 \left( \frac{12}{69,4} \right) \right] \cdot 100\% = \\ = [-2,44 + 0,34] \cdot 100\% = -210\%.$$

Значительное уменьшение (более чем в 2 раза) подъемной силы БЛА связано с резким уменьшением величины и знака фактического значения его угла атаки, определяемого как:

$$\alpha_\phi = \alpha + \alpha_0 + \Delta\alpha = 0,052 + 0,007 - 0,144 = -0,085 \text{ рад.} = -4,87^\circ.$$

Наличие такого отрицательного значения угла атаки вызовет интенсивную потерю высоты полета БЛА.

По формулам, аналогичным выражениям (4.2.9), строятся оценки изменения угла скольжения и скорости БЛА при наличии составляющих  $w_x \neq 0$  и  $w_z \neq 0$  действующего ветра [23].

Наибольшую опасность для БЛА представляют вертикальные порывы ветра с параметрами  $w_y \neq 0$ ,  $w_x = 0$ ,  $w_z = 0$ , представленные на Рис. 4.1.

В связи с тем, что величина восходящего порыва ветра может достигать значений порядка нескольких десятков метров в секунду, согласно формулам (4.2.9) изменение величины  $\Delta\alpha$  при небольших значениях  $V$  могут привести к выходу БЛА на критические углы атаки. Следствием этого может явиться его сваливание в штопор.

Кроме этого значительные и кратковременные действия значения составляющей  $w_y$  скорости ветра вызывает резкое увеличение значения нормальной перегрузки  $n_y$  [7]. Построим оценку приращения этой перегрузки при действии «вертикального» ветра.

Для установившегося горизонтального полета БЛА со скоростью  $V = \text{const}$  имеем, что  $Y = G$ , где  $G$  – вес БЛА [13, 27, 28].

Будем считать, что фактическое значение  $n_{y\phi}$  нормальной перегрузки БЛА определяется в основном фактическим значением его подъемной силы и силы веса.

Тогда, используя выражение:

$$n_{y\Phi} = n_y + \Delta n_y = \frac{Y \mp \Delta Y}{G} = 1 \mp \frac{\Delta Y}{Y} \quad (4.2.12)$$

и формулу (4.2.11) при  $w_x = 0$  получим, что величина приращения перегрузки:

$$\Delta n_y = \frac{\Delta Y}{Y} = \pm \frac{1}{\alpha + \alpha_0} \cdot \frac{w_y}{V} \quad (4.2.13)$$

будет прямо пропорциональна величине скорости  $w_y$  действующего ветра и иметь соответствующий знак. Это приращение может привести к значительному изменению траектории полета БЛА и при выходе фактической перегрузки (4.2.12) за пределы допустимой эксплуатационной перегрузки вызвать разрушение его конструкции.

### Пример 4.3

Пусть БЛА совершает полет с параметрами, представленными в Примере 4.2. Оценим изменение нормальной перегрузки при попадании БЛА в грозовую облачность, в которой значение  $w_y = +40$  м/с.

Определим по формуле (4.2.13) приращение перегрузки:

$$\Delta n_y = \frac{1}{0,052 + 0,007} \cdot \frac{40}{69,4} = 9,77.$$

Тогда согласно выражению (4.2.12) фактическое значение нормальной перегрузки, действующей на БЛА, определяется как:

$$n_{y\Phi} = 1 + 9,77 = +10,77.$$

Для значения  $w_y = -17$  м/с, используя эти формулы, имеем:

$$\Delta n_y = -4,15; \quad n_{y\Phi} = -3,15.$$

В табл. 5.1 приведены следующие значения максимальных эксплуатационных перегрузок БЛА:

$$n_y^{\max} = -3 \dots + 9.$$

Из их сопоставления с полученными значениями фактических перегрузок следует, что они выходят за пределы допустимых эксплуатационных перегрузок БЛА.

При полете беспилотного вертолета одновинтовой схемы в неспокойной атмосфере ветровые возмущения действуют на маховое движение лопастей его несущего винта (НВ) и тягу рулевого винта (РВ) [30]. При значениях  $\Delta n_y > 0,5\text{-}0,7$  возникает опасность нарастания амплитуды махового движения лопастей НВ и их недопустимого сближения с хвостовой балкой вертолета.

Наибольшие нагрузки при действии ветра возникают в системе управления НВ вертолета. При  $\Delta n_y < 0,2$  усилия при перемещении кольца автомата перекоса в продольном и поперечном направлениях возрастают на 20-25% по сравнению с полетом в спокойной атмосфере, а при  $\Delta n_y = 0,4\text{-}0,5$  они возрастают почти в 2-3 раза [30]. Кроме этого атмосферные возмущения вызывают непрерывную разбалансировку вертолета. Вертикальные порывы ветра приводят к знакопеременным изменениям высоты его полета, которые вызывают периодическое падение и рост частоты вращения НВ.

Сформируем приближенную элементарную оценку максимальной скорости  $W$  действующего ветра, при которой его парирование может осуществляться подсистемой стабилизации параметров полета (автопилотом) САУ БЛА.

Пусть БЛА осуществляет прямолинейный полет на максимальную дальность  $L$  со скоростью  $V = \text{const}$ . Известно, что имеющийся на борту БЛА запас топлива и его часовой расход обеспечивают при этой скорости максимальное время полета, равное  $T$ .

Будем считать, что автопилот БЛА осуществляет стабилизацию его движения по линии заданного пути (ЛЗП) с максимальной величиной отклонения  $\Delta l_{\max}$ .

Рассмотрим ситуацию с действующим на БЛА ветром, представленную на Рис. 4.4,*a*.

Умножим обе части приведенного выше равенства, связывающего синусы угла ветра  $\varepsilon$  и угла сноса  $\psi$ , на величину  $L$ :

$$L \sin \psi = \frac{L}{V} W \sin \varepsilon. \quad (4.2.14)$$

Как было отмечено выше, максимальное значение величины  $\psi$  достигается при угле  $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ .

Подставляя это значение в выражение (4.2.14), имеем:

$$L \sin \psi = \frac{L}{V} W. \quad (4.2.15)$$

На Рис. 4.5 приведены ЛЗП при  $W = 0$  и ее фактическое положение при  $W = \text{const} \neq 0$ ,  $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ . Здесь наряду с параметрами, входящими в формулу (4.2.15), использованы следующие обозначения: НМ – начало маршрута; КМ – конец маршрута при  $W = 0$ ; КМ<sub>ф</sub> – конец фактического маршрута БЛА.

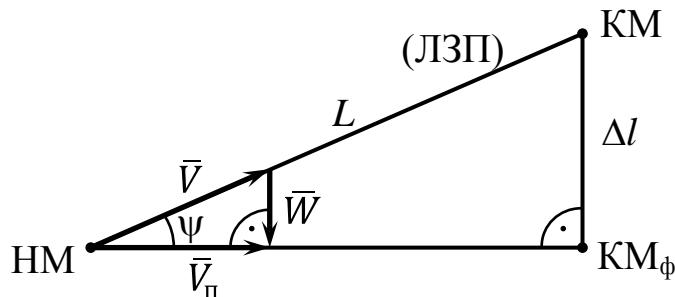


Рис. 4.5

Из треугольника, представленного на Рис. 4.5, видно, что значение отклонения  $\Delta l$  маршрута БЛА от ЛЗП под действием ветра, достигаемое в ее конечной точке, будет равно:

$$\Delta l = L \sin \psi.$$

Выражение  $\frac{L}{V}$  представляет собой величину максимально-го времени  $T$  полета БЛА по ЛЗП.

С учетом этого выражение (4.2.15) представляется как:

$$\Delta l = TW. \quad (4.2.16)$$

Потребуем, чтобы в течение времени  $T$  выполнялось условие вида:

$$\Delta l \leq \Delta l_{\max}.$$

Подставляя в это неравенство правую часть выражения (4.2.16), получаем следующее ограничение на скорость  $W$  ветра:

$$W \leq \frac{\Delta l_{\max}}{T}, \quad (4.2.17)$$

при котором САУ БЛА может парировать действующие ветровые возмущения.

Данная оценка может быть использована при выполнении БЛА некоторого маневра на интервале времени  $[t_0, t_k]$ . В этом случае ограничение (4.2.17) примет вид:

$$W \leq \frac{\Delta l_{\max}}{t_k - t_0}. \quad (4.2.18)$$

#### Пример 4.4

Пусть БЛА имеет следующие значения введенных выше параметров:

$$T = 40 \text{ мин} = 2400 \text{ с}; \quad \Delta l_{\max} = 50 \text{ м}.$$

Тогда применение выражения (4.2.17) дает следующий результат:

$$W \leq \frac{50}{2400} = 0,021 \text{ м/с.}$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что полет БЛА между заданными точками НМ и КМ (см. Рис. 4.5) должен происходить практически при полном отсутствии ветра.

Для маневра БЛА, выполняемого на интервале  $[t_0, t_k] = [10; 20]$  с, получаем из выражения (4.2.18) следующее ограничение на скорость действующего ветра:

$$W \leq \frac{50}{20 - 10} = 5 \text{ м/с.}$$

Последнее означает, что при наличии ветра, скорость которого не превышает 5 м/с, автопилот БЛА может парировать в процессе выполнения маневра действующие ветровые возмущения.

Заметим, что в приведенных выше существующих подходах к учету ветровых возмущений рассматривается только статическое влияние на параметры ЛА и БЛА действующих ветровых возмущений.

Для анализа влияния таких возмущений на динамику полета БЛА можно использовать результаты, приведенные в работе [48].

В качестве исходной предпосылки в ней принимается, что при действии ветра воздушная скорость  $V$  отличается от путевой скорости  $V_p$  по величине и направлению, которые определяются возмущенными углами атаки  $\alpha_w$  в вертикальной плоскости и скольжения  $\beta_w$  в горизонтальной плоскости. Утверждается, что изменение значения и направления скорости  $V$  приводит к появлению дополнительных сил и моментов, действующих на ЛА и изменяющих исходный режим его полета.

Отметим некоторые недостатки работы [48], которые необходимо исключить при описании динамики движения БЛА в неспокойной атмосфере.

При моделировании движения ЛА в условиях ветра предлагаются рассматривать его как твердое тело [22]. При таком предположении в работе [48] разработаны частные модели продольного и бокового движения ЛА, которые в последующем линеаризуются и используются для анализа влияния турбулентности на колебания значений  $\vartheta$ ,  $n_y$ , координат ЦМ ЛА и др. Недостаточно подробно рассматриваются динамические уравнения, описывающие взлет и посадку ЛА в условиях действия попутного и бокового ветра. При этом процесс посадки ЛА по глиссаде моделируется при составляющих скорости ветра

$w_x = 0$  м/с;  $w_y = 0$  м/с и  $w_z = 10$  м/с только до высоты  $h = 30\text{--}50$  м без его пробега по ВВП.

#### **4.3. Общий метод моделирования движения БЛА в неспокойной атмосфере**

Приведенный выше анализ влияния действующего ветра на основные параметры полета БЛА показал отсутствие общего подхода, пригодного для практического использования при эксплуатации БЛА.

Рассмотрим общий случай влияния произвольных ветровых возмущений, описываемых вектором  $\bar{W} = (w_x, w_y, w_z)$ , на вектор фазовых координат  $(V, \theta, \Psi, x, y, z)$  общей модели управляемого движения БЛА самолетной и вертолетной схем (1.3)-(1.6).

Влияние ветра на изменение координат пространственного положения БЛА будем описывать, преобразовав кинематические уравнения его движения (1.4) к виду [11]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V \cos \theta \cos \Psi \pm w_x; \\ \dot{y} &= V \sin \theta \pm w_y; \\ \dot{z} &= V \cos \theta \sin \Psi \pm w_z.\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

В правые части этих уравнений в зависимости от действующих на БЛА в конкретном полете ветровых возмущений (см. Рис. 4.2) подставляется одно из выражений из состава соотношений (4.1.3), (4.1.5)-(4.1.7).

Интегрирование уравнений (4.3.1) при заданных зависимостях  $V = V(t)$ ,  $\theta = \theta(t)$ ,  $\Psi = \Psi(t)$  позволяет построить возмущенную траекторию  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  движения БЛА.

Для формирования зависимостей фазовых координат  $V$ ,  $\theta$ ,  $\Psi$  от значений компонент вектора скорости ветра  $w_x, w_y, w_z$  будем использовать расчетную схему, приведенную на Рис. 4.6.

На этом рисунке векторы воздушной скорости  $\bar{V}$ , ветра  $\bar{W}$  и путевой скорости  $\bar{V}_p$  приведены к земной СК с началом в ЦМ БЛА. Компоненты вектора  $\bar{W}$  представлены как положительные величины, тогда как на практике в зависимости от направления действующего ветра они могут быть как положительными, так и отрицательными. Это определяет рассматриваемую произвольную ориентацию вектора  $\bar{W}$  в пространстве.

На Рис. 4.6 представлены углы  $\theta$ ,  $\Psi$  и  $\theta_{\text{п}}$ ,  $\Psi_{\text{п}}$ , определяющие ориентацию в пространстве векторов воздушной ( $\bar{V}$ ) и путевой ( $\bar{V}_{\text{п}}$ ) скоростей БЛА.

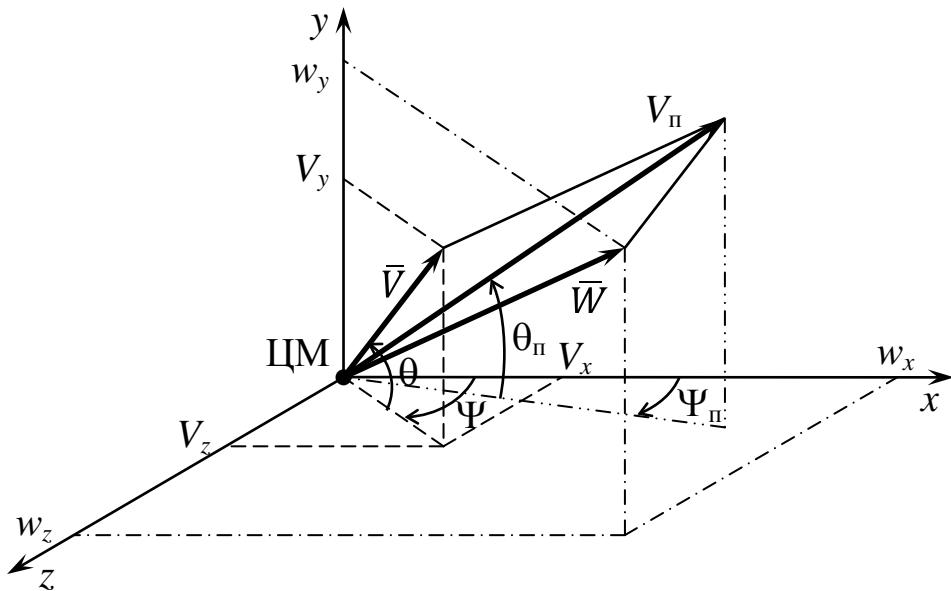


Рис. 4.6

Сформируем общее выражение для вычисления значения путевой скорости БЛА при заданных невозмущенных значениях фазовых координат  $V$ ,  $\theta$ ,  $\Psi$  и характеристиках  $w_x$ ,  $w_y$ ,  $w_z$  действующего ветра.

Известно, что компоненты  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  вектора  $\bar{V}$  воздушной скорости БЛА связаны с производными его координат  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  выражениями [22]:

$$V_x = \dot{x}; \quad V_y = \dot{y}; \quad V_z = \dot{z}.$$

Тогда уравнения (1.4) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} V_x &= V \cos \theta \cos \Psi; \\ V_y &= V \sin \theta; \\ V_z &= V \cos \theta \sin \Psi. \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Здесь  $V$  – модуль (значение) вектора  $\bar{V}$  воздушной скорости БЛА.

Используя правило сложения векторов [17], получаем, что вектор  $\bar{V}_\pi$  путевой скорости БЛА, описываемый выражением (4.2.1), представляется в координатной форме как:

$$V_\pi = (V_x \pm w_x; V_y \pm w_y; V_z \pm w_z). \quad (4.3.3)$$

Модуль этого вектора вычисляется по формуле:

$$V_\pi = \sqrt{(V_x \pm w_x)^2 + (V_y \pm w_y)^2 + (V_z \pm w_z)^2}.$$

Подставляя в эту формулу правые части выражений (4.3.2) и проведя необходимые преобразования, получим:

$$\begin{aligned} V_\pi = & \left( V^2 + 2V(\pm w_x \cos \theta \cos \Psi \pm w_y \sin \theta \pm \right. \\ & \left. \pm w_z \cos \theta \sin \Psi) + w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 \right)^{0,5}. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Отметим, что данное соотношение является обобщением формулы (4.2.3), позволяющее вычислять значение путевой скорости БЛА при произвольном направлении вектора  $\bar{W}$  в пространстве.

Определим по этой формуле путевую скорость в процессе разбега БЛА по ВПП (см. Разд. 7.3) при ветре с характеристиками  $w_x \neq 0, w_y = w_z = 0$ . Полагая в формуле (4.3.4) значения углов  $\theta = 0, \Psi = 0$ , получим:

$$V_\pi = \sqrt{V^2 \pm 2Vw_x + w_x^2} = \sqrt{(V \pm w_x)^2} = V \pm w_x$$

Этот результат полностью соответствует значению  $V_\pi$ , использованному в работе [23].

Построим зависимость угла наклона траектории БЛА от «невозмущенных» значений  $V, \theta, \Psi$  и компонент вектора скорости ветра  $\bar{W}$ .

По аналогии с путевой скоростью БЛА будем называть этот угол путевым и обозначим его как  $\theta_\pi$ .

Из второго равенства, входящего в выражения (4.3.2), следует, что

$$\theta = \arcsin\left(\frac{V_y}{V}\right).$$

Для путевой скорости БЛА, которая определяется формулами (4.2.1) и (4.3.3), будем считать, что значение  $\theta_{\Pi}$  по аналогии с этим выражением определяется как:

$$\theta_{\Pi} = \arcsin\left(\frac{V_y \pm w_y}{V_{\Pi}}\right), \quad (4.3.5)$$

Используя выражения (4.3.2), (4.3.3) и (4.3.4), конкретизируем эту зависимость соотношением вида:

$$\theta_{\Pi} = \arcsin \frac{V \sin \theta \pm w_y}{V_{\Pi}}, \quad (4.3.6)$$

где значение  $V_{\Pi}$  вычисляется по формуле (4.3.4).

Из этого выражения следует, что при полном отсутствии ветра, то есть при  $w_x = w_y = w_z = 0$ , получаем тождество:  $\theta_{\Pi} = \theta$ .

Построим такую же зависимость для путевого угла  $\Psi_{\Pi}$  поворота траектории БЛА при воздействии на него ветра с характеристиками  $w_x \neq 0$ ,  $w_y \neq 0$  и  $w_z \neq 0$ .

Как видно на Рис. 4.6, значение «невозмущенного» угла  $\Psi$  можно определить как:

$$\Psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{V_z}{V_x}\right).$$

С использованием компонент вектора  $\bar{V}_{\Pi}$ , описываемых выражением (4.3.3), можно записать аналогичную формулу вида:

$$\Psi_{\Pi} = \operatorname{arctg}\left(\frac{V_z \pm w_z}{V_x \pm w_x}\right).$$

Подставляя сюда значения  $V_x$  и  $V_z$ , из выражений (4.3.2) получим окончательный вид формируемой зависимости:

$$\Psi_{\Pi} = \operatorname{arctg}\left(\frac{V \cos \theta \sin \Psi \pm w_z}{V \cos \theta \cos \Psi \pm w_x}\right). \quad (4.3.7)$$

Отметим, что при  $w_x = 0$ ,  $w_z = 0$  из этой формулы получаем тождество:  $\Psi_{\text{пп}} = \Psi$ .

Если считать, что полет БЛА при действии ветра является квазипрямoliniйным [13], для которого выполняются условия:

$$\sin \theta \approx \theta; \cos \theta \approx 1; \sin \Psi \approx \Psi; \cos \Psi \approx 1,$$

то формулы (4.3.4), (4.3.6), (4.3.7) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} V_{\text{пп}} &= \sqrt{V + 2V(\pm w_x \pm w_y \theta \pm w_z \Psi) + w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}; \\ \theta_{\text{пп}} &= \arcsin \left( \frac{V\theta \pm w_y}{\sqrt{V^2 + 2V(\pm w_x \pm w_y \theta \pm w_z \Psi) + W^2}} \right); \\ \Psi_{\text{пп}} &= \operatorname{arctg} \left( \frac{V\Psi \pm w_z}{V \pm w_x} \right). \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Заметим, что при наличии «пространственного» ветра с компонентами его скорости  $w_x \neq 0$ ,  $w_y \neq 0$  и  $w_z \neq 0$  движения БЛА строго в вертикальной и горизонтальной плоскостях могут отсутствовать.

Например, при построении модели полета БЛА в вертикальной плоскости [7] предполагается, что угол  $\Psi = 0$ . Но из формулы (4.3.7) следует, что

$$\Psi_{\text{пп}} = \operatorname{arctg} \left( \frac{\pm w_z}{V \cos \theta \pm w_x} \right) \neq 0.$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что при программировании траекторий движения БЛА в неспокойной атмосфере для решения плоских задач динамики их полета необходимо использовать общие модели их пространственного движения.

Пусть требуется осуществить моделирование движения БЛА в неспокойной атмосфере на интервале времени  $[t_0, t_k]$  с использованием общей модели (1.3)-(1.6) при заданном векторе управления  $u(t)$ .

Будем считать, что от метеоролога БАЭ получены в одном из видов (4.1.3), (4.1.5)-(4.1.7) данные о векторе скорости ветра  $\bar{W} = (w_x, w_y, w_z)$ , действующего в интервале времени  $[t_0, t_k]$  в районе движения БЛА.

В вычислительную схему моделирования движения БЛА, формируемую на основе выражений (1.3) и (1.4), включим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= f_1(V, \theta, \Psi, y, u); \quad t \in [t_0, t_k]; \\ \dot{\theta} &= f_2(V, \theta, \Psi, y, u);\end{aligned}\tag{4.3.9}$$

$$\begin{aligned}\dot{\Psi} &= f_3(V, \theta, \Psi, y, u); \\ \dot{y} &= V \sin \theta.\end{aligned}\tag{4.3.10}$$

Значения фазовых координат  $V(t), \theta(t), \Psi(t)$ , полученных в момент времени  $t \in [t_0, t_k]$ , при интегрировании системы (4.3.9), (4.3.10) подставляются наряду со значениями  $w_x, w_y, w_z$  в правые части выражений (4.3.4), (4.3.6), (4.3.7) для вычисления текущих возмущенных значений скорости  $V_{\pi}(t)$  и углов наклона  $\theta_{\pi}(t)$  и поворота  $\Psi_{\pi}(t)$  траектории движения БЛА.

Отметим, что интегрирование уравнений (4.3.9) выполняется при возмущенных начальных условиях, которые определяются путем подстановки в формулы (4.3.4), (4.3.6), (4.3.7) значений из правых частей выражений (1.5). Начальное условие для уравнения (4.3.10) берется из выражений (1.6).

Возмущенная траектория движения БЛА определяется путем интегрирования кинематических уравнений вида:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{\pi} &= V_{\pi}(t) \cos \theta_{\pi}(t) \cos \Psi_{\pi}(t); \\ \dot{y}_{\pi} &= V_{\pi}(t) \sin \theta_{\pi}(t); \\ \dot{z}_{\pi} &= V_{\pi}(t) \cos \theta_{\pi}(t) \sin \Psi_{\pi}(t).\end{aligned}\tag{4.3.11}$$

с начальными условиями:

$$x_{\pi}(t_0) = x_0; \quad y_{\pi}(t_0) = y_0; \quad z_{\pi}(t_0) = z_0.\tag{4.3.12}$$

Решение задачи Коши (4.3.11), (4.3.12) также включается в вычислительную схему моделирования возмущенного движения БЛА.

Таким образом, в программную реализацию предлагаемой схемы входят:

- блоки определения начальных условий и численного интегрирования системы (4.3.9), (4.3.10);
- расчетный блок, использующий формулы (4.3.4), (4.3.6), (4.3.7);
- блок численного интегрирования уравнений (4.3.11).

При этом используются соответствующие численные методы решения систем дифференциальных уравнений, приведенные Разд. 3.1.

При моделировании движения БЛА в спокойной атмосфере, то есть при  $w_x = w_y = w_z = 0$ , расчетный блок этой схемы не применяется, а в блоке интегрирования уравнений (4.3.11) используются результаты решения системы уравнений (4.3.9). Начальные условия для такого моделирования задаются выражениями (1.5) и (1.6).

Блок-схема алгоритма программной реализации предлагаемого подхода с использованием расчетной схемы метода Эйлера (3.1.11) для численного интегрирования уравнения (4.3.9)-(4.3.11) приведена на Рис. 4.7.

В этой блок-схеме параметром  $\Delta t$  (см. блоки 2, 5, 7, 8) обозначена величина шага интегрирования  $h$ . Кроме этого принято, что  $z_{rj} = z_r(t)$ ;  $z_{rj+1} = z_r(t + \Delta t)$ , а функции  $f_r$ ,  $r = (\overline{1,7})$  соответствуют правым частям уравнений (4.3.9)-(4.3.11). Символ « $:=$ » (см. блоки 4, 8) означает операцию присвоения.

В правых частях выражений, входящих в блок 7, используются значения  $V_\pi, \theta_\pi, \Psi_\pi$ , вычисленные в блоке 5 в момент времени  $t > t_0$ . При  $t = t_0$  в блоке 7 используются значения  $x_0, y_0, z_0$  и  $V_{\pi 0}, \theta_{\pi 0}, \Psi_{\pi 0}$  из блоков 2 и 3.

Заметим, что на практике в блоках 5 и 7 могут использоваться расчетные формулы более точного метода Рунге-Кутта (см. Разд. 3.1).

На Рис. 4.8 представлено поведение невозмущенных и возмущенных фазовых траекторий общей модели (1.3)-(1.6) управляемого движения БЛА. Для удобства фазовый вектор  $(V, \theta, \Psi, x, y, z)$  БЛА представлен в двух пространствах векторов  $(V, \theta, \Psi)$  и  $(x, y, z)$ .

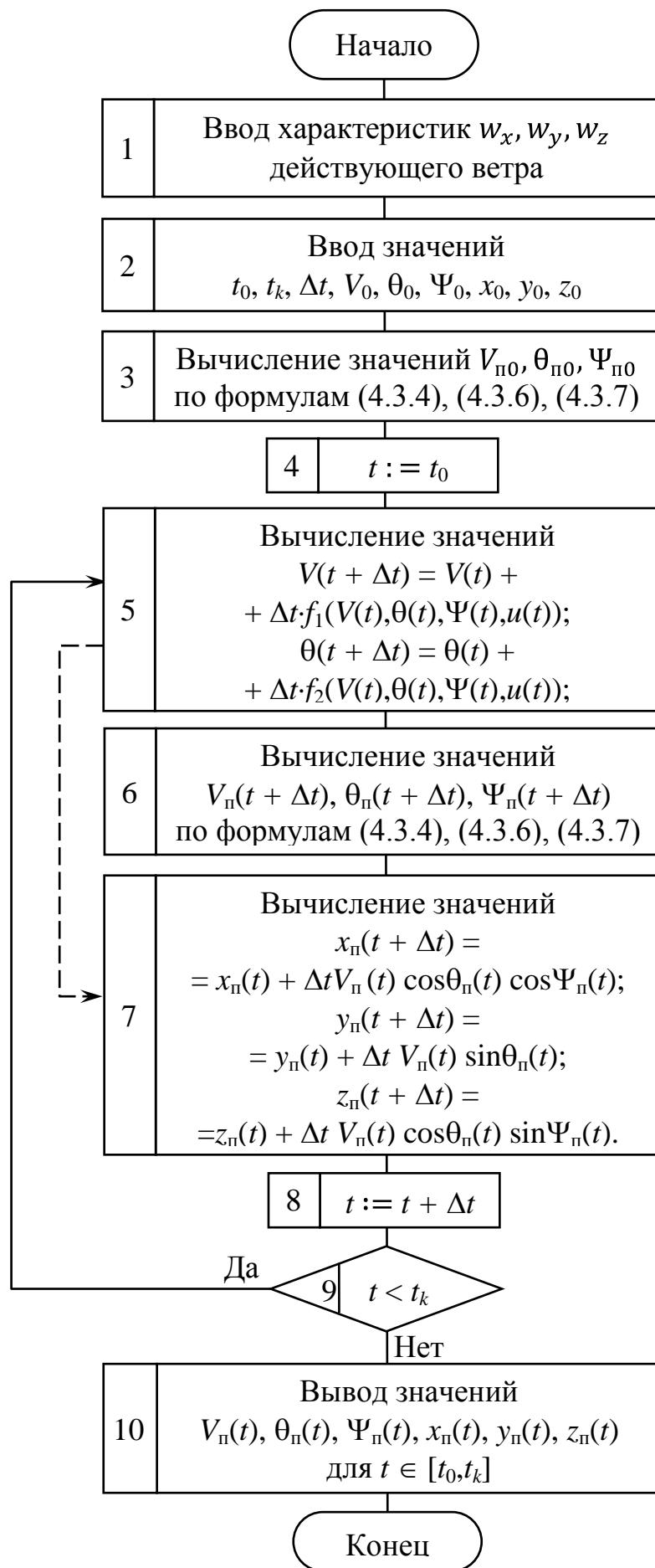


Рис. 4.7

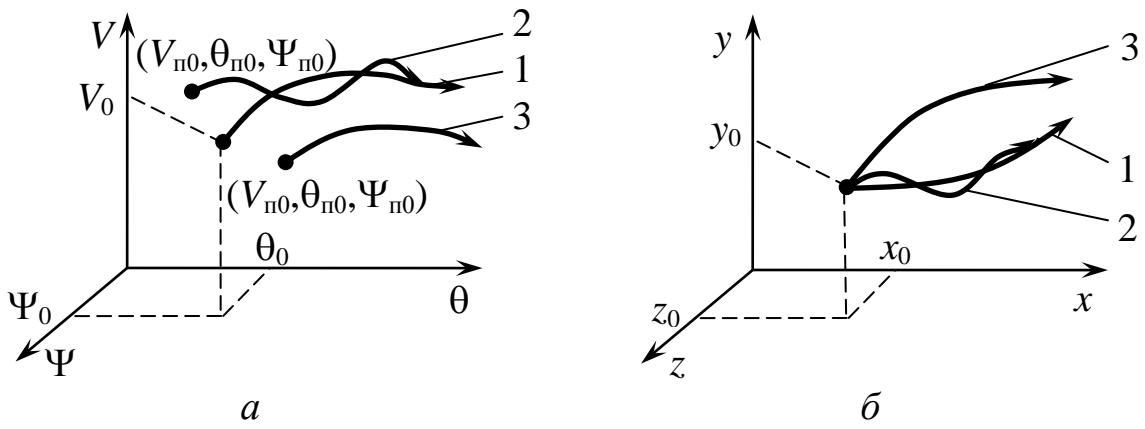


Рис. 4.8

На Рис. 4.8,*а* приведены фазовая траектория невозмущенного движения БЛА (кривая 1) и траектории его движения при различных возмущенных начальных условиях  $V_{\text{п}0}, \theta_{\text{п}0}, \Psi_{\text{п}0}$  (кривые 2 и 3). При этом кривая 2 соответствует случаю, когда начальные возмущения ликвидируются системой стабилизации параметров полета (автопилотом) САУ БЛА. В этом случае через определенный интервал времени фазовая кривая 2 попадает в достаточно малую окрестность кривой 1 или совпадает с ней. Кривая 3 иллюстрирует случай, при котором возмущенные начальные условия  $V_{\text{п}0}, \theta_{\text{п}0}, \Psi_{\text{п}0}$  вызывают значительные отклонения от невозмущенной кривой 1. Такие отклонения согласно формулам (4.3.4), (4.3.6) и (4.3.7) независимо от значений  $w_x, w_y, w_z$  увеличивают возмущенные значения фазовых координат  $V_{\text{п}}, \theta_{\text{п}}, \Psi_{\text{п}}, x_{\text{п}}, y_{\text{п}}, z_{\text{п}}$ .

Заметим, что в соответствии с выражениями (4.3.11), (4.3.12) все фазовые траектории во втором пространстве, представленные на Рис. 4.8,*б*, начинаются в начальной точке  $x_0, y_0, z_0$ .

Приведенная геометрическая иллюстрация позволяет еще раз отметить важность наличия в составе САУ БЛА подсистемы стабилизации его полета (автопилота) с каналами, которые должны обеспечивать заданные значения скорости  $V(t)$ , угла тангажа  $\vartheta(t)$  и угла рыскания  $\psi(t)$ . Эффективная работа двух

последних каналов будет обеспечивать выдерживание в полете заданных значений углов  $\theta(t)$  и  $\Psi(t)$ .

В последующих Главах 5-7 предложенный в данном разделе общий метод будет конкретизирован для задач моделирования движения в неспокойной атмосфере БЛА самолетного и вертолетного схем на различных этапах и режимах их полета. Кроме этого метода существует подход к учету ветровых возмущений, связанный с непосредственным использованием уравнений (4.3.1). Элементы такого подхода рассмотрены в Главе 9.

На актуальность материалов данной главы указывают оценки специалистов по боевому применению БЛА. Из них следует, что до 40% боевых задач БЛА решались в сложных метеорологических условиях. Кроме того, до 60% вылетов БЛА осуществлялось ночью или рано утром. Эта тенденция, по их мнению, сохранится и в ближайшие 10-15 лет.

## **Глава 5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЯЕМОГО ПОЛЁТА БЛА САМОЛЁТНОЙ СХЕМЫ**

Как было отмечено в Главе 1, данная схема БЛА получила к настоящему времени наибольшее распространение как у нас в стране, так и за рубежом.

В данной главе, в соответствии с Разд. 1.5, конкретизируются применительно к рассматриваемому виду БЛА уравнения движения вида (1.3), (1.4). При этом, обсуждаются общепринятые уравнения движения самолета как твердого тела [22] и приводится с необходимыми предположениями методика получения на их основе упрощенных уравнений управляемого движения центра масс (ЦМ) БЛА, инвариантных конструктивным схемам БЛА, таким как классическая схема, схема «утка», схема «летающее крыло» и схема «бесхвостка» [46].

В качестве вектора косвенного управления  $u(t)$  рассматривается в общем случае вектор вида (1.7), который в последующем преобразуется в вектор прямого управления  $\Delta(t)$  БЛА классической схемы, описываемый выражением (1.8).

На основе сформированной модели пространственного управляемого полета БЛА строятся традиционные частные модели движения в вертикальной и горизонтальной плоскостях и приводятся используемые в них конкретизации вектора управления  $u(t)$ .

Оригинальными материалами данной главы являются модель движения БЛА в географических координатах (долгота, широта, высота), которая предназначена для программирования дальних и сверхдальних полетов БЛА, полетов над морскими и океанскими акваториями. В главе также приводятся не отраженные в существующей литературе по БЛА модели установленных режимов их полетов.

Для предлагаемых моделей в соответствующих разделах главы рассматриваются вопросы формирования векторов управлений  $u(t)$  с использованием концепции обратных задач управления динамическими объектами, изложенной в Разд. 2.3.

В главе приводятся рекомендации по моделированию полета БЛА в неспокойной атмосфере, базирующиеся на общем методе учета ветровых возмущений, описанном в Разд. 4.3.

В заключение главы предлагается оригинальная методика формирования компонент вектора прямого управления  $\Delta(t)$  пространственным движением БЛА, конкретизирующая выражения вида (1.9) применительно к их наиболее распространенной классической конструктивной схеме.

## 5.1. Модели пространственного движения БЛА

В существующей литературе по динамике полета [2, 7, 13, 19, 21, 24, 27, 28, 29] ЛА рассматривается как твердое тело [22], имеющее 6 степеней свободы, при которых реализуются 3 вида поступательных движений его ЦМ и 3 вида вращательных движений относительно ЦМ.

В скоростной системе координат (СК) динамические уравнения движения ЦМ БЛА имеют вид [15]:

$$m\dot{V} = \sum F_x; \quad (5.1.1)$$

$$mV\omega_z = \sum F_y; \quad (5.1.2)$$

$$mV \cos \theta \omega_y = \sum F_z. \quad (5.1.3)$$

Динамические уравнения вращения БЛА вокруг его ЦМ в связанной СК в общем случае записываются как [15]:

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= M_x; \\ J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z &= M_y; \\ J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_y \omega_x &= M_z. \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

В этих уравнениях использованы следующие обозначения:  $m$  – масса БЛА;  $V = V(t)$  – скорость БЛА в момент времени  $t$ ;

$\dot{V} = \dot{V}(t)$  – производная по времени скорости БЛА (ускорение БЛА в момент времени  $t$ );  $\theta = \theta(t)$  – угол наклона траектории БЛА;  $\sum F_x$ ,  $\sum F_y$ ,  $\sum F_z$  – суммы проекций всех сил, действующих на БЛА на оси ( $\text{ЦМ}x$ ), ( $\text{ЦМ}y$ ) и ( $\text{ЦМ}z$ ) скоростной СК;  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  – угловые скорости вращения БЛА относительно соответствующих осей связанной СК;  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  – суммы проекций моментов на эти оси всех действующих на БЛА сил относительно его ЦМ;  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  – главные центральные моменты инерции БЛА относительно осей связанной СК.

Для согласования применяемых при описании движения БЛА систем координат используются следующие уравнения [15]:

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma); \\ \dot{\vartheta} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma; \\ \dot{\gamma} &= \omega_x - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma);\end{aligned}\quad (5.1.5)$$

$$\sin \theta = \cos \alpha \cos \beta \sin \vartheta - (\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma) \cos \vartheta;$$

$$\begin{aligned}\sin \Psi \cos \theta &= \cos \alpha \cos \beta \sin \psi \cos \vartheta + \\ &+ \sin \alpha \cos \beta (\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma) - \\ &- \sin \beta (\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma);\end{aligned}\quad (5.1.6)$$

$$\begin{aligned}\sin \gamma_c \cos \theta &= \cos \alpha \sin \beta \sin \vartheta - \\ &- \cos \vartheta (\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V \cos \theta \cos \Psi; \\ \dot{y} &= V \sin \theta; \\ \dot{z} &= V \cos \theta \sin \Psi.\end{aligned}\quad (5.1.7)$$

Здесь  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\gamma$  – соответственно углы рыскания, тангажа и крена БЛА;  $\Psi$  – угол поворота траектории БЛА;  $\alpha$ ,  $\beta$  – углы атаки и скольжения БЛА;  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – координаты БЛА в земной СК (МНПУ $xyz$ ), представленной на Рис. 1.9.

Определения всех введенных выше параметров и характеристик полета БЛА можно найти в работе [82].

Система уравнений (5.1.1)-(5.1.7), включающая в себя 15 уравнений, описывает пространственное движение неуправляемого полета БЛА относительно земных осей координат.

Эта система является замкнутой, т.к. число неизвестных функций  $V(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\Psi(t)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\gamma_c(t)$ ,  $\omega_x(t)$ ,  $\omega_y(t)$ ,  $\omega_z(t)$ ,  $\vartheta(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\gamma(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  совпадает с ее порядком.

Для осуществления управляемого полета БЛА к этим уравнениям необходимо добавить уравнения углов отклонения органов прямого управления (см. выражение (1.9)), с помощью которых осуществляется изменение значений правых частей уравнений (5.1.1)-(5.1.7) и, следовательно, положения БЛА в пространстве.

На Рис. 5.1 представлены органы аэродинамического управления полетом БЛА классической схемы [15].

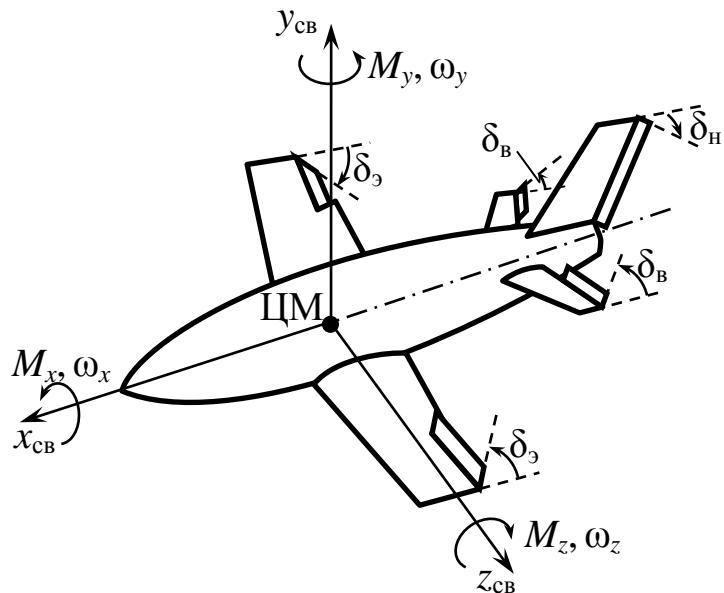


Рис. 5.1

Эти органы осуществляют следующие изменения параметров движения БЛА:

- угол  $\delta_v$  отклонения руля высоты, изменяет угол тангенса  $\vartheta$ , момент  $M_z$  и угловую скорость  $\omega_z$ ;

- угол  $\delta_h$  отклонения руля направления, при котором происходит изменение угла рыскания  $\psi$ , момента  $M_y$  и скорости  $\omega_y$ ;
- угол  $\delta_e$  отклонения элеронов, влияющий на изменение угла крена  $\gamma$ , которое приводит к изменению параметров  $M_x$ ,  $\omega_x$ ,  $M_y$  и  $\omega_y$ .

При этом считается [82], что углы  $\delta_v$  и  $\delta_e$  положительны при отклонениях соответствующих органов управления вниз, а угол  $\delta_h$  будет положительным при отклонении руля направления вправо.

Выбирая те или иные законы изменения значений  $\delta_v = \delta_v(t)$ ,  $\delta_h = \delta_h(t)$ ,  $\delta_e = \delta_e(t)$  во времени, можно получить различные виды движения как ЦМ БЛА, так и относительно его ЦМ, описываемые уравнениями (5.1.1)-(5.1.7).

Заметим, что для БЛА иных конструктивных схем состав органов управления будет другим. Например, для БЛА схемы «утка» в качестве  $\delta_v$  используется угол поворота переднего стабилизатора, а для БЛА типа «летающее крыло» – углы поворотов дифференциальных элеронов (элевонов) [82].

Модель вида (5.1.1)-(5.1.7) представляет весьма трудоемкую для решения систему нелинейных дифференциальных и трансцендентных уравнений 15-го порядка, которая является практически непригодной для оперативного программирования полетов БЛА персоналом БАК.

Для практической реализации процессов программирования полетов БЛА проведем упрощение указанной выше модели.

Как было отмечено в Главе 1, для решения траекторных задач будем рассматривать БЛА как материальную точку массы  $m$  [22], движение которой описывается уравнениями (5.1.1)-(5.1.3) и (5.1.7).

Рассмотрим предположения, позволяющие исключить из рассмотрения при оперативном программировании полетов БЛА уравнения (5.1.4) и (5.1.6) [15].

В реальном полете после реализации отклонений рулей  $\delta_v \neq 0$ ,  $\delta_e \neq 0$  и  $\delta_n \neq 0$  углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  в результате колебаний БЛА вокруг его ЦМ устанавливаются не сразу, а через некоторый интервал времени, называемый временем переходных процессов БЛА по каналам тангажа, рыскания и крена.

Считая, что для эффективного управления БЛА эти времена должны быть достаточно малыми величинами, можно предположить, что углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  устанавливаются мгновенно при изменении положений соответствующих органов управления БЛА.

Такое предположение об идеальности системы управления БЛА позволяет считать его безинерционным вращающимся объектом, для которого выполняются условия [15]:

$$J_x = J_y = J_z = 0.$$

Тогда из уравнений (5.1.4) получаем, что

$$M_x = M_y = M_z = 0. \quad (5.1.8)$$

Последнее означает, что при изменении значений управляющих воздействий углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  мгновенно принимают значения, при которых все эти моменты равны нулю. В этом случае предполагается, что БЛА спроектирован как сбалансированный устойчивый объект, для которого условия (5.1.8) выполняются в течение всего полета.

Возможность практического применения модели (5.1.1)-(5.1.3) дополнительно обосновывается тем, что движение ЦМ БЛА обладает большой инерционностью, а его колебания вокруг ЦМ вызывают сравнительно малые отклонения траектории полета БЛА [7].

Будем считать, что угловые скорости  $\omega_z = \dot{\theta}$  и  $\omega_y = \dot{\Psi}$ . Тогда эти уравнения примут вид:

$$\begin{aligned}
 m\dot{V} &= \sum F_x; \\
 mV\dot{\theta} &= \sum F_y; \\
 mV \cos \theta \cdot \dot{\Psi} &= \sum F_z.
 \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

Конкретизируем правые части полученных уравнений. Известно [7], что на БЛА в полете действуют следующие силы, приложенные к ЦМ БЛА:  $G = mg$  – сила тяжести БЛА;  $P$  – сила тяги двигателей БЛА;  $X$  – сила лобового сопротивления;  $Y$  – подъёмная сила;  $Z$  – боковая сила,

На Рис. 5.2 приведено расположение этих сил в плоскостях скоростной ( $\text{ЦМ}x_{\text{ск}}y_{\text{ск}}$ ), связанной ( $\text{ЦМ}x_{\text{св}}y_{\text{св}}$ ) и земной ( $\text{ЦМ}xy$ ) систем координат.

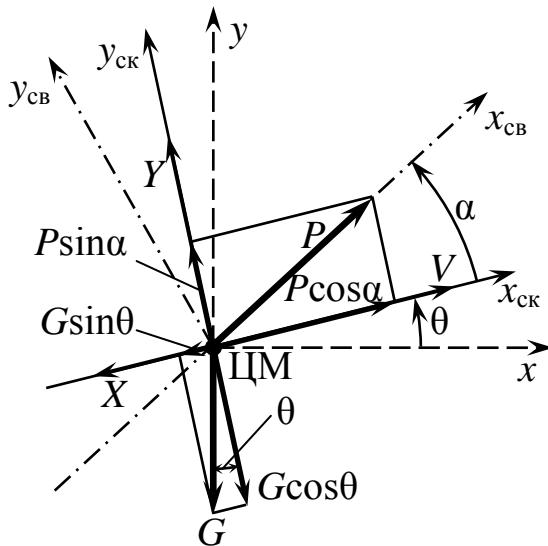


Рис. 5.2

Из этого рисунка следует, что сумма проекций сил на ось ( $\text{ЦМ}x_{\text{ск}}$ ) имеет вид:

$$\sum F_x = P \cos \alpha - X - G \sin \theta. \tag{5.1.10}$$

Соответственно сумма проекций сил на ось ( $\text{ЦМ}y_{\text{ск}}$ ) вычисляется как:

$$\sum F_y = P \sin \alpha + Y - G \cos \theta. \tag{5.1.11}$$

Сумма сил (5.1.10) обеспечивает изменение значения вектора скорости  $V(t)$  полета БЛА. В свою очередь вторая сумма

сил (5.1.11) поворачивает вектор скорости  $V(t)$  вокруг ЦМ на угол  $\theta$  между земной и скоростной СК.

Рассмотрим состав сил, входящих в сумму  $\sum F_z$ , которая обеспечивает поворот вектора скорости  $V(t)$  вокруг оси (ЦМ $y_{\text{ск}}$ ) на угол  $\Psi$  между осями (ЦМ $x$ ) и (ЦМ $x_{\text{ск}}$ ). Способы обеспечения такого поворота БЛА показаны на Рис. 5.3.

Боковой маневр на постоянной высоте полета БЛА может совершить путем поворота на угол  $\delta_n$  руля направления и возникшей при этом боковой аэродинамической силы  $Z$  (см. Рис. 5.3,*a*).

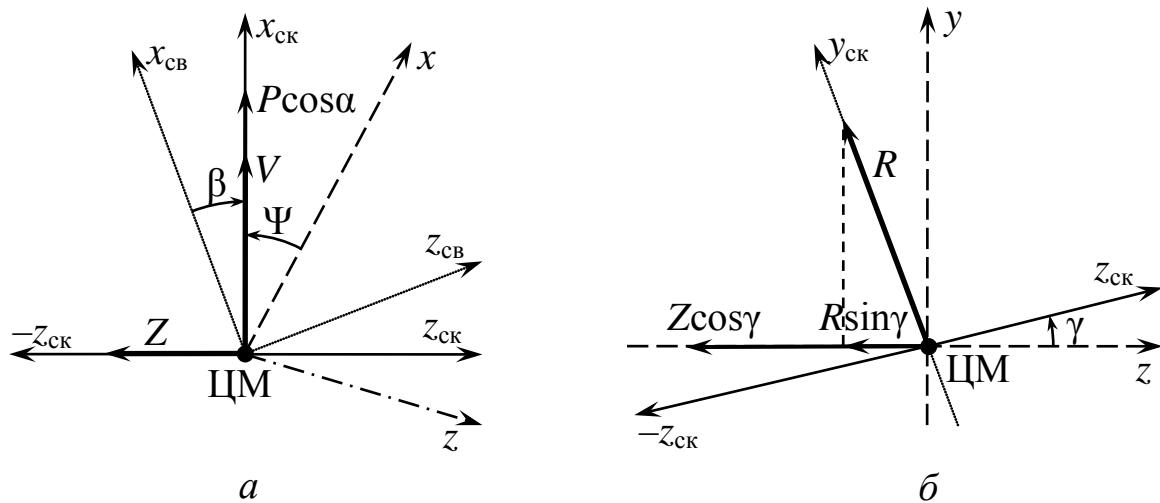


Рис. 5.3

При втором способе боковое движение БЛА осуществляется за счет угла крена  $\gamma$ , возникающего за счет соответствующего угла  $\delta_e$  отклонения элеронов (см. Рис. 5.3,*b*).

На этом рисунке сила  $R$  является равнодействующей [22] всех сил, лежащих на положительной полуоси (ЦМ $y_{\text{ск}}$ ) (см. Рис. 5.2) и вычисляется как:

$$R = Y + P \sin \alpha.$$

В этом случае поворот вектора скорости  $V(t)$  на угол  $\Psi$  будет происходить под действием силы:

$$Z^* = (Y + P \sin \alpha) \sin \gamma + Z \cos \gamma.$$

В связи с тем, что при крене БЛА возникает угол скольжения  $\beta$ , имеем, что

$$\sum F_z = (P \sin \alpha + Y) \sin \gamma + (-P \cos \alpha \sin \beta + Z) \cos \gamma. \quad (5.1.12)$$

Таким образом, уравнения (5.1.9) после подстановки в них выражений (5.1.10)-(5.1.12) примут следующий вид [7]:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= P \cos \alpha \cos \beta - X - mg \sin \theta; \\ mV\dot{\theta} &= (P \sin \alpha + Y) \cos \gamma - \\ &\quad -(Z - P \cos \alpha \sin \beta) \sin \gamma - mg \cos \theta; \\ mV \cos \theta \cdot \dot{\Psi} &= (P \sin \alpha + Y) \sin \gamma + (Z - P \cos \alpha \sin \beta) \cos \gamma. \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

В эти уравнения входят углы  $\alpha$  и  $\beta$ , которые, как показала практика, при реальных полетах БЛА не превышают  $20^\circ$  ( $0,349$  рад) [7].

В связи с тем, что  $\sin 20^\circ = 0,342$ ,  $\cos 20^\circ = 0,940$ , можно считать, что

$$\sin \alpha \approx \alpha; \quad \sin \beta \approx \beta,$$

с ошибкой, не превышающей 2%.

Замена вида:

$$\cos \alpha \approx 1; \quad \cos \beta \approx 1$$

дает ошибку не более 6% [7].

Такие значения ошибок являются допустимыми в инженерных расчётах, поэтому систему уравнений (5.1.13) можно представить в следующем упрощенном виде:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= P - X - mg \sin \theta; \\ mV\dot{\theta} &= (P\alpha + Y) \cos \gamma - (Z - P\beta) \sin \gamma - mg \cos \theta; \\ mV \cos \theta \cdot \dot{\Psi} &= (P\alpha + Y) \sin \gamma + (Z - P\beta) \cos \gamma. \end{aligned}$$

В нормальной форме вида (2.1.11) эта система дифференциальных уравнений записывается как:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{P - X}{m} - g \sin \theta, \quad t \in [t_0, t_k]; \\ \dot{\theta} &= \frac{(P\alpha + Y) \cos \gamma - (Z - P\beta) \sin \gamma}{mV} - \frac{g}{V} \cos \theta; \\ \dot{\Psi} &= \frac{(P\alpha + Y) \sin \gamma + (Z - P\beta) \cos \gamma}{mV \cos \theta}. \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

Для этой модели в качестве вектора косвенного управления  $u(t)$  используется вектор (1.7).

Дальнейшее упрощение полученных уравнений можно осуществить с использованием результатов работ [7, 15].

В этих работах отмечается, что первый способ бокового маневрирования БЛА (плоский разворот при угле крена  $\gamma = 0$ ) мало используется на практике, так как фюзеляж и небольшое по площади вертикальное оперение БЛА при небольших углах  $\beta$  не могут создать достаточно большой боковой аэродинамической силы  $Z$  для обеспечения его требуемой маневренности.

В случае его использования для маломаневренных БЛА, полагая в уравнениях (5.1.14) угол  $\gamma = 0$ , получаем модель вида:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= P - X - mg \sin \theta; \\ mV\dot{\theta} &= P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y - mg \cos \theta; \\ mV \cos \theta \cdot \dot{\Psi} &= Z - P\beta. \end{aligned}$$

Преобразованная к нормальной форме записи вида (2.1.11) эта модель движения БЛА представляется в следующей форме:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{P - X}{m} - g \sin \theta, \quad t \in [t_0, t_k]; \\ \dot{\theta} &= \frac{P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y}{mV} - \frac{g}{V} \cos \theta; \\ \dot{\Psi} &= \frac{Z - P\beta}{mV \cos \theta}. \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

Заметим, что в эту модель введен угол  $\varphi_{\text{дв}}$  установки двигателя, который равен углу между его осью и строительной осью БЛА [7]. Небольшое значение этого угла выбирается при проектировании БЛА для обеспечения его продольной устойчивости.

Для модели (5.1.15) вектор косвенного управления будет иметь вид:

$$u(t) = (P(t), \alpha(t), \beta(t)).$$

Угол  $\varphi_{\text{дв}}$  должен быть введен в составе сомножителя  $(\alpha + \varphi_{\text{дв}})$  во второе и третье уравнения системы (5.1.14). Кроме этого, для получения полных моделей движения БЛА к динамическим уравнениям (5.1.14) и (5.1.15) должны быть добавлены кинематические уравнения вида (5.1.7).

Наибольшее распространение на практике получил второй способ бокового маневрирования, когда требуемая боковая сила возникает при угле крена  $\gamma \neq 0$ . В этом случае считается, что  $\beta = 0$  и  $Z = 0$ .

Используя это предположение, получаем с использованием уравнений (5.1.14) и (5.1.7) модель пространственного движения БЛА вида:

$$\dot{V} = \frac{P - X}{m} - g \sin \theta, \quad t \in [t_0, t_k]; \quad (5.1.16)$$

$$\dot{\theta} = \frac{(P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y) \cos \gamma}{mV} - \frac{g}{V} \cos \theta; \quad (5.1.17)$$

$$\dot{\Psi} = \frac{(P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y) \sin \gamma}{mV \cos \theta}; \quad (5.1.18)$$

$$\dot{x} = V \cos \theta \cos \Psi; \quad (5.1.19)$$

$$\dot{y} = V \sin \theta; \quad (5.1.20)$$

$$\dot{z} = V \cos \theta \sin \Psi, \quad (5.1.21)$$

которая в основном будет использована как базовая в последующих главах монографии.

Начальные условия для этой системы дифференциальных уравнений, которые задают характеристики исходного положения БЛА в пространстве, имеют вид:

$$V(t_0) = V_0; \quad \theta(t_0) = \theta_0; \quad \Psi(t_0) = \Psi_0; \quad (5.1.22)$$

$$x(t_0) = x_0; \quad y(t_0) = y_0; \quad z(t_0) = z_0. \quad (5.1.23)$$

Отметим, что начальные условия такого вида используются и в моделях (5.1.14), (5.1.7) и (5.1.15), (5.1.7).

Система (5.1.16)-(5.1.21) включает в себя 6 уравнений и 9 неизвестных функций:  $V(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\Psi(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ ,  $P(t)$ ,  $\alpha(t)$  и  $\gamma(t)$ .

Движение БЛА по требуемой траектории обеспечивается выбором соответствующих законов управления тягой  $P = P(t)$ , углом атаки  $\alpha = \alpha(t)$  и углом крена  $\gamma = \gamma(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ .

Эти функции подставляются в правые части уравнений (5.1.16)-(5.1.18), и полученная замкнутая система уравнений (5.1.16)-(5.1.21) может быть проинтегрирована при начальных условиях (5.1.22), (5.1.23) одним из численных методов, описанных в Разд. 3.1.

Процесс решения задачи Коши (5.1.16)-(5.1.23) при заданном векторе косвенного управления:

$$u(t) = (P(t), \alpha(t), \gamma(t)),$$

удовлетворяющем условиям (1.2), будем называть моделированием управляемого движения БЛА на интервале времени  $[t_0, t_k]$ .

Запишем динамические уравнения (5.1.16)-(5.1.18) в перегрузках, действующих на БЛА.

Приближенные компоненты вектора перегрузки БЛА имеют вид [7]:

$$n_x = \frac{P - X}{mg}; \quad n_y = \frac{P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y}{mg}; \quad n_z = \frac{Z - P\beta}{mg}. \quad (5.1.24)$$

Тогда с их использованием уравнения (5.1.14) перепишутся в безразмерной форме как:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (n_x - \sin \theta) g; \\ \dot{\theta} &= \frac{(n_y \cos \gamma - n_z \sin \gamma - \cos \theta) g}{V}; \\ \dot{\Psi} &= \frac{(n_y \sin \gamma + n_z \cos \gamma) g}{V \cos \theta}. \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

Модель (5.1.15) с учетом (5.1.24) примет вид:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= (n_x - \sin \theta)g; \\ \dot{\theta} &= \frac{(n_y - \cos \theta)g}{V};\end{aligned}\quad (5.1.26)$$

$$\dot{\Psi} = \frac{n_z g}{V \cos \theta}.$$

Система уравнений (5.1.16)-(5.1.18) в перегрузках записывается как:

$$\dot{V} = (n_x - \sin \theta)g; \quad (5.1.27)$$

$$\dot{\theta} = (n_y \cos \gamma - \cos \theta) \frac{g}{V}; \quad (5.1.28)$$

$$\dot{\Psi} = \frac{gn_y \sin \gamma}{V \cos \theta}. \quad (5.1.29)$$

В некоторых теоретических работах, использующих модели полета БЛА в перегрузках, например, [9], предлагается использовать в качестве векторов управления векторы  $u(t) = (n_x(t), n_y(t), n_z(t))$  и  $u(t) = (n_x(t), n_y(t), \gamma(t))$ , входящие в уравнения движения (5.1.25)-(5.1.29).

Отметим, что полученные выше модели движения БЛА являются конкретизациями приведенной в Главе 1 общей модели, представленной выражениями (1.3) и (1.4).

Аэродинамические силы  $X$ ,  $Y$ , и  $Z$ , входящие в уравнения (5.1.14)-(5.1.18), представляются в динамике полета БЛА следующими выражениями [7]:

$$\begin{aligned}X &= 0,5c_x \rho(y)V^2 S; \\ Y &= 0,5c_y \rho(y)V^2 S; \\ Z &= 0,5c_z \rho(y)V^2 S.\end{aligned}\quad (5.1.30)$$

Здесь  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $c_z$  – безразмерные коэффициенты лобового сопротивления, подъемной и боковой сил БЛА;  $\rho(y)$  – плотность воздуха на высоте  $y$ , значения которой выбираются из таблицы стандартной атмосферы (СА-73) [7], либо вычисляются по следующей приближенной формуле [4, 24]:

$$\rho(y) = \rho_0 e^{-ky}, \quad y \geq 0, \quad (5.1.31)$$

где  $\rho_0 = 1,2250 \text{ кг/м}^3$  – плотность воздуха при  $y = 0$ ;  $k = 0,0001$  – эмпирический коэффициент.

Кроме этого, в выражения (5.1.30) входят скорость полета  $V$  и площадь  $S$  крыла БЛА.

Эти выражения представляют собой приближенные формулы для расчета сил  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ , так как в них не учитываются сжимаемость воздуха и сил его трения на корпусе БЛА. Данные допущения являются приемлемыми для решения задач динамики полета наиболее распространенных на практике дозвуковых БЛА.

Конкретизируем вид зависимостей  $c_x = c_x(\alpha, V)$ ,  $c_y = c_y(\alpha, V)$  и  $c_z = c_z(\beta)$ , входящих в выражения (5.1.30).

Отметим, что в существующих работах [2, 6, 7, 13, 15, 24, 27, 28, 29], посвященных вопросам моделирования полета БЛА и ЛА, построение таких зависимостей применительно к конкретному образцу БЛА не рассматривались.

Приведем методику формирования этих зависимостей по результатам аэродинамических продувок конкретного образца БЛА.

Коэффициент подъемной силы БЛА представим выражением вида [28]:

$$c_y = c_y^\alpha (\alpha - \alpha_0), \quad (5.1.32)$$

где  $c_y^\alpha$  – производная  $c_y$  по углу атаки  $\alpha$ ;  $\alpha_0 < 0$  – демпфирующее значение угла атаки.

При использовании конкретного значения угла  $\alpha_0$  из этой формулы следует, что

$$c_y = c_y^\alpha \alpha_0 + c_y^\alpha \alpha, \quad (5.1.33)$$

и значение  $c_{y0}$  коэффициента  $c_y$  при  $\alpha = 0$  определяется как:

$$c_{y0} = c_y^\alpha \alpha_0. \quad (5.1.34)$$

Пусть из результатов продувок БЛА в аэродинамической трубе получена экспериментальная зависимость производной  $c_y^\alpha$  от числа Маха ( $M$ ) в виде таблицы значений:

$$(M_i, c_{yi}^\alpha), \quad i = (1, k).$$

Аппроксимируем эти данные линейной, квадратичной и кубической зависимостями:

$$\begin{aligned} c_y^\alpha(M) &= d_0 + d_1 M; \\ c_y^\alpha(M) &= d_0 + d_1 M + d_2 M^2; \\ c_y^\alpha(M) &= d_0 + d_1 M + d_2 M^2 + d_3 M^3 \end{aligned} \quad (5.1.35)$$

и выберем из них наиболее полно отражающую имеющиеся экспериментальные данные.

В этих выражениях  $d_i$  – коэффициенты соответствующих аппроксимирующих функций, определяемые методом наименьших квадратов [17].

В дальнейшем будем использовать как наиболее простую зависимость первого вида.

В этом случае исходные выражения (5.1.32) и (5.1.34) конкретизируются как:

$$\begin{aligned} c_y(\alpha, M) &= (d_0 + d_1 M)(\alpha + \alpha_0); \\ c_{y0}(M) &= \alpha_0(d_0 + d_1 M) = b_0 + b_1 M. \end{aligned} \quad (5.1.36)$$

В работах [19, 28] предлагается определять коэффициент лобового сопротивления ЛА по формуле:

$$c_x = c_{x0} + A c_y^2, \quad (5.1.37)$$

где  $c_{x0}$  – значение этого коэффициента при нулевой подъемной силе;  $A$  – коэффициент, зависящий от геометрических характеристик крыла ЛА.

Экспериментальные значения зависимости  $c_{x0}(M)$ , полученные из графиков поляры БЛА при  $c_y = 0$  и различных значениях числа  $M$  имеют вид следующего массива значений:

$$\left(M_j, c_{x0j}\right), \quad j = \overline{1, r}.$$

Линейная аппроксимация этих данных записывается как:

$$c_{x0}(M) = c_0 + c_1 M,$$

где  $c_0, c_1$  – коэффициенты аппроксимации, определяемые указанным выше методом.

Следуя работам [19, 28], коэффициент  $A$  будем вычислять по формуле:

$$A = \frac{1}{\pi \lambda_{\text{ЭФ}}}, \quad (5.1.38)$$

где эффективное удлинение крыла БЛА определяется выражением вида:

$$\lambda_{\text{ЭФ}} = \frac{1}{1 + (\pi \lambda / 100 \cos^2 \chi)}. \quad (5.1.39)$$

Геометрическое удлинение крыла БЛА, входящее в это выражение, вычисляется как:

$$\lambda = l/b_A. \quad (5.1.40)$$

В формулах (5.1.38)-(5.1.40) использованы следующие обозначения:  $\chi$  – угол стреловидности крыла;  $b_A$  – средняя аэродинамическая хорда (САХ) крыла;  $l$  – размах крыльев БЛА [82].

С учетом зависимостей для коэффициентов  $c_{x0}, c_y$  и значения  $A$  выражение (5.1.37) приобретает вид:

$$c_x(\alpha, M) = (c_0 + c_1 M) + A(d_0 + d_1 M)^2 (\alpha + \alpha_0)^2.$$

Представим зависимости  $c_x(\alpha, M)$  и  $c_y(\alpha, M)$  как функции скорости полета  $V$ . Известно, что  $M = V/a$ , где  $a = a(y)$  – скорость звука на высоте  $y$ .

Тогда выражения для  $c_y$  и  $c_x$ , которые используются для конкретизации зависимостей (5.1.30), примут следующий вид:

$$c_y(\alpha, V) = c_{y0}(V) + c_y^\alpha(V)\alpha = \left( b_0 + \frac{b_1}{a}V \right) + \left( d_0 + \frac{d_1}{a}V \right)\alpha; \quad (5.1.41)$$

$$c_x(\alpha, V) = \left( c_0 + \frac{c_1}{a}V \right) + A \left( d_0 + \frac{d_1}{a}V \right)^2 (\alpha + \alpha_0)^2.$$

Если БЛА реализует полет со значительным изменением высоты, в выражениях (5.1.41) необходимо использовать зависимость скорости звука от высоты  $a = a(y)$ , приведенную в таблице СА [7], или применять приближенную формулу [30]:

$$a(y) = 340 - 0,004y. \quad (5.1.42)$$

Для дальнейшего использования выражений (5.1.30) представим формулы (5.1.41) в следующей записи:

$$c_y(\alpha, V) = B(V, a) + D(V, a)\alpha; \quad (5.1.43)$$

$$c_x(\alpha, V) = E(V, a) + K(V, a)(\alpha + \alpha_0)^2. \quad (5.1.44)$$

Вспомогательные функции от скорости БЛА и скорости звука, входящие в эти выражения, имеют вид:

$$\begin{aligned} B(V, a) &= b_0 + \frac{b_1}{a}V; & D(V, a) &= d_0 + \frac{d_1}{a}V; \\ E(V, a) &= c_0 + \frac{c_1}{a}V; & K(V, a) &= AD^2(V, a), \end{aligned} \quad (5.1.45)$$

где  $b_0, b_1, c_0, c_1, d_0, d_1$  – эмпирические коэффициенты, полученные при обработке результатов аэродинамических продувок БЛА на стадии его разработки.

Коэффициент  $c_z$ , входящий в выражения (5.1.30), представляется как:

$$c_z = c_z^\beta \beta, \quad (5.1.46)$$

где  $c_z^\beta$  – производная по углу скольжения  $\beta$ , определяемая из результатов продувок БЛА.

### Пример 5.1

Вычислим аэродинамические характеристики одного из образцов БЛА [89], характеристики которого представлены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Масса БЛА	$m = 350 \text{ кг}$
Площадь крыла	$S = 1,4 \text{ м}^2$
Угол стреловидности крыла	$\chi = 0 \text{ град.}$
Размах крыла	$l = 2,64 \text{ м}$
Средняя аэродинамическая хорда (САХ) крыла	$b_A = 0,546 \text{ м}$
Угол установки двигателя БЛА	$\phi_{\text{дв}} = -3,5 \text{ град.}$
Диапазон тяг маршевого двигателя	$P_{\min} = 58,86 \text{ Н}, P_{\max} = 1206,63 \text{ Н}$
Диапазон допустимых углов атаки	$\alpha_{\min} = -6 \text{ град.}, \alpha_{\max} = +14 \text{ град.}$
Диапазон изменения угла крена	$\pm 65 \text{ град.}$
Диапазон изменения угла скольжения	$\pm 10 \text{ град.}$
Максимальная эксплуатационная перегрузка	$n_y^{\max} = -3 \dots + 9$

При  $\alpha_0 = -0,007 \text{ рад}$  выражение (5.1.32) конкретизируется как:

$$c_y = 0,007 c_y^\alpha + c_y^\alpha \alpha.$$

В этом случае формула (5.1.34) для вычисления значения  $c_{y0}$  принимает вид:

$$c_{y0} = 0,007 c_y^\alpha.$$

Полученная в результате продувок БЛА экспериментальная зависимость производной  $c_y^\alpha$  от числа Маха ( $M$ ) представлена в табл. 5.2.

Таблица 5.2

$M$	0,13	0,35	0,5	0,6	0,7	0,74	0,78	0,82
$c_y^\alpha, \text{рад}^{-1}$	4,5	4,75	4,92	5,02	5,23	5,43	5,43	5,18

Апроксимируя эти данные при  $M \in [0,13; 0,82]$  средствами пакета MathCAD линейной, квадратичной и кубической зависимостями вида (5.1.35), имеем:

$$c_y^\alpha(M) = 4,312 + 1,291M;$$

$$c_y^\alpha(M) = 4,322 + 1,233M + 0,06M^2;$$

$$c_y^\alpha(M) = 4,657 - 2,064M + 8,102M^2 - 5,61M^3.$$

В дальнейшем будем использовать как наиболее простую зависимость первого вида.

В этом случае выражения (5.1.36) конкретизируются как:

$$\begin{aligned} c_{y0}(M) &= -0,007(4,312 + 1,291M) = -0,03018 - 0,009M; \\ c_y(\alpha, M) &= (4,312 + 1,291M)(\alpha + 0,007). \end{aligned} \quad (5.1.47)$$

Экспериментальные значения входящей в выражение (5.1.37) зависимости  $c_{x0}(M)$ , полученные из графиков поляры БЛА при  $c_y = 0$  и  $M \in [0,35; 0,82]$ , представлены в табл. 5.3.

Таблица 5.3

M	0,35	0,6	0,74	0,82
$c_{x0}$	0,028	0,028	0,032	0,042

Линейная аппроксимация этих данных имеет вид:

$$c_{x0}(M) = 0,017 + 0,025M.$$

Вычисления по формулам (5.1.38)-(5.1.40) дают значение параметра  $A = 0,0759$ .

С учетом полученных выше результатов выражение для коэффициента  $c_x$  определяется как:

$$\begin{aligned} c_x(\alpha, M) &= (0,017 + 0,025M) + \\ &+ (1,188 + 0,356M)^2(\alpha + 0,007)^2. \end{aligned} \quad (5.1.48)$$

Представим зависимости  $c_x(\alpha, M)$  и  $c_y(\alpha, M)$  как функции скорости полета  $V$ . При небольших значениях высоты полета БЛА можно считать, что скорость звука равна 340 м/с [2].

Тогда выражения (5.1.47) и (5.1.48), которые являются конкретным видом зависимостей (5.1.41), примут вид:

$$c_y(\alpha, V) = (0,030184 + 0,0002647V) + (4,315 + 0,003794V)\alpha;$$

$$c_x(\alpha, V) = (0,017 + 0,00007353V) + (1,188 + 0,001047V)^2(\alpha + 0,007)^2.$$

Представим полученные результаты в форме обобщенных выражений (5.1.43) и (5.1.44):

$$c_y(\alpha, V) = B(a, V) + D(a, V)\alpha;$$

$$c_x(\alpha, V) = E(a, V) + K(a, V)(\alpha + 0,007)^2,$$

где для конкретного значения параметра  $a = 340$  м/с вспомогательные функции  $B, D, E, K$  имеют следующий вид:

$$B(V) = 0,030184 + 0,0002647V;$$

$$D(V) = 4,312 + 0,003794V;$$

$$E(V) = 0,017 + 0,00007353V;$$

$$K(V) = (1,188 + 0,001047V)^2.$$

Значение коэффициента  $c_z$ , полученное по результатам продувок модели рассматриваемого БЛА, определяется следующей его зависимостью от угла скольжения  $\beta$ :

$$c_z(\beta) = c_z^\beta \beta = -1,146\beta, \quad \beta \in [-10^\circ, 10^\circ].$$

Заметим, что угол  $\beta$ , входящий в эту формулу, задается в радианах.

Таким образом, использованные в выражениях (5.1.14)-(5.1.18), (5.1.24), силы  $X, Y$  и  $Z$  при моделировании управляемого движения БЛА должны рассматриваться как функции вида:

$$X = X(\alpha, V, y); \quad Y = Y(\alpha, V, y); \quad Z = Z(\beta, V, y), \quad (5.1.49)$$

для конкретизации которых используются формулы (5.1.30), (5.1.31), (5.1.42)-(5.1.46).

Отметим, что для практического использования зависимостей (5.1.49) в модели движения БЛА (5.1.16)-(5.1.23) персонал БАК должен получить у разработчика БЛА готовые для применения зависимости  $c_x(\alpha, V)$  и  $c_y(\alpha, V)$  вида (5.1.43)-(5.1.45), а при использовании моделей (5.1.14), (5.1.15) и зависимость  $c_z(\beta)$ , описываемую формулой (5.1.46).

Представленные выше модели движения БЛА используются для определения соответствующих векторов управлении  $u(t)$ , а также для их верификации в процессе решения соответствующих систем дифференциальных уравнений.

Формирование векторов  $u(t)$  предлагается осуществлять с использованием математического аппарата теории обратных задач, изложенной в Разд. 2.3, методов вариационного исчисления и теории оптимального управления, приведенных соответственно в Разд. 2.4 и Разд. 2.5.

При использовании теории обратных задач требуемое программное движение БЛА на интервале времени  $[t_0, t_k]$  будем описывать с использованием следующих подходов:

1. Задание законов изменения скорости  $V_{\text{зад}}(t)$ , углов наклона  $\theta_{\text{тр}}(t)$  и поворота  $\Psi_{\text{тр}}(t)$  требуемой траектории полета БЛА в каждый момент времени  $t \in [t_0, t_k]$ .

2. Задание в явной или неявной форме требуемой для выполнения полетного задания траектории БЛА и закона изменения его скорости  $V_{\text{зад}}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ .

При формировании на практике закона  $V_{\text{зад}}(t) = \text{const}$ ,  $t \in [t_0, t_k]$  можно использовать значения его крейсерской  $V_{\text{кр}}$ , минимальной  $V_{\min}$  и максимальной  $V_{\max}$  скоростей. При изменяющейся во времени заданной скорости полета БЛА можно использовать первое соотношение из состава выражений (5.1.63), либо задавать требуемый закон изменения скорости в виде совокупности точек  $(t_j, V_{\text{зад},j})$ ,  $j = (\overline{1, N})$  с последующим формальным его описанием с помощью сплайн-функции (см. Главу 8).

Рассмотрим методы формирования векторов управления  $u(t)$  с использованием первого подхода. Второй подход для различных типов БЛА, представленных на Рис. 1.2, будет рассмотрен в Главе 8.

Пусть для выполнения полета БЛА по требуемой траектории заданы следующие зависимости:

$$V_{\text{зад}} = V_{\text{зад}}(t); \quad \theta_{\text{тр}} = \theta_{\text{тр}}(t); \quad \Psi_{\text{тр}} = \Psi_{\text{тр}}(t), \quad t \in [t_0, t_k], \quad (5.1.50)$$

которые должны удовлетворять условиям (5.1.22).

Наличие этих функций позволяет получить с помощью выражений (5.1.7) параметрическое представление траектории полета БЛА вида:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t), \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (5.1.51)$$

Такое представление формируется путем численного интегрирования кинематических уравнений движения БЛА:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V_{\text{зад}}(t) \cos \theta_{\text{тр}}(t) \cos \Psi_{\text{тр}}(t); \\ \dot{y} &= V_{\text{зад}}(t) \sin \theta_{\text{тр}}(t); \\ \dot{z} &= V_{\text{зад}}(t) \cos \theta_{\text{тр}}(t) \sin \Psi_{\text{тр}}(t) \end{aligned} \quad (5.1.52)$$

с начальными условиями (5.1.23).

Заметим, что полученные в форме функций (5.1.51) результаты решения этой задачи Коши позволяют оценить правильность задания зависимостей (5.1.50).

Пусть требуется определить вектор управления:

$$u(t) = (P(t), \alpha(t), \gamma(t)),$$

входящий в правые части уравнений (5.1.16)-(5.1.18).

Соотношения (5.1.50) при добавлении к ним вычисленных производных:

$$\dot{V}_{\text{зад}} = \dot{V}_{\text{зад}}(t); \quad \dot{\theta}_{\text{тр}} = \dot{\theta}_{\text{тр}}(t); \quad \dot{\Psi}_{\text{тр}} = \dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) \quad (5.1.53)$$

составляют конкретизацию условий (2.3.1).

В этом случае искомые управлении  $P^* = P^*(t)$ ,  $\alpha^* = \alpha^*(t)$ ,  $\gamma^* = \gamma^*(t)$ , обеспечивающие выполнение условий (5.1.50) и (5.1.53), определяются с учетом выражений (5.1.16)-(5.1.18) как решения следующей параметрической системы нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned}
& \frac{P(t) - X(\alpha(t), y(t), V_{\text{зад}}(t))}{m} - g \sin \theta_{\text{тр}}(t) - \\
& - \dot{V}_{\text{зад}}(t) = 0; \\
& \frac{[P(t)(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha(t), y(t), V_{\text{зад}}(t))] \cos \gamma(t)}{m V_{\text{зад}}(t)} - \\
& - \frac{g \cos \theta_{\text{тр}}(t)}{V_{\text{зад}}(t)} - \dot{\theta}_{\text{зад}}(t) = 0; \\
& \frac{[P(t)(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha(t), y(t), V_{\text{зад}}(t))] \sin \gamma(t)}{m V_{\text{зад}}(t) \cos \theta_{\text{тр}}(t)} - \\
& - \dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_k], 
\end{aligned} \tag{5.1.54}$$

которая является конкретизацией системы вида (2.3.40).

В системе уравнений (5.1.54) используются зависимости (5.1.49), в которых вместо скорости  $V$  подставлена функция  $V_{\text{зад}} = V_{\text{зад}}(t)$ , а зависимость  $y(t)$  является решением задачи Коши (5.1.52).

Эта система уравнений, решается численными методами, описанными в Разд. 3.5.

Для высокоманевренных БЛА компоненты  $P^*(t), \alpha^*(t), \gamma^*(t)$  вектора управления  $u^*(t)$  должны удовлетворять ограничениям вида (1.2), которые в решаемой задаче конкретизируются как:

$$\begin{aligned}
P_{\min} &\leq P(t) \leq P_{\max}; \\
\alpha_{\min} &\leq \alpha(t) \leq \alpha_{\max}; \\
\gamma_{\min} &\leq \gamma(t) \leq \gamma_{\max}.
\end{aligned} \tag{5.1.55}$$

Следуя материалу Разд. 2.3, для учета этих условий предлагается осуществить с помощью выражений (2.3.51) переход к новому неограниченному вектору управления  $v(t) = (v_P(t), v_\alpha(t), v_\gamma(t))$ .

С учетом (5.1.55) эти выражения примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
P(t) &= 0,5[P_{\min} + P_{\max} + (P_{\max} - P_{\min}) \sin v_P(t)]; \\
\alpha(t) &= 0,5[\alpha_{\min} + \alpha_{\max} + (\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) \sin v_\alpha(t)]; \\
\gamma(t) &= 0,5[\gamma_{\min} + \gamma_{\max} + (\gamma_{\max} - \gamma_{\min}) \sin v_\gamma(t)].
\end{aligned} \quad (5.1.56)$$

Правые части этих соотношений подставляются в систему уравнений (5.1.54), из решения которой находятся неизвестные функции  $v_P^*(t), v_\alpha^*(t), v_\gamma^*(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ . Отметим, что если при некотором  $t \in [t_0, t_k]$  эти решения не существуют, то делается вывод о невозможности выполнения ограничений (5.1.55) при использовании зависимостей (5.1.50). При существовании решений  $v_P^*(t), v_\alpha^*(t), v_\gamma^*(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$  обратный переход к компонентам искомого вектора управления  $u^*(t)$  производится с помощью выражений (5.1.56).

Аналогичный подход используется при формировании вектора управления БЛА вида:

$$u(t) = (P(t), \alpha(t), \beta(t)),$$

входящего в модель (5.1.15).

Этот вектор вычисляется путем решения в интервале времени  $[t_0, t_k]$  следующей системы параметрических уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{P(t) - X(\alpha(t), y(t), V_{\text{зад}}(t))}{m} - \\
&- g \sin \theta_{\text{тр}}(t) - \dot{V}_{\text{зад}}(t) = 0; \\
&\frac{P(t)(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha(t), y(t), V_{\text{зад}}(t))}{m V_{\text{зад}}(t)} - \\
&- \frac{g \cos \theta_{\text{тр}}(t)}{V_{\text{зад}}(t)} - \dot{\theta}_{\text{зад}}(t) = 0; \\
&\frac{Z(\beta(t), y(t), V_{\text{зад}}(t)) - P(t)\beta(t)}{m V_{\text{зад}}(t) \cos \theta_{\text{тр}}(t)} - \dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) = 0.
\end{aligned} \quad (5.1.57)$$

Для рассматриваемых БЛА в ограничениях вида (5.1.55), последнее неравенство должно быть заменено на условие:

$$\beta_{\min} \leq \beta(t) \leq \beta_{\max}. \quad (5.1.58)$$

Тогда в замене вида (5.1.56) вместо третьего выражения применяется формула вида:

$$\beta(t) = 0,5[\beta_{\min} + \beta_{\max} + (\beta_{\max} - \beta_{\min})\sin\nu_{\beta}(t)]. \quad (5.1.59)$$

Рассмотрим метод формирования вектора:

$$u(t) = (P(t), \alpha(t), \beta(t), \gamma(t)),$$

используемого в общей модели управляемого движения БЛА (5.1.14).

Компоненты этого вектора должны при любом  $t \in [t_0, t_k]$  удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} & \frac{P(t) - X(\alpha(t), y(t), V_{\text{зад}}(t))}{m} - g \sin \theta_{\text{тр}}(t) - \dot{V}_{\text{зад}}(t) = 0; \\ & \frac{[P(t)(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha(t), y(t), V_{\text{зад}}(t))] \cos \gamma(t)}{m V_{\text{зад}}(t)} - \\ & - \frac{[Z(\beta(t), y(t), V_{\text{зад}}(t)) - P(t)\beta(t) \sin \gamma(t)]}{m V_{\text{зад}}(t)} - \\ & - \frac{g \cos \theta_{\text{тр}}(t)}{V_{\text{зад}}(t)} - \dot{\theta}_{\text{тр}}(t) = 0; \\ & \frac{[P(t)(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha(t), y(t), V_{\text{зад}}(t))] \sin \gamma(t)}{m V_{\text{зад}}(t) \cos \theta_{\text{тр}}(t)} + \\ & + \frac{[Z(\beta(t), y(t), V_{\text{зад}}(t)) - P(t)\beta(t)] \cos \gamma(t)}{m V_{\text{зад}}(t) \cos \theta_{\text{тр}}(t)} - \dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) = 0 \end{aligned} \quad (5.1.60)$$

Данная задача характеризуется тем, что число искомых компонент вектора  $u(t)$  больше числа уравнений (5.1.60). Это означает, что в ней при  $m = 4$  и  $n = 3$  выполняется неравенство (2.3.43), а выражения (5.1.60) являются конкретизацией условий (2.3.44).

Будем решать рассматриваемую задачу как задачу условной параметрической оптимизации (2.3.45), (2.3.44).

Представим целевую функцию задачи как:

$$U(t) = P^2(t) + \alpha^2(t) + \beta^2(t) + \gamma^2(t) \rightarrow \min.$$

С учетом этого выражения и условий (5.1.60) функция Лагранжа (2.3.46) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
L(t, P, \alpha, \beta, \gamma, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = & P^2(t) + \alpha^2(t) + \beta^2(t) + \gamma^2(t) + \\
& + \lambda_1(t) \left[ \frac{P(t) - X(\alpha(t), y(t), V_{\text{зад}}(t))}{m} - g \sin \theta_{\text{тр}}(t) - \dot{V}_{\text{зад}}(t) \right] + \\
& + \lambda_2(t) \left\{ \frac{[P(t)(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha(t), y(t), V_{\text{зад}}(t))] \cos \gamma(t)}{m V_{\text{зад}}(t)} - \right. \\
& - \frac{[Z(\beta(t), y(t), V_{\text{зад}}(t)) - P(t)\beta(t) \sin \gamma(t)]}{m V_{\text{зад}}(t)} - \frac{g \cos \theta_{\text{тр}}(t)}{V_{\text{зад}}(t)} - \dot{\theta}_{\text{тр}}(t) \Big\} + \\
& + \lambda_3(t) \left\{ \frac{[P(t)(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha(t), y(t), V_{\text{зад}}(t))] \sin \gamma(t)}{m V_{\text{зад}}(t) \cos \theta_{\text{тр}}(t)} + \right. \\
& \left. + \frac{[Z(\beta(t), y(t), V_{\text{зад}}(t)) - P(t)\beta(t)] \cos \gamma(t)}{m V_{\text{зад}}(t) \cos \theta_{\text{тр}}(t)} - \dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) \right\}.
\end{aligned}$$

Уравнения (2.3.47) для решаемой задачи конкретизируются с использованием выражений (5.1.49), (5.1.43), (5.1.44), (5.1.46) в следующей форме:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial P} = & 2P(t) + \frac{\lambda_1(t)}{m} + \lambda_2(t) \frac{(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) \cos \gamma(t) + \beta(t) \sin \gamma(t)}{m V_{\text{зад}}(t)} + \\
& + \lambda_3(t) \frac{(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) \sin \gamma(t) - \beta(t) \cos \gamma(t)}{m V_{\text{зад}}(t) \cos \theta_{\text{тр}}(t)} = 0; \\
\frac{\partial L}{\partial \alpha} = & 2\alpha(t) + \lambda_1(t) \frac{K(V_{\text{зад}}(t), a) \rho(y) V_{\text{зад}}^2(t) S(\alpha(t) + \alpha_0)}{m} + \\
& + \lambda_2(t) \frac{[P(t) + 0,5D(V_{\text{зад}}(t), a) \rho(y) V_{\text{зад}}^2(t) S] \cos \gamma(t)}{m V_{\text{зад}}(t)} + \\
& + \lambda_3(t) \frac{[P(t) + 0,5D(V_{\text{зад}}(t), a) \rho(y) V_{\text{зад}}^2(t) S] \sin \gamma(t)}{m V_{\text{зад}}(t) \cos \theta_{\text{тр}}(t)} = 0; \quad (5.1.61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \beta} = & 2\beta(t) - \lambda_2(t) \frac{[0,5c_z^\beta \rho(y)V_{\text{зад}}^2(t)S - P(t)]\sin \gamma(t)}{mV_{\text{зад}}(t)} + \\
& + \lambda_3(t) \frac{[0,5c_z^\beta \rho(y)V_{\text{зад}}^2(t)S - P(t)]\cos \gamma(t)}{mV_{\text{зад}}(t)\cos \theta_{\text{тр}}(t)} = 0; \\
\frac{\partial L}{\partial \gamma} = & 2\gamma(t) - \lambda_2(t) \left( \frac{[P(t)(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha(t), y(t), V_{\text{зад}}(t))] \sin \gamma(t)}{mV_{\text{зад}}(t)} - \right. \\
& \left. - \frac{[Z(\beta(t), y(t), V_{\text{зад}}(t)) - P(t)\beta(t)] \cos \gamma(t)}{mV_{\text{зад}}(t)} \right) + \\
& + \lambda_3(t) \left( \frac{[P(t)(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha(t), y(t), V_{\text{зад}}(t))] \cos \gamma(t)}{mV_{\text{зад}}(t)\cos \theta_{\text{тр}}(t)} - \right. \\
& \left. - \frac{[Z(\beta(t), y(t), V_{\text{зад}}(t)) - P(t)\beta(t)] \sin \gamma(t)}{mV_{\text{зад}}(t)\cos \theta_{\text{тр}}(t)} \right) = 0,
\end{aligned}$$

где функции  $K(V_{\text{зад}}(t), a)$  и  $D(V_{\text{зад}}(t), a)$  задаются формулами (5.1.45).

Искомые функции  $P(t), \alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$  для всех значений  $t \in [t_0, t_k]$  находятся путем численного решения системы параметрических уравнений 7-го порядка, образованной выражениями (5.1.60) и (5.1.61).

При необходимости учета ограничений на компоненты вектора  $u(t)$ , которые описываются условиями (5.1.55) и (5.1.57), осуществляется переход с помощью выражений (5.1.56), (5.1.58) к новым искомым неограниченным управляемым функциям  $v_P(t), v_\alpha(t), v_\beta(t), v_\gamma(t)$ . Для их определения соотношения (5.1.56), (5.1.58) подставляются в систему уравнений (5.1.60), (5.1.61), которая решается одним из численных методов, описанных в Разд. 3.5. При существовании ее решений  $v_P^*(t), v_\alpha^*(t), v_\beta^*(t), v_\gamma^*(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$  они используются в формулах (5.1.56), (5.1.58) для вычисления значений управляемых

функций  $P^*(t), \alpha^*(t), \beta^*(t), \gamma^*(t)$ , удовлетворяющих ограничениям (5.1.55) и (5.1.57).

При программировании на интервале времени  $[t_0, t_k]$  некоторых составных траекторий полета БЛА необходимо дополнительно к начальным условиям (5.1.22) обеспечить выполнение конечных условий вида:

$$V(t_k) = V_k; \quad \theta(t_k) = \theta_k; \quad \Psi(t_k) = \Psi_k, \quad (5.1.62)$$

где  $V_k, \theta_k, \Psi_k$  – заданные числа.

Например, такая траектория может состоять из траектории набора высоты БЛА после его старта и траектории горизонтального полета в зону выполнения целевого задания. При этом для второй траектории выражения (5.1.62) выступают в качестве начальных условий.

Рассмотрим один из подходов к формированию вектора управления  $u(t)$ , обеспечивающего выполнение краевых условий (5.1.22), (5.1.62).

Сформируем зависимости (5.1.50) в форме следующих функций:

$$\begin{aligned} V_{\text{зад}}(t) &= V_0 + \frac{t - t_0}{t_k - t_0} (V_k - V_0); \\ \theta_{\text{тр}}(t) &= \theta_0 + \frac{t - t_0}{t_k - t_0} (\theta_k - \theta_0); \\ \Psi_{\text{тр}}(t) &= \Psi_0 + \frac{t - t_0}{t_k - t_0} (\Psi_k - \Psi_0). \end{aligned} \quad (5.1.63)$$

При подстановке в эти выражения значения  $t = t_0$  получаем:

$$V_{\text{зад}}(t_0) = V_0; \quad \theta_{\text{тр}}(t_0) = \theta_0; \quad \Psi_{\text{тр}}(t_0) = \Psi_0.$$

В момент времени  $t = t_k$  имеем:

$$V_{\text{зад}}(t_k) = V_k; \quad \theta_{\text{тр}}(t_k) = \theta_k; \quad \Psi_{\text{тр}}(t_k) = \Psi_k.$$

При использовании зависимостей (5.1.63) производные (5.1.33) примут следующий вид:

$$\dot{V}_{\text{зад}}(t) = \frac{V_{\text{k}} - V_0}{t_{\text{k}} - t_0}; \quad \dot{\theta}_{\text{тр}}(t) = \frac{\theta_{\text{k}} - \theta_0}{t_{\text{k}} - t_0}; \quad \dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) = \frac{\Psi_{\text{k}} - \Psi_0}{t_{\text{k}} - t_0}. \quad (5.1.64)$$

В зависимости от вида применяемой модели управляемого движения БЛА искомые векторы  $u(t)$  можно получить при подстановке выражений (5.1.63) и (5.1.64) в одну из используемых систем параметрических уравнений из состава уравнений (5.1.54), (5.1.57), (5.1.60) и (5.1.61) и ее решения с помощью соответствующего численного метода из Разд. 3.5.

Для проверки правильности найденных описанными выше методами векторов управлений  $u(t)$  необходимо с их использованием проинтегрировать соответствующие им системы дифференциальных уравнений движения БЛА. Отметим, что моделирование полета БЛА должно быть обязательным этапом в процессе программирования его траекторий персоналом БАК.

Как показала практика, для некоторых режимов полета БЛА наряду с условиями (5.1.62) необходимо выполнение требований вида:

$$x(t_{\text{k}}) = x_{\text{k}}; \quad y(t_{\text{k}}) = y_{\text{k}}; \quad z(t_{\text{k}}) = z_{\text{k}}, \quad (5.1.65)$$

где  $x_{\text{k}}, y_{\text{k}}, z_{\text{k}}$  – заданные числа.

Эти условия описывают требуемое конечное состояние БЛА по завершении определенного этапа (режима) его полета.

Существенное значение при моделировании полета БЛА имеет анализ выполнения условий (5.1.62) и (5.1.65) при наличии действующих ветровых возмущений.

В этом случае предлагается использовать общий метод учета таких возмущений, описанный в Разд. 4.3. Рассмотрим его применение для модели движения БЛА вида (5.1.16)-(5.1.23).

В предлагаемой вычислительной схеме метода вместо уравнений (4.3.9), (4.3.10) используется система уравнений (5.1.16)-(5.1.18), (5.1.20). Возмущенные начальные условия для уравнений (5.1.16)-(5.1.18) рассчитываются путем подстановки значений правых частей выражений (5.1.22) в формулы (4.3.4),

(4.3.6), (4.3.7). Результаты интегрирования этих уравнений совместно с используемыми формулами применяются для вычисления возмущенных значений скорости  $V_{\pi}(t)$  и углов  $\theta_{\pi}(t)$ ,  $\Psi_{\pi}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ .

Возмущенная действующим ветром с вектором его скорости  $\bar{W} = (w_x, w_y, w_z)$  траектория движения БЛА на интервале времени  $[t_0, t_k]$  определяется интегрированием системы уравнений (4.3.11) с начальными условиями (4.3.12).

При практической реализации этого подхода в блоке 5 блок-схемы, представленной на Рис. 4.7, вместо функций  $f_1, f_2, f_3$  используются правые части уравнений (5.1.16)-(5.1.18).

По результатам моделирования движения БЛА в неспокойной атмосфере при заданном управлении  $u(t)$  определяются значения:

$$\begin{aligned} V_{\text{пк}} &= V_{\pi}(t_k); \quad \theta_{\text{пк}} = \theta_{\pi}(t_k); \quad \Psi_{\text{пк}} = \Psi_{\pi}(t_k); \\ x_{\text{пк}} &= x_{\pi}(t_k); \quad y_{\text{пк}} = y_{\pi}(t_k); \quad z_{\text{пк}} = z_{\pi}(t_k), \end{aligned}$$

которые сравниваются со значениями правых частей условий (5.1.62) и (5.1.65).

При их недопустимых отклонениях предлагается определить новые векторы  $u(t)$  косвенного управления БЛА путем использования в применяемых для их вычисления уравнениях функций  $V_{\pi,\text{зад}}(t)$ ,  $\theta_{\pi,\text{тр}}(t)$ ,  $\Psi_{\pi,\text{тр}}(t)$ , формируемых с помощью выражений (4.3.4), (4.3.6), (4.3.7), в которых производится следующая замена аргументов:

$$V(t) = V_{\text{зад}}(t); \quad \theta(t) = \theta_{\text{тр}}(t), \quad \Psi(t) = \Psi_{\text{тр}}(t). \quad (5.1.66)$$

Производные  $\dot{V}_{\pi,\text{зад}}(t)$ ,  $\dot{\theta}_{\pi,\text{тр}}(t)$ ,  $\dot{\Psi}_{\pi,\text{тр}}(t)$ , входящие в такие уравнения, вычисляются путем численного дифференцирования [17, 26] зависимостей  $V_{\pi,\text{зад}}(t)$ ,  $\theta_{\pi,\text{тр}}(t)$ ,  $\Psi_{\pi,\text{тр}}(t)$ .

## 5.2. Модели управляемых полетов БЛА в вертикальной и горизонтальной плоскостях

Существующие БЛА в процессе решения ими целевых задач имеют этапы полета, находящиеся строго в вертикальной или горизонтальной плоскостях. В этих случаях полеты БЛА осуществляются в стартовой и маневренной СК, представленных на Рис. 1.9.

При программировании полетов БЛА на таких этапах от общей модели (5.1.16)-(5.1.23) можно перейти к более простым частным моделям управляемых полетов БЛА. Заметим, что такие модели непосредственным образом применимы при скорости действующего ветра, удовлетворяющего условию (4.2.18).

Полеты БЛА в вертикальной плоскости характерны тем, что углы  $\gamma(t) \equiv 0$  и  $\Psi(t) \equiv 0$ . Из последнего следует, что угловая скорость  $\dot{\Psi}(t) \equiv 0$ .

Подставляя эти значения в уравнения (5.1.16)-(5.1.21), получим модель продольного движения БЛА вида [7, 21]:

$$\dot{V} = \frac{P - X}{m} - g \sin \theta, \quad t \in [t_0, t_k]; \quad (5.2.1)$$

$$\dot{\theta} = \frac{P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y}{mV} - \frac{g}{V} \cos \theta; \quad (5.2.2)$$

$$\dot{x} = V \cos \theta; \quad (5.2.3)$$

$$\dot{y} = V \sin \theta; \quad (5.2.4)$$

со следующими начальными условиями:

$$V(t_0) = V_0; \quad \theta(t_0) = \theta_0; \quad x(t_0) = x_0; \quad y(t_0) = y_0. \quad (5.2.5)$$

В связи с тем, что сила лобового сопротивления  $X$  и подъемная сила  $Y$  представляются в уравнениях (5.2.1) и (5.2.2) функциями вида (5.1.49), то любая траектория БЛА в вертикальной плоскости может быть получена при выборе соответствующих векторов косвенного управления  $u(t) = (P(t), \alpha(t))$ .

При полете БЛА в горизонтальной плоскости на высоте  $y = h$  имеем, что  $\dot{y}(t) \equiv 0$ ,  $\theta(t) \equiv 0$ ,  $\dot{\theta}(t) \equiv 0$ . При подстановке этих значений в уравнения (5.1.16)-(5.1.18) получаем выражения вида:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{P - X}{m}, \quad t \in [t_0, t_k]; \\ (P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y) \cos \gamma - mg &= 0; \\ \dot{\Psi} &= \frac{(P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y) \sin \gamma}{mV}.\end{aligned}\tag{5.2.6}$$

Второе уравнение здесь является условием выполнения БЛА полета на постоянной высоте  $h$ . Исключим это конечное выражение, выразив из него массу БЛА:

$$m = \frac{1}{g} (P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y) \cos \gamma.$$

Заменяя в первом и третьем уравнениях системы (5.2.6) параметр  $m$  правой частью этого выражения, получаем окончательный вид динамических уравнений формируемой модели движения БЛА [7, 21]:

$$\dot{V} = \frac{(P - X(\alpha, V, h))g}{(P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y) \cos \gamma};\tag{5.2.7}$$

$$\dot{\Psi} = \frac{g \operatorname{tg} \gamma}{V}, \quad t \in [t_0, t_k].\tag{5.2.8}$$

Кинематические уравнения (5.1.19)-(5.1.21) с учетом отмеченных выше допущений запишутся как:

$$\dot{x} = V \cos \Psi;\tag{5.2.9}$$

$$\dot{z} = V \sin \Psi.\tag{5.2.10}$$

Начальные условия (5.1.22) и (5.1.23) примут вид:

$$V(t_0) = V_0; \quad \Psi(t_0) = \Psi_0; \quad x(t_0) = x_0; \quad z(t_0) = z_0.\tag{5.2.11}$$

Управлением в модели (5.2.7)-(5.2.10) является вектор  $u(t) = (P(t), \alpha(t), \gamma(t))$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ . Компоненты этого вектора не могут быть определены при известных функциях  $V_{\text{зад}}(t)$  и  $\Psi_{\text{тр}}(t)$

из системы двух нелинейных параметрических уравнений, построенных на базе дифференциальных уравнений (5.2.7), (5.2.8). Для решения этой задачи используется система (5.2.6), которая записывается в форме выражений (5.1.54) при  $\theta(t) \equiv 0$  и  $\dot{\theta}(t) \equiv 0$ .

При этом задача Коши (5.2.7)-(5.2.11) используется для моделирования полета БЛА в горизонтальной плоскости при выбранных управлении  $P^*(t)$ ,  $\alpha^*(t)$ ,  $\gamma^*(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ .

Рассмотрим упрощенные подходы к формированию управлений для организации полетов в вертикальной и горизонтальной плоскостях [7].

Как было отмечено выше, современные БЛА имеют в процессе полетов достаточно малые углы атаки  $\alpha$ . Это позволяет широко использовать гипотезу линейной зависимости их основных аэродинамических, моментных и других характеристик от значений угла  $\alpha$ .

Примером этого является выражение (5.1.32), отражающее линейную зависимость от угла  $\alpha$  коэффициента подъемной силы  $c_y = c_y(\alpha, V)$ .

Из уравнений (5.1.27)-(5.1.29) следует, что основную роль при реализации пространственного движения БЛА играет изменение величины перегрузки  $n_y$ .

Величина этой перегрузки зависит от значений тяги  $P$ , угла атаки  $\alpha$ , высоты полета  $u$  и массы  $m$  рассматриваемого БЛА (см. выражения (5.1.24)).

Будем считать, что при фиксированных значениях остальных параметров зависимость  $n_y$  от  $\alpha$  приближенно может быть представлена в форме следующей линейной зависимости [7]:

$$n_y = (n_y)_{\alpha=0} + n_y^\alpha \alpha. \quad (5.2.12)$$

Здесь  $(n_y)_{\alpha=0}$  – значение перегрузки при нулевом угле атаки БЛА;  $n_y^\alpha$  – производная от перегрузки по углу  $\alpha$ .

При конкретизации составляющих этой формулы предполагается, что за счет малой площади руля высоты по сравнению с площадью крыла БЛА непосредственным влиянием отклонения  $\delta_v$  этого руля на величину подъемной силы  $Y$  можно пренебречь [7].

Тогда с использованием формулы для вычисления  $n_y$  из состава выражений (5.1.24) в предположении о малости величины  $P\varphi_{dv}$  имеем, что

$$(n_y)_{\alpha=0} = \frac{Y_0}{mg}; \quad n_y^\alpha = \frac{P + Y^\alpha}{mg},$$

где  $Y_0$  – значение подъемной силы БЛА при  $\alpha = 0$ ;  $Y^\alpha$  – производная этой силы по углу  $\alpha$ .

Используя выражения (5.1.49), (5.1.43)-(5.1.45) эти формулы можно конкретизировать следующим образом:

$$\begin{aligned} (n_y)_{\alpha=0} &= \frac{0,5B(V, a)\rho(y)V^2S}{mg}; \\ n_y^\alpha &= \frac{P + 0,5D(V, a)\rho(y)V^2S}{mg}. \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

Выделим параметр  $\alpha$  из выражения (5.2.12):

$$\alpha = \frac{n_y - (n_y)_{\alpha=0}}{n_y^\alpha}.$$

Подставляя сюда выражения (5.2.13) имеем:

$$\alpha = \frac{n_y mg - 0,5B(V, a)\rho(y)V^2S}{P + 0,5D(V, a)\rho(y)V^2S}. \tag{5.2.14}$$

Как было отмечено выше, при полете БЛА в вертикальной плоскости угол крена  $\gamma(t) = 0$ . Тогда величина  $n_y$ , определяемая из уравнения (5.1.28), будет иметь вид:

$$n_y = \frac{V}{g}\dot{\theta} + \cos\theta.$$

Для заданных зависимостей  $V_{\text{зад}} = V_{\text{зад}}(t)$  и  $\theta_{\text{тр}} = \theta_{\text{тр}}(t)$  эта формула запишется как:

$$n_{y, \text{тр}} = \frac{V_{\text{зад}}}{g} \dot{\theta}_{\text{тр}} + \cos \theta_{\text{тр}}. \quad (5.2.15)$$

Первое уравнение для определения управлений  $P^*(t)$ ,  $\alpha^*(t)$  сформируем на основе выражений (5.2.14) и (5.2.15) в виде соотношения:

$$\begin{aligned} \alpha(t) = & \frac{mV_{\text{зад}}(t)\dot{\theta}_{\text{тр}}(t) + mg \cos \theta_{\text{тр}}(t)}{P(t) + 0,5D(V_{\text{зад}}(t), a)\rho(y_{\text{тр}}(t))V_{\text{зад}}^2(t)S} - \\ & - \frac{0,5B(V_{\text{зад}}(t), a)\rho(y_{\text{тр}}(t))V_{\text{зад}}^2(t)S}{P(t) + 0,5D(V_{\text{зад}}(t), a)\rho(y_{\text{тр}}(t))V_{\text{зад}}^2(t)S}. \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

Второе уравнение запишем с привлечением выражений (5.2.1), (5.1.49), (5.1.44), в следующей форме:

$$\begin{aligned} P(t) = & 0,5[E(V_{\text{зад}}(t), a) + K(V_{\text{зад}}(t), a)(\alpha(t) + \alpha_0)^2] \times \\ & \times \rho(y_{\text{тр}}(t))V_{\text{зад}}^2(t)S + mg \cos \theta_{\text{тр}}(t) + m\dot{V}_{\text{зад}}(t). \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

Преимуществом такого вида записи системы параметрических уравнений для определения управлений  $P^*(t)$ ,  $\alpha^*(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$  является представление уравнений (5.2.16) и (5.2.17) в форме, пригодной для непосредственного применения в каждой точке выбранной временнóй сетки численного метода простых итераций (см. Разд. 3.4 и Разд. 3.5).

При полете БЛА в горизонтальной плоскости при  $\theta(t) = 0$ ,  $\dot{\theta}(t) = 0$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ , уравнения (5.1.28), (5.1.29) принимают вид:

$$n_y \cos \gamma - 1 = 0; \quad \frac{V}{g} \dot{\Psi} = n_y \sin \gamma.$$

Тогда из первого уравнения имеем:

$$n_y = \frac{1}{\cos \gamma}. \quad (5.2.18)$$

Подставляя это выражение во второе уравнение, получим:

$$\frac{V}{g} \dot{\Psi} = \operatorname{tg} \gamma. \quad (5.2.19)$$

С учетом (5.2.18) выражение (5.2.14) примет вид:

$$\alpha = \frac{mg / \cos \gamma - 0,5B(V, a)\rho(h)V^2S}{P + 0,5D(V, a)\rho(h)V^2S}, \quad (5.2.20)$$

где  $h$  – высота горизонтального полета БЛА.

При заданных зависимостях  $V_{\text{зад}} = V_{\text{зад}}(t)$ ,  $\Psi_{\text{тр}} = \Psi_{\text{тр}}(t)$ ,  $\dot{\Psi}_{\text{тр}} = \dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ , из уравнения (5.2.19) можно непосредственно определить требуемый закон изменения угла крена БЛА, входящего в формируемый вектор управления  $u(t)$ :

$$\gamma^*(t) = \operatorname{arctg} \left( \frac{V_{\text{зад}}(t)}{g} \dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) \right), \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (5.2.21)$$

Представим  $\cos \gamma$  в виде следующего выражения:

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{V_{\text{зад}}^2}{g^2} \dot{\Psi}_{\text{тр}}^2}}} = \frac{g}{\sqrt{g^2 + V_{\text{зад}}^2 \dot{\Psi}_{\text{тр}}^2}}.$$

Подставляя полученный результат в формулу (5.2.20) с заменой в ней  $V$  на  $V_{\text{зад}}(t)$  и  $\alpha$  на  $\alpha(t)$  получаем первое уравнение для определения оставшихся компонент вектора  $u(t)$ :

$$\alpha(t) = \frac{m \sqrt{g^2 + V_{\text{зад}}^2(t) \dot{\Psi}_{\text{тр}}^2(t)} - 0,5B(V_{\text{зад}}(t), a)\rho(h)V_{\text{зад}}^2(t)S}{P(t) + 0,5D(V_{\text{зад}}(t), a)\rho(h)V_{\text{зад}}^2(t)S}. \quad (5.2.22)$$

Следующее уравнение для определения функций  $P^*(t)$  и  $\alpha^*(t)$  получим из первого уравнения системы (5.1.54), полагая в нем  $\theta_{\text{тр}}(t) = 0$ .

Используя для силы лобового сопротивления  $X$  ее представление выражениями (5.1.30), (5.1.44), запишем полученное уравнение в следующей форме:

$$P(t) = 0,5[E(V_{\text{зад}}(t), a) + K(V_{\text{зад}}(t), a)(\alpha(t) + \alpha_0)^2] \times \\ \times \rho(h)V_{\text{зад}}^2(t)S + m\dot{V}_{\text{зад}}(t). \quad (5.2.23)$$

Таким образом, управления  $P^*(t)$ ,  $\alpha^*(t)$ ,  $\gamma^*(t)$  для реализации заданного движения БЛА на высоте  $h$  определяются из решения параметрической системы нелинейных уравнений 2-го порядка (5.2.22), (5.2.23) и применения конечной формулы (5.2.21).

Трудоемкость решения этой задачи значительно ниже, чем их определение из решения системы 3-го порядка, построенной на основе выражений (5.2.6).

Более того, система уравнений (5.2.22), (5.2.23) уже представлена в форме выражений для непосредственного применения численного метода простых итераций, описанного в Разд. 3.4 и Разд. 3.5.

Отметим, что после определения управления  $P^*(t)$ ,  $\alpha^*(t)$ ,  $\gamma^*(t)$  необходимо для их контроля произвести моделирование полета БЛА путем численного решения задачи Коши (5.2.7)-(5.2.11) одним из методов, описанных в Разд. 3.1.

Модели движения БЛА в вертикальной и горизонтальной плоскостях также могут быть сформированы с использованием систем уравнений (5.1.14) и (5.1.15).

Рассмотрим вопросы моделирования полетов БЛА в вертикальной и горизонтальной плоскостях при действии ветровых возмущений, не удовлетворяющих условию (4.2.18).

Пусть при полете БЛА в вертикальной плоскости требуется выбрать управление  $u(t) = (P(t), a(t))$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ , обеспечивающее в момент времени  $t = t_k$  следующие значения его характеристик:

$$V(t_k) = V_k; \quad \theta(t_k) = \theta_k; \quad x(t_k) = x_k; \quad y(t_k) = y_k. \quad (5.2.24)$$

Будем считать, что без учета действия ветра сформированный вектор  $u(t)$  обеспечивает выполнение этих условий.

Требуется проанализировать выполнение условий (5.2.24) при действии «плоского» ветра, описываемого компонентами  $w_x \neq 0$ ,  $w_y \neq 0$ ,  $w_z = 0$ .

В этом случае используется частный случай вычислительной схемы общего метода моделирования полета БЛА в неспокойной атмосфере, описанной в Разд. 4.3, алгоритм которого представлен на Рис. 4.7.

В частности, возмущенные начальные условия, используемые при решении уравнений (5.2.1), (5.2.2), определяются путем подстановки значений  $V_0$  и  $\theta_0$  (см. выражения (5.2.5)) в формулы (4.3.4) и (4.3.6). Эти же формулы используются для вычисления возмущенных значений скорости  $V_{\pi}(t)$  и угла  $\theta_{\pi}(t)$  при подстановке в них значений  $V(t)$  и  $\theta(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ , определенных при решении системы уравнений (5.2.1), (5.2.2).

Возмущенная траектория полета БЛА в вертикальной плоскости формируется путем интегрирования уравнений:

$$\dot{x}_{\pi} = V_{\pi}(t) \cos \theta_{\pi}(t); \quad \dot{y}_{\pi} = V_{\pi}(t) \sin \theta_{\pi}(t)$$

с начальными условиями:

$$x_{\pi}(t_0) = x_0; \quad y_{\pi}(t_0) = y_0,$$

правые части которых берутся из выражений (5.2.5).

В результате моделирования движения БЛА при действии отмеченных выше характеристик ветра полученные значения:

$$V_{\pi k} = V_{\pi}(t_k); \quad \theta_{\pi k} = \theta_{\pi}(t_k); \quad x_{\pi k} = x_{\pi}(t_k); \quad y_{\pi k} = y_{\pi}(t_k)$$

сравниваются со значениями в правых частях выражений (5.2.24).

При неудовлетворительных отклонениях производится определение вектора  $u(t)$  методами, описанными в Главе 9. При невозможности определения этими методами управлений  $P(t)$  и  $a(t)$ , удовлетворяющих при  $t \in [t_0, t_k]$  условиям (5.2.5) и (5.2.24), принимается решение об отмене программируемого полета БЛА по неблагоприятным метеоусловиям.

Моделирование полета БЛА в горизонтальной плоскости при наличии ветра с использованием выражений (5.2.7)-(5.2.11) возможно, если компоненты вектора его скорости таковы, что  $w_x \neq 0$ ,  $w_y = 0$ ,  $w_z \neq 0$ .

Будем предполагать, что с помощью описанного выше метода определен вектор управления  $u(t) = (P(t), \alpha(t), \gamma(t))$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ , переводящий БЛА из состояния (5.2.11) в состояние:

$$V(t_k) = V_k; \quad \Psi(t_k) = \Psi_k; \quad x(t_k) = x_k; \quad z(t_k) = z_k. \quad (5.2.25)$$

Здесь так же, как и выше, будем использовать частный случай вычислительной схемы моделирования полета БЛА в неспокойной атмосфере, описанной в Разд. 4.3.

В этом случае, возмущенные начальные условия для системы (5.2.7), (5.2.8) вычисляются путем подстановки в выражения (4.3.4) и (4.3.7) значений  $V_0$  и  $\Psi_0$  из начальных условий (5.2.11).

Формулы (4.3.4), (4.3.7) используются для вычисления возмущенных значений  $V_{\pi}(t)$  и  $\Psi_{\pi}(t)$  по результатам  $V(t)$  и  $\Psi(t)$  интегрирования уравнений (5.2.7), (5.2.8) на интервале времени  $[t_0, t_k]$ .

Возмущенная траектория полета БЛА получается в процессе интегрирования уравнений:

$$\dot{x}_{\pi} = V_{\pi}(t) \cos \Psi_{\pi}(t); \quad \dot{z}_{\pi} = V_{\pi}(t) \sin \Psi_{\pi}(t)$$

с начальными условиями:

$$x_{\pi}(t_0) = x_0; \quad z_{\pi}(t_0) = z_0,$$

значения которых берутся из выражений (5.2.11).

В этом случае также используется частный случай алгоритма, представленного на Рис. 4.7.

Результаты моделирования:

$$V_{\pi k} = V_{\pi}(t_k); \quad \Psi_{\pi k} = \Psi_{\pi}(t_k); \quad x_{\pi k} = x_{\pi}(t_k); \quad z_{\pi k} = z_{\pi}(t_k)$$

сравниваются с правыми частями условий (5.2.25) и по полученным отклонениям принимаются решения, аналогичные результатам моделирования полета БЛА в вертикальной плоскости при наличии ветра.

Здесь также могут быть сформированы новые векторы  $u(t)$  косвенного управления БЛА с использованием похода, приведенного в Главе 9.

Заметим, что при наличии ветра с характеристиками  $w_x \neq 0$ ,  $w_y \neq 0$ ,  $w_z \neq 0$  рассмотренные выше частные модели движения БЛА (5.2.1)-(5.2.5) и (5.2.7)-(5.2.11) не используются. В этом случае применяется общая модель вида (5.2.16)-(5.2.21) и вычислительная схема, описанная в Разд. 4.3.

### **5.3. Модели движения БЛА в географических координатах**

В настоящее время существует общемировая тенденция использования в составе навигационного оборудования БЛА аппаратуры спутниковых навигационных систем ГЛОНАСС / GPS [35], которая позволяет с определенной точностью определять его текущее местоположение и компоненты скорости как в прямоугольных геодезических, так и в географических координатах (долгота  $\lambda$ , широта  $\phi$ , высота  $h$ ). Эти координаты должны использоваться при программировании полетов БЛА ДД над поверхностью Земли и, главное, при полетах БЛА корабельного и прибрежного базирования над морской и океанской акваториями.

Рассмотрим основные понятия, необходимые для построения модели управляемого полета БЛА в географических координатах [7].

Геометрически наиболее полно описывает форму Земли, *геоид*, который представляет собой пространственное тело, в каждой точке которого нормаль к его поверхности параллельна направлению силы тяжести, ограниченное невозмущенной поверхностью океанов и продолженной под материками Земли.

В первом приближении форму Земли можно представить сферой радиуса 6371110 м и для описания движения ЛА использовать сферические координаты [17], как это было сделано в работе [11].

Для проведения более точных расчетов их траекторий геоид представляется эллипсоидом, полученным путем вращения эллипса вокруг его малой оси. Такая фигура называется *общим земным эллипсоидом*, которая описывается в глобальной СК WGS-84 следующими значениями параметров:

- большая полуось эллипсоида, равная радиусу  $a = 6378137$  км экватора Земли;
- сжатие эллипсоида, равное величине:

$$\alpha = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{298,25722},$$

где  $b$  – малая полуось земного эллипсоида.

Заметим, что на территории бывшего СССР используется геоцентрическая система координат ПЗ-90, в основе которой лежит эллипсоид Красовского с параметрами  $a_K = 6378136$  м и  $\alpha_K = 1/298,2578$ .

Положение точки в географической СК описывается параметрами, представленными на Рис. 5.4.

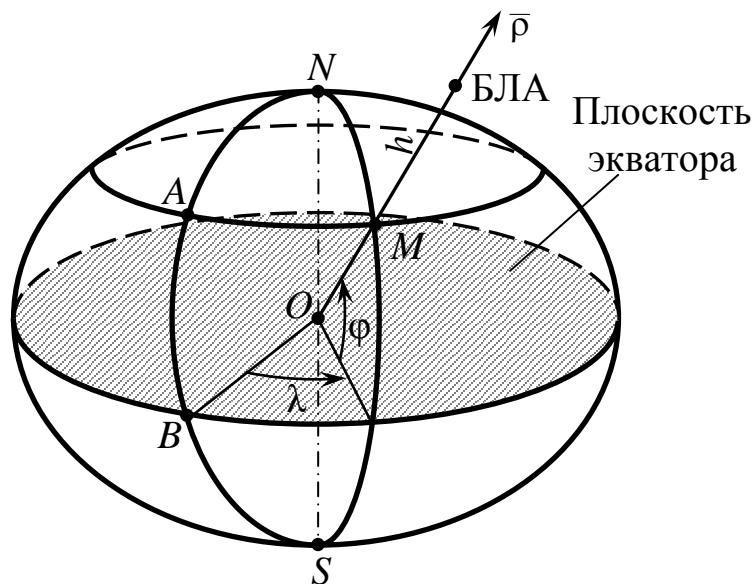


Рис. 5.4

На этом рисунке обозначены:

- долгота  $\lambda$  – двугранный угол между плоскостями Гринвичского меридиана NABS и местного меридиана, проходящего через точку  $M$ .

Долготы, лежащие восточнее Гринвичского меридиана, считаются положительными ( $\lambda > 0$ ), а западнее – отрицательными ( $\lambda < 0$ );

- широта  $\phi$  – угол между плоскостью экватора и радиус-вектором  $\bar{r}$ , проведенным из центра эллипсоида  $O$  через точку  $M$ . При этом,  $\phi > 0$  для точек севернее экватора и  $\phi < 0$  – для южных точек;
- высота  $h$  – расстояние по радиус-вектору  $\bar{r}$  от поверхности эллипсоида (от уровня моря) в точке  $M$  до местоположения БЛА.

В дальнейшем вместо параметра  $h$  будем использовать параметр  $r$  – расстояние от точки  $O$  до ЦМ БЛА по радиус-вектору  $\bar{r}$ .

Такой подход позволяет использовать для описания динамики полета БЛА геоцентрическую СК  $(x_r, y_r, z_r)$ , которая называется местной географической СК [7], представленной на Рис. 5.5.

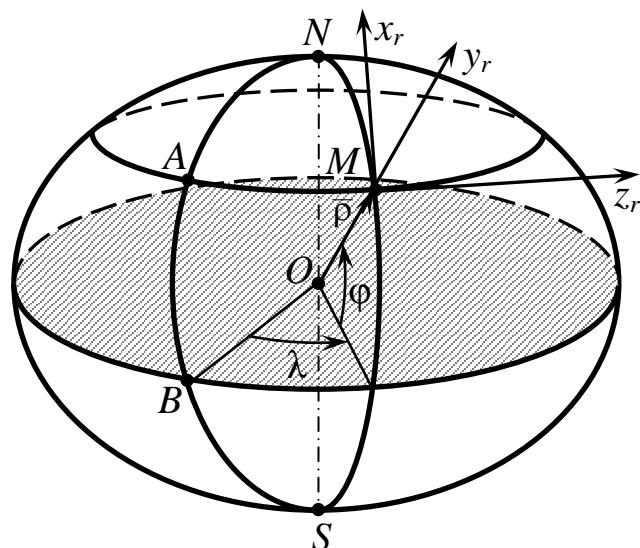


Рис. 5.5

Опорными плоскостями в этой СК служат плоскость экватора и плоскость Гринвичского меридиана. При этом положение ЦМ БЛА задается вектором  $(\lambda, \phi, r)$ .

На этом рисунке обозначена местная прямоугольная географическая система координат ( $Mx_r y_r z_r$ ) с началом в ЦМ БЛА, в которой ось ( $Mx_r$ ) направлена на север ( $N$ ), ось ( $Mz_r$ ) – параллельно плоскости экватора, ось ( $My_r$ ) направлена по радиус-вектору  $\bar{r}$  [7].

Кинематические дифференциальные уравнения, описывающие изменение характеристик  $\lambda$ ,  $\phi$  и  $r$  при движении ЦМ БЛА в геоцентрической СК, имеют вид [7]:

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{V}{r} \cos \Psi \cos \theta; \\ \dot{\lambda} &= \frac{V \sin \Psi \cos \theta}{r \cos \phi}; \\ \dot{r} &= V \sin \theta.\end{aligned}\tag{5.3.1}$$

Динамические уравнения движения ЦМ БЛА в предположениях, что

$$\sin(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) = (\alpha + \varphi_{\text{дв}}); \quad \cos(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) = 1, \quad \beta = 0; \quad z = 0,$$

записываются как [7]:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{P - X(\alpha, V, h)}{m} - g \sin \theta; \\ \dot{\theta} &= \left( \frac{V}{r} - \frac{g}{V} \right) \cos \theta + \\ &\quad + \frac{1}{mV} [P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha, V, h)] \cos \gamma; \\ \dot{\Psi} &= \frac{V}{r} \operatorname{tg} \phi \sin \Psi \cos \theta + \\ &\quad + \frac{1}{mV \cos \theta} [P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha, V, h)] \sin \gamma.\end{aligned}\tag{5.3.2}$$

Здесь углы  $\theta = \theta(t)$  и  $\Psi = \Psi(t)$  измеряются в СК ( $Mx_r y_r z_r$ ), представленной на Рис. 5.6.

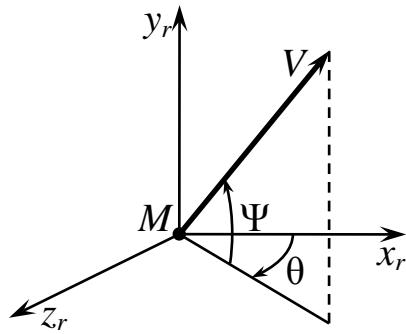


Рис. 5.6

Высота полета БЛА, от которой зависят значения сил  $X$ ,  $Y$  и  $P$  вычисляется по следующей формуле [7]:

$$h(t) = r(t) - a \sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2 \cos \varphi(t)}}, \quad (5.3.3)$$

где  $\varphi(t)$ ,  $r(t)$  – результаты интегрирования системы (5.3.1);  $e$  – эксцентриситет земного эллипсоида, равный:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \quad (5.3.4)$$

Вычисляя этот параметр с использованием приведенных выше характеристик общего эллипсоида и эллипсоида Красовского, имеем:

$$e_{\text{общ}}^2 = 9,5769 \cdot 10^{-3}; \quad e_{\text{К}}^2 = 6,6934 \cdot 10^{-3}.$$

Тогда из формулы (5.3.3) с учетом различных значений параметров  $a$  и  $e^2$  для разных эллипсоидов следует, что высота  $h(t)$  полетов БЛА будет принимать различные значения при их полетах над территорией бывшего СССР и вне этой территории.

Во втором случае выражение (5.3.3) конкретизируется как:

$$\begin{aligned} h(t) &= r(t) - 6378254 \sqrt{\frac{1 - 6,6934 \cdot 10^{-3}}{1 - 6,6934 \cdot 10^{-3} \cos \varphi(t)}} = \\ &= r(t) - \frac{6367401,7}{\sqrt{1 - 6,6934 \cdot 10^{-3} \cos \varphi(t)}}. \end{aligned}$$

Дифференцируя это выражение по  $t$ , получим:

$$\dot{h} = \dot{r} + \frac{22073,871 \sin \varphi}{\sqrt{(1 - 0,00693 \cos \varphi)^3}} \dot{\varphi}.$$

Подставляя в эту формулу правые части первого и третьего уравнений системы (5.3.1), получаем дифференциальное уравнение вида:

$$\dot{h} = V \sin \theta + \frac{22073,871 V \cos \Psi \cos \theta \sin \varphi}{r \sqrt{(1 - 0,00693 \cos \varphi)^3}}. \quad (5.3.5)$$

Таким образом, математическая модель управляемого полета БЛА в географических координатах  $\lambda$ ,  $\varphi$ ,  $r$  для эллипсоида Красовского представляется системой дифференциальных уравнений (5.3.1), (5.3.2), (5.3.5), которые интегрируются при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned} \varphi(t_0) &= \varphi_0; & \lambda(t_0) &= \lambda_0; & r(t_0) &= r_0; \\ h(t_0) &= h_0; & V(t_0) &= V_0; & \theta(t_0) &= \theta_0; & \Psi(t_0) &= \Psi_0. \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

При этом вследствие выражения (5.3.3) значения  $\lambda_0$ ,  $\varphi_0$  и  $r_0$  связаны соотношением вида:

$$h_0 - r_0 + a_K \sqrt{\frac{1 - e_K^2}{1 - e_K^2 \cos \varphi_0}} = 0.$$

Отметим, что предложенная модель отсутствует в работах [7, 11].

Одним из распространенных режимов полетов БЛА являются полеты на постоянной высоте  $h(t) = h = \text{const}$ .

Из выражения (5.3.3) получаем зависимость вида:

$$r(\varphi) = h + a \sqrt{\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos \varphi}}. \quad (5.3.7)$$

В этом случае кинематические уравнения движения (5.3.1) запишутся как:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{V}{r(\varphi)} \cos \theta \cos \Psi; \\ \dot{\lambda} &= \frac{V \cos \theta \sin \Psi}{r(\varphi) \cos \varphi}, \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

где  $r(\varphi)$  задается формулой (5.3.7).

Таким образом, частная модель управляемого полета БЛА над земным эллипсоидом на постоянной высоте  $h$  представляется системой уравнений (5.3.2), (5.3.8), в которые подставлена зависимость  $r = r(\varphi)$  вида (5.3.7).

Такая модель также отсутствует в работах [7, 11].

Отметим, что в предложенных выше моделях управлением является вектор  $u(t) = (P(t), \alpha(t), \gamma(t))$ , который формируется с использованием рассмотренных выше методов теории обратных задач управления или методов оптимального управления динамическими объектами, рассмотренными в Главе 9.

Проиллюстрируем применение первой группы методов к модели (5.3.2), (5.3.8), (5.3.7).

Пусть требуемая траектория полета БЛА на интервале времени  $[t_0, t_k]$  с заданной скоростью  $V_{\text{зад}} = V_{\text{зад}}(t)$  представлена в виде функций:

$$\varphi_{\text{тр}} = \varphi_{\text{тр}}(t); \quad \lambda_{\text{тр}} = \lambda_{\text{тр}}(t), \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (5.3.9)$$

Следует заметить, что эти функции должны удовлетворять условиям (5.3.6).

Если требуется, чтобы в момент времени  $t = t_k$  БЛА находился в точке с координатами:

$$\varphi(t_k) = \varphi_k; \quad \lambda(t_k) = \lambda_k,$$

то эти условия также необходимо учитывать при формировании законов (5.3.9).

### Пример 5.2

Пусть БЛА на некотором интервале времени  $[t_0, t_k]$  должен совершить перелет из точки  $(\varphi_0, \lambda_0)$  в точку  $(\varphi_k, \lambda_k)$  на высоте полета  $h = \text{const}$ .

В этом случае функции (5.3.9), удовлетворяющие этим граничным условиям, записываются в форме следующих выражений:

$$\varphi_{\text{тр}}(t) = \varphi_0 + \frac{t - t_0}{t_k - t_0} (\varphi_k - \varphi_0);$$

$$\lambda_{\text{тр}}(t) = \lambda_0 + \frac{t - t_0}{t_k - t_0} (\lambda_k - \lambda_0).$$

Вычислим с использованием зависимости (5.3.7) функцию  $r_{\text{тр}} = r_{\text{тр}}(t)$ . Дифференцируя функции (5.3.9), подставляя полученные производные и выражения (5.3.9) в уравнения (5.3.8), после несложных преобразований получим следующую систему уравнений для определения функций  $\theta_{\text{тр}} = \theta_{\text{тр}}(t)$  и  $\Psi_{\text{тр}} = \Psi_{\text{тр}}(t)$ :

$$\begin{aligned} V_{\text{зад}} \cos \theta \cos \Psi &= \dot{\varphi}_{\text{тр}} r_{\text{тр}}; \\ V_{\text{зад}} \cos \theta \sin \Psi &= \dot{\lambda}_{\text{тр}} r_{\text{тр}} \cos \varphi_{\text{тр}}. \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Построим аналитическое решение параметрической системы уравнений (5.3.10).

Поделив второе уравнение системы на ее первое уравнение, имеем:

$$\operatorname{tg} \Psi_{\text{тр}} = \frac{\dot{\lambda}_{\text{тр}} \cos \varphi_{\text{тр}}}{\dot{\varphi}_{\text{тр}}}. \quad (5.3.11)$$

Определим с помощью выражения (5.3.11) зависимость вида:

$$\cos \Psi_{\text{тр}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Psi_{\text{тр}}}} = \frac{\dot{\varphi}_{\text{тр}}}{\sqrt{\dot{\varphi}_{\text{тр}}^2 + \dot{\lambda}_{\text{тр}}^2 \cos^2 \varphi_{\text{тр}}}}.$$

Тогда из первого уравнения системы (5.3.10) получаем:

$$\cos \theta_{\text{тр}} = \frac{r_{\text{тр}}}{V_{\text{зад}}} \sqrt{\dot{\varphi}_{\text{тр}}^2 + \dot{\lambda}_{\text{тр}}^2 \cos^2 \varphi_{\text{тр}}}. \quad (5.3.12)$$

Таким образом, требуемые законы изменения углов  $\theta$  и  $\Psi$  при полете БЛА по траектории (5.3.9) определяются из выражений (5.3.11), (5.3.12) как:

$$\Psi_{\text{тр}}(t) = \arctg \left( \frac{\dot{\lambda}_{\text{тр}}(t) \cos \varphi_{\text{тр}}(t)}{\dot{\varphi}_{\text{тр}}(t)} \right);$$

$$\theta_{\text{тр}}(t) = \arccos \left( \frac{r_{\text{тр}}(t)}{V_{\text{зад}}(t)} \sqrt{\dot{\varphi}_{\text{тр}}^2(t) + \dot{\lambda}_{\text{тр}}^2(t) \cos^2 \varphi_{\text{тр}}(t)} \right). \quad (5.3.13)$$

Эти функции совместно с  $V_{\text{зад}} = V_{\text{зад}}(t)$ ,  $r_{\text{тр}} = r_{\text{тр}}(t)$ ,  $\varphi_{\text{тр}} = \varphi_{\text{тр}}(t)$ , подставленные в выражения (5.3.2), образуют параметрическую систему уравнений для нахождения управления  $P^*(t)$ ,  $\alpha^*(t)$ ,  $\gamma^*(t)$ , обеспечивающего движение БЛА по требуемой траектории (5.3.9).

Аналогичный подход используется и для предложенной выше общей модели пространственного движения БЛА в географической СК.

Моделирование полета БЛА в географических координатах при действии ветра, описываемого вектором  $\bar{W} = (w_\lambda, w_\varphi, w_h)$  осуществляется с помощью общего метода, изложенного в Разд. 4.3, адаптированного к использованию координат  $(\lambda, \varphi, r)$  с помощью соотношений  $V_\lambda = \dot{\lambda}$ ,  $V_\varphi = \dot{\varphi}$ ,  $V_r = \dot{r}$  и уравнений (5.3.1).

#### **5.4. Модели управляемых установившихся режимов полетов БЛА**

Установившиеся (равновесные) режимы полетов самолетов и вертолетов широко используются в процессах их эксплуатации [13, 27, 28, 30, 52]. К таким режимам относятся выполнения горизонтальных полетов с постоянной скоростью на заданной высоте, снижение и набор высоты с фиксированным значением скорости, развороты и виражи и др.

Отметим, что в существующей литературе, посвященной динамике полета БЛА [1, 2, 4, 7, 15, 49], установившиеся режимы их движения не рассматриваются.

В классической формулировке под установившимся режимом полета БЛА будем понимать такие его этапы, для которых

на определенных интервалах времени  $[t_0, t_k]$  изменение значений  $V(t)$ ,  $\theta(t)$  и  $\Psi(t)$  фазовых координат БЛА не происходит [28]. Формально такое требование представляется следующей совокупностью равенств:

$$\dot{V}(t) = 0; \quad \dot{\theta}(t) = 0; \quad \dot{\Psi}(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (5.4.1)$$

Из этих соотношений следует, что в установившихся режимах полета БЛА выполняются условия вида:

$$\begin{aligned} V(t) &= V = \text{const}; & \theta(t) &= \theta = \text{const}; \\ \Psi(t) &= \Psi = \text{const}, & t \in [t_0, t_k]. \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

В отличие от приведенных выше моделей неустановившихся режимов полета БЛА, в которых изменения фазовых координат  $V$ ,  $\theta$ ,  $\Psi$  описывается соответствующими системами дифференциальных уравнений, модели установившихся режимов представляются системами трансцендентных уравнений, получаемых из первых с использованием условий (5.4.1), (5.4.2). Вследствие этого вектор  $u(t)$  косвенного управления БЛА не зависит от времени  $t \in [t_0, t_k]$ .

По классификации работы [110] модели установившихся режимов полета БЛА можно отнести к неявным математическим моделям процессов и систем.

Пусть БЛА осуществляет установившийся полет в вертикальной плоскости маневренной СК  $M_{xy}$ , представленной на Рис. 1.9. Индекс «м» у координатных осей этой СК здесь и ниже будем опускать.

Используя в уравнениях (5.2.1), (5.2.2) условия (5.4.1) и (5.4.2), получаем следующую общую модель установившихся процессов горизонтального полета, набора высоты и снижения БЛА:

$$\begin{aligned} \frac{P - X(\alpha, y, V)}{m} - g \sin \theta &= 0; \\ \frac{P(\alpha + \phi_{\text{дв}}) + Y(\alpha, y, V)}{mV} - \frac{g}{V} \cos \theta &= 0. \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Вектор косвенного управления БЛА для этих режимов будет иметь вид:

$$u = (P, \alpha), \quad (5.4.4)$$

где  $P = \text{const}$ ,  $\alpha = \text{const}$ .

Соотношения (5.4.3) определяют неявно заданные функции [8]:

$$V = V(P, \alpha), \quad \theta = \theta(P, \alpha), \quad (5.4.5)$$

которые являются характеристиками рассматриваемого режима полета БЛА.

Вычисление этих характеристик при различных значениях вектора (5.4.4) методами, указанными в работе [110], является *прямой задачей управления* установившимися режимами полета БЛА.

*Обратная задача управления* БЛА в таких режимах состоит в определении вектора (5.4.4), обеспечивающего выполнение требований:

$$V = V_{\text{зад}}; \quad \theta = \theta_{\text{тр}}. \quad (5.4.6)$$

Решение этой задачи заключается в подстановке соотношений (5.4.6) в выражения (5.4.3) и применении к полученной системе одного из численных методов, описанных в Разд. 3.4. В частности для применения метода простых итераций можно использовать при  $\dot{V}_{\text{зад}}(t) = 0$ ,  $\dot{\theta}_{\text{тр}}(t) = 0$  формулы (5.1.16), (5.1.17), исключив из них параметр  $t$ .

Использование требований (5.4.6) позволяет сформировать с помощью уравнений (5.2.3), (5.2.4) и начальных условий (5.2.5) траекторию полета БЛА в рассматриваемом режиме на интервале времени  $[t_0, t_k]$ .

Подставляя выражения (5.4.6) в дифференциальные уравнения (5.2.3), (5.2.4) и решая полученную задачу Коши, имеем:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + (t - t_0)V_{\text{зад}} \cos \theta_{\text{тр}}, \quad t \in [t_0, t_k]; \\ y(t) &= y_0 + (t - t_0)V_{\text{зад}} \sin \theta_{\text{тр}}. \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

Исключая из этих выражений время  $t$ , получаем следующие уравнения траектории движения БЛА в СК  $Mxy$ :

$$y = y_0 + (x - x_0) \operatorname{tg} \theta_{\text{тр}}.$$

Это уравнение представляет собой известное уравнение прямой, проходящей через точку с координатами  $(x_0, y_0)$  под углом  $\theta_{\text{тр}}$  [17].

Модель (5.4.3) при  $\theta_{\text{тр}} = 0$  и  $y = h$  описывает режим горизонтального полета БЛА на постоянной высоте. С учетом этого модель данного режима конкретизируется как

$$\begin{aligned} P - X(\alpha, h, V_{\text{зад}}) &= 0; \\ P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha, h, V_{\text{зад}}) - mg &= 0. \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

Схема равновесия сил, входящих в выражения (5.4.8), представлена на Рис. 5.7, а.

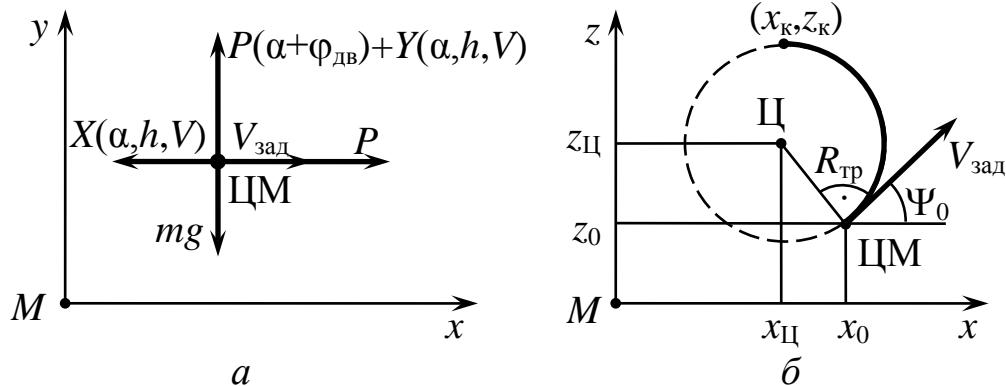


Рис. 5.7

Для определения вектора управления (5.4.4) можно использовать с соответствующими корректировками систему уравнений (5.1.16), (5.1.17).

Эта система, представленная в форме (3.3.11) для применения численного метода простых итераций (см. Разд. 3.4) будет иметь вид:

$$\alpha = \frac{mg - 0,5B(V_{\text{зад}}, a)\rho(h)V_{\text{зад}}^2 S}{P + 0,5D(V_{\text{зад}}, a)\rho(h)V_{\text{зад}}^2 S}; \quad (5.4.9)$$

$$P = 0,5[E(V_{\text{зад}}, a) + K(V_{\text{зад}}, a)(\alpha + \alpha_0)^2]\rho(h)V_{\text{зад}}^2 S + mg.$$

Входящее в эти уравнения значение скорости звука  $a$  вычисляется по формуле (5.1.42) при подстановке в нее значения  $y = h$ .

При необходимости учета ограничений вида (5.1.56) в системе (5.4.9) выполняется замена переменных, представленная выражениями (5.1.57).

Для рассматриваемого режима полета БЛА параметрическое представление его траектории (5.4.7) принимает следующий вид:

$$x(t) = x_0 + V_{\text{зад}}(t - t_0); \quad y(t) = y_0 = h, \quad t \in [t_0, t_k].$$

Вследствие выражений (5.4.7) высота полета БЛА для режимов набора высоты ( $\theta_{\text{тр}} > 0$ ) и снижения ( $\theta_{\text{тр}} < 0$ ) является линейной функцией времени. Это означает, что уравнения (5.4.3) будут являться параметрической системой уравнений, в результате использования которой компоненты вектора (5.4.4) будут функциями времени. Последнее нарушает основные условия реализации установившихся режимов полета БЛА вида (5.4.1) и (5.4.2).

Для их приближенного выполнения предлагается в формуле (5.1.3) для определения плотности воздуха на высоте  $y$ , входящей в выражения (5.1.30), при вычислении сил  $X$  и  $Y$  использовать некоторую высоту  $y^*$ , соответствующую средней плотности воздуха в интервале высот  $[y_0, y_k]$ , в котором БЛА выполняет набор высоты или снижение.

Среднюю плотность воздуха будем вычислять по следующей формуле:

$$\rho(y^*) = 0,5(\rho(y_0) + \rho(y_k)). \quad (5.4.10)$$

Подставляя в это выражение правую часть формулы (5.1.31), получим:

$$e^{-ky^*} = 0,5(e^{-ky_0} + e^{-ky_k}).$$

Откуда высота  $y^*$  определяется как:

$$y^* = -\frac{1}{k} \left[ \ln 0,5 + \ln \left( e^{-ky_0} + e^{-ky_k} \right) \right]. \quad (5.4.11)$$

С учетом формулы (5.4.11) модель установившихся процессов набора высоты ( $\theta > 0$ ) и снижения ( $\theta < 0$ ), сформированная с использованием соотношений (5.4.3), примет вид:

$$P - X(\alpha, y^*, V) - mg \sin \theta = 0;$$

$$P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha, y^*, V) - mg \cos \theta = 0.$$

Вектор  $u = (P, \alpha)$  управления БЛА в этих режимах полета определяется с использованием выражений (5.2.16), (5.2.17), (5.4.6), (5.4.10) путем решения следующей системы уравнений, представленной в форме выражений (3.3.11):

$$\alpha = \frac{mg \cos \theta_{\text{тр}} - 0,25B(V_{\text{зад}}, a)(\rho(y_0) + \rho(y_k))V_{\text{зад}}^2 S}{P + 0,25D(V_{\text{зад}}, a)(\rho(y_0) + \rho(y_k))V_{\text{зад}}^2 S};$$

$$P = 0,25 \left[ E(V_{\text{зад}}, a) + K(V_{\text{зад}}, a)(\alpha + \alpha_0)^2 \right] (\rho(y_0) + \rho(y_k))V_{\text{зад}}^2 S + mg \cos \theta_{\text{тр}}.$$

Значение скорости звука  $a$ , входящее в состав функций  $B$ ,  $D$ ,  $E$  и  $K$ , вычисляется подстановкой в формулу (5.1.42) высоты  $y^*$ , определенной с использованием выражения (5.4.11).

Если в процессе программирования полета БЛА необходимо учитывать первые два условия из состава неравенств (5.1.56), предлагается, как и выше, применить замену переменных  $P$ ,  $\alpha$  на вспомогательные переменные  $v_P$ ,  $v_\alpha$  с использованием выражений (5.1.57).

Рассмотрим установившиеся режимы полета БЛА в горизонтальной плоскости на заданной высоте  $y = h$ . В этом случае предполагается, что траектории движения БЛА лежат в плоскости  $Mxy$  маневренной СК (см. Рис. 1.9). При  $V = \text{const}$  и  $\Psi = \text{const}$  модель соответствующего режима полета БЛА, получаемая из выражений (5.2.6), представляется следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
 P - X(\alpha, h, V) &= 0; \\
 (P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha, h, V)) \cos \gamma - mg &= 0; \\
 (P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha, h, V)) \sin \gamma &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.4.12}$$

Вектор косвенного управления БЛА для таких режимов его полета имеет вид:

$$u = (P, \alpha, \gamma), \tag{5.4.13}$$

где  $P = \text{const}$ ,  $\alpha = \text{const}$ ,  $\gamma = \text{const}$ .

Из третьего уравнения системы (5.4.12) следует, что при  $P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha, h, V) \neq 0$  угол крена  $\gamma$  в векторе (5.4.13) должен быть равен нулю. В этом случае первые два уравнения системы полностью соответствуют модели (5.4.8). Последнее означает, что для определения значений  $P$  и  $\alpha$  при заданном значении  $V_{\text{зад}}$  скорости полета БЛА может быть использована система нелинейных уравнений (5.4.9).

Будем считать, что дополнительно к величине  $V_{\text{зад}}$  направление полета БЛА на интервале времени  $[t_0, t_k]$  задано углом  $\Psi_{\text{тр}} = \text{const}$ . Подставляя эти значения в уравнения (5.2.9), (5.2.10) и решая с использованием соответствующих начальных условий из состава выражений (5.2.11) полученную задачу Коши, имеем:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_0 + (t - t_0)V_{\text{зад}} \cos \Psi_{\text{тр}}, \quad t \in [t_0, t_k]; \\
 z(t) &= z_0 + (t - t_0)V_{\text{зад}} \sin \Psi_{\text{тр}}.
 \end{aligned}$$

Исключая из этого параметрического представления траектории БЛА время  $t$ , получаем уравнение прямой:

$$z = z_0 + (x - x_0)\operatorname{tg} \Psi_{\text{тр}},$$

лежащей на плоскости  $Mxz$ .

Таким образом, вектор управления  $u = (P, \alpha, 0)$  обеспечивает прямолинейный установившийся полет БЛА в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью  $V_{\text{зад}}$  и углом курса  $\Psi = \Psi_{\text{тр}}$ .

Криволинейные установившиеся режимы полета БЛА в горизонтальной плоскости характеризуются условиями:

$\dot{V}(t) = 0; \dot{\theta}(t) = 0; \dot{\Psi}(t) = \text{const} \neq 0, t \in [t_0, t_k]$ ,  
которые отличаются от общепринятых условий (5.4.1).

При движении БЛА с постоянной скоростью  $V$  по круговой траектории радиуса  $R$  скорость изменения угла  $\Psi$  вычисляется по следующей формуле [13, 28]:

$$\dot{\Psi}(t) = \frac{V}{R} = \text{const.}$$

Модель установившихся режимов полета БЛА по круговым траекториям (развороты, виражи), построенная с использованием этого соотношения и выражений (5.2.6), будет иметь вид:

$$\begin{aligned} P - X(\alpha, h, V) &= 0; \\ (P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha, h, V)) \cos \gamma - mg &= 0; \\ \frac{(P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha, h, V)) \sin \gamma}{mV} - \frac{V}{R} &= 0. \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

Вектор управления БЛА, компоненты которого входят в эту модель, описывается выражением (5.4.13).

Для определения вектора  $u$  при известных значениях  $V_{\text{зад}}$ ,  $R_{\text{тр}}$ ,  $\dot{\Psi}_{\text{тр}} = V_{\text{зад}}/R_{\text{тр}}$  будем использовать соотношения (5.2.21)-(5.2.23), которые конкретизируются как:

$$\gamma = \arctg \left( \frac{V_{\text{зад}}^2}{gR_{\text{тр}}} \right); \quad (5.4.15)$$

$$\alpha = \frac{m \sqrt{g^2 + V_{\text{зад}}^3/R_{\text{тр}}} - 0,5(V_{\text{зад}}, a) \rho(h) V_{\text{зад}}^2 S}{P + 0,5D(V_{\text{зад}}, a) \rho(h) V_{\text{зад}}^2 S}; \quad (5.4.16)$$

$$P = 0,5 [E(V_{\text{зад}}, a) + K(V_{\text{зад}}, a)(\alpha + \alpha_0)^2] \rho(h) V_{\text{зад}}^2 S.$$

В данном случае угол крена  $\gamma$  рассчитывается непосредственно по формуле (5.4.15), а тяга  $P$  и угол атаки  $\alpha$  вычисляются путем решения системы нелинейных уравнений (5.4.16) численным методом простых итераций (см. Разд. 3.4).

В данной задаче, как и выше, при учете ограничений (5.1.56) применяется замена ее переменных вида (5.1.57).

Параметрическое представление траектории установившегося режима полета БЛА в рассматриваемой задаче получается путем решения задачи Коши:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V_{\text{зад}} \cos \Psi_{\text{тр}}(t); \quad \dot{z} = V_{\text{зад}} \sin \Psi_{\text{тр}}(t), \quad t \in [t_0, t_k]; \\ x(t_0) &= x_0; \quad z(t_0) = z_0,\end{aligned}\quad (5.4.17)$$

сформированной с использованием выражений (5.2.9)-(5.2.11).

Требуемый закон  $\Psi_{\text{тр}}(t)$  изменения угла поворота траектории БЛА определим путем интегрирования уравнения:

$$\dot{\Psi}_{\text{тр}} = \frac{V_{\text{зад}}}{R_{\text{тр}}}, \quad t \in [t_0, t_k]$$

с начальным условием вида:

$$\Psi_{\text{тр}}(t_0) = \Psi_0,$$

где  $\Psi_0$  – угол выхода БЛА на круговую траекторию полета (см. Рис. 5.7,б).

Проводя интегрирование, получим:

$$\Psi_{\text{тр}}(t) = \frac{V_{\text{зад}}}{R_{\text{тр}}} (t - t_0) + \Psi_0. \quad (5.4.18)$$

Решая задачу Коши (5.4.17) с использованием зависимости (5.4.18) и известных методов вычисления неопределенных интегралов [8], получаем искомое представление траектории полета БЛА на интервале времени  $[t_0, t_k]$  вида:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 - R_{\text{тр}} \sin \Psi_0 + R_{\text{тр}} \sin \left( \frac{V_{\text{зад}}}{R_{\text{тр}}} (t - t_0) + \Psi_0 \right); \\ z(t) &= z_0 + R_{\text{тр}} \cos \Psi_0 - R_{\text{тр}} \cos \left( \frac{V_{\text{зад}}}{R_{\text{тр}}} (t - t_0) + \Psi_0 \right).\end{aligned}\quad (5.4.19)$$

Конечная точка траектории полета БЛА получается путем подстановки в эти выражения значения  $t = t_k$ .

Из Рис. 5.7,б следует, что координаты точки Ц определяются по следующим формулам:

$$x_{\text{Ц}} = x_0 - R_{\text{тр}} \sin \Psi_0; \quad z_{\text{Ц}} = z_0 + R_{\text{тр}} \cos \Psi_0. \quad (5.4.20)$$

Подставляя эти выражения в соотношения (5.4.19), имеем:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{\text{Ц}} + R_{\text{тр}} \sin \left( \frac{V_{\text{зад}}}{R_{\text{тр}}} (t - t_0) + \Psi_0 \right); \\ z(t) &= z_{\text{Ц}} - R_{\text{тр}} \cos \left( \frac{V_{\text{зад}}}{R_{\text{тр}}} (t - t_0) + \Psi_0 \right). \end{aligned} \quad (5.4.21)$$

Перенесем величины  $x_{\text{Ц}}$  и  $z_{\text{Ц}}$  в левые части этих выражений и используем обычное обозначение функций вида:

$$x = x(t), \quad z = z(t).$$

Тогда соотношения (5.4.21) запишутся в следующей форме:

$$\begin{aligned} x - x_{\text{Ц}} &= R_{\text{тр}} \sin \left( \frac{V_{\text{зад}}}{R_{\text{тр}}} (t - t_0) + \Psi_0 \right); \\ z - z_{\text{Ц}} &= -R_{\text{тр}} \cos \left( \frac{V_{\text{зад}}}{R_{\text{тр}}} (t - t_0) + \Psi_0 \right). \end{aligned}$$

Возводя в квадрат обе части каждого из этих выражений и суммируя их, получаем известное уравнение окружности радиуса  $R_{\text{тр}}$  с центром в точке с координатами  $(x_{\text{Ц}}, z_{\text{Ц}})$  [17]:

$$(x - x_{\text{Ц}})^2 + (z - z_{\text{Ц}})^2 = R_{\text{тр}}^2.$$

Таким образом, можно утверждать, что выражения (5.4.19) описывают установившееся движение БЛА по круговой траектории радиуса  $R_{\text{тр}}$  из начального состояния, заданного параметрами  $x_0$ ,  $z_0$  и  $\Psi_0$ .

Отметим, что проверка правильности определения векторов и приведенными выше методами производится интегрированием при этих векторах системы дифференциальных уравнений пространственного движения БЛА (5.1.16)-(5.1.21).

При этом сформированные векторы управления считаются правильными, если для всех значений  $t \in [t_0, t_k]$  с требуемой точностью выполняются следующие условия:

- 1)  $V(t) = V_{\text{зад}}; \theta(t) = \theta_{\text{тр}}; \Psi(t) = 0$  – при полетах БЛА в вертикальной плоскости,
- 2)  $V(t) = V_{\text{зад}}; \theta(t) = 0; \Psi(t) = \Psi_{\text{тр}}$  – при прямолинейных полетах БЛА в горизонтальной плоскости,
- 3)  $V(t) = V_{\text{зад}}; \theta(t) = 0; \Psi(t) = \Psi_0 + \frac{V_{\text{зад}}}{R_{\text{тр}}} (t - t_0)$  – при полетах БЛА по круговым траекториям в горизонтальной плоскости.

Аналогичные модели установившихся режимов полетов БЛА могут быть сформированы с использованием динамических уравнений (5.1.14) и (5.1.15).

## 5.5. Формирование требуемых законов прямого управления БЛА

Анализ литературы, посвященной вопросам программного управления рассматриваемого вида БЛА, показал полное отсутствие методов и алгоритмов формирования непосредственных управляющих воздействий на его исполнительные органы, обеспечивающие полет БЛА по запланированной траектории. Согласно выражению (1.8) для общего вектора (1.7) косвенного управления БЛА такими воздействиями являются законы изменения числа оборотов  $\delta_P(t) = n(t)$  турбины ВРД или вала винтомоторной группы и углов отклонения  $\delta_B(t), \delta_E(t), \delta_H(t)$  руля высоты, элеронов и руля направления БЛА.

Именно эти законы, введенные в САУ БЛА (см. Рис. 1.1), при их реализации определяют требуемую для выполнения целевого задания программу управления полетом конкретного БЛА.

Рассмотрим один из подходов к формированию требуемых законов  $n(t), \delta_B(t), \delta_E(t), \delta_H(t)$  программного управления БЛА.

Будем считать, что из решения системы уравнений (5.1.61) определен требуемый вектор косвенного управления  $u^*(t) = (P^*(t), \alpha^*(t), \beta^*(t), \gamma^*(t))$ , удовлетворяющий при  $t \in [t_0, t_k]$  условиям (5.1.55), (5.1.58) и обеспечивающий выполнение БЛА поставленного полетного задания. При этом, с использованием заданных зависимостей  $V_{\text{зад}}(t)$ ,  $\theta_{\text{тр}}(t)$ ,  $\Psi_{\text{тр}}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$  из решения второго уравнения из состава выражений (5.1.52) определен требуемый закон  $y_{\text{тр}}(t)$  изменения высоты полета БЛА.

Рассмотрим метод определения требуемого числа оборотов  $n^*(t)$  вала двигателя БЛА, обеспечивающего значения тяги  $P^*(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ .

Известно, что тяга двигателей БЛА зависит от таких параметров внешней среды, как температура, давление, влажность, плотность и скорость набегающего потока воздуха [2, 7, 15 и др.].

В практических задачах динамики полета ЛА тяга двигателя описывается его высотно-скоростной характеристикой (ВСХ) вида:

$$P = P(M_{\pi}, h, \bar{n}), \quad (5.5.1)$$

где  $M_{\pi} = V/a(h)$  – полетное число Маха;  $V$  – скорость набегающего потока воздуха;  $a(h)$  – скорость звука на высоте  $h$ ;  $\bar{n}$  – относительное число оборотов турбины (вала) двигателя, выраженное в долях единицы или в процентах от их максимального значения.

В настоящее время зависимость вида (5.5.1) в технической документации на двигатель БЛА представляется в форме графиков или таблиц.

Фрагменты ВСХ ВРД БЛА, рассмотренного в Примере 5.1, представлены в табл. 5.4.

Таблица 5.4

$h = 0 \text{ м}; \bar{n} = 100\%$									
$M_{\text{п}}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$P, \text{H}$	1163,15	1124,90	1112,83	1118,69	1146,61	1166,94	1194,17	1208,65	—
.....									
$h = 0 \text{ м}; \bar{n} = 75\%$									
$M_{\text{п}}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$P, \text{H}$	352,19	316,62	286,02	260,33	233,89	213,97	—	—	—
.....									
$h = 2000 \text{ м}; \bar{n} = 100\%$									
$M_{\text{п}}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$P, \text{H}$	909,26	879,68	869,43	873,57	897,80	941,68	996,07	1049,05	1098,95
$h = 2000 \text{ м}; \bar{n} = 95\%$									
$M_{\text{п}}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$P, \text{H}$	729,54	699,25	687,18	687,18	704,92	738,53	781,83	848,72	939,36
.....									
$h = 3000 \text{ м}; \bar{n} = 100\%$									
$M_{\text{п}}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$P, \text{H}$	800,70	774,63	766,07	770,35	790,98	826,38	872,69	950,90	1011,54
$h = 3000 \text{ м}; \bar{n} = 95\%$									
$M_{\text{п}}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$P, \text{H}$	642,28	616,60	605,32	605,32	619,71	649,90	690,14	748,12	825,94
.....									
$h = 5000 \text{ м}; \bar{n} = 100\%$									
$M_{\text{п}}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$P, \text{H}$	615,17	594,51	588,72	588,72	604,08	631,80	670,34	724,76	797,31
.....									
$h = 6000 \text{ м}; \bar{n} = 100\%$									
$M_{\text{п}}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$P, \text{H}$	536,08	517,42	511,82	513,69	526,54	550,12	583,23	633,21	694,98
$h = 6000 \text{ м}; \bar{n} = 95\%$									
$M_{\text{п}}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$P, \text{H}$	429,72	411,16	404,44	404,44	414,24	431,99	461,30	503,52	546,62
.....									
$h = 7000 \text{ м}; \bar{n} = 95\%$									
$M_{\text{п}}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$P, \text{H}$	372,82	357,06	350,55	350,55	358,69	374,99	399,07	430,21	472,77
$h = 7000 \text{ м}; \bar{n} = 90\%$									
$M_{\text{п}}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$P, \text{H}$	293,33	276,31	266,53	262,18	264,54	275,58	295,86	320,85	355,07
.....									
$h = 9000 \text{ м}; \bar{n} = 75\%$									
$M_{\text{п}}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$P, \text{H}$	106,14	95,47	85,94	77,91	70,38	63,86	—	—	—

Требуемый закон изменения числа  $\bar{n}^*(t)$  оборотов двигателя БЛА предлагается определять из решения следующего параметрического уравнения:

$$P(M_{\text{зад}}(t), y_{\text{тр}}(t), \bar{n}(t)) - P^*(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (5.5.2)$$

Здесь  $M_{\text{зад}}(t) = V_{\text{зад}}(t)/a(y_{\text{тр}}(t))$  – число Маха полета БЛА в момент времени  $t \in [t_0, t_k]$ .

При решении этого уравнения используются численные методы, приведенные в Разд. 3.5.

Для иллюстрации предлагаемого подхода рассмотрим определение закона  $n^*(t)$  для БЛА, оснащенного ПД.

Общая формула для тяги такого двигателя приведена в работе [21].

Конкретизируя эту формулу с использованием работы [51], получаем зависимость вида:

$$P = \frac{\alpha_P(V, h)n^2 D^4}{0,0288 \cdot 10^6}.$$

Здесь  $\alpha_P$  – коэффициент тяги винтомоторной группы БЛА, заданной в форме графиков (номограммы), зависящий от значений скорости  $V$  и высоты  $h$  полета БЛА, профиля и угла установки винта;  $D$  – диаметр винта.

В этом случае уравнение (5.5.2) записывается как:

$$\frac{\alpha_P(V_{\text{зад}}(t), y_{\text{тр}}(t))D^4 n^2(t)}{0,0288 \cdot 10^6} - P^*(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_k].$$

Решение этого уравнения, определяющее число оборотов вала ПД в абсолютных единицах, имеет вид:

$$n^*(t) = \frac{169,705}{D^2} \sqrt{\frac{P^*(t)}{\alpha_P(V_{\text{зад}}(t), y_{\text{тр}}(t))}}, \quad t \in [t_0, t_k].$$

Заметим, что для применения этой формулы необходимо использовать аналитическое представление функции  $\alpha_P(V, h)$ .

Следует отметить, что для определения закона  $\bar{n}^*(t)$  управления тягой двигателя БЛА с помощью уравнения (5.5.2) необходимо иметь аналитическое представление функции (5.5.1), полученное путем интерполяции (аппроксимации) табличного представления ВСХ применяемого двигателя (см. табл. 5.4).

Для определения зависимостей  $\delta_B = \delta_B(t)$ ,  $\delta_H = \delta_H(t)$ ,  $\delta_E = \delta_E(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$  будем использовать основные соотношения модели (5.1.1)-(5.1.7) пространственного движения БЛА как твердого тела.

При конкретизации уравнений (5.1.4) используются следующие представления моментов сил, действующих на БЛА (см. Рис. 5.1):

$$\begin{aligned} M_x &= 0,5m_x\rho(y)V^2Sl; \\ M_y &= 0,5m_y\rho(y)V^2Sb_A; \\ M_z &= 0,5m_z\rho(y)V^2Sb_A, \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

где  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  – безразмерные коэффициенты соответственно моментов крена, рыскания и тангажа, зависящие от параметров БЛА и характеристик его пространственного движения [7].

Используя гипотезу о линейной зависимости моментных характеристик БЛА, эти коэффициенты можно представить для фиксированного числа М полета в виде следующих зависимостей [7]:

$$\begin{aligned} m_x &= m_{x0} + m_x^\beta\beta + m_x^{\delta_H}\delta_H + m_x^{\delta_E}\delta_E + m_x^{\bar{\omega}_y} \frac{l\omega_y}{2V} + m_x^{\bar{\omega}_x} \frac{l\omega_x}{2V} + m_x P; \\ m_y &= m_y^\beta\beta + m_y^{\delta_H}\delta_H + m_y^{\delta_E}\delta_E + m_y^{\bar{\omega}_y} \frac{l\omega_y}{2V} + m_y^{\bar{\omega}_x} \frac{l\omega_x}{2V} + m_y P; \\ m_z &= m_{z0} + m_z^\alpha\alpha + m_z^{\bar{\alpha}} \frac{\dot{\alpha}b_A}{V} + m_z^{\delta_B}\delta_B + m_z^{\bar{\omega}_z} \frac{b_A\omega_z}{V} + m_z P. \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

Здесь  $m_{x0}$ ,  $m_{z0}$  – коэффициенты моментов крена и тангажа при  $\alpha = 0$  и  $\beta = 0$ ;  $m_x^\beta$ ,  $m_x^{\delta_H}$ , ...,  $m_z^{\delta_B}$ ,  $m_x^{\bar{\omega}_z}$  – частные производные коэффициентов  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  по соответствующим переменным;

$m_{xP}$ ,  $m_{yP}$ ,  $m_{zP}$  – коэффициенты моментов от маршевого двигателя БЛА, которые в дальнейшем будем считать пренебрежимо малыми.

В выражениях (5.5.4) использованы безразмерные частные производные от угловых скоростей, которые вычисляются как:

$$\bar{\omega}_x = \frac{\omega_x l}{2V}; \quad \bar{\omega}_y = \frac{\omega_y l}{2V}; \quad \bar{\omega}_z = \frac{\omega_z b_A}{V}; \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha b_A}{V},$$

где  $V$  – текущее значение скорости полета БЛА.

Отметим, что все коэффициенты, входящие в правые части соотношений (5.5.4), должны определяться на основе обработки результатов продувок в аэродинамических трубах конкретного образца БЛА.

Использование выражений (5.5.3), (5.5.4) в уравнениях (5.1.4) позволяет получить следующие зависимости характеристик движения БЛА вокруг его ЦМ от искомых законов управления  $\delta_B = \delta_B(t)$ ,  $\delta_H = \delta_H(t)$  и  $\delta_E = \delta_E(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ :

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= \\ &= 0,5 \rho(y) V^2 S l \left( m_{x0} + m_x^\beta \beta + m_x^{\delta_H} \delta_H + m_x^{\delta_E} \delta_E + m_x^{\bar{\omega}_y} \frac{l \omega_y}{2V} + m_x^{\bar{\omega}_x} \frac{l \omega_x}{2V} \right); \\ J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z &= \\ &= 0,5 \rho(y) V^2 S b_A \left( m_y^\beta \beta + m_y^{\delta_H} \delta_H + m_y^{\delta_E} \delta_E + m_y^{\bar{\omega}_y} \frac{l \omega_y}{2V} + m_y^{\bar{\omega}_x} \frac{l \omega_x}{2V} \right); \\ J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_y \omega_x &= \\ &= 0,5 \rho(y) V^2 S b_A \left( m_{z0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\bar{\alpha}} \frac{\dot{\alpha} b_A}{V} + m_z^{\delta_B} \delta_B + m_z^{\bar{\omega}_z} \frac{b_A \omega_z}{V} \right). \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

В работе [7] отмечается, что дифференциальные уравнения (5.1.5) были сформированы на основе следующих выражений:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \vartheta; \\ \omega_y &= \dot{\psi} \cos \gamma \cos \vartheta + \dot{\vartheta} \sin \gamma; \\ \omega_z &= \dot{\vartheta} \cos \gamma - \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma. \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

В процессе пространственного движения БЛА углы  $\alpha$  и  $\beta$  взаимным образом зависят от текущих значений угла крена  $\gamma$  и углов  $\theta, \vartheta, \Psi, \psi$  [7].

Представим эти зависимости в виде следующих формул:

$$\alpha = \vartheta - \theta - \beta \sin \gamma; \quad \beta = \psi - \Psi + \alpha \sin \gamma.$$

Отсюда получаем выражения для вычисления углов тангажа и рыскания БЛА [82]:

$$\vartheta = \alpha + \theta - \beta \sin \gamma; \quad \psi = \beta + \Psi + \alpha \sin \gamma. \quad (5.5.7)$$

Требуемые законы изменения этих углов на интервале времени  $[t_0, t_k]$  определим путем подстановки в эти выражения функций:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha^*(t); \quad \theta = \theta_{\text{тр}}(t); \\ \beta &= \beta^*(t); \quad \gamma = \gamma^*(t); \quad \Psi = \Psi_{\text{тр}}(t). \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} \vartheta^*(t) &= \alpha^*(t) + \theta_{\text{тр}}(t) - \beta^*(t) \sin \gamma^*(t); \\ \psi^*(t) &= \beta^*(t) + \Psi_{\text{тр}}(t) + \alpha^*(t) \sin \gamma^*(t). \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

Требуемые законы изменения угловых скоростей БЛА с использованием соотношений (5.5.6), (5.5.8), (5.5.9) вычисляются как:

$$\begin{aligned} \omega_x^*(t) &= \dot{\gamma}^*(t) + \dot{\psi}^*(t) \sin \vartheta^*(t); \\ \omega_y^*(t) &= \dot{\psi}^*(t) \cos \gamma^*(t) \cos \vartheta^*(t) + \dot{\vartheta}^*(t) \sin \gamma^*(t); \\ \omega_z^*(t) &= \dot{\vartheta}^*(t) \cos \gamma^*(t) - \dot{\psi}^*(t) \cos \vartheta^*(t) \sin \gamma^*(t). \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

Входящие в эти выражения производные  $\dot{\gamma}^*(t), \dot{\psi}^*(t), \dot{\vartheta}^*(t)$  вычисляются по формулам численного дифференцирования, аналогичным формулам (3.5.16) или (3.5.17) при  $h = \Delta t$ .

Отметим, что на вычислительной сетке с шагом  $\Delta t$ , сформированной на интервале времени  $[t_0, t_k]$ , осуществляется решение системы уравнений (5.1.61), интегрирование уравнений (5.1.52) и вычисление функций (5.5.9) и (5.5.10).

Проводя численное дифференцирование функций  $\omega_x^*(t)$ ,  $\omega_y^*(t)$ ,  $\omega_z^*(t)$ ,  $\alpha^*(t)$  и используя обозначения:

$$\omega_x = \omega_x^*(t); \quad \omega_y = \omega_y^*(t); \quad \omega_z = \omega_z^*(t);$$

$$V = V_{\text{зад}}(t); \quad y = y_{\text{тр}}(t); \quad \beta = \beta^*(t); \quad \alpha = \alpha^*(t); \quad \dot{\alpha} = \dot{\alpha}^*(t),$$

преобразуем выражения (5.5.5) к системе линейных параметрических уравнений вида:

$$0 \cdot \delta_B(t) + m_x^{\delta_H} \delta_H(t) + m_x^{\delta_3} \delta_3(t) = c_1(t); \quad (5.5.11)$$

$$0 \cdot \delta_B(t) + m_y^{\delta_H} \delta_H(t) + m_y^{\delta_3} \delta_3(t) = c_2(t); \quad (5.5.12)$$

$$m_z^{\delta_B} \delta_B(t) + 0 \cdot \delta_H(t) + 0 \cdot \delta_3(t) = c_3(t), \quad (5.5.13)$$

правые части которой конкретизируются как:

$$c_1(t) = \frac{2 \left[ J_x \dot{\omega}_x^*(t) + (J_z - J_y) \omega_y^*(t) \omega_z^*(t) \right]}{\rho(y_{\text{тр}}(t)) V_{\text{зад}}^2(t) Sl} - m_x 0 - m_x^{\beta} \beta^*(t) - m_x^{\bar{\omega}_y} \frac{l \omega_y^*(t)}{2V_{\text{зад}}(t)} - m_x^{\bar{\omega}_x} \frac{l \omega_x^*(t)}{2V_{\text{зад}}(t)}; \quad (5.5.14)$$

$$c_2(t) = \frac{2 \left[ J_y \dot{\omega}_y^*(t) + (J_x - J_z) \omega_x^*(t) \omega_z^*(t) \right]}{\rho(y_{\text{тр}}(t)) V_{\text{зад}}^2(t) Sb_A} - m_y^{\beta} \beta^*(t) - m_y^{\bar{\omega}_y} \frac{l \omega_y^*(t)}{2V_{\text{зад}}(t)} - m_y^{\bar{\omega}_x} \frac{l \omega_x^*(t)}{2V_{\text{зад}}(t)}; \quad (5.5.15)$$

$$c_3(t) = \frac{2 \left[ J_z \dot{\omega}_z^*(t) + (J_y - J_x) \omega_y^*(t) \omega_x^*(t) \right]}{\rho(y_{\text{тр}}(t)) V_{\text{зад}}^2(t) Sb_A} - m_z 0 - m_z^{\alpha} \alpha^*(t) - m_z^{\bar{\alpha}} \frac{b_A \dot{\alpha}^*(t)}{V_{\text{зад}}(t)} - m_z^{\bar{\omega}_z} \frac{b_A \omega_z^*(t)}{V_{\text{зад}}(t)}. \quad (5.5.16)$$

Из уравнения (5.5.13) имеем, что

$$\delta_B^*(t) = - \frac{c_3(t)}{m_z^{\delta_B}}, \quad t \in [t_0, t_K]. \quad (5.5.17)$$

Решая систему уравнений (5.5.11), (5.5.12) методом Крамера [17], получаем:

$$\delta_{\text{H}}^*(t) = \frac{m_x^{\delta_{\text{B}}} c_1(t) - m_y^{\delta_{\text{B}}} c_2(t)}{m_y^{\delta_{\text{H}}} m_x^{\delta_{\text{B}}} - m_y^{\delta_{\text{B}}} m_x^{\delta_{\text{H}}}}; \quad (5.5.18)$$

$$\delta_{\text{B}}^*(t) = \frac{m_y^{\delta_{\text{H}}} c_2(t) - m_x^{\delta_{\text{H}}} c_1(t)}{m_y^{\delta_{\text{B}}} m_x^{\delta_{\text{B}}} - m_y^{\delta_{\text{B}}} m_x^{\delta_{\text{H}}}}, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (5.5.19)$$

Для высокоманевренных БЛА необходимо учитывать эксплуатационные ограничения вида:

$$\begin{aligned} \delta_{\text{B}}^{\min} &\leq \delta_{\text{B}}^*(t) \leq \delta_{\text{B}}^{\max}; \\ \delta_{\text{H}}^{\min} &\leq \delta_{\text{H}}^*(t) \leq \delta_{\text{H}}^{\max}; \\ \delta_{\text{B}}^{\min} &\leq \delta_{\text{B}}^*(t) \leq \delta_{\text{B}}^{\max}. \end{aligned} \quad (5.5.20)$$

Для этого предлагается перейти к неограниченным вспомогательным управляющим функциям  $\sigma_{\text{B}}(t)$ ,  $\sigma_{\text{H}}(t)$ ,  $\sigma_{\text{B}}(t)$  с использованием замены:

$$\delta_{\text{B}}(t) = 0,5[\delta_{\text{B}}^{\min} + \delta_{\text{B}}^{\max} + (\delta_{\text{B}}^{\max} - \delta_{\text{B}}^{\min}) \sin \sigma_{\text{B}}(t)]; \quad (5.5.21)$$

$$\delta_{\text{H}}(t) = 0,5[\delta_{\text{H}}^{\min} + \delta_{\text{H}}^{\max} + (\delta_{\text{H}}^{\max} - \delta_{\text{H}}^{\min}) \sin \sigma_{\text{H}}(t)]; \quad (5.5.22)$$

$$\delta_{\text{B}}(t) = 0,5[\delta_{\text{B}}^{\min} + \delta_{\text{B}}^{\max} + (\delta_{\text{B}}^{\max} - \delta_{\text{B}}^{\min}) \sin \sigma_{\text{B}}(t)]. \quad (5.5.23)$$

При подстановке выражения (5.5.21) в формулу (5.5.17) после несложных преобразований получаем следующую расчетную формулу для вычисления функции  $\delta_{\text{B}}(t)$ :

$$\sigma_{\text{B}}(t) = \arcsin \left( \frac{-2c_3(t) - \delta_{\text{B}}^{\min} - \delta_{\text{B}}^{\max}}{m_z^{\delta_{\text{B}}} (\delta_{\text{B}}^{\max} - \delta_{\text{B}}^{\min})} \right), \quad t \in [t_0, t_k].$$

Эта функция при условии, что выражение, стоящее в скобках, будет при любом  $t \in [t_0, t_k]$  по модулю не превышать единицы, используется в формуле (5.5.21) для вычисления закона отклонения руля высоты БЛА с учетом предельных углов  $\delta_{\text{B}}^{\min}$  и  $\delta_{\text{B}}^{\max}$  его перемещения. Если это условие не выполняется, то управление  $\delta_{\text{B}}(t)$  является недопустимым.

При подстановке выражений (5.5.22), (5.5.23) в уравнения (5.5.11), (5.5.12) получаем систему нелинейных параметриче-

ских уравнений относительно функций  $\sigma_h(t)$  и  $\sigma_\vartheta(t)$ , которая решается одним из численных методов из Разд. 3.5. При отсутствии решений этой системы считается, что второе и третье ограничения из состава условий (5.5.20) не выполняются.

Предложенный выше общий метод формирования законов управления рулевыми поверхностями БЛА, описываемый соотношениями (5.5.8)-(5.5.23), используется для различных моделей его неустановившегося движения и применяемых векторов управления  $u^*(t)$  со следующими корректировками:

1. Для модели (5.1.15), (5.1.19)-(5.1.21) и вектора управления  $u^*(t) = (P^*(t), \alpha^*(t), \beta^*(t))$ , определяемого из системы уравнений (5.1.57), в выражениях (5.5.9) и (5.5.10) полагаем, что  $\gamma^*(t) \equiv 0$  и  $\dot{\gamma}^*(t) \equiv 0$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ .

2. При использовании модели движения БЛА вида (5.1.16)-(5.1.21) с вектором управления  $u^*(t) = (P^*(t), \alpha^*(t), \gamma^*(t))$ , являющимся решением системы уравнений (5.1.54), в выражениях (5.5.9), (5.5.14), (5.5.15) используется тождество  $\beta^*(t) \equiv 0$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ .

3. Для модели движения БЛА в вертикальной плоскости (5.2.1)-(5.2.4), для которой из системы уравнений (5.2.16), (5.2.17) вычисляется вектор  $u^*(t) = (P^*(t), \alpha^*(t))$ , в соотношениях (5.5.9), (5.5.10), (5.5.14), (5.5.15) применяются следующие тождества:

$$\begin{aligned}\Psi_{\text{тр}}(t) &\equiv 0; \quad \beta^*(t) \equiv 0; \quad \gamma^*(t) \equiv 0; \\ \dot{\psi}^*(t) &\equiv 0; \quad \dot{\gamma}^*(t) \equiv 0, \quad t \in [t_0, t_k].\end{aligned}$$

4. При использовании модели (5.2.7)-(5.2.10) горизонтального полета БЛА на высоте  $h$  с применением вектора управления  $u^*(t) = (P^*(t), \alpha^*(t), \gamma^*(t))$ , определяемого выражениями (5.2.21)-(5.2.23), в соотношениях (5.5.9), (5.5.14), (5.5.15) полагаем  $\theta_{\text{тр}}(t) \equiv 0$ ,  $\beta^*(t) \equiv 0$ .

Рассмотрим особенности определения вектора  $\Delta = (\bar{n}, \delta_{\text{в}}, \delta_{\text{н}}, \delta_{\text{э}})$  прямого управления для установившихся режимов полета БЛА, представленных в Разд. 5.4.

Характерной особенностью прямолинейных траекторий полетов БЛА на таких режимах является выполнение условий (5.4.1), (5.4.2) и постоянство векторов  $u^*$  косвенного управления их движением.

Пусть из решения соответствующих задач, приведенных в Разд. 5.4, для заданных значений:

$$V(t) = V_{\text{зад}} = \text{const}; \quad \theta(t) = \theta_{\text{тр}} = \text{const}; \quad \Psi(t) = \Psi_{\text{тр}} = \text{const}; \\ y(t) = y^* = \text{const}; \quad \beta(t) \equiv 0; \quad \gamma(t) \equiv 0 \quad (5.5.24)$$

получены векторы управления  $u^* = (P^*, \alpha^*)$ , где  $P^* = \text{const}$ ,  $\alpha^* = \text{const}$ .

Компоненту  $\bar{n}^*$  вектора  $\Delta$  прямого управления БЛА определим из решения нелинейного уравнения (5.5.2), в котором использованы следующие обозначения:

$$M_{\text{зад}} = V_{\text{зад}}/a(y^*); \quad y_{\text{тр}}(t) = y^*; \quad P(t) = P^*, \quad (5.5.25)$$

где высота  $y^*$  в зависимости от программируемого режима полета БЛА вычисляется по формуле (5.4.11) или полагается равной заданной высоте  $h$ .

При наличии условий (5.5.24), (5.5.25) уравнение (5.5.2) перестает быть параметрическим уравнением и решается одним из классических численных методов, описанных в Разд. 3.3.

Подставляя соответствующие значения из выражений (5.5.24) в формулы (5.5.9), имеем:

$$\vartheta^*(t) = \alpha^* + \theta_{\text{тр}} = \vartheta^* = \text{const}; \\ \psi^*(t) = \Psi_{\text{тр}} = \psi^* = \text{const}.$$

Тогда из соотношений (5.5.10) следует, что угловые скорости вращения БЛА в установившихся режимах прямолинейных полетов принимают следующие значения:

$$\omega_x^*(t) = 0; \quad \omega_y^*(t) = 0; \quad \omega_z^*(t) = 0.$$

При этих значениях и при  $\dot{\alpha}^* \equiv 0$  правые части системы уравнений (5.5.11)-(5.5.13), вычисленные по формулам (5.5.14)-(5.5.16), будут иметь вид:

$$c_1 = -m_{x0}; \quad c_2 = 0; \quad c_3 = -m_{z0} - m_z^\alpha \alpha^*.$$

В этом случае углы отклонения аэродинамических органов управления БЛА согласно выражениям (5.5.17)-(5.5.19) определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\delta_B^* &= \frac{m_{z0} + m_z^\alpha \alpha^*}{m_z^{\delta_B}}; \\ \delta_H^* &= -\frac{m_x^{\delta_B} m_{x0}}{m_y^{\delta_H} m_x^{\delta_\Theta} - m_y^{\delta_\Theta} m_x^{\delta_H}}; \\ \delta_\Theta^* &= \frac{m_x^{\delta_H} m_{x0}}{m_y^{\delta_H} m_x^{\delta_\Theta} - m_y^{\delta_\Theta} m_x^{\delta_H}}.\end{aligned}\tag{5.5.26}$$

Пусть с использованием выражений (5.4.15)-(5.4.16) определен вектор  $u^* = (P^*, \alpha^*, \gamma^*)$  косвенного управления БЛА при его установившемся движении по круговой траектории радиуса  $R_{\text{тр}}$  со скоростью  $V_{\text{зад}}$  на высоте  $h$ .

Компонента  $\bar{n}^*$ , входящая в вектор  $\Delta$  прямого управления БЛА, находится путем численного решения уравнения (5.5.2), которое конкретизируется с учетом выражений (5.5.25) при  $y^* = h$ .

В связи с тем, что в рассматриваемом режиме полета БЛА углы  $\theta_{\text{тр}}(t) = 0$ ,  $\beta^* = 0$ , а зависимость  $\Psi_{\text{тр}}(t)$  представляется выражением (5.4.18), формулы (5.5.9) конкретизируются как:

$$\vartheta^*(t) = \alpha^* = \text{const}; \quad \psi^*(t) = \frac{V_{\text{зад}}}{R_{\text{тр}}} (t - t_0) + \Psi_0 + \alpha^* \sin \gamma^*.$$

С учетом этого соотношения (5.5.10) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\omega_x^*(t) &= \frac{V_{\text{зад}}}{R_{\text{тр}}} \sin \alpha^* = \text{const}; \\ \omega_y^*(t) &= \frac{V_{\text{зад}}}{R_{\text{тр}}} \cos \alpha^* \cos \gamma^* = \text{const}; \\ \omega_z^*(t) &= -\frac{V_{\text{зад}}}{R_{\text{тр}}} \cos \alpha^* \sin \gamma^* = \text{const}.\end{aligned}\quad (5.5.27)$$

При использовании предположения о малости угла  $\alpha^*$ , из которого следует, что  $\sin \alpha^* \approx \alpha^*$ ,  $\cos \alpha^* \approx 1$ , эти выражения можно представить как:

$$\begin{aligned}\omega_x^*(t) &= \frac{V_{\text{зад}} \alpha^*}{R_{\text{тр}}}; \\ \omega_y^*(t) &= \frac{V_{\text{зад}} \cos \gamma^*}{R_{\text{тр}}}; \\ \omega_z^*(t) &= -\frac{V_{\text{зад}} \sin \gamma^*}{R_{\text{тр}}}.\end{aligned}\quad (5.5.28)$$

Из выражений (5.5.27) следует, что

$$\dot{\omega}_x^*(t) = 0; \quad \dot{\omega}_y^*(t) = 0; \quad \dot{\omega}_z^*(t) = 0; \quad (5.5.29)$$

Подставляя правые части соотношений (5.5.28), (5.5.29) в выражения (5.5.14)-(5.5.16), получим следующие формулы для вычисления правых частей системы уравнений (5.5.11)-(5.5.13):

$$\begin{aligned}c_1 &= -\frac{2(J_z - J_y) \cos \gamma^* \sin \gamma^*}{R_{\text{тр}}^2 \rho(h) S l} - m_{x0} - m_x \bar{\omega}_y \frac{l \cos \gamma^*}{2R_{\text{тр}}} - m_x \bar{\omega}_x \frac{l \alpha^*}{2R_{\text{тр}}}; \\ c_2 &= -\frac{2(J_x - J_z) \alpha^* \sin \gamma^*}{R_{\text{тр}}^2 \rho(h) S b_A} - m_y \bar{\omega}_y \frac{l \cos \gamma^*}{2R_{\text{тр}}} - m_y \bar{\omega}_x \frac{l \alpha^*}{2R_{\text{тр}}};\end{aligned}\quad (5.5.30)$$

$$c_3 = \frac{2(J_y - J_x)\alpha^* \cos \gamma^*}{R_{\text{тр}}^2 \rho(h) S b_A} - m_z 0 - m_z^\alpha \alpha^* + m_z^{\bar{\omega}_z} \frac{l \sin \gamma^*}{R_{\text{тр}}}.$$

Вычисленные из этих выражений значения  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  представляются в формулы (5.5.17)-(5.5.19) для определения требуемых отклонений  $\delta_B^*$ ,  $\delta_H^*$ ,  $\delta_E^*$  рулевых поверхностей БЛА.

Отметим, что выражения (5.5.30) указывают на явную связь компонент векторов косвенного и прямого управления БЛА.

### Пример 5.3.

Приведем экспериментальные значения коэффициентов, входящих в формулы (5.5.4) для БЛА, рассмотренного в Примере 5.1.

Коэффициент  $m_x$  момента крена БЛА по результатам аэrodинамических испытаний конкретизируется следующими числовыми значениями:

$$m_x 0 = -0,003; \quad m_x^\beta = -0,038 \text{ рад}^{-1}; \\ m_x^{\delta_H} = -0,014 \text{ рад}^{-1}; \quad m_x^{\delta_E} = -0,12 \text{ рад}^{-1}.$$

По результатам продувок БЛА установлено, что эти коэффициенты постоянны в эксплуатационном диапазоне чисел М.

Зависимости коэффициентов  $m_x^{\bar{\omega}_x}$  и  $m_x^{\bar{\omega}_y}$  от значений числа М  $M \in [0,2; 0,8]$  имеют вид:

$$m_x^{\bar{\omega}_x} = m_x^{\bar{\omega}_x}(M) = -0,438 + 0,184M - 0,428M^2, \text{ рад}^{-1}; \\ m_x^{\bar{\omega}_y} = m_x^{\bar{\omega}_y}(M) = -0,108 \text{ рад}^{-1}.$$

Коэффициент  $m_y$  момента рыскания БЛА определяется следующими составляющими:

$$m_y^\beta = -0,18 \text{ рад}^{-1}; \quad m_y^{\delta_H} = -0,079 \text{ рад}^{-1}; \\ m_y^{\delta_E} = 0,008 \text{ рад}^{-1}; \quad m_y^{\bar{\omega}_y} = -1,1 \text{ рад}^{-1}; \quad m_y^{\bar{\omega}_x} = -0,11 \text{ рад}^{-1}.$$

По результатам проведенных испытаний установлено, что значения этих коэффициентов не зависят от числа М.

При формировании коэффициента  $m_z$  момента тангажа БЛА при  $M \in [0,5; 0,7]$  получены следующие значения:

$$m_{z_0} = 0,025; \quad m_z^\alpha = -0,636 \text{ рад}^{-1}, \text{ при } \alpha \in [-2^\circ, +8^\circ].$$

Коэффициент  $m_z^{\delta_v}$  при  $M \in [0,35; 0,82]$  и  $\delta_v \in [-7^\circ; +7^\circ]$  сохраняет постоянное значение:

$$m_z^{\delta_v} = -1,146 \text{ рад}^{-1}.$$

Зависимости производных  $m_z^{\bar{\omega}_z}$  и  $m_z^{\bar{\alpha}}$  от значений числа  $M \in [0,2; 0,8]$  имеют вид:

$$m_z^{\bar{\omega}_z} = m_z^{\bar{\omega}_z}(M) = -0,179 - 0,025M - 0,072M^2, \text{ рад}^{-1};$$

$$m_z^{\bar{\alpha}} = m_z^{\bar{\alpha}}(M) = -0,074 + 0,053M - 0,152M^2, \text{ рад}^{-1}.$$

Рассмотрим пример формирования вектора  $\Delta = (\bar{n}, \delta_v, \delta_h, \delta_h)$  прямого управления БЛА.

#### Пример 5.4.

Пусть для двух прямолинейных полетов со скоростями  $V_{\text{зад}} = V^*$  на высотах  $y_{\text{тр}} = h^*$  с использованием методов, описанных в Разд. 5.4, определены векторы  $u^* = (P^*, \alpha^*)$  косвенного управления БЛА.

Приведем конкретные числовые значения характеристик этих полетов.

#### Полет №1

$$V_1^* = 175,17 \text{ м/с}; \quad h_1^* = 2801 \text{ м}; \quad u_1^* = (P_1^*, \alpha_1^*),$$

где  $P_1^* = 723,39 \text{ Н}$ ,  $\alpha_1^* = 2,9^\circ$ .

#### Полет №2

$$V_2^* = 140,95 \text{ м/с}; \quad h_2^* = 6133 \text{ м}; \quad u_2^* = (P_2^*, \alpha_2^*),$$

где  $P_2^* = 330,96 \text{ Н}$ ,  $\alpha_2^* = 3,7^\circ$ .

Определим предварительно общие исходные данные и расчетные соотношения, необходимые для вычисления управляющих

воздействий  $\bar{n}_1^*$ ,  $\delta_{\text{в}1}^*$ ,  $\delta_{\text{н}1}^*$ ,  $\delta_{\exists 1}^*$  и  $\bar{n}_2^*$ ,  $\delta_{\text{в}2}^*$ ,  $\delta_{\text{н}2}^*$ ,  $\delta_{\exists 2}^*$  для реализации этих полетов.

Числа Маха для каждого из полетов БЛА будем определять по формуле:

$$M = \frac{V}{a(h)} = \frac{V}{340 - 0,004h},$$

где  $h$  – высота полета БЛА.

Здесь и ниже индекс «п» у числа  $M$  будет опущен.

Используя это выражение, получим:

$$M_1^* = \frac{V_1^*}{a(h_1^*)} = 0,533; \quad M_2^* = \frac{V_2^*}{a(h_2^*)} = 0,447.$$

Для вычисления значений  $\bar{n}_1^*$  и  $\bar{n}_2^*$  будем использовать локальное линейное представление зависимости (5.5.1) вида:

$$P = P(M, h, n) = b_1 M + b_2 h + b_3 \bar{n}, \quad (5.5.31)$$

где  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  – постоянные коэффициенты, определяемые на основе табличного представления ВСХ двигателя БЛА.

Значения этих коэффициентов предлагается определять как решения следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} M_s b_1 + h_s b_2 + \bar{n}_s b_3 &= P_s; \\ M_{s+1} b_1 + h_{s+1} b_2 + \bar{n}_{s+1} b_3 &= P_{s+1}; \\ M_{s+2} b_1 + h_{s+2} b_2 + \bar{n}_{s+2} b_3 &= P_{s+2}. \end{aligned} \quad (5.5.32)$$

Коэффициенты перед неизвестными  $b_1$  и  $b_2$  и правые части этой системы выбираются из таблицы ВСХ, исходя из условий:

$$\begin{aligned} M_s &\leq M^* \leq M_{s+2}; \\ h_s &\leq h^* \leq h_{s+1}; \\ P_{s+1} &\leq P^* \leq P_{s+2}. \end{aligned} \quad (5.5.33)$$

Значения  $\bar{n}_s$ ,  $\bar{n}_{s+1}$ ,  $\bar{n}_{s+2}$  берутся из таблицы ВСХ и однозначно соответствуют выбранным значениям  $h_s$ ,  $h_{s+1}$ ,  $h_{s+2}$ .

При полученных одним из методов решения системы (5.5.32) (см. Разд. 3.2) значениях  $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$  уравнение (5.5.2) примет вид:

$$\bar{b}_1 M^* + \bar{b}_2 h^* + \bar{b}_3 \bar{n} - P^* = 0.$$

Откуда имеем, что

$$\bar{n}^* = \frac{1}{\bar{b}_3} (P^* - \bar{b}_1 M^* - \bar{b}_2 h^*). \quad (5.5.34)$$

Перейдем к определению управляемых воздействий для каждого из отмеченных выше полетов.

### Полет №1.

Для построения системы уравнений (5.5.32) из табл. 5.4 с учетом условий (5.5.33), которые конкретизируются как  $M_1^* \in [0,5; 0,6]$ ,  $h_1^* \in [2000; 3000]$ ,  $P^* \in [648,89; 781,89]$ , выбираются следующие значения:

$$\begin{aligned} M_s &= 0,5; & M_{s+1} &= 0,5; & M_{s+2} &= 0,6; \\ h_s &= 2000; & h_{s+1} &= 3000; & h_{s+2} &= 2000; \\ \bar{n}_s &= 0,95; & \bar{n}_{s+1} &= 0,95; & \bar{n}_{s+2} &= 0,95; \\ P_s &= 738,53; & P_{s+1} &= 648,89; & P_{s+2} &= 781,83. \end{aligned}$$

Тогда система уравнений (5.5.32) примет вид:

$$0,5b_1 + 2000b_2 + 0,95b_3 = 738,53;$$

$$0,5b_1 + 3000b_2 + 0,95b_3 = 648,89;$$

$$0,6b_1 + 2000b_2 + 0,95b_3 = 781,83.$$

Подставляя приближенные решения этой системы:

$$\bar{b}_1 = 433; \quad \bar{b}_2 = -0,09; \quad \bar{b}_3 = 738,221$$

и значения  $M_1^* = 0,583$ ;  $h_1^* = 2801$  м в формулу (5.5.34), получим:

$$\bar{n}_1^* = 1,007.$$

Максимальное число оборотов турбины ВРД, установленного на рассматриваемом БЛА, равно 60000 об./мин.

В этом случае абсолютное число оборотов турбины ВРД при выполнении Полета № 1 будет равно:

$$n_1^* = 1,007 \cdot 60000 = 60420 \text{ об./мин.}$$

Углы отклонения рулевых поверхностей БЛА в рассматриваемом полете, вычисленные с использованием формул (5.5.26), и значений моментных коэффициентов из Примера 5.3 при  $\alpha_1^* = 2,9^\circ = 0,05$  рад будут соответственно равны:

$$\delta_{\text{в1}}^* = \frac{0,025 - 0,636 \cdot 0,05}{-1,146} = 0,006 \text{ рад} = 0,34^\circ;$$

$$\delta_{\text{н1}}^* = -\frac{(-0,003) \cdot (-0,12)}{(-0,079) \cdot (-0,12) - 0,008 \cdot (0,014)} = -0,038 \text{ рад} = -2,15^\circ;$$

$$\delta_{\vartheta 1}^* = \frac{(-0,003) \cdot (-0,014)}{(-0,079) \cdot (-0,12) - 0,008 \cdot (-0,014)} = 0,0044 \text{ рад} = 0,25^\circ.$$

Отметим, что из-за значения  $\bar{n}_1^* > 1$  вектор  $\Delta_1 = (1,007; 0,34^\circ; -2,15^\circ; 0,25^\circ)$  является недопустимым вектором прямого управления БЛА.

### Полет № 2.

Система уравнений (5.5.32), построенная, исходя из условий (5.5.33), которые имеют вид (см. табл. 5.4):

$$0,4 \leq M_2^* \leq 0,5;$$

$$6000 \leq h_2^* \leq 7000;$$

$$264,54 \leq P^* \leq 431,98,$$

и для значений  $\bar{n}_s = 0,95$ ,  $\bar{n}_{s+1} = 0,90$ ,  $\bar{n}_{s+2} = 0,95$  конкретизируется как:

$$0,4b_1 + 6000b_2 + 0,95b_3 = 414,24;$$

$$0,4b_1 + 7000b_2 + 0,90b_3 = 264,54;$$

$$0,6b_1 + 6000b_2 + 0,95b_3 = 431,98.$$

Решениями этой системы являются значения:

$$\bar{b}_1 = 177,4; \quad \bar{b}_2 = -0,1; \quad \bar{b}_3 = 993,184.$$

Тогда по формуле (5.5.34) при  $P_2^* = 330,96 \text{ Н}$ ,  $M_2^* = 0,447$ ,  $h_2^* = 6133 \text{ м}$  получаем:

$$\bar{n}_2^* = 0,871.$$

Из формулы (5.5.26) и результатов Примера 5.3 при  $\alpha_2^* = 0,065 \text{ рад} = 3,7^\circ$  следует, что  $\delta_{\text{в2}}^* = 0,014 \text{ рад} = 0,82^\circ$ ;  $\delta_{\text{н2}}^* = -2,15^\circ$ ;  $\delta_{\text{э2}}^* = 0,25^\circ$ .

Эксплуатационные ограничения (5.5.20) на углы отклонения рулей рассматриваемого БЛА имеют вид:

$$\begin{aligned} -20^\circ &\leq \delta_{\text{в}} \leq 20^\circ; \\ -20^\circ &\leq \delta_{\text{н}} \leq 20^\circ; \\ -20^\circ &\leq \delta_{\text{э}} \leq 20^\circ. \end{aligned}$$

Из сопоставления полученных значений  $\bar{n}_2^*$  и отклонений рулевых поверхностей БЛА с приведенными выше ограничениями следует, что вектор  $\Delta_2 = (0,871; 0,82^\circ; -2,15^\circ; 0,25^\circ)$  является допустимым вектором прямого управления БЛА.

В работе [7] утверждается, что основными причинами того, что коэффициент  $m_{x0} \neq 0$ , являются производственные погрешности изготовления БЛА.

Отсюда следует, что полученные выше ненулевые значения отклонений руля направления и элеронов обеспечивают возможность осуществления прямолинейных полетов БЛА.

Для увеличения точности определения законов управления  $\delta_{\text{в}}^*(t)$ ,  $\delta_{\text{н}}^*(t)$ ,  $\delta_{\text{э}}^*(t)$  в состав зависимостей (5.5.4) могут быть введены нелинейные члены [7], а также использованы значения  $m_{xP} = m_x(P^*)$ ,  $m_{yP} = m_y(P^*)$ ,  $m_{zP} = m_z(P^*)$ .

При вычислении вектора  $\Delta$  в условиях действия ветровых возмущений в выражениях (5.5.2), (5.5.8)-(5.5.23) используются функции  $V_{\text{п, зад}}(t)$ ,  $\theta_{\text{п, тр}}(t)$ ,  $\Psi_{\text{п, тр}}(t)$ , получаемые путем использования в формулах (4.3.4), (4.3.6), (4.3.7) замены вида (5.1.66).

Для БЛА нетрадиционных конструкционных схем («утка», «летающее крыло» и др.) должен быть конкретизирован состав

векторов  $\Delta(t)$  их прямого управления, записаны соответствующие выражения вида (5.5.4) и разработана методика определения законов отклонения органов аэrodинамического управления таких БЛА, аналогичная методике, представленной выражениями (5.5.8)-(5.5.23).

В заключение главы отметим, что для практического использования предложенных в ней моделей и методов персонал БАК должен в обязательном порядке получить от разработчика БЛА аналитические (формульные) зависимости его аэродинамических и моментных коэффициентов, а также высотно-скоростной характеристики силовой установки БЛА. При этом обязательным является использование разработчиками современных математических методов построения таких зависимостей, описывающих с достаточной для практики точностью результаты аэродинамических испытаний БЛА и стендовых испытаний их двигателей.

## **Глава 6. МОДЕЛИ УПРАВЛЯЕМОГО ПОЛЕТА БЛА ОДНОВИНТОВОЙ ВЕРТОЛЕТНОЙ СХЕМЫ**

Необходимость создания и применения беспилотных вертолетов (БВ) без конкретизации вопросов моделирования и управления их движением была отмечена в работе [5]. В основополагающей работе по БЛА [102] был приведен один из вариантов конструкции БВ, но также не затронуты отмеченные выше вопросы.

Таким образом, можно констатировать факт отсутствия к настоящему времени практических моделей управляемого полета БЛА вертолетных схем. Исключением является работа [31], в которой была предложена простейшая модель движения БВ в вертикальной плоскости с использованием уравнений динамики материальной точки [22].

В данной главе предлагается один из подходов к моделированию и программированию пространственных, плоских и специальных режимов полета БВ одновинтовой схемы.

### **6.1. Основные сведения из теории полета одновинтовых вертолетов**

Беспилотный вертолет является более сложным с точки зрения динамики полета и управления объектом, чем любой вид БЛА самолетной схемы (БЛА СС).

Рассмотрим особенности выполнения полетов и управления для вертолетов одновинтовой схемы, оснащенных несущим (НВ) и хвостовым рулевым (РВ) винтами [27, 30].

Подъемная сила БЛА СС возникает при взаимодействии потока набегающего воздуха с его несущей поверхностью (крылом). Отсюда следует, что необходимым условием появления такой силы является поступательное движение БЛА СС. В отличие от этого, вращающийся НВ создает подъемную силу

не только при поступательном движении БВ, но и на земле, и в режиме висения.

Поэтому БВ может выполнять следующие режимы полета:

- взлет «с места» по вертикали или по наклонной траектории;
- неподвижное зависание над заданной точкой;
- развороты с помощью РВ в любую сторону при висении;
- перемещение в любом направлении (вперед, вбок, назад);
- вертикальное снижение при посадке;
- планирование и безопасная посадка с выключенным (отказавшим) двигателем в режиме самовращения (авторотации) его НВ.

Отметим, что тяга, развивааемая РВ вертолета, дополнительно предназначена для компенсации реактивного (поворачивающего) момента НВ.

Существенное отличие условий работы НВ от условий, в которых находятся крыло, фюзеляж и оперение БЛА СС, состоит в том, что при поступательном движении вертолета его НВ обтекается воздушным потоком под большим углом к оси его вращения, близким к  $90^\circ$ .

При этом на одной стороне поверхности, ометаемой НВ, круговые скорости вращающихся лопастей винта суммируются с величиной горизонтальной скорости  $V$  вертолета, а на другой – вычитаются из этой величины. Этот и другие факторы приводят к тому, что аэродинамические силы, действующие и формируемые лопастями НВ, изменяются достаточно сложным образом во времени и по их длине. Под действием этих сил лопасти колеблются относительно шарниров их крепления к втулке НВ и деформируются в полете по весьма сложным законам.

Как было отмечено выше, основным элементом БВ, обеспечивающим его движение в пространстве, является НВ.

Рассмотрим основные характеристики этого винта, необходимые для описания динамики полета и управления БВ.

Пусть вал НВ в некоторый момент времени полета БВ имеет число оборотов, равное  $n_{\text{в}}$ . Тогда НВ радиуса  $R$  будет иметь угловую и окружную скорости, определяемые выражениями:

$$\omega = 2\pi n_{\text{в}}; \quad \Omega = \omega R.$$

Площадь, ометаемая НВ в процессе его вращения, вычисляется по формуле вида:

$$F_{\text{Н}} = \pi R^2.$$

Маховые движения упругих лопастей НВ в процессе вращения образуют конус, представленный на Рис. 6.1.

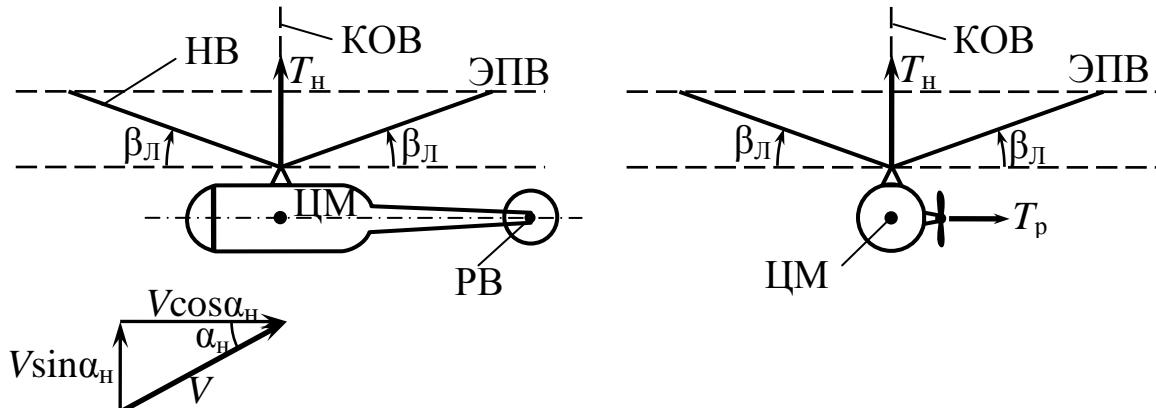


Рис. 6.1

На этом рисунке использованы следующие обозначения: КОВ – конструктивная ось вращения НВ [36]; ЭПВ – эффективная плоскость вращения НВ, которая является основанием конуса, образованного взмахом лопастей на угол  $\beta_{\text{л}}$  [36];  $V$  – скорость набегающего воздушного потока;  $\alpha_{\text{н}}$  – угол атаки НВ;  $T_{\text{н}}$  и  $T_{\text{р}}$  – силы тяги НВ и РВ.

Угол взмаха лопастей НВ предлагается приближенно описывать выражением вида [35]:

$$\beta_{\text{л}} = a_0 - a_1 \cos \psi - b_1 \sin \psi,$$

где  $\psi$  – угол азимутального положения лопасти (Рис. 6.2).

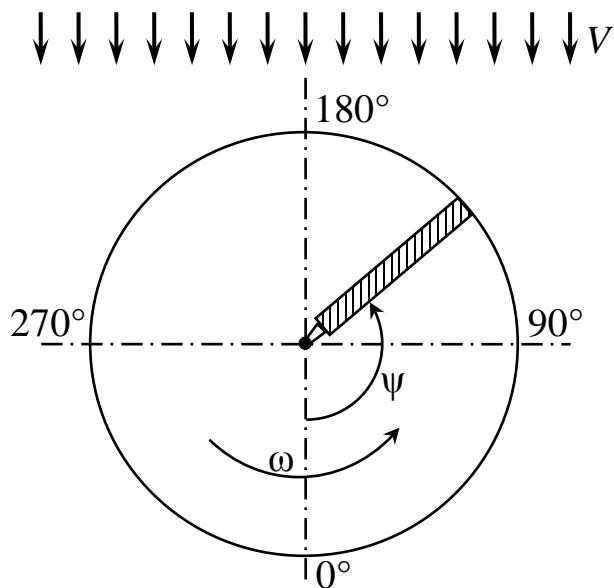


Рис. 6.2

В этом выражении:  $a_0$  – средний угол конусности НВ;  $a_1$  и  $b_1$  – углы отклонения аэродинамической оси конуса (АОК) НВ от его КОВ.

Эти углы возникают при обдуве НВ набегающим потоком воздуха, то есть при полете БВ со скоростью  $V$ . Установлено, что при горизонтальном полете вертолета конус лопастей НВ смещается назад и вправо [30].

На Рис. 6.3 показаны положительные значения введенных выше углов смещения  $a_1$  и  $b_1$ .

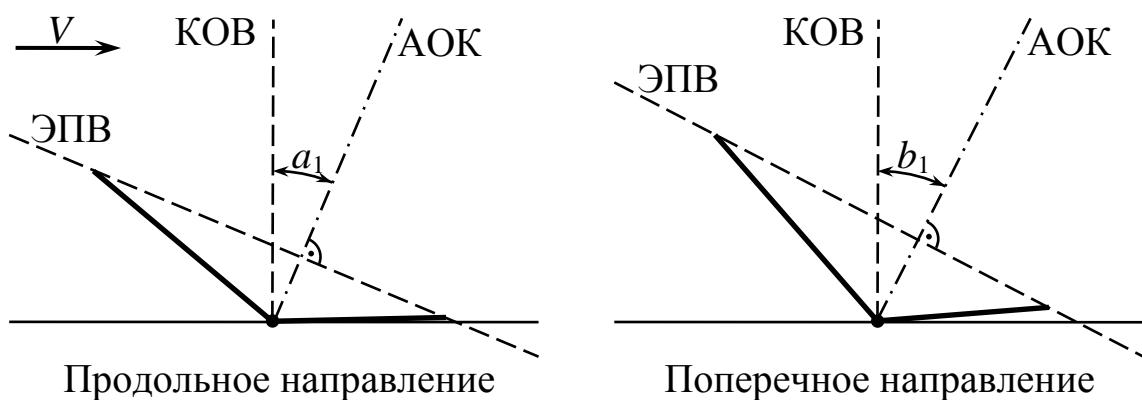


Рис. 6.3

Согласно Рис. 6.2 поворот ЭПВ происходит в связи с тем, что при движении лопастей в интервале углов  $\psi \in [0^\circ, 180^\circ]$  их скорость  $\omega$  уменьшается за счет воздействия набегающего со

скоростью  $V$  потока воздуха. Поэтому они создают меньшую подъемную силу, чем лопасти, движущиеся в интервале углов  $\psi$  от  $180^\circ$  до  $0^\circ$ . Эти лопасти за счет их «раскрутки» потоком воздуха имеют большее значение  $\omega$  и, следовательно, большую подъемную силу. Разность этих сил обеспечивает поворот ЭПВ на угол  $b_1$ . Аналогичным образом объясняется появление угла  $a_1$ .

Отметим, что углы  $a_1$  и  $b_1$  возникают естественным путем, то есть без воздействий системы управления вертолетом. При этом считается, что  $a_1 > 0$  – при отклонении конуса НВ назад и  $b_1 > 0$  – вправо по полету.

Эти углы принимают небольшие значения, которые зависят от тяги  $T_h$ , скорости полета  $V$  и угла  $\alpha_h$  атаки НВ.

В работе [35] для легкого вертолета и скорости  $V = 110$  км/ч приводятся следующие значения углов отклонения конуса лопастей НВ:

$$a_0 = 8,7^\circ = 0,1518 \text{ рад.}; \quad a_1 = 6,1^\circ = 0,1064 \text{ рад.}; \\ b_1 = 3,9^\circ = 0,068 \text{ рад.}$$

При горизонтальном полете БВ со скоростью  $V$  сила  $T_h$  создает в плоскости вращения НВ продольную  $H$  и поперечную  $S$  аэродинамические силы, представленные на Рис. 6.4.

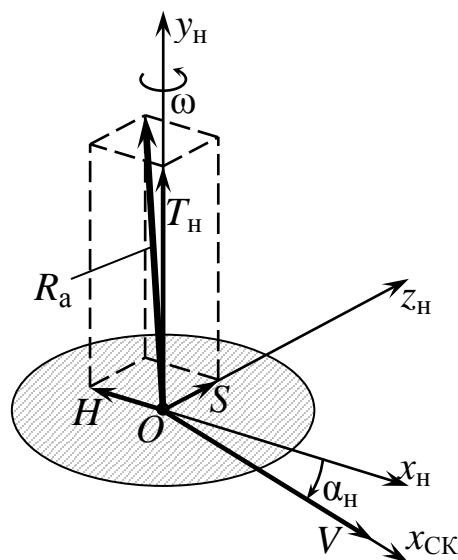


Рис. 6.4

Эти силы представляют собой проекции равнодействующей аэродинамической силы  $R_a$ , образованной смещенной на углы  $a_1$  и  $b_1$  силой  $T_h$ , на оси  $Ox_h$  и  $Oz_h$  полусвязанной СК с началом в центре  $O$  втулки НВ.

Силы  $H$  и  $S$  вычисляются по приближенным формулам вида:

$$H = T_h \sin a_1 \approx T_h a_1; \quad S = 0,5 T_h \sin b_1 \approx 0,5 T_h b_1. \quad (6.1.1)$$

Значения этих сил зависят от величин  $\omega$ ,  $V$ ,  $\alpha_h$  и угла  $\Phi_{\text{ощ}}$  общего шага НВ.

Наиболее существенной является зависимость сил  $H$ ,  $S$  и других летных характеристик БВ от угла атаки НВ.

Угол  $\alpha_h$  представляет собой угол между вектором скорости  $V$  набегающего потока воздуха и ЭПВ НВ.

При этом,  $\alpha_h > 0$ , если поток набегает на конус НВ (ЭПВ) снизу. Такое значение  $\alpha_h$  принимает при снижении БВ. При наборе высоты и горизонтальном полете значения  $\alpha_h < 0$  (см. Рис. 6.4).

Сила  $R_a$  представленная на этом рисунке, определяется как:

$$R_a = \sum_{i=1}^{n_{\text{л}}} R_{ai},$$

где  $R_{ai}$  – аэродинамическая сила, созданная  $i$ -й лопастью НВ;  $n_{\text{л}}$  – число лопастей НВ.

Из этого выражения следует, что подъемная сила НВ зависит от количества его лопастей.

На установившихся режимах полета сила  $R_a$  направлена почти по оси конуса НВ (АОК).

При вертикальном взлете/посадке и висении вертолета эта сила равна  $T_h$  и направлена строго по КОВ НВ (см. Рис. 6.1).

Значение силы тяги НВ на этих режимах вычисляется по общей формуле вида:

$$T_h = 0,5 c_T \rho F_h (\omega R)^2. \quad (6.1.2)$$

Здесь  $c_T$  – коэффициент тяги, зависящий от соответствующих параметров движения и управления НВ;  $\rho = \rho(h)$  – плотность воздуха на высоте  $h$ .

В работе [38] для режима вертикального подъема/спуска легкого вертолета предлагается следующая формула для определения этого коэффициента:

$$c_T = a_\infty \sigma \left( \frac{\bar{V} - \bar{v}}{2} + \frac{\Phi_{\text{ош}}}{3} \right),$$

где  $\bar{V} = V/\omega R$  – относительная скорость движения вертолета;  $\bar{v}$  – вертикальная составляющая индуктивной скорости НВ [37];  $\Phi_{\text{ош}}$  – угол общего шага НВ;  $a_\infty$ ,  $\sigma$  – экспериментальные коэффициенты.

Выражая индуктивную скорость как:

$$\bar{v} = \frac{\sqrt{c_T}}{2},$$

получаем уравнение вида:

$$c_T = a_\infty \sigma \left( \frac{\bar{V}}{2} - \frac{\sqrt{c_T}}{4} + \frac{\Phi_{\text{ош}}}{3} \right).$$

Решение этого уравнения относительно коэффициента  $c_T$  записываемое как:

$$c_T = \frac{a_\infty^2 \sigma^2}{576} \left( \sqrt{\frac{24V}{\omega R} + 16\Phi_{\text{ош}} + 9} - 3 \right)^2,$$

илюстрирует нелинейную зависимость тяги  $T_h$  от параметров полета и управления вертолета.

Рулевой винт вертолета предназначен для уравновешивания реактивного момента НВ, обеспечения путевой управляемости, а также путевой устойчивости вертолета.

В общем случае сила тяги РВ определяется по формуле вида [30]:

$$T_p = 0,5 c_{Tp} \rho F_p (\omega_p R_p)^2 \varphi_p. \quad (6.1.3)$$

Здесь  $c_{\text{тр}}$  – коэффициент тяги РВ;  $F_p$ ,  $\omega_p$ ,  $R_p$  – соответственно ометаемая площадь, угловая скорость и радиус РВ;  $\varphi_p$  – угол установки лопастей РВ.

Аналогичные выражению (6.1.2) общие формулы вида:

$$H = 0,5 c_H \rho F_h (\omega R)^2; \quad S = 0,5 c_S \rho F_h (\omega R)^2.$$

используются при расчете сил  $H$  и  $S$ .

В практических расчетах считается, что сила  $R_a$  равняется силе  $T_h$  [35] и именно с изменением значения и положения в пространстве этой силы осуществляется решение основных задач управления БВ.

Отмечается [30], что значение  $T_h$  при небольших значениях углов  $\varphi_{\text{ощ}} \in [2^\circ; 12^\circ]$  и  $\alpha_h \in [-12^\circ; +12^\circ]$  зависит от них практически линейно. При их дальнейшем увеличении рост  $T_h$  замедляется и прекращается в связи со срывом потока с лопастей НВ. С увеличением скорости  $V$  при  $\varphi_{\text{ощ}} = \text{const}$  сила  $T_h$  незначительно возрастает, а затем начинает убывать. Силы  $H$  и  $S$  при  $V=0$  и любых значениях  $\varphi_{\text{ощ}}$  тождественно равны нулю.

У рассматриваемого вида вертолетов имеются следующие относительно независимые виды управлений [35]:

1°. Вертикальное управление высотой с помощью изменения значений угла общего шага НВ.

2°. Путевое управление положением БВ относительно вертикальной оси в горизонтальной плоскости, реализуемое в помощь силы  $T_p$  тяги РВ.

3°. Продольное управление, осуществляющее путем наклона вектора  $T_h$  в продольном направлении (изменение скорости и угла тангенса БВ).

4°. Поперечное управление с помощью создания крена БВ, который возникает при наклоне вектора  $T_h$  в поперечном направлении относительно направления полета БВ.

При этом непосредственными управляющими воздействиями являются:

- изменение угла  $\varphi_{\text{ош}}$ , которое вызывает одновременное изменение углов атаки всех лопастей НВ,
- циклическое изменение шага НВ, заключающееся в изменении в определенных областях плоскости вращения НВ углов атаки отдельных лопастей НВ,
- изменение углов  $\varphi_p$  шага РВ.
- изменение числа оборотов  $n_v$  вала НВ,

При продольном управлении БВ, согласно Рис. 6.2, циклическое изменение шага НВ будет состоять в том, что при движении каждой его лопасти в области  $\psi \in [90^\circ; 270^\circ]$  она будет иметь больший угол атаки по сравнению с лопастями, движущимися в это же время с углами  $\psi$ , лежащими в пределах от  $270^\circ$  до  $90^\circ$ .

Аналогичным образом для обеспечения крена БВ вправо циклическим изменением шага НВ обеспечивают большие углы атаки лопастей при  $\psi \in [180^\circ; 360^\circ]$  и меньшие – при  $\psi$ , изменяющихся от  $360^\circ$  до  $180^\circ$ . При крене влево законы изменения углов атаки лопастей будут противоположными.

Продольное и поперечное управление БВ осуществляется с помощью автомата перекоса (АП) [30, 35 и др.], который с помощью циклического изменения шага НВ формирует требуемые значения сил  $H$  и  $S$ .

Пусть  $\chi$  и  $\eta$  – углы наклона кольца АП соответственно в продольном и поперечном направлениях. Тогда управляющие компоненты продольной и поперечной сил определяются по формулам вида [30]:

$$H_{\text{упр}} = D_h \chi T_h ; \quad S_{\text{упр}} = D_h \eta T_h , \quad (6.1.4)$$

где  $D_h$  – передаточное отношение между углом отклонения кольца АП и углом наклона ЭПВ конуса НВ.

В этой работе приводятся следующие значения введенных выше параметров для серийных пилотируемых вертолетов:

$$D_{\text{H}} = 1,5 \div 1,8; \quad -(6 \div 7)^\circ \leq \eta \leq +(5 \div 6)^\circ; \\ -(3,5 \div 5)^\circ \leq \chi \leq +(3,5 \div 5)^\circ.$$

При полете БВ вперед угол  $\chi < 0$ . При этом угол  $a_1 < 0$  и конус НВ наклонен вперед для создания движущей (пропульсивной) силы НВ.

Считается, что в этом случае  $H_{\text{упр}} < 0$ . Боковая управляющая сила  $S_{\text{упр}} < 0$  при ее направлении вправо. На режиме висения БВ, а также при малых значениях скорости полета  $V$  и при его полетах в вертикальной плоскости сила  $S_{\text{упр}}$  уравновешивается силой  $T_p$  тяги РВ.

Маневрирование БВ на неустановившихся режимах полета осуществляется с помощью требуемых законов изменения функций  $H_{\text{упр}}(t)$  и  $S_{\text{упр}}(t)$ .

В задачах динамики управляемого движения БВ используются суммарные продольная и поперечная силы, которые с учетом выражений (6.1.1) и (6.1.4) определяются как [30]:

$$\bar{H} = H + H_{\text{упр}} = (a_1 + D_{\text{H}}\chi)T_{\text{H}}; \quad (6.1.5)$$

$$\bar{S} = S + S_{\text{упр}} = (b_1 + D_{\text{H}}\eta)T_{\text{H}}. \quad (6.1.6)$$

В этих задачах должны учитываться аэродинамические силы, формируемые при полете вертолета его планером (фюзеляжем). Если вертолет не оснащен плоскостями (крыло, оперение), то предполагается, что подъемная и боковая силы его планера равны нулю.

В этом случае основной аэродинамической силой планера, возникающей при поступательном движении БВ, является сила вредного сопротивления, которая вычисляется по формуле:

$$X_{\text{вр}} = 0,5 c_x \rho V^2 S. \quad (6.1.7)$$

Здесь  $c_x = c_x(\alpha_{\text{n}}, V)$  – коэффициент лобового (вредного) сопротивления;  $\rho = \rho(h)$  – плотность воздуха;  $V$  – скорость полета БВ;  $S$  – площадь миделя планера [82] БВ.

Входящий в состав выражения для коэффициента  $c_x$  угол атаки  $\alpha_{\text{п}}$  планера БВ, отсчитываемый от его горизонтальной строительной оси, вычисляется как [30]:

$$\alpha_{\text{п}} = \alpha_{\text{H}} + \varepsilon - \Delta\alpha_{\text{H}}.$$

Здесь  $\varepsilon$  – угол заклинения оси вала НВ;  $\Delta\alpha_{\text{H}}$  – средний угол индуктивного скоса потока воздуха от НВ, который определяется по следующей формуле:

$$\Delta\alpha_{\text{H}} = T_{\text{H}} / 2\rho F_{\text{H}} V^2.$$

В работе [30] утверждается, что значение коэффициента  $c_x$  минимально при  $\alpha_{\text{п}} \in [0^\circ, 10^\circ]$ . При  $\alpha_{\text{п}} < 0$  его значения растут быстрее, чем при  $\alpha_{\text{п}} > 0$ . Зависимость  $c_x(\alpha_{\text{п}})$  практически является линейной для значений  $\alpha_{\text{п}} \in [-30^\circ, 30^\circ]$ .

Перейдем к рассмотрению существующих моделей динамики полета одновинтовых вертолетов.

Полная система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих движение вертолета как твердого тела, динамику маховых движений упругих лопастей НВ и работу его двигателей, включает в себя 36 уравнений [34]. Такая модель используется в исследовательских и проектных организациях при разработке новых и модернизации существующих образцов вертолетов.

Приведем примеры более простых существующих уравнений движения рассматриваемого вида вертолетов.

В работе [32] предложена следующая система дифференциальных уравнений пространственного движения вертолета:

$$\begin{aligned}\dot{V}_x &= -\omega_y V_z + \omega_z V_y + \frac{1}{m}(-H - X_{\text{пл}} - mg \cos \gamma \sin \vartheta), \\ \dot{V}_y &= -\omega_z V_x + \omega_x V_z + \frac{1}{m}(T + Y_{\text{пл}} - mg \cos \gamma \sin \vartheta), \\ \dot{V}_z &= -\omega_x V_y + \omega_y V_x + \frac{1}{m}(-S - T_p + Z_{\text{пл}} + mg \cos \gamma \sin \vartheta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_x &= \frac{1}{J_x} (M_{hx} + M_{px} + M_{\phi x} + M_{gox} + M_{box}), \\
\dot{\omega}_y &= \frac{1}{J_y} (M_{hy} + M_{py} + M_{\phi y} + M_{goy} + M_{boy}), \\
\dot{\omega}_z &= \frac{1}{J_z} (M_{hz} + M_{pz} + M_{\phi z} + M_{goz} + M_{boz}), \\
\dot{\gamma} &= \omega_x - (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \operatorname{tg} \vartheta, \\
\dot{\psi} &= (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \sec \vartheta, \\
\dot{\vartheta} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma.
\end{aligned} \tag{6.1.8}$$

Начальные условия для этой системы имеют вид:

$$\begin{aligned}
V_x(t_0) &= V_{x0}, & V_y(t_0) &= V_{y0}, & V_z(t_0) &= V_{z0}, \\
\omega_x(t_0) &= \omega_{x0}, & \omega_y(t_0) &= \omega_{y0}, & \omega_z(t_0) &= \omega_{z0}, \\
\gamma(t_0) &= \gamma_0, & \psi(t_0) &= \psi_0, & \vartheta(t_0) &= \vartheta_0.
\end{aligned} \tag{6.1.9}$$

Здесь  $V_x, V_y, V_z$  – компоненты скорости в связанной СК;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – компоненты угловой скорости вращения вертолета;  $\psi, \gamma, \vartheta$  – углы ориентации связанной СК относительно земной СК (соответственно,  $\gamma$  – угол крена,  $\psi$  – угол рыскания,  $\vartheta$  – угол тангажа);  $m$  – масса вертолета;  $J_x, J_y, J_z$  – моменты его инерции относительно осей  $OX, OY, OZ$ ;  $T$  – тяга НВ;  $H$  – продольная сила;  $S$  – поперечная сила;  $T_p$  – тяга РВ;  $X_{пл}, Y_{пл}, Z_{пл}$  – аэродинамические силы планера в связанной СК;  $M_{hx}, M_{hy}, M_{hz}$  – составляющие суммарного момента на втулке НВ;  $M_{px}, M_{py}, M_{pz}$  – составляющие момента, создаваемого рулевым винтом относительно ЦМ вертолета;  $M_{\phi x}, M_{\phi y}, M_{\phi z}$  – компоненты аэродинамического момента фюзеляжа;  $M_{gox}, M_{goy}, M_{goz}$  – компоненты аэродинамического момента горизонтального оперения;  $M_{box}, M_{boy}, M_{boz}$  – компоненты аэродинамического момента вертикального оперения.

Описанные моменты и силы, а также соответствующие управляющие воздействия конкретизируются соответствующими формулами, представленными в работах [30, 32].

В качестве частного случая описания движения вертолета можно указать на модель его управляемого движения в вертикальной плоскости [32]:

$$\begin{aligned}
 m(\dot{V}_x - \omega_z V_y) &= -H - X_\phi - X_{\text{кр}} - G \sin \vartheta, \\
 m(\dot{V}_y - \omega_z V_x) &= T + Y_\phi + Y_{\text{кр}} + Y_{\text{ст}} - G \cos \vartheta, \\
 J_z \dot{\omega}_z &= -T x_m + H y_m + M_{z_{\text{н}}^+} + M_{z_{\text{ин}}} + M_{z_{\text{PB}}} + \\
 &\quad + M_{z_\phi} + M_{z_{\text{кр}}} + M_{z_{\text{ст}}}, \\
 \dot{\vartheta} &= \omega_z; \quad J_\omega \dot{\omega}_{\text{н}} = N_{\text{дв}}(n_{\text{тк}}, h, t_{\text{hb}}) \frac{\xi_M}{\omega_{\text{н}}} - M_{\text{k}}, \quad (6.1.10) \\
 \dot{n}_{\text{тк}} &= f(\delta_0, n_{\text{н}}, n_{\text{тк}}, \delta_{00}, n_{h_0}, n_{t_{\text{tk}}_0}), \\
 \dot{x}_g &= V_x \cos \vartheta - V_y \sin \vartheta, \\
 \dot{y}_g &= V_x \sin \vartheta + V_y \cos \vartheta, \\
 \dot{\delta}_0 &= u_1; \quad \dot{\delta}_{\text{в}} = u_2
 \end{aligned}$$

с начальными условиями вида:

$$\begin{aligned}
 V_x(t_0) &= V_{x0}, \quad V_y(t_0) = V_{y0}, \quad \omega_z(t_0) = \omega_{z0}, \\
 \vartheta(t_0) &= \vartheta_0, \quad \omega_{\text{н}}(t_0) = \omega_{\text{н}0}, \quad n_{\text{тк}}(t_0) = n_{\text{тк}0}, \\
 x_g(t_0) &= x_{g0}, \quad y_g(t_0) = y_{g0}, \\
 \delta_0(t_0) &= \delta_{00}, \quad \delta_{\text{в}}(t_0) = \delta_{\text{в}0}. \quad (6.1.11)
 \end{aligned}$$

Здесь  $G$  – сила тяжести;  $J_z$ ,  $J_\omega$  – соответственно момент инерции вертолета относительно оси  $OZ$  связанной СК и момент инерции НВ вместе с кинематически связанными с ним агрегатами;  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $\dot{V}_x$ ,  $\dot{V}_y$  – проекции соответственно вектора скорости и ускорения движения ЦМ вертолета на оси связанной СК;  $\omega_z$ ,  $\dot{\omega}_z$  – угловые скорость и ускорение вращения вертолета относительно оси  $OZ$  связанной СК;  $\vartheta$  – угол тангажа вертолета;  $\dot{\omega}_{\text{н}}$ ,  $\omega_{\text{н}}$ ,  $n_{\text{н}}$  – угловое ускорение, угловая скорость и

обороты НВ;  $\dot{n}_{\text{тк}}$ ,  $n_{\text{тк}}$  – угловое ускорение вращения и обороты турбокомпрессора двигателя вертолета;  $H$ ,  $T$  – продольная сила и тяга НВ;  $X_{\phi}$ ,  $Y_{\phi}$ ,  $X_{\text{кр}}$ ,  $Y_{\text{кр}}$ ,  $Y_{\text{ст}}$  – продольная и нормальная аэродинамические силы соответственно фюзеляжа, крыла и стабилизатора;  $x_m$ ,  $y_m$  – координата центра втулки НВ в связанной СК;  $M_{z_{\text{Н}}}$ ,  $M_{z_{\text{инн}}}$  – продольные аэродинамический и инерционный (от разноса горизонтальных шарниров) моменты на втулке НВ;  $M_{z_{\text{РВ}}}$ ,  $M_{z_{\phi}}$ ,  $M_{z_{\text{кр}}}$ ,  $M_{z_{\text{ст}}}$  – продольные аэродинамические моменты РВ, фюзеляжа, крыла и стабилизатора;  $M_k$  – крутящий момент НВ (момент аэродинамического сопротивления вращению НВ);  $N_{\text{дв}}(n_{\text{тк}}, h, t_{\text{НВ}})$  – мощность двигателей, определяемая по дроссельным и высотно-климатическим характеристикам;  $h$  – высота полета вертолета над уровнем моря;  $t_{\text{НВ}}$  – температура наружного воздуха;  $\xi_m$  – коэффициент использования мощности двигателей;  $\delta_0$ ,  $n_h$  – значения общего шага и оборотов НВ;  $\delta_{0_0}$ ,  $n_{h_0}$ ,  $n_{\text{тк}0}$  – балансировочные значения общего шага НВ, оборотов НВ и турбокомпрессора;  $\dot{\delta}_0$ ,  $\dot{\delta}_v$  – скорость изменения общего шага и угла отклонения кольца автомата перекоса (АП) в продольном направлении;  $x_g$ ,  $y_g$  – координаты ЦМ вертолета в земной СК.

Модель (6.1.10), (6.1.11) является конкретизацией общей модели динамики управляемого движения объекта вида (2.5.1) при  $n = 20$  и  $k = 2$ . В ней в качестве управлений  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  вертолетом используются соответственно скорости изменения общего шага НВ и угла отклонения кольца АП в продольном направлении (в вертикальной плоскости).

Системы уравнений (6.1.8) и (6.1.10), кроме их высоких порядков, включают в себя множество параметров и характеристик вертолета, силовой установки, окружающей среды и т.д., которые невозможно конкретизировать при оперативном применении таких моделей в вертолетных БАК.

Поэтому в последнее время для решения задач эксплуатации вертолетов были предложены упрощенные уравнения движения, в которых вертолет представляется материальной точкой [22], масса которой равна его полетной массе.

В работе [27], предназначеннной для специалистов гражданской авиации, при решении траекторных задач предлагается использовать следующую модель движения вертолета в вертикальной плоскости:

$$m\dot{V} = P - X_{\text{вр}} - G \sin \theta; \quad (6.1.12)$$

$$mV\dot{\theta} = Y - G \cos \theta; \quad (6.1.13)$$

$$Z_{\text{т}} - T_{\text{рв}} = 0. \quad (6.1.14)$$

Здесь  $m$  – масса вертолета;  $V = V(t)$  – скорость полета в момент времени  $t$ ;  $\theta = \theta(t)$  – угол наклона траектории полета в текущий момент времени  $t$ ;  $P$ ,  $Y$  и  $Z_{\text{т}}$  – проекции силы  $T_{\text{н}}$  тяги НВ вертолета соответственно на оси ЦМ $x_{\text{ск}}$ , ЦМ $y_{\text{ск}}$  и ЦМ $z_{\text{ск}}$  его скоростной СК;  $X_{\text{вр}}$  – сила вредного сопротивления, обусловленная сопротивлением элементов вертолета (фюзеляжа, шасси, хвостовой балки и др. за исключением НВ);  $G = mg$  – сила веса вертолета;  $T_{\text{рв}}$  – тяга его рулевого винта.

В этой работе предлагается вычислять силу  $X_{\text{вр}}$  по формуле

$$X_{\text{вр}} = c_{x\text{вр}} F \frac{\rho V^2}{2}, \quad (6.1.15)$$

где  $c_{x\text{вр}}$  – суммарный коэффициент вредного сопротивления указанных выше элементов вертолета;  $F = \pi R^2$  – площадь, омываемая НВ радиуса  $R$ ;  $\rho$  – плотность воздуха на высоте полета вертолета;  $V$  – скорость его полета.

К недостаткам работы [27] можно отнести:

- а) отсутствие методики расчета сил  $P$ ,  $Y$ ,  $Z_{\text{т}}$  в зависимости от величины и направления в пространстве силы  $T_{\text{н}}$ ,
- б) отсутствие модели пространственного движения ЦМ вертолета.

В работе [34] предложена модель пространственного движения ЦМ вертолета в перегрузках следующего вида:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{V}}{g} &= n_{x\text{ск}} - \sin \theta; \\ \frac{V}{g} \dot{\theta} &= n_{y\text{ск}} \cos \gamma - \cos \theta; \\ \frac{V \cos \theta}{g} \dot{\Psi} &= n_{y\text{ск}} \sin \gamma,\end{aligned}\quad (6.1.16)$$

где  $n_{x\text{ск}}$ ,  $n_{y\text{ск}}$  – перегрузки, действующие на вертолет в скоростной СК;  $\Psi = \Psi(t)$  – угол поворота траектории его полета в момент времени  $t$ .

Уравнения (6.1.16) предназначены для моделирования и анализа реализуемости на конкретном образце вертолета сложных маневров, включая фигуры высшего пилотажа.

При этом в качестве управлений предлагается использовать функции:

$$\begin{aligned}n_{x\text{ск}} &= f_1(V, n_{y\text{ск}}, \varphi_{\text{ош}}, t_{\text{нап}}^\circ, G, h, \text{ИВВ}); \\ n_{y\text{ск}} &= f_2(V, n_{x\text{ск}}, \varphi_{\text{ош}}, t_{\text{нап}}^\circ, G, h, \text{ИВВ}),\end{aligned}$$

где  $\varphi_{\text{ош}}$  – угол общего шага НВ;  $t_{\text{нап}}^\circ$  – температура воздуха;  $h$  – высота полета; ИВВ – индивидуальные возможности вертолета.

К основным недостаткам этой модели можно отнести:

- а) отсутствие учета возможностей управления вертолетом с помощью РВ,
- б) графоаналитический метод формирования управляющих перегрузок, требующий наличия полетных записей ранее выполненных маневров конкретным образом рассматриваемого типа вертолета.

В работе [36] приводится модель Б.Н. Юрьева, описывающая в вертикальной плоскости посадку вертолета в режиме авторотации НВ. Эта модель имеет вид:

$$m\dot{V}_x = -X_{\text{вр}} \cos \theta - T_{\text{H}} \sin \tau^*; \quad (6.1.17)$$

$$m\dot{V}_y = -X_{\text{вр}} \sin \theta + T_{\text{H}} \cos \tau^* - mg; \quad (6.1.18)$$

$$\dot{x} = V_x; \quad \dot{h} = V_y; \quad \dot{\omega} = -M_{\text{K}}/J_{\text{H}}. \quad (6.1.19)$$

Здесь  $m$  – масса вертолета;  $V_x$ ,  $V_y$  – компоненты вектора  $V$  скорости ЦМ вертолета;  $M_{\text{K}}$  – крутящий момент на валу НВ, свободно вращающегося от набегающего потока воздуха;  $J_{\text{H}}$  – момент инерции НВ;  $\tau^*$  – угол наклона вектора  $T_{\text{H}}$  относительно оси  $Oy_g$  земной СК. Для вычисления этого угла предлагается формула вида:

$$\tau^* = \vartheta_{\text{H}} - D_1 \delta_{\text{в}},$$

где  $\vartheta_{\text{H}} = \alpha_{\text{H}} - \theta$  – угол наклона ЭПВ НВ относительно оси  $Ox_g$ ;  $D_1$  и  $\delta_{\text{в}}$  – аналогичны параметрам  $D_{\text{H}}$  и  $\chi$  из формул (6.1.3). Управлениями в данной модели являются функции  $\tau^*(t)$  и  $\phi_{\text{ош}}(t)$ .

## 6.2. Общая математическая модель управляемого полета беспилотного вертолета

Как было отмечено выше, к настоящему времени отсутствуют достаточно простые модели пространственного движения одновинтовых вертолетов, которыми могли бы пользоваться специалисты вертолетных БАК при оперативном программировании полетов БВ.

Для последнего необходима, как в случае БЛА СС, упрощенная общая динамическая модель движения, которая строится при следующих основных предположениях:

- маховые движения лопастей НВ заменены движением описываемого ими конуса, в котором выделена ЭПВ НВ,
- НВ БВ рассматривается как статическая система, силы и моменты которой определяются текущими значениями параметров управления и движения БВ,

- аэродинамическая подъемная сила лопастей НВ, возникающая при движении БВ, заменена соответствующим образом ориентированной в пространстве силой тяги НВ,
- движение БВ в пространстве рассматривается как движение без скольжения его центра масс (ЦМ) в земной СК,
- БВ рассматривается как безинерционный объект, осуществляющий все режимы полета при постоянном числе оборотов его двигателя,
- все действующие в полете на БВ силы приведены к его ЦМ.

Основным требованием к этой модели является получение на ее основе описаний всех режимов полета БВ.

При построении уравнений движения ЦМ БВ отметим отсутствие единого представления сил, действующих на вертолет при его полете.

Поэтому будем использовать классическую схему сил и углов, предложенных Б.Н. Юрьевым [36, 37] в обозначениях Разд. 6.1. При этом применяются земная (индекс « $g$ »), скоростная («ск») и связанная с НВ БВ (« $h$ ») система координат с началом в его ЦМ.

Схема сил, действующих на БВ при наборе высоты в вертикальной плоскости полета, приведена на Рис. 6.5.

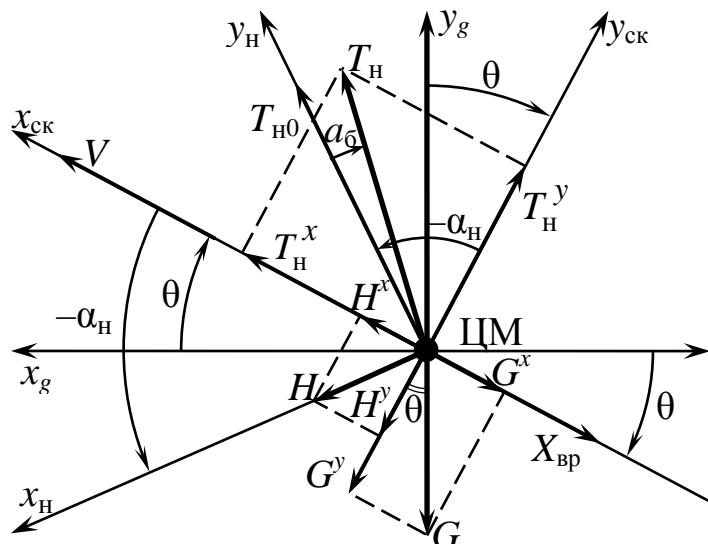


Рис. 6.5

На данном и последующих рисунках, а также в получаемых на их основе выражениях для продольной и боковой сил будем для простоты использовать обозначения  $H$  и  $S$ , подразумевая под ними силы, описываемые выражениями (6.1.5) и (6.1.6).

На Рис. 6.5 показано, что сила  $T_{h0}$  тяги НВ при его обдуве потоком со скоростью  $V$  отклоняется от оси НВ на угол балансировки, равный величине:

$$a_b = a_1 + \chi_b,$$

и занимает положение  $T_h$ . Здесь  $\chi_b$  – балансировочный угол продольного отклонения АП.

Отметим, что при данном режиме полета БВ углы  $\theta > 0$ ,  $\alpha_h < 0$ . Движение БВ вперед обеспечивается проекциями на ось ЦМ  $x_{ck}$  силы  $T_h$  и продольной (пропульсивной) силы  $H$ , действующей в ЭПВ НВ (см. Рис. 6.4), которая представлена на Рис. 6.5 осью ЦМ  $x_h$ .

На Рис. 6.6 представлена схема сил, действующих на БВ при его снижении.

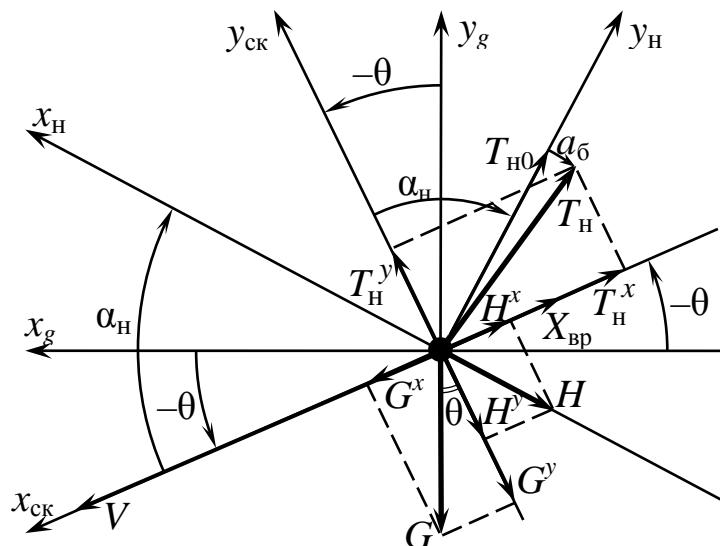


Рис. 6.6

В данном режиме полета углы  $\theta < 0$ ,  $\alpha_h > 0$ . Движущей силой, обеспечивающей снижение БВ, является проекция силы  $G$  на ось ЦМ  $x_{ck}$ . Проекции сил  $T_h$  и  $H$  на эту ось выполняют наряду с силой  $X_{bp}$  функцию силы сопротивления движению БВ.

Проекция силы  $T_h$  на ось ЦМ $_{y_{ck}}$  уравновешивает соответствующие проекции сил  $G$  и  $H$ .

Конкретизируем проекции сил, представленных на Рис. 6.5 и Рис. 6.6, на оси скоростной СК:

$$\begin{aligned} T_h^x &= -T_h \sin(a_b + \alpha_h); & T_h^y &= T_h \cos(a_b + \alpha_h); \\ H^x &= H \cos \alpha_h; & H^y &= H \sin \alpha_h; \\ G^x &= G \sin \theta; & G^y &= G \cos \theta. \end{aligned}$$

Знак «минус» в правой части первой формулы объясняется тем, что при наборе высоты и горизонтальном полете (см. Рис. 6.5) величины  $\alpha_h < 0$ ,  $a_b > 0$ . Тогда  $\sin(-\alpha_h + a_b) < 0$ . Но сила  $T_h^x$  должна быть движущей, то есть быть положительной. При снижении БВ (см. Рис. 6.6) углы  $\alpha_h > 0$  и  $a_b > 0$ . Тогда синус их суммы будет неотрицательным и сила  $T_h^x$  будет «тормозящей» силой.

В связи с тем, что косинус является четной функцией [17], сила  $T_h^y$  при любых знаках  $\alpha_h$  и  $a_b$  будет направлена вверх.

Сумма проекций действующих сил на ось ЦМ $_{x_{ck}}$  с учетом их направлений (знаков) будет равна:

$$\begin{aligned} \sum F_{x_{ck}} &= T_h^x + H^x - G^x - X_{bp} = \\ &= -T_h \sin(\alpha_h + a_b) + H \cos \alpha_h - G \sin \theta - X_{bp}. \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Обозначим равнодействующую проекций на ось ЦМ $_{y_{ck}}$  всех сил, действующих при продольном движении БВ как:

$$Q = T_h^y + H^y - G^y = T_h \cos(\alpha_h + a_b) - H \sin \alpha_h - G \cos \theta. \tag{6.2.2}$$

Пусть в некоторый момент времени БВ получил крен  $\gamma > 0$ . Это означает, что ось ЦМ $_{y_{ck}}$  повернулась на этот угол вокруг оси ЦМ $_{x_{ck}}$ . При этом у БВ возникло боковое движение за счет проекции силы  $Q$  на ось ЦМ $_{z_{ck}}$ , а также за счет боковой силы  $S$  (см. Рис. 6.4) и силы  $T_p$  тяги РВ.

Схема действия сил при боковом движении БВ представлена на Рис. 6.7.

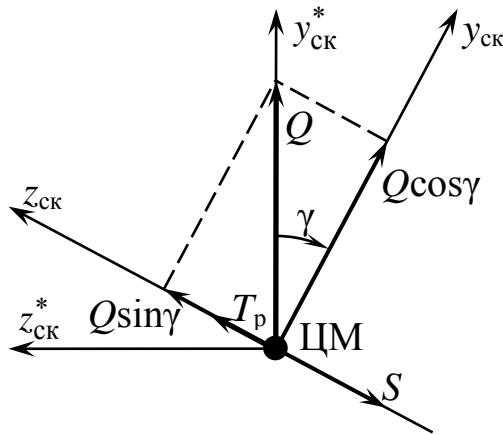


Рис. 6.7

На этом рисунке ось ЦМ $y_{\text{ск}}^*$  соответствует осям ЦМ $y_{\text{ск}}$ , представленным на Рис. 6.5 и Рис. 6.6.

Кроме этого, в предположениях о малости угла балансировочного поперечного поворота ЭПВ НВ, который определяется как:

$$b_6 = b_1 + D_h \eta_b ,$$

где  $\eta_b$  – балансировочный угол поперечного наклона кольца АП [30], а также при  $b_1 < a_1$  получаем, что сила  $S$  будет направлена по оси ЦМ $z_{\text{ск}}$ .

Суммы проекций сил на оси ЦМ $y_{\text{ск}}$  и ЦМ $z_{\text{ск}}$  с учетом Рис. 6.7 и выражения (6.2.2) записываются как:

$$\begin{aligned} \sum F_{y_{\text{ск}}} &= (T_h \cos(\alpha_h + a_6) - H \sin \alpha_h - G \cos \theta) \cos \gamma; \\ \sum F_{z_{\text{ск}}} &= (T_h \cos(\alpha_h + a_6) - H \sin \alpha_h - G \cos \theta) \sin \gamma - S + T_p . \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Используя известные формулы динамики полета БЛА [7]:

$$m\dot{V} = \sum F_{x_{\text{ск}}}; \quad mV\dot{\theta} = \sum F_{y_{\text{ск}}}; \quad mV \cos \theta \dot{\Psi} = \sum F_{z_{\text{ск}}}$$

и выражения (6.2.1) и (6.2.3), получим динамические уравнения движения БВ вида:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= -T_h \sin(\alpha_h + a_6) + H \cos \alpha_h - G \sin \theta - X_{\text{вр}}; \\ mV\dot{\theta} &= (T_h \cos(\alpha_h + a_6) - H \sin \alpha_h - G \cos \theta) \cos \gamma; \\ mV \cos \theta \dot{\Psi} &= (T_h \cos(\alpha_h + a_6) - H \sin \alpha_h - G \cos \theta) \sin \gamma - S + T_p . \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

В дополнение к ним для описания пространственного движения БВ в земной СК используются кинематические уравнения [7]:

$$\dot{x} = V \cos \theta \cos \Psi; \quad (6.2.5)$$

$$\dot{y} = V \sin \theta; \quad (6.2.6)$$

$$\dot{z} = V \cos \theta \sin \Psi. \quad (6.2.7)$$

Проведем упрощение уравнений (6.2.4) в предположении о малости углов  $\alpha_h$  и  $a_6$ . Это позволяет использовать замену вида:

$$\sin(\alpha_h + a_6) \approx (\alpha_h + a_6); \quad \sin \alpha_h \approx \alpha_h;$$

$$\cos(\alpha_h + a_6) \approx 1; \quad \cos \alpha_h \approx 1; \quad \alpha_h a_1 \approx 0.$$

Тогда уравнения (6.2.4) с учетом выражений (6.1.5), (6.1.6) можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= -T_h(\alpha_h + a_6) + \bar{H} - G \sin \theta - X_{bp}; \\ mV\dot{\theta} &= (T_h - \bar{H}\alpha_h - G \cos \theta) \cos \gamma; \\ mV \cos \theta \dot{\Psi} &= (T_h - \bar{H}\alpha_h - G \cos \theta) \sin \gamma - \bar{S} + T_p. \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

Из этой системы уравнений следует, что вектором косвенного управления БВ является вектор вида:

$$u(t) = (T_h(t), \alpha_h(t), \bar{H}(t), \bar{S}(t), \gamma(t), T_p(t)).$$

Рассмотрим один из подходов, позволяющих использовать в системе (6.2.8) вектор  $\Delta(t) = (\delta_1(t), \delta_2(t), \delta_3(t), \delta_4(t)) = (\varphi_{osh}(t), \chi(t), \eta(t), \varphi_p(t))$  прямого управления БВ.

Конкретизируем вид сил  $\bar{H}$  и  $\bar{S}$ , входящих в уравнения (6.2.8). Дополним правые части выражений (6.1.4) и (6.1.5) балансировочными значениями углов  $\chi_b$  и  $\eta_b$  наклона кольца АП в продольном и поперечном направлениях.

В этом случае для сил  $\bar{H}$  и  $\bar{S}$  получаем зависимости вида:

$$H(\chi) = (a_1 + D_h(\chi + \chi_b))T_h;$$

$$S(\eta) = (b_1 + D_h(\eta + \eta_b))T_h.$$

Подставляя правые части этих формул и введенный выше параметр  $a_6$  в выражения (6.2.8), после простых преобразова-

ний получим систему дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T_H(-\alpha_H + D_H \chi) - G \sin \theta - X_{\text{вр}}; \\ mV\dot{\theta} &= ((1 - \alpha_H D_H (\chi + \chi_6)) T_H - G \cos \theta) \cos \gamma; \\ mV \cos \theta \dot{\Psi} &= ((1 - \alpha_H D_H (\chi + \chi_6)) T_H - G \cos \theta) \sin \gamma - \\ &\quad -(b_1 + D_H (\eta + \eta_6)) T_H + T_p. \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

Будем считать, что значения углов  $\alpha_H(t)$  и  $\gamma(t)$  зависят от соответствующих углов наклона кольца АП следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_H(t) &= k_\alpha(\chi(t) + \chi_6); \\ \gamma(t) &= k_\gamma(\eta(t) + \eta_6), \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

где  $k_\alpha$ ,  $k_\gamma$  – передаточные коэффициенты системы управления БВ по каналам углов атаки (тангажа) и крена [30].

Подставляя соотношения (6.2.10) в уравнения (6.2.9), имеем:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T_H(-k_\alpha \chi_6 + (D_H - k_\alpha) \chi) - G \sin \theta - X_{\text{вр}}; \\ mV\dot{\theta} &= ((1 - D_H k_\alpha (\chi + \chi_6)^2) T_H - G \cos \theta) \cos(k_\gamma(\eta + \eta_6)); \\ mV \cos \theta \dot{\Psi} &= ((1 - D_H k_\alpha (\chi + \chi_6)^2) T_H - G \cos \theta) \sin(k_\gamma(\eta + \eta_6)) - \\ &\quad - D_H (\eta + \eta_6) T_H + T_p. \end{aligned}$$

Как было отмечено в Разд. 6.1, силы  $T_H$  и  $T_p$  зависят от углов  $\Phi_{\text{овш}}$  и  $\Phi_p$ .

Будем считать, что сила  $T_p$  тяги РВ БВ имеет составляющие  $T_{p\bar{b}}$  и  $T_{p\bar{y}}$ .

Первая составляющая за счет выбора соответствующего значения его шага  $\Phi_{p\bar{b}}$  компенсирует крутящий момент БВ, возникающий вследствие вращения его НВ. Вторая составляющая при конкретных значениях шага  $\Phi_p$  обеспечивает требуемое путевое управление БВ.

Предполагается, что текущие значения  $\Phi_{p\bar{b}}$  формируются и исполняются САУ БВ. Поэтому во всех последующих выражениях считается, что

$$T_p(\Phi_p) = T_{p\bar{b}}(\Phi_{p\bar{b}}) + T_{p\bar{y}}(\Phi_p).$$

Считая углы  $\varphi_{\text{ош}}$  и  $\varphi_p$  наряду с углами  $\chi$  и  $\eta$  также управляющими воздействиями, запишем с учетом формулы (6.1.7) окончательный вид динамических уравнений пространственного управляемого движения БВ:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= (-k_\alpha \chi_6 + (D_h - k_\alpha)\chi) T_h(\varphi_{\text{ош}}) - G \sin \theta - \\ &\quad - X_{\text{вр}}(y, V); \\ mV\dot{\theta} &= \left( (1 - k_\alpha D_h (\chi + \chi_6)^2) T_h(\varphi_{\text{ош}}) - G \cos \theta \right) \times \\ &\quad \times \cos(k_\gamma(\eta + \eta_6)); \\ mV \cos \theta \dot{\Psi} &= \left( (1 - k_\alpha D_h (\chi + \chi_6)^2) T_h(\varphi_{\text{ош}}) - G \cos \theta \right) \times \\ &\quad \times \sin(k_\gamma(\eta + \eta_6)) - D_h(\eta + \eta_6) T_h(\varphi_{\text{ош}}) + T_p(\varphi_p). \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

Для правых частей этих уравнений введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f_1(V, \theta, \varphi_{\text{ош}}, \chi) &= (-k_\alpha \chi_6 + (D_h - k_\alpha)\chi) T_h(\varphi_{\text{ош}}) - \\ &\quad - G \sin \theta - X_{\text{вр}}(y, V); \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

$$\begin{aligned} f_2(\theta, \varphi_{\text{ош}}, \chi, \eta) &= \left( (1 - k_\alpha D_h (\chi + \chi_6)^2) T_h(\varphi_{\text{ош}}) - \right. \\ &\quad \left. - G \cos \theta \right) \cos(k_\gamma(\eta + \eta_6)); \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

$$\begin{aligned} f_3(\theta, \varphi_{\text{ош}}, \chi, \eta, \varphi_p) &= \left( (1 - k_\alpha D_h (\chi + \chi_6)^2) T_h(\varphi_{\text{ош}}) - \right. \\ &\quad \left. - G \cos \theta \right) \sin(k_\gamma(\eta + \eta_6)) - D_h(\eta + \eta_6) T_h(\varphi_{\text{ош}}) + T_p(\varphi_p). \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

Тогда систему уравнений (6.2.11) в общем виде можно представить как:

$$m\dot{V} = f_1(V, \theta, y, \varphi_{\text{ош}}, \chi); \quad (6.2.15)$$

$$mV\dot{\theta} = f_2(\theta, \varphi_{\text{ош}}, \chi, \eta); \quad (6.2.16)$$

$$mV \cos \theta \dot{\Psi} = f_3(\theta, \varphi_{\text{ош}}, \chi, \eta, \varphi_p). \quad (6.2.17)$$

В этих уравнениях отражен тот факт, что вектор  $\Delta(t) = (\delta_1(t), \delta_2(t), \delta_3(t), \delta_4(t))$ ,  $t \in [t_0, t_k]$  прямого управления БВ в общем случае включает в себя следующие компоненты:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \varphi_{\text{ош}}(t); & \delta_2 &= \chi(t); \\ \delta_3 &= \eta(t); & \delta_4 &= \varphi_p(t). \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

В связи с тем, что размерность вектора  $\Delta$  больше размерности вектора  $(V, \theta, \Psi)$  фазовых координат системы (6.2.15)-(6.2.17), при программировании траекторий полета БВ с использованием концепции обратных задач управления (см. Разд. 2.3) предлагается для каждого момента времени  $t \in [t_0, t_k]$  решать задачу условной оптимизации вида (2.3.45), (2.3.44).

В общем случае эта задача конкретизируется следующим образом:

«Определить значения управляющих функций  $\varphi_{\text{ош}}(t)$ ,  $\chi(t)$ ,  $\eta(t)$ ,  $\varphi_p(t)$ , доставляющих минимум целевой функции:

$$U(t) = \varphi_{\text{ош}}^2(t) + \chi^2(t) + \eta^2(t) + \varphi_p^2(t) \rightarrow \min, \quad t \in [t_0, t_k] \quad (6.2.19)$$

при выполнении ограничений вида:

$$\begin{aligned} f_1(V_{\text{зад}}, \theta_{\text{тр}}, y_{\text{тр}}, \varphi_{\text{ош}}, \chi) - m\dot{V}_{\text{зад}} &= 0; \\ f_2(\theta_{\text{тр}}, \varphi_{\text{ош}}, \chi, \eta) - mV_{\text{зад}}\dot{\theta}_{\text{тр}} &= 0; \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{ош}}^{\min} \leq \varphi_{\text{ош}}(t) \leq \varphi_{\text{ош}}^{\max}; \quad \chi_{\min} \leq \chi(t) \leq \chi_{\max}; \\ \eta_{\min} \leq \eta(t) \leq \eta_{\max}; \quad \varphi_p^{\min} \leq \varphi_p(t) \leq \varphi_p^{\max}, \end{aligned} \quad (6.2.21)$$

где  $V_{\text{зад}} = V_{\text{зад}}(t)$ ,  $\theta_{\text{тр}} = \theta_{\text{тр}}(t)$ ,  $\Psi_{\text{тр}} = \Psi_{\text{тр}}(t)$  – требуемые законы изменения скорости, углов наклона и поворота траектории при выполнении БВ конкретного полетного задания». Неравенства (6.2.21) отражают ограничения, накладываемые на управляющие воздействия (6.2.18) конструкцией конкретного БВ.

Функция Лагранжа (2.3.46), сформированная на основе выражений (6.2.19), (6.2.20), имеет вид:

$$\begin{aligned} L(t, \varphi_{\text{ош}}, \chi, \eta, \varphi_p, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = & \varphi_{\text{ош}}^2(t) + \chi^2(t) + \eta^2(t) + \varphi_p^2(t) + \\ & + \lambda_1[f_1(V, \theta, \varphi_{\text{ош}}, \chi) - m\dot{V}_{\text{зад}}] + \\ & + \lambda_2[f_2(\theta, \varphi_{\text{ош}}, \chi, \eta) - mV_{\text{зад}}\dot{\theta}_{\text{тр}}] + \\ & + \lambda_3[f_3(\theta, \varphi_{\text{ош}}, \chi, \eta, \varphi_p) - mV_{\text{зад}} \cos \theta_{\text{тр}} \dot{\Psi}_{\text{тр}}], \end{aligned} \quad (6.2.23)$$

где  $\lambda_i = \lambda_i(t)$  – значения множителей Лагранжа в момент времени  $t \in [t_0, t_k]$ ,  $i = (\overline{1,3})$ .

Соотношения (2.3.47) с использованием выражений (6.2.23) и (6.2.12)-(6.2.14) записываются как:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \varphi_{\text{ош}}} &= 2\varphi_{\text{ош}}(t) + \lambda_1(t) \left[ (-k_\alpha \chi_6 + (D_H - k_\alpha)\chi) \frac{\partial T_H}{\partial \varphi_{\text{ош}}} \right] + \\
 &+ \lambda_2(t) \left[ \left(1 - k_\alpha D_H (\chi(t) + \chi_6)^2\right) \frac{\partial T_H}{\partial \varphi_{\text{ош}}} \cos(k_\gamma(\eta(t) + \eta_6)) \right] + \\
 &+ \lambda_3(t) \left[ \left(1 - k_\alpha D_H (\chi(t) + \chi_6)^2\right) \frac{\partial T_H}{\partial \varphi_{\text{ош}}} \sin(k_\gamma(\eta(t) + \eta_6)) \right] = 0; \\
 \frac{\partial L}{\partial \chi} &= 2\chi(t) + \lambda_1(t) [(D_H - k_\alpha) T_H(\varphi_{\text{ош}}(t))] + \quad (6.2.24) \\
 &+ \lambda_2(t) [(-2k_\alpha D_H (\chi(t) + \chi_6)) T_H(\varphi_{\text{ош}}(t)) \cos(k_\gamma(\eta(t) + \eta_6))] + \\
 &+ \lambda_3(t) [(-2k_\alpha D_H (\chi(t) + \chi_6)) T_H(\varphi_{\text{ош}}(t)) \sin(k_\gamma(\eta(t) + \eta_6))] = 0; \\
 \frac{\partial L}{\partial \eta} &= 2\eta(t) - \lambda_2(t) \left[ \left(1 - k_\alpha D_H (\chi(t) + \chi_6)^2\right) T_H(\varphi_{\text{ош}}(t)) - G \cos \theta_{\text{tp}} \right] \times \\
 &\times k_\gamma \sin(k_\gamma(\eta(t) + \eta_6)) + \\
 &+ \lambda_3(t) \left[ \left(1 - k_\alpha D_H (\chi(t) + \chi_6)^2\right) T_H(\varphi_{\text{ош}}(t)) - G \cos \theta_{\text{tp}} \right] \times \\
 &\times k_\gamma \cos(k_\gamma(\eta(t) + \eta_6)) - D_H \eta_6 T_H(\varphi_{\text{ош}}(t)) = 0; \\
 \frac{\partial L}{\partial \varphi_p} &= 2\varphi_p(t) + \lambda_3(t) \frac{\partial T_p}{\partial \varphi_p} = 0.
 \end{aligned}$$

Искомые переменные задачи  $\varphi_{\text{ош}}^*(t)$ ,  $\chi^*(t)$ ,  $\eta^*(t)$ ,  $\varphi_p^*(t)$ ,  $\lambda_1^*(t)$ ,  $\lambda_2^*(t)$ ,  $\lambda_3^*(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$  определяются из решения системы параметрических уравнений (6.2.24), (6.2.20), преобразованной для учета ограничений (6.2.21) с использованием заменены управлений вида (2.3.51). При решении полученной системы методами, изложенными в Разд. 3.5, в ней используются выражения (6.2.12)-(6.2.14) и (6.1.2), (6.1.3), (6.1.7). При этом, если решения этой системы не существуют, то делается вывод о невозможности выполнения ограничений (6.2.21) при используемых зависимостях  $V_{\text{зад}}(t)$ ,  $\theta_{\text{tp}}(t)$ ,  $\Psi_{\text{tp}}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ .

### 6.3. Частные модели управляемых полетов беспилотного вертолета

Сформируем с использованием модели (6.2.11) уравнения управляемого движения, соответствующие различным режимам полета БВ.

Полет БВ в вертикальной плоскости на интервале времени  $[t_0, t_k]$  характеризуется следующими значениями его фазовых координат и управлений:

$$\Psi(t) = 0; \quad \dot{\Psi}(t) = 0; \quad \eta(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_k].$$

Тогда из уравнений (6.2.11) получаем соотношения вида:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= (-k_\alpha \chi_6 + (D_h - k_\alpha)\chi) T_h(\varphi_{ow}) - \\ &\quad - G \sin \theta - X_{bp}(y, V); \\ mV\dot{\theta} &= \left( (1 - k_\alpha D_h (\chi + \chi_6))^2 \right) T_h(\varphi_{ow}) - G \cos \theta \cos k_\gamma \eta_6; \\ 0 &= \left( (1 - k_\alpha D_h (\chi + \chi_6))^2 \right) T_h(\varphi_{ow}) - G \cos \theta \sin k_\gamma \eta_6 - \\ &\quad - D_h \eta_6 T_h(\varphi_{ow}) + T_p(\varphi_p), \quad t \in [t_0, t_k]. \end{aligned}$$

Если считать значения  $k_\gamma \eta_6$  достаточно малыми, то есть  $\cos k_\gamma \eta_6 \approx 1$ ,  $\sin k_\gamma \eta_6 \approx 0$ , то получаем следующую частную модель управляемого полета БВ:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= (-k_\alpha \chi_6 + (D_h - k_\alpha)\chi) T_h(\varphi_{ow}) - G \sin \theta - X_{bp}(y, V); \\ mV\dot{\theta} &= (1 - k_\alpha D_h (\chi + \chi_6))^2 T_h(\varphi_{ow}) - G \cos \theta; \\ T_p(\varphi_p) - D_h \eta_6 T_h(\varphi_{ow}) &= 0, \quad t \in [t_0, t_k]. \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

Вектором управления в данном режиме полета БВ является вектор  $\Delta(t) = (\varphi_{ow}(t), \chi(t), \varphi_p(t))$ . При этом третье уравнение этой системы является условием обеспечения полета БВ строго в вертикальной плоскости.

Кинематические уравнения (6.2.5)-(6.2.7) для рассматриваемого режима полета принимают вид:

$$\dot{x} = V \cos \theta; \quad \dot{y} = V \sin \theta, \quad t \in [t_0, t_k]. \tag{6.3.2}$$

Законы управления  $\phi_{\text{ощ}}^*(t)$ ,  $\chi^*(t)$ ,  $\varphi_p^*(t)$ , реализующие на интервале времени  $[t_0, t_k]$  программу полета БВ, заданную зависимостями  $V_{\text{зад}}(t)$ ,  $y_{\text{тр}}(t)$ ,  $\theta_{\text{тр}}(t)$ , находятся путем численного решения (см. Разд. 3.5) следующей базовой системы нелинейных параметрических уравнений:

$$\begin{aligned} & (-k_\alpha \chi_6 + (D_h - k_\alpha) \chi(t)) T_h(\phi_{\text{ощ}}(t)) - G \sin \theta_{\text{тр}}(t) - \\ & - X_{\text{вр}}(y_{\text{тр}}(t), V_{\text{зад}}(t)) - m \dot{V}_{\text{зад}}(t) = 0; \\ & \left(1 - k_\alpha D_h (\chi(t) + \chi_6)^2\right) T_h(\phi_{\text{ощ}}(t)) - G \sin \theta_{\text{тр}}(t) - \quad (6.3.3) \\ & - m V_{\text{зад}}(t) \dot{\theta}_{\text{тр}}(t) = 0; \\ & T_p(\varphi_p(t)) - D_h \eta_6 T_h(\phi_{\text{ощ}}(t)) = 0. \end{aligned}$$

Данная система построена с использованием выражений (6.3.1). Входящая в нее зависимость  $y_{\text{тр}}(t)$  вычисляется путем интегрирования дифференциальных уравнений (6.3.2) при  $V = V_{\text{зад}}(t)$ ,  $\theta = \theta_{\text{тр}}(t)$ . Учет ограничений вида (6.2.21) осуществляется указанным выше методом.

При горизонтальном полете БВ в этой плоскости на высоте  $y(t) = h = \text{const}$  для  $\theta = 0$ ,  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\Psi = 0$ ,  $\dot{\Psi} = 0$  из выражений (6.2.11), (6.2.5)-(6.2.7) получаем модель вида:

$$\begin{aligned} m \dot{V} &= (-k_\alpha \chi_6 + (D_h - k_\alpha) \chi) T_h(\phi_{\text{ощ}}) - X_{\text{вр}}(h, V); \\ & \left(1 - k_\alpha D_h (\chi + \chi_6)^2\right) T_h(\phi_{\text{ощ}}) - G = 0; \quad (6.3.4) \\ & T_p(\varphi_p) - D_h \eta_6 T_h(\phi_{\text{ощ}}) = 0; \quad \dot{x} = V. \end{aligned}$$

Здесь второе равенство описывает условие уравновешивания силы тяжести БВ для обеспечения его полета на постоянной высоте  $h$ .

Управление БВ для этого режима полета определяется решением системы (6.3.3) при  $\theta_{\text{тр}}(t) = 0$ ,  $\dot{\theta}_{\text{тр}}(t) = 0$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ .

Прямолинейный установившийся полет БВ в вертикальной плоскости в общем случае имеет следующие характеристики:

$$\begin{aligned} V_{\text{зад}}(t) &= V_{\text{зад}} = \text{const}; \quad \dot{V}_{\text{зад}}(t) = 0; \\ \theta_{\text{тр}}(t) &= \theta_{\text{тр}} = \text{const}; \quad \dot{\theta}_{\text{тр}} = 0, \quad t \in [t_0, t_k]. \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

В этом случае вектор  $\Delta = (\phi_{\text{ош}}, \chi, \phi_p)$  управления БВ определяется из решения системы уравнений (6.3.3), в которой использованы соотношения (6.3.5). При конкретизации силы  $X_{\text{вр}}$  плотность воздуха  $\rho$  вычисляется по формуле (5.4.10). Полученная система нелинейных уравнений относительно компонент вектора  $\Delta = \text{const}$  решается методами, изложенными в Разд. 3.4.

Пусть полет БВ, описываемый моделью (6.3.4), завершается режимом «висения» БВ, при котором  $\chi = 0$  и  $V = 0$ . Последнее означает, что сила  $X_{\text{вр}} = 0$ .

Уравнения, описывающие этот режим, полученные на основе модели (6.3.4), записываются как:

$$\begin{aligned} -k_\alpha \chi \dot{\theta}_6 T_h(\phi_{\text{ош}}) &= 0; \\ (1 - k_\alpha D_h \chi^2) T_h(\phi_{\text{ош}}) - G &= 0; \\ T_p(\phi_p) - D_h \eta_6 T_h(\phi_{\text{ош}}) &= 0. \end{aligned}$$

В связи с тем, что  $T_h(\phi_{\text{ош}}) \neq 0$  при любых значениях  $\phi_{\text{ош}}$ , из первого уравнения следует равенство нулю сомножителя  $k_\alpha \chi \dot{\theta}_6$ . Тогда модель режима «висения» БВ на интервале времени  $[t_0, t_k]$  в некоторой точке с координатами  $(x_{\text{в}}, y_{\text{в}})$  принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} T_h(\phi_{\text{ош}}) - G &= 0; \quad T_p(\phi_p) - D_h \eta_6 T_h(\phi_{\text{ош}}) = 0; \\ \dot{x} &= 0; \quad \dot{y} = 0; \quad x(t_0) = x_{\text{в}}; \quad y(t_0) = y_{\text{в}}. \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

В этом режиме вектор управления БВ включает в себя параметры  $\phi_{\text{ош}} = \text{const}$ , и  $\phi_p = \text{const}$ , значения которых определяются из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} T_h(\phi_{\text{ош}}) - G &= 0; \\ T_p(\phi_p) - D_h \eta_6 G &= 0, \end{aligned}$$

которые в общем случае решаются численными методами,

описанными в Разд. 3.3.

Полет БВ в горизонтальной плоскости на высоте  $y(t) = h = \text{const}$  характеризуется следующими значениями его параметров:

$$\theta = 0; \quad \dot{\theta} = 0; \quad \dot{y} = 0.$$

В этом случае уравнения (6.2.11) приобретают вид:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= (-k_\alpha \chi_6 + (D_h - k_\alpha)\chi) T_h(\varphi_{\text{ощ}}) - X_{\text{вр}}(h, V); \\ 0 &= \left( (1 - k_\alpha D_h (\chi + \chi_6)^2) T_h(\varphi_{\text{ощ}}) - G \right) \cos(k_\gamma(\eta + \eta_6)); \\ mV\dot{\Psi} &= \left( (1 - k_\alpha D_h (\chi + \chi_6)^2) T_h(\varphi_{\text{ощ}}) - G \right) \sin(k_\gamma(\eta + \eta_6)) - \\ &\quad - D_h(\eta + \eta_6) T_h(\varphi_{\text{ощ}}) + T_p(\varphi_p). \end{aligned}$$

Боковое движение БВ осуществляется при значениях угла  $\eta + \eta_6 \neq 0$ . Из этого следует, что значения косинуса и синуса величины  $k_\gamma(\eta + \eta_6)$  одновременно не равны нулю. Из второго уравнения системы вытекает, что при  $\cos(k_\gamma(\eta + \eta_6)) \neq 0$  должно равняться нулю выражение, стоящее в скобках, которое описывает условие осуществления БВ полета на постоянной высоте  $h$ . Соответственно такое выражение будет равно нулю и в третьем уравнении системы.

Тогда модель данного режима полета БВ записывается как:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= (-k_\alpha \chi_6 + (D_h - k_\alpha)\chi) T_h(\varphi_{\text{ощ}}) - X_{\text{вр}}(h, V); \\ (1 - k_\alpha D_h (\chi + \chi_6)^2) T_h(\varphi_{\text{ощ}}) - G &= 0; \\ mV\dot{\Psi} &= -D_h(\eta + \eta_6) T_h(\varphi_{\text{ощ}}) + T_p(\varphi_p); \\ \dot{x} &= V \cos \Psi; \quad \dot{z} = V \sin \Psi, \quad t \in [t_0, t_k]. \end{aligned} \tag{6.3.7}$$

Из этой модели следует, что изменение угла  $\Psi(t)$  поворота траектории БВ осуществляется путем изменения углов  $\eta(t)$  по-перечного наклона кольца АП и шага  $\varphi_p(t)$  его РВ.

Компоненты вектора управления:

$$\Delta(t) = (\varphi_{\text{ощ}}(t), \chi(t), \eta(t), \varphi_p(t))$$

при программировании этого режима полета БВ должны

удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} & (-k_\alpha \chi_6 + (D_H - k_\alpha) \chi) T_H(\varphi_{\text{ош}}) - X_{\text{вр}}(h, V_{\text{зад}}) - m \dot{V}_{\text{зад}} = 0; \\ & \left(1 - k_\alpha D_H (\chi + \chi_6)^2\right) T_H(\varphi_{\text{ош}}) - G = 0; \\ & -D_H (\eta + \eta_6) T_H(\varphi_{\text{ош}}) + T_p(\varphi_p) - m V_{\text{зад}} \dot{\Psi}_{\text{зад}} = 0. \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

Нахождение компонент вектора  $\Delta(t)$  будем осуществлять с помощью решения вспомогательной задачи условной оптимизации, в общем виде представленной выражениями (6.2.19)-(6.2.21).

Функция Лагранжа решаемой задачи, сформированная с использованием выражений (6.2.19) и (6.3.8), записывается как:

$$\begin{aligned} L(t, \varphi_{\text{ош}}, \chi, \eta, \varphi_p, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = & \varphi_{\text{ош}}^2(t) + \chi^2(t) + \eta^2(t) + \varphi_p^2(t) + \\ & + \lambda_1(t) \left[ (-k_\alpha \chi_6 + (D_H - k_\alpha) \chi(t)) T_H(\varphi_{\text{ош}}(t)) - X_{\text{вр}}(h, V_{\text{зад}}) - m \dot{V}_{\text{зад}} \right] + \\ & + \lambda_2(t) \left[ \left(1 - k_\alpha (\chi(t) + \chi_6)^2\right) T_H(\varphi_{\text{ош}}(t)) - G \right] + \\ & + \lambda_3(t) \left[ -D_H (\eta(t) + \eta_6) T_H(\varphi_{\text{ош}}(t)) + T_p(\varphi_p(t)) - m V_{\text{зад}} \dot{\Psi}_{\text{зад}} \right]. \end{aligned}$$

Необходимые условия экстремума этой функции имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{\text{ош}}} = & 2 \varphi_{\text{ош}}(t) + \lambda_1(t) \left[ (-k_\alpha \chi_6 + (D_H - k_\alpha) \chi(t)) \frac{\partial T_H}{\partial \varphi_{\text{ош}}} \right] + \\ & + \lambda_2(t) \left[ \left(1 - k_\alpha (\chi(t) + \chi_6)^2\right) \frac{\partial T_H}{\partial \varphi_{\text{ош}}} \right] + \\ & + \lambda_3(t) \left[ -D_H (\eta(t) + \eta_6) \frac{\partial T_H}{\partial \varphi_{\text{ош}}} \right] = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \chi} = & 2 \chi(t) + \lambda_1(t) [(D_H - k_\alpha) T_H(\varphi_{\text{ош}}(t))] - \\ & - \lambda_2(t) k_\alpha (\chi(t) + \chi_6) T_H(\varphi_{\text{ош}}(t)) = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \eta} = & 2 \eta(t) - \lambda_3(t) D_H T_H(\varphi_{\text{ош}}(t)) = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi_p} = & 2 \varphi_p(t) + \lambda_3(t) \frac{\partial T_p}{\partial \varphi_p} = 0. \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

По результатам  $\varphi_{\text{ош}}^*(t)$ ,  $\chi^*(t)$ ,  $\eta^*(t)$ ,  $\varphi_p^*(t)$  решения системы (6.3.9), (6.3.8), учитывающей условия (6.2.21) с помощью формул (6.2.10) могут быть вычислены зависимости от времени значений углов  $\alpha_h(t)$  и  $\gamma(t)$ , а при необходимости – по приведенной в Разд. 6.1 формуле изменения угла атаки  $\alpha_n(t)$  фюзеляжа БВ,  $t \in [t_0, t_k]$ .

Для установившегося полета БВ по круговой траектории радиуса  $R_{\text{тр}}$  с постоянной скоростью  $V_{\text{зад}}$  вектор управления  $\Delta = (\varphi_{\text{ош}}, \chi, \eta, \varphi_p)$  определяется путем решения системы (6.3.9), (6.3.8) при  $\lambda_1 = \text{const}$ ,  $\lambda_2 = \text{const}$ ,  $\lambda_3 = \text{const}$ ,  $\dot{V}_{\text{зад}} = 0$ ,

$\dot{\Psi}_{\text{тр}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{V_{\text{зад}}}{R_{\text{тр}}} \right) = 0$ . Для ее решения используется один из численных методов, представленных в Разд. 3.4. При этом учет ограничений вида (6.2.21) проводится аналогичным образом.

Согласно работе [37] и Рис. 6.5 режиму вертикального взлета БВ соответствуют следующие значения параметров:

$$\theta = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_h = -\frac{\pi}{2}.$$

Для построения модели этого режима будем использовать уравнения (6.2.4), так как модель (6.2.11) получена при предположении о малости угла  $\alpha_h$ .

Учитывая для этого режима дополнительные требования вида:

$$a_6 \approx 0; \quad \gamma = 0; \quad \Psi = 0; \quad \dot{\Psi} = 0; \quad \eta = 0; \quad \chi = 0,$$

получаем из выражений (6.2.4)-(6.2.7) следующую модель вертикального взлета БВ:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T_h(\varphi_{\text{ош}}) - G - X_{\text{вр}}(y, V), \quad t \in [t_0, t_k]; \\ T_p(\varphi_p) - D_h \eta_6 T_h(\varphi_{\text{ош}}) &= 0; \\ \dot{x} &= 0; \quad \dot{y} = V; \quad x(t_0) = x_0; \quad y(t_0) = y_0. \end{aligned} \tag{6.3.10}$$

Эта модель за исключением второго уравнения полностью соответствует уравнениям движения вертолета, приведенным в работах [9, 38].

Компоненты вектора управления БВ  $\varphi_{\text{ош}}(t)$  и  $\varphi_p(t)$  определяются из решения системы параметрических уравнений вида:

$$\begin{aligned} T_h(\varphi_{\text{ош}}(t)) - G - X_{\text{вр}}(y_{\text{тр}}(t), V_{\text{зад}}(t)) - m\dot{V}_{\text{зад}}(t) &= 0; \\ T_p(\varphi_p(t)) - D_h \eta_6 T_h(\varphi_{\text{ош}}(t)) &= 0. \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

Входящая в эту систему зависимость  $y_{\text{тр}}(t)$  вычисляется как:

$$y_{\text{тр}}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t V_{\text{зад}}(\tau) d\tau.$$

При вертикальной посадке БВ имеем (см. Рис. 6.6), что

$$\theta = -\frac{\pi}{2}; \quad \alpha_h = \frac{\pi}{2}; \quad \dot{V} < 0; \quad V < 0.$$

Модель такого режима полета БВ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= -T_h(\varphi_{\text{ош}}) + G - X_{\text{вр}}(y, V), \quad t \in [t_0, t_k]; \\ T_p(\varphi_p) - D_h \eta_6 T_h(\varphi_{\text{ош}}) &= 0; \\ \dot{x} &= 0; \quad \dot{y} = -V; \quad x(t_0) = x_0; \quad y(t_0) = y_0. \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

Управление БВ определяется из решения системы (6.3.11) при смене знака параметра  $G$ .

Важным режимом полета информационных БВ разведки и мониторинга является его вращение вокруг вертикальной оси в процессе «висения». Заметим, что при этом значение его скорости  $V = 0$ . Последнее не позволяет использовать для описания этого режима уравнения (6.2.11), так как применяемые в ней углы  $\theta(t)$  и  $\Psi(t)$ , описывающие положение в пространстве вектора скорости  $\bar{V}(t) > 0$  БВ, не могут представлять положение «нуль-вектора»  $\bar{V}$ .

Будем считать, что модель «висения» представлена первым уравнением из состава выражений (6.3.6) и функцией  $\Omega_{\text{тр}} = \Omega_{\text{тр}}(t)$ , описывающей требуемый закон вращения БВ.

Из уравнений (6.1.8) следует, что при  $\omega_x = \omega_z = 0$  угловая скорость  $\omega_y(t)$  вращения БВ как твердого тела [22] вокруг его вертикальной оси определяется из решения уравнения:

$$J_y \dot{\omega}_y = M_{\text{py}},$$

где  $J_y$  – момент инерции БВ относительно оси ЦМ  $u_{\text{св}}$  связанной СК;  $M_{\text{py}}$  – момент сил относительно этой оси, создаваемый РВ БВ;  $\dot{\omega}_y$  – угловое ускорение вращения БВ относительно оси ЦМ  $u_{\text{св}}$ .

Будем вычислять величину  $M_{\text{py}}$  как:

$$M_{\text{py}} = T_p L_{\text{ЦМР}},$$

где  $L_{\text{ЦМР}}$  – расстояние от ЦМ БВ до оси втулки РВ, отсчитываемое по горизонтальной строительной оси БВ [30].

Полагая, что  $\dot{\omega}_y = \dot{\Omega}_{\text{тр}}$  и подставляя второе соотношение в первое уравнение, запишем его в следующей форме:

$$T_p(\phi_p) - \frac{J_y}{L_{\text{ЦМР}}} \dot{\Omega}_{\text{тр}} = 0. \quad (6.3.13)$$

Таким образом, модель рассматриваемого режима полета БВ составляют уравнение (6.3.13) и выражение:

$$T_h(\phi_{\text{ош}}) - G = 0. \quad (6.3.14)$$

В общем случае управления  $\phi_{\text{ош}} = \phi_{\text{ош}}(t)$  и  $\phi_p = \phi_p(t)$  для его реализации определяются путем численного решения уравнений (6.3.13) и (6.3.14) методами, изложенными в Разд. 3.5.

Пусть БВ в интервале времени  $[t_0, t_k]$  должен осуществить равномерное вращение в интервале углов от 0 до 360 градусов. Требуемая угловая скорость поворота БВ определяется по формуле:

$$\dot{\Omega}_{\text{тр}} = \frac{2\pi}{t_k - t_0} = \text{const.}$$

В этом случае уравнение (6.3.13) примет вид:

$$T_p(\varphi_p) - \frac{2\pi J_y}{L_{ЦМР}(t_k - t_0)} = 0. \quad (6.3.15)$$

При таком вращении управления  $\varphi_{ош}$  и  $\varphi_p$  не будут зависеть от времени и для их определения необходимо решить уравнения (6.3.14) и (6.3.15) одним из методов, приведенных в Разд. 3.3.

Если БВ перешел в режим «висения», имея угол курса  $\Psi_0 = \Psi(t_0)$ , и должен завершить вращение в момент времени  $t = t_k$  для выполнения дальнейшего полета с курсовым углом  $\Psi_k = \Psi(t_k)$ , то для режима разворота БВ закон его вращения будет иметь вид:

$$\Omega_{tp}(t) = \Psi_0 + \frac{\Psi_k - \Psi_0}{t_k - t_0} (t - t_0).$$

В этом случае в уравнении (6.3.13) используется следующее выражение

$$\dot{\Omega}_{tp} = \frac{\Psi_k - \Psi_0}{t_k - t_0}.$$

Модель посадки БВ в режиме авторотации (самовращения) НВ, который реализуется при отказе двигателя в процессе взлета или посадки БВ, сформируем на основе Рис. 6.6 с использованием уравнений (6.3.1), (6.3.2).

Этот режим может быть осуществлен как «безмоторный» вертикальный спуск БВ, но наиболее эффективно данный режим реализуется при планировании БВ с углом  $\theta_{пл} = \text{const} < 0$  (см. Рис. 6.6) [30].

В этом случае модель рассматриваемого режима с учетом выражений (6.1.19) примет вид:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= (-k_\alpha\chi_6 + (D_h - k_\alpha)\chi)T_h(\varphi_{ош}) - G \sin \theta_{пл} - X_{вр}(y, V); \\ &\left(1 - k_\alpha D_h (\chi + \chi_6)^2\right)T_h(\varphi_{ош}) - G \cos \theta_{пл} = 0; \\ T_p(\varphi_p) - D_h \eta_6 T_h(\varphi_{ош}) &= 0; \\ \dot{x} &= V \cos \theta_{пл}; \quad \dot{y} = -V \sin \theta_{пл}; \quad \dot{\omega} = -M_k(V)/J_h, \quad t \in [t_0, t_k]. \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

Последнее уравнение этой модели описывает тот факт, что со временем угловая скорость  $\omega(t)$  вращения НВ уменьшается. Для учета этого в системе (6.3.16) сила тяги НВ описывается зависимостью:

$$T_{\text{Н}}(\varphi_{\text{ош}}) = 0,5 c_{\text{T}}(\varphi_{\text{ош}}) \rho(y) F_{\text{Н}}(\omega R^2),$$

которая сформирована с использованием формулы (6.1.2).

Управлениями при посадке БВ в режиме авторотации НВ при выбранном значении  $\theta_{\text{пл}}$  являются функции  $\varphi_{\text{ош}}(t)$ ,  $\chi(t)$  и  $\varphi_{\text{р}}(t)$ . Для резкого снижения скорости  $V(t)$  перед его приземлением используется прием, называемый «подрывом» лопастей НВ, который заключается в однократном значительном увеличении перед приземлением величины  $\varphi_{\text{ош}}$  [30].

Заметим, что в перспективе для определения векторов управления  $\Delta(t)$  для различных режимов полета БВ можно использовать методы вариационного исчисления и теории оптимального управления, приведенные в Разд. 2.4 и Разд. 2.5. В настоящее время оптимизационные задачи динамики полета БВ в доступной литературе отсутствуют.

При программировании полетов БВ в условиях действия ветровых возмущений предлагается использовать метод их учета, изложенный в Разд. 4.3.

В частности, применяемые при определении векторов управления БВ зависимости  $V_{\text{зад}}(t)$ ,  $\theta_{\text{тр}}(t)$ ,  $\Psi_{\text{тр}}(t)$  заменяются на функции  $V_{\text{п зад}}(t)$ ,  $\theta_{\text{п тр}}(t)$ ,  $\Psi_{\text{п тр}}(t)$ , вычисляемые путем подстановки используемых зависимостей в формулы (4.3.4), (4.3.6), (4.3.7).

При моделировании движения БВ все дифференциальные уравнения должны быть представлены в стандартной форме, когда в их левых частях располагаются только производные  $\dot{V}$ ,  $\dot{\theta}$  и  $\dot{\Psi}$ . Решение этих уравнений осуществляется численными методами, описанными в Разд. 3.1.

В заключение главы отметим, что практическое использование разработанных моделей при программировании полетов БВ подразумевает обязательное получение персоналом вертолетного БАК от разработчика БВ аналитических (формульных) зависимостей:

- сил  $T_h$  и  $T_p$  от параметров полета, окружающей среды и углов  $\phi_{osh}$ ,  $\varphi_p$ ;
- балансировочных углов  $\chi_b$  и  $\eta_b$  от параметров полета БВ;
- коэффициента  $c_x = c_x(\alpha_n, V)$  силы вредного сопротивления БВ,
- числовых значений параметров  $D_h$ ,  $k_\alpha$ ,  $k_\gamma$ .

Другим условием успешного применения предложенных моделей является наличие в составе САУ БВ эффективного автопилота, осуществляющего стабилизацию по каналам скорости, тангажа и рыскания значений  $V(t)$ ,  $\theta(t)$  и  $\Psi(t)$  программного движения БВ, а также ликвидацию возникающего при его движении угла скольжения.

Как было указано в Главе 1, БЛА вертолетных схем при всех их преимуществах перед БЛА СС не получили к настоящему времени широкого применения на практике. Для ликвидации этого недостатка, на наш взгляд, необходимо выполнить комплекс работ по разработке конструкций различных видов и типов БВ и созданию пригодных для практического применения достаточно простых и адекватных математических моделей их управляемого движения.

## **Глава 7. МОДЕЛИ ДИНАМИКИ СТАРТА, ВЗЛЕТА И ПОСАДКИ БЛА**

Как известно, взлет и посадка является важнейшим этапом полета любого ЛА [13, 23, 27-30].

Анализ существующей литературы по БЛА [1, 2, 4, 5, 7, 15, 31] показал полное отсутствие моделей и методов расчета характеристик процессов старта, взлета и посадки БЛА самолетных (СС) и вертолетных (ВС) схем.

В Главе 1 отмечалось, что основная масса существующих БЛА СС осуществляет взлет с помощью мобильной стартовой установки, а легкие БЛА – с помощью резинового жгута или «рук» персонала БАК. Посадка таких БЛА производится с помощью бортовых парашютных систем.

В настоящее время наметилась устойчивая тенденция использования для взлета и посадки БЛА СС стационарных и временно создаваемых аэродромов.

В отечественных разработках имитационных и боевых БЛА СС начинает развиваться перспективное направление, связанное с применением их воздушного старта с носителей самолетного и вертолетного типов. В операциях с использованием таких БЛА не уничтоженные образцы в зависимости от глубины операции либо самоуничтожаются, либо осуществляют парашютную посадку в заданном районе.

Практика эксплуатации существующих БЛА ВС показала отсутствие программных режимов их взлета и посадки, что существенным образом снижает эффективность их применения.

В данной главе будут рассмотрены модели, описывающие различные виды старта, взлета и посадки БЛА СС и БЛА ВС при отсутствии и наличии ветровых возмущений, представленных произвольным вектором скорости действующего ветра  $\bar{W} = (w_x, w_y, w_z)$ .

Важность рассмотрения этих вопросов объясняется тем, что, как было отмечено в Главе 4, ветровые возмущения достигают максимальных значений в приземном слое на высотах до 50 м.

При описании процессов старта, взлета и посадки БЛА наряду с оригинальными математическими моделями используются модели их движения, представленные в Главах 5 и 6. Учет ветровых возмущений в этих процессах осуществляется с применением подхода, описанного в Главе 4. Интегрирование дифференциальных уравнений, входящих в модели старта, взлета и посадки БЛА, представленных в стандартной форме их записи вида (2.1.11), производится численными методами, приведенными в Разд. 3.1.

## **7.1. Модели старта БЛА с мобильной пусковой установки**

Будем считать, что БЛА осуществляет старт с использованием мобильной пусковой установки (МПУ), размещенной в точке  $O_{ст}$  с координатами  $(x_{ст}, y_{ст}, z_{ст})$  нормальной земной СК.

Применение соответствующим образом ориентированной стартовой СК, представленной на Рис. 1.9, позволяет моделировать движение БЛА в вертикальной плоскости МПУ  $x_{ст}y_{ст}$ .

Практика показала, что МПУ обычно реализуется на базе автомобильных шасси повышенной проходимости, на котором смонтированы направляющие, имеющие переменный угол наклона к горизонту (плоскости МПУ  $x_{ст}z_{ст}$ ).

Будем считать, что установка имеет направляющие длиной  $l_h$ , которые в момент времени  $t_0$  старта БЛА установлены под углом  $\theta_h$  к горизонту.

На этих направляющих с использованием специальных элементов (бугелей) размещается БЛА в предстартовом положении. На Рис. 7.1 представлены введенные выше размеры и силы, возникающие при взаимодействии бугелей и направляющих МПУ.

На этом рисунке параметр  $l_6$  описывает расстояние от начала направляющих до первого бугеля БЛА. При движении БЛА по направляющим возникают отмеченные на рисунке силы  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ , ... трения бугелей по направляющим и силы  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ , ... нормальных реакций [22], приложенные к имеющимся в составе фюзеляжа БЛА бугелям.

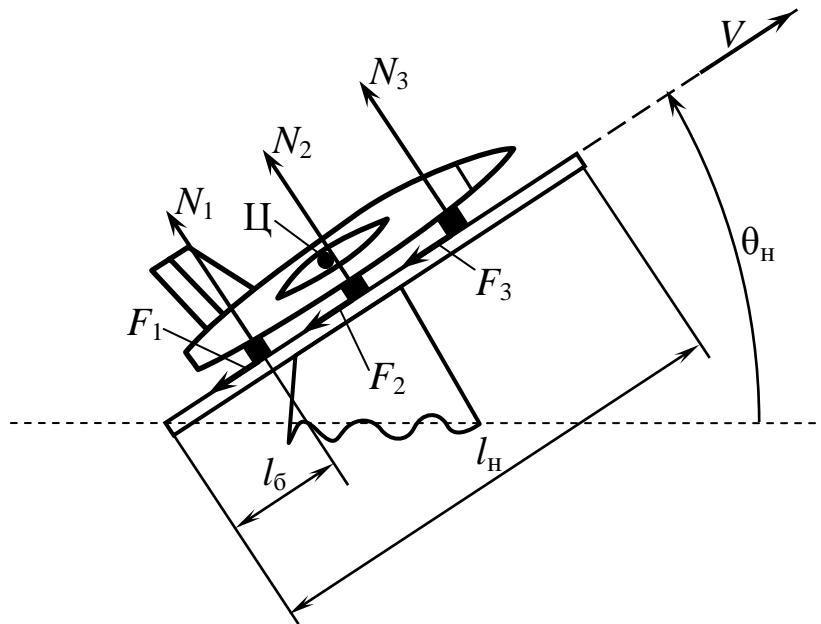


Рис. 7.1

Старт БЛА с МПУ выполняется следующими способами:

- 1) с использованием стартового ускорителя БЛА;
- 2) с использованием катапультного устройства, входящего в состав МПУ.

Рассмотрим первый способ старта БЛА, в котором для создания дополнительной тяги применяется твердотопливный стартовый двигатель (СД), подвешиваемый под углом  $\Phi_{СД}$  к фюзеляжу БЛА (см. Рис. 7.2,*a*).

На практике применяют и другой тип стартового двигателя, который имеет сопло, повернутое на угол  $\Phi_{СД}$ .

На Рис. 7.2,*a* представлено разложение силы тяги  $P_{СД}$  стартового двигателя на составляющие, приложенные к ЦМ БЛА.

Вид сзади на БЛА со СД, расположенным на направляющих МПУ, показан на Рис. 7.2,*б*.

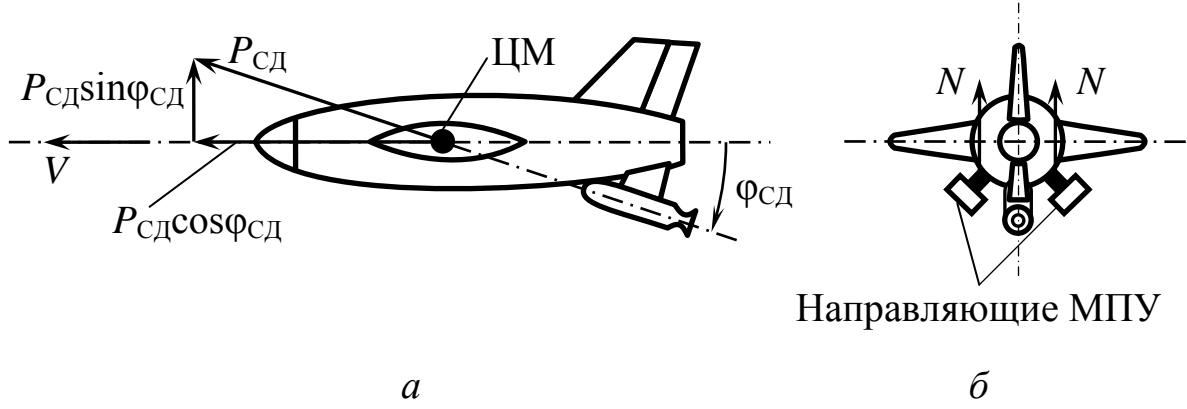


Рис. 7.2

Для рассматриваемого способа старта БЛА выделим следующие этапы взлета:

1. Движение БЛА по направляющим МПУ при действии сил тяги СД и маршевого двигателя (МД).
2. Движение БЛА на воздушном участке после схода с направляющих МПУ.
3. Сброс СД после выгорания его заряда и полет БЛА под действием силы тяги МД.

Моделирование этих этапов подразумевает описание движения БЛА как материальной точки переменной массы  $m(t)$  [22] с помощью системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Общий вид и подход к решению таких уравнений представлен выражениями (2.1.18)-(2.1.23). Согласно этому подходу и приведенным выше этапам взлета БЛА будем описывать его движение с использованием трех систем дифференциальных уравнений с различными правыми частями, соответствующими этапам 1-3, и взаимосвязанными начальными условиями.

В качестве базовой системы уравнений будем использовать модель движения БЛА в вертикальной плоскости (5.2.1)-(5.2.4), динамические уравнения которой представим в следующем виде:

$$m\dot{V} = P - X(\alpha, V) - mg \sin \theta; \quad (7.1.1)$$

$$mV\dot{\theta} = (\alpha + \varphi_{\text{дв}})P + Y(\alpha, V) - mg \cos \theta, \quad (7.1.2)$$

где  $P$  – сила тяги МД;  $\alpha$  – угол атаки БЛА.

При движении БЛА по направляющим МПУ (этап 1) эти уравнения преобразуются к виду:

$$m\dot{V}_1 = P_{СД} \cos \varphi_{СД} - F_{тр} + P - X(\alpha, V_1) - mg \sin \theta_h; \quad (7.1.3)$$

$$0 = P_{СД} \sin \varphi_{СД} + N + (\alpha + \varphi_{дв})P + Y(\alpha, V_1) - mg \cos \theta_h. \quad (7.1.4)$$

Здесь  $F_{тр}$  – суммарная сила трения бугелей БЛА и направляющих МПУ,  $N$  – суммарная сила нормальных реакций бугелей БЛА (см. Рис. 7.1,*a*).

Вид уравнения (7.1.4) определяется тем, что при  $\theta = \theta_h = \text{const}$  производная  $\dot{\theta} = 0$ .

Согласно Рис. 7.1, силы  $F_{тр}$  и  $N$  представляются как:

$$F_{тр} = \sum_{i=1}^n F_i; \quad N = \sum_{i=1}^n N_i, \quad (7.1.5)$$

где  $n$  – число бугелей рассматриваемого образца БЛА.

Связь этих сил в предположении, что все  $n$  бугелей имеют одинаковую конструкцию и изготовлены из одного материала, имеет вид [22]:

$$F_{тр} = fN, \quad (7.1.6)$$

где  $f$  – коэффициент трения материалов бугелей БЛА и направляющих МПУ.

Из уравнения (7.1.4) имеем, что

$$N = mg \cos \theta_h - P_{СД} \sin \varphi_{СД} - (\alpha + \varphi_{дв})P - Y(\alpha, V_1).$$

Подставляя правую часть этого выражения в формулу (7.1.6), получим:

$$F_{тр} = f(mg \cos \theta_h - P_{СД} \sin \varphi_{СД} - (\alpha + \varphi_{дв})P - Y(\alpha, V_1)).$$

С учетом этого уравнение (7.1.3) примет вид:

$$\begin{aligned} m\dot{V}_1 &= P_{СД}(\cos \varphi_{СД} + f \sin \varphi_{СД}) + P(1 + f(\alpha + \varphi_{дв})) - \\ &- X(\alpha, V_1) + fY(\alpha, V_1) - mg(\sin \theta_h + f \cos \theta_h). \end{aligned}$$

Используя известные представления аэродинамических сил:

$$X(\alpha, V) = 0,5c_x(\alpha, V)\rho V^2 S;$$

$$Y(\alpha, V) = 0,5c_y(\alpha, V)\rho V^2 S,$$

получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} m\dot{V}_1 &= P_{CD}(\cos \varphi_{CD} + f \sin \varphi_{CD}) + P(1 + f(\alpha + \varphi_{dB})) - \\ &- 0,5(c_x(\alpha, V_1) - fc_y(\alpha, V_1))\rho V_1^2 S - mg(\sin \theta_h + f \cos \theta_h). \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

Это дифференциальное уравнение, описывающее изменение скорости  $V_1(t)$  при движении БЛА по направляющим МПУ, должно интегрироваться при начальном условии:

$$V_1(t_0) = 0. \quad (7.1.8)$$

Длина пути  $L(t)$ , пройденного БЛА по направляющим со скоростью  $V_1 = V_1(t)$ , определяется дифференциальным уравнением [22]:

$$\dot{L} = V_1 \quad (7.1.9)$$

и начальным условием (см. Рис. 7.1,*a*) вида:

$$L(t_0) = l_0. \quad (7.1.10)$$

Условие схода БЛА с направляющих МПУ, фиксирующее завершение этапа 1 в момент времени  $t_1$ , записывается как:

$$L(t_1) = l_h - l_0. \quad (7.1.11)$$

Изменение координат ЦМ БЛА на этом этапе описываются уравнениями вида:

$$\dot{x}_1 = V_1 \cos \theta_h; \quad \dot{y}_1 = V_1 \sin \theta_h \quad (7.1.12)$$

с начальными условиями:

$$x_1(t_0) = x_0; \quad y_1(t_0) = y_0, \quad (7.1.13)$$

где  $(x_0, y_0)$  – координаты ЦМ БЛА, установленного на направляющих МПУ в стартовой СК.

Скорость и координаты ЦМ БЛА в момент времени  $t_1$ :

$$V_1(t_1) = V_{11}; \quad x_1(t_1) = x_{11}; \quad y_1(t_1) = y_{11} \quad (7.1.14)$$

определяются как результаты интегрирования уравнений (7.1.7), (7.1.9), (7.1.12) с начальными условиями (7.1.8), (7.1.10), (7.1.13) и применения условия (7.1.11).

Отметим, что решение этой задачи осуществляется при следующих исходных данных:

$$m = m(t); \quad P_{\text{СД}} = \text{const}; \quad P = P_{\max}; \quad \alpha = 0.$$

Уравнение, описывающее изменение скорости  $V(t)$  на этапе 2, который начинается в момент времени  $t_1$ , получается из решения уравнения (7.1.7) при  $f=0$ . Это означает, что при сходе БЛА с направляющих МПУ прекращается действие сил  $F$  и  $N$  и начинается воздушный участок старта БЛА.

Таким образом, первое уравнение модели этого этапа принимает вид:

$$m\dot{V}_2 = P_{\text{СД}} \cos \varphi_{\text{СД}} + P - 0,5c_x(\alpha, V_2)\rho V_2^2 S - mg \sin \theta_2. \quad (7.1.15)$$

Для данного этапа уравнение (7.1.2) с учетом Рис. 7.2,*a* записывается как:

$$\begin{aligned} mV_2 \dot{\theta}_2 &= P_{\text{СД}} \sin \varphi_{\text{СД}} + (\alpha + \varphi_{\text{дв}})P + \\ &+ 0,5c_y(\alpha, V_2)\rho V_2^2 S - mg \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

Координаты ЦМ БЛА определяются путем решения следующих уравнений:

$$\dot{x}_2 = V_2 \cos \theta_2; \quad \dot{y}_2 = V_2 \sin \theta_2. \quad (7.1.17)$$

Начальные условия для системы уравнений (7.1.15)-(7.1.17) с использованием заданного значения  $\theta_n$  и ранее вычисленных значений (7.1.14) имеют вид:

$$V_2(t_1) = V_{11}; \quad \theta_2(t_1) = \theta_n; \quad x_2(t_1) = x_{11}; \quad y_2(t_1) = y_{11}. \quad (7.1.18)$$

Момент времени  $t_2$  завершения этапа 2 определяется моментом времени окончания работы СД.

В работе [2] приведены следующие характеристики СД:

$m_k$  – масса конструкции двигателя;

$m_{30}$  – начальная масса заряда СД;

$\mu$  – массовая скорость горения заряда;

$\tau$  – время работы СД.

Текущее значение массы СД будем описывать следующей зависимостью:

$$m_{\text{СД}}(t) = m_{\kappa} + m_{30} - \mu(t - t_0), \quad t \in [t_0, t_0 + \tau]. \quad (7.1.19)$$

При  $t = t_0 + \tau$  вследствие того, что

$$\mu\tau = m_{30},$$

получаем:

$$m_{\text{СД}}(t_0 + \tau) = m_{\kappa}.$$

С учетом выражения (7.1.19) переменную массу  $m$ , использованную в уравнении (7.1.7), представим как:

$$m(t) = m_{\text{БЛА}} + m_{\kappa} + m_{30} - \mu(t - t_0), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (7.1.21)$$

При этом в момент времени  $t_1$  по завершении этапа 1 масса оставшегося заряда СД составит величину:

$$\Delta m_3(t_1) = m_{30} - \mu(t_1 - t_0). \quad (7.1.21)$$

Этот заряд полностью выгорит в момент времени  $t_2$ , определяемый как:

$$t_2 = t_1 + \frac{\Delta m_3(t_1)}{\mu}. \quad (7.1.22)$$

В уравнениях (7.1.15) и (7.1.16) переменная масса БЛА с использованием выражения (7.1.21) должна вычисляться по формуле:

$$m(t) = m(t_1) - \mu(t - t_1), \quad t \in [t_1, t_2]. \quad (7.1.23)$$

При этом имеем, что

$$m(t_2) = m_{\text{БЛА}} + m_{\kappa}. \quad (7.1.24)$$

Таким образом, моделирование движения БЛА на этапе 2 осуществляется путем интегрирования на интервале времени  $[t_1, t_2]$  системы уравнений (7.1.15)-(7.1.17) с начальными условиями (7.1.18), где момент времени  $t_2$  определяется с помощью выражений (7.1.21) и (7.1.22).

По результатам интегрирования вычисляются значения:

$$V_2(t_2) = V_{22}; \quad \theta_2(t_2) = \theta_{22}; \quad x_2(t_2) = x_{22}; \quad y_2(t_2) = y_{22}, \quad (7.1.25)$$

используемые для формирования начальных условий для системы уравнений:

$$\begin{aligned} m\dot{V}_3 &= P - 0,5c_x(\alpha, V_3)\rho V_3^2 S - mg \sin \theta_3; \\ mV_3\dot{\theta}_3 &= (\alpha + \varphi_{\text{дв}})P + 0,5c_y(\alpha, V_3)\rho V_3^2 S - mg \cos \theta_3; \\ \dot{x}_3 &= V_3 \cos \theta_3; \quad \dot{y}_3 = V_3 \sin \theta_3, \end{aligned} \quad (7.1.26)$$

которая описывает движение БЛА на этапе 3 после сброса СД.

Начальные условия для этой системы с учетом (7.1.25) конкретизируются как:

$$V_3(t_2) = V_{22}; \quad \theta_3(t_2) = \theta_{22}; \quad x_3(t_2) = x_{22}; \quad y_3(t_2) = y_{22}. \quad (7.1.27)$$

Заметим, что в этой модели  $m = m_{\text{БЛА}} = \text{const}$ .

Этап 3 завершается в момент времени  $t_3$ , в который БЛА достигнет заданных значений воздушной скорости и высоты полета. Условия завершения этого этапа представим как

$$V_3(t_3) = V_{\text{зад}}; \quad y_3(t_3) = h_{\text{зад}}. \quad (7.1.28)$$

Таким образом, моделирование этапа 3 взлета БЛА состоит в интегрировании системы уравнений (7.1.25) с начальными условиями (7.1.27) до выполнения условий (7.1.28). При этом полученные значения  $V_{33} = V_{33}(t_3); \quad \theta_{33} = \theta_3(t_3); \quad x_{33} = x_3(t_3); \quad y_{33} = y_3(t_3)$  фазовых координат БЛА используются в качестве начальных условий (5.2.5) модели (5.2.1)-(5.2.4), применяемой для программирования его движения в зону выполнения полетного задания.

Заметим, что практика моделирования взлета БЛА с использованием СД показала зависимость значений фазовых координат БЛА на этапах 1-3 от температуры воздуха на стартовой позиции. В частности, значения  $y_2(t_2)$  и  $V_2(t_2)$  отличаются соответственно на  $-17\%$ ,  $+3\%$  при  $t^\circ = -50^\circ\text{C}$  и  $+10\%$ ,  $-1\%$  при  $t^\circ = +50^\circ\text{C}$  по сравнению с такими значениями при  $t^\circ = 15^\circ\text{C}$ .

Анализ отклонений проводился при учете влияния температуры заряда на тягу стартового двигателя. Эти отклонения

могут быть более значительными при учете влияния числа  $M$ , точнее скорости звука, определяемого по формуле [28]:

$$a = \sqrt{kgRT} = 20,0468\sqrt{T},$$

на значения аэродинамических коэффициентов  $c_x(\alpha, M)$ ,  $c_y(\alpha, M)$  и тяги  $P(M)$  маршевого двигателя БЛА.

При катапультном старте БЛА сила тяги МД, установленного на направляющих МПУ БЛА, которая в момент времени  $t_0$  равна  $P_{\max}$ , увеличивается путем действия дополнительной толкающей силы  $P_k(t)$ , создаваемой катапультным устройством МПУ в течение короткого промежутка времени  $\tau_k$ .

При численном моделировании данного способа старта можно использовать приближенное представление силы  $P_k(t)$ , показанное на Рис. 7.3.

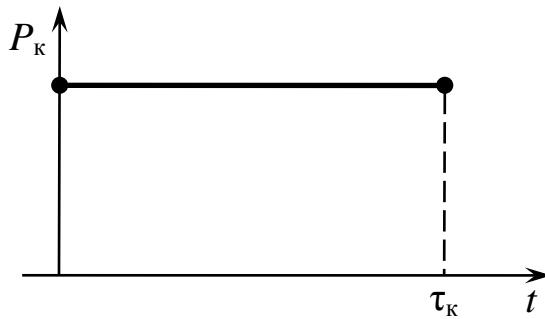


Рис. 7.3

Данный способ старта БЛА включает в себя два этапа:

1. Движение БЛА по направляющим МПУ под действием суммарной силы  $(P_{\max} + P_k(t))$ ,  $t \in [t_0, t_0 + \tau_k]$ .
2. Движение БЛА на воздушном участке взлета после схода с направляющих МПУ.

По аналогии с предыдущим способом старта модель этапа 1 может быть представлена следующими выражениями:

$$\begin{aligned} m\dot{V}_1 &= (1 + f(\alpha + \varphi_{\text{дв}}))(P_{\max} + P_k(t)) - \\ &- 0,5(c_x(\alpha, V_1) - f c_y(\alpha, V_1))\rho V_1^2 S - \\ &- mg(\sin \theta_H + f \cos \theta_H); \end{aligned} \quad (7.1.29)$$

$$L = \dot{V}_1; \quad \dot{x}_1 = V_1 \cos \theta_H; \quad \dot{y}_1 = V_1 \sin \theta_H.$$

Начальные условия для этой системы дифференциальных уравнений имеют вид:

$$V_1(t_0) = 0; \quad L(t_0) = l_6; \quad x_1(t_0) = x_0; \quad y_1(t_0) = y_0. \quad (7.1.30)$$

Момент времени  $t_1$  завершения этапа 1 определяется условием:

$$L(t_1) = l_{\text{н}} - l_6.$$

После решения задачи Коши (7.1.29), (7.1.30) с учетом этого условия фиксируются значения:

$$V_1(t_1) = V_{11}; \quad x_1(t_1) = x_{11}; \quad y_1(t_1) = y_{11},$$

которые используются в составе начальных условий модели этапа 2.

Динамические уравнения этой модели по аналогии с выражениями (7.1.15), (7.1.16) записываются как:

$$\begin{aligned} m\dot{V}_2 &= P - 0,5c_x(\alpha, V_2)\rho V_2^2 S - mg \sin \theta_2; \\ mV_2 \dot{\theta}_2 &= (\alpha + \varphi_{\text{дв}})P + 0,5c_y(\alpha, V_2)\rho V_2^2 S - mg \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (7.1.31)$$

В качестве кинематических уравнений и начальных условий модели используются выражения (7.1.17) и (7.1.18).

Момент времени  $t_2$  завершения этапа 2 старта БЛА определяется из условий:

$$V_2(t_2) = V_{\text{зад}}; \quad y_2(t_2) = h_{\text{зад}}.$$

Заметим, что на воздушных участках старта БЛА в качестве косвенного управления используется функция  $\alpha = \alpha(t)$ .

При наличии действующего в районе стартовой позиции ветра, описываемого произвольным вектором  $\bar{W} = (w_x, w_y, w_z)$ , значения фазовых координат  $V(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$  должны быть откорректированы с использованием метода, описанного в Разд. 4.3.

Будем считать, что БЛА наибольшим образом подвержен воздействию ветровых возмущений на этапе 3 старта с помощью СД и на этапе 2 старта с использованием катапультного устройства МПУ.

Тогда для первого способа старта при численном решении задачи Коши (7.1.26), (7.1.27) для каждого момента времени  $t \in [t_2, t_3]$  с использованием формул (4.3.4), (4.3.6), (4.3.7) вычисляются «путевые» фазовые координаты  $V_{\pi}(t)$ ,  $\theta_{\pi}(t)$ ,  $\Psi_{\pi}(t)$ , которые участвуют в интегрировании уравнений:

$$\dot{x}_{\pi} = V_{\pi} \cos \theta_{\pi} \cos \Psi_{\pi}; \quad \dot{y}_{\pi} = V_{\pi} \sin \theta_{\pi}; \quad \dot{z}_{\pi} = V_{\pi} \cos \theta_{\pi} \sin \Psi_{\pi}. \quad (7.1.32)$$

Заметим, что в связи с использованием стартовой СК в выражениях (4.3.4), (4.3.6) и (4.3.7) необходимо использовать значение угла  $\Psi(t) = 0$ . Однако, при  $w_z \neq 0$  получаем из выражения (4.3.7) ненулевые значения функции  $\Psi_{\pi}(t)$ . Последнее говорит о пространственном характере траектории старта БЛА с МПУ при наличии ветра. Координаты такой возмущенной траектории получаются в результате интегрирования уравнений (7.1.32).

Аналогичным образом в модель (7.1.31), (7.1.17), (7.1.18) второго способа старта БЛА добавляются соотношения (4.3.4), (4.3.6), (4.3.7), (7.1.32).

При численном моделировании старта БЛА при действии ветровых возмущений используется алгоритм, представленный на Рис. 4.7.

В связи с тем, что при достаточно больших значениях сил  $P_{\text{сд}}$ ,  $P_k$  и  $P_{\max}$  угол  $\theta(t)$  будет незначительно отличаться от  $\theta_h$ , для вычисления значений  $V_{\pi}(t)$ ,  $\theta_{\pi}(t)$  и  $\Psi_{\pi}(t)$  в этом алгоритме можно использовать упрощенные формулы вида (4.3.8).

На указанных выше этапах старта используются уравнения (5.1.16)-(5.1.18), и в состав вектора косвенного управления БЛА добавляется закон изменения угла крена  $\gamma(t)$ . При этом целью формирования законов управления  $\alpha(t)$  и  $\gamma(t)$  является компенсация (парирование) действующих на БЛА ветровых возмущений.

## 7.2. Модель процесса парашютной посадки БЛА

Рассмотрим вопросы моделирования процесса парашютной посадки БЛА, который в настоящее время является основным

способом завершения их полетов. Заметим, что изложение данных вопросов практически отсутствует в литературе, посвященной вопроса эксплуатации БЛА.

Будем считать, что в типовую систему парашютной посадки (СПП) БЛА входят следующие элементы:

- вытяжной парашют (ВП);
- основной парашют (ОП);
- метательный (пиротехнический) заряд (МЗ);
- контейнер для размещения ВП и ОП.

Процесс парашютной посадки БЛА разбивается на следующие основные этапы:

1. Выброс с помощью МЗ контейнера СПП после получения соответствующей команды от САУ БЛА, выход в поток и наполнение ВП.
2. Вытягивание купола и строп ОП на всю длину.
3. Наполнение купола ОП до площади ограниченной его рифовкой.
4. Снижение БЛА на зарифованном куполе ОП.
5. Разрифовка и наполнение до полной площади купола ОП.
6. Снижение БЛА на полном куполе ОП, приземление и отцепка ОП от БЛА.

В общем случае выброс ВП и ОП СПП осуществляется под определенным углом к осям БЛА. Например, для одного из типов средних БЛА отстрел ОП производится под углом  $135^\circ$  к его продольной оси или  $45^\circ$  к вертикальной оси связанной СК БЛА.

Реализация отмеченных выше этапов 1-6 существенным образом связана с динамикой применяемой СПП БЛА.

Вопросам динамики парашютных систем посвящено значительное число работ, которые в основном ориентированы на исследование процессов движения различных видов парашютов и их проектирование [40, 41].

Рассмотрим, следуя работе [40], основные понятия динамики системы «груз-парашют» (СГП).

В динамике СГП используют скоростьную, связную и земную СК с началом в точке, где сходятся стопы парашюта («коуш» строп).

Для описания движения СГП используются принятые в динамике полета ЛА углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\vartheta$ ,  $\psi$  и  $\gamma$  [82]. В общем случае, проекциями результирующей аэродинамической силы  $R$  системы на оси ее скоростной СК будут сила лобового сопротивления  $X_{\text{п}}$ , подъемная  $Y_{\text{п}}$  и боковая  $Z_{\text{п}}$  силы, действующие на парашют.

Первая из них, имеющая основное значение при эксплуатации СГП, представляется формулой вида:

$$X_{\text{п}} = c_{\text{п}} F_{\text{п}} \frac{\rho V^2}{2}. \quad (7.2.1)$$

Здесь  $c_{\text{п}}$  – коэффициент сопротивления парашюта;  $F_{\text{п}}$  – площадь купола;  $\rho$  – плотность воздуха;  $V$  – скорость набегающего потока воздуха.

В работе [40] описание движения СГП начинается с момента раскрытия купола системы и заканчивается моментом касания груза с грунтом.

В ней рассматриваются модели СГП как твердого тела «купол + стропы + груз», аналогичные уравнениям движения ЛА [13]. Приводятся уравнения движения системы со свободным соединением парашюта с грузом, который может колебаться относительно «коуша» и вращаться вокруг оси, проходящей через «коуш» и ЦМ груза.

Эта модель представляет собой систему нелинейных уравнений 9-го порядка с фазовыми координатами ( $\psi_{\text{п}}, \vartheta_{\text{п}}, \gamma_{\text{п}}, \psi_{\text{г}}, \vartheta_{\text{г}}, \gamma_{\text{г}}, x, y, z$ ), описывающими положение в пространстве парашюта ( $\Pi$ ) и груза ( $\Gamma$ ).

Как частные случаи движения СГП рассматриваются модели пространственного и плоского движения ЦМ груза с исполь-

зованием введенных понятий безинерционного и инерционного парашютов, а также парашютов с аэродинамическим качеством. При этом считается, что парашют СГП можно считать безинерционным объектом, если масса груза много больше его массы и массы воздуха под куполом. Доказывается, что устойчивыми движениями ЦМ груза при отсутствии ветра являются траектории снижения с практически нулевыми значениями углов  $\psi_n$ ,  $\vartheta_n$ ,  $\gamma_n$ , переходящие в его вертикальный спуск. Это позволяет использовать на практике модель продольного движения системы «груз-парашют».

В работе [41] отмечается важность для динамики движения СГП приемлемого практического описания процессов наполнения используемых в системе парашютов.

В процессе наполнения парашюта изменяются параметры  $c_n$  и  $F_n$ , входящие в формулу (7.2.1). В работе вводится понятие эффективной площади сопротивления парашюта:

$$\Phi = c_n F_n \quad (7.2.2)$$

и предлагается следующая эмпирическая зависимость ее изменения во времени:

$$\Phi(t) = at^k, \quad t \in [0, \tau], \quad (7.2.3)$$

где  $a$ ,  $k$  – эмпирические коэффициенты;  $\tau$  – время полного наполнения парашюта.

На основании закона непрерывности парашюты должны раскрываться на определенной длине, так как для наполнения купола требуется заданный конический столб воздуха впереди купола. Эта длина пропорциональна номинальному диаметру  $D_n$  парашюта. В работе [42] для определения времени  $\tau$  приводится формула вида:

$$\tau = \frac{nD_n}{V}, \quad (7.2.4)$$

где  $n$  – коэффициент пропорциональности, характерный для каждого типа парашюта.

Этот коэффициент по результатам испытаний одного из видов СГП при наполнении зарифованного парашюта принимает значения, равные 10-12. При его наполнении после разрифовки  $n = 1,8-2$  [41].

В конце процесса наполнения парашюта, то есть при  $t = \tau$ , величина, определяемая выражением (7.2.2), принимает максимальное значение, равное  $\Phi_{\max}$ .

Тогда из формулы (7.2.3) имеем, что

$$a = \frac{\Phi_{\max}}{\tau^k}.$$

Отметим, что значения  $\Phi_{\max}$  и коэффициента  $k$  конкретной СГП должно определяться на основе ее продувки в аэродинамической трубе или при летных испытаниях системы.

В работе [41] приводится значение  $k = 1,6-2,4$  для рассматриваемой СГП.

При наличии рифовки у рассматриваемого парашюта выражение (7.2.3) принимает вид:

$$\Phi(t) = \Phi_p + (\Phi_{\max} - \Phi_p) \left( \frac{t}{\tau} \right)^k, \quad t \in (0, \tau),$$

где  $\Phi_p$  – эффективная площадь сопротивления заполненного зарифованного парашюта.

Для дальнейшего использования включим в состав этого выражения правую часть формулы (7.2.4). В этом случае имеем:

$$\Phi(t, V) = \Phi_p + (\Phi_{\max} - \Phi_p) \left( \frac{tV}{nD_{\text{ОП}}} \right)^k. \quad (7.2.5)$$

Отметим, что при использовании в СПП БЛА незарифованного ОП в формуле (7.2.5) необходимо положить  $\Phi_p = 0$ .

Таким образом, с учетом соотношений (7.2.1), (7.2.2) и (7.2.5) получаем выражение:

$$X_{\pi} = 0,5\Phi(t, V)\rho_0 V^2, \quad (7.2.6)$$

описывающее зависимость силы сопротивления парашюта от времени и скорости набегающего потока воздуха. При этом из-за относительно небольших значений высоты  $h$  плотность воздуха  $\rho$  рассматривается при  $h = 0$ .

Моделирование парашютной посадки БЛА будем проводить при следующих предположениях:

- применяемые в СПП парашюты являются безинерционными объектами;
- все действующие в процессе посадки силы приведены к ЦМ БЛА;
- движение БЛА в процессе посадки рассматривается как движение его ЦМ в вертикальной плоскости.

Целью моделирования является прогнозирование места приземления БЛА, в том числе при действии ветра в районе посадки.

Пусть в момент времени  $t_0$  начала процесса посадки БЛА имел следующие значения фазовых координат ( $V_{\text{пос}}$ ,  $\theta_{\text{пос}}$ ,  $\Psi_{\text{пос}}$ ,  $x_{\text{пос}}$ ,  $y_{\text{пос}}$ ,  $z_{\text{пос}}$ ).

В связи с тем, что плановая посадка БЛА проводится обычно в районе его стартовой позиции, при моделировании будем использовать стартовую СК, представленную на Рис. 1.9, повернутую относительно оси МНПУ  $x_g$  на угол  $\Psi_{\text{пос}}$  так, чтобы значение  $z_{\text{пос}} = 0$ .

В процессе посадки на БЛА будут действовать следующие силы:

$X$  – сила лобового сопротивления БЛА;

$X_{\pi}$  – сила сопротивления парашютов;

$G$  – сила тяжести БЛА.

Проекции этих сил на скоростную СК БЛА приведены на Рис. 7.4.

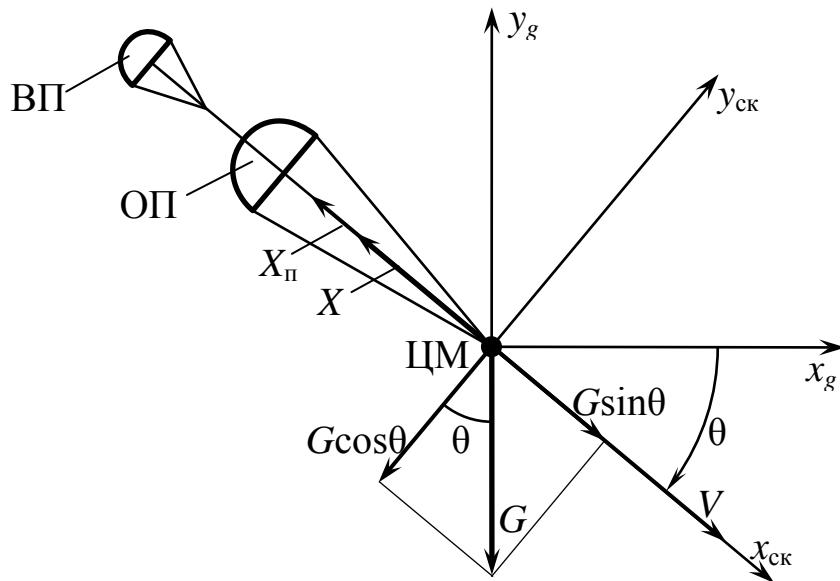


Рис. 7.4

Будем считать, что в процессе посадки БЛА угол  $\theta$  принимает отрицательные значения, как это показано на приведенном рисунке.

Из Рис. 7.4 следует, что общие уравнения движения ЦМ БЛА в процессе посадки имеют вид:

$$m\dot{V} = -G \sin \theta - X - X_{\pi}; \quad (7.2.7)$$

$$mV\dot{\theta} = G \cos \theta; \quad (7.2.8)$$

$$\dot{x} = V \cos \theta; \quad \dot{y} = V \sin \theta, \quad (7.2.9)$$

где  $m$  – масса БЛА в момент начала процесса посадки.

Начальные условия для этой системы уравнений записываются следующим образом:

$$V(t_0) = V_{\text{пос}}; \quad \theta(t_0) = \theta_{\text{пос}}; \quad x(t_0) = x_{\text{пос}}; \quad y(t_0) = y_{\text{пос}}. \quad (7.2.10)$$

Проведем анализ построенной модели (7.2.7)-(7.2.10).

Начальное значение угла  $\theta = \theta_{\text{пос}} \leq 0$ . При этом  $\theta_{\text{пос}} = 0$  для случая начала посадки БЛА из режима его горизонтального полета и  $\theta_{\text{пос}} < 0$  – из режима снижения БЛА.

В связи с тем, что

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta,$$

первое слагаемое в уравнении (7.2.7) будет положительным. Это указывает на то, что основной «движущей» силой при посадке БЛА будет сила  $G \sin \theta$  (см. Рис. 7.4).

Вместе с тем, во втором уравнении из состава (7.2.9) производная  $\dot{y}(t)$  будет отрицательна, то есть высота полета  $y(t)$  будет убывающей функцией.

Аналогично при выполнении естественного условия реализации парашютной посадки:

$$X + X_{\pi} > |G \sin \theta|,$$

производная  $\dot{V}$  из уравнения (7.2.7) будет отрицательна. Это означает, что значение скорости  $V(t)$  будет также убывающей функцией времени.

Покажем, что предельным значением угла  $\theta(t)$  будет значение  $(-\pi/2)$ .

Считая, что  $G = mg$ , перепишем уравнение (7.2.8) в следующей форме:

$$\frac{\dot{\theta}}{\cos \theta} = \frac{g}{V}.$$

В процессе парашютной посадки скорость  $V(t) \rightarrow 0$ , то есть правая часть этого равенства стремится к бесконечности. В этом случае при  $\dot{\theta} \neq 0$  знаменатель левой части должен стремиться к нулю. Известно, что  $\cos \theta = 0$  при  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ . Отсюда с учетом Рис. 7.4 следует, что с уменьшением скорости снижения БЛА угол  $\theta(t)$  будет стремиться к значению  $(-\pi/2)$ , а траектория его движения – к режиму вертикального спуска.

Уравнения такого режима получаются из модели (7.2.7)–(7.2.9) при  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  и имеют вид:

$$m\dot{V} = G - X - X_{\pi}; \quad \dot{y} = -V.$$

При конкретизации общей модели (7.2.7)-(7.2.10) будем рассматривать следующие непосредственные этапы парашютной посадки БЛА:

1. Ввод в действие ВП и вытягивание им ОП.
2. Наполнение ОП.
3. Спуск и приземление БЛА на ОП.

В связи с тем, что каждый из этих этапов занимает определенный интервал времени посадки БЛА, функция  $X_{\Pi}(t)$ , входящая в правую часть уравнения (7.2.7), будет разрывной функцией вида:

$$X_{\Pi}(t) = \begin{cases} X_{\text{ВП}}(t), & t \in [t_0, t_1); \\ X_{\text{НОП}}(t), & t \in [t_1, t_2); \\ X_{\text{ОП}}(t), & t \in [t_2, t_3]. \end{cases}$$

Здесь  $X_{\text{ВП}}(t)$  – сила сопротивления ВП;  $t_1 = t_0 + \tau_{\text{ВОП}}$  – момент окончания процесса вытягивания ОП, который занимает время, равное  $\tau_{\text{ВОП}}$ ;  $X_{\text{НОП}}(t)$  – сила сопротивления в процессе наполнения ОП, который заканчивается в момент времени  $t_2$ ;  $X_{\text{ОП}}(t)$  – сила сопротивления наполненного ОП, которая действует до момента времени  $t_3$  приземления БЛА.

Как было указано в Разд. 2.1, разрывную систему (7.2.7)-(7.2.9) сведем к трем системам дифференциальных уравнений с взаимосвязанными начальными условиями, каждая из которых описывает соответствующий этап посадки БЛА.

Модель процесса посадки БЛА на этапе 1, сформированная на основе преобразованных уравнений (7.2.7)-(7.2.9), имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -g \sin \theta_1 - \left( c_x^*(V) S + \Phi_{\text{ВП}} \right) \frac{\rho_0 V_1^2}{2m}; \\ \dot{\theta}_1 &= \frac{g \cos \theta_1}{V_1}; \\ \dot{x}_1 &= V_1 \cos \theta_1; \quad \dot{y}_1 = V_1 \sin \theta_1. \end{aligned} \tag{7.2.11}$$

Здесь  $c_x^*(V)$  – коэффициент лобового сопротивления БЛА в процессе его бездвигательного снижения при скорости  $V$ ;  $S$  – характерная площадь БЛА при его спуске на ВП;  $\Phi_{\text{ВП}}$  – эффективное сопротивление ВП, определяемое выражением (7.2.2).

Начальные условия для системы (7.2.11) задаются с учетом (7.2.10) как:

$$V_1(t_0) = V_{\text{пос}} ; \quad \theta_1(t_0) = \theta_{\text{пос}} ; \quad x_1(t_0) = x_{\text{пос}} ; \quad y_1(t_0) = y_{\text{пос}} . \quad (7.2.12)$$

Для определения момента времени  $t_1$  окончания этапа 1 опишем процесс вытягивания ОП общей массой  $m_{\text{ОП}}$  и длиной  $l_{\text{ОП}}$  с помощью силы  $X_{\text{ВП}}(t)$  дифференциальным уравнением 2-го порядка:

$$m_{\text{ОП}} \ddot{L} = X_{\text{ВП}}(t), \quad (7.2.13)$$

построенного с использованием модели динамики точки переменной массы [22].

Начальные условия для этого уравнения имеют вид:

$$L(t_0) = L_0 ; \quad \dot{L}(t_0) = 0.$$

В приведенном уравнении использованы следующие обозначения:  $L = L(t)$  – длина вытянутой в момент времени  $t$  части ОП;  $m_{\text{ОП}} = m_{\text{ОП}}(L)$  – масса вытянутой в этот момент времени части ОП длиной  $L$ . Для построения приближенного вида зависимости  $m_{\text{ОП}}(L)$  вытягиваемый ОП будем считать жгутом цилиндрической формы со средним диаметром  $d$  и средней плотностью его материала  $\mu = 0,5(\mu_k + \mu_c)$ , где  $\mu_k$  и  $\mu_c$  соответственно плотности материалов купола и строп ОП.

Тогда массу ОП, вытянутого на длину  $L$ , можно приблизенно вычислить по формуле:

$$m_{\text{ОП}}(L) = \frac{\pi \mu d^2}{4} L. \quad (7.2.14)$$

Используя выражение:

$$X_{\text{ВП}}(t) = \frac{\Phi_{\text{ВП}} \rho_0 V_1^2(t)}{2}$$

и формулу (7.2.14), запишем уравнение (7.2.13) в виде системы двух уравнений 1-го порядка:

$$\dot{L} = l; \quad \dot{l} = \frac{2\Phi_{\text{ВП}}\rho_0 V_1^2}{\pi\mu d^2 L} \quad (7.2.15)$$

с начальными условиями:

$$L(t_0) = L_0, \quad l(t_0) = 0. \quad (7.2.16)$$

Тогда момент времени  $t_1$  будет определяться из условия:

$$L(t_1) = l_{\text{оп}}. \quad (7.2.17)$$

Таким образом, движение на этапе 1 посадки БЛА описывается на интервале времени  $[t_0, t_1]$  дифференциальными уравнениями (7.2.11), (7.2.15) с начальными условиями (7.2.12) и (7.2.16).

Этап 2 посадки БЛА представляется уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -g \sin \theta_2 - \left( c_x^*(V_2) S + \Phi_{\text{оп}}(t, V_2) \right) \frac{\rho_0 V_2^2}{2m}; \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{g \cos \theta_2}{V_2}; \quad \dot{x}_2 = V_2 \cos \theta_2; \quad \dot{y}_2 = V_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (7.2.18)$$

с начальными условиями:

$$V_2(t_1) = V_1(t_1); \quad \theta_2(t_1) = \theta_1(t_1); \quad x_2(t_1) = x_1(t_1); \quad y_2(t_1) = y_1(t_1). \quad (7.2.19)$$

Здесь в первом уравнении используется зависимость вида (7.2.6) при  $V = V_2$ .

Эту зависимость будем использовать для определения момента времени  $t_2$  завершения рассматриваемого этапа посадки БЛА.

Данный момент времени характеризуется полным наполнением ОП, которое описывается равенством:

$$\Phi_{\text{оп}}(t_2, V_2) = \Phi_{\text{max}}.$$

Из выражения (7.2.5) следует, что данное равенство будет выполнено при условии, что

$$\frac{t_2 V_2(t_2)}{n D_{\text{оп}}} = 1.$$

Отсюда искомый момент времени  $t_2$  определяется при выполнении равенства:

$$V_2(t_2) = \frac{n D_{\text{оп}}}{t_2}. \quad (7.2.20)$$

На этапе 3 применяется модель вида:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= -g \sin \theta_3 - \left( c_x^*(V_3) S + \Phi_{\max} \right) \frac{\rho_0 V_3^2}{2m}; \\ \dot{\theta}_3 &= \frac{g \cos \theta_3}{V_3}; \quad \dot{x}_3 = V_3 \cos \theta_3; \quad \dot{y}_3 = V_3 \sin \theta_3; \end{aligned} \quad (7.2.21)$$

$$V_3(t_2) = V_2(t_2); \quad \theta_3(t_2) = \theta_2(t_2); \quad x_3(t_2) = x_2(t_2); \quad y_3(t_2) = y_2(t_2). \quad (7.2.22)$$

Система уравнений (7.2.21) интегрируется при начальных условиях (7.2.22) до момента времени  $t_3$ , который определяется из условия приземления БЛА вида:

$$y_3(t_3) = 0. \quad (7.2.23)$$

При этом в используемой СК расчетная точка приземления БЛА определяется координатой:

$$x_{\text{пр}} = x_3(t_3). \quad (7.2.24)$$

Заметим, что при отсутствии зависимости  $c_x^*(V)$ , которая должна определяться по результатам продувок в аэродинамических трубах БЛА с имитацией его парашютной посадки, в уравнениях (7.2.11), (7.2.18) и (7.2.21) можно использовать предположение, что  $c_x^*(V) = 0$ , как это сделано в работе [41].

Предложенная выше модель посадки БЛА с использованием СПП применяется при отсутствии ветра в районе посадки.

При учете действия ветровых возмущений на процесс парашютной посадки будем использовать подход, изложенный в Разд. 4.3.

Отметим, что теоретические вопросы воздействия таких возмущений на систему «груз-парашют» рассматривались в работе [40], но в ней отсутствует конкретная методика определения места посадки груза при действии ветра.

Пусть в районе посадки БЛА действуют ветровые возмущения с произвольным вектором скорости  $\bar{W} = (w_x, w_y, w_z)$ .

Как было отмечено выше, при  $w_z \neq 0$  продольное движение БЛА превращается в пространственное за счет ненулевых значений путевого угла  $\Psi_{\text{п}}$  поворота его траектории (см. выражение (4.3.7)).

При моделировании посадки БЛА при действии ветра с использованием представленных выше моделей будем рассматривать общий случай, когда все компоненты вектора скорости действующего ветра имеют ненулевые значения, то есть  $w_x \neq 0, w_y \neq 0, w_z \neq 0$ .

На этапе 1 перед интегрированием первых двух уравнений системы (7.2.11) производится расчет начальных значений  $V_{1\text{п}}(t_0)$  и  $\theta_{1\text{п}}(t_0)$  путем подстановки в правые части формул (4.3.4), (4.3.6) значений  $V_{\text{пос}}, \theta_{\text{пос}}, \Psi = 0$ . После этого проводится численное интегрирование отмеченных уравнений совместно с уравнениями (7.2.15). На каждом шаге интегрирования полученные значения  $V_1 = V_1(t), \theta_1 = \theta_1(t)$  подставляются в формулы (4.3.4), (4.3.6), (4.3.7), по которым вычисляются возмущенные значения фазовых координат  $V_{1\text{п}}(t), \theta_{1\text{п}}(t), \Psi_{1\text{п}}(t)$ , используемые при интегрировании кинематических уравнений:

$\dot{x}_{1\text{п}} = V_{1\text{п}} \cos \theta_{1\text{п}} \cos \Psi_{1\text{п}} ; \quad \dot{y}_{1\text{п}} = V_{1\text{п}} \sin \theta_{1\text{п}} ; \quad \dot{z}_{1\text{п}} = V_{1\text{п}} \cos \theta_{1\text{п}} \sin \Psi_{1\text{п}}$   
с начальными условиями:

$$x_{1\text{п}}(t_0) = x_{\text{пос}} ; \quad y_{1\text{п}}(t_0) = y_{\text{пос}} ; \quad z_{1\text{п}}(t_0) = 0 .$$

Этот вычислительный процесс осуществляется на интервале времени  $[t_0, t_1]$ , где значение  $t_1$  определяется из условия (7.2.17).

Полученные значения  $V_{1\pi}(t_1)$ ,  $\theta_{1\pi}(t_1)$ ,  $\Psi_{1\pi}(t_1)$ ,  $x_{1\pi}(t_1)$ ,  $y_{1\pi}(t_1)$ ,  $z_{1\pi}(t_1)$  используются на этапе 2 в качестве начальных условий при интегрировании первых двух уравнений системы (7.2.18) и кинематических уравнений:

$$\dot{x}_{2\pi} = V_{2\pi} \cos \theta_{2\pi} \cos \Psi_{2\pi}; \quad \dot{y}_{2\pi} = V_{2\pi} \sin \theta_{2\pi}; \quad \dot{z}_{2\pi} = V_{2\pi} \cos \theta_{2\pi} \sin \Psi_{2\pi}.$$

При этом в вычислительный процесс моделирования движения БЛА на рассматриваемом этапе включается расчет для каждого значения  $t \in [t_1, t_2]$  функций  $V_{2\pi}(t)$ ,  $\theta_{2\pi}(t)$ ,  $\Psi_{2\pi}(t)$  по формулам (4.3.4), (4.3.6), (4.3.7). Момент времени  $t_2$  окончания процесса моделирования определяется выполнением равенства (7.2.20), в котором используется значение путевой скорости  $V_{2\pi}(t_2)$ .

Результаты моделирования этого этапа  $V_{2\pi}(t_2)$ ,  $\theta_{2\pi}(t_2)$ ,  $\Psi_{2\pi}(t_2)$ ,  $x_{2\pi}(t_2)$ ,  $y_{2\pi}(t_2)$ ,  $z_{2\pi}(t_2)$  используются в качестве начальных условий при описании процесса движения БЛА на третьем заключительном этапе посадки БЛА. Здесь также используются динамические уравнения системы (7.2.21), выражения (4.3.4), (4.3.6), (4.3.7) и система кинематических уравнений вида:

$$\dot{x}_{3\pi} = V_{3\pi} \cos \theta_{3\pi} \cos \Psi_{3\pi}; \quad \dot{y}_{3\pi} = V_{3\pi} \sin \theta_{3\pi}; \quad \dot{z}_{3\pi} = V_{3\pi} \cos \theta_{3\pi} \sin \Psi_{3\pi}.$$

По результатам ее интегрирования из условия:

$$y_{3\pi}(t_3) = 0$$

определяется момент времени  $t_3$  приземления БЛА и координаты точки приземления:

$$x_{\text{пр}} = x_{3\pi}(t_3), \quad z_{\text{пр}} = z_{3\pi}(t_3)$$

в стартовой СК, представленной на Рис. 1.9.

При программной реализации рассмотренной вычислительной схемы учета ветровых возмущений можно использовать с соответствующей доработкой алгоритм, представленный на Рис. 4.7.

Заметим, что БАК, использующие МПУ и СПП, обладают более высокой оперативностью и живучестью при решении целевых задач по сравнению с БАК, в которых для взлета и посадки применяются постоянные и временно создаваемые аэродромы.

В этой связи перспективным направлением в разработке СПП БЛА является использование в них в качестве ОП планирующих парашютов (парапланов) и малогабаритных систем управления их движением.

Применение таких СПП позволит осуществлять посадку БЛА при наличии ветра в заданную точку его приземления, что значительно сокращает затраты времени на поиск БЛА, его транспортировку на техническую позицию и подготовку БЛА к повторному полету. Решение этой задачи предусматривает соответствующие доработки приведенных выше математических моделей.

### **7.3. Моделирование процессов аэродромного взлета и посадки БЛА**

В настоящее время наметилась активная тенденция использования при эксплуатации БЛА СД и БЛА ДД аэродромного способа их взлета и посадки.

Как известно, взлет и посадка являются одними из наиболее сложных и потенциально аварийных режимов полета пилотируемой авиации [23]. Вопросы расчета различных взлетно-посадочных характеристик самолетов рассматривались в работах [13, 19, 23].

Как показал приведенный анализ, в существующих работах по БЛА [2, 7, 15 и др.] отсутствует рассмотрение общих теоретических и практических вопросов выполнения такого способа их взлета и посадки, в частности, при наличии ветра произвольной скорости и направления в районе аэродрома.

Взлет БЛА «по самолетному», как у пилотируемых ЛА [19] включает в себя два этапа:

1. Разбег по взлетно-посадочной полосе (ВПП) аэродрома до отрыва от ее поверхности,

2. Полет БЛА с набором безопасной высоты  $h_{без}$  и скорости  $V_{без}$ .

Основной задачей первого этапа является разгон БЛА до скорости, при которой вертикальные силы, действующие на него, будут равны силе его тяжести.

На втором воздушном участке взлета БЛА должен достигнуть значений  $h_{без}$  и  $V_{без}$ , при которых обеспечивается его управляемость с помощью рулей высоты, направления и элеронов.

При посадке БЛА на ВПП также рассматриваются два этапа:

1. Снижение БЛА до момента касания его шасси ВПП,
2. Пробег по полосе до полной остановки БЛА.

Целью моделирования этих важных режимов полета БЛА является расчет взлетно-посадочных характеристик конкретного образца БЛА и, главное, анализ возможности выполнения его взлета и посадки в условиях действия произвольных ветровых возмущений.

Процесс аэродромного взлета и посадки БЛА будем рассматривать в вертикальной плоскости стартовой системы координат (СК), представленной на Рис. 7.5, в которой предполагается, что ось  $0_{ст}x_{ст}$  наклонена на угол  $\theta_{ВПП} \leq 0$  относительно линии горизонта в точке  $0_{ст}$ .

На этом рисунке использованы следующие обозначения:  $(2l \times L)$  – размеры ВПП;  $(x_0, y_0)$  – координаты ЦМ БЛА в начальной точке разгона БЛА;  $(x_{отр}, y_0)$  – координаты точки отрыва БЛА от поверхности ВПП, где  $y_0$  – высота расположения ЦМ БЛА над уровнем ВПП, которая определяется диаметром его фюзеляжа и высотой стоек шасси БЛА;  $(x_k, y_0)$  – координаты точки касания ВПП;  $(x_{ост}, y_0)$  – координаты точки останова БЛА после пробега по ВПП.

Организационно процесс взлета БЛА реализуется следующей последовательностью действий.

Оператор управления БЛА включает двигатель и переводит его в режим максимальной тяги  $P_{\max}$ . После получения от командира расчета БАК команды на взлет оператор отключает тормоза шасси БЛА. С этого момента времени  $t_0$  начинается разбег БЛА по ВПП с ускорением до его отрыва от полосы при скорости  $V_{\text{отр}}$ . Далее происходит набор высоты БЛА до значений  $V_{\text{без}}$  и  $h_{\text{без}}$ .

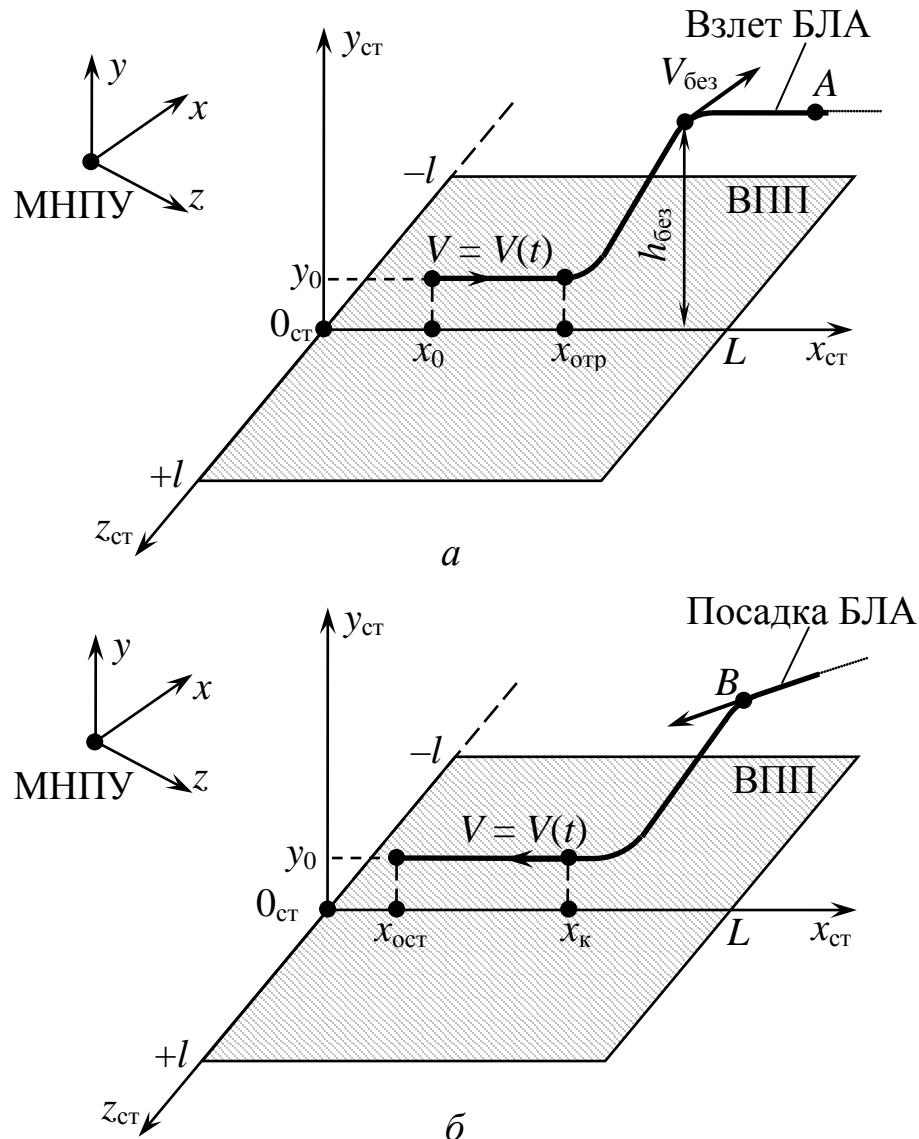


Рис. 7.5

Будем считать, что БЛА, рассматриваемый как материальная точка [22] массы  $m$ , равной его взлетной массе, оснащен шасси, включающим в себя переднее и два основных колеса.

При построении математической модели процесса разбега БЛА по ВПП будем использовать схему, представленную на Рис. 7.6 [19, 23].

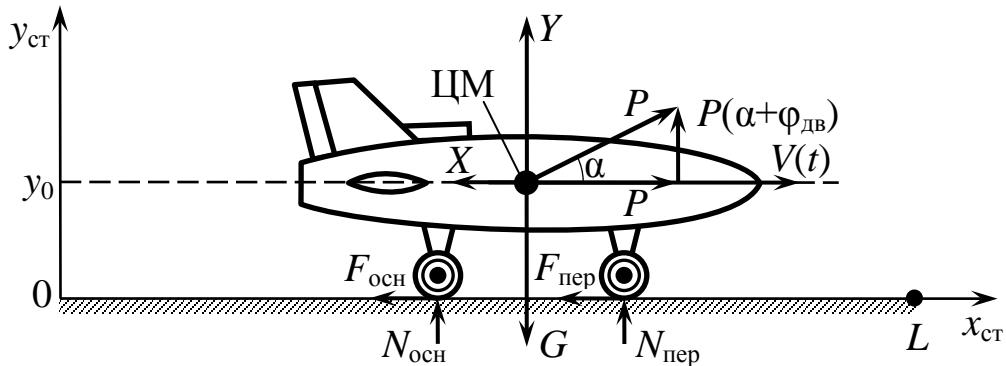


Рис. 7.6

На этом рисунке использованы следующие обозначения:  $G = mg$  – сила тяжести БЛА;  $N_{\text{пер}}, N_{\text{осн}}$  – силы реакций передней и основной стоек шасси [22];  $F_{\text{пер}}, F_{\text{осн}}$  – силы трения колес этих стоек о поверхность ВПП [22];  $X$  – сила лобового сопротивления БЛА;  $Y$  – подъемная сила БЛА;  $P$  – сила тяги двигателя БЛА;  $\alpha$  – угол атаки БЛА;  $\phi_{\text{дв}}$  – угол установки двигателя в корпусе БЛА;  $V = V(t)$  – скорость движения БЛА в момент времени  $t \geq t_0$ .

Аэродинамические силы, действующие на БЛА, вычисляются по формулам:

$$X = 0,5c_x\rho_0V^2S; \quad Y = 0,5c_y\rho_0V^2S, \quad (7.3.1)$$

где  $c_x = c_x(\alpha, V)$ ,  $c_y = c_y(\alpha, V)$  – коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы БЛА;  $\rho_0$  – плотность воздуха на высоте  $h = 0$ ;  $S$  – площадь крыла БЛА.

Проектируя силы, представленные на Рис. 7.6, на оси скоростной СК, запишем динамические уравнения движения БЛА:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= P - X - (F_{\text{пер}} + F_{\text{осн}}) - mg \sin \theta; \\ mV\dot{\theta} &= (\alpha + \phi_{\text{дв}})P + Y + (N_{\text{пер}} + N_{\text{осн}}) - mg \cos \theta. \end{aligned}$$

Вследствие того, что  $\theta = \theta_{\text{ВПП}} = \text{const}$ ,  $\dot{\theta} = 0$ , эти уравнения примут вид:

$$m\dot{V} = P - X - (F_{\text{пер}} + F_{\text{осн}}) - mg \sin \theta_{\text{ВПП}}; \quad (7.3.2)$$

$$0 = (\alpha + \varphi_{\text{дв}})P + Y + (N_{\text{пер}} + N_{\text{осн}}) - mg \cos \theta_{\text{ВПП}}. \quad (7.3.3)$$

Исключим силы  $F_{\text{пер}}$ ,  $F_{\text{осн}}$  из уравнения (7.3.2) с использованием подхода из работы [19].

Известно [22], что силы  $F$  и  $N$  связаны соотношением:

$$F = fN, \quad (7.3.4)$$

где  $f$  – коэффициент трения.

Будем считать, что коэффициенты трения колес передней и основной стоек шасси БЛА примерно одинаковы, то есть  $f_{\text{пер}} \approx f_{\text{осн}} = f$ .

Тогда с использованием принципа сложения сил и выражения (7.3.4) получим соотношение вида:

$$F_{\text{пер}} + F_{\text{осн}} = f(N_{\text{пер}} + N_{\text{осн}}). \quad (7.3.5)$$

Из выражения (7.3.3) следует, что

$$P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y + (N_{\text{пер}} + N_{\text{осн}}) = mg \cos \theta_{\text{ВПП}}.$$

Из этого уравнения получим:

$$N_{\text{пер}} + N_{\text{осн}} = mg \cos \theta_{\text{ВПП}} - Y - (\alpha + \varphi_{\text{дв}})P. \quad (7.3.6)$$

Тогда выражение (7.3.5) примет вид:

$$F_{\text{пер}} + F_{\text{осн}} = f(mg \cos \theta_{\text{ВПП}} - Y - (\alpha + \varphi_{\text{дв}})P).$$

Подставим правую часть этой формулы в уравнение (7.3.2):

$$m\dot{V} = P - X - f(mg \cos \theta_{\text{ВПП}} - Y - (\alpha + \varphi_{\text{дв}})P) - mg \sin \theta_{\text{ВПП}}.$$

Приводя подобные члены, получим:

$$m\dot{V} = P(1 + f(\alpha + \varphi_{\text{дв}})) - (X - fY) - (f \cos \theta_{\text{ВПП}} + \sin \theta_{\text{ВПП}})mg.$$

Подставляя в это уравнение правые части выражений (7.3.1), получаем общий вид дифференциального уравнения, описывающего изменение скорости БЛА при его разбеге и пробеге по ВПП:

$$\begin{aligned} m\dot{V} = & P(1 + f(\alpha + \varphi_{\text{дв}})) - 0,5(c_x(\alpha, V) - fc_y(\alpha, V))\rho_0 V^2 S - \\ & - mg(f \cos \theta_{\text{ВПП}} + \sin \theta_{\text{ВПП}}). \end{aligned} \quad (7.3.7)$$

В работе [23] приводится подробная таблица значений коэффициентов трения  $f$  для различных видов и состояний ВПП.

В частности, отмечается, что значение  $f$  изменяется от 0,02 для сухой бетонной ВПП до 0,10-0,12 для грунтовых и заснеженных полос.

Заметим, что, как и для пилотируемых ЛА [23], разбег БЛА, согласно Рис. 7.5,*a*, предлагается проводить в направлении по ВПП, где угол  $\theta_{\text{ВПП}} < 0$ , а пробег – при  $\theta_{\text{ВПП}} > 0$  (см. Рис. 7.5,*b*). В первом случае уклон ВПП будет естественным образом способствовать разгону БЛА, а во втором – его торможению. Это следует из уравнения (7.3.2), где при  $\theta_{\text{ВПП}} < 0$  слагаемое  $m g \sin \theta_{\text{ВПП}}$  будет положительным.

Сформируем модели взлета и посадки БЛА с использованием общего уравнения (7.3.7). В связи с тем, что эти режимы полета БЛА включают наземные и воздушные этапы, соответствующие модели будут описываться разрывными дифференциальными уравнениями (см. Разд. 2.1).

Процесс разбега БЛА по ВПП осуществляется при следующих значениях характеристик взлета:

$$m = m_{\text{взл}}; \quad P = P_{\max}; \quad \alpha = \alpha_p; \quad V = V_1(t); \quad \theta = \theta_1(t),$$

где  $m_{\text{взл}}$  – взлетная масса БЛА;  $\alpha_p$  – угол атаки БЛА при его разбеге;  $V_1(t)$  и  $\theta_1(t)$  – соответственно скорость и угол наклона траектории БЛА в момент времени  $t \geq t_0$  при разбеге БЛА.

Тогда модель движения БЛА при разбеге по ВПП можно записать как:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{1}{m_{\text{взл}}} \left[ P_{\max} \left( 1 + f(\alpha_p + \varphi_{\text{дв}}) \right) - 0,5 \left( c_x(\alpha_p, V_1) \right) \rho_0 V_1^2 S \right] - \\ &\quad - g (\sin \theta_1 + f \cos \theta_1); \\ \dot{\theta}_1 &= 0; \quad \dot{x}_1 = V_1 \cos \theta_1; \quad \dot{y}_1 = V_1 \sin \theta_1. \end{aligned} \tag{7.3.8}$$

Начальные условия для этой системы уравнений имеют вид:

$$V_1(t_0) = 0; \quad \theta_1(t_0) = -\theta_{\text{ВПП}}; \quad x_1(t_0) = x_0; \quad y_1(t_0) = y_0. \tag{7.3.9}$$

Разбег БЛА осуществляется на интервале времени  $[t_0, t_{\text{отр}}]$ , где момент времени  $t_{\text{отр}}$  его отрыва от ВПП определяется условием равенства нулю сил  $N_{\text{пер}}$  и  $N_{\text{осн}}$ .

С учетом выражений (7.3.6), (7.3.1) это условие конкретизируется следующим равенством:

$$mg \cos \theta_{\text{ВПП}} - 0,5c_y(\alpha_p, V_1(t))\rho_0 V_1^2(t)S - (\alpha_p + \varphi_{\text{дв}})P_{\max} = 0. \quad (7.3.10)$$

Процесс численного интегрирования системы уравнений (7.3.8) с начальными условиями (7.3.9) осуществляется до момента времени  $t_{\text{отр}}$ , при котором за счет роста значения скорости  $V_1$  выполняется условие (7.3.10).

В этом случае координата отрыва БЛА (см. Рис. 7.5,*a*), скорость отрыва и длина его разбега по ВПП определяются как:

$$\begin{aligned} x_{\text{отр}} &= x_1(t_{\text{отр}}); \quad V_{\text{отр}} = V_1(t_{\text{отр}}); \\ L_{\text{разб}} &= x_{\text{отр}} - x_0. \end{aligned} \quad (7.3.11)$$

В качестве косвенного управления БЛА при его разбеге используется функция  $\alpha_p = \alpha_p(t)$ .

При проведении расчетов для конкретных значений  $m_{\text{взл}}$  и различных состояний ВПП, описываемых коэффициентом  $f$ , необходимо проверять условие «невыкатывания» БЛА за пределы ВПП, которое имеет вид:

$$x_1(t_{\text{отр}}) < L. \quad (7.3.12)$$

Если это условие не выполняется, то можно уменьшить значение координаты  $x_0$  и изменить значение  $\alpha_p$ . При этих значениях проводится решение задачи (7.3.8)-(7.3.10) и проверка условия (7.3.12). Если не удается добиться его выполнения, то принимается решение об отмене полета БЛА по состоянию ВПП.

Воздушный этап взлета БЛА моделируется при следующих значениях его характеристик:

$$m = m_{\text{взл}}; \quad P = P(t); \quad \alpha = \alpha_b(t); \quad V = V_2(t); \quad \theta = \theta_2(t).$$

На Рис. 7.5,*a* показано, что этот этап завершается, как это принято в пилотируемой авиации [23], достижением безопас-

ных значений скорости ( $V_{без}$ ) и высоты ( $h_{без}$ ) полета, что связано с обеспечением безопасности экипажа и пассажиров ЛА.

При эксплуатации БЛА такое требование можно исключить. Поэтому его воздушный этап взлета предлагается завершать в точке  $A$  (см. Рис. 7.5, $a$ ) начала движения БЛА в зону выполнения полетного задания.

Будем считать заданными момент времени  $t_A$ , в который БЛА завершает взлет и соответствующие значения его фазовых координат:

$$V_2(t_A) = V_A; \quad \theta_2(t_A) = \theta_A; \quad x_2(t_A) = x_A; \quad y_2(t_A) = y_A. \quad (7.3.13)$$

Движение БЛА на интервале времени  $[t_{отр}, t_A]$  описываются уравнениями (5.2.1)-(5.2.4), которые представим в следующей форме:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \frac{P - 0,5c_x(\alpha, V_2)\rho V_2^2 S}{m_{взл}} - g \sin \theta_2; \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{(\alpha + \varphi_{дв})P + 0,5c_y(\alpha, V_2)\rho V_2^2 S}{m_{взл} V_2} - g \cos \theta_2; \end{aligned} \quad (7.3.14)$$

$$\dot{x}_2 = V_2 \cos \theta_2; \quad \dot{y}_2 = V_2 \sin \theta_2. \quad (7.3.15)$$

Начальные условия для этой системы уравнений с учетом выражений (7.3.11), (7.3.9) имеют вид:

$$\begin{aligned} V_2(t_{отр}) &= V_{отр}; \quad \theta_2(t_{отр}) = -\theta_{впп}; \\ x_2(t_{отр}) &= x_{отр}; \quad y_2(t_{отр}) = y_0. \end{aligned} \quad (7.3.16)$$

Задачей программирования движения БЛА на воздушном этапе взлета является выбор управлений  $P = P(t)$ ,  $\alpha_{в} = \alpha_{в}(t)$ ,  $t \in [t_{отр}, t_A]$ , переводящих БЛА из точки (7.3.16) в точку (7.3.13) его фазового пространства.

При программировании полета БЛА в зону выполнения полетного задания координаты  $x_A$  и  $y_A$  переводятся в СК МНПУ  $хуз$  и используются дополнительные начальные условия:

$$\Psi(t_A) = \Psi_A; \quad z(t_A) = z_A. \quad (7.3.17)$$

При моделировании традиционного подхода к определению воздушного этапа взлета на интервале  $[t_{\text{отр}}, t_{\text{без}}]$  применяются выражения (7.3.14)-(7.3.16). При этом момент времени  $t_{\text{без}}$  определяется из выполнения условий вида:

$$V_2(t_{\text{без}}) = V_{\text{без}}; \quad y_2(t_{\text{без}}) = h_{\text{без}}.$$

При моделировании процесса посадки БЛА будем считать, что программированием его полета из зоны выполнения задания он выведен в заданный момент времени  $t_B$  в точку  $B$  (см. Рис. 7.5,б) со следующими значениями фазовых координат:

$$V_3(t_B) = V_B; \quad \theta_3(t_B) = \theta_B; \quad x_3(t_B) = x_B; \quad y_3(t_B) = y_B. \quad (7.3.18)$$

Здесь индексом «3» обозначены фазовые координаты воздушного этапа посадки БЛА.

Движение на этом этапе описывается уравнениями (7.3.14), (7.3.15) с заменой  $t_{\text{взл}}$  на  $t_{\text{пос}}$  и индекса «2» на индекс «3».

Воздушный участок посадки БЛА завершается в момент времени  $t_k$  касания его шасси ВПП. Этот момент времени определяется при выполнении условия:

$$y_3(t_k) = y_0.$$

При этом координата  $x$  и скорость БЛА в точке касания определяются как:

$$x_k = x_3(t_k); \quad V_k = V_3(t_k). \quad (7.3.19)$$

Программирование движения БЛА на этом этапе состоит в выборе управлений  $P = P(t)$ ,  $\alpha = \alpha(t)$ ,  $t \in [t_B, t_k]$ , обеспечивающих минимальное значение скорости  $V_k$  в момент приземления БЛА.

Моделирование пробега БЛА по ВПП проводится с использованием уравнений (7.3.8) при замене параметра  $t_{\text{взл}}$  на  $t_{\text{пос}}$  и при нулевом значении тяги двигателей БЛА.

Используя индекс «4» для наземного этапа посадки БЛА, эти уравнения представляются как

$$\dot{V}_4 = -\frac{0,5(c_x(\alpha, V_4) - f c_y(\alpha, V_4)) \rho_0 V_4^2 S}{m_{\text{пос}}} - g(\sin \theta_4 + f \cos \theta_4); \quad (7.3.20)$$

$$\dot{\theta}_4 = 0; \quad \dot{x}_4 = -V_4 \cos \theta_4; \quad \dot{y}_4 = V_4 \sin \theta_4.$$

Отрицательная правая часть третьего уравнения системы объясняется тем, что согласно Рис. 7.5,б координата  $x_4$  должна быть убывающей функцией времени.

Начальные условия для этой системы имеют вид:

$$V_4(t_k) = V_k; \quad \theta_4(t_k) = \theta_{\text{ВПП}}; \quad x_4(t_k) = x_k; \quad y_4(t_k) = y_0. \quad (7.3.21)$$

Пробег БЛА по ВПП завершается в момент времени  $t_{\text{ост}}$  его остановки, то есть выполнения следующего равенства:

$$V_4(t_{\text{ост}}) = 0.$$

Координата точки остановки вычисляется как:

$$x_{\text{ост}} = x_4(t_{\text{ост}}).$$

Тогда длина пробега БЛА по ВПП будет равна:

$$L_{\text{пр}} = x_k - x_{\text{ост}}. \quad (7.3.22)$$

Условие того, что БЛА не выкатится за пределы ВПП, двигаясь точно по ее средней линии, может быть согласно Рис. 7.5,б представлено неравенством вида:

$$x_4(t_{\text{ост}}) > 0.$$

При невыполнении этого условия принимается решение о невозможности посадки БЛА по состоянию ВПП.

При пробеге по ВПП косвенным управлением БЛА является функция  $\alpha_n = \alpha_n(t)$ ,  $t \in [t_k, t_{\text{ост}}]$ , которая должна обеспечивать минимальное значение величины  $L_{\text{пр}}$ , определяемой выражением (7.3.22).

Рассмотрим модели процессов взлета и посадки БЛА при воздействии ветровых возмущений, описываемых вектором  $\bar{W} = (w_x, w_y, w_z)$  скорости ветра, действующего в районе ВПП.

В общем случае действие ветра произвольного направления может превратить рассмотренные выше плоские траектории

движения БЛА в пространственные траектории в стартовой СК, представленной на Рис. 7.5.

Для описания таких траекторий будем использовать подход, изложенный в Разд. 4.3.

Следуя этому подходу, в вычислительную схему моделирования разбега БЛА по ВПП наряду с интегрированием первых двух уравнений системы (7.3.8) включим расчет возмущенных значений скорости  $V_{1\pi}(t)$  и углов  $\theta_{1\pi}(t)$ ,  $\Psi_{1\pi}(t)$  по формулам (4.3.4), (4.3.6), (4.3.7).

Интегрирование этих уравнений производится при начальных условиях:

$$V_1(t_0) = V_{0\pi}; \quad \theta_1(t_0) = \theta_{0\pi},$$

правые части которых определяются путем подстановки в выражения (4.3.4), (4.3.6), (4.3.7) значений  $V = 0$ ;  $\theta = -\theta_{\text{ВПП}}$  и  $\Psi = 0$ .

Возмущенное движение БЛА по ВПП в этой вычислительной схеме описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1\pi} &= V_{1\pi} \cos \theta_{1\pi} \cos \Psi_{1\pi}; \\ \dot{y}_{1\pi} &= V_{1\pi} \sin \theta_{1\pi}; \\ \dot{z}_{1\pi} &= \cos \theta_{1\pi} \sin \Psi_{1\pi} \end{aligned} \quad (7.3.23)$$

с начальными условиями:

$$x_{1\pi}(t_0) = x_0; \quad y_{1\pi}(t_0) = y_0; \quad z_{1\pi}(t_0) = 0.$$

Момент времени  $t_{\text{отр}}$  определяется из выполнения условия (7.3.10), в котором используется значение путевой скорости  $V_{1\pi}(t)$ .

Координаты точки отрыва БЛА от ВПП будут соответственно равны:

$$x_{\text{отр}} = x_{1\pi}(t_{\text{отр}}); \quad z_{\text{отр}} = z_{1\pi}(t_{\text{отр}}).$$

В этом случае длина разбега БЛА при действии произвольного ветра вычисляется как:

$$L_{\text{разб}} = \sqrt{(x_{\text{отр}} - x_0)^2 + z_{\text{отр}}^2}.$$

Из Рис. 7.5 следует, что область плоскости  $0x_{\text{ст}}z_{\text{ст}}$ , занимаемой ВПП, формально описывается неравенствами вида:

$$0 \leq x \leq L; \quad -l \leq z \leq l. \quad (7.3.24)$$

Если после подстановки значений  $x_{\text{отр}}$  и  $z_{\text{отр}}$  в эти выражения данные неравенства выполняются, то считается, что разбег БЛА при действующем ветре происходит без его выхода за пределы ВПП.

В противном случае определяется угол азимута горизонтально действующего ветра:

$$\Psi_{\text{гор}} = \arctg \left( \frac{\pm w_z}{\pm w_x} \right),$$

выбирается новая начальная точка  $(x_0, z_0)$  взлета БЛА, обеспечивающая его разбег против ветра и описанный выше процесс моделирования повторяется с проверкой выполнения условий (7.3.24). Если при нескольких вариантах начальных точек не удается достичь выполнения этих условий, принимается решение об отмене вылета БЛА по метеоусловиям и состоянию ВПП.

Моделирование воздушного этапа взлета БЛА при действии ветра производится по описанной выше вычислительной схеме с использованием уравнений (7.3.14), расчетных формул (4.3.4), (4.3.6), (4.3.7) и уравнений вида (7.3.23) с индексом «2». В качестве начальных условий здесь используются значения  $V_{1\pi}(t_{\text{отр}})$ ,  $\theta_{1\pi}(t_{\text{отр}})$ ,  $\Psi_{1\pi}(t_{\text{отр}})$ ,  $x_{1\pi}(t_{\text{отр}})$ ,  $y_{1\pi}(t_{\text{отр}})$ ,  $z_{1\pi}(t_{\text{отр}})$ .

Полученные результаты  $V_{2\pi}(t_A)$ ,  $\theta_{2\pi}(t_A)$ ,  $\Psi_{2\pi}(t_A)$ ,  $x_{2\pi}(t_A)$ ,  $y_{2\pi}(t_A)$ ,  $z_{2\pi}(t_A)$  сравниваются с требуемыми значениями (7.3.13) с анализом точности выведения БЛА в точку  $A$ .

Аналогичным образом моделируется возмущенный воздушный этап посадки БЛА. При этом, момент времени  $t_k$  касания ВПП определяется условием:

$$y_{3\pi}(t_k) = y_0,$$

а координаты точки касания и скорость БЛА будут соответственно равны:

$$x_k = x_{3n}(t_k), \quad z_k = z_{3n}(t_k), \quad V_k = V_{3n}(t_k). \quad (7.3.25)$$

При моделировании пробега БЛА по ВПП в условиях действия ветровых возмущений используются первые два уравнения системы (7.3.20), расчетные соотношения (4.3.4), (4.3.6), (4.3.7) и кинематические уравнения вида (7.3.23) с индексом «4».

Начальные условия в этой вычислительной схеме имеют вид:

$$\begin{aligned} V_4(t_k) &= V_k; \quad \theta_4(t_k) = \theta_{3n}(t_k); \quad \Psi_4(t_k) = \Psi_{3n}(t_k); \\ x_{4n}(t_k) &= x_k; \quad y_{4n}(t_k) = y_0; \quad z_{4n}(t_k) = z_k. \end{aligned}$$

Момент времени окончания пробега БЛА определяется из условия равенства нулю значения его путевой скорости, то есть при выполнении условия:

$$V_{4n}(t_{\text{ост}}) = 0.$$

При этом координаты точки останова БЛА будут равны:

$$x_{\text{ост}} = x_{4n}(t_{\text{ост}}); \quad z_{\text{ост}} = z_{4n}(t_{\text{ост}}). \quad (7.3.26)$$

Длина пробега БЛА по ВПП при действии ветра вычисляется с использованием значений (7.3.25) и (7.3.26) по формуле:

$$L_{\text{пр}} = \sqrt{(x_{\text{ост}} - x_k)^2 + (z_{\text{ост}} - z_k)^2}.$$

Анализ возможности выкатывания БЛА при пробеге за пределы ВПП заключается в подстановке значений (7.3.26) в условия (7.3.24).

Если в этом случае оба неравенства выполняются, то БЛА завершает процесс пробега, находясь в пределах ВПП.

В противном случае необходимо откорректировать значения, входящие в начальные условия (7.3.18) воздушного этапа посадки БЛА и повторить моделирование его посадки.

При неудовлетворительных с точки зрения выполнения условий (7.3.24) результатах моделирования принимается реше-

ние об отмене вылета БЛА по неблагоприятным метеоусловиям и состоянию ВПП.

При программной реализации процессов моделирования взлета и посадки БЛА в условиях действующего в районе ВПП ветра со скоростью  $\bar{W} = (w_x, w_y, w_z)$  предлагается использовать с необходимыми доработками общий алгоритм, представленный на Рис. 4.7.

Одним из перспективных направлений резкого сокращения длин разбега и пробега БЛА по ВПП является применение в составе его взлетно-посадочных устройств (см. Рис. 1.1) стартовых ускорителей и тормозного парашюта. При описании процесса разбега БЛА можно использовать подход, предложенный в Разд. 7.1.

При моделировании пробега БЛА, оснащенных тормозным парашютом, уравнения (7.3.20) примут вид:

$$\begin{aligned}\dot{V}_4 &= -\left(c_x(\alpha, V_4)S - f c_y(\alpha, V_4)S + c_{\text{тп}} F_{\text{тп}}\right) \frac{\rho_0 V_4^2}{2m_{\text{пос}}} - \\ &\quad - g(\sin \theta_4 + f \cos \theta_4); \\ \dot{\theta}_4 &= 0; \quad \dot{x}_4 = V_4 \cos \theta_4; \quad \dot{y}_4 = V_4 \sin \theta_4,\end{aligned}$$

где  $F_{\text{тп}}$  – эффективная площадь сопротивления тормозного парашюта, определяемая формулой (7.2.2).

#### **7.4. Моделирование взлета и посадки беспилотных вертолетов**

Процессы взлета и посадки пилотируемых вертолетов достаточно подробно рассмотрены в работах [27, 30, 37]. Вместе с тем, следует отметить полное отсутствие работ, рассматривающих эти важнейшие этапы полета применительно к беспилотным вертолетам (БВ).

Общемировая практика эксплуатации существующих образцов БВ показывает, что их взлет и посадка осуществляется операторами соответствующих БАК в режиме радиоуправле-

ния. На наш взгляд, отсутствие режима программного управления взлетом и посадкой БВ связано с отсутствием соответствующих математических моделей описания этих режимов.

В отмеченной выше литературе указывается, что вертолет за счет его конструктивных особенностей является объектом, более чувствительным к действующему ветру, чем самолет.

Для БВ, имеющих достаточно малые полетные массы, эта особенность приобретает более существенное значение, которое должно быть отражено в моделях их взлета и посадки. Сформированные модели в последующем должны быть использованы при разработке методов программного управления этими режимами полета БВ.

Схемы вертолетного взлета представлены на Рис. 7.7.

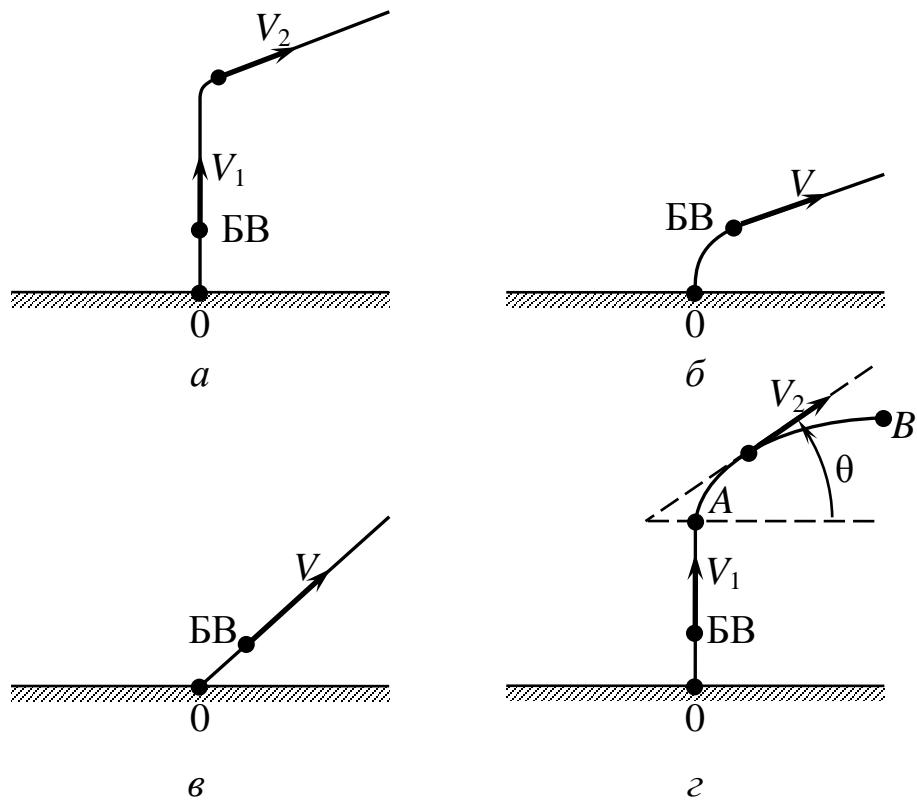


Рис. 7.7

Траектория взлета БВ, изображенная на Рис. 7.7,*a*, подразумевает его вертикальный подъем со скоростью  $V_1 = V_1(t)$ , плавный переход на траекторию набора высота и полет по ней с увеличением скорости  $V_2 = V_2(t)$ . Такой режим взлета использу-

зуют в тех случаях, когда площадка имеет ограниченные размеры и окружена достаточно высокими препятствиями [30].

На Рис. 7.7,*б* представлен взлет БВ по наклонной траектории. Такой режим взлета применяется, если высота препятствий не превышает нескольких метров, а характеристики БВ допускают его одновременный разгон и набор высоты [30].

Траектория взлета вертолета «с места» (см. Рис. 7.7,*в*), применяемая на равнинной местности, обосновывается в работе [37] тем, что в этом случае набор высоты производится с большим значением горизонтальной составляющей скорости, на реализацию которой затрачивается значительно меньшая мощность его силовой установки, чем на реализацию вертикального взлета.

На наш взгляд, наиболее рациональной для БВ траекторией взлета является траектория, изображенная на Рис. 7.7,*г*, которая состоит из следующих этапов:

1. Вертикальный подъем БВ с зависанием в точке А.
2. Разворот БВ в направлении движения в зону выполнения полетного задания.
3. Полет БВ с заданными значениями скорости  $V_2 = V_2(t)$  и угла  $\theta(t)$  в эту зону.

Заметим, что в точке А проводится контроль работы целевого оборудования БВ в воздухе, а реализация этапа 2 исключает достаточно трудоемкую ориентацию БВ на стартовой площадке в направлении его последующего полета.

При неработоспособности установленного на борту БВ целевого оборудования его посадка осуществляется в режиме вертикального спуска.

Для других видов взлета БВ, представленных на Рис. 7.7, необходимо программирование пространственных и более продолжительных специальных траекторий возврата вертолета на стартовую площадку для замены такого оборудования.

Рассмотрим моделирование процесса взлета БВ и движения в зону выполнения полетного задания с использованием расчетной схемы, представленной на Рис. 7.7,г.

Пусть взлет БВ, расположенного в точке с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$  СК МНПУ $xyz$  (см. Рис. 1.9), производится в момент времени  $t_0$ .

При программировании его полета будем считать заданными значения моментов времени  $t_1, t_2, t_3$  завершения приведенных выше этапов 1–3 и высоты  $h_A$ , соответствующей точке  $A$  на Рис. 7.7,г.

Модель движения БВ на участке  $OA$ , с использованием уравнений (6.3.10) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} m\dot{V}_1 &= T_h(\varphi_{\text{ош}}) - G - X_{\text{вр}}; \\ T_p(\varphi_p) - D_h \eta_b T_h(\varphi_{\text{ош}}) &= 0; \\ \dot{x}_1 &= 0; \quad \dot{y}_1 = V_1; \quad \dot{z}_1 = 0. \end{aligned} \quad (7.4.1)$$

Границные условия для этой системы без учета действия ветра, описываемого вектором  $\bar{W} = (w_x, w_y, w_z)$ , записываются как:

$$V_1(t_0) = 0; \quad x_1(t_0) = x_0; \quad y_1(t_0) = y_0; \quad z_1(t_0) = z_0; \quad (7.4.2)$$

$$V_1(t_1) = 0; \quad x_1(t_1) = x_0; \quad y_1(t_1) = h_A; \quad z_1(t_1) = z_0. \quad (7.4.3)$$

Выполнение этих условий осуществляется путем выбора управлений  $\varphi_{\text{ош}}(t)$  и  $\varphi_p(t)$ , для  $t \in [t_0, t_1]$ .

Для описания движения БВ на этапе 2 будем использовать выражения (6.3.12) и (6.3.13), записанные в следующей форме:

$$\dot{\Psi}_2 = \frac{L_{\text{ЦМР}}}{J_y} T_p(\varphi_p); \quad (7.4.4)$$

$$T_h(\varphi_{\text{ош}}(t_1)) = G.$$

Здесь использовано допущение, что угловая скорость  $\omega_y$  вращения БВ вокруг вертикальной оси связанной СК равна в режиме его висения угловой скорости  $\dot{\Psi}_2$ .

Это предположение позволяет считать, что значение угла  $\Psi_2(t_2)$  будет задавать начальное направление вектора  $\bar{V}_2$  при движении БВ на этапе 3.

Начальное условие для первого уравнения из соотношений (7.4.4) имеет вид:

$$\Psi_2(t_1) = \Psi_0,$$

где  $\Psi_0$  – угол между горизонтальной строительной осью БВ и осью МНПУ $x$ , который характеризует наземную установку БВ в стартовой точке с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Пусть для полета БВ в зону выполнения полетного задания угол поворота его траектории задается значением:

$$\Psi_2(t_2) = \Psi_{22}.$$

Тогда закон изменения угла  $\Psi_2$  во времени будет иметь следующий вид:

$$\Psi_2(t) = \Psi_0 + \frac{\Psi_{22} - \Psi_0}{t_2 - t_1}(t - t_1). \quad (7.4.5)$$

Управление  $\phi_p(t) = \text{const}$ , обеспечивающее равномерный поворот БВ на угол  $(\Psi_{22} - \Psi_0)$  за время  $(t_2 - t_1)$ , определяется методом, описанным в Разд. 6.3.

На этапе 3 движения из точки  $A$  (см. Рис. 7.7,2), которая описывается следующими значениями фазовых координат:

$$V_A = 0; \quad \theta_A = \tilde{\theta}; \quad \Psi_A = \Psi_{22}, \quad x_A = x_0; \quad y_A = h_A; \quad z_A = z_0, \quad (7.4.6)$$

будем использовать уравнения (6.2.15)-(6.2.17), (6.2.5)-(6.2.7):

$$\begin{aligned} m\dot{V}_3 &= f_1(V_3, \theta_3, \varphi_{\text{ощ}}, \chi); \\ mV_3\dot{\theta}_3 &= f_2(\theta_3, \varphi_{\text{ощ}}, \chi, \eta); \\ mV_3 \cos \theta_3 \dot{\Psi}_3 &= f_3(\theta_3, \varphi_{\text{ощ}}, \chi, \eta, \phi_p); \end{aligned} \quad (7.4.7)$$

$$\dot{x}_3 = V_3 \cos \theta_3 \cos \Psi_3; \quad \dot{y}_3 = V_3 \sin \theta_3; \quad \dot{z}_3 = V_3 \cos \theta_3 \sin \Psi_3. \quad (7.4.8)$$

Начальные условия для этой системы уравнений имеют вид:

$$\begin{aligned} V_3(t_2) &= 0; \quad \theta_3(t_2) = 0; \quad \Psi_3(t_2) = \Psi_{22}; \\ x_3(t_2) &= x_0; \quad y_3(t_2) = h_A; \quad z_3(t_2) = z_0. \end{aligned} \quad (7.4.9)$$

Реализация этого этапа полета БВ подразумевает выбор управлений  $\varphi_{\text{ош}}(t)$ ,  $\chi(t)$ ,  $\eta(t)$ ,  $\varphi_p(t)$ ,  $t \in [t_2, t_3]$ , обеспечивающих выполнение в точке  $B$  условий начала выполнения вертолетом поставленного полетного задания:

$$\begin{aligned} V_3(t_3) &= V_B; & \theta_3(t_3) &= \theta_B; & \Psi_3(t_3) &= \Psi_B; \\ x_3(t_3) &= x_B; & y_3(t_3) &= y_B; & z_3(t_3) &= z_B. \end{aligned} \quad (7.4.10)$$

Рассмотрим формализацию процесса взлета и полета в зону выполнения полетного задания при воздействии ветровых возмущений, описываемых произвольным вектором  $\bar{W} = (w_x, w_y, w_z)$ . Заметим, что необходимость учета действия ветра и его влияния на динамику полета вертолета было отмечено на описательном уровне в работах [30, 37, 39].

Основной целью предлагаемой формализации является количественная оценка отклонений значений фазовых координат БВ в моменты времени  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$  при действии ветра с конкретными измеренными в районе его взлета и последующего полета значениями скоростей  $w_x, w_y, w_z$ .

В общем случае на этапе 1 наряду с начальными условиями (7.4.2) будем использовать следующие значения полетных параметров БВ:

$$\theta_1(t_0) = \frac{\pi}{2}; \quad \Psi_1(t_0) = \Psi_0. \quad (7.4.11)$$

Тогда в вычислительную схему моделирования действия ветровых возмущений (см. Разд. 4.3) на процесс вертикального взлета БВ войдут следующие блоки:

1. Вычисление начальных значений функций  $V_{1\Pi}(t)$ ,  $\theta_{1\Pi}(t)$ ,  $\Psi_{1\Pi}(t)$  по формулам (4.3.4), (4.3.6), (4.3.7) с использованием при  $t = t_0$  значения  $V_1(t_0) = 0$  и исходных данных, представленных выражениями (7.4.11).

2. Интегрирование первого уравнения системы (7.4.1) с начальным условием  $V_1(t_0) = V_{1\Pi}(t_0)$ .

3. Вычисление для каждого значения  $t \in [t_0, t_1]$  функций  $V_{1\pi}(t)$ ,  $\theta_{1\pi}(t)$  и  $\Psi_{1\pi}(t)$  с использованием выражений (4.3.4), (4.3.6) и (4.3.7).

4. Интегрирование кинематических уравнений движения БВ вида:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1\pi} &= V_{1\pi} \cos \theta_{1\pi} \cos \Psi_{1\pi}; \\ \dot{y}_{1\pi} &= V_{1\pi} \sin \theta_{1\pi}; \\ \dot{z}_{1\pi} &= V_{1\pi} \cos \theta_{1\pi} \sin \Psi_{1\pi}.\end{aligned}$$

с начальными условиями (7.4.2).

Результаты  $V_{1\pi}(t_1)$ ,  $x_{1\pi}(t_1)$ ,  $y_{1\pi}(t_1)$ ,  $z_{1\pi}(t_1)$  применения этой схемы сопоставляются с граничными условиями (7.4.3) и делается вывод о допустимости или недопустимости полученных отклонений. В последнем случае должна решаться специальная задача выбора управлений  $\phi_{\text{ош}}(t)$ ,  $\phi_p(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , учитывающая действие на БВ ветра, описываемого вектором  $\bar{W} = (w_x, w_y, w_z)$ .

При анализе ветровых возмущений на выполнение этапа 2 взлета БВ будем считать, что начальное условие для дифференциального уравнения из состава соотношений (7.4.4) имеет вид:

$$\Psi_2(t_1) = \Psi_{1\pi}(t_1).$$

В этом случае выражение (7.4.5) записывается как:

$$\Psi_{2\pi}(t) = \Psi_{1\pi}(t_1) + \frac{\Psi_{22} - \Psi_{1\pi}(t_1)}{t_2 - t_1}(t - t_1).$$

Степень влияния ветра оценивается разностью  $\Psi_{22} - \Psi_{2\pi}(t_2)$ , отражающей отклонение требуемого значения курсового угла БВ от его возмущенного значения. При недопустимом значении этого отклонения производится корректировка ранее определенного управления  $\phi_p$  для получения значения  $\Psi_{2\pi}(t_2) = \Psi_{22}$ .

Для определения возмущенных значений фазовых координат БВ на этапе 3 используется вычислительная схема, аналогичная схеме для этапа 1.

В этой схеме в блоке 1 используются исходные данные (7.4.6). Блок 2 осуществляет интегрирование системы уравнений (7.4.7) с начальными условиями, вычисленными в блоке 1. Блоки 3 и 4 полностью аналогичны таким блокам исходной расчетной схемы с использованием в блоке 4 обозначений  $V_{3\pi}$ ,  $\theta_{3\pi}$ ,  $\Psi_{3\pi}$ ,  $x_{3\pi}$ ,  $y_{3\pi}$ ,  $z_{3\pi}$

Результирующие данные  $V_{3\pi}(t_3)$ ,  $\theta_{3\pi}(t_3)$ ,  $\Psi_{3\pi}(t_3)$ ,  $x_{3\pi}(t_3)$ ,  $y_{3\pi}(t_3)$ ,  $z_{3\pi}(t_3)$  сравниваются с их требуемыми значениями (7.4.10). При выявлении значительных недопустимых отклонений программный вывод БВ в точку  $B$  отменяется по действующим метеоусловиям. В данной ситуации командир расчета БАК принимает решение о возможности управления взлетом БВ в ручном режиме.

При посадке БВ после выполнения полетного задания предлагаются использовать траекторию, представленную на Рис. 7.8.

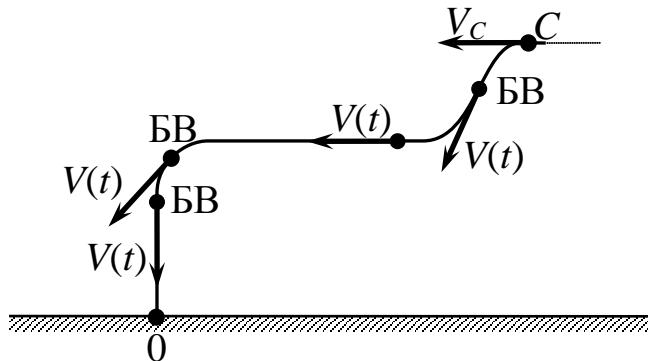


Рис. 7.8

Траектория представляет собой гладкую непрерывную кривую, начинающуюся в точке  $C$  выхода БВ из зоны выполнения полетного задания и заканчивающуюся в точке  $0$  его приземления. При этом угол наклона траектории БВ изменяется от значения  $\theta_C = 0$  до значения  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ .

Будем считать, что процесс посадки БВ осуществляется на заданном интервале времени  $[t_h, t_k]$ .

При этом в момент времени начала посадки известными являются значения:

$$V(t_h) = V_C; \quad \theta(t_h) = \theta_C; \quad \Psi(t_h) = \Psi_C; \quad (7.4.12)$$

$$x(t_h) = x_C; \quad y(t_h) = y_C; \quad z(t_h) = z_C. \quad (7.4.13)$$

В связи с тем, что угол атаки НВ изменяется при движении БВ по посадочной траектории от значений, близких к нулю в

точке  $C$ , до значения  $\alpha_h = \frac{\pi}{2}$  на завершающем участке вертикального спуска в точку 0, будем использовать общую модель управляемого полета БВ вида (6.2.4).

Динамические уравнения этой модели при отказе от предположения о малости значений  $\alpha_h(t)$ ,  $t \in [t_h, t_k]$  с учетом выражений (6.2.9) и (6.2.10) примут вид:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= [(a_1 + D_h(\chi + \chi_b))\cos(k_\alpha(\chi + \chi_b)) - \\ &\quad - \sin(a_b + k_\alpha(\chi + \chi_b))]T_h(\varphi_{osh}) - G \sin \theta - X_{bp}(V); \\ mV\dot{\theta} &= [(\cos(a_b + k_\alpha(\chi + \chi_b)) - \\ &\quad - (a_1 + D_h(\chi + \chi_b))\sin(k_\alpha(\chi + \chi_b)))T_h(\varphi_{osh}) - \\ &\quad - G \cos \theta]\cos(k_\gamma(\eta + \eta_b)); \\ mV \cos \theta \dot{\Psi} &= [(\cos(a_b + k_\alpha(\chi + \chi_b)) - \\ &\quad - (a_1 + D_h(\chi + \chi_b))\sin(k_\alpha(\chi + \chi_b)))T_h(\varphi_{osh}) - \\ &\quad - (b_1 + D_h(\eta + \eta_b))T_h(\varphi_{osh}) + T_p(\varphi_p)]. \end{aligned} \quad (7.4.14)$$

С использованием этих уравнений и с применением соответствующего метода теории обратных задач управления (см. Разд. 2.3) определяются управляющие воздействия  $\varphi_{osh}(t)$ ,  $\chi(t)$ ,  $\eta(t)$ ,  $\varphi_p(t)$ ,  $t \in [t_h, t_k]$ , переводящие БВ из состояния, представленного выражениями (7.4.12), (7.4.13), в состояние (7.4.2) при  $t = t_k$ .

При отказе двигателя БВ его посадка в режиме авторотации НВ описывается моделью (6.3.14).

При анализе процесса посадки БВ в условиях действия ветра с известными значениями скоростей  $w_x, w_y, w_z$  используется описанная выше вычислительная схема, в которой в качестве исходных данных выступают значения правых частей выражений (7.4.12), расчетных формул – выражения (4.3.4), (4.3.6), (4.3.7), решаемых уравнений – уравнения (7.4.14) и уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{\pi} &= V_{\pi} \cos \theta_{\pi} \cos \Psi_{\pi}; \\ \dot{y}_{\pi} &= V_{\pi} \sin \theta_{\pi}; \\ \dot{z}_{\pi} &= V_{\pi} \cos \theta_{\pi} \sin \Psi_{\pi},\end{aligned}$$

которые интегрируются при начальных условиях (7.4.13).

Результаты вычислений  $V_{\pi}(t_k), x_{\pi}(t_k), y_{\pi}(t_k), z_{\pi}(t_k)$  сравниваются с невозмущенными значениями  $V(t_k) = 0, x(t_k) = x_0, y(t_k) = 0, z(t_k) = z_0$ . При наличии недопустимых отклонений этих параметров производится корректировка ранее определенных управлений  $\phi_{\text{ош}}(t), \chi(t), \eta(t), \phi_p(t)$  до получения приемлемых конечных значений скорости и координат приземления БВ.

При программной реализации описанной выше расчетной схемы необходимо использовать алгоритм, представленный на Рис. 4.7.

В заключение данной главы следует отметить необходимость разработки методов формирования программного управления БЛА на всех этапах процессов их старта, взлета и посадки в условиях спокойной атмосферы и при действии произвольных ветровых возмущений. Актуальными задачами этой теории являются задача учета температуры окружающего воздуха при программировании старта, взлета и посадки БЛА, а также задача моделирования и программирования воздушного старта БЛА с носителями самолетного и вертолетного типов.

## **Глава 8. ТРАЕКТОРНЫЕ МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ УПРАВЛЕНИЯ РАЗЛИЧНЫМИ ВИДАМИ БЛА**

В Главах 5 и 6 были наряду с моделями движения БЛА рассмотрены общие методы выбора программного управления без учета специфики решаемых ими целевых задач. Применение в этих методах теории обратных задач управления динамическими объектами, описанной в Разд. 2.3, подразумевает задание программ изменения скорости  $V_{\text{зад}}(t)$  и углов наклона  $\theta_{\text{тр}}(t)$  и поворота  $\Psi_{\text{тр}}(t)$  траектории БЛА в каждый момент времени рассматриваемого этапа его полета.

В данной главе для задания таких программ предлагается использовать траекторный подход, в котором соответствующими специалистами МНПУ БАК выбираются или формируются требуемые траектории движения БЛА.

При реализации этого подхода рассматриваются общие методы построения плоских и пространственных траекторий БЛА, которые в дальнейшем конкретизируются для их основных типов, представленных на Рис. 1.2.

Синтез таких траекторий проводится с применением следующих подходов:

- использование вспомогательных задач вариационного исчисления, описанного в Разд. 2.4;
- построение траекторий на основе совокупности их базовых (характерных) точек, задаваемых специалистами МНПУ БАК;
- выбор подходящей траектории из состава типовых траекторий полета конкретного типа БЛА;
- преобразование проекций требуемых траекторий полета БЛА в их пространственное представление;
- формирование требуемых траекторий полетов БЛА с использованием полетных записей пилотажных параметров ЛА-имитаторов;

Для сформированных с помощью таких подходов траекторий БЛА конкретизируются исходные данные, используемые в методах построения векторов программного управления БЛА, которые приведены в Главах 5 и 6.

### **8.1. Управление полетами БЛА по требуемым плоским траекториям**

Данный вид траекторий, реализуемых в горизонтальной и вертикальной плоскостях маневренной СК, представленной на Рис. 1.9, является наиболее распространенным в практике эксплуатации БЛА.

Рассмотрим методы формирования управлений БЛА при их полетах по требуемым траекториям, расположенным в таких плоскостях.

Пусть БЛА на некотором этапе его полета должен осуществить в горизонтальной плоскости на постоянной высоте  $y(t) = h$  с заданной скоростью  $V_{\text{зад}}(t)$  перелет между точками с координатами  $(x_0, z_0)$  и  $(x_k, z_k)$ .

Необходимо определить уравнение траектории БЛА:

$$z = z(x), \quad x \in [x_0, x_k], \quad (8.1.1)$$

обеспечивающей такой перелет.

В связи с тем, что эта траектория должна гладким образом сопрягаться с траекториями предшествующего и последующего этапов полета БЛА, будем считать заданными в ее начальной и конечной точках значения производной функции (8.1.1).

Таким образом, формируемая требуемая траектория  $z = z(x)$  движения БЛА должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} z(x_0) &= z_0; & z(x_k) &= z_k; \\ z'(x_0) &= z'_0; & z'(x_k) &= z'_k. \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

На Рис. 8.1 представлены исходные данные для синтеза траекторий полетов БЛА в горизонтальной плоскости в рассматриваемой маневренной СК.

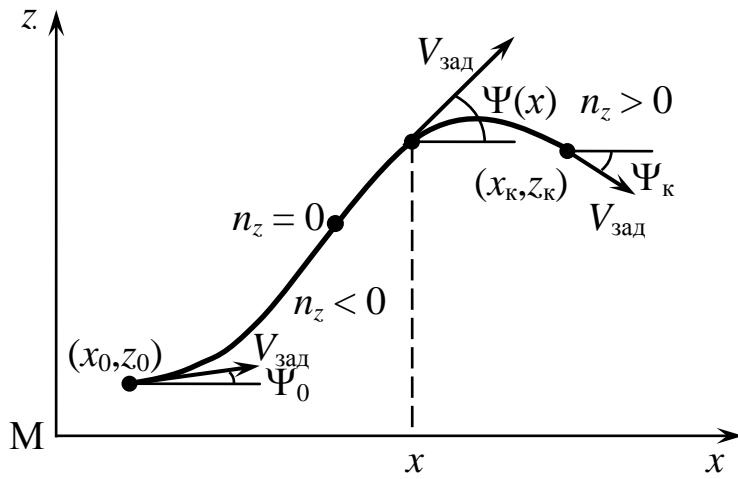


Рис. 8.1

Как известно, вектор скорости БЛА лежит на касательной к траектории его полета [7]. Поэтому на этом рисунке касательные описаны соответствующими углами их наклона к оси  $Ox$ . При этом считается, что  $z'(x_0) = \operatorname{tg} \Psi_0$ ;  $z'(x) = \operatorname{tg} \Psi(x)$ ;  $z'(x_k) = \operatorname{tg} \Psi_k$ .

В связи с тем, что любой полет БЛА сопровождается перегрузками, которые в общем случае в различные моменты времени имеют разные знаки (см. Рис. 8.1), потребуем, чтобы при использовании формируемой траектории (8.1.1) перегрузка  $n_z$  была минимальной.

Такое требование, как будет показано ниже, позволяет сформировать траекторию (8.1.1), удовлетворяющую условиям (8.1.2), которая имеет минимальную кривизну и вследствие этого – минимальное время движения БЛА по такой траектории.

Установим зависимость между перегрузкой  $n_z$  и кривизной траектории  $z(x)$ .

Из выражений (5.1.26) следует, что

$$n_z = \frac{V}{g} \dot{\Psi} \cos \theta,$$

где  $V$  – скорость полета БЛА;  $\theta$  – угол наклона его траектории;  $\dot{\Psi}$  – угловая скорость поворота траектории БЛА.

Известно, что при полете БЛА на фиксированной высоте  $h = \text{const}$  угол  $\theta = 0$  и, следовательно,  $\cos \theta = 1$ .

В этом случае имеем, что

$$n_z = \frac{V}{g} \dot{\Psi}. \quad (8.1.3)$$

Из Рис. 8.1 следует, что угол  $\Psi$  поворота траектории связан с уравнением траектории (8.1.1) соотношением:

$$\Psi = \arctan z'(x).$$

Производная по времени этой сложной функции [8] записывается как:

$$\dot{\Psi}(t) = \frac{d\Psi}{dx} \cdot \dot{x} = \frac{z''(x)}{1 + z'^2(x)} \cdot \dot{x}.$$

Кинематические уравнения движения БЛА в рассматриваемой плоскости имеют вид:

$$\dot{x} = V \cos \Psi; \quad \dot{z} = V \sin \Psi.$$

Используя соотношения:

$$\cos \Psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \Psi}}; \quad \sin \Psi = \frac{\tan \Psi}{\sqrt{1 + \tan^2 \Psi}}$$

и проводя в них замену  $\tan \Psi = z(x)$ , получим систему уравнений вида:

$$\dot{x} = \frac{V}{\sqrt{1 + z'^2(x)}}; \quad \dot{z} = \frac{V z'(x)}{\sqrt{1 + z'^2(x)}}. \quad (8.1.4)$$

Используя первое уравнение этой системы, имеем:

$$\dot{\Psi}(t) = \frac{V z''(x)}{[1 + z'^2(x)]^{3/2}}.$$

С учетом этого формула (8.1.3) примет вид:

$$n_z = \frac{V^2 z''(x)}{g [1 + z'^2(x)]^{3/2}}. \quad (8.1.5)$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что эта величина в каждой точке функции  $z(x)$  равна ее кривизне  $k$  [8], умноженной на  $(V^2/g)$ . Таким образом, можно считать, что величина пере-

грузки  $n_z(x)$  пропорциональна производной  $z''(x)$  функции (8.1.1).

При полете БЛА в вертикальной плоскости по траектории:

$$y = y(x), \quad (8.1.6)$$

удовлетворяющей условиям:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0; & y(x_k) &= y_k; \\ y'(x_0) &= y'_0; & y'(x_k) &= y'_k; \end{aligned} \quad (8.1.7)$$

имеем зависимость вида:

$$n_y = \frac{V}{g} \dot{\theta} + \cos \theta, \quad (8.1.8)$$

полученную из выражений (5.1.26).

Используя результаты работы [1] для уравнения  $y(x)$  траекторий полета БЛА в этой плоскости, можно записать следующие соотношения:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{y''(x)}{1 + y'^2(x)} \dot{x}; \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2(x)}}. \quad (8.1.9)$$

Подставляя выражения (8.1.9) и правую часть первого уравнения системы (8.1.4) в формулу (8.1.8), имеем:

$$n_y = \frac{V^2 y''(x)}{g[1 + y'^2(x)]^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2(x)}}. \quad (8.1.10)$$

Пренебрегая вторым слагаемым, получаем, что величина нормальной перегрузки  $n_y$  будет в основном определяться значением производной  $y''(x)$  функции (8.1.6) в каждой точке траектории  $y(x)$  полета БЛА.

Заметим, что в работе [7] исследовалась зависимость перегрузки  $n_y$  только от угла  $\theta$ .

Для определения оптимальных траекторий  $y^0(x)$  и  $z^0(x)$  в вертикальной и горизонтальной плоскостях полетов БЛА будем использовать вариационные задачи, функционалы которых вследствие выражений (8.1.8) и (8.1.10) представляют собой приближенные интегральные оценки изменения значений пере-

грузок  $n_z$  и  $n_y$  на интервале  $[x_0, x_k]$ . В связи с тем, что в процессе криволинейных полетов БЛА перегрузки за счет изменения кривизны их траекторий могут менять знаки (см. Рис. 8.1), в подынтегральных выражениях функционалов будет использован квадрат второй производной функций  $z(x)$  и  $y(x)$ .

При этом выражения (8.1.2) и (8.1.7) являются граничными условиями для определения экстремалей  $y^0(x)$  и  $z^0(x)$ .

Рассмотрим задачу формирования траектории взлета и набора высоты БЛА в стартовой СК, представленной на Рис. 1.9.

Конкретизируем выражение (8.1.6) функцией вида:

$$y = f(x), \quad x \in [x_0, x_1]. \quad (8.1.11)$$

Здесь  $x_0$  – координата точки старта БЛА,  $x_1$  – координата завершения воздушного этапа взлета БЛА.

Будем считать, что для данного этапа задан закон изменения скорости:

$$V = V_{\text{зад}}(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

где  $t_0$  и  $t_1$  – соответствующие моменты времени.

Траекторию (8.1.11) предлагается определять из решения вспомогательной вариационной задачи вида (2.4.16), (2.4.17), которая конкретизируется как:

$$J_1(f(x)) = \int_{x_0}^{x_1} [f''(x)]^2 dx \rightarrow \min; \quad (8.1.12)$$

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f_0; & f'(x_0) &= f'_0; \\ f(x_1) &= f_1; & f'(x_1) &= f'_1. \end{aligned} \quad (8.1.13)$$

Здесь функционал  $J_1$  описывает интегральную оценку кривизны искомой функции  $f(x)$ ;  $f'_0 = \tan \theta_0$ ,  $f'_1 = \tan \theta_1$ , где  $\theta_0$  и  $\theta_1$  – углы наклона траектории БЛА в точках  $x_0$  и  $x_1$ .

Уравнение Эйлера (2.4.18) для функционала (8.1.12) имеет вид:

$$\frac{d^2}{dx^2} (2f'') = 0.$$

Откуда получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$f^{IV}(x) = 0.$$

Интегрирование этого уравнения 4-го порядка дает общее решение вида:

$$f(x) = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4, \quad (8.1.14)$$

где  $C_i$  – постоянные интегрирования,  $i = \overline{(1,4)}$ .

Производная этой функции записывается как:

$$f'(x) = 3C_1x^2 + 2C_2x + C_3. \quad (8.1.15)$$

Значения постоянных  $C_1, \dots, C_4$  определяются из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} C_1x_0^3 + C_2x_0^2 + C_3x_0 + C_4 &= f_0; \\ 3C_1x_0^2 + 2C_2x_0 + C_3 &= f'_0; \\ C_1x_1^3 + C_2x_1^2 + C_3x_1 + C_4 &= f_1; \\ 3C_1x_1^2 + 2C_2x_1 + C_3 &= f'_1, \end{aligned} \quad (8.1.16)$$

полученной путем подстановки выражений (8.1.14) и (8.1.15) в левые части граничных условий (8.1.13).

Вторая производная функции (8.1.11) имеет вид линейной зависимости:

$$f''(x) = 6C_1x + 2C_2,$$

которая в точке с координатой:

$$x^* = -\frac{C_2}{3C_1}$$

может изменять знак на противоположный. Это означает, что  $x = x^*$  является точкой перегиба траектории  $f(x)$ , в которой изменяется ее кривизна и, в соответствии с выражением (8.1.10) – знак перегрузки  $n_y$ .

Решение системы уравнений (8.1.16) может быть получено одним из численных методов, приведенных в Разд. 3.2.

Отметим, что описание траектории полетов БЛА полиномом 3-й степени вида (8.1.14) используется в работе [49] без приведения достаточно убедительного обоснования.

Определим, зависимость (8.1.11) для случая старта БЛА СС с МПУ, описанного в Разд. 7.1.

Из Рис. 7.1 следует, что параметр  $\theta_0$  задает угол наклона направляющих пусковой установки. В связи с небольшой длиной направляющих МПУ БЛА координату  $x_0$  можно положить равной нулю.

Расчетная схема процесса старта, набора высоты и перехода БЛА в режим горизонтального полета на заданной высоте  $h$  приведена на Рис. 8.2.

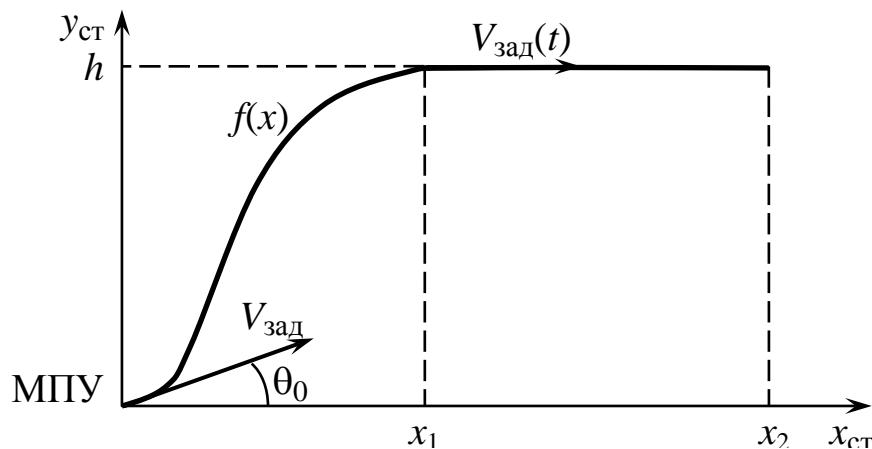


Рис. 8.2

В предположении, что  $x_0 = 0$  и  $f_0 = 0$ , из системы уравнений (8.1.16) получаем значение  $C_4 = 0$ .

В связи с тем, что  $\theta_1 = 0$ ,  $f_1 = h$ , из системы уравнений (8.1.16) следует, что ее решения будут зависеть от значений параметра  $\theta_0$ .

В этом случае выражение (8.1.14) можно представить как:

$$f(x, \theta_0) = C_1(\theta_0)x^3 + C_2(\theta_0)x^2 + C_3(\theta_0)x.$$

Аналитическое решение системы (8.1.16) имеет вид [1]:

$$C_1(\theta_0) = \frac{x_1 \operatorname{tg} \theta_0 - 2h}{x_1^3}; \quad C_2(\theta_0) = \frac{3h - 2x_1 \operatorname{tg} \theta_0}{3x_1^2};$$

$$C_3(\theta_0) = \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{6}; \quad C_4(\theta_0) = 0.$$

Оптимальное значение угла  $\theta_0$  может быть найдено из решения задачи оптимизации вида:

$$J_2(\theta_0) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + [f'(x, \theta_0)]^2} dx \rightarrow \min_{\theta_0};$$

$$\theta_0^* \leq \theta_0 \leq \theta_0^{**},$$

где  $\theta_0^*$  и  $\theta_0^{**}$  – предельные значения угла наклона направляющих применяемой МПУ.

Целевая функция  $J_2$  обеспечивает минимальную длину стартовой траектории (8.1.11). Данная задача решается одним из численных методов одномерной оптимизации, например, методом дихотомии [95].

В работе [1] приводится пример применения рассмотренного подхода для следующих исходных данных:  $x_1 = 24000$  м;  $h = 3500$  м;  $\theta_0^* = 0^\circ$ ;  $\theta_0^{**} = 35^\circ$ .

Для этих значений получены следующие результаты:

- 1) оптимальный угол старта БЛА  $\theta_0^* = 5,8^\circ$ ,
- 2) уравнение оптимальной траектории взлета и набора высоты БЛА после его схода с направляющих МПУ:

$$f(x) = -2,952 \cdot 10^{-10} x^3 + 8,511 \cdot 10^{-6} x^2 + 0,102x,$$

- 3) длина траектории движения БЛА  $J_2 = 24250$  м.

Вариационная задача (8.1.12), (8.1.13) может быть использована для формирования оптимальных траекторий вида (8.1.11) при программировании траекторий воздушных участков процессов аэродромного взлета и посадки БЛА, рассмотренных в Разд. 7.3.

В частности, для процесса взлета БЛА, представленного на Рис. 7.5,*a*, задача формирования траектории  $f(x)$  решается при следующих исходных данных:  $x_0 = x_{\text{отр}}$ ;  $f_0 = y_0$ ;  $\theta_0 = -\theta_{\text{ВПП}}$ ;  $x_1 = x_A$ ;  $f_1 = y_A$ ;  $\theta_1 = \theta_A$ . Для процесса посадки БЛА (см. Рис. 7.5,*б*) граничные условия (8.1.13) имеют вид:  $x_0 = x_B$ ;  $f_0 = f_B$ ;  $\theta_0 = \theta_B$ ;  $x_1 = x_K$ ;  $f_1 = y_0$ ;  $\theta_1 = \theta_{\text{ВПП}}$ .

При этом для конкретизации приведенных выше значений используются выражения (7.3.11), (7.3.13), (7.3.18) и (7.3.19).

Описанный выше вариационный подход предлагается использовать для формирования траекторий вида (8.1.11), описывающих требуемые виды маневров БЛА в вертикальной плоскости.

Для этого применяется вспомогательная маневренная СК, представленная на Рис. 1.9. В этой СК для каждого вида маневров (набор высоты, пикирование с выходом на горизонтальный полет и др.) конкретизируются значения координат  $x_0$  и  $x_1$ , а также задаются значения правых частей граничных условий (8.1.13).

Для программирования полета БЛА по траектории (8.1.11) с использованием теории обратных задач динамики управляемого движения (см. Разд. 2.3) необходимо сформировать функции  $\theta_{\text{тр}}(t)$  и  $\dot{\theta}_{\text{тр}}(t)$ , которые описывают требуемые законы изменения угла и угловой скорости наклона траектории в момент времени  $t \in [t_0, t_1]$ .

Из очевидного равенства:

$$\theta(x) = \arctg f'(x)$$

следует, что

$$\begin{aligned} \theta_{\text{тр}}(t) &= \theta(x(t)) = \arctg f'(x(t)), \\ \dot{\theta}_{\text{тр}}(t) &= \frac{d\theta}{dx} \dot{x} = \frac{f''(x(t)) \dot{x}(t)}{1 + [f'(x(t))]^2}. \end{aligned} \quad (8.1.17)$$

В работе [1] показано, что функции  $x(t)$  и  $y(t)$ , описывающие движение БЛА по кривой  $f(x)$  со скоростью  $V_{\text{зад}}(t)$ , являются решением системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = \frac{V_{\text{зад}}(t)}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}; \quad \dot{y} = \frac{V_{\text{зад}}(t) f'(x)}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}, \quad t \in [t_0, t_1] \quad (8.1.18)$$

с начальными условиями:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0.$$

При выводе этих уравнений были использованы кинематические уравнения:

$$\dot{x} = V \cos \theta; \quad \dot{y} = V \sin \theta$$

и соотношения:

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}};$$

$$\sin \theta = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}.$$

Функция  $x(t)$ , полученная в результате интегрирования системы (8.1.18) и подставленная в выражения (8.1.17), определяет требуемые зависимости  $\theta_{\text{тр}}(t)$  и  $\dot{\theta}_{\text{тр}}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ .

Для формирования вектора косвенного управления  $u(t) = (P(t), \alpha(t))$  при полетах БЛА СС в вертикальной плоскости по траекториям, описываемым уравнениями вида (8.1.11), предлагается решать с использованием выражений (8.1.17) и (8.1.18) систему нелинейных параметрических уравнений вида (5.2.16), (5.2.17). Для определения вектора прямого управления  $\Delta(t)$  используются с соответствующими корректировками соотношения (5.5.8)-(5.5.23).

Вектор управления БЛА ВС, обеспечивающий его движение по траектории (8.1.11), определяется из решения системы параметрических уравнений (6.3.3), сформированной с использованием соотношений (8.1.17) и (8.1.18).

Для перевода координат траекторий полета БЛА, описываемых функциями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , полученными с помощью уравнений (8.1.18) в СК МНПУ $xyz$  (см. Рис. 1.9), используются формулы (1.16).

При формировании траектории (8.1.1) полета БЛА в горизонтальной плоскости, которую представим функцией вида:

$$z = f(x), \quad x \in [x_0, x_1] \quad (8.1.19)$$

можно использовать вспомогательную вариационную задачу с функционалом (8.1.12) и граничными условиями вида:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= z_0; \quad f'(x_0) = \operatorname{tg} \Psi_0; \\ f(x_k) &= z_k; \quad f'(x_k) = \operatorname{tg} \Psi_k, \end{aligned} \quad (8.1.20)$$

сформированными на основе выражений (8.1.2) и Рис. 8.1.

Экстремаль в этой задаче также представляется функцией вида (8.1.14), параметры  $C_1, C_2, C_3, C_4$  которой получаются путем решения системы уравнений (8.1.16), где в правых частях использованы условия (8.1.20).

Для формирования вектора косвенного управления  $u(t) = (\alpha(t), P(t), \gamma(t))$ , обеспечивающего движение БЛА СС по траектории (8.1.19), используются формула (5.2.21) и система уравнений (5.2.22), (5.2.23). Прямое управление этим видом БЛА определяется с использованием выражений (5.5.8)-(5.5.23).

Для БЛА ВС управление формируется путем решения системы уравнений (6.3.8), (6.3.9).

Входящая в отмеченные системы уравнений функция  $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$  строится с использованием следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \Psi(x(t)) = \operatorname{arctg} f(x(t)); \\ \dot{\Psi}(t) &= \frac{d\Psi}{dx} \dot{x} = \frac{f''(x(t))\dot{x}(t)}{1 + [f'(x(t))]^2}. \end{aligned} \quad (8.1.21)$$

Функции  $x(t)$  и  $z(t)$ , описывающие движение БЛА по кривой (8.1.19) со скоростью  $V_{\text{зад}}(t)$ , определяются из решения следующей задачи Коши:

$$\dot{x} = \frac{V_{\text{зад}}(t)}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}; \quad \dot{z} = \frac{V_{\text{зад}}(t)f'(x)}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}; \quad t \in [t_0, t_1]; \quad (8.1.22)$$

$$x(t_0) = x_0; \quad z(t_0) = z_0.$$

Приведенные дифференциальные уравнения соответствуют уравнениям (8.1.14), в которых использовано выражение (8.1.19).

Как было установлено в ходе рассмотрения различных задач применения БЛА, некоторые уравнения  $f(x)$  траекторий их полетов являются многозначными функциями переменной  $x$  [8]. Примером такой функции является уравнение замкнутой круговой траектории полета БЛА в горизонтальной плоскости:

$$\Phi(x, z) = (x - x_{\text{ц}})^2 + (z - z_{\text{ц}})^2 - R^2 = 0, \quad (8.1.23)$$

где  $R$  – радиус траектории;  $(x_{\text{ц}}, z_{\text{ц}})$  – координаты центра траектории.

Представление этой траектории в форме выражения (8.1.19):

$$z = z_{\text{ц}} \pm \sqrt{R^2 - (x - x_{\text{ц}})^2}$$

показывает, что каждому значению координаты  $x$  соответствуют два значения координаты  $z$  такой траектории. Приведенные в работе [1] результаты формирования управления БЛА для такой траектории показали отсутствие единого вектора управления  $u(t) = (P(t), \alpha(t), \gamma(t))$ , обеспечивающего его полет по замкнутой круговой траектории. В этой связи предлагается использовать подход, основанный на неявно заданных требуемых траекториях полетов БЛА в горизонтальной плоскости [96, 114].

В этом случае требуемую траекторию  $z(x)$  его полета будем задавать в форме неявной функции [8] вида:

$$\Phi(x, z) = 0. \quad (8.1.24)$$

Такое представление траекторий полета БЛА в горизонтальной плоскости является более общим, т.к. при явном задании траекторий в форме (8.1.19) это выражение принимает вид:

$$\Phi(x, z) = z - f(x) = 0.$$

Управляющие воздействия, обеспечивающие полет БЛА СС и БЛА ВС по траектории (8.1.24), определяются с использованием приведенных выше соотношений.

Рассмотрим методику построения зависимости  $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$ , описывающей требуемую скорость изменения угла поворота траектории БЛА при его полёте по кривой (8.1.24). Для обеспечения полёта БЛА по этой траектории необходимо построить связь между функцией  $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  и координатами БЛА  $x(t)$  и  $z(t)$ , удовлетворяющими уравнению (8.1.24).

Последние предлагаются определять из решения системы уравнений вида [114]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{V_{\text{зад}}(t)\Phi_z(x, z)}{\sqrt{\Phi_x^2(x, z) + \Phi_z^2(x, z)}}, \\ \dot{z} &= \frac{-V_{\text{зад}}(t)\Phi_x(x, z)}{\sqrt{\Phi_x^2(x, z) + \Phi_z^2(x, z)}},\end{aligned}\quad (8.1.25)$$

которые получаются из уравнений (8.1.14) путем подстановки в их правые части следующего представления производной от неявной функции (8.1.24) [8]:

$$z' = -\frac{\Phi_x(x, z)}{\Phi_z(x, z)} \quad (8.1.26)$$

и проведения несложных преобразований. Здесь  $\Phi_x$  и  $\Phi_z$  – частные производные функции  $\Phi(x, z)$ :

$$\begin{aligned}\Phi_x(x, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, z); \\ \Phi_z(x, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \Phi(x, z).\end{aligned}\quad (8.1.27)$$

Для функции (8.1.23) эти производные имеют вид:

$$\Phi_x(x, z) = 2(x - x_{\Pi}); \quad \Phi_z(x, z) = 2(z - z_{\Pi}).$$

Установлено, что при полёте по кривой (8.1.24) в том или ином направлении функция  $V_{\text{зад}}(t)$  должна соответствующим образом менять знак.

Начальные условия для уравнений (8.1.25) записываются как:

$$x(t_0) = x_h, \quad z(t_0) = z_h. \quad (8.1.28)$$

Здесь  $(x_h, z_h)$  – координаты начальной точки траектории полёта БЛА, которые должны удовлетворять уравнению (8.1.24).

Вычисление функции  $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$  для всех  $t \in [t_0, t_1]$  предлагаются проводить с использованием выражения для производной  $z''(x)$  функции (8.1.24) [8] по формуле вида [114]:

$$\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) = \frac{V_{\text{зад}} [\Phi_{xx} + 2\Phi_{xz}z' + \Phi_{zz}z'^2]}{(1 + z'^2)\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_z^2}}. \quad (8.1.29)$$

В ней используются представление (8.1.26) производной  $z'$ , частные производные (8.1.27) и следующие частные производные 2-го порядка:

$$\begin{aligned} \Phi_{xx}(x, z) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, z); \\ \Phi_{xz}(x, z) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \Phi(x, z); \\ \Phi_{zz}(x, z) &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi(x, z). \end{aligned} \quad (8.1.30)$$

Таким образом, при вычислении функции  $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$  в формуле (8.1.29) используются выражения (8.1.26), (8.1.27), (8.1.30), в которых в качестве аргументов подставляются решения  $x = x(t)$ ,  $z = z(t)$  задачи Коши (8.1.25), (8.1.28).

В существующей практике программирования маршрутов движения БЛА широко используется координатный способ, основанный на задании в горизонтальной плоскости полета координат поворотных пунктов маршрута (ППМ) или характерных точек его траектории (ХТТ) в вертикальной плоскости. В последующем задаваемые координаты соединяются отрезками прямых, и полученная ломаная является описанием формируемой траектории БЛА. Основным недостатком такого подхода является отсутствие гладкости получаемых траекторий. Это вызывает необходимость использования в окрестностях ППМ и

ХТТ либо специальных переходных траекторий движения БЛА, либо «ручного» управления его полетом при переводе БЛА с одного линейного участка на другой участок такой траектории.

Рассмотрим подход, позволяющий с использованием сплайн-интерполяции [97] заданной совокупности ХТТ получать непрерывное и гладкое представление требуемой криволинейной траектории движения БЛА в вертикальной плоскости.

Будем считать, что специалистами МНПУ БАК в выбранной маневренной СК задана совокупность координат  $(x_k, y_k)$ ,  $k = (\overline{1, N})$  точек, описывающих ХТТ требуемого движения БЛА. Эти точки вместе с интерполирующей их сплайн-функцией  $S(x)$  приведены на Рис. 8.3.

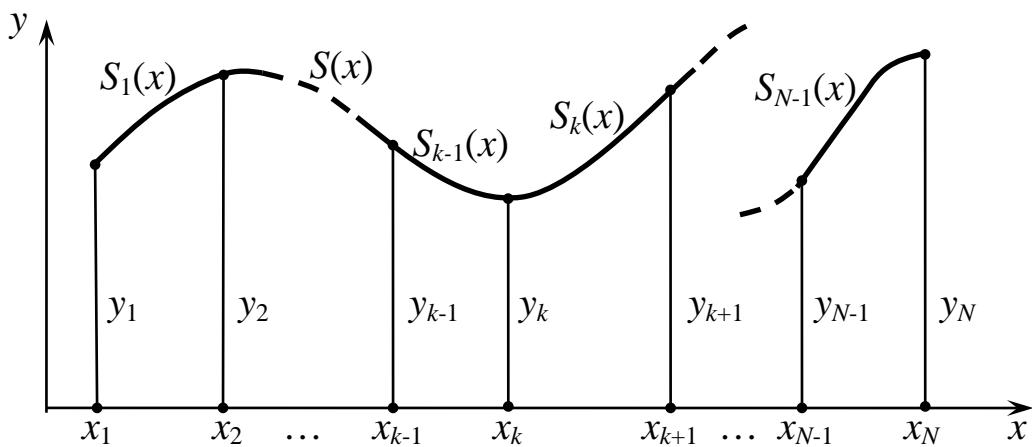


Рис. 8.3

В качестве функции  $S(x)$  будем использовать кубический сплайн [97], который обладает следующими свойствами:

- 1) проходит через все заданные  $N$  точки с координатами  $(x_k, y_k)$ ,  $k = (\overline{1, N})$ ;
- 2) на каждом отрезке между двумя соседними точками является кубическим полиномом;
- 3) является непрерывной функцией вместе со своими первой и второй производными во всех точках  $x_1, x_2, \dots, x_N$ .

Кубический сплайн записывается для каждого отрезка с номером  $k$ , левый конец которого имеет абсциссу  $x_k$  (см. Рис.

8.3). На этом отрезке для любого  $x \in [x_k, x_{k+1}]$  результат интерполяции вычисляется по фрагменту кубического сплайна, который имеет вид:

$$S_k(x) = y_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3. \quad (8.1.31)$$

При этом между  $N$  заданными точками расположен  $(N - 1)$  отрезок, так что в данной формуле  $k = 1, 2, \dots, N - 2$ .

Если значение переменной  $x$  переходит на другой отрезок, то следует изменить номер  $k$  текущего отрезка и при этом изменятся все коэффициенты  $b_k, c_k, d_k$  в формуле (8.1.31).

Коэффициенты  $b_k$  и  $d_k$  можно выразить через значения коэффициентов  $c_k$  по формулам вида:

$$\begin{aligned} b_{k-1} &= \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} - \frac{h_{k-1}}{3}(c_k + 2c_{k-1}), \\ d_{k-1} &= \frac{1}{3h_{k-1}}(c_k - c_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots, N, \end{aligned} \quad (8.1.32)$$

где  $h_{k-1} = x_k - x_{k-1}$  – длина интервала  $[x_{k-1}, x_k]$ .

Значения коэффициентов  $c_k$ , входящих в эти формулы определяются из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{h_{k-1}}{3}c_{k-1} + \frac{2}{3}(h_{k-1} + h_k)c_k + \frac{h_k}{3}c_{k+1} &= \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}}, \\ k &= 2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (8.1.33)$$

При этом предполагается, что  $c_1 = 0, c_N = 0$ .

Система уравнений (8.1.33) решается одним из численных методов, приведенных в Разд. 3.2.

После построения фрагментов сплайна  $S_k(x), x \in [x_k, x_{k+1}], k = 1, 2, \dots, N-1$ , описывающих требуемую траекторию движения БЛА на этих интервалах, применяются выражения (8.1.17), (8.1.18), где считается, что  $f(x) = S_k(x)$ . Далее с использованием указанных выше соотношений для каждого интервала определяется искомая совокупность векторов управлений  $u_k(t)$  и (или)  $\Delta_k(t), k = (\overline{1, N-1})$  для применяемого вида БЛА.

Отметим, что применение кубических сплайнов позволяет также как и для уравнений вида (8.1.14) получить требуемую траекторию полета БЛА, имеющую минимальные значения кривизны и перегрузки  $n_y$ .

Описанный выше подход при задании специалистами МНПУ БАК совокупности  $(x_k, z_k)$ ,  $k = (\overline{1, N})$  координат ППМ, расположенных в соответствующей горизонтальной плоскости, применим при формировании требуемых траекторий полета БЛА в этой плоскости. Здесь также по полученному сплайн-представлению таких траекторий с привлечением приведенных выше выражений для каждого фрагмента  $S_k(x)$  формируются управления  $\Delta_k(t)$ ,  $k = (\overline{1, N})$  для БЛА СС или БЛА ВС, обеспечивающие их движения по сформированным траекториям.

В Главах 5 и 6, а также в данном разделе в составе исходных данных для формирования управлений БЛА используется требуемый закон  $V_{\text{зад}}(t)$  изменения его скорости в процессе выполнения полетного задания.

Для более сложных законов изменения скорости БЛА, чем линейное изменение  $V_{\text{зад}}(t)$ , описываемое первой формулой из состава выражений (5.1.63), предлагается использовать описанную выше сплайн-интерполяцию совокупности требуемых значений скорости  $(t_k, V_k)$ ,  $k = (\overline{1, N})$  БЛА в ХТТ и ППМ, формируемую специалистами МНПУ БАК.

В заключение данного раздела рассмотрим вопрос о формировании переходных траекторий полетов БЛА, которые используются при переходах между различными этапами его полета, оперативной смене в воздухе программ полета и применении команд управления из множества  $K$ , входящего в выражения (1.10) и (1.11).

Будем считать, что при необходимости сохранения направления полета БЛА по смежным траекториям переходная траек-

тория  $z_0(x)$  с координатами точек начала  $(x_h, z_h)$  и конца  $(x_k, z_k)$  будет иметь вид, представленный на Рис. 8.4.

Здесь  $z = \varphi_1(x)$  и  $z = \varphi_2(x)$  – общий вид записи уравнений рассматриваемых смежных траекторий БЛА.

Особенностями переходной траектории  $z_0(x)$  являются:

- заданные значения координат  $(x_h, z_h)$  и свободные (искомые) значения координат  $(x_k, z_k)$ ;
- необходимость обеспечения в точках  $(x_h, z_h)$  и  $(x_k, z_k)$  выполнения условий вида:

$$\begin{aligned} z_0(x_h) &= \varphi_1(x_h), \quad z'_0(x_h) = \varphi'_1(x_h); \\ z_0(x_k) &= \varphi_2(x_k), \quad z'_0(x_k) = \varphi'_2(x_k). \end{aligned} \quad (8.1.34)$$

- непрерывность и минимальная кривизна траектории  $z_0(x)$  при  $x \in [x_h, x_k]$ .

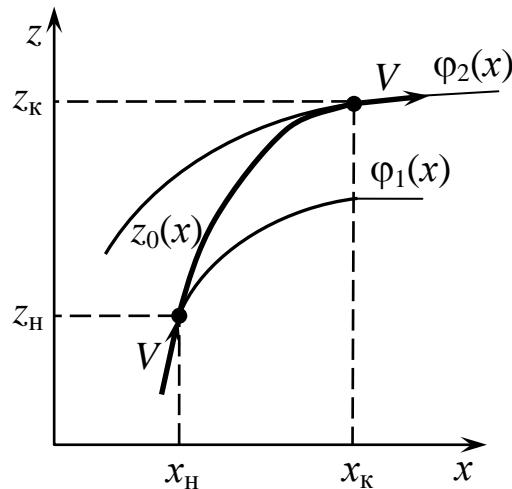


Рис. 8.4

Для синтеза траектории  $z_0(x)$ , удовлетворяющей этим требованиям, будем использовать вспомогательную вариационную задачу с подвижными границами, описанную в Разд. 2.4.2.

Введем функционал, определяющий интегральную оценку кривизны искомой функции  $z_0(x)$ :

$$J(x_k) = \int_{x_h}^{x_k} (z''_0(x))^2 dx \rightarrow \min_{z_0(x), x_k}. \quad (8.1.35)$$

Выражения (8.1.35), (8.1.34) описывают решаемую вариационную задачу со свободным правым концом.

Для функционала  $J$  уравнение Эйлера (2.4.18) записывается как:

$$z_0^{\text{IV}}(x) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получаем функцию вида:

$$z_0(x) = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4,$$

где  $c_i$  – постоянные интегрирования,  $i = \overline{(1,4)}$ .

Производные от функции  $z_0(x)$  записываются как:

$$\begin{aligned} z_0'(x) &= 3c_1 x^2 + 2c_2 x + c_3; \\ z_0''(x) &= 6c_1 x + 2c_2. \end{aligned} \quad (8.1.36)$$

В связи с тем, что правый конец экстремали  $z_0(x)$  является свободным, будем использовать второе условие трансверсальности из состава выражений (2.4.21). Это условие с учетом того, что  $F(x) = z_0''(x)$  и  $F'_{z_0} = 0$  примет вид:

$$z_0''(x_k) = 0.$$

Подставляя в это соотношение второе выражение из состава формул (8.1.36), получим следующее уравнение:

$$3c_1 x_k + c_2 = 0.$$

Тогда задача построения переходной траектории  $z_0(x)$  формулируется следующим образом: «Определить значения параметров  $c_1, c_2, c_3, c_4, x_k$  из решения системы нелинейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{aligned} 3c_1 x_k + c_2 &= 0; \\ c_1 x_h^3 + c_2 x_h^2 + c_3 x_h + c_4 - \varphi_1(x_h) &= 0; \\ 3c_1 x_h^2 + 2c_2 x_h + c_3 - \varphi'_1(x_h) &= 0; \\ c_1 x_k^3 + c_2 x_k^2 + c_3 x_k + c_4 - \varphi_2(x_k) &= 0; \\ 3c_1 x_k^2 + 2c_2 x_k + c_3 - \varphi'_2(x_k) &= 0. \end{aligned} \quad (8.1.37)$$

Сформированная траектория  $z_0(x)$  записывается как:

$$z_0(x) = c_1^{(0)}x^3 + c_2^{(0)}x^2 + c_3^{(0)}x + c_4^{(0)}, \quad (8.1.38)$$

где  $c_i^{(0)}$  – значения коэффициентов, полученные при численном решении системы (8.1.37) одним из методов, описанных в Разд. 3.4.

Для формирования векторов управлений, обеспечивающих движение по траектории (8.1.38), используются приведенные выше выражения. Предложенный подход при задании функций  $y = \varphi_1(x)$  и  $y = \varphi_2(x)$  можно использовать для синтеза переходной траектории  $y_0(x)$  в вертикальной плоскости полета БЛА.

## 8.2. Управление полетами БЛА по требуемым пространственным траекториям

В работе [9] для определения управлений ЛА методами теории обратных задач динамики управляемых систем предлагается использовать следующие способы описания пространственных траекторий, требуемых для реализации их движения:

1. Параметрическое представление траекторий вида:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t), \quad t \in [t_0, t_k] \quad (8.2.1)$$

в земной СК.

2. Классическое представление траекторий в форме пространственной кривой как линии пересечения двух поверхностей [8, 17]:

$$F_1(x, y, z) = 0; \quad F_2(x, y, z) = 0, \quad (8.2.2)$$

построенных в земной СК.

На наш взгляд, такие представления не обладают практической ценностью при формировании специалистами МНПУ БАК требуемых траекторий полетов БЛА из-за отсутствия наглядности и значительных трудностей, связанных с адекватным выбором функций, входящих в приведенные выше выражения (8.2.1) и (8.2.2).

Для исключения этих недостатков будем использовать проекционный подход, суть которого заключается в задании таки-

ми специалистами проекции формируемой траектории на некоторую координатную плоскость в виде плоской кривой с ее последующим преобразованием в пространственную кривую, описывающую требуемую траекторию полета БЛА.

Будем считать, что требуемая пространственная траектория формируется в маневренной СК ( $Mx_M y_M z_M$ ), представленной на Рис. 1.9.

В последующем для простоты изложения индекс « $M$ » у применяемых координат и переменных будет опущен.

Пусть в общем случае проекция искомой траектории на координатную плоскость  $Mxz$  задана в неявной форме (8.1.24) уравнением вида:

$$\Phi(x, z) = 0. \quad (8.2.3)$$

Геометрически эта кривая представляет собой в СК  $Mxyz$  направляющую криволинейного цилиндра с образующей, параллельной оси  $My$  [17].

Будем считать заданным требуемый закон изменения высоты полета БЛА во времени:

$$y_{\text{тр}} = y_{\text{тр}}(t), \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (8.2.4)$$

В этом случае пространственная траектория движения БЛА будет иметь вид, представленный на Рис. 8.5.

На этом рисунке  $(x_0, y_0, z_0)$  и  $(x_k, y_k, z_k)$  – координаты начальной и конечной точек формируемой траектории, которые должны удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} \Phi(x_0, z_0) &= 0; \quad \Phi(x_k, z_k) = 0; \\ y_0 &= y_{\text{тр}}(t_0); \quad y_k = y_{\text{тр}}(t_k). \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

Определим функции  $\theta_{\text{тр}}(t)$ ,  $\dot{\theta}_{\text{тр}}(t)$ ,  $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ , обеспечивающие движение БЛА по траектории, изображенной на Рис. 8.5.

Рассмотрим кинематические уравнения (5.1.19)-(5.1.21) пространственного движения БЛА.

Подставляя в уравнение (5.1.20) функцию  $V_{\text{зад}} = V_{\text{зад}}(t)$  и производную от функции (8.2.4), имеем:

$$\sin \theta = \dot{y}_{\text{тр}} / V_{\text{зад}}. \quad (8.2.6)$$

Отсюда получаем, что

$$\theta_{\text{тр}}(t) = \arcsin(\dot{y}_{\text{тр}}(t) / V_{\text{зад}}(t)). \quad (8.2.7)$$

Производная от этой функции будет иметь следующий вид:

$$\dot{\theta}_{\text{тр}}(t) = \frac{\ddot{y}_{\text{тр}}(t)V_{\text{зад}}(t) - \dot{y}_{\text{тр}}(t)\dot{V}_{\text{зад}}(t)}{V_{\text{зад}}(t)\sqrt{V_{\text{зад}}^2(t) - \dot{y}_{\text{тр}}^2(t)}}. \quad (8.2.8)$$

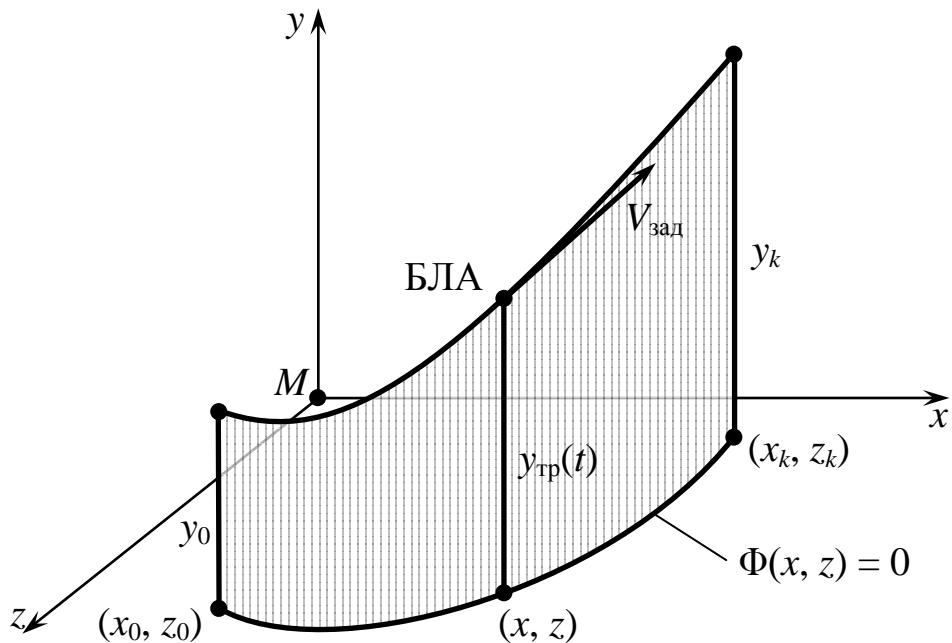


Рис. 8.5

Используя выражение (8.2.6), вычислим функцию:

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{V_{\text{зад}}^2 - \dot{y}_{\text{тр}}^2}}{V_{\text{зад}}}. \quad (8.2.9)$$

Приведенные выше уравнения (8.1.25) были построены с использованием следующих представлений, содержащих производные функции  $\Phi(x, z)$ :

$$\cos \Psi = \frac{\Phi_z}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_z^2}}; \quad \sin \Psi = -\frac{\Phi_x}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_z^2}}. \quad (8.2.10)$$

Подставляя выражения (8.2.9), (8.2.10) в уравнения (5.1.19) и (5.1.21), получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \Phi_z(x, z) \sqrt{\frac{V_{\text{зад}}^2(t) - \dot{y}_{\text{тр}}^2(t)}{\Phi_x^2(x, z) + \Phi_z^2(x, z)}}; \\ \dot{z} &= -\Phi_x(x, z) \sqrt{\frac{V_{\text{зад}}^2(t) - \dot{y}_{\text{тр}}^2(t)}{\Phi_x^2(x, z) + \Phi_z^2(x, z)}}.\end{aligned}\quad (8.2.11)$$

Начальные условия для этой системы имеют вид:

$$x(t_0) = x_0; \quad z(t_0) = z_0, \quad (8.2.12)$$

где значения  $x_0, z_0$  должны удовлетворять первым двум равенствам из состава выражений (8.2.5).

В частном случае зависимость (8.2.4) может быть представлена как:

$$y_{\text{тр}}(t) = y_0 + V_y(t - t_0), \quad t \in [t_0, t_k],$$

где  $V_y$  – вертикальная скорость рассматриваемого образца БЛА.

При использовании такой зависимости уравнения (8.2.11) конкретизируются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \Phi_z(x, z) \sqrt{\frac{V_{\text{зад}}^2(t) - V_y^2}{\Phi_x^2(x, z) + \Phi_z^2(x, z)}}; \\ \dot{z} &= -\Phi_x(x, z) \sqrt{\frac{V_{\text{зад}}^2(t) - V_y^2}{\Phi_x^2(x, z) + \Phi_z^2(x, z)}}.\end{aligned}$$

Из этих выражений следует, что при  $V_y = 0$  получаем ранее построенную систему уравнений вида (8.1.25).

Требуемый закон изменения угловой скорости  $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$  формируется с помощью выражений (8.2.3), (8.1.29), (8.1.26), (8.1.27), (8.1.30), в которых используются функции  $x = x(t)$ ,  $z = z(t)$ , полученные при решении задачи Коши (8.2.11), (8.2.12).

Определение вектора косвенного управления  $u(t) = (P(t), \alpha(t), \gamma(t))$ , обеспечивающего движение БЛА СС по

пространственной траектории, описываемой выражениями (8.2.3), (8.2.4), осуществляется путем решения системы нелинейных параметрических уравнений (5.1.54). При этом используются выражения (8.2.3), (8.2.4), (8.2.7), (8.2.8), (8.2.11), (8.2.12), характеризующие требуемую пространственную траекторию полета БЛА СС. Вектор прямого управления  $\Delta(t)$  БЛА СС классической схемы определяется с использованием вектора  $u(t)$ , сформированных зависимостей  $\theta_{\text{тр}}(t)$ ,  $\Psi_{\text{тр}}(t)$  и соответствующим образом преобразованных выражений (5.5.2)-(5.5.23).

Вектор управления  $\Delta(t)$  БЛА ВС, описываемый выражением (6.2.18), определяется путем решения системы нелинейных параметрических уравнений (6.2.20), (6.2.24).

Отметим, что изложенный выше подход позволяет с использованием выражений (8.2.4), (8.2.11), (8.2.12) получить представление требуемой пространственной траектории БЛА в форме (8.2.1).

Пусть требуется, чтобы пространственная траектория БЛА была расположена на плоскости, которая представляется следующим уравнением [17]:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (8.2.13)$$

Кроме общего уравнения плоскости вида (8.2.13) плоскость полета БЛА может быть задана ее уравнением в отрезках [17]:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (8.2.14)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – длины отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях  $Mx$ ,  $My$ ,  $Mz$ .

Нормальное уравнение плоскости полета БЛА записывается как [17]:

$$x \cos \alpha_x + y \cos \alpha_y + z \cos \alpha_z - p = 0. \quad (8.2.15)$$

Здесь  $p$  – длина перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на плоскость;  $\cos \alpha_x$ ,  $\cos \alpha_y$ ,  $\cos \alpha_z$  – направляющие косинусы этого

перпендикуляра;  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $\alpha_z$  – углы между перпендикуляром и положительными направлениями осей  $Mx$ ,  $My$  и  $Mz$ . При этом должно выполняться равенство:

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1. \quad (8.2.16)$$

Формулы связи между уравнениями (8.2.13) и (8.2.14) имеют вид:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a}; & B &= \frac{1}{b}; \\ C &= \frac{1}{c}; & D &= -1. \end{aligned} \quad (8.2.17)$$

Значения углов  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $\alpha_z$  и параметра  $p$  для уравнения плоскости, заданного в форме (8.2.13), вычисляются из следующих соотношений [17]:

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \arccos \left( \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right); \\ \alpha_y &= \arccos \left( \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right); \\ \alpha_z &= \arccos \left( \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right); \\ p &= \frac{D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{aligned} \quad (8.2.18)$$

где знак перед корнем выбирается так, чтобы параметр  $p$  был положительным.

В случае если коэффициент  $D = 0$ , то есть плоскость проходит через точку  $M$ , то выбор знака в выражениях (8.2.18) произволен.

Положение в пространстве введенного выше перпендикуляра длиной  $p$  может на практике быть задано его углами азимута  $\phi$  и места  $\lambda$ .

В этом случае имеем, что

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \arccos(\cos \varphi \cos \lambda); \\ \alpha_y &= \frac{\pi}{2} - \lambda; \\ \alpha_z &= \arccos(\sin \varphi \cos \lambda).\end{aligned}\quad (8.2.19)$$

Ниже будут использованы общее уравнение плоскости в форме (8.2.13) и выражения (8.2.16), (8.2.18) или (8.2.19).

Будем считать, что проекция искомой траектории на координатную плоскость  $Mxz$  описывается уравнением (8.2.3).

В этом случае искомая траектория получается как представленная на Рис. 8.6 линия пересечения цилиндра (8.2.3) с плоскостью (8.2.13).

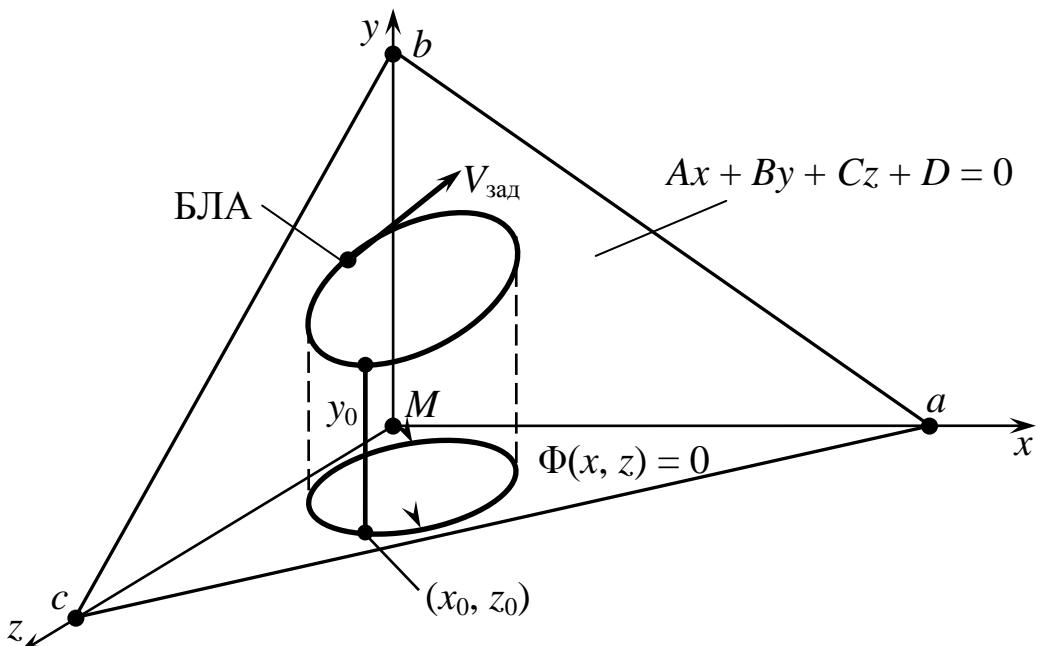


Рис. 8.6

Рассмотрим метод формирования функций  $\theta_{\text{тр}}(t)$ ,  $\dot{\theta}_{\text{тр}}(t)$  и  $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$ , учитывающий отмеченную выше специфику требуемой пространственной траектории полета БЛА.

Преобразуем выражение (8.2.13) к виду:

$$y = -\frac{1}{B}(Ax + Cz + D). \quad (8.2.20)$$

Как было отмечено выше, уравнение (8.2.3) определяет неявно заданную функцию  $z = z(x)$ .

С учетом этого перепишем полученную формулу как:

$$y = -\frac{1}{B}(Ax + Cz(x) + D).$$

Дифференцируя это выражение по  $x$  и заменяя производную  $z'$  правой частью формулы (8.1.26), получим:

$$y' = -\frac{1}{B}\left(A - \frac{C\Phi_x(x, z)}{\Phi_z(x, z)}\right).$$

Преобразуем эту функцию к виду:

$$y' = \frac{C\Phi_x(x, z) - A\Phi_z(x, z)}{B\Phi_z(x, z)}, \quad (8.2.21)$$

где  $\Phi_x$  и  $\Phi_y$  – частные производные функции (8.2.3), определяемые выражениями (8.1.27).

Из очевидного соотношения:

$$\operatorname{tg} \theta = y'$$

с использованием выражения (8.2.21) требуемый закон  $\theta_{\text{тр}}(t)$  изменения угла наклона искомой пространственной траектории БЛА можно представить как:

$$\theta_{\text{тр}}(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{C\Phi_x(x(t), z(t)) - A\Phi_z(x(t), z(t))}{B\Phi_z(x(t), z(t))}\right). \quad (8.2.22)$$

В этом выражении функции  $x = x(t)$  и  $z = z(t)$  являются параметрическим представлением изменений соответствующих координат БЛА во времени.

Функцию  $\dot{\theta}_{\text{тр}}(t)$  будем приближенно определять по формуле:

$$\dot{\theta}_{\text{тр}}(t) \cong \frac{\theta_{\text{тр}}(t + \Delta t) - \theta_{\text{тр}}(t)}{\Delta t}, \quad (8.2.23)$$

где  $\Delta t$  – достаточно малая величина приращения времени  $t$ .

При недостаточной точности приведенного выше представления производной  $\dot{\theta}_{\text{тр}}(t)$  могут быть использованы другие методы численного дифференцирования функции (8.2.22), приведенные в работах [17, 25].

В рассматриваемом виде пространственных траекторий полета БЛА вектор  $V_{\text{зад}}(t)$  его скорости должен лежать в плоскости (8.2.13), а точка с координатами  $x = x(t)$ ,  $z = z(t)$ , удовлетворять уравнению (8.2.3) и двигаться по координатной плоскости  $Mxz$  (см. Рис. 8.6). При этом вектор скорости точки будет иметь компоненты  $V_{x\text{зад}}(t)$  и  $V_{z\text{зад}}(t)$ , которые являются проекциями вектора  $V_{\text{зад}}(t)$  на оси  $Mx$  и  $Mz$ .

Из определения углов  $\alpha_x$  и  $\alpha_z$  следует, что

$$\begin{aligned} V_{x\text{зад}}(t) &= V_{\text{зад}}(t) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_x\right) = V_{\text{зад}}(t) \sin \alpha_x; \\ V_{z\text{зад}}(t) &= V_{\text{зад}}(t) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_z\right) = V_{\text{зад}}(t) \sin \alpha_z, \end{aligned} \quad (8.2.24)$$

где  $\alpha_x$  и  $\alpha_z$  вычисляются по формулам (8.2.18) или (8.2.19).

В этом случае дифференциальные уравнения для вычисления функций  $x = x(t)$  и  $z = z(t)$  будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{V_{\text{зад}}(t) \sin \alpha_x \Phi_z(x, z)}{\sqrt{\Phi_x^2(x, z) + \Phi_z^2(x, z)}}; \\ \dot{z} &= -\frac{V_{\text{зад}}(t) \sin \alpha_z \Phi_x(x, z)}{\sqrt{\Phi_x^2(x, z) + \Phi_z^2(x, z)}}. \end{aligned} \quad (8.2.25)$$

В общем случае эта система интегрируется определенным численным методом (см. Разд. 3.1) с некоторым шагом  $\Delta t$ , значение которого должно использоваться в формуле (8.2.23).

Заметим, что если плоскость полета БЛА будет параллельна координатной плоскости  $Mxz$ , то углы  $\alpha_x = \alpha_z = \pi/2$ .

В этом случае из выражений (8.2.15) и (8.2.16) следует, что полученное уравнение плоскости:

$$y - p = 0$$

соответствует полету БЛА в горизонтальной плоскости на высоте  $y = p$ .

Подставляя отмеченные выше значения углов  $\alpha_x$  и  $\alpha_z$  в выражения (8.2.25), получаем систему дифференциальных урав-

нений (8.1.25), описывающую движение БЛА в горизонтальной плоскости.

Функция  $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$  формируется на основе формулы (8.1.29) с использованием выражений (8.1.26), (8.1.27), (8.1.30).

При этом в последние формулы подставляются результаты интегрирования системы (8.2.25), а в выражении (8.1.29) вместо сомножителя  $V_{\text{зад}}(t)$  используется функция  $V_{x\text{зад}}(t)$  из формул (8.2.24).

Таким образом, определены все исходные данные для решения системы нелинейных параметрических уравнений (5.1.54), обеспечивающей формирование вектора косвенного управления  $u(t)$  при движении БЛА СС в произвольной плоскости полета. Вектор прямого управления  $\Delta(t)$  этим видом БЛА формируется с использованием выражений (5.5.8)-(5.5.23).

Для формирования управления БЛА ВС, обеспечивающего выполнение его полетов в таких плоскостях, в системе уравнений (6.2.20), (6.2.24) для определения компонент вектор (6.2.18) используются соотношения (8.2.13), (8.2.22), (8.2.23), (8.1.29) вместе с указанными выше сопутствующими им выражениями.

При отсутствии возможностей аналитического описания сложных пространственных траекторий полетов БЛА предлагается при формировании их управлений использовать полетные данные соответствующих ЛА-имитаторов, в качестве которых используются определенные типы самолетов и вертолетов [89]. Такой подход может быть использован при воспроизведении БЛА СС и БЛА ВС пространственных маневров современных боевых самолетов и вертолетов.

Будем считать, что имеются полетные записи бортового накопителя информации со значениями пилотажных параметров при выполнении выбранным самолетом-имитатором определенного пространственного маневра.

В Таблице 8.1 приведен фрагмент перечня регистрируемых параметров на бортовом накопителе одного из современных самолетов среднего класса [89].

Как показала практика работы с полетной информацией [16], регистрируемые данные за счет ошибок измерений и флюктуаций нуждаются в проведении предварительной (первой) обработки.

Пусть с использованием сплайн-аппроксимации [16, 97] полетных данных ЛА-интегратора получены зависимости вида:

$$\begin{aligned} y^*(t) &= H_{\text{пр}}(t); \quad V^*(t) = V_{\text{пр}}(t); \\ n_x^*(t) &= n_x(t); \quad n_y^*(t) = n_y(t); \\ n_z^*(t) &= n_z(t); \quad \gamma^*(t) = \gamma(t); \\ \theta^*(t) &= \vartheta(t) + \alpha(t), \quad t \in [t_0, t_k]. \end{aligned} \tag{8.2.26}$$

Таблица 8.1.

Обозначение	Единица измерения.	Диапазон измерения	Частота регистрации в кадре /в сек	Адрес канала /разряда в кадре ЗБН	Значащие разряды	Дополнительный код	Цена младшего разряда (Мин/Макс)	Источник информации
<b>1. Аналоговые параметры, характеризующие движение самолета</b>								
$H_g$	м	0...1500	1/4	2	12-1	–	1	РВМ-95 БЦВМ
$M$	ед.	0,2...1,2	1/4	116	12-3	12 (1)	2,734375E-03	КСУ-130
$H_{\text{бар}}^{\text{отн}}$	м	0...15000	1/4	9	12-3	12 (1)	29,29688	КСУ-130
$V_{\text{приб}}$	км/ч	100...1200	1/4	66	12-3	12 (1)	2,929688	КСУ-130
$n_x$	g	±5	2/8	30, 158	12-3	12 (1)	0,015625	КСУ-130
$n_y$	g	±10	4/16	11, 75, 139, 203	12-3	12 (1)	0,03125	КСУ-130
$n_z$	g	±3	2/8	94, 222	12-3	12 (1)	0,0078125	КСУ-130
$\gamma$	Угл. град	±180	2/8	31,159	12-3	12 (1)	0,3515625	БИНС БЦВМ
$\vartheta$	Угл. град	±180	2/8	3. 131	12-3	12 (1)	0,3515625	БИНС БЦВМ
$\Psi$	Угл. град	0...360	1/4	201	12-3	12	0,3515625 без знака	БИНС БЦВМ
$\alpha$	Угл. град	-90+90	2/8	36, 164	12-3	12 (1)	0,234375	КСУ-130
$\omega_x$	град/с	±240	4/16	6, 70, 134, 198	12-3	12 (1)	0,585938	КСУ-130
$\omega_z$	град/с	±60	2/8	12, 140	12-3	12 (1)	0,175781	КСУ-130
$\omega_y$	град/с	±60	2/8	14, 142	12-3	12 (1)	0,175781	КСУ-130

Здесь  $H_{\text{пр}}$ ,  $V_{\text{пр}}$ ,  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$ ,  $\gamma$ ,  $\vartheta$ ,  $\alpha$  - параметры полета самолета-имитатора, снятые с его бортового накопителя, которые рассматриваются как требуемые к воспроизведению БЛА параметры полета  $y^*$ ,  $V^*$ ,  $n_x^*$ ,  $n_y^*$ ,  $n_z^*$ ,  $\gamma^*$ ,  $\theta^*$ .

Производные  $\dot{V}^*(t)$ ,  $\dot{\theta}^*(t)$  и  $\dot{\Psi}^*(t)$ , выступающие в качестве введенных выше зависимостей  $\dot{V}_{\text{зад}}(t)$ ,  $\dot{\theta}_{\text{тр}}(t)$  и  $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$ , вычисляются с помощью уравнений (5.1.25) по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\dot{V}^*(t) &= g \left( n_x^*(t) - \sin \theta^*(t) \right), \\ \dot{\theta}^*(t) &= \frac{g}{V^*(t)} \left( n_y^*(t) \cos \gamma^*(t) - n_z^* \sin \gamma^*(t) - \cos \theta^*(t) \right), \\ \dot{\Psi}^*(t) &= - \frac{g}{V^*(t) \cos \theta^*(t)} \left( n_y^*(t) \sin \gamma^*(t) + n_z^* \cos \gamma^*(t) \right).\end{aligned}\quad (8.2.27)$$

Для нахождения косвенных управлений БЛА СС вида  $u(t) = (P(t), \alpha(t), \gamma(t))$ , используемых для воспроизведения им соответствующих маневров самолета-имитатора, воспользуемся системой уравнений (5.1.54), переписанной в виде:

$$\begin{aligned}P(t) - X(V^*(t), y^*(t), \alpha(t)) - mg \sin \theta^*(t) - mV^*(t) &= 0; \\ \left[ P(t)(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V^*(t), y^*(t), \alpha(t)) \right] \cos \gamma(t) - \\ - mg \cos \theta^*(t) - mV^*(t) \dot{\theta}^*(t) &= 0; \\ \left[ P(t)(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V^*(t), y^*(t), \alpha(t)) \right] \sin \gamma(t) - \\ - mV^*(t) \cos \theta^*(t) \dot{\Psi}^*(t) &= 0, \quad t \in [t_0, t_k].\end{aligned}\quad (8.2.28)$$

Решение данной системы уравнений одним из численных методов из Разд. 3.5 совместно с рассчитанными для БЛА по формулам (5.1.24) перегрузками должны удовлетворять условиям (5.1.55) и дополнительным ограничениям:

$$|n_x^*(t)| \leq |n_x^{\max}|; \quad |n_y^*(t)| \leq |n_y^{\max}|; \quad |n_z^*(t)| \leq |n_z^{\max}|,$$

правые части которых содержат максимальные значения соответствующих эксплуатационных перегрузок конкретного образца БЛА СС, для которого формируется требуемая простран-

ственная траектория полета. Пример решения системы уравнений (8.2.28) при использовании полетных данных самолета СУ-35 приведен в работе [89]. При выполнении всех отмеченных ограничений осуществляется расчет вектора  $\Delta(t)$  прямого управления БЛА СС с привлечением соотношений (5.5.8)-(5.5.23).

Аналогичный подход с использованием соответствующего типа вертолета-имитатора может быть использован при программировании сложных маневров беспилотного вертолета. В этом случае исходные данные для решения системы параметрических уравнений (6.2.20), (6.2.24) берутся из системы автоматической регистрации параметров полета (САРПП) применяемого вертолета-имитатора.

### **8.3. Управление информационными БЛА**

Как было отмечено в Главе 1, основная масса БЛА, существующих и разрабатываемых у нас в стране и за рубежом, предназначена для выполнения функций воздушной разведки и наблюдения (мониторинга) наземной обстановки [83].

Вместе с тем, можно констатировать практически полное отсутствие теоретических основ управления таким многочисленным типом ИнБЛА, как БЛА разведки и мониторинга (БЛА-РМ). В работе [84] приводятся элементарные сведения по организации полетов таких БЛА, которые ориентированы на поиск, обнаружение и распознавание отдельных («точечных») объектов, расположенных на наземной поверхности.

В литературе [44, 50 и др.] в состав перспективных задач, решаемых БЛА-РМ, предлагается включить разведку и наблюдение мест дислокации крупных воинских (флотских) группировок; зон природных и техногенных катастроф и чрезвычайных ситуаций; состояний путе-, нефте- и газопроводов; зон загрязнения, химического и радиоактивного заражения воздушного бассейна и др.

Для разработки методов управления БЛА-РМ предлагается использовать следующую классификацию типов объектов контроля, расположенных в наземных (надводных) и воздушных областях земного пространства [114]:

1. Точечные объекты (образцы наземной (надводной) техники, люди, небольшие группы людей и т.п.).
2. Линейные объекты (колонны техники, автомобильные и железные дороги, нефте- и газопроводы, линии электропередач и т.п.).
3. Плоские объекты (крупные группы точечных объектов, места дислокации крупных воинских подразделений, населенные пункты, зоны наводнений и землетрясений и т.п.).
4. Пространственные объекты (области химического и радиоактивного заражения воздушного бассейна и т.п.).

Для видовой разведки и мониторинга объектов первых трех типов в настоящее время широко используется оптико-электронная целевая аппаратура БЛА-РМ (телевизионная аппаратура, тепловизионная аппаратура, цифровая фотоаппаратура и др.).

Перспективными видами целевой аппаратуры видовой разведки и мониторинга являются бортовые радиолокационные (БРЛС) [114] и лазерные локационные системы.

Для проведения радиотехнической разведки (РТР) объектов 1-го типа используется специальная целевая аппаратура БЛА-РМ.

Объекты 4-го типа контролируются специальными датчиками, установленными на борту БЛА-РМ.

Кроме решения задач разведки и мониторинга ИнБЛА выполняют такую важную функцию, как ретрансляция сигналов наземных и воздушных систем связи.

В данном разделе рассматриваются методы управления БЛА-РМ, БЛА-РТР и БЛА-ретрансляторами, обеспечивающих их движение по траекториям, формируемым персоналом МНПУ БАК после получения соответствующих полетных заданий.

### **8.3.1. Управление БЛА оптико-электронной видовой разведки и мониторинга наземных (надводных) объектов**

Данный тип БЛА-РМ предназначен для визуального поиска и обнаружения точечных объектов, а также контроля состояния линейных и плоских объектов в дневное и ночное время суток. В процессе полета БЛА получаемое с помощью его бортовой оптико-электронной системы (ОЭС) видеоизображение определенного участка наземной (надводной) поверхности передается по информационной радиолинии на МНПУ БАК и отображается на мониторах АРМ оператора целевой нагрузки. Проводя анализ полученного изображения, оператор осуществляет распознавание и идентификацию, как объектов, так и их состояний. Решение этих задач существенным образом связано с четкостью и скоростью изменения видеоизображения на экранах его АРМ, которые в свою очередь зависят от высоты и скорости полета БЛА, а также от характеристик применяемой ОЭС. Видовая воздушная разведка и мониторинг объектов обычно осуществляется в некоторой области наземной (надводной) поверхности.

Поэтому при формировании управлений этим типом БЛА-РМ необходимо учитывать размеры таких областей и проекции поля зрения применяемой ОЭС на наземную (надводную) поверхность.

Построим проекцию поля зрения ОЭС БЛА-РМ на контролируемую в процессе его полета наземную (надводную) поверхность.

При этом в качестве исходных данных используются следующие параметры:  $h_{\text{пол}}$  – высота полета БЛА,  $\alpha$  – угол визирования,  $\beta_r$  – горизонтальный угол поля зрения ОЭС,  $\beta_v$  – вертикальный угол поля зрения ОЭС [1].

На Рис. 8.7 искомая проекция описывается трапецией  $ABCD$ . Точка  $F$  определяет местоположение БЛА-РМ с разме-

щенной на его борту ОЭС в соответствующим образом выбранной маневренной СК  $Mxyz$ , а прямая  $FO$  описывает положение линии визирования (ЛВ), являющейся биссектрисой углов  $\beta_g$  и  $\beta_b$ . При этом считается, что трапеция  $ABCD$  располагается на координатной плоскости  $Mxz$ , а вектор  $V$  – на параллельной ей плоскости, определяемой параметром  $h_{\text{пол}}$ .

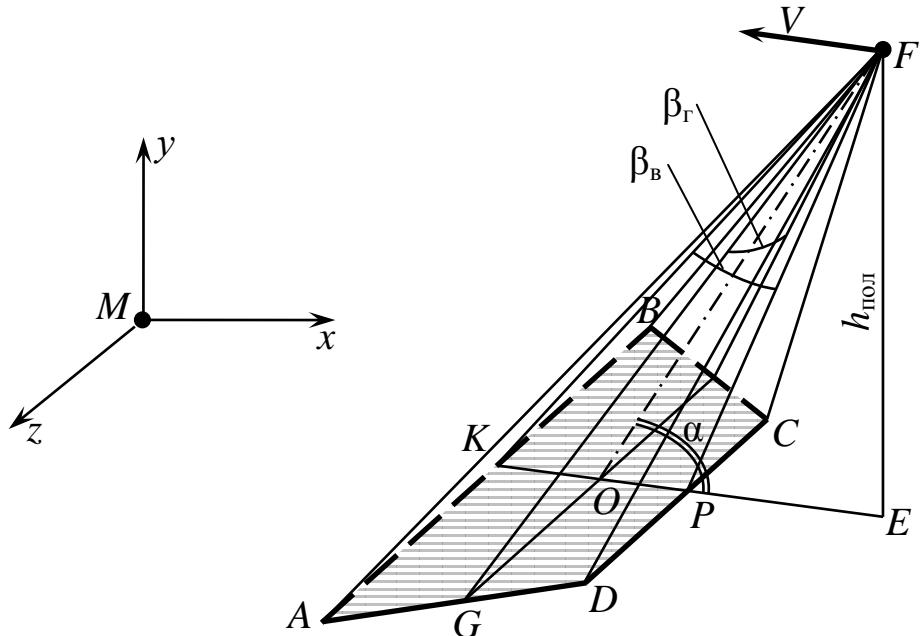


Рис. 8.7

Параметры проекции поля зрения ОЭС БЛА-РМ вычисляются из следующих формул [114]:

$$\begin{aligned}
 l_1 = CD &= \frac{2h_{\text{пол}} \cos\left(\frac{\beta_b}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\beta_g}{2}\right)}{\sin\left(\alpha + \frac{\beta_b}{2}\right)}; \\
 l_2 = AB &= \frac{2h_{\text{пол}} \cos\left(\frac{\beta_b}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\beta_g}{2}\right)}{\sin\left(\alpha - \frac{\beta_b}{2}\right)}; \\
 l_3 = PK &= \frac{2h_{\text{пол}} \sin \beta_b}{\sin\left(\alpha + \frac{\beta_b}{2}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\beta_b}{2}\right)};
 \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

$$l_4 = AD = CB = \frac{h_{\text{пол}} \sin \beta_{\text{в}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_{\Gamma}}{2} \cos^2 \alpha}}{\sin \left( \alpha + \frac{\beta_{\text{в}}}{2} \right) \sin \left( \alpha - \frac{\beta_{\text{в}}}{2} \right)},$$

где  $KM$  – высота,  $AB$  – верхнее основание,  $CD$  – нижнее основание, а  $AD$  и  $CB$  – боковые стороны проекции поля зрения ОЭС.

Используя формулу для вычисления площади трапеции [17] и выражения (8.3.1), получаем, что площадь зоны обзора наземной (надводной) поверхности при заданных значениях параметров  $h_{\text{пол}}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta_{\text{в}}$ , и  $\beta_{\Gamma}$  определяются выражением вида:

$$S_{\text{обз}} = \frac{2h_{\text{пол}}^2 \sin \alpha \sin \beta_{\text{в}} \operatorname{tg} \left( \frac{\beta_{\Gamma}}{2} \right) \cos^2 \left( \frac{\beta_{\text{в}}}{2} \right)}{\sin^2 \left( \alpha + \frac{\beta_{\text{в}}}{2} \right) \sin^2 \left( \alpha - \frac{\beta_{\text{в}}}{2} \right)}.$$

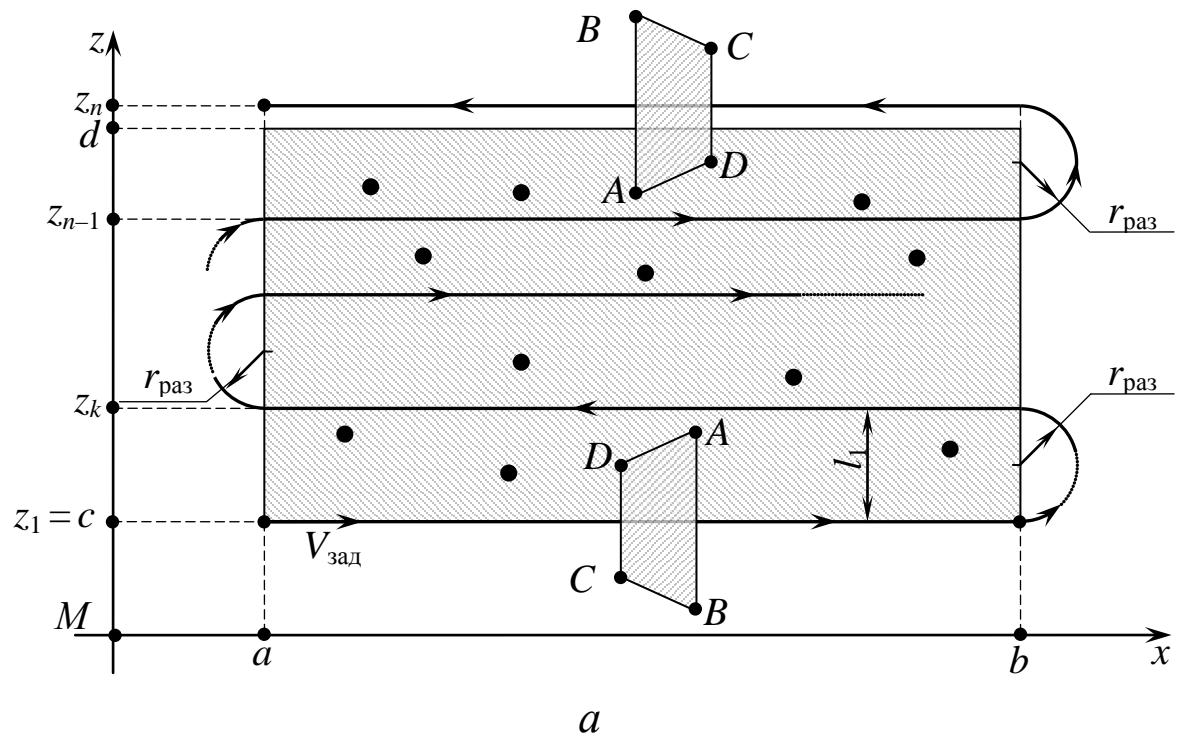
Исследование влияния параметров ОЭС и высоты полета БЛА на размеры области обзора наземной (надводной) поверхности приведено в работе [114]. В этой работе представлены различные виды проекций поля зрения перспективных БРЛС БЛА-РМ.

Поиск и обнаружение отмеченных выше объектов 1-го, 2-го и 3-го типов предлагается осуществлять в процессе полетов БЛА-РМ по типовым траекториям, представленным в маневренной СК на Рис. 8.8,*a*-Рис. 8.8,*d*.

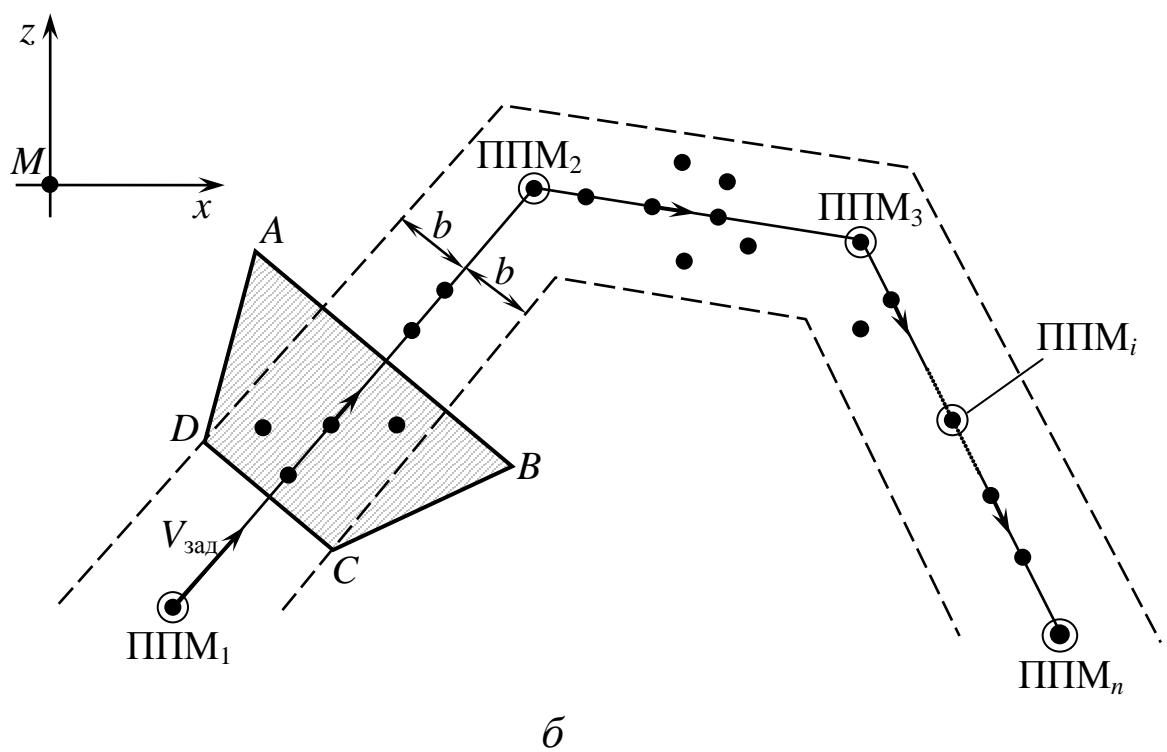
На Рис. 8.8,*a* в соответствующим образом ориентированной маневренной СК приведена траектория полета БЛА при поиске и обнаружении точечных объектов в заданной прямоугольной области, задаваемой координатами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ . Для покрытия полосами обзора, образующимися при движении трапеции  $ABCD$ , всех точек такой области расстояние между  $k$ -м и  $(k+1)$ -м полетами БЛА должно удовлетворять условию:

$$z_{k+1} = z_k + l_1; \quad r_{\text{разв}} = 0,5l_1, \quad k = (1, n), \quad (8.3.2)$$

где параметр  $l_1$  определяется из выражений (8.3.1) при заданных значениях  $h_{\text{пол}}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta_{\text{в}}$ , и  $\beta_{\Gamma}$ .



*a*



*б*

Рис. 8.8

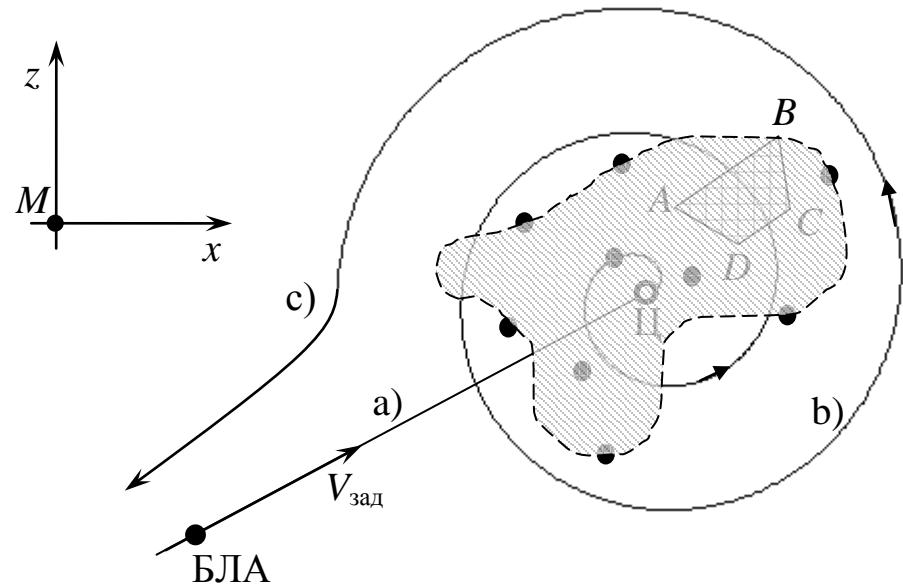
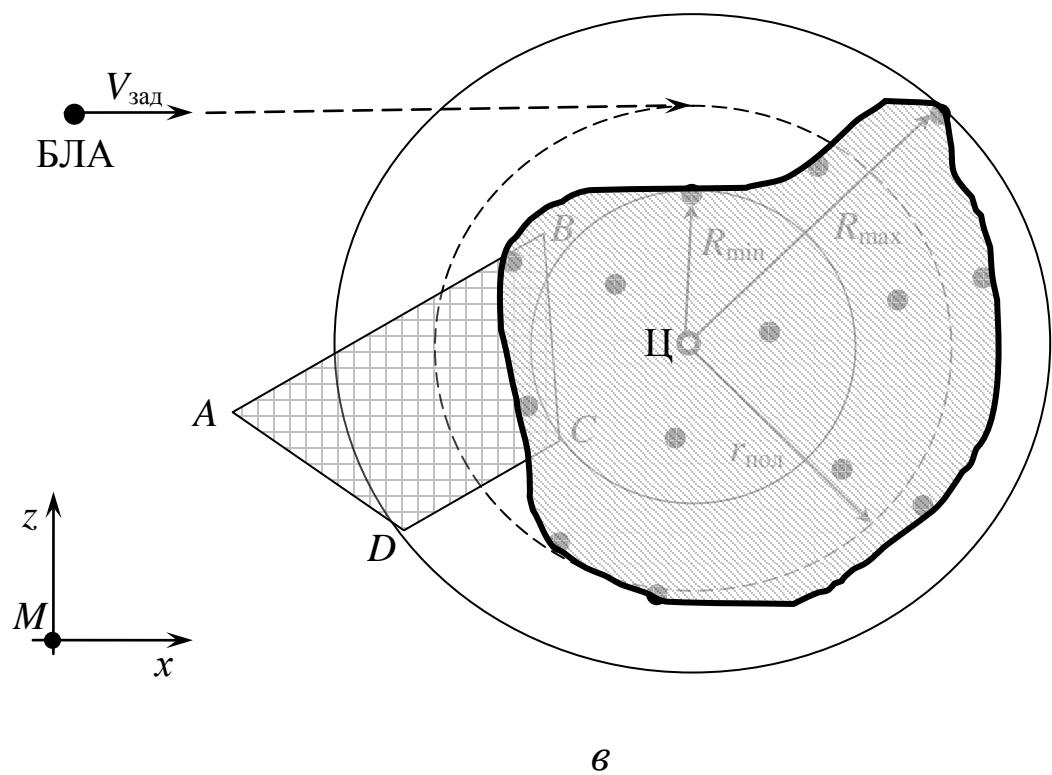


Рис. 8.8 (продолжение)

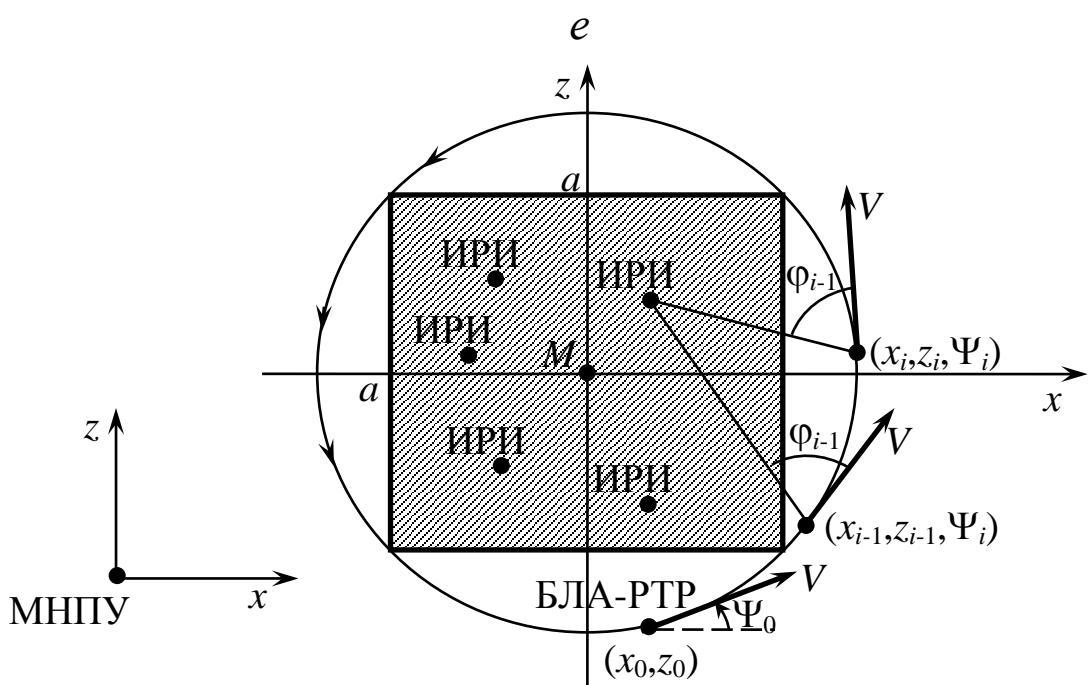
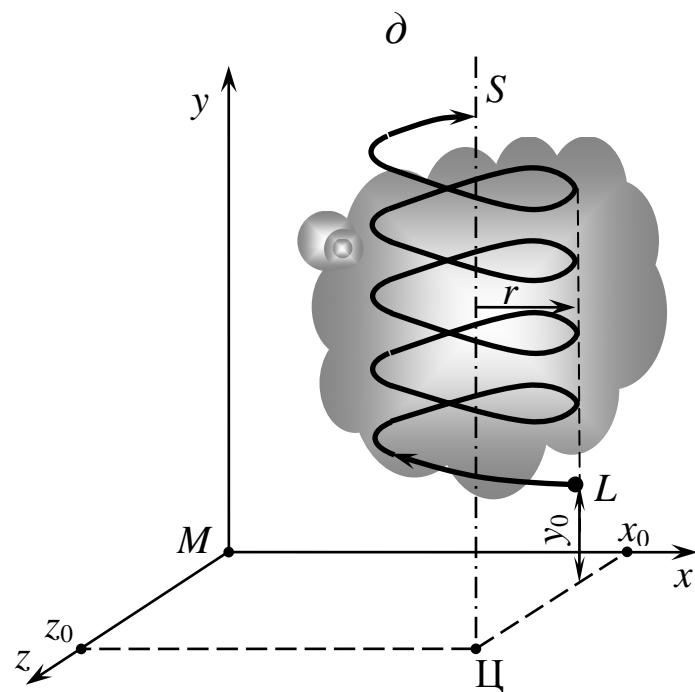
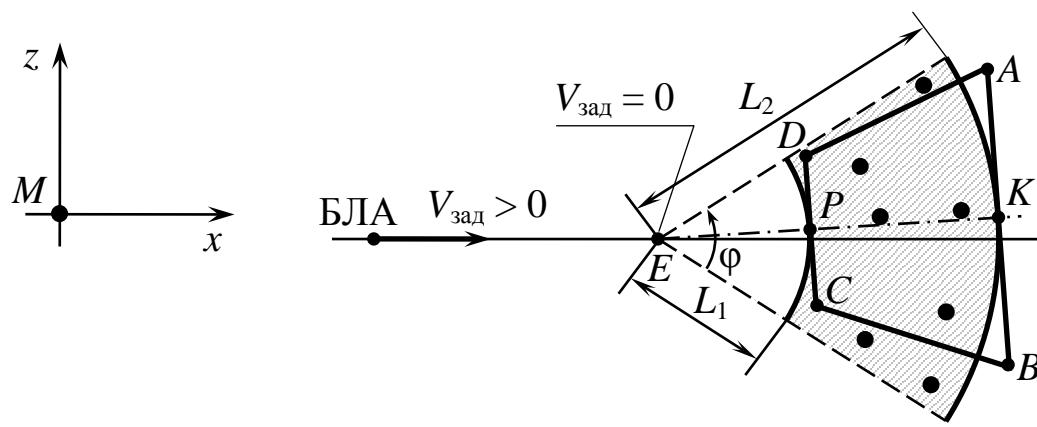


Рис. 8.8 (окончание)

При полете БЛА по ломаной, определяемой поворотными пунктами маршрута (ППМ) с координатами  $(x_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  (Рис. 8.8,*б*), предполагается, что наряду с контролем линейного объекта проводится контроль смежной с ним полосы шириной  $2b$ .

На Рис. 8.8,*в* и Рис. 8.8,*г* представлены траектории полета БЛА при установлении границы плоского объекта с центром в точке Ц.

В первом случае считаются известными расстояния  $R_{\min}$  и  $R_{\max}$  и траектория представляет собой окружность радиуса  $r = 0,5(R_{\max} + R_{\min})$ . Во втором случае (при неизвестных  $R_{\min}$  и  $R_{\max}$ ) полет БЛА осуществляется по спирали, описываемой в полярных координатах уравнением [17]:

$$\rho = k\phi, \quad \phi \in [\phi_0, \phi_{\max}], \quad (8.3.3)$$

где коэффициент  $k$  выбирается из условия, что каждый ее виток «ометает» полосу шириной  $l_1$ . Заметим, что в процессе полета по такой траектории можно проводить обнаружение точечных объектов, входящих в плоский объект.

Представленные выше траектории БЛА-РМ предполагают их непрерывный полет до момента завершения решения целевой задачи.

При использовании для разведки и мониторинга точечных объектов беспилотного вертолета возможен режим полета, представленный на Рис. 8.8,*д*.

В этом случае БЛА-РМ зависает на высоте  $h$  в определенной точке  $F$  пространства (см. Рис. 8.7) и сканирует с помощью бортовой ОЭС определенный сектор наземной (надводной) поверхности, характеризующийся углом  $\phi$ . Контроль сектора осуществляется путем вращения вертолета вокруг его оси ЦМ<sub>усв</sub>. После контроля сектора БЛА-РМ может продолжить горизонтальный полет по ранее выполняемой траектории, состав которых приведен на Рис. 8.8,*а*-Рис. 8.8,*г*.

Рассмотрим конкретизацию методов формирования векторов управлений БЛА-РМ, предложенных в Разд. 8.1, применительно к требуемым траекториям их полетов, представленных на Рис. 8.8,*a*-Рис. 88,*d* [114]. Следует отметить, что в работах [31, 84] приводятся только виды траекторий разведки без методик расчёта их параметров.

Общепринятые в настоящее время траектории полета БЛА-РМ «галсами» (см. Рис. 8.8,*a*) практически неэффективны при разведке и мониторинге границ **плоских объектов**, которые обычно имеют форму нерегулярных (произвольных) кривых или ломаных.

Эту целевую задачу, решаемую БЛА-РМ, будем рассматривать при следующих предположениях:

- а) известны минимальное ( $R_{\min}$ ) и максимальное ( $R_{\max}$ ) расстояния от условного центра Ц плоского объекта до его границы;
- б) известны только координаты точки Ц такого объекта.

Рассмотрим плоский объект, представленный на Рис. 8.8,*b* заштрихованной областью. Впишем в эту область окружность радиуса  $R_{\min}$  и опишем вокруг нее окружность радиуса  $R_{\max}$  с центрами в точке Ц. Потребуем выполнения условия вида:

$$R_{\max} - R_{\min} = l_1(h_{\text{пол}}, \alpha, \beta_{\text{в}}, \beta_{\text{г}}), \quad (8.3.4)$$

где функция  $l_1$  определяется выражением (8.3.1).

В этом случае граница контролируемого объекта может быть установлена с помощью ОЭС путем полета БЛА по круговой траектории с радиусом  $r_{\text{пол}}$  с центром в точке Ц, который вычисляется как:

$$r_{\text{пол}} = R_{\min} + 0,5(R_{\max} - R_{\min}).$$

Требуемую высоту полета БЛА определим с использованием выражений (8.3.4) и (8.3.1) по формуле вида:

$$h_{\text{пол}} = \frac{(R_{\max} - R_{\min}) \sin(\alpha + 0,5\beta_{\text{в}})}{2 \cos(0,5\beta_{\text{в}}) \operatorname{tg}(0,5\beta_{\text{г}})}. \quad (8.3.5)$$

При завершении кругового облета объекта совершается контрольный полёт БЛА-РМ по траектории с радиусом  $(r_{\text{пол}} + \Delta r)$ . Это делается из-за неопределённости значений координат точки Ц и размеров  $R_{\min}$ ,  $R_{\max}$ . Если в этом полёте не обнаружены «разрывы» границы плоского объекта и новые точечные объекты, входящие в его состав, то выявление объекта разведки считается завершенным. В противном случае полеты БЛА с измененными значениями  $r_{\text{пол}}$  продолжаются до выполнения этого условия.

Таким образом, в рассматриваемом случае а) при выявлении границ плоских объектов БЛА-РМ должен осуществлять полеты в горизонтальной плоскости на постоянной высоте  $h_{\text{пол}}$  по круговым траекториям при параметрах бортовой ОЭС, определяемых значениями  $\alpha$ ,  $\beta_g$  и  $\beta_v$ . При этом уравнение траектории движения БЛА в горизонтальной плоскости представляется в неявной форме зависимостью (8.1.23).

Покажем, что применение уравнений (8.1.25) обеспечивает движение БЛА-РМ по траекториям, заданным выражением вида (8.1.24).

### Пример 8.1

Для траектории вида (8.1.23), для которой выражения (8.1.27) записываются как  $\Phi_x(x, z) = 2(x - x_{\text{Ц}})$ ,  $\Phi_z(x, z) = 2(z - z_{\text{Ц}})$ , уравнения (8.1.25) принимают вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{V_{\text{зад}}(t)(z - z_{\text{Ц}})}{\sqrt{(x - x_{\text{Ц}})^2 + (z - z_{\text{Ц}})^2}}; \\ \dot{z} &= \frac{-V_{\text{зад}}(t)(x - x_{\text{Ц}})}{\sqrt{(x - x_{\text{Ц}})^2 + (z - z_{\text{Ц}})^2}}, \quad t \in [t_0, t_k].\end{aligned}\tag{8.3.6}$$

Зададим следующие значения параметров рассматриваемой траектории:  $x_{\text{Ц}} = 1000$  м,  $z_{\text{Ц}} = 1500$  м,  $r_{\text{пол}} = 800$  м.

Тогда для этих исходных данных и значения  $V_{\text{зад}} = 100$  м/с уравнения (8.3.6) запишутся как:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{100(z-1500)}{\sqrt{(x-1000)^2 + (z-1500)^2}}; \\ \dot{z} &= -\frac{100(x-1000)}{\sqrt{(x-1000)^2 + (z-1500)^2}}.\end{aligned}\quad (8.3.7)$$

Решим эту систему дифференциальных уравнений для  $t \in [0; 150,7]$  сек. при следующих начальных условиях:

$$x(0) = 1000 \text{ м}, \quad z(0) = 2300 \text{ м}, \quad (8.3.8)$$

которые являются конкретизацией условий (8.1.28).

Результаты численного решения задачи Коши (8.3.7), (8.3.8) в виде графиков представлены на Рис. 8.9.

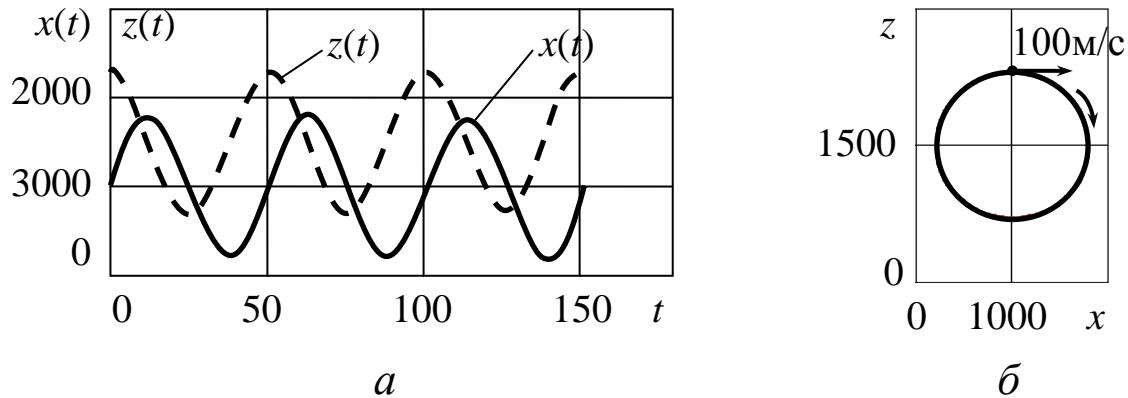


Рис. 8.9

Из характера графиков, приведенных на Рис. 8.9, а видно, что БЛА-РМ за время  $t_k = 150,7$  с осуществляет 3 полных оборота по требуемой круговой траектории со скоростью  $V_{\text{зад}} = +100$  м/с, двигаясь «по часовой стрелке».

Заменим в используемой системе уравнений (8.3.7) знак скорости  $V_{\text{зад}}$  на противоположный, то есть зададим в них значение  $V_{\text{зад}} = -100$  м/с.

Результаты вычислительного эксперимента приведены на Рис. 8.10.

Из полученных графиков функций  $x(t)$ ,  $z(t)$  и  $z(x)$  следует, что при  $t \in [0; 150,7]$  с БЛА-РМ пролетает трижды по заданной

траектории (8.1.23), но двигаясь при этом «против часовой стрелки».

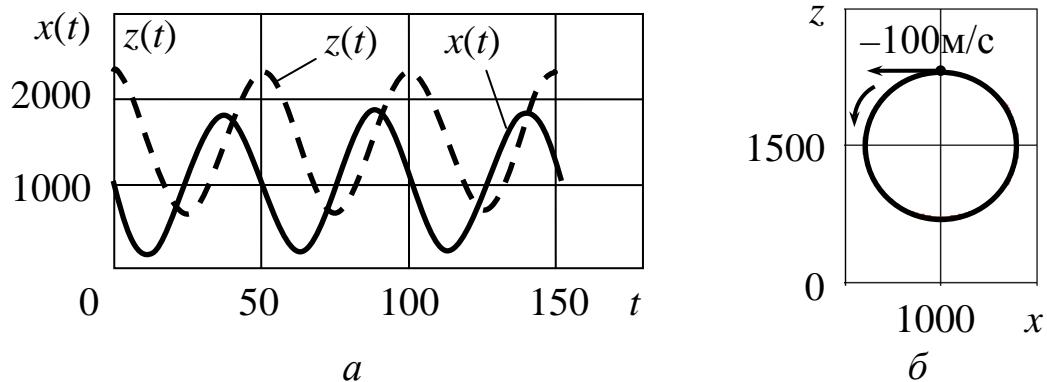


Рис. 8.10

Для формирования управления, обеспечивающего движение БЛА-РМ по требуемой траектории (8.1.23), необходимо сформировать функцию  $\dot{\Psi}_{\text{тр}}$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ .

Конкретизируем члены, входящие в формулу (8.1.29) для вычисления этой функции.

Согласно приведенным в Примере 8.1 частным производным  $\Phi_x$ ,  $\Phi_z$  выражение (8.1.26) принимает вид:

$$z' = -\frac{x - x_{\text{ц}}}{z - z_{\text{ц}}}.$$

Частные производные вида (8.1.30) конкретизируются как:

$$\Phi_{xx}(x, z) = 2; \quad \Phi_{xz}(x, z) = 0; \quad \Phi_{zz}(x, z) = 2.$$

Подставляя отмеченные выше выражения в формулу (8.1.29), имеем:

$$\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) = \frac{V_{\text{зад}}(t) \left[ 2 + 2 \frac{(x - x_{\text{ц}})^2}{(z - z_{\text{ц}})^2} \right]}{\left( 1 + \frac{(x - x_{\text{ц}})^2}{(z - z_{\text{ц}})^2} \right) \sqrt{4(x - x_{\text{ц}})^2 + 4(z - z_{\text{ц}})^2}},$$

где  $x = x(t)$ ,  $z = z(t)$  – решения системы уравнений (8.3.6).

Проводя несложные преобразования этого выражения, получим, что

$$\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) = \frac{V_{\text{зад}}(t)}{\sqrt{(x - x_{\text{ц}})^2 + (z - z_{\text{ц}})^2}}. \quad (8.3.9)$$

Перепишем уравнение (8.1.23) в следующей форме:

$$(x - x_{\text{ц}})^2 + (z - z_{\text{ц}})^2 = r_{\text{пол}}^2. \quad (8.3.10)$$

Тогда формула (8.3.9) примет вид:

$$\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) = \frac{V_{\text{зад}}(t)}{r_{\text{пол}}}, \quad t \in [t_0, t_{\text{k}}].$$

### Пример 8.2

Пусть БЛА-РМ самолетной схемы должен выполнить полёт по разведке границы зоны наводнения, для которой  $R_{\min} = 15000$  м и  $R_{\max} = 20000$  м, по замкнутой круговой траектории, задаваемой уравнением (8.3.10) с центром в точке с координатами  $(x_{\text{ц}}, z_{\text{ц}}) = (20000; 19000)$  м.

Радиус траектории, вычисленный по приведенной выше формуле, равен  $r_{\text{пол}} = 17500$  м.

Будем считать, что на БЛА-РМ установлена воздушная тепловизионная аппаратура (ВТА) со следующими характеристиками:

$$\alpha_{\text{виз}} = 20^\circ, \beta_{\text{в}} = 3^\circ, \beta_{\text{г}} = 17^\circ.$$

Вычислим по формуле (8.3.5) требуемое значение высоты полёта БЛА:

$$h = 6132,894 \text{ м.}$$

Плотность воздуха на данной высоте определим из выражения (5.1.31):

$$\rho = 0,650685 \text{ кг/м}^3.$$

Будем считать, что БЛА выполняет полёт со скоростью  $V_{\text{зад}} = 140,952 \text{ м/с.}$

Задавая начальный момент времени  $t_0 = 30$  с по формуле:

$$t_k = t_0 + \frac{2\pi r_{\text{пол}}}{V_{\text{зад}}},$$

получаем значение времени окончания облета зоны, равное  $t_k = 810,10$  с.

Результаты расчёта вектора косвенного управления БЛА  $u(t) = (P(t), \alpha(t), \gamma(t))$  и моделирования движения БЛА с использованием численного решения задачи Коши (5.1.16)-(5.1.23) приведены в Табл. 8.2.

Отметим, что эти результаты получены с использованием данных Примера 5.1, выражений (8.3.6), (8.3.9), (5.2.21)-(5.2.23) и начальных условий:

$$\begin{aligned} V(30) &= 140,953 \text{ м/с}; \quad \theta(30) = 0; \quad \Psi(30) = 85,461^\circ; \\ x(30) &= 2554,893 \text{ м}; \quad y(30) = 6132,894 \text{ м}; \quad z(30) = 20385,002 \text{ м}. \end{aligned}$$

Из Табл. 8.2 следует, что вектор  $u$ , полученный путем решения системы параметрических уравнений (5.1.54), имеет постоянные компоненты. Моделирование пространственного движения БЛА-РМ при вычисленном векторе управления  $u$  показало, что он осуществляет полет по требуемой траектории на фиксированной высоте, равной 6132,894 м.

Известно [1], что ИнБЛА решают задачи разведки и мониторинга с помощью ОЭС при  $V_{\text{зад}}(t) = V_{\text{зад}} = \text{const}$ , то есть в установленных режимах их полетов.

В этом случае получаем окончательную формулу вида:

$$\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) = \frac{V_{\text{зад}}}{r_{\text{пол}}} = \text{const}, \quad (8.3.11)$$

описывающую требуемый закон изменения скорости угла поворота траектории БЛА-РМ. Этот результат полностью соответствует формуле (5.4.14) и позволяет использовать на практике для формирования вектора косвенного управления БЛА-РМ самолетной схемы выражения (5.4.15), (5.4.16).

Таблица 8.2

$t$ , с	$P(t)$ , Н	$\alpha(t)$ , град.	$\gamma(t)$ , град.	$V(t)$ , м/с	$\theta(t)$ , град.	$\Psi(t)$ , град.	$x(t)$ , м	$y(t)$ , м	$z(t)$ , м
30	330,962	3,716	6,601	140,953	-0,000	85,461	2554,893	6132,894	20385,002
70	330,962	3,716	6,601	140,953	0,000	67,001	3890,790	6132,894	25837,483
110	330,962	3,716	6,601	140,953	0,000	48,542	6884,387	6132,894	30586,436
150	330,962	3,716	6,601	140,953	-0,000	30,083	11227,630	6132,894	34143,178
190	330,962	3,716	6,601	140,953	0,000	11,623	16473,586	6132,894	36141,706
230	330,962	3,716	6,601	140,953	-0,000	-6,836	22082,428	6132,894	36376,367
270	330,962	3,716	6,601	140,953	-0,000	-25,296	27476,987	6132,894	34823,013
310	330,962	3,716	6,601	140,953	0,000	-43,755	32102,143	6132,894	31641,489
350	330,962	3,716	6,601	140,953	-0,000	-62,214	35481,954	6132,894	27159,184
390	330,962	3,716	6,601	140,953	0,000	-80,674	37268,624	6132,894	21837,344
430	330,962	3,716	6,601	140,953	0,000	-99,133	37278,300	6132,894	16223,604
470	330,962	3,716	6,601	140,953	-0,000	-117,593	35509,985	6132,894	10895,637
510	330,962	3,716	6,601	140,953	0,000	-136,052	32145,645	6132,894	6401,709
550	330,962	3,716	6,601	140,953	-0,000	-154,511	27531,483	6132,894	3204,260
590	330,962	3,716	6,601	140,953	-0,000	-172,971	22142,311	6132,894	1632,319
630	330,962	3,716	6,601	140,953	0,000	-191,430	16532,694	6132,894	1847,645
670	330,962	3,716	6,601	140,953	-0,000	-209,890	11279,880	6132,894	3828,078
710	330,962	3,716	6,601	140,953	0,000	-228,349	6924,402	6132,894	7369,827
750	330,962	3,716	6,601	140,953	-0,000	-246,808	3914,453	6132,894	12108,432
790	330,962	3,716	6,601	140,953	0,000	-265,268	2559,768	6132,894	17556,276

Для формирования вектора управления БЛА-РМ вертолетной схемы решается система уравнений (6.3.8), (6.3.9) при  $V_{\text{зад}} = \text{const}$ ;  $y = h_{\text{пол}}$  и  $\Psi_{\text{тр}} = \text{const}$ , вычисляемой по формуле (8.3.11).

В случае, когда расстояния  $R_{\min}$  и  $R_{\max}$  являются неизвестными, предлагается использовать типовую траекторию полета БЛА-РМ, представленную на Рис. 8.8,г.

В этой траектории выделяются следующие участки полета БЛА-РМ:

- а) участок прямолинейного полета в точку предполагаемого центра Ц плоского объекта;
- б) участок полета по развертывающейся спирали вида (8.3.3) до полного определения границ объекта;
- в) участок выхода из зоны решения задачи разведки.

Рассмотрим положения 1 и 2 БЛА-РМ, представленные на Рис. 8.11, которые описываются полярными углами  $\varphi$  и  $\varphi + 2\pi$ , а также радиус-векторами  $\rho(\varphi)$  и  $\rho(\varphi + 2\pi)$ .

На этом рисунке  $A_1B_1C_1D_1$  и  $A_2B_2C_2D_2$  – зоны обзора поверхности аппаратурой ОЭС при местонахождении БЛА в точках 1 и 2.

Для обеспечения охвата ОЭС всех точек плоскости потребуем выполнения условий вида:

$$\rho(\varphi + 2\pi) - \rho(\varphi) = l_1(h_{\text{пол}}, \alpha, \beta_{\text{в}}, \beta_{\text{г}}),$$

где функция  $l_1$  определяется выражением (8.3.1).

Подставляя эту зависимость в формулу (8.3.3) получаем следующее выражение для вычисления параметра  $k$ :

$$k = \frac{l_1(h_{\text{пол}}, \alpha, \beta_{\text{в}}, \beta_{\text{г}})}{2\pi}. \quad (8.3.12)$$

Переведем уравнение (8.3.3) в декартовую систему координат  $\mathcal{Ц}xz$  с использованием общих формул перевода [17] вида:

$$\rho = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctg\left(\frac{z}{x}\right).$$

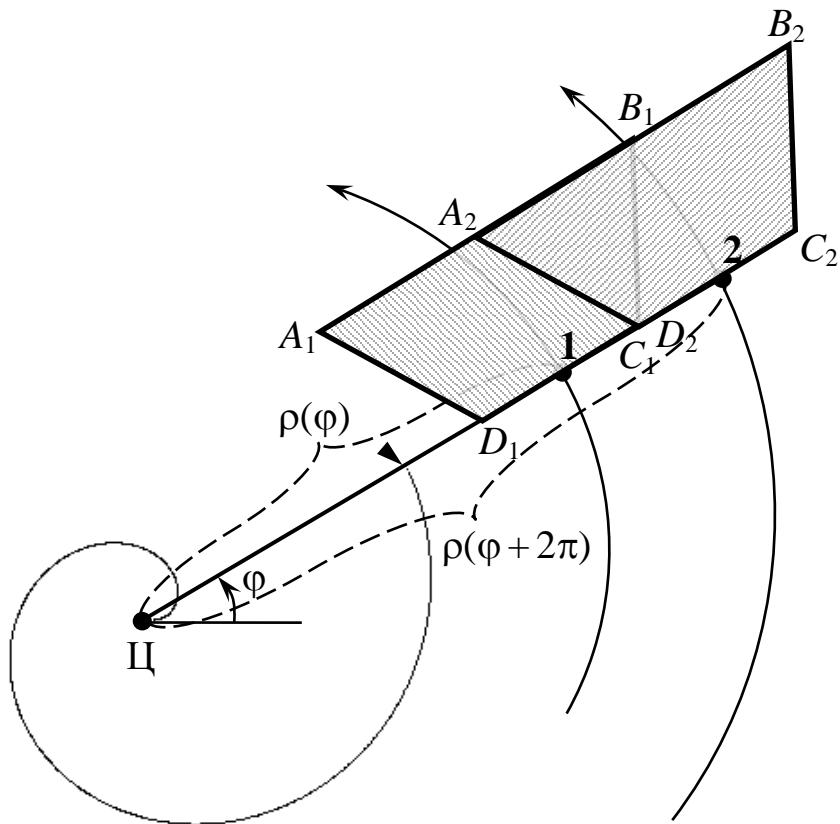


Рис. 8.11

Здесь  $(x, z)$  – текущая точка кривой в декартовой системе координат. Тогда выражение (8.3.3) представляется в форме (8.1.24) как:

$$\Phi(x, z) = \sqrt{(x - x_{\text{ц}})^2 + (z - z_{\text{ц}})^2} - k \cdot \left[ \arctg \left( \frac{z - z_{\text{ц}}}{x - x_{\text{ц}}} \right) + (2i + j)\pi \right] = 0. \quad (8.3.13)$$

В эту формулу включены параметры  $i$  и  $j$ , отражающие различные положения текущей точки  $(x - x_{\text{ц}}, z - z_{\text{ц}})$  спиралевидной траектории (8.3.13) полета БЛА-РМ. Параметр  $i$  означает количество полных оборотов спирали, осуществленных этой точкой. Значение параметра  $j$  зависит от расположения текущей точки в различных четвертях декартовой системы координат с началом в точке Ц. Этот параметр принимает следующие значения:

$$j = \begin{cases} 0, & \text{если точка принадлежит I четверти;} \\ 1, & \text{если точка принадлежит II или III четверти;} \\ 2, & \text{если точка принадлежит IV четверти.} \end{cases}$$

Заметим, что из выражения (8.3.13) невозможно получить аналитически явное представление уравнения спиральной траектории вида  $z = f(x)$ , использованного в выражениях (8.1.21) и (8.1.22).

Частные производные от функции (8.3.13), вычисленные по формулам (8.1.27) и (8.1.30) имеют вид:

$$\begin{aligned}\Phi_x(x, z) &= \frac{(x - x_{\text{ц}})\sqrt{(x - x_{\text{ц}})^2 + (z - z_{\text{ц}})^2} + k \cdot (z - z_{\text{ц}})}{(x - x_{\text{ц}})^2 + (z - z_{\text{ц}})^2}; \\ \Phi_z(x, z) &= \frac{(z - z_{\text{ц}})\sqrt{(x - x_{\text{ц}})^2 + (z - z_{\text{ц}})^2} - k \cdot (x - x_{\text{ц}})}{(x - x_{\text{ц}})^2 + (z - z_{\text{ц}})^2}; \\ \Phi_{xx}(x, z) &= \frac{(z - z_{\text{ц}})^2 \sqrt{(x - x_{\text{ц}})^2 + (z - z_{\text{ц}})^2}}{\left((x - x_{\text{ц}})^2 + (z - z_{\text{ц}})^2\right)^2} - \\ &\quad - \frac{2k(z - z_{\text{ц}})(x - x_{\text{ц}})}{\left((x - x_{\text{ц}})^2 + (z - z_{\text{ц}})^2\right)^2}; \\ \Phi_{zz}(x, z) &= \frac{(x - x_{\text{ц}})^2 \sqrt{(x - x_{\text{ц}})^2 + (z - z_{\text{ц}})^2}}{\left((x - x_{\text{ц}})^2 + (z - z_{\text{ц}})^2\right)^2} + \\ &\quad + \frac{2k(z - z_{\text{ц}})(x - x_{\text{ц}})}{\left((x - x_{\text{ц}})^2 + (z - z_{\text{ц}})^2\right)^2}; \\ \Phi_{xz}(x, z) &= \frac{-(x - x_{\text{ц}})(z - z_{\text{ц}})\sqrt{(x - x_{\text{ц}})^2 + (z - z_{\text{ц}})^2}}{\left((x - x_{\text{ц}})^2 + (z - z_{\text{ц}})^2\right)^2} + \\ &\quad + \frac{k \cdot \left[(x - x_{\text{ц}})^2 - (z - z_{\text{ц}})^2\right]}{\left((x - x_{\text{ц}})^2 + (z - z_{\text{ц}})^2\right)^2}.\end{aligned}\tag{8.3.14}$$

Отметим, что производные  $\Phi_x$  и  $\Phi_z$  используются в правых частях системы уравнений (8.1.25), с помощью которой определяются функции  $x = x(t)$  и  $z = z(t)$ , описывающие требуемую

траекторию (8.3.13) полета БЛА-РМ. Эти функции, подставленные в формулы (8.1.26) и (8.3.14), применяются в процессе вычисления с помощью выражения (8.1.29) требуемого закона  $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$  изменения угла поворота траектории движения БЛА по кривой (8.3.13).

Отметим, что направление полета БЛА-РМ по траектории (8.3.13) можно указывать, как и выше, путем задания соответствующего знака скорости  $V_{\text{зад}}(t)$  в уравнениях (8.1.25).

Сформированная указанным способом функция  $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ , используется в указанных выше методах формирования управлений, применяемых БЛА-РМ самолетной или вертолетной схем, обеспечивающих их движение по требуемой траектории (8.3.13).

### Пример 8.3

Пусть БЛА-РМ осуществляет полет по траектории, представленной на Рис.8.12.

Перенесем для упрощения вычислительного эксперимента полюс полярной системы координат в точку  $(x_{\Pi}, z_{\Pi})$  и построим в ней новую декартовую систему координат  $\bar{x}\bar{z}$ .

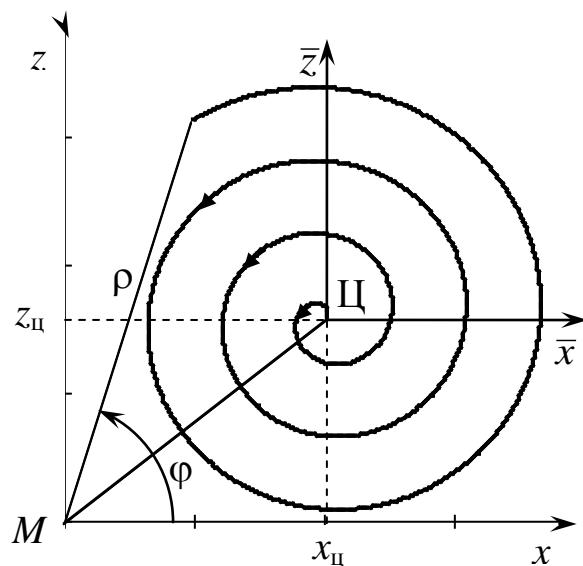


Рис. 8.12

В этой системе координат, полученной с помощью замены переменных:

$$\bar{x} = x - x_{\text{II}}; \quad \bar{z} = z - z_{\text{II}},$$

уравнение (8.3.13) примет вид:

$$\Phi(\bar{x}, \bar{z}) = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2} - k \cdot \left[ \arctg\left(\frac{\bar{z}}{\bar{x}}\right) + (2i + j)\pi \right] = 0.$$

Частные производные 1-го порядка от этой функции записутся как:

$$\Phi_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{z}) = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}} + \frac{k \bar{z}}{\bar{x}^2 + \bar{z}^2};$$

$$\Phi_{\bar{z}}(\bar{x}, \bar{z}) = \frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}} - \frac{k \bar{x}}{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}.$$

С увеличением в уравнении (8.3.3) значения угла  $\phi$  полет БЛА-РМ будет происходить «против часовой стрелки». Это означает, что в уравнениях (8.1.25) скорость  $V_{\text{зад}}$  должна иметь знак «минус».

Подставляя в эти уравнения определенные выше частные производные, получаем систему дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \frac{-V_{\text{зад}} \left( \frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}} - \frac{k \bar{x}}{\bar{x}^2 + \bar{z}^2} \right)}{\sqrt{\left( \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}} + \frac{k \bar{z}}{\bar{x}^2 + \bar{z}^2} \right)^2 + \left( \frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}} - \frac{k \bar{x}}{\bar{x}^2 + \bar{z}^2} \right)^2}}; \\ \frac{d\bar{z}}{dt} &= \frac{V_{\text{зад}} \left( \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}} + \frac{k \bar{z}}{\bar{x}^2 + \bar{z}^2} \right)}{\sqrt{\left( \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}} + \frac{k \bar{z}}{\bar{x}^2 + \bar{z}^2} \right)^2 + \left( \frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}} - \frac{k \bar{x}}{\bar{x}^2 + \bar{z}^2} \right)^2}}. \end{aligned} \quad (8.3.15)$$

Отметим, что при начальных условиях:

$$\bar{x}(0) = 0; \quad \bar{z}(0) = 0$$

в правых частях этих уравнений возникает неопределенность вида  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , что не позволяет получить непосредственно значения интегральных кривых  $\bar{x}(t)$  и  $\bar{z}(t)$ .

Потребуем, чтобы начальная точка  $(\bar{x}_0, \bar{z}_0)$  принадлежала спирали (8.3.3), построенной в первой четверти системы координат  $\bar{\mathcal{X}}\bar{z}$ .

Это требование при  $i = 0$  и  $j = 0$  формально представляется равенством:

$$\sqrt{\bar{x}_0^2 + \bar{z}_0^2} = k \operatorname{arctg} \left( \frac{\bar{z}_0}{\bar{x}_0} \right).$$

Из этого выражения следует, что при  $\bar{x}_0 = 0$  и  $\bar{z}_0 = 0$  в аргументе арктангенса также будет неопределенность вида  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Для ликвидации этого будем считать, что

$$\bar{x}_0 = \varepsilon x_{\text{ц}}, \quad \bar{z}_0 = \varepsilon z_{\text{ц}}, \quad (8.3.16)$$

где  $\varepsilon > 0$  – некоторая малая константа.

Подставим эти выражения в приведенное выше равенство:

$$\sqrt{(\varepsilon x_{\text{ц}})^2 + (\varepsilon z_{\text{ц}})^2} = k \operatorname{arctg} \left( \frac{\varepsilon z_{\text{ц}}}{\varepsilon x_{\text{ц}}} \right).$$

Проведя несложные преобразования, имеем, что

$$\varepsilon \sqrt{x_{\text{ц}}^2 + z_{\text{ц}}^2} = k \operatorname{arctg} \left( \frac{z_{\text{ц}}}{x_{\text{ц}}} \right).$$

Откуда получаем окончательную формулу для вычисления введенного выше параметра  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{k}{\sqrt{x_{\text{ц}}^2 + z_{\text{ц}}^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{z_{\text{ц}}}{x_{\text{ц}}} \right). \quad (8.3.17)$$

Таким образом, система уравнений (8.3.15) должна интегрироваться при начальных условиях, определяемых выражениями (8.3.16), (8.3.17).

После решения этой задачи Коши траектория полета БЛА-РМ в исходной системе координат  $Mxz$  определяется выражениями вида:

$$\begin{aligned}x(t) &= \bar{x}(t) + x_{\text{ц}}; \\z(t) &= \bar{z}(t) + z_{\text{ц}}.\end{aligned}\quad (8.3.18)$$

Построим решение задачи (8.3.15)-(8.3.17) при следующих исходных данных:  $k = 45,448$ ;  $V_{\text{зад}} = 83,333$  м/с;  $x_{\text{ц}} = 2000$  м;  $z_{\text{ц}} = 1800$  м;  $t_0 = 0$  с;  $t_k = 100$  с. Используя формулу (8.3.17), имеем, что  $\varepsilon = 0,0123801$ .

Решая методом Рунге-Кутта (см. Разд. 3.1) эту задачу, получаем функции  $\bar{x}(t)$  и  $\bar{z}(t)$ , представленные на Рис. 8.13, а, и построенное по ним полярное представление траектории  $\rho = k\varphi$  (Рис. 8.13, б).

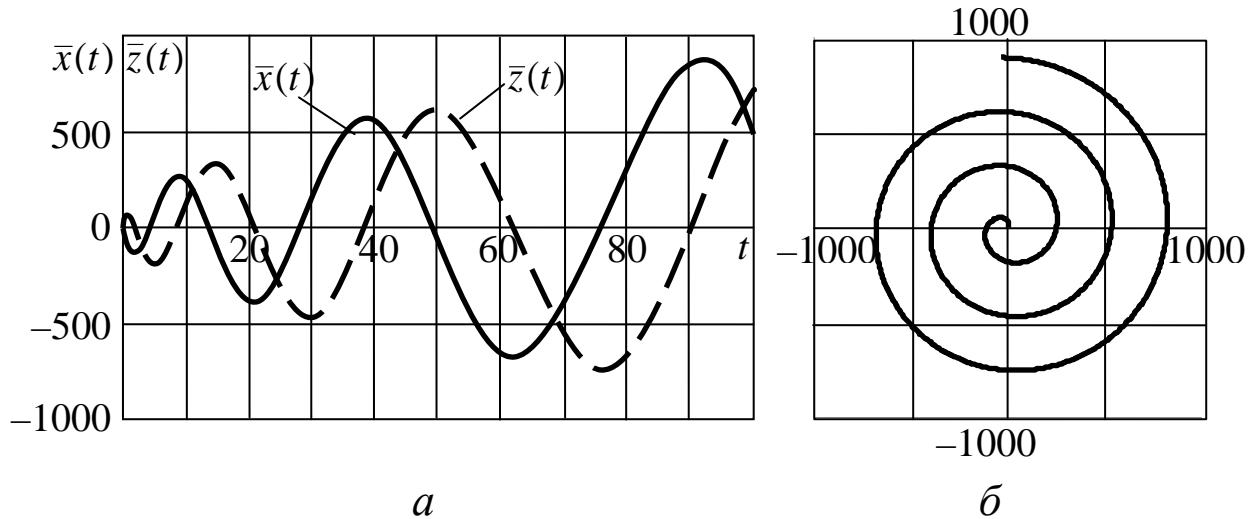


Рис. 8.13

На Рис. 8.14 показаны графики функций  $x(t)$  и  $z(t)$ , полученные с помощью выражений (8.3.18), а также представление траектории в форме (8.3.3). Результаты проведенных расчётов показывают, что отклонения от спирали  $\rho = k\varphi$  составляют величину порядка  $10^{-5}$  м. Это означает, что уравнения (8.3.15) совместно с выражениями (8.3.18) достаточно точно описывают движение БЛА-РМ по требуемой спиралевидной траектории.

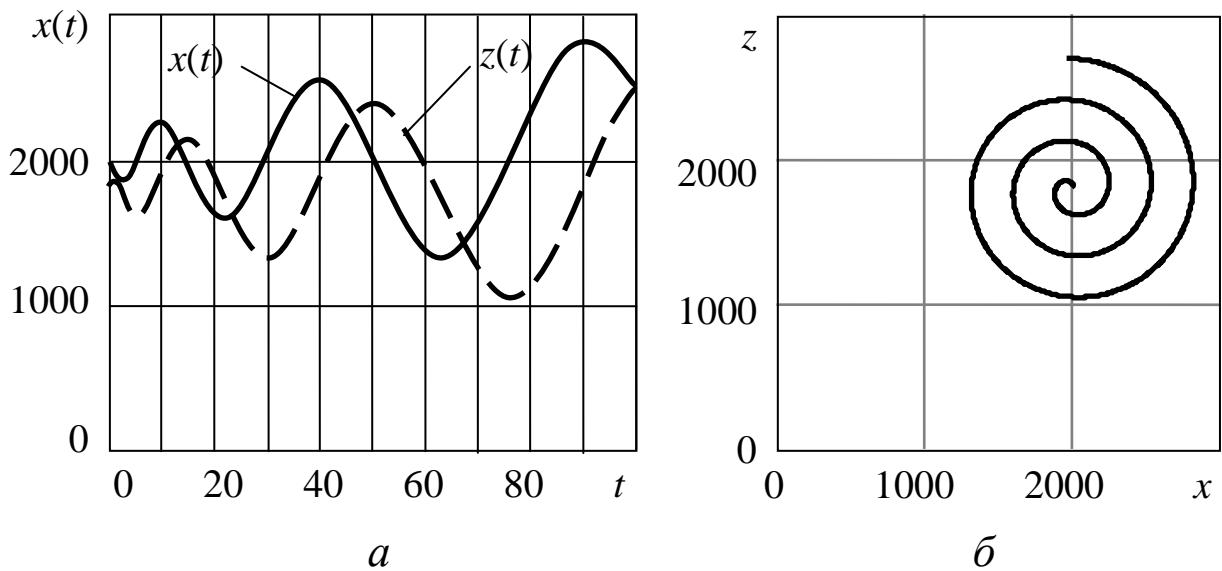


Рис. 8.14

Рассмотрим пример формирования вектора  $u(t)$  косвенного управления БЛА-РМ самолетной схемы (см. Пример 5.1), обеспечивающего его полет по требуемой траектории вида (8.3.13).

#### Пример 8.4

Пусть центр области разведки находится в точке  $(x_{\text{ц}}, z_{\text{ц}}) = (20000; 19000)$  м.

Требуемая траектория полёта БЛА-РМ вида (8.3.13) записывается следующим образом:

$$\sqrt{(x - 20000)^2 + (z - 19000)^2} - k \left[ \arctg \left( \frac{z - 19000}{x - 20000} \right) + (2i + j)\pi \right] = 0,$$

Частные производные от правых частей этой функции вычисляются по формулам (8.3.14).

Будем считать, что на БЛА-РМ установлена ВТА с характеристиками:

$$\beta_{\text{в}} = 4,7^\circ, \quad \beta_{\text{г}} = 16^\circ, \quad \alpha_{\text{виз}} = 41^\circ.$$

Установим следующие параметры полета БЛА-РМ:

$$V_{\text{зад}} = 182,818 \text{ м/с}; \quad h = 8000 \text{ м}.$$

С использованием формул (8.3.12) вычислим значение коэффициента пропорциональности спирали:

$$k = 486,173 \text{ м/рад.}$$

Известно, что спираль (8.3.3) в окрестности значения  $\varphi = 0$  имеет значительную кривизну. Для отработки этого участка требуемой траектории полета БЛА-РМ необходимы углы крена, значительно превышающие эксплуатационные ограничения. Поэтому в примере было выбрано начальное значение  $\varphi_0$  полярного угла равное  $236^\circ$  и начальное значение  $\rho_0 = 25635$  м. Согласно этим значениям начальная точка траектории имеет координаты:

$$(x_0, z_0) = (18882,733; 17337,001).$$

Зададим следующие моменты времени начала  $t_0 = 30$  с. и окончания полета  $t_k = 2265,05$  с.

Полученные с использованием выражений (8.3.14), (8.1.25), (8.1.26), (8.1.29), (5.2.21)-(5.2.23),(5.1.16)-(5.1.23) результаты вычисления вектора управления  $u(t)$  и моделирования пространственного движения БЛА-РМ приведены в Табл. 8.3.

Заметим, что  $\Psi(t_k) - \Psi(t_0) = 2123,136^\circ$ . Это означает, что за время полёта БЛА-РМ совершил  $2123,136/360 = 5,898$  оборота по требуемой спиральной траектории.

Отметим, что полученные значения компонент  $P(t)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\gamma(t)$ , вектора  $u(t)$  при всех значениях  $t \in [t_0, t_k]$  удовлетворяют диапазонам их изменения, приведенным в Табл. 5.1. Полет БЛА-РМ осуществляется практически на постоянной высоте  $h = 8000$  м с заданным значением скорости  $V_{\text{зад}} = 182,818$  м/с.

В работе [114] приведена методика выбора координат начальной точки  $(x_0, z_0)$  спиральной траектории полета БЛА, максимальным образом приближенной к ее центру, в которой выполняются ограничения по его допустимым углам крена.

Таблица 8.3

$t$ , с	$P(t)$ , Н	$\alpha(t)$ , град.	$\gamma(t)$ , град.	$V(t)$ , м/с	$\theta(t)$ , град.	$\Psi(t)$ , град.	$x(t)$ , м	$y(t)$ , м	$z(t)$ , м
30	623,167	5,503	-60,178	182,818	0,000	326,106	18882,773	8000,000	17337,001
130	460,716	3,075	-36,446	182,819	0,000	636,911	14894,175	8000,063	18409,679
230	444,525	2,731	-28,216	182,818	0,000	828,987	25170,730	8000,094	22043,093
330	439,327	2,612	-24,331	182,818	0,000	979,559	11789,387	8000,102	20478,163
430	436,277	2,541	-21,509	182,818	-0,000	1109,385	23920,772	8000,100	12325,605
530	434,330	2,494	-19,388	182,818	-0,000	1223,531	24563,439	8000,098	27722,084
630	433,190	2,466	-17,986	182,818	0,000	1327,319	9306,125	8000,099	23302,523
730	432,314	2,445	-16,804	182,818	0,000	1423,602	16426,592	8000,100	8745,015
830	431,573	2,426	-15,715	182,818	0,000	1513,195	30844,114	8000,101	16719,417
930	431,034	2,413	-14,862	182,818	-0,000	1597,117	23638,101	8000,101	31775,537
1030	430,640	2,403	-14,198	182,818	-0,000	1676,745	7550,097	8000,101	26779,000
1130	430,306	2,395	-13,607	182,818	0,000	1752,831	9050,467	8000,102	9877,559
1230	429,998	2,387	-13,033	182,818	0,000	1825,614	25841,572	8000,102	6764,780
1330	429,729	2,380	-12,508	182,818	0,000	1895,260	34251,110	8000,102	21742,560
1430	429,516	2,375	-12,073	182,818	0,000	1962,198	23404,597	8000,102	35168,591
1530	429,343	2,371	-11,706	182,818	0,000	2026,908	6647,873	8000,102	30764,920
1630	429,190	2,367	-11,371	182,818	0,000	2089,667	3165,713	8000,102	13735,765
1730	429,046	2,363	-11,043	182,818	0,000	2150,581	16573,931	8000,102	2594,558
1830	428,908	2,359	-10,721	182,818	0,000	2209,679	32972,470	8000,102	8653,691
1930	428,787	2,356	-10,428	182,818	0,000	2267,056	36465,954	8000,102	25829,102
2030	428,684	2,354	-10,174	182,818	0,000	2322,915	24022,474	8000,102	38228,727
2080	428,556	2,351	-9,844	182,818	0,000	2404,278	992,281	8000,102	28057,357

Типовые траектории полета БЛА-РМ, представленные на Рис. 8.8,*a* и Рис. 8.8,*b*, являются составными траекториями, состоящими из отдельных смежных участков.

Будем считать, что эти участки описываются неявно заданными функциями  $z_1(x)$ ,  $z_2(x)$ , ...,  $z_n(x)$ , которые определяются совокупностью уравнений:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, z) &= 0, \quad x \in [x_0, x_1]; \\ \Phi_2(x, z) &= 0, \quad x \in [x_1, x_2]; \\ \dots & \\ \Phi_j(x, z) &= 0, \quad x \in [x_{j-1}, x_j]; \\ \dots & \\ \Phi_n(x, z) &= 0, \quad x \in [x_{n-1}, x_n]. \end{aligned} \tag{8.3.19}$$

В этом случае требуется определить совокупность векторов  $\Delta_j(t)$  управлений БЛА-РМ, обеспечивающих его движение по траекториям  $z_j(x)$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Использование такого подхода к описанию требуемых составных траекторий полета БЛА-РМ подразумевает определение значений координат  $(x_1, z_1), (x_2, z_2), \dots, (x_{n-1}, z_{n-1})$  точек гладкого сопряжения их участков  $z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)$ , а также значений соответствующих параметров функций  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ .

В общем случае для нахождения этих значений используются специальные системы уравнений, сформированные на основе выражений (8.3.19).

Рассмотрим применение предлагаемого подхода для определения управления БЛА-РМ при разведке и мониторинге линейных объектов (см. Рис. 8.8,*б*).

При практической реализации этой задачи выявляются движущиеся точечные объекты, организованные в колонны и перемещающиеся по автомобильным или железным дорогам, а также по руслам рек [114].

При разведке таких колонн, которые можно отнести к линейным объектам, будем считать, что контролю подвергается

их состояние, виды точечных объектов в колонне и наземная обстановка на расстоянии  $\pm b$  от каждого такого объекта. Отметим, что в этой полосе могут находиться замаскированные точечные объекты. Исходными данными для формирования требуемой траектории движения БЛА-РМ являются карты автомобильных (железных) дорог, русел рек и параметры бортовой аппаратуры разведки.

В этом случае траектория движения БЛА задается с помощью совокупности поворотных пунктов маршрута ( $\text{ППМ}_i$ ), каждый из которых размещается в точке изменения направления соответствующего участка полета (см. Рис. 8.8, $\delta$ ) и характеризуется координатами  $(x_i, z_i)$ ,  $i = \overline{(1, n)}$ . На этом рисунке символом  $\bullet$  обозначены движущиеся и неподвижные точечные объекты.

Выделим из Рис. 8.8, $\delta$  фрагмент, представленный на Рис. 8.15.

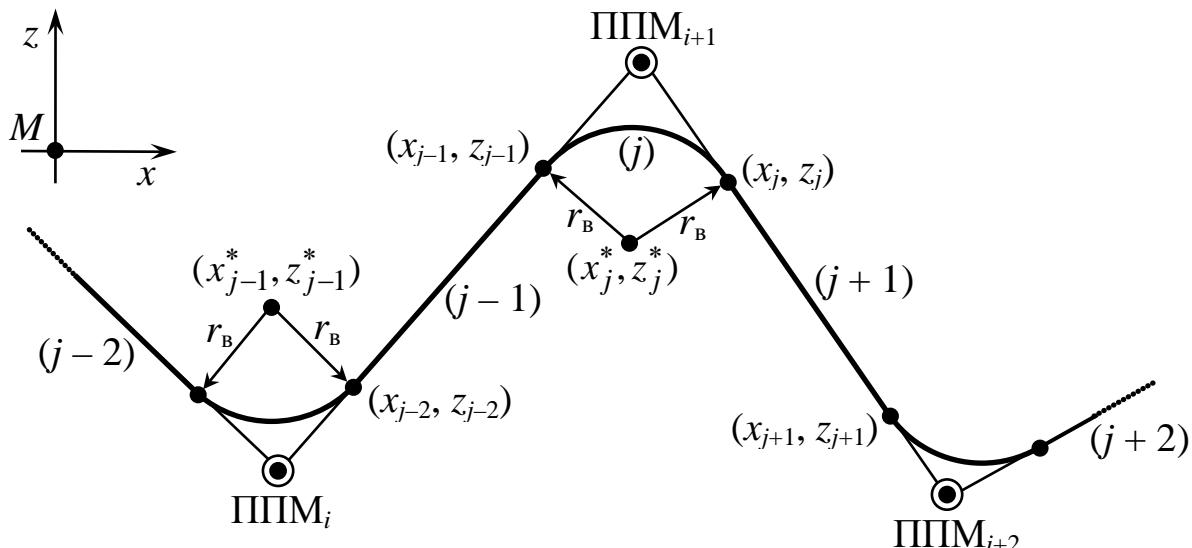


Рис. 8.15

Прямолинейные участки траектории полета БЛА-РМ между  $\text{ППМ}_i$  и  $\text{ППМ}_{i+1}$  можно описать уравнениями прямых [17] вида:

$$\frac{z - z_i}{z_{i+1} - z_i} = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = \overline{(1, n-1)}. \quad (8.3.20)$$

При разведке и мониторинге линейных объектов полет БЛА-РМ осуществляется на постоянной высоте  $h_{\text{пол}}$ , значение которой для используемой ОЭС при фиксированных углах  $\alpha$ ,  $\beta_{\text{в}}$ ,  $\beta_{\Gamma}$  определяется из условия:

$$l_1(h, \alpha, \beta_{\text{в}}, \beta_{\Gamma}) = 2b.$$

Подставляя в это условие формулу для расчета  $l_1$  из выражений (8.3.1), получаем следующее соотношение для определения требуемой высоты полета БЛА-РМ:

$$h_{\text{пол}} = \frac{2b \sin(\alpha + 0,5\beta_{\text{в}})}{2 \cos(0,5\beta_{\text{в}}) \operatorname{tg}(0,5\beta_{\Gamma})}. \quad (8.3.21)$$

Преобразуем выражение (8.3.20) к виду:

$$\frac{x}{x_{i+1} - x_i} - \frac{x_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{z}{z_{i+1} - z_i} + \frac{z_i}{z_{i+1} - z_i} = 0, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Эти уравнения прямых, записанные в общей форме [17]:

$$A_{i,i+1}x + C_{i,i+1}z + D_{i,i+1} = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (8.3.22)$$

где:

$$\begin{aligned} A_{i,i+1} &= \frac{1}{x_{i+1} - x_i}; & C_{i,i+1} &= -\frac{1}{z_{i+1} - z_i}; \\ D_{i,i+1} &= \frac{z_i}{z_{i+1} - z_i} - \frac{x_i}{x_{i+1} - x_i}, \end{aligned} \quad (8.3.23)$$

являются неявно заданными представлениями участков траекторий БЛА-РМ между заданными ППМ <sub>$i$</sub> ,  $i = \overline{1, n-1}$ .

Покажем, что, рассматривая уравнение (8.3.22) как представление требуемой траектории полета БЛА-РМ в форме (8.1.24), можно с использованием выражений (8.1.25)-(8.1.30), (5.2.21)-(5.2.23) сформировать косвенное управление БЛА СС  $u_i(t) = (P_i(t), \alpha_i(t), \gamma_i(t))$ , обеспечивающее его движение по требуемой прямой.

### Пример 8.5

Рассмотрим задачу формирования вектора косвенного управления БЛА-РМ самолетной схемы (см. Пример 5.1), обес-

печивающего при  $i = 1$  его полёт по одному из участков траектории, представленной на Рис. 8.15.

Пусть координаты ППМ этого участка имеют вид:

$$(x_1, z_1) = (2000; 1800), \quad (x_2, z_2) = (36000; 22000).$$

Используя формулы (8.3.23), получаем уравнение (8.2.22) траектории полёта БЛА-РМ между ППМ<sub>1</sub> и ППМ<sub>2</sub> в виде:

$$\Phi(x, z) = 0,000029x + 0,00005z + 0,030285 = 0. \quad (8.3.24)$$

Частные производные от этой функции записываются как:

$$\Phi_x(x, z) = 0,000029;$$

$$\Phi_z(x, z) = 0,000050;$$

$$\Phi_{xx} = \Phi_{xz} = \Phi_{zz} = 0.$$

Из последних равенств и формулы (8.1.29) следует, что  $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) \equiv 0$ . Это означает, что применение формулы (5.2.21) дает значение угла крена  $\gamma(t) \equiv 0$  на всем протяжении полета БЛА-РМ по прямой (8.3.24). При  $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) = 0$ ,  $V_{\text{зад}} = \text{const}$ ,  $y(t) = h_{\text{пол}} = \text{const}$  система уравнений (5.2.22), (5.2.23) имеет решение  $P(t) = \text{const}$ ,  $\alpha(t) = \text{const}$ .

Задаваясь значениями  $t_0 = 30$  с,  $t_k = 398,78$  с,  $V_{\text{зад}} = 107,24$  м/с,  $h_{\text{пол}} = 1143,4$  м и решая при исходных данных из Примера 5.1 систему уравнений (5.2.22), (5.2.23) методом простой итерации (см. Разд. 3.4), получаем значения тяги  $P(t) = 308,016$  Н и угла атаки  $\alpha(t) = 4,009^\circ$ .

При этих значениях  $P$ ,  $\alpha$  и  $\gamma = 0$  было проведено моделирование полета БЛА-РМ по прямой (8.3.24) с использованием уравнений (5.1.16)-(5.1.21).

Результаты расчёта и контроля управления БЛА-РМ представлены в Табл. 8.4.

Из этой таблицы следует, что моделирование пространственного движения БЛА-РМ наименее точным численным мето-

дом Эйлера (см. Разд. 3.1.1) указывает на плоскую траекторию его полета, описываемую уравнением (8.3.24).

Таблица 8.4

$t$ , с	$P(t)$ , Н	$\alpha(t)$ , град.	$\gamma(t)$ , град.	$V(t)$ , м/с	$\theta(t)$ , град.	$\Psi(t)$ , град.	$x(t)$ , м	$y(t)$ , м	$z(t)$ , м
30,00	308,018	4,009	0,000	107,238	0,000	30,715	2000,000	1143,399	1800,000
50,00	308,018	4,009	0,000	107,238	-0,000	30,715	3843,877	1143,399	2895,480
70,00	308,018	4,009	0,000	107,238	0,000	30,715	5687,754	1143,399	3990,960
90,00	308,018	4,009	0,000	107,238	-0,000	30,715	7531,631	1143,399	5086,439
110,00	308,018	4,009	0,000	107,238	-0,000	30,715	9375,508	1143,399	6181,919
130,00	308,018	4,009	0,000	107,238	0,000	30,715	11219,384	1143,399	7277,399
150,00	308,018	4,009	0,000	107,238	-0,000	30,715	13063,261	1143,399	8372,879
170,00	308,018	4,009	0,000	107,238	0,000	30,715	14907,138	1143,399	9468,359
190,00	308,018	4,009	0,000	107,238	-0,000	30,715	16751,015	1143,399	10563,838
210,00	308,018	4,009	0,000	107,238	-0,000	30,715	18594,892	1143,399	11659,318
230,00	308,018	4,009	0,000	107,238	0,000	30,715	20438,769	1143,399	12754,798
250,00	308,018	4,009	0,000	107,238	-0,000	30,715	22282,646	1143,399	13850,278
270,00	308,018	4,009	0,000	107,238	0,000	30,715	24126,523	1143,399	14945,758
290,00	308,018	4,009	0,000	107,238	-0,000	30,715	25970,400	1143,399	16041,237
310,00	308,018	4,009	0,000	107,238	0,000	30,715	27814,277	1143,399	17136,717
330,00	308,018	4,009	0,000	107,238	0,000	30,715	29658,153	1143,399	18232,197
350,00	308,018	4,009	0,000	107,238	-0,000	30,715	31502,030	1143,399	19327,677
370,00	308,018	4,009	0,000	107,238	0,000	30,715	33345,907	1143,399	20423,157
390,00	308,018	4,009	0,000	107,238	-0,000	30,715	35189,784	1143,399	21518,636
398,78	308,018	4,009	0,000	107,238	-0,000	30,715	35999,246	1143,399	21999,552

В Разд. 8.1 было отмечено, что навигация БЛА по совокупности ППМ не позволяет получать непрерывную гладкую траекторию его полета.

Для устранения этого недостатка введем для каждой смежной пары линейных участков траектории, представленной на Рис. 8.8,*б*, переходной участок, обеспечивающий гладкий переход между ними.

При этом для минимизации отклонений от требуемой ширины  $2b$  полосы просмотра окрестностей линейного объекта этот участок траектории предлагается реализовать в виде кругового виража с минимальным радиусом  $r_{\min}$  для рассматриваемого образца БЛА-РМ.

Введем одноиндексную нумерацию участков составной траектории полета БЛА-РМ, представленную на Рис. 8.15.

В соответствии с такой нумерацией уравнение (8.3.2) участка траектории, связывающего ПММ<sub>*i*</sub> с ПММ<sub>*i+1*</sub> и описывающее (*j* – 1)-й участок составной траектории полета БЛА-РМ, представим как:

$$A_{j-1}x + C_{j-1}z + D_{j-1} = 0. \quad (8.3.25)$$

Участок (*j* + 1) между ПММ<sub>*i+1*</sub> и ПММ<sub>*i+2*</sub> описывается уравнением вида:

$$A_{j+1}x + C_{j+1}z + D_{j+1} = 0. \quad (8.3.26)$$

Переходной *j*-й участок представим уравнением окружности:

$$(x - x_j^*)^2 + (z - z_j^*)^2 - r_{\min}^2 = 0, \quad (8.3.27)$$

где  $(x_j^*, z_j^*)$  – координаты ее центра.

Формирование фрагмента составной траектории полета БЛА-РМ, объединяющей (*j* – 1), *j* и (*j* + 1) участки, состоит в нахождении значений координат  $(x_{j-1}, z_{j-1})$ ,  $(x_j, z_j)$  точек сопряжения прямых (8.3.25), (8.3.26) с окружностью (8.3.27) с определением координат  $(x_j^*, z_j^*)$  ее центра.

Для обеспечения гладкости получаемой траектории потребуем равенства значений производных функций (8.3.25), (8.3.27) в точке  $(x_{j-1}, z_{j-1})$  и функций (8.3.26), (8.3.27) в точке  $(x_j, z_j)$ .

Согласно представлению (8.2.19) выражения (8.3.25), (8.3.27), (8.3.26) можно рассматривать как уравнения:

$$\Phi_{j-1}(x, z) = 0; \quad \Phi_j(x, z) = 0; \quad \Phi_{j+1}(x, z) = 0,$$

определяющие неявно заданные функции  $z_{j-1}(x)$ ,  $z_j(x)$ ,  $z_{j+1}(x)$ , описывающие траектории полета БЛА-РМ на соответствующих участках.

С использованием формулы (8.1.26) требования равенства значений производных  $z'_{j-1}$ ,  $z'_j$  и  $z'_j$ ,  $z'_{j+1}$  в общем виде записываются как:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{j-1,x}(x_{j-1}, z_{j-1})}{\Phi_{j-1,z}(x_{j-1}, z_{j-1})} &= \frac{\Phi_{j,x}(x_{j-1}, z_{j-1})}{\Phi_{j,z}(x_{j-1}, z_{j-1})}; \\ \frac{\Phi_{j,x}(x_j, z_j)}{\Phi_{j,z}(x_j, z_j)} &= \frac{\Phi_{j+1,x}(x_j, z_j)}{\Phi_{j+1,z}(x_j, z_j)}. \end{aligned} \quad (8.3.28)$$

При выполнении этих равенств искомые точки  $(x_{j-1}, z_{j-1})$  и  $(x_j, z_j)$  должны удовлетворять условиям:

$$\Phi_j(x_{j-1}, z_{j-1}) = 0; \quad \Phi_j(x_j, z_j) = 0. \quad (8.3.29)$$

Конкретизируя выражения (8.3.28), (8.3.29) путем использования в них уравнений (8.3.25)-(8.3.27) и проводя несложные преобразования, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A_{j-1}(z_{j-1} - z_j^*) - C_{j-1}(x_{j-1} - x_j^*) &= 0; \\ A_{j+1}(z_j - z_j^*) - C_{j+1}(x_j - x_j^*) &= 0; \\ (x_{j-1} - x_j^*)^2 + (z_{j-1} - z_j^*)^2 - r_{\min}^2 &= 0; \\ (x_j - x_j^*)^2 + (z_j - z_j^*)^2 - r_{\min}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (8.3.30)$$

Для определения значений  $x_j^*$  и  $z_j^*$  воспользуемся формулой для вычисления расстояния от точки до прямой, приведенной в работе [17].

В нашем случае ее применение к уравнениям прямых (8.3.25) и (8.3.26) позволяют записать выражения вида:

$$\begin{aligned} A_{j-1}x_j^* + C_{j-1}z_j^* + D_{j-1} - r_{\min} \sqrt{A_{j-1}^2 + C_{j-1}^2} &= 0; \\ A_{j+1}x_j^* + C_{j+1}z_j^* + D_{j+1} - r_{\min} \sqrt{A_{j+1}^2 + C_{j+1}^2} &= 0. \end{aligned} \quad (8.3.31)$$

Эти соотношения описывают условия того, что расстояния от центра окружности (8.3.27) до соответствующих прямых должны равняться заданной величине  $r_{\min}$ .

Отметим, что знак перед радикалами в выражениях (8.3.31) должен быть противоположен знакам коэффициентов  $D_{j-1}$  и  $D_{j+1}$  [17].

Соотношения (8.3.30), (8.3.31) определяют систему нелинейных алгебраических уравнений 6-го порядка для определения неизвестных  $x_{j-1}$ ,  $z_{j-1}$ ,  $x_j^*$ ,  $z_j^*$ ,  $x_j$ ,  $z_j$ , задающих параметры фрагмента гладкой составной траектории движения БЛА-РМ, приведенной на Рис. 8.15.

Вследствие нелинейности последних двух уравнений из состава выражений (8.3.30) система может иметь два решения, определяющие за счет расположения ее центра выпуклую и вогнутую дуги окружности (8.3.27).

Согласно Рис. 8.15, координаты  $z_{j-1}^*$  и  $z_j^*$  должны удовлетворять неравенствам:

$$z_{j-1}^* > z_i; \quad z_j^* < z_{i+1}, \quad (8.3.32)$$

где  $z_i$  и  $z_{i+1}$  – ординаты ППМ<sub>i</sub> и ППМ<sub>i+1</sub>.

При выполнении этих условий при переходе от  $(j-2)$ -го к  $(j-1)$ -му участку имеем вогнутую, а от  $(j-1)$ -го к  $(j+1)$ -му – выпуклую дуги переходных участков.

Неравенства (8.3.32) должны использоваться для конкретизации координат  $(x_{j-1}^*, z_{j-1}^*)$  и  $(x_j^*, z_j^*)$  соседних переходных

траекторий при устраниении неединственности решений систем уравнений (8.3.30), (8.3.31).

Таким образом, составная траектория разведки и мониторинга линейного объекта представляется в неявной форме уравнениями вида:

$$\begin{aligned}\Phi_{j-1}(x, z) &= A_{j-1}x + C_{j-1}z + D_{j-1} = 0, \quad x \in [\bar{x}_{j-2}, \bar{x}_{j-1}]; \\ \Phi_j(x, z) &= (x - \bar{x}_j^*)^2 + (z - \bar{z}_j^*)^2 - r_{\min}^2 = 0, \quad x \in [\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]; \\ \Phi_{j+1}(x, z) &= A_{j+1}x + C_{j+1}z + D_{j+1} = 0, \quad x \in [\bar{x}_j, \bar{x}_{j+1}].\end{aligned}\quad (8.3.33)$$

Здесь в соответствии с Рис. 8.8,б индекс  $j$  изменяется в пределах от 2 до  $(n - 1)$ ;  $\bar{x}_1 = x_1$ ,  $\bar{x}_n = x_n$ , где  $x_1$  и  $x_n$  – абсциссы координат ППМ<sub>1</sub> и ППМ <sub>$n$</sub> ;  $\bar{x}_{j-2}$ ,  $\bar{x}_{j-1}$ ,  $\bar{x}_j$ ,  $\bar{x}_{j+1}$ ,  $\bar{x}_j^*$ ,  $\bar{z}_j^*$  – результаты численного решения систем уравнений вида (8.3.30), (8.3.31) одним из методов, приведенных в Разд. 3.4, и применения условий (8.3.32).

Для каждой из функций из состава (8.3.33) по методам, описанным в Разд. 8.1, формируются векторы управлений  $\Delta_{j-1}(t)$ ,  $\Delta_j(t)$ ,  $\Delta_{j+1}(t)$ ,  $j = (\overline{2, n-1})$ , применяемого вида БЛА-РМ.

В соответствии с результатами Примеров 8.1 и 8.3 эти векторы имеют компоненты, независящие от текущего времени  $t$  полета БЛА-РМ.

Последовательная смена векторов управлений осуществляется при достижении координаты  $x(t)$  БЛА-РМ значений  $\bar{x}_{j-1}$ ,  $\bar{x}_j$ ,  $\bar{x}_{j+1}$ ,  $j = (\overline{3, n-2})$ . При этом, изменение значений угла крена  $\gamma$  БЛА СС носит знакопеременный характер, представленный на Рис. 8.16.

Параметрические представления траекторий  $z_{j-1}(x)$ ,  $z_j(x)$ ,  $z_{j+1}(x)$ ,  $j = (\overline{2, n-1})$ , строятся с использованием системы уравнений (8.1.25), которые формируются на основе выражений (8.3.33).

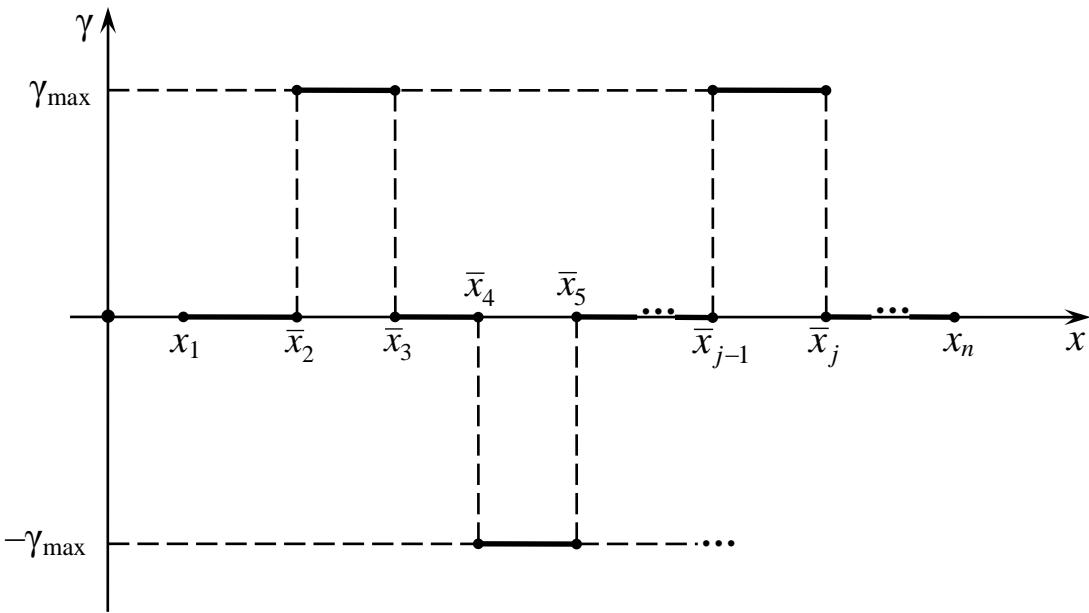


Рис. 8.16

Моменты времени, входящие в начальные условия последовательности этих систем уравнений, при известных значениях координат  $(x_1, z_1)$ ,  $(\bar{x}_{j-1}, \bar{z}_{j-1})$ ,  $(\bar{x}_j, \bar{z}_j)$ ,  $(x_j^*, z_j^*)$ ,  $(\bar{x}_{j+1}, \bar{z}_{j+1})$ ,  $(x_n, z_n)$ ,  $j = \overline{3, n-2}$ , и предположении, что  $V_{\text{зад}} = \text{const}$ , легко определяются с использованием формул расстояния между двумя точками прямой и длины дуги сектора окружности [17].

Сформируем гладкую составную траекторию полета БЛА-РМ, приведенную на Рис. 8.8,а, с использованием представления (8.3.19) и условий (8.3.28).

Будем считать, что маневренная СК (см. Рис. 1.9) выбрана таким образом, чтобы отрезок  $[a, b]$  области разведки и мониторинга точечных объектов был параллелен оси  $Mx$  этой системы. Предполагается, что движение БЛА-РМ начинается полетом по прямой  $z = z_1 = c$  между точками с координатами  $x = a$  и  $x = b$ . Далее полеты БЛА-РМ осуществляются по параллельным прямым  $z = z_k$  с виражами в этих точках с радиусом  $r_{\text{разв}}$ , значения которых определяются из выражений (8.3.2).

Количество горизонтальных участков составной траектории полета БЛА-РМ определяется как:

$$n = \lceil (d - c)/l_1 \rceil,$$

где  $\lceil (\cdot) \rceil$  – операция округления полученного дробного числа  $(\cdot)$  до ближайшего большего целого числа.

Формальное представление такой траектории, фрагмент которой приведен на Рис. 8.17, имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{j-1}(x, z) &= z - z_{j-1} = 0, \quad x \in [a, b]; \\ \Phi_j(x, z) &= (x - x_j^*)^2 + (z - z_j^*)^2 - r_{\text{разв}}^2 = 0, \\ &\quad x \in [b, b + r_{\text{разв}}]; \\ \Phi_{j+1}(x, z) &= z - z_{j+1} = 0, \quad x \in [a, b]; \\ \Phi_{j+2}(x, z) &= (x - x_{j+2}^*)^2 + (z - z_{j+2}^*)^2 - r_{\text{разв}}^2 = 0, \\ &\quad x \in [a - r_{\text{разв}}, a], \end{aligned} \tag{8.3.34}$$

где индекс  $j$  изменяется в пределах от 2 до  $(n - 2)$ .

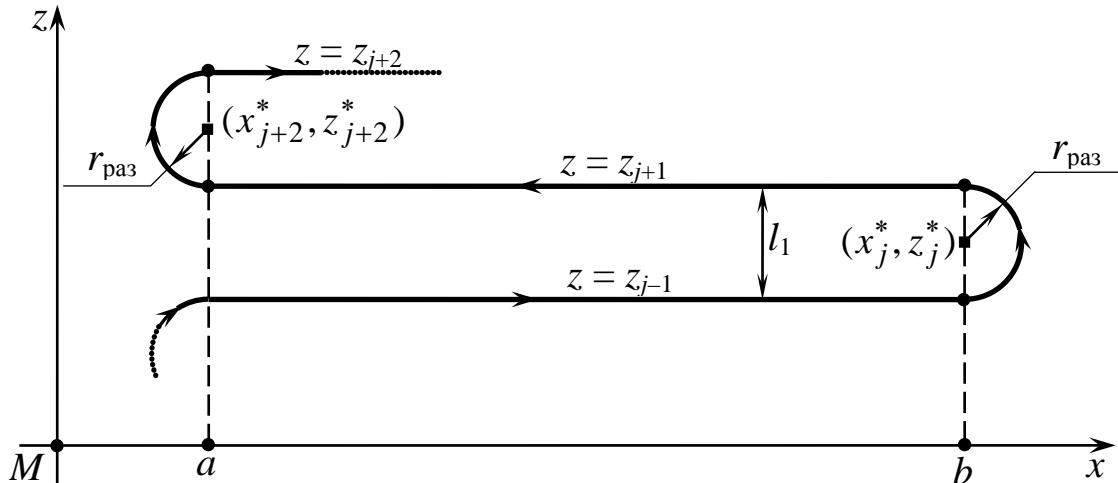


Рис. 8.17

Из этого рисунка следует, что координаты центров виражей, выполняемых БЛА-РМ, вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} x_j^* &= b, \quad z_j^* = z_{j-1} + 0,5l_1; \\ x_{j+2}^* &= a, \quad z_{j+2}^* = z_{j+1} + 0,5l_1. \end{aligned}$$

При таком расположении центров выполняемых виражей условия равенства значений первых производных (8.3.28) в

точках «стыковки» линейных и круговых участков будут выполнены, то есть составная траектория полета БЛА-РМ будет иметь требуемый гладкий вид.

Выражения (8.3.34) представляют собой при  $A_{j-1} = A_{j+1} \equiv 0$  и  $r_{\min} = r_{\text{разв}}$  частный случай соотношений (8.3.33).

Это означает, что определение векторов управлений  $\Delta_{j-1}(t)$ ,  $\Delta_j(t)$ ,  $\Delta_{j+1}(t)$ ,  $\Delta_{j+2}(t)$ ,  $j = \overline{2, n-2}$  производится с использованием изложенного выше подхода. Заметим, что для БЛА СС в этих векторах закон изменения угла крена  $\gamma$  имеет вид, представленный на Рис. 8.16.

Основным критерием эффективности разведки и мониторинга объектов 1-го, 2-го и 3-го типов является вероятность их обнаружения, распознавания и идентификации оператором целевой нагрузки МНПУ БАК по изображениям, полученным с борта БЛА-РМ.

В общем случае эта вероятность описывается зависимостью вида:

$$Q = Q(a, b, c), \quad (8.3.35)$$

где  $a$  – вектор полетных характеристик БЛА-РМ,  $b$  – вектор параметров установленного на борту целевого оборудования;  $c$  – вектор характеристик искомых объектов и состояния контролируемой БЛА-РМ наземной (надводной) поверхности.

При задании требуемого значения вероятности  $Q$  и значений векторов  $b$  и  $c$  зависимость (8.3.35) может быть использована наряду с некоторыми дополнительными условиями для определения значений вектора  $a$ .

Рассмотрим пример использования зависимости (8.3.35) для определения значения  $V_{\text{зад}}(t)$  скорости полета БЛА-РМ.

Вид этой функции должен определяться параметрами целевого оборудования и задачами, решаемыми рассматриваемым образцом БЛА-РМ. Определим эту характеристику полёта БЛА-РМ, предполагая, что для поиска и обнаружения объектов

1-го, 2-го и 3-го типов в составе его целевого оборудования используется такой наиболее распространенный вид ОЭС, как воздушная тепловизионная аппаратура (ВТА) [1]. В этой работе вводится в рассмотрение вероятность того, что за время нахождения объекта в поле зрения ВТА (см. Рис. 8.7) оператор целевой нагрузки МНПУ БАК обнаружит его на экране своего АРМ.

Для вычислений этой вероятности предлагается использовать функцию  $Q$  вида [1]:

$$Q = 1 - \exp\left[-\frac{22000h\delta_0^2 N}{N_0 2\beta_c V \cos^2 \alpha_{\text{виз}}}\right]. \quad (8.3.36)$$

Здесь  $h$  – высота полёта БЛА (м);  $\delta_0$  – элементарное поле зрения ВТА (град.);  $N = (c/A)$  – параметр, зависящий от минимального размера  $c$  искомого объекта и разрешения  $A$  на местности применяемой ВТА;  $N_0$  – степень тепловой неоднородности фона поверхности;  $2\beta_c$  – горизонтальное поле зрения ВТА (град.);  $V$  – скорость БЛА (м/с);  $\alpha_{\text{виз}}$  – угол визирования ВТА, отсчитываемый от надира (град.).

Поскольку угол визирования  $\alpha_{\text{виз}}$  ОЭС выше было предложено отсчитывать от строительной горизонтали фюзеляжа БЛА-РМ, с использованием замены  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha_{\text{виз}}$  и того, что  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{\text{виз}}\right) = \sin \alpha$ , а также с учетом рассмотрения введенного выше горизонтального поля зрения ВТА  $\beta_r = 2\beta_c$ , формула (8.3.36) преобразуется к виду:

$$Q = 1 - \exp\left[-\frac{22000h\delta_0^2 N}{N_0 \beta_r V \sin^2 \alpha_{\text{виз}}}\right]. \quad (8.3.37)$$

Будем считать заданной требуемую величину  $Q_{\text{тр}}$  вероятности  $Q$ . Тогда значение  $V_{\text{зад}}(t) = V_{\text{зад}} = \text{const}$  можно определить из выражения (8.3.37), полагая в нём  $Q = Q_{\text{тр}}$ , как:

$$V_{\text{зад}} = \frac{22000h\delta_0^2 N}{N_0 \beta_{\Gamma} \sin^2 \alpha_{\text{виз}} \left| \ln(1 - Q_{\text{тр}}) \right|}.$$

Входящая в эту формулу высота  $h = h_{\text{пол}}$  полета БЛА-РМ определяется в зависимости от вида искомых объектов из приведенных выше выражений (8.3.5), (8.3.21) и др.

Отметим, что с использованием этой формулы при  $Q_{\text{тр}} = 0,75$  определялись значения скорости  $V_{\text{зад}}$  для БЛА-РМ в Примерах 8.2-8.5.

Аналогичный подход, основанный на применении зависимостей вида (8.3.35), может быть использован для таких видов целевой нагрузки БЛА-РМ, как цифровые фотокамеры, телевизионные системы [5] и бортовые РЛС. Требуемые изменения положения линии визирования ОЭС при движении БЛА-РМ по криволинейным траекториям рассмотрены в работе [114].

При определении управления БЛА-РМ вертолетной схемы, осуществляющего контроль наземной (надводной) поверхности из режима висения по схеме, представленной на Рис. 8.8,д, будем считать заданными такие характеристики сектора обзора, как угол  $\phi$  и дальности  $L_1, L_2$ .

Будем считать, что точка  $E$ , от которой производится отсчет этих дальностей, имеет координаты  $x(t_0), z(t_0)$ , определяющие местоположение БЛА-РМ в момент времени начала обзора.

Высоту  $h_{\text{вис}}$  точки висения БЛА-РМ определим из очевидного требования, что  $PK = L_2 - L_1$ . Заменяя левую часть этого равенства формулой для определения параметра  $l_3$  из состава выражений (8.3.1) и проводя несложные преобразования, получим, что

$$h_{\text{вис}} = \frac{(L_2 - L_1) \sin(\alpha + 0,5\beta_{\text{в}}) \sin(\alpha - 0,5\beta_{\text{в}})}{\sin \beta_{\text{в}}}.$$

Управление беспилотным вертолетом в режиме вращения (разворота) вокруг вертикальной оси в процессе его висения

определяется путем решения уравнений (6.3.14) и (6.3.15) относительно значений общего шага  $\varphi_{\text{ош}}$  несущего и шага  $\varphi_{\text{Р}}$  рулевого винтов.

В первом из этих уравнений используется требуемая угловая скорость вращения (разворота) вертолета, которая в рассматриваемом случае вычисляется как:

$$\dot{\Omega}_{\text{tp}} = \frac{\Phi}{t_k - t_0},$$

где  $t_k$  – заданный момент времени окончания процесса обзора сектора наземной (надводной) поверхности.

### **8.3.2. Управление БЛА разведки и мониторинга загрязнений воздушного бассейна**

Контроль пространственных объектов (см. Рис. 8.8,*e*) предлагается осуществлять путем последовательной реализации восходящих (от точки  $L$  к точке  $S$ ) и нисходящих (в противоположном направлении) цилиндрических винтовых траекторий с увеличением их радиуса  $r$  до установления границ обследуемых объектов. На этом рисунке координаты  $(x_0, z_0)$  описывают расположение предполагаемого наземного источника химического или радиационного загрязнения атмосферы.

Для формирования управления БЛА-РМ, осуществляющего контроль пространственного объекта, представленного на Рис. 8.8,*e*, будем использовать составную траекторию его движения, включающую в себя совокупность концентрических отмеченных выше восходящих и нисходящих участков пространственных «винтовых» кривых.

Следуя работе [22], запишем параметрическое представление  $k$ -той из этих кривых в следующей форме:

$$\begin{aligned} x_k(t) &= x_{hk} + r_k \cos t; \\ y_k(t) &= y_{hk} + V_y t; \\ z_k(t) &= z_{hk} + r_k \sin t. \end{aligned} \quad (8.3.38)$$

Здесь  $(x_{hk}, y_{hk}, z_{hk})$  – координаты начальной точки кривой;  $r_k$  – радиус  $k$ -той «винтовой» траектории;  $V_y$  – вертикальная составляющая скорости БЛА-РМ при его движении по  $k$ -той траектории. Параметр  $t$  изменяется от момента времени  $t_0 = 0$  начала полета БЛА-РМ до момента  $t_n$  завершения процесса контроля объекта.

Для вычисления радиусов траекторий БЛА-РМ будем использовать следующее рекуррентное уравнение:

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= r_k + \Delta r, \quad k = \overline{1, n-1}; \\ r_1 &= r_{\min}, \end{aligned}$$

где  $\Delta r$  – заданная величина шага изменения радиусов;  $r_{\min}$  – минимальное значение радиуса виража рассматриваемого об разца БЛА-РМ.

Применяя правило индукции, получаем решение этого уравнения вида:

$$r_k = r_{\min} + (k - 1)\Delta r, \quad k = \overline{1, n}. \quad (8.3.39)$$

Будем считать заданными экспертные оценки минимальной ( $y_0$ ) и максимальной ( $y_{\max}$ ) высот контролируемой области загрязнения, а также ее максимального радиуса  $R_{\max}$ , отсчитываемого от вертикальной прямой, проходящей через точку Ц (см. Рис. 8.8,e).

Подставляя величину  $R_{\max}$  в левую часть формулы (8.3.39) и полагая в ней  $k = n$ , определим потребное число восходящих и нисходящих участков составной траектории полета БЛА-РМ:

$$n = 1 + \left[ \frac{R_{\max} - R_{\min}}{\Delta r} \right],$$

где  $[(\cdot)]$  – целая часть числа  $(\cdot)$ .

Конкретизируем уравнения (8.3.38) для таких участков, предполагая, что восходящие участки имеют нечетные номера, а нисходящие – четные. Тогда уравнения первых из них записутся как:

$$\begin{aligned}x_{2k-1}(t) &= x_{h,2k-1} + r_{2k-1} \cos t; \\y_{2k-1}(t) &= y_0 + V_y t; \\z_{2k-1}(t) &= z_{h,2k-1} + r_{2k-1} \sin t, \quad k = \overline{1, n}.\end{aligned}\tag{8.3.40}$$

Нисходящие траектории, в которых высота полета БЛА-РМ изменяется в интервале от  $y_{\max}$  до  $y_0$ , представляются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}x_{2k}(t) &= x_{h,2k} + r_{2k} \cos t; \\y_{2k}(t) &= y_{\max} - V_y t; \\z_{2k}(t) &= z_{h,2k} + r_{2k} \sin t, \quad k = \overline{1, n}.\end{aligned}\tag{8.3.41}$$

В приведенных выше выражениях принято, что БЛА-РМ совершает подъем и спуск с эксплуатационным значением вертикальной составляющей  $V_y$  скорости, взятым с соответствующим знаком. Этим достигается равномерность замеров загрязнений, проводимых бортовой контрольной аппаратурой в интервале высот  $[y_0, y_{\max}]$  при различных значениях радиусов  $r_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

Из вторых выражений из состава уравнений (8.3.40) и (8.3.41), следует, что в этом случае затраты времени на движения БЛА-РМ по восходящим и нисходящим участкам будут одинаковы и равны величине:

$$\tau = (y_{\max} - y_0)/V_y.$$

Определим моменты времени начала и окончания движения БЛА-РМ по участкам его траектории (8.3.40) и (8.3.41).

Первый участок при  $k = 1$  начинает выполняться в момент времени  $t_0 = 0$  из точки с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$  и завершается в момент времени:

$$t_1 = t_0 + \tau = \tau$$

в точке с координатами:

$$\begin{aligned}x_1(\tau) &= x_0 + r_1 \cos \tau; \\y_1(\tau) &= y_{\max}; \\z_1(\tau) &= z_0 + r_1 \sin \tau.\end{aligned}$$

Второй (нисходящий) участок начинается с момента времени  $t_1 = \tau$  из этой точки и завершается в момент времени  $t_2 = 2\tau$  в точке с координатами:

$$\begin{aligned}x_2(2\tau) &= x_1(\tau) + r_2 \cos 2\tau; \\y_2(2\tau) &= y_0; \\z_2(2\tau) &= z_1(\tau) + r_2 \sin 2\tau.\end{aligned}$$

Третий (восходящий) участок, начинающийся из этой точки, выполняется на интервале времени  $[2\tau, 3\tau]$  и т.д.

Обобщая эти результаты, имеем, что каждый  $k$ -й участок траектории выполняется на интервале времени  $[(k-1)\tau, k\tau]$ ,  $k = \overline{1, n}$ . При этом координаты  $x$  и  $z$  его начальной точки определяются как:

$$\begin{aligned}x_{k-1}((k-1)\tau) &= x_{k-2}((k-2)\tau) + r_{k-1} \cos((k-1)\tau); \\z_{k-1}((k-1)\tau) &= z_{k-2}((k-2)\tau) + r_{k-1} \sin((k-1)\tau),\end{aligned}\quad (8.3.42)$$

а конечной – вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}x_k(k\tau) &= x_{k-1}((k-1)\tau) + r_k \cos(k\tau); \\z_k(k\tau) &= z_{k-1}((k-1)\tau) + r_k \sin(k\tau).\end{aligned}\quad (8.3.43)$$

Начальное и конечное значения координаты  $y$  зависит от номера  $k$  реализуемого участка следующим образом:

$$\begin{aligned}y_{k-1}((k-1)\tau) &= \begin{cases} y_0 & \text{для нечетных значений } (k-1); \\ y_{\max} & \text{для четных значений } (k-1); \end{cases} \\y_k(k\tau) &= \begin{cases} y_{\max} & \text{для нечетных } k; \\ y_0 & \text{для четных } k. \end{cases}\end{aligned}$$

С учетом вышеизложенного сформируем окончательный вид уравнений, описывающих участки требуемой составной траектории движения БЛА-РМ:

а) восходящие участки при  $t \in [(2k-2)\tau; (2k-1)\tau]$ :

$$\begin{aligned}x_{2k-1}(t) &= x_{2k-2}((2k-2)\tau) + r_{2k-1} \cos t; \\y_{2k-1}(t) &= y_0 + V_y t; \\z_{2k-1}(t) &= z_{2k-2}((2k-2)\tau) + r_{2k-1} \sin t, \quad k = \overline{1, n};\end{aligned}\quad (8.3.44)$$

б) нисходящие участки при  $t \in [(2k-1)\tau; 2k\tau]$ :

$$\begin{aligned}x_{2k}(t) &= x_{2k-1}((2k-1)\tau) + r_{2k} \cos t; \\y_{2k}(t) &= y_{\max} - V_y t; \\z_{2k}(t) &= z_{2k-1}((2k-1)\tau) + r_{2k} \sin t, \quad k = (\overline{1, n}),\end{aligned}\tag{8.3.45}$$

где правые части соответствующих уравнений вычисляются с использованием выражений (8.3.39), (8.3.42), (8.3.43).

Рассмотрим подход для формирования законов изменения функций  $V_{\text{зад}}(t)$ ,  $\theta_{\text{тр}}(t)$ ,  $\Psi_{\text{тр}}(t)$ , соответствующих движению БЛА-РМ по траекториям (8.3.44) и (8.3.45).

Для этих целей будем использовать кинематические уравнения движения БЛА вида (5.1.19)-(5.1.21).

В связи с тем, что скорость  $V_y = \text{const}$ , будем считать функцию  $V_{\text{зад}}(t)$  также постоянной величиной, равной  $V_{\text{зад}}$ .

Сформируем вид выражений  $V_{\text{зад}}$ ,  $\theta_{\text{тр}}(t)$  и  $\Psi_{\text{тр}}(t)$  для уравнений (8.3.44).

Дифференцируя по  $t$  второе из этих выражений и подставляя результат в уравнение (5.1.20), имеем:

$$\sin \theta_{\text{тр},2k-1} = \frac{V_y}{V_{\text{зад},2k-1}}, \quad k = (\overline{1, n}).\tag{8.3.46}$$

Откуда получаем, что

$$\theta_{\text{тр},2k-1} = \arcsin\left(\frac{V_y}{V_{\text{зад},2k-1}}\right), \quad k = (\overline{1, n});\tag{8.3.47}$$

$$\cos \theta_{\text{тр},2k-1} = \frac{\sqrt{V_{\text{зад},2k-1}^2 - V_y^2}}{V_{\text{зад},2k-1}}, \quad k = (\overline{1, n}).\tag{8.3.48}$$

Поделив уравнение (5.1.21) на уравнение (5.1.19), получим выражение вида:

$$\operatorname{tg} \Psi_{\text{тр},2k-1}(t) = \frac{\dot{z}_{2k-1}(t)}{\dot{x}_{2k-1}(t)}.$$

Подставляя в правую часть этой формулы производные от функций  $x_{2k-1}(t)$  и  $z_{2k-1}(t)$  из выражений (8.3.44), имеем:

$$\operatorname{tg} \Psi_{\text{тр},2k-1}(t) = -\operatorname{ctg} t.$$

Используя известные тригонометрические соотношения [17], получаем, что

$$\Psi_{\text{тр},2k-1}(t) = t + \frac{\pi}{2}, \quad t \in [(2k-2)\tau; (2k-1)\tau], \quad k = \overline{1, n}. \quad (8.3.49)$$

Подставляя производную от функции  $x_{2k-1}(t)$  и выражения (8.3.48), (8.3.49) в уравнение (5.1.19), имеем:

$$r_{2k-1} \sin t = \frac{V_{\text{зад},2k-1} \sqrt{V_{\text{зад},2k-1}^2 - V_y^2}}{V_{\text{зад},2k-1}} \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Проводя очевидные преобразования этого выражения, получаем уравнение для определения значения скорости  $V_{\text{зад}}$  вида:

$$\sqrt{V_{\text{зад},2k-1}^2 - V_y^2} = r_{2k-1}.$$

Отсюда значение скорости  $V_{\text{зад},2k-1}$  движения БЛА-РМ по  $(2k-1)$ -му участку составной траектории вычисляется по следующей формуле:

$$V_{\text{зад},2k-1} = \sqrt{V_y^2 + r_{2k-1}^2}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (8.3.50)$$

Проводя аналогичные рассуждения для уравнений (8.3.45), получаем выражения вида:

$$\begin{aligned} \sin \theta_{\text{тр},2k} &= \frac{V_y}{V_{\text{зад},2k}}; \\ \theta_{\text{тр},2k} &= -\arcsin(V_y/V_{\text{зад},2k}); \\ \cos \theta_{\text{тр},2k} &= \frac{\sqrt{V_{\text{зад},2k}^2 - V_y^2}}{V_{\text{зад},2k}}; \end{aligned} \quad (8.3.51)$$

$$\Psi_{\text{тр},2k}(t) = t + \frac{\pi}{2};$$

$$V_{\text{зад},2k} = \sqrt{V_y^2 + r_{2k}^2}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Из полученных выше соотношений следует, что углы наклона траекторий полета БЛА-РМ на рассматриваемых участках являются постоянными величинами. При этом значения  $\theta_{\text{тр},2k-1} > 0$  и  $\theta_{\text{тр},2k} < 0$ ,  $k = \overline{1,n}$ , что полностью соответствует характеру восходящих и нисходящих участков составной траектории движения БЛА-РМ. Для каждого участка величина скорости  $V_{\text{зад}}$  зависит от его радиуса, что соответствует требованию постоянства величины затрат времени  $\tau$ .

Для определения векторов косвенного управления  $u_{2k-1}(t) = (P_{2k-1}(t), \alpha_{2k-1}(t), \gamma_{2k-1}(t))$ ,  $t \in [(2k-2)\tau; (2k-1)\tau]$ ,  $k = \overline{1,n}$ , БЛА-РМ самолетной схемы в систему уравнений (5.1.54) подставляются выражения (8.3.46), (8.3.48), (8.3.50), производные  $\dot{\theta}_{\text{тр},2k-1}(t) = 0$ ,  $\dot{\Psi}_{\text{тр},2k-1}(t) = 1$  и второе уравнение из состава формул (8.3.44). Векторы управления  $u_{2k}(t) = (P_{2k}(t), \alpha_{2k}(t), \gamma_{2k}(t))$ ,  $t \in [(2k-1)\tau; 2k\tau]$ ,  $k = \overline{1,n}$  определяются как решения этой системы уравнений при использовании выражений (8.3.51), второго уравнения из соотношений (8.3.45) и значений  $\dot{\theta}_{\text{тр},2k}(t) = 0$ ,  $\dot{\Psi}_{\text{тр},2k}(t) = 1$ . Для формирования векторов  $\Delta_{2k-1}(t)$  и  $\Delta_{2k}(t)$  прямого управления БЛА-РМ указанной выше схемы применяются выражения (5.5.8)-(5.5.23).

При использовании БЛА-РМ вертолетной схемы векторы управления  $u_k(t) = (\phi_{\text{ош},k}(t), \chi_k(t), \eta_k(t), \phi_{\text{РВ},k}(t))$ ,  $k = \overline{1,n}$ , вычисляются для восходящих и нисходящих участков его составной траектории полета из решения систем уравнений (6.2.20)-(6.2.24), в которых последовательно применяются отмеченные выше выражения и значения производных  $\dot{\theta}_k(t)$  и  $\dot{\Psi}_k(t)$ .

Заметим, что уравнения (8.3.44) и (8.3.45) могут быть использованы для описания винтовых траекторий набора требуемой высоты и снижения беспилотного вертолета на этапах его взлета и посадки (см. Разд. 7.4). Графическое представление таких траекторий для пилотируемых вертолетов приведено в работе [30]. При необходимости формирование программных управлений, обеспечивающих движение беспилотных вертолетов по таким траекториям, может быть получено указанным выше методом при значениях  $r_k = \text{const}$  и  $(x_{hk}, y_{hk}, z_{hk}) = (x_0, y_0, z_0)$ .

### ***8.3.3. Управление БЛА радиотехнической разведки***

Рассмотренные выше траектории движения БЛА-РМ предназначены для решения задач видовой разведки наземных (надводных) объектов и мониторинга уровня загрязнения (заражения) атмосферы.

Перспективной задачей применения этого вида БЛА является их использование в процессах обнаружения и определения координат наземных источников радиоизлучения (ИРИ), которые объединяются понятием радиотехнической разведки (РТР). Искомыми объектами наземных и воздушных средств РТР являются РЛС, узлы радиорелейной и спутниковой связи, радиостанции противника и др.

В гражданской сфере средства воздушной РТР могут использоваться для поиска и обнаружения терпящих бедствия наземных (надводных) объектов, оснащенных аварийными радиомаяками, а также при поиске БЛА, совершающих не запланированные (аварийные) парашютные посадки.

Цели, задачи, состав аппаратуры и методы воздушной РТР, выполняемой пилотируемыми ЛА, приведены в монографии [105]. Анализ существующей литературы по применению БЛА-РМ показал практически полное отсутствие работ по управлению БЛА, осуществляющих воздушную РТР.

Рассмотрим один из подходов к решению этой актуальной задачи для БЛА-PTR, целевое оборудование которых составляют различные типы бортовой аппаратуры PTR бокового обзора [105].

Пусть из предварительной оценки обстановки известно, что подлежащие обнаружению ИРИ располагаются в квадрате размерами ( $a \times a$ ) км. Поместим в центр этого квадрата, как показано на Рис. 8.8,жс, начало плоской маневренной СК  $Mxz$ .

Будем считать, что БЛА-PTR совершает разведывательный полет в горизонтальной плоскости на высоте  $h$  со скоростью  $V_{\text{зад}}(t) = V_{\text{зад}} = \text{const}$  по круговой траектории вида:

$$x^2 + z^2 - R^2 = 0. \quad (8.3.52)$$

Здесь  $R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$  – радиус окружности, описанной вокруг введенного выше квадрата [17].

Полет БЛА-PTR начинается в точке с координатами  $(x_0, z_0)$ , в которой угол поворота его траектории равен  $\Psi_0$ .

Пусть в процессе движения по траектории (8.3.52) бортовая аппаратура БЛА-PTR определила в некоторые моменты времени  $t_{i-1}$  и  $t_i$  углы пеленга  $\varphi_{i-1}$  и  $\varphi_i$  на работающий ИРИ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , представленные на Рис. 8.8,жс. В эти моменты времени параметры полета БЛА-PTR соответственно равны  $(x_{i-1}, z_{i-1}, \Psi_{i-1})$  и  $(x_i, z_i, \Psi_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$

Используя значения этих параметров, построим уравнения прямых, проходящих через точки с координатами  $(x_{i-1}, z_{i-1})$  и  $(x_i, z_i)$  под углами  $(\Psi_{i-1} + \varphi_{i-1})$  и  $(\Psi_i + \varphi_i)$  [17]:

$$\begin{aligned} z - z_{i-1} &= \operatorname{tg}(\Psi_{i-1} + \varphi_{i-1})(x - x_{i-1}); \\ z - z_i &= \operatorname{tg}(\Psi_i + \varphi_i)(x - x_i). \end{aligned} \quad (8.3.53)$$

Координаты обнаруженного  $i$ -го ИРИ определяются точкой пересечения этих прямых.

Решая систему линейных алгебраических уравнений (8.3.53), получаем следующие формулы для вычисления координат обнаруженного  $i$ -го ИРИ:

$$\begin{aligned} x_i^* &= \frac{x_{i-1}\operatorname{tg}(\Psi_{i-1} + \varphi_{i-1}) - x_i\operatorname{tg}(\Psi_i + \varphi_i) + z_i - z_{i-1}}{\operatorname{tg}(\Psi_{i-1} + \varphi_{i-1}) - \operatorname{tg}(\Psi_i + \varphi_i)}; \quad i = 1, 2, 3, \dots \\ z_i^* &= z_{i-1} + \left[ \frac{z_i - z_{i-1} + x_{i-1}\operatorname{tg}(\Psi_{i-1} + \varphi_{i-1})}{\operatorname{tg}(\Psi_{i-1} + \varphi_{i-1}) - \operatorname{tg}(\Psi_i + \varphi_i)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{x_i\operatorname{tg}(\Psi_i + \varphi_i)}{\operatorname{tg}(\Psi_{i-1} + \varphi_{i-1}) - \operatorname{tg}(\Psi_i + \varphi_i)} - x_{i-1} \right] \operatorname{tg}(\Psi_{i-1} + \varphi_{i-1}). \end{aligned} \quad (8.3.54)$$

При использовании этих выражений значения координат  $x_{i-1}$ ,  $z_{i-1}$ ,  $x_i$ ,  $z_i$  и курсовых углов  $\Psi_{i-1}$ ,  $\Psi_i$  поступают в моменты времени  $t_{i-1}$  и  $t_i$  от соответствующих датчиков САУ БЛА. Вычисляемые в бортовом вычислительном комплексе (БВК) [107] БЛА-PTR по формулам (8.3.54) координаты обнаруженных ИРИ передаются в МНПУ БАК и отображаются в требуемой форме на мониторе АРМ оператора целевой нагрузки БЛА-PTR.

Приведенный метод вычисления координат ИРИ используется при небольшом количестве источников в области разведки. При больших концентрациях ИРИ необходима его доработка с учетом того, что бортовая аппаратура PTR в смежные моменты времени может запеленговать разные ИРИ.

Отметим, что в работе [105] отсутствуют расчетные формулы для определения координат обнаруженных объектов PTR, но приводятся соотношения для вычисления погрешностей двукратной и многократной их пеленгации.

Формирование управления БЛА-PTR самолетной и вертолетной схем при их движении по круговой траектории (8.3.52) осуществляется методами, приведенными в Разд. 8.1 и Разд. 8.3.2.

Рассмотрим другие виды требуемых траекторий полетов БЛА-PTR, используя рекомендации специалистов по тактике

применения пилотируемых ЛА, оснащенных аппаратурой воздушной РТР. Такая разведка при любых метеоусловиях в дневное и ночное время должна выполняться при полетах БЛА-РТР на постоянной высоте, как над своей территорией, так и за линией боевого соприкосновения (ЛБС) с противником. При этом, по их мнению, основными видами ИРИ являются РЛС обнаружения воздушных целей (ВЦ) и целеуказания ЗУР.

При движении БЛА-РТР над своей территорией вдоль ЛБС используются следующие виды траекторий:

- 1. Полет по прямой, параллельной ЛБС.**

При программировании такой траектории задаются координаты двух ППМ, расположенных на одинаковых расстояниях от ЛБС. Для формирования управления БЛА-РТР используются методы, применяемые к программированию траектории движения БЛА-РМ, представленной на Рис. 8.8,*б*.

- 2. Полет по ломаному маршруту.**

Данная траектория полета БЛА-РТР представляется совокупностью ППМ (см. Рис. 8.8,*б*) и позволяет за счет его поворотов получить большее число пеленгов на ИРИ, чем при прямолинейном полете. Координаты ППМ должны обеспечивать повороты БЛА-РТР на 60-120° через каждые 20-30 км при его полетах на малых высотах 500-1000 м и 30-50 км на средних и больших высотах порядка 4000-9000 м. Программирование такого полета осуществляется методом, изложенным в Разд. 8.3.1.

- 3. Полет по нескольким замкнутым маршрутам.**

Такие маршруты располагаются на определенном расстоянии от ЛБС. В качестве уравнения, описывающего каждый маршрут в виде неявной функции  $z = z(x)$ , предлагается использовать уравнение эллипса [17], большая ось которого расположена «параллельно» ЛБС:

$$\Phi(x, z) = \frac{(x - x_{\Pi})^2}{a^2} + \frac{(z - z_{\Pi})^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (8.3.55)$$

Здесь  $(x_{ц}, z_{ц})$  – координаты центра траектории, заданной в определенной маневренной СК;  $a, b$  – размеры малой и большой полуосей эллипса такие, что  $b > a$ .

В этом случае составная траектория движения БЛА-РТР будет описываться совокупностью функций (8.3.55) с различными значениями координат  $(x_{ц}, z_{ц})$  и совокупности переходных траекторий, обеспечивающих непрерывное и гладкое перемещение БЛА-РТР с одной эллиптической траектории на другую, смежную ей траекторию (см. Разд. 8.1). Методы построения составных неявно заданных траекторий и формирование соответствующих им управлений приведены в Разд. 8.3.1.

Отметим, что пеленгация ИРИ проводится в процессе движения БЛА-РТР как по эллиптическим, так и по переходным траекториям. При этом рекомендуется выбирать параметры этих траекторий так, чтобы расстояния между центрами кривых (8.3.55) составляло 30-50 км и линии пеленгов ИРИ, полученные при движении по ним БЛА-РТР, пересекались под углами 60-120°. Для повышения точности РТР и проведения мониторинга некоторого района предлагается использовать несколько БЛА-РТР с траекториями полета вида (8.3.55).

Для исключения поражения БЛА-РТР от ЗРК противника полеты по отмеченным выше траекториям предлагается проводить на удалении 25-35 км от ЛБС.

При полетах БЛА-РТР за ЛБС предлагается использовать траектории, представленные на Рис. 8.8,*а*-Рис. 8.8,*в* и Рис. 8.8,*ж*, совместно с соответствующими методами их программирования, описанными в Разд. 8.3.1.

Для всех приведенных выше траекторий полетов БЛА-РТР при определении координат обнаруженных ИРИ используются формулы вида (8.3.54).

При разведке и доразведке координат РЛС обнаружение ВЦ и РЛС управления огнем средств ПВО перспективным направ-

ление является совместное использование БЛА-РТР и боевых АЛЦ (см. Разд. 8.4), задачей которых является имитация атак на вскрываемые средства.

Предложенные в данном разделе виды траекторий полетов БЛА-РТР и метод расчета координат обнаруженных ИРИ может рассматриваться как первый этап решения проблемы применения БЛА при проведении воздушной РТР. В исследований и разработках последующих этапов необходимо учитывать такие факторы, как параметры и характеристики бортовой аппаратуры РТР, размеры районов разведки, допустимые (предельные) затраты времени на ее проведение, ошибки определения координат ИРИ, требуемое количество и виды применяемых БЛА-РТР, вероятность вскрытия всех ИРИ в заданном районе разведки и др.

#### ***8.3.4. Управление БЛА ретрансляции связи воздушных и наземных объектов***

Увеличение дальности действия радиоканалов связи «МНПУ – БЛА» является одним из важнейших направлений повышения эффективности применения различных видов БЛА.

В настоящее время для этих целей предлагается использовать спутниковые и тактические каналы связи с резким расширением спектра применяемых радиочастот [98] и автоматические активные ретрансляторы, принимающие сигналы на одной частоте и передающие их абонентам на другой частоте [101]. Последние, согласно этой работе, предлагается устанавливать на пилотируемых самолетах и вертолетах, а также подвешивать на воздушном шаре. При этом отмечается, что дальность связи зависит от высоты подъема антенны ретранслятора и от его расположения относительно антенны пункта управления БЛА. При размещении ретранслятора между этим пунктом и низколетящим БЛА дальность связи примерно в два раза больше, чем при подъеме ретранслятора над пунктом управления [101]. По-

следнее указывает на техническую неэффективность применения в качестве носителя аппаратуры ретрансляции воздушных шаров, которая вместе с высокой стоимостью эксплуатации таких ее носителей, как спутники связи [98], самолеты и вертолеты [1], указывает на необходимость применения в данной области специальных БЛА.

Ретрансляция радиосигналов с помощью специального типа информационных БЛА является перспективным направлением повышения эффективности современных систем связи [43].

Применение БЛА-ретрансляторов (БЛА-Р) при управлении БЛА-РМ, БЛА-PTR, имитационными и боевыми БЛА позволяет решать целевые задачи вне зоны прямой радиовидимости средств связи МНПУ соответствующих БАК.

Значительную роль БЛА-Р играют в совершенствовании тактических (полевых) систем связи наземных абонентов. В этой области, кроме увеличения дальности радиосвязи, ретрансляторы позволяют получать наземным абонентам информацию от находящихся в воздухе удаленных БЛА-РМ. Последнее является средством реализации перспективного сетеоцентрического подхода к управлению боевыми действиями.

Анализ состояния вопроса по созданию и применению БЛА-Р показал, что основные усилия их разработчиков сосредоточены на проектировании различных образцов бортовой аппаратуры активной и пассивной ретрансляции сигналов и ее взаимодействия с наземной аппаратурой связи МНПУ БАК (см. библиографию к работе [99])

При этом в качестве БЛА-Р предлагается использовать БЛА как вертолетной, так и самолетной схем с приоритетом первой схемы [99]. Следует отметить, что работы по определению параметров полета и управлению БЛА-Р в существующей литературе практически отсутствуют.

В данном разделе эти задачи решаются применительно к следующим областям эксплуатации БЛА-Р:

1. Обеспечение связи с удаленными БЛА, решающими целевые задачи вне зоны действия средств передачи командной информации и приема бортовых данных их МНПУ.
2. Организация системы удаленной связи наземных абонентов, в том числе с получением данных от находящихся в воздухе БЛА-РМ и БЛА-РТР.

Применяющую аппаратуру связи и ретрансляции будем характеризовать величинами  $D_{3B}$ ,  $D_{BV}$ ,  $D_{B3}$  максимальной дальности устойчивой радиосвязи по каналам «земля-воздух», «воздух-воздух» и «воздух-земля» соответственно.

В связи с тем, что на МНПУ БАК обычно применяется более мощная приемопередающая аппаратура и узконаправленные антенные системы, дальность ее действия  $D_{3B}$  значительно превосходит дальности действия  $D_{BV}$  и  $D_{B3}$  аппаратуры, устанавливаемой на борту БЛА-Р. Это объясняется тем, что по масштабаритным ограничениям в составе целевой нагрузки БЛА-Р легкого и среднего классов используются менее мощные приемопередатчики (трансиверы) и ненаправленные или слабонаправленные антенны (волновые полувибраторы, плоские «patch»-антенны). При этом будем считать, что  $D_{B3} < D_{BV}$ , то есть дальность действия аппаратуры ретрансляции, применяемой в тактических сетях связи, может быть меньше дальности действия аппаратуры радиообмена с удаленными БЛА.

Будем считать, что в процессе программирования полета такого БЛА на интервале времени  $[t_0, t_k]$  определены следующие значения его координат:

$$x_{\max} = \max_{t \in [t_0, t_k]} x(t); \quad y_{\min} = \min_{t \in [t_0, t_k]} y(t); \quad z_{\max} = \max_{t \in [t_0, t_k]} z(t), \quad (8.3.56)$$

вычисленные в земной СК с центром в точке расположения МНПУ БАК (см. Рис. 1.9).

Минимальное значение высоты полета БЛА выбрано для обеспечения связи БЛА с МНПУ вне зоны его прямой радиовидимости и для исключения действия помех при распространении радиоволн вблизи наземной поверхности.

По определению удаленного БЛА имеем, что значения этих координат должны удовлетворять условию:

$$D_{3B} < \sqrt{x_{\max}^2 + y_{\min}^2 + z_{\max}^2} \leq R,$$

где  $R$  – радиус действия рассматриваемого образца БЛА.

Построим маневренную СК с началом  $M$  в точке размещения МНПУ и повернутую относительно земной СК на угол  $\Psi_M$ , который с учетом выражений (8.3.56) вычисляется как:

$$\Psi_M = \operatorname{arctg}(z_{\max} / x_{\max}).$$

В этой СК значение  $z_{\max}$  будет равно нулю, а значения  $x_{\max}$ ,  $y_{\min}$  будут лежать на координатной плоскости  $Mxy$ , проходящей через точку с координатами  $(x_{\max}, z_{\max})$ .

Расчетная схема для определения параметров полета БЛА-Р вертолетной схемы [99], применяемого для обеспечения связи с удаленным БЛА, приведена на Рис. 8.18.

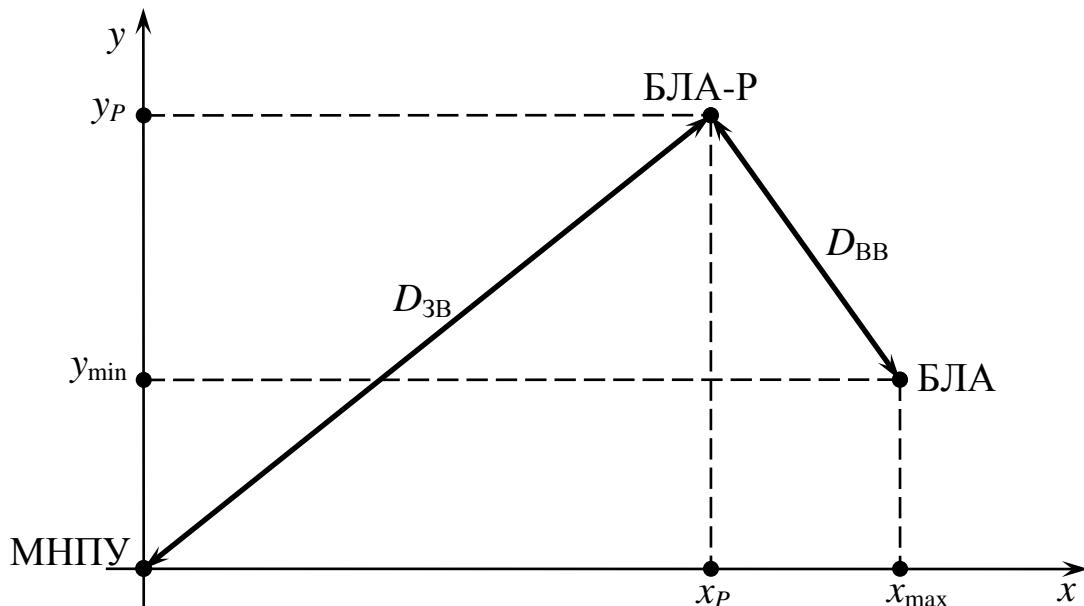


Рис. 8.18

Координаты  $(x_P, y_P)$  точки висения БЛА-Р в используемой СК, обеспечивающего работу канала связи «МНПУ-БЛА», согласно этому рисунку, определяются из решения следующей системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} x_P^2 + y_P^2 &= D_{3B}^2; \\ (x_P - x_{\max})^2 + (y_P - y_{\min})^2 &= D_{BB}^2. \end{aligned} \quad (8.3.57)$$

Каждое из уравнений этой системы записано с использованием формулы расстояния между соответствующими точками [17], расположенными в плоскости МНПУ $xy$ .

Система (8.3.57) решается одним из численных методов, представленных в Разд. 3.4.

Для полученного решения  $x_P^0, y_P^0$  проверяется условие вида:

$$h_{\min} \leq y_P^0 \leq h_{\max}, \quad (8.3.58)$$

где  $[h_{\min}, h_{\max}]$  – эксплуатационный интервал высот полета рассматриваемого образца БЛА-Р.

При невыполнении этого неравенства и при отсутствии решения системы (8.3.57) необходимо увеличить значение дальности  $D_{BB}$  действия бортовой аппаратуры ретрансляции.

После получения решения  $x_P^0, y_P^0$ , удовлетворяющего условию (8.3.58), и с учетом того, что в рассматриваемой СК координата  $z_P^0 = 0$ , с применением формул (1.16) вычисляются координаты точки висения БЛА-Р в земной СК.

### Пример 8.6

Пусть  $D_{3B} = 140$  км,  $D_{BB} = 40$  км. Тогда для удаленного БЛА со значениями координат (8.3.56), равными  $x_{\max} = 179$  км,  $y_{\min} = 0,3$  км, решения системы (8.3.57), полученные численным методом простых итераций, имеют вид:

$$x_P^0 = 139,8 \text{ км}; \quad y_P^0 = 8,1 \text{ км}.$$

При увеличении высоты полета БЛА до значений  $y_{\min} = 1,0$  км и  $y_{\max} = 3,0$  км получаем следующие решения:

$$x_P^0 = 139,7 \text{ км}; \quad y_P^0 = 8,6 \text{ км};$$

$$x_P^0 = 139,6 \text{ км}; \quad y_P^0 = 10,1 \text{ км}.$$

Установлено, что для значений  $D_{\text{ВВ}} = 30$  км при отмеченных выше исходных данных система уравнений (8.3.57) решений не имеет.

Определим координаты точки висения БЛА-Р вертолетной схемы при организации тактической системы связи между наземными абонентами, расположенными в некоторой прямоугольной области с размерами  $A \times B$  км.

Построим маневренную СК с началом в точке размещения МНПУ вертолетного БАК и осями МНПУ $x$  и МНПУ $y$ , параллельными сторонам заданной прямоугольной области (см. Рис. 8.19).

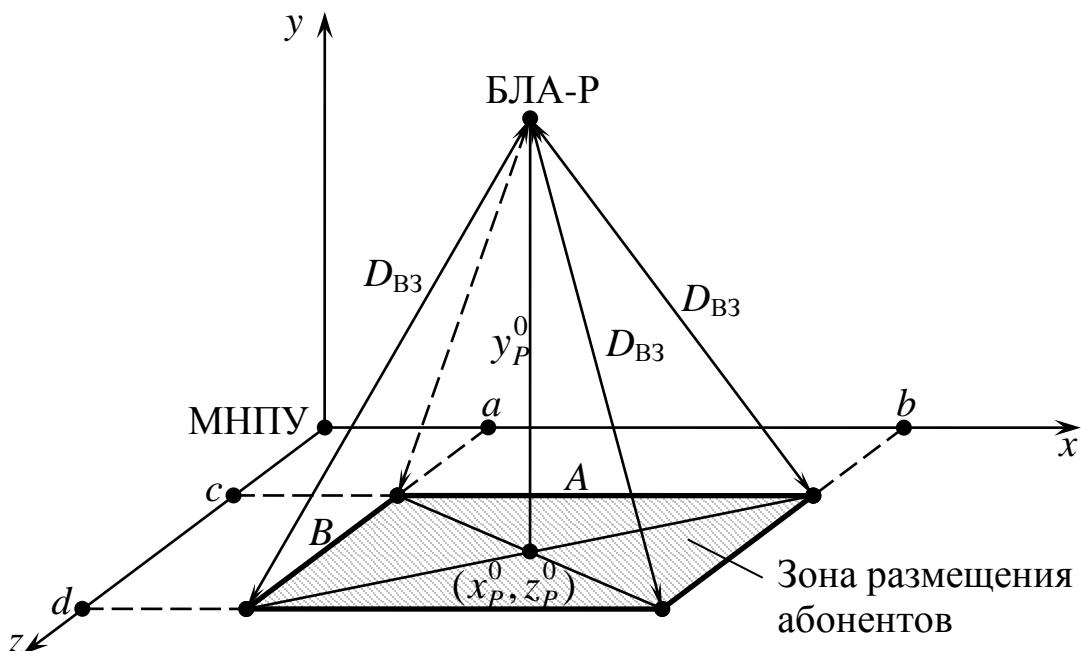


Рис. 8.19

На этом рисунке параметрами  $a, b, c, d$  обозначены координаты, описывающие заданную область размещения наземных абонентов, которые связаны с её размерами выражениями вида:

$$A = b - a; \quad B = d - c.$$

Используя очевидные геометрические соотношения, получаем следующие формулы для вычисления координат точки висения БЛА-Р:

$$\begin{aligned}x_P^0 &= 0,5(b-a) = 0,5A; \\y_P^0 &= 0,5\sqrt{4D_{B3}^2 - (b-a)^2 - (d-c)^2} = 0,5\sqrt{4D_{B3}^2 - A^2 - B^2}; \quad (8.3.59) \\z_P^0 &= 0,5(d-c) = 0,5B.\end{aligned}$$

Из второго выражения следует, что для получения значения высоты  $y_P^0 > 0$  дальность  $D_{B3}$  действия аппаратуры ретрансляции и размеры области обслуживания его наземных абонентов должны удовлетворять неравенству:

$$D_{B3} > 0,5\sqrt{A^2 + B^2}. \quad (8.3.60)$$

Кроме этого, для полученного значения  $y_P^0$  должно выполняться условие (8.3.58).

### Пример 8.7

Пусть область размещения абонентов тактической системы связи имеет размеры  $A \times B = 20 \times 40$  км и описывается координатами  $a = 5$  км;  $b = 25$  км;  $c = 10$  км;  $d = 50$  км.

Используя неравенство (8.3.60), получим следующую оценку требуемой дальности действия аппаратуры ретрансляции:

$$D_{B3} > 22,36 \text{ км.}$$

Результаты расчетов по формулам (8.3.59) при различных значениях дальности  $D_{B3}$  приведены в Табл. 8.5.

Таблица 8.5

$D_{B3}$ , км	22,5	23	24	25
$x_P^0$ , км	10	10	10	10
$y_P^0$ , км	2,500	5,385	8,717	11,181
$z_P^0$ , км	20	20	20	20

Как и выше, вычисленные по формулам (8.3.59) значения координат  $x_P^0$ ,  $y_P^0$  и  $z_P^0$ , должны быть преобразованы с помощью формул (1.16) в координаты  $(\bar{x}_P, \bar{y}_P, \bar{z}_P)$  точки висения

БЛА-Р в земной СК. Для случая, когда наземные абоненты системы связи должны получать на свои терминалы видеоданные от находящихся в воздухе БЛА-РМ, имеет место некоторая область существования информационных каналов «БЛА-РМ → БЛА-Р → абоненты». Такую область будем описывать выражением вида:

$$(x - \bar{x}_P)^2 + (y - \bar{y}_P)^2 + (z - \bar{z}_P)^2 \leq D_{\text{вз}}^2, \quad (8.3.61)$$

которое геометрически представляет собой шар радиуса  $D_{\text{вз}}$  с центром в точке висения БЛА-Р.

При выполнении в некоторый момент времени  $t$  условия (8.3.61) для текущих значений координат  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  некоторого БЛА-РМ такой канал начинает действовать, то есть наземные абоненты получают возможность использовать в своей деятельности данные, поступающие от этого БЛА.

Для использования данных от удаленных БЛА-РМ в целевую нагрузку БЛА-Р дополнительно может быть включена аппаратура ретрансляции сигналов от таких БЛА.

В этом случае в правой части неравенства (8.3.61) используется величина  $D_{\text{вв}} > D_{\text{вз}}$ .

Для вычисления вектора  $\Delta = (\varphi_{\text{ош}}, \varphi_P)$  управления БЛА-Р вертолетной схемы в режиме висения в определенных выше точках используется система уравнений (6.3.6).

Определим требуемые параметры траектории полета БЛА-Р самолетной схемы.

Будем считать, что организация связи между МНПУ БАК и удаленным БЛА осуществляется в процессе барражирования БЛА-Р на постоянной высоте  $y_P^0$  по круговой траектории вида:

$$(x - \bar{x}_P^0)^2 + (z - \bar{z}_P^0)^2 - r_P^2 = 0. \quad (8.3.62)$$

Здесь  $(\bar{x}_P^0, \bar{z}_P^0)$  – координаты центра траектории в земной СК;  $r_P$  – радиус траектории барражирования БЛА-Р.

Схема взаимодействия МНПУ БАК, БЛА-Р и удаленного БЛА в рассмотренной выше маневренной СК приведена на Рис. 8.20.

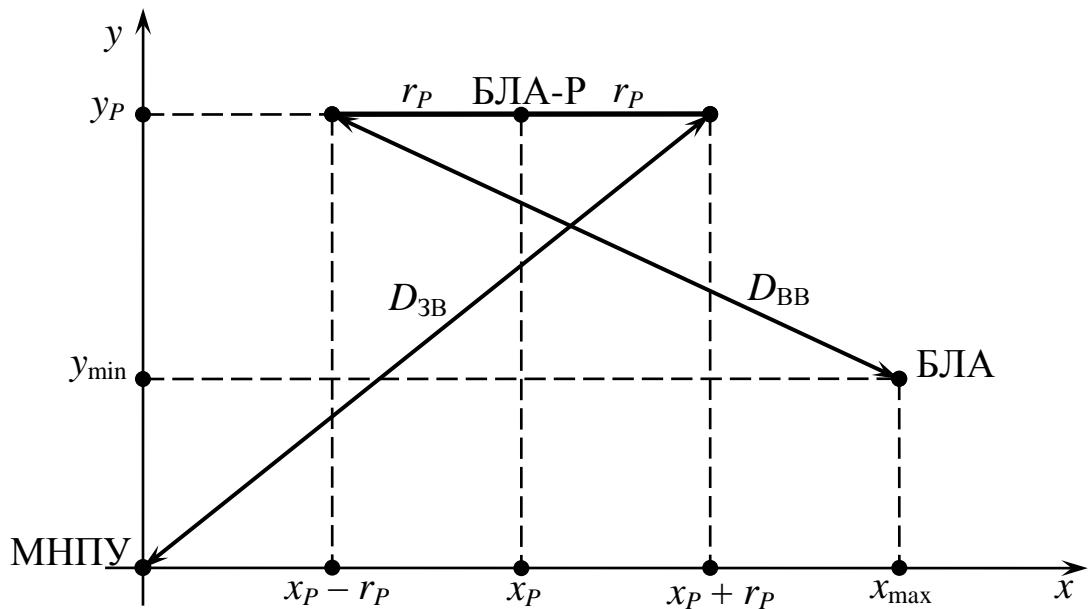


Рис. 8.20

Для вычисления значений  $x_P$ ,  $y_P$ ,  $r_P$  траекторных параметров БЛА-Р будем использовать систему уравнений вида:

$$\begin{aligned} (x_P + r_P)^2 + y_P^2 &= D_{3B}^2; \\ (x_P - r_P - x_{\max})^2 + (y_P - y_{\min})^2 &= D_{BB}^2; \\ V_{\text{зад}}^2 / gr_P &= \tan \gamma_{\text{зад}}. \end{aligned} \quad (8.3.63)$$

Первые два уравнения этой системы представляют собой квадраты максимальных расстояний от наиболее удаленных точек траектории БЛА-Р до МНПУ БАК и БЛА.

Третье уравнение является частным случаем формулы (5.2.21) при полете БЛА по круговой траектории со скоростью  $V_{\text{зад}}(t) = V_{\text{зад}} = \text{const}$  и углом крена  $\gamma_{\text{зад}}(t) = \gamma_{\text{зад}} = \text{const}$ .

Выделим из этого уравнения выражение:

$$r_P = V_{\text{зад}}^2 / g \tan \gamma_{\text{зад}} \quad (8.3.64)$$

и подставим его правую часть в первые два уравнения системы (8.3.63).

В этом случае получим следующую систему алгебраических уравнений 2-го порядка:

$$\begin{aligned}(x_P + V_{\text{зад}}^2 / g \operatorname{tg} \gamma_{\text{зад}})^2 + y_P^2 &= D_{3B}^2; \\ (x_P - V_{\text{зад}}^2 / g \operatorname{tg} \gamma_{\text{зад}} - x_{\max})^2 + (y_P - y_{\min})^2 &= D_{BB}^2,\end{aligned}\quad (8.3.65)$$

которая при  $V_{\text{зад}} = 0$  сводится к системе уравнений (8.3.57).

При задании значений параметров  $V_{\text{зад}}$  и  $\gamma_{\text{зад}}$  этой системы она решается одним из численных методов, изложенных в Разд. 3.4. Отмеченные параметры варьируются до получения приемлемых значений корней  $x_P^0$  и  $y_P^0$ , в частности, удовлетворяющих условию (8.3.58).

### Пример 8.7

При  $D_{3B} = 120$  км,  $D_{BB} = 40$  км,  $x_{\max} = 177$  км,  $y_{\min} = 1$  км,  $V_{\text{зад}} = 100$  м/с,  $\gamma_{\text{зад}} = 45^\circ$  использование системы (8.3.65) и формулы (8.3.64) дает следующие параметры траектории полета БЛА-Р:

$$x_P^0 = 138,7 \text{ км}; \quad y_P^0 = 8,5 \text{ км}; \quad r_P^0 = 1,02 \text{ км}.$$

При изменении величины  $y_{\min}$  на значение 0,3 км имеем:

$$x_P^0 = 138,8 \text{ км}; \quad y_P^0 = 7,9 \text{ км}; \quad r_P^0 = 1,02 \text{ км}.$$

Если положить  $y_{\min} = 1$  км и  $\gamma_{\text{зад}} = 30^\circ$ , получим следующие значения траекторных параметров:

$$x_P^0 = 138,1 \text{ км}; \quad y_P^0 = 6,15 \text{ км}; \quad r_P^0 = 1,766 \text{ км}.$$

Координаты  $x_P^0$ ,  $y_P^0$ ,  $z_P^0 = 0$  переводятся из маневренной СК с помощью выражений (1.16) в координаты  $(\bar{x}_P^0, \bar{y}_P^0, \bar{z}_P^0)$  параметров полета БЛА-Р в земной СК. При этом считаются определенными полетные параметры  $V_{\text{зад}}^0$ ,  $\gamma_{\text{зад}}^0$  и  $r_P^0$  движения БЛА-Р по траектории (8.3.62).

Значения силы тяги  $P$  и угла атаки  $\alpha$ , обеспечивающие его движение по такой траектории, получаются при отмеченных выше исходных данных из решения системы уравнений

(5.2.22), (5.2.23) одним из численных методов, рассмотренных в Разд. 3.4.

Текущие значения координат  $x(t)$  и  $z(t)$  движения БЛА-Р вычисляются как решения системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{V_{\text{зад}}^0(z - \bar{z}_P^0)}{r_P^0}; \\ \dot{z} &= \frac{-V_{\text{зад}}^0(x - \bar{x}_P^0)}{r_P^0}, \quad t \in [t_0, t_k],\end{aligned}\tag{8.3.66}$$

которая получена из системы (8.1.25) и выражения (8.3.62).

Начальные условия для этой системы уравнений имеют вид:

$$x(t_0) = x_0; \quad z(t_0) = z_0, \tag{8.3.67}$$

где  $(x_0, z_0)$  – координаты точки выхода БЛА-Р на траекторию полета (8.3.62).

Момент времени  $t_k$  при заданных значениях  $t_0$  и времени  $T$  обеспечения ретрансляцией связи с удаленным БЛА определяется как:

$$t_k = t_0 + T. \tag{8.3.68}$$

Число оборотов БЛА-Р при полете по замкнутой траектории (8.3.62) вычисляется по следующей формуле:

$$N = \frac{V_{\text{зад}}^0 T}{2\pi r_P^0}. \tag{8.3.69}$$

Определим траекторные параметры и управление БЛА-Р самолетной схемы, применяемого в тактических системах связи.

На Рис. 8.21 приведена расчетная схема задачи определения параметров траектории полета БЛА-Р.

Задача решается в предположении, что БЛА-Р барражирует на заданной высоте  $y_P^0$  над областью с размерами  $A \times B$  по круговой траектории с радиусом  $r_P^0$ .

Координаты  $x_P^0$  и  $z_P^0$  центра этой траектории вычисляются с помощью выражений (8.3.59).

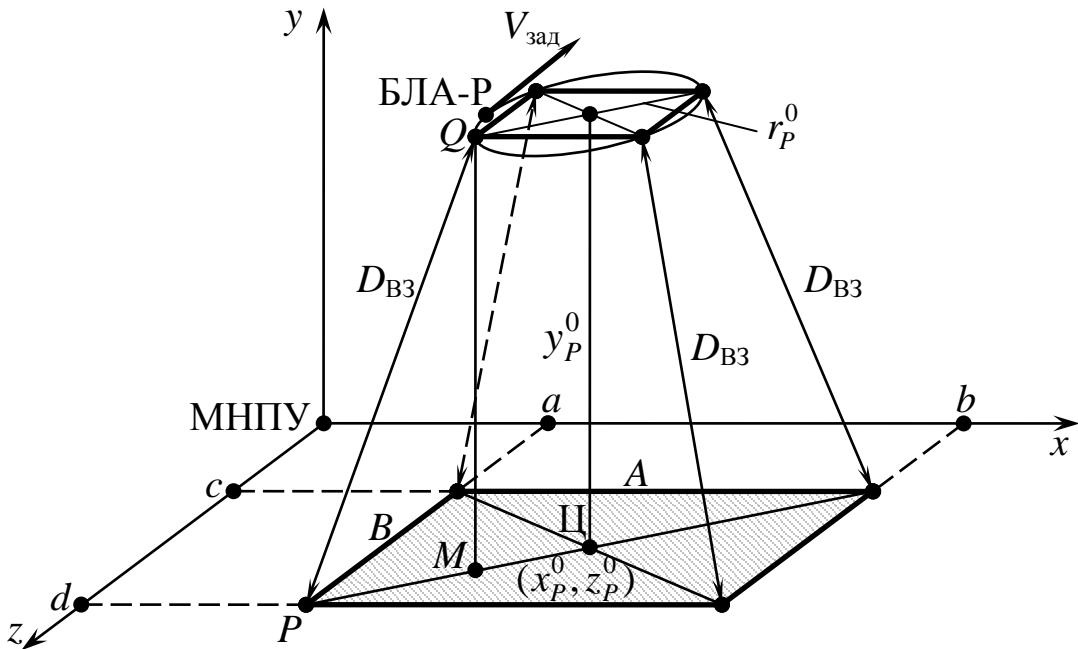


Рис. 8.21

Величину радиуса  $r_P^0$  окружности, описанной около верхнего прямоугольника, представленного на Рис. 8.21, определим как разность длин отрезков  $\Gamma P$  и  $MP$ .

Имея, что  $\Gamma P = 0,5\sqrt{A^2 + B^2}$ , из треугольника  $PQM$  получим формулу для вычисления искомого радиуса вида:

$$r_P^0 = 0,5\sqrt{A^2 + B^2} - \sqrt{D_{B3}^2 - (y_P^0)^2}. \quad (8.3.70)$$

Из этого выражения следует, что высота полета БЛА-Р должна удовлетворять условию:

$$y_P^0 < D_{B3}.$$

Подстановка вычисленного по формуле (8.3.70) радиуса  $r_P^0$  в выражение (5.2.21) позволяет определить величину угла крена:

$$\gamma^0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{V_{\text{зад}}^2}{gr_P^0}\right),$$

обеспечивающего полет БЛА-Р по предлагаемой траектории.

Эта величина используется при вычислении остальных управляющих воздействий  $P^0$  и  $a^0$  из решения системы уравнений (5.2.22), (5.2.23) при  $V_{\text{зад}}(t) = V_{\text{зад}}^0$ ,  $y(t) = y_P^0$ .

Для вычисления текущих координат  $x(t)$  и  $z(t)$  движения БЛА-Р по требуемой траектории (8.3.62) решается задача Коши (8.3.66), (8.3.67).

Время, в течение которого БЛА-Р должен находиться в воздухе, вычисляется с использованием выражений (8.3.68), (8.3.69).

При необходимости получения наземными абонентами данных от находящихся в воздухе БЛА-РМ область существования отмеченных выше информационных каналов, в отличие от области (8.3.61), будет иметь за счет движения БЛА-Р изменяющиеся во времени границы.

Эта область описывается параметрическим неравенством вида:

$$(x - x(t))^2 + (y - y_P^0)^2 + (z - z(t))^2 \leq D_{B3}^2, \quad t \in [t_0, t_k].$$

Здесь  $x(t)$  и  $z(t)$  – текущие значения координат БЛА-Р.

При выполнении в момент времени  $t$  этого неравенства для текущих значений координат БЛА-Р и координат  $x, z$  некоторого БЛА-РМ на терминалах наземных абонентов могут быть получены видеоданные от этого БЛА-РМ.

В данном разделе была приведена элементарная теория формирования траекторных параметров БЛА-Р вертолетной и самолетной схем, основанная на использовании геометрических соотношений. При ее развитии необходимо более полно учитывать такие радиотехнические параметры аппаратуры связи МНПУ, удаленных БЛА, наземных абонентов и бортовой аппаратуры ретрансляции сигналов БЛА-Р, как диаграммы направленности и коэффициенты усиления применяемых антенн, мощности приемников и передатчиков, отношения «сигнал-шум» и т.д.

Перспективной задачей применения БЛА-Р для управления БЛА дальнего и сверхдальнего действия является разработка

методов управления несколькими последовательно связанными ретрансляторами. Для управления удаленными крупными группировками БЛА [55, 81] на БЛА-Р должны быть возложены функции маршрутизаторов обмена информации. При этом в обязательном порядке должны быть решены вопросы защиты радиоканалов системы ретрансляции и маршрутизации от воздействия активных и пассивных помех [71, 99].

Важную роль в развитии теории применения БЛА-Р должно быть отведено учету действия ветровых возмущений на их траекторные и полетные параметры. Необходимость такого учета, основы которого приведены в Главе 4, вытекает из требования обеспечения стабильности процессов ретрансляции связи воздушных и наземных объектов.

#### **8.4. Управление имитационными БЛА**

Как было отмечено в Разд. 1.2, авиационные ложные цели (АЛЦ) являются общими представителями имитационных БЛА, расширяющих функции такого известного их типа, как воздушные мишени (ВМ) [89].

В настоящее время в процессах применения ВМ можно выделить следующие недостатки:

- а) использование в боевой учебе подразделений войск ПВО и ВВС, а также в испытаниях средств борьбы с воздушными целями (ВЦ) единичных экземпляров мишеней,
- б) отсутствие ВМ вертолетной схемы,
- в) использование в траекториях полетов ВМ плоских маневров (горизонтальный полет, доворот, разворот, «змейка», пикирование, кабрирование и т.п.),
- г) применение ручного (радиокомандного) режима управления ВМ, осуществляемого оператором управления МНПУ ИмБАК.

Следует отметить, что в работе [89] вопросы программирования полетов АЛЦ практически не рассматривались.

Методы управления перспективными учебно-испытательными и боевыми АЛЦ, классификация которых приведена на Рис. 1.6, должны обеспечить решение следующих задач их практического применения:

1. Использование УИАЛЦ и БАЛЦ вертолетной схемы (ВС).
2. Применение траекторий движения АЛЦ, наиболее приближенных к реальным траекториям полетов зарубежных и отечественных ЛА, выполняющих соответствующие боевые задачи.
3. Реализация групповых полетов АЛЦ, максимальным образом имитирующих современную и перспективную тактику применения боевых ЛА.
4. Применение состязательного (игрового) подхода в процессах обучения и повышения боевой квалификации расчетов средств ПВО и экипажей ЛА.

При решении этих задач будем использовать материалы цикла статей [103].

#### ***8.4.1. Общие рекомендации по применению авиационных ложных целей***

Для эффективного решения задач, стоящих перед перспективными АЛЦ, предлагается следующий состав их целевой нагрузки [89].

Основное целевое оборудование АЛЦ должно включать следующие компоненты:

- радиолокационный имитатор цели (РИЦ), воспроизводящий эффективные площади рассеивания (ЭПР) соответствующих зарубежных и отечественных боевых ЛА;
- тепловой имитатор цели (ТИЦ), формирующий поле температур имитируемых ЛА;
- аппаратура постановки помех, действующих против АЛЦ средствам ПВО и ЛА;
- аппаратура измерения промахов образцов оружия (снаряды, ракеты), применяемых против АЛЦ.

К дополнительному целевому оборудованию, устанавливаемому на боевых АЛЦ, относятся:

- аппаратура радиотехнической разведки, используемая для обнаружения РЛС противника;
- бортовая РЛС, применяемая для обнаружения и сопровождения мобильных наземных и воздушных средств ПВО и ЛА противника, действующих в режимах радиомолчания;
- боевая часть для использования боевых АЛЦ как средства поражения целей противника или при выработке ими запасов топлива.

Непосредственное управление УИАЛЦ осуществляется с помощью МНПУ ИмБАК, размещенными на соответствующих полигонах. Такие пункты управления с дальностью действия их радиолиний порядка 100-150 км также могут быть использованы для имитации боевыми АЛЦ действий армейской и оперативно-тактической авиации.

Для имитации действий стратегической (далней) и военно-транспортной авиации, а также обеспечения прорывов систем ПВО противника целесообразно использовать БЛА-ретрансляторы и перспективные воздушные пункты управления (ВПУ) боевыми АЛЦ.

Сформулируем основные методические подходы к практическому применению АЛЦ.

При формировании требуемых траекторий движения УИАЛЦ при выполнении их функций и полетов БАЛЦ в районах действия средств ПВО и ВВС противника предлагается использовать принцип их рандомизации. Суть этого принципа состоит в генерации случайных параметров реализуемых АЛЦ маневров и режимов их полетов.

Для закрепления у расчетов средств ПВО и экипажей ЛА навыков успешной борьбы с воздушными целями (ВЦ) и количественной оценки степени их обученности предлагается при-

менять определенную совокупность  $N$  рандомизированных маневров и режимов полетов используемых УИАЛЦ. Аналогичный подход рекомендуется использовать в процессах летных испытаний новых и модифицированных средств борьбы с ВЦ.

В процессах индивидуальной боевой учебы расчетов ПВО и экипажей ЛА применяемые УИАЛЦ выполняют  $N$  единичных полетов по рандомизированным траекториям. Для имитации реальной воздушной обстановки на учениях подразделений ПВО и ВВС используются групповые полеты УИАЛЦ по таким траекториям. В операциях ВВС применяются БАЛЦ, имитирующие полеты пар, звеньев и эскадрилий отечественных боевых и транспортных ЛА. Кроме этого, БАЛЦ используются в составе смешанных группировок таких ЛА.

Эти подходы, учитывающие тактику применения зарубежной и отечественной боевой авиации [103], используются при формировании управлений УИАЛЦ и БАЛЦ вертолетной (ВС) и самолетной (СС) схем.

#### ***8.4.2. Управление одиночными авиационными ложными целями***

При использовании УИАЛЦ в процессах боевой учебы персонала средств ПВО и экипажей ЛА важным вопросом является оценка степени их обученности эффективной борьбе с реальными ВЦ.

Рассмотрим один из подходов к определению введенной выше величины  $N$ , обеспечивающей заданный уровень такой обученности.

Обозначим через  $p_i$  вероятность успешного уничтожения ВЦ обучаемыми после их участия в учебном бою с использованием  $i$ -й УИАЛЦ,  $i = \overline{1, N}$ .

Изменение этой вероятности при последовательном применении ложных целей будем описывать рекуррентным уравнением:

$$p_i = p_{i-1} + \Delta p, \quad i = \overline{1, N}.$$

Здесь  $p_0$  – вероятность уничтожения ВЦ после прохождения обучения персонала средств ПВО и экипажей ЛА на соответствующих тренажерах;  $\Delta p$  – величина приращения вероятности поражения ВЦ, полученная путем обработки результатов работы персонала средств ПВО и экипажей ЛА по учебным и боевым целям.

Решая это уравнение методом индукции, получим, что

$$p_i = p_0 + i\Delta p, \quad i = \overline{1, N}. \quad (8.4.1)$$

Потребуем, чтобы в результате проведения учебно-боевых стрельб с применением УИАЛЦ вероятность уничтожения ВЦ обучаемыми была бы не меньше заданной величины  $p_{\text{зад}} > p_0$ .

Полагая  $i = N$  в выражении (8.4.1), это требование можно представить неравенством вида:

$$p_0 + N\Delta p \geq p_{\text{зад}}.$$

Откуда получаем, что

$$N \geq \left[ \frac{p_{\text{зад}} - p_0}{\Delta p} \right], \quad (8.4.2)$$

где  $[(\cdot)]$  – операция округления дробного числа  $(\cdot)$  до ближайшего большего целого числа.

### Пример 8.8

По оценкам специалистов BBC, эффективность действий летчиков после выполнения 10-15 учебно-боевых полетов повышается на 25-30%, что в условиях боевых действий обычно достигается после первых 10 вылетов.

На основании этих результатов будем считать, что

$$\Delta p = \frac{25\%}{10 \text{ пол.}} = 2,5\% = 0,025.$$

Пусть  $p_0 = 0,5$  и  $p_{\text{зад}} = 0,95$ . Тогда из формулы (8.4.2) следует, что  $N \geq 18$ . При  $\Delta p = \frac{30\%}{10 \text{ пол.}} = 3\% = 0,03$  получаем значение

$N \geq 15$ . Из полученных результатов можно сделать вывод, что для достижения 95%-й вероятности успешного решения боевых задач летчики должны решить не менее 15 учебно-боевых задач с использованием УИАЛЦ.

При  $p_{\text{зад}} = 0,98$ ,  $p_0 = 0,5$  и  $\Delta p = 0,025 \div 0,03$  число таких задач должно быть от 20 до 16.

Оценка (8.4.2) при наличии конкретных значений  $p_0$  и  $\Delta p$  может быть использована для определения минимального числа  $N$  «учебных налетов» УИАЛЦ на средства ПВО при «натурном» обучении их расчетов.

Как было отмечено в Разд. 1.2, одной из важнейших задач практического применения АЛЦ является их широкое использование в процессах обучения персонала и испытаний собственных средств ПВО, а также вскрытия и истощения аналогичных средств противника.

Общей задачей таких средств является уничтожение различных видов ВЦ (самолеты, вертолеты, БЛА, крылатые ракеты) на предельно малых (до 200 м), малых (200-1000 м), средних (1000-4000 м), больших (4000-12000 м) и стратосферных (более 12000 м) высотах их полетов. Отсюда следует, что применяемые образцы АЛЦ должны иметь высоты полетов, соответствующие этим интервалам.

Подразделения зональной и объектовой ПВО оснащаются средствами, которые включают в себя зенитные ракетные комплексы (ЗРК), зенитные пушечно-ракетные комплексы (ЗПРК) и переносные зенитные ракетные комплексы (ПЗРК).

В зависимости от дальности обнаружения и поражения ВЦ они подразделяются на комплексы ближнего действия (до 10 км), малой дальности (до 30 км), средней дальности (до 100 км) и дальнего действия (более 100 км). В соответствии с этими характеристиками формируются радиусы действия применяемых АЛЦ и параметры аппаратуры их связи с МНПУ и

ВПУ. При этом для увеличения дальности связи могут быть использованы БЛА-Р, рассмотренные в Разд. 8.3.4.

Главным элементом систем ПВО являются РЛС обнаружения и сопровождения ВЦ, зоны действия которых описываются углами азимута  $\phi$ , места  $\lambda$  и дальностью действия  $L$ . При этом имеются РЛС кругового  $\phi \in [0;360^\circ]$  и секториального  $\phi \in [\phi_1, \phi_2]$  обзоров. Величина  $L$  зависит от высоты полета обнаруживаемых ВЦ.

Для обнаружения и сопровождения визуально наблюдаемых ВЦ в ЗПРК и ПЗРК применяются оптико-электронные прицелы, включающие тепло- и телевизионные каналы.

Будем считать, что основной функцией АЛЦ является их появление и полет в зонах обнаружения ВЦ средств ПВО условного и реального противника. В общем случае пространственное представление области действия РЛС обнаружения ВЦ может быть описано системой неравенств вида:

$$f_j(x, y, z, x^*, y^*, z^*) \leq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (8.4.3)$$

где  $x^*$ ,  $y^*$ ,  $z^*$  – координаты точки размещения РЛС, выявленные с помощью БЛА-РМ или БЛА-PTR.

Рассмотрим один из подходов к построению этой области.

На Рис. 8.22 представлен общепринятый вид зоны действия РЛС обнаружения ВЦ средства ПВО в координатах «дальность ( $L$ ) – высота ( $H$ )».

Будем считать известными координаты  $(L_1, H_1)$ ,  $(L_2, H_2)$ ,  $(L_3, H_{\max})$ ,  $(L_4, H_{\max})$ ,  $(L_5, H_5)$  граничных точек 1-5 этой зоны, где  $H_{\max}$  – предельная высота полета ВЦ, обнаруживаемых рассматриваемым средством ПВО.

Используя значения этих координат, построим приближенные представления границ зоны действия рассматриваемого средства ПВО.

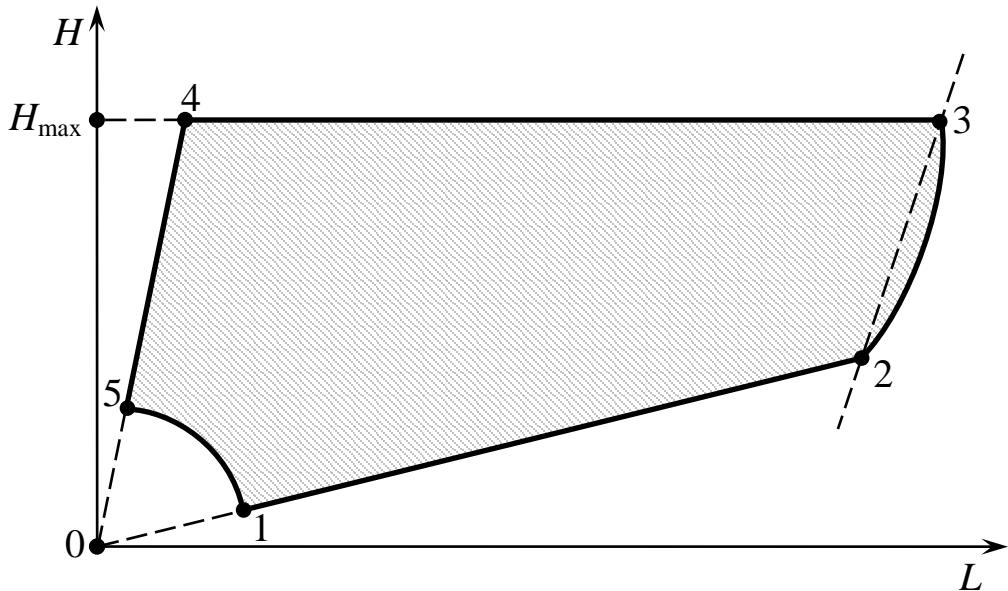


Рис. 8.22

Криволинейный участок между точками 5 и 1 зоны представим дугой окружности:

$$L^2 + H^2 = R^2, \quad L \in [L_5, L_1],$$

квадрат радиуса которой вычисляется как:

$$R^2 = \min\{L_1^2 + H_1^2; L_5^2 + H_5^2\}. \quad (8.4.4)$$

Участок 1-2 будем описывать уравнением прямой:

$$H = k_{12}L, \quad L \in [L_1, L_2],$$

угловой коэффициент которой определяется по формуле:

$$k_{12} = \operatorname{tg}[(H_2 - H_1)/(L_2 - L_1)]. \quad (8.4.5)$$

Аналогичным образом описывается участок 4-5:

$$H = k_{45}L, \quad L \in [L_5, L_4],$$

где

$$k_{45} = \operatorname{tg}[(H_{\max} - H_5)/(L_4 - L_5)]. \quad (8.4.6)$$

Криволинейный участок 2-3 аппроксимируем уравнением прямой, проходящей через точки 2 и 3 [17]:

$$\frac{H - H_2}{H_{\max} - H_2} = \frac{L - L_2}{L_3 - L_2}.$$

Проводя несложные преобразования, получим следующее представление этого участка:

$$H = k_{23}L + b_{23}, \quad L \in [L_2, L_3].$$

Здесь:

$$k_{23} = \frac{H_{\max} - H_2}{L_3 - L_2}; \quad b_{23} = H_2 - \frac{L_2(H_{\max} - H_2)}{L_3 - L_2}. \quad (8.4.7)$$

Верхняя граница зоны, описываемая отрезком 4-3, задается уравнением:

$$H = H_{\max}, \quad L \in [L_4, L_5].$$

С учетом полученных выше уравнений и Рис. 8.22 внутренняя часть зоны обнаружения ВЦ средства ПВО описывается системой неравенств вида:

$$\begin{aligned} L^2 + H^2 &\geq R^2; \quad H \geq k_{12}L; \quad H \leq k_{45}L; \\ H &\geq k_{23}L + b_{23}; \quad H \leq H_{\max}. \end{aligned}$$

Координаты  $(L, H)$  каждой точки этой зоны должны удовлетворять всей совокупности приведенных неравенств.

Пространственную область действия рассматриваемого средства ПВО можно получить путем вращения ее сечения, представленного на Рис. 8.22, вокруг оси  $0H$ .

Для ее построения будем использовать маневренную СК  $M_{xuz}$  с началом в точке размещения РЛС средства ПВО, имеющей заданные значения координат  $x^*$ ,  $y^*$ ,  $z^*$  в земной СК (см. Рис. 1.9).

При этом предполагается, что  $x = L$ ,  $y = H$  и  $y^* = 0$ .

Искомая пространственная область, представленная на Рис. 8.23, имеет в качестве границ совокупность круговых конусов, сферу и плоскость, параллельную координатной плоскости  $Mxz$ .

С использованием известных уравнений этих границ [17] получаем для РЛС кругового обзора следующую систему неравенств, описывающую область пространства, в которой рассматриваемое средство ПВО может обнаруживать ВЦ:

$$\begin{aligned}
(x - x^*)^2 + y^2 + (z - z^*)^2 - R^2 &\leq 0; \\
y^2 - k_{12}^2[(x - x^*)^2 + (z - z^*)^2] &\geq 0; \\
y^2 - k_{45}^2[(x - x^*)^2 + (z - z^*)^2] &\leq 0; \\
(y - b_{23})^2 - k_{23}^2[(x - x^*)^2 + (z - z^*)^2] &\geq 0; \\
y - H_{\max} &\leq 0.
\end{aligned} \tag{8.4.8}$$

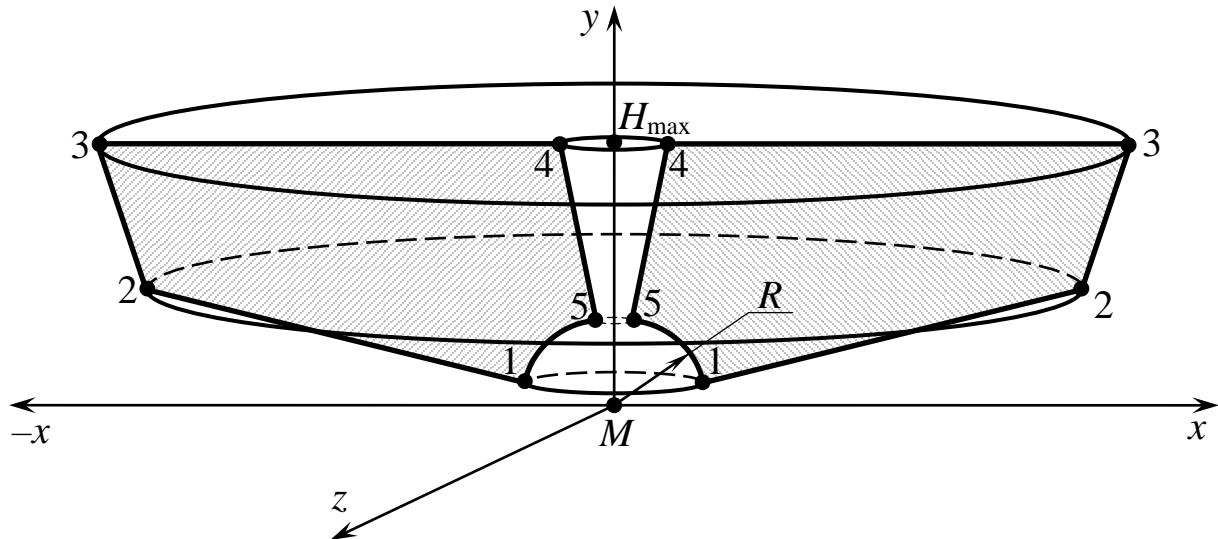


Рис. 8.23

Отметим, что входящие в эти неравенства параметры  $R$ ,  $k_{12}$ ,  $k_{45}$ ,  $k_{23}$  и  $b_{23}$  вычисляются по формулам (8.4.4)-(8.4.7).

Для конкретизации выражений (8.4.3), описывающих область действия РЛС секториального обзора воздушного пространства по азимуту ( $\pm\varphi$ ) градусов, в состав неравенств (8.4.8) должно быть включено выражение:

$$z - z^* - |k(x - x^*)| \leq 0, \tag{8.4.9}$$

где  $k = \operatorname{tg} \varphi$  – угловой коэффициент следа плоскостей, проходящих через точку с координатами  $(x^*, z^*)$  и параллельных оси  $My$  (Рис. 8.24).

Отметим, что на практике средства обнаружения ВЦ могут иметь области их захвата и сопровождения, отличные от области, описываемой неравенствами (8.4.8) и (8.4.9).

Выше было указано на практически полное отсутствие отечественных и зарубежных образцов АЛЦ вертолетной схемы.

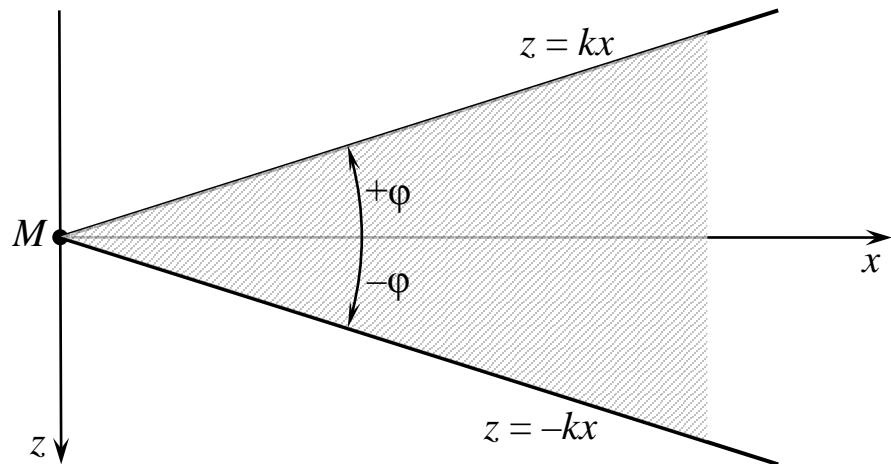


Рис. 8.24

Как выход из этого положения для имитации полетов боевых и транспортных вертолетов в настоящее время используются БЛА самолетной схемы с соответствующими таким вертолетам скоростными и высотными характеристиками. Такой подход не позволяет воспроизводить ряд режимов полета, присущих только вертолетной технике. Кроме этого, известно, что в силу ряда причин вероятности уничтожения вертолетов комплексами ПВО в 1,2-1,4 раза ниже значений такой вероятности для самолетов. Последнее вместе с широким использованием различных типов вертолетов в современных боевых действиях указывает на необходимость создания и активного практического применения УИАЛЦ и БАЛЦ вертолетной схемы, особенно в процессах обучения расчетов ПВО эффективной борьбе с вертолетами противника.

При формировании управлений АЛЦ вертолетной схемы (ВС) будем рассматривать следующие режимы движения имитируемого вертолета:

1. Висение,
2. «Подскок»,

которые отражают тактику применения беспилотных разведывательно-корректировочных вертолетов [31] и борьбы боевых вертолетов с бронетанковыми подразделениями противника.

При реализации первого режима с использованием предложенного выше принципа рандомизации координаты  $N$  различных точек висения АЛЦ ВС в области, описываемой выражениями (8.4.8), будем генерировать с помощью датчиков равномерно распределенных случайных чисел (ДРРСЧ) [14].

Обозначим через  $(x_i, y_i, z_i)$  координаты  $i$ -той точки висения АЛЦ ВС в маневренной СК, представленной на Рис. 8.23,  $i = \overline{1, N}$ .

Процесс формирования таких точек включает в себя следующие основные этапы:

1. Генерация с помощью ДРРСЧ значений координат  $x_i \in [-L_3, L_3]$ ,  $y_i \in [L_1, L_{\max}]$ ,  $z_i \in [-L_3, L_3]$ .
2. Подстановка полученных значений в выражения (8.4.8) и анализ выполнения соответствующих неравенств.

Если сгенерированные значения  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  удовлетворяют всем неравенствам, то данная точка висения АЛЦ ВС запоминается. В противном случае с помощью ДРРСЧ генерируются координаты другой точки.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет сгенерировано требуемое число  $N$  точек висения АЛЦ ВС в заданной области (8.4.8), которое для УИАЛЦ ВС определяется выражением (8.4.2), а для БАЛЦ ВС – текущим количеством их образцов.

Будем считать заданными моменты времени  $t_i$  появления АЛЦ ВС и время  $\tau_i$  его пребывания в  $i$ -й точке висения,  $i = \overline{1, N}$ .

Вектор управления  $\Delta_i(t) = (\varphi_{i,\text{ош}}(t), \varphi_{ip}(t))$  на интервале времени  $[t_i, t_i + \tau_i]$  висением АЛЦ ВС определяется как решение системы уравнений (6.3.6).

Для выбора управлений  $\Delta_{i,i+1}(t) = (\varphi_{i,i+1,\text{ош}}(t), \varphi_{i,i+1,\text{р}}(t), \chi_{i,i+1}(t), \eta_{i,i+1}(t))$ ,  $t \in [t_i + \tau_i, t_{i+1}]$ , обеспечивающих перелет АЛЦ между  $i$ -й и  $(i+1)$ -й точками ее висения, будем использовать подход, предложенный в Разд. 8.2 и систему уравнений (6.2.20), (6.2.24).

Для формирования требуемой переходной траектории необходимо задать на интервале времени  $[t_i + \tau_i, t_{i+1}]$  законы изменения высоты (8.2.4) и скорости  $V_{\text{зад}}(t)$ .

Известно, что в моменты времени  $t_i + \tau_i$  и  $t_{i+1}$  высота АЛЦ должна равняться значениям соответственно  $y_i$  и  $y_{i+1}$ .

Тогда, используя уравнение прямой, проходящей через эти точки [17]:

$$\frac{y - y_i}{y_{i+1} - y_i} = \frac{t - (t_i + \tau_i)}{t_{i+1} - t_i - \tau_i},$$

получаем зависимость (8.2.4) следующего вида:

$$y_{i,i+1,\text{тр}}(t) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i - \tau_i} (t - t_i - \tau_i). \quad (8.4.10)$$

Из Рис. 8.5 следует, что использование зависимостей (8.3.22) и (8.4.10) позволяет получить кратчайшую переходную траекторию полета АЛЦ в виде пространственной прямой, соединяющей точки его висения, описываемые координатами  $(x_i, y_i, z_i)$  и  $(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ .

Для реализации таких траекторий предлагается использовать зависимости  $V_{i,i+1,\text{зад}}(t)$ ,  $t \in [t_i + \tau_i, t_{i+1}]$ , представленную на Рис. 8.25.

Согласно этому рисунку, до момента времени  $t_{i,\text{max}}$  АЛЦ движется с разгоном, а после него – с последовательным торможением, плавно изменяя скорость полета до нулевого значения. При этом величина  $V_{\text{max}}$  должна равняться максимальной скорости имитируемого вертолета. Построение зависимостей  $V_{i,i+1,\text{зад}}(t)$  на интервалах времени  $[t_i + \tau_i, t_{i+1}]$  может быть прове-

дено с использованием сплайн-интерполяции функций  $V_{\text{зад}}(t)$ , описанной в Разд. 8.1.

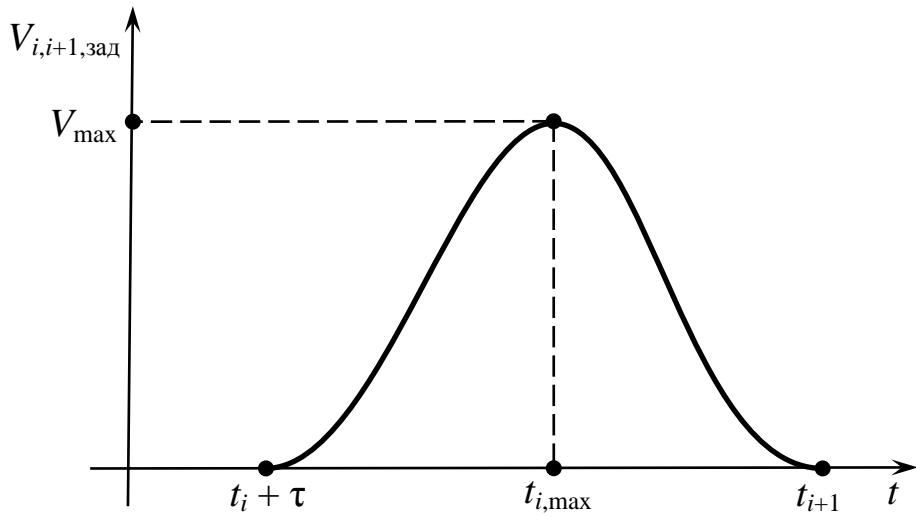


Рис. 8.25

Требуемые законы изменения угла наклона траектории  $\theta_{i,i+1,\text{тр}}(t)$  и производной  $\dot{\theta}_{i,i+1,\text{тр}}(t)$ ,  $t \in [t_i + \tau_i, t_{i+1}]$ , получим с использованием выражений (8.2.7) и (8.2.8), в которые согласно (8.4.10) подставляются значения:

$$\dot{y}_{i,i+1,\text{тр}}(t) = \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i - \tau_i}; \quad \ddot{y}_{i,i+1,\text{тр}}(t) = 0. \quad (8.4.11)$$

Требуемый закон изменения производной  $\dot{\Psi}_{i,i+1,\text{тр}}(t)$ ,  $t \in [t_i + \tau_i, t_{i+1}]$  формируется с учетом того, что проекция переходной траектории на горизонтальную плоскость представляется как:

$$\Phi(x, z) = A_{i,i+1}x + C_{i,i+1}z + D_{i,i+1} = 0.$$

Используя формулы (8.1.26), (8.1.27), (8.1.30), имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_x &= A_{i,i+1}; & \Phi_z &= C_{i,i+1}; & z' &= -(C_{i,i+1}/A_{i,i+1}); \\ \Phi_{xx} &= \Phi_{xz} = \Phi_{zz} = 0. \end{aligned} \quad (8.4.12)$$

Подставляя эти величины в формулу (8.1.29), получаем, что

$$\dot{\Psi}_{i,i+1,\text{тр}}(t) = 0, \quad t \in [t_i + \tau_i, t_{i+1}].$$

Искомый вектор управления  $\Delta_{i,i+1}(t)$ ,  $t \in [t_i + \tau_i, t_{i+1}]$ , определяется как результат решения задачи (6.2.19)-(6.2.21) при ис-

пользовании в ней определенных выше зависимостей  $V_{i,i+1,\text{зад}}(t)$ ,  $\theta_{i,i+1,\text{тр}}(t)$ ,  $\dot{\theta}_{i,i+1,\text{тр}}(t)$  и  $\dot{\Psi}_{i,i+1,\text{тр}}(t)$ ,  $i = \overline{1, N-1}$

Для построения пространственной траектории движения АЛЦ ВС между  $i$ -й и  $(i + 1)$ -й точками ее висения используется система уравнений (8.2.11), в которую подставлены зависимость  $V_{i,i+1,\text{зад}}(t)$  и выражения (8.4.11) и (8.4.12).

Начальные условия (8.2.11) для этой системы конкретизируются как:

$$x(t_i + \tau_i) = x_i; \quad z(t_i + \tau_i) = z_i.$$

При этом в каждой точке  $t \in [t_i + \tau_i, t_{i+1}]$  по формуле (8.4.10) вычисляется текущая высота полета АЛЦ ВС.

Практика боевых действий показала, что эффективным режимом полета боевых вертолетов при борьбе с бронетанковыми и другими целями является маневр «подскок» (режим 2). При выполнении этого маневра вертолет, действуя из-за естественного укрытия (возвышенность, лесопосадка и т.п.), осуществляя вертикальный подъем, зависание и спуск за укрытие. В процессе его висения экипаж производит поиск и обнаружение цели, прицеливание и применение соответствующего оружия.

Данный маневр применяется при наличии в районе действия вертолета сильной ПВО. Поэтому целью обучения экипажей является минимизация затрат времени на выполнение этого маневра при безусловном поражении обнаруженных целей. Этим обуславливается необходимость применения УИАЛЦ ВС при обучении персонала ЗПРК и ПЗРК. Имитация этого маневра БАЛЦ ВС позволяет осуществить отвлекающие от основной ударной вертолетной группы действия таких комплексов противника.

Как и выше, будем считать, что АЛЦ ВС должен выполнить  $N$  циклов: «подъем-зависание-спуск-зависание».

Обозначим через  $H$  высоту укрытия, из-за которого АЛЦ ВС осуществляет выполнение этих циклов;  $h_0 > 0$  – высоту его зависания за укрытием;  $h_1 > H$  – высоту подъема и зависания АЛЦ ВС над укрытием.

Сформируем с помощью ДРРСЧ  $N$  значений высоты  $h_{1i} \in [H, H_{\max}]$  и времени  $\tau_{1i} \in (\tau_{\min}, \tau_{\max})$  висения АЛЦ ВС на этих высотах, где  $H_{\max}$  – предельная безопасная высота подъема имитируемого боевого вертолета;  $(\tau_{\min}, \tau_{\max})$  – интервал затрат времени на выполнение его экипажем боевой работы,  $i = \overline{(1, N)}$ .

Для каждого  $i$ -го цикла движения АЛЦ ВС введем следующие моменты и затраты времени:

$t_{0i}$  – начало подъема АЛЦ ВС с высоты  $h_0$ ;

$t_{1i}$  – окончание подъема до высоты  $h_{1i}$ ;

$t_{2i}$  – окончание спуска с высоты  $h_{1i}$  до высоты  $h_0$ ;

$\tau_{2i}$  – время висения АЛЦ ВС на высоте  $h_0$ .

Уравнения движения беспилотного вертолета (6.3.10) и (6.3.12) описывающие процессы вертикального подъема и спуска АЛЦ ВС в общем виде могут быть представлены как:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T_H(\phi_{\text{ощ}}) \pm G - X_{\text{вр}}(V); \\ T_p(\phi_p) - D_H \eta_6 T_H(\phi_{\text{ощ}}) &= 0; \\ \dot{x} &= 0; \quad \dot{y} = \pm V; \quad \dot{z} = 0. \end{aligned} \quad (8.4.13)$$

Модель висения АЛЦ ВС на высотах  $h_0$  и  $h_{1i}$  в соответствии с выражениями (6.3.6) имеет вид:

$$\begin{aligned} T_H(\phi_{\text{ощ}}) - G &= 0; \\ T_p(\phi_p) - D_H \eta_6 T_H(\phi_{\text{ощ}}) &= 0; \\ \dot{x} &= 0; \quad \dot{y} = 0; \quad \dot{z} = 0. \end{aligned} \quad (8.4.14)$$

При  $V = V(t) = 0$  получаем, что  $\dot{V}(t) = 0$  и  $X_{\text{вр}}(V) = 0$ . В этом случае модель (8.4.13) сводится к модели (8.4.14).

Для каждого  $i$ -го цикла будем считать заданным закон изменения скорости  $V_{\text{зад}}(t)$  движения АЛЦ ВС в форме, представленной на Рис. 8.26.

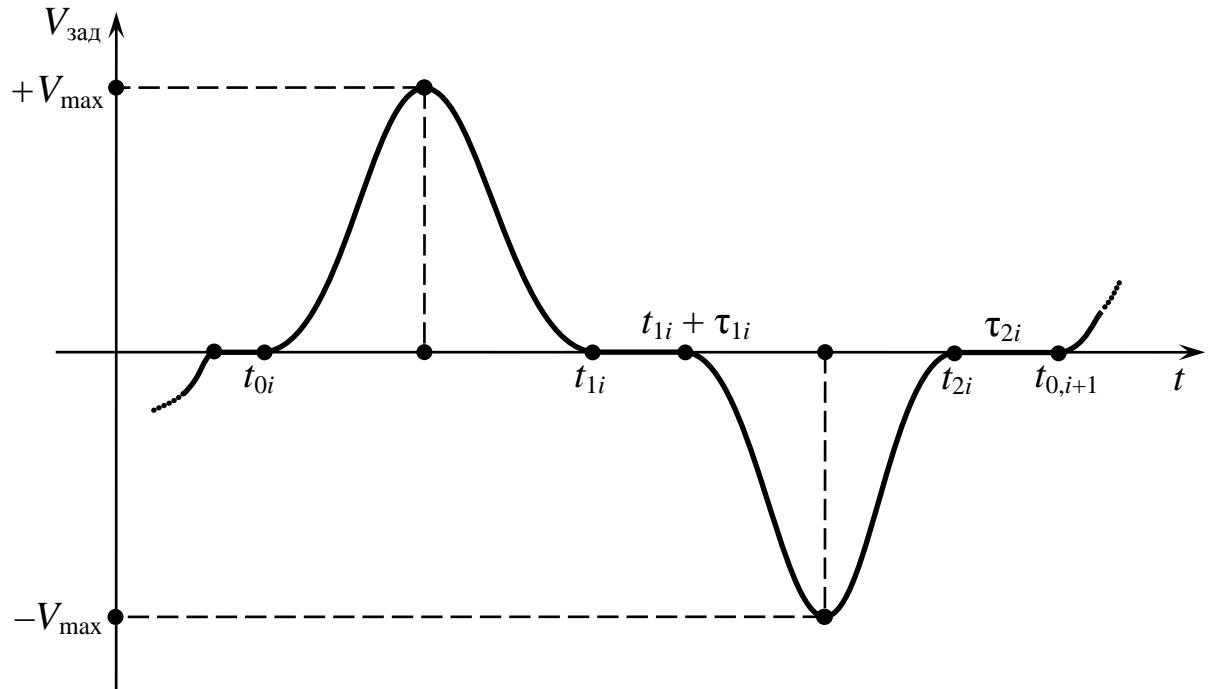


Рис. 8.26

На этом рисунке указан момент времени  $t_{0,i+1}$  начала  $(i+1)$ -го цикла, который определяется как:

$$t_{0,i+1} = t_{2i} + \tau_{2i}, \quad i = (1, N-1).$$

Управления  $\phi_{\text{ош}}(t)$  и  $\phi_p(t)$  движением АЛЦ ВС в  $i$ -том цикле «подъем-висение-спуск-висение» с использованием модели (8.4.13) и функции  $V_{\text{зад}}(t)$ , представленной на Рис. 8.26, определяются из решения параметрической системы уравнений вида:

$$\begin{aligned} T_h(\phi_{\text{ош}}) + G \operatorname{sign} V_{\text{зад}}(t) - X_{\text{вр}}(V_{\text{зад}}(t)) - m \dot{V}_{\text{зад}}(t) &= 0; \\ T_p(\phi_p) - D_h \eta_b T_h(\phi_{\text{ош}}) &= 0, \quad t \in [t_{0,i}; t_{0,i+1}], \end{aligned} \quad (8.4.15)$$

где функция  $\operatorname{sign} V_{\text{зад}}(t)$  принимает следующие значения:

$$\operatorname{sign} V_{\text{зад}}(t) = \begin{cases} -1 & \text{при } V_{\text{зад}} \geq 0, \\ +1 & \text{при } V_{\text{зад}} < 0. \end{cases}$$

Данная система может быть решена численными методами, приведенными в Разд. 3.5.

Для определения значений  $t_{1i}$  и  $t_{2i}$  перепишем четвертое уравнение из состава выражений (8.4.13) в виде:

$$\dot{y}(t) = V_{\text{зад}}(t). \quad (8.4.16)$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии:

$$y(t_{0i}) = h_0, \quad (8.4.17)$$

момент времени  $t_{1i}$  определим как:

$$t_{1i} = \arg\{y(t) = h_{1i}\}. \quad (8.4.18)$$

Для конкретизации величины  $t_{2i}$  проинтегрируем уравнение (8.4.16) при начальном условии:

$$y(t_{1i} + \tau_{1i}) = h_i. \quad (8.4.19)$$

Тогда искомый момент времени может быть найден из выражения:

$$t_{2i} = \arg\{y(t) = h_0\}. \quad (8.4.20)$$

Таким образом, для каждой из  $N$  реализаций случайных чисел  $h_{1i}$  и  $\tau_{1i}$  из выражений (8.4.18), (8.4.20), использующих результаты решения задач Коши (8.4.16), (8.4.17) и (8.4.16), (8.4.19), определяются моменты времени  $t_{1i}$  и  $t_{2i}$  окончания подъема АЛЦ ВС на высоту  $h_{1i}$  и его спуска до высоты  $h_0$ . Далее для сформированных интервалов времени  $[t_{0,i}, t_{0,i+1}]$  решается система уравнений (8.4.15), с помощью которой определяются управления  $\phi_{i,\text{ож}}(t)$ ,  $\phi_{i,\text{р}}(t)$ , обеспечивающие выполнение АЛЦ ВС  $N$  маневров типа «подскок».

Рассмотренные выше режимы полета АЛЦ присущи только ложным целям вертолетной схемы. В связи с тем, что траектории движения вертолетов и самолетов при решении ими боевых задач являются практически одинаковыми при программировании маневров АЛЦ ВС и СС, в области действия средств ПВО будем рассматривать общие их траектории с указанием методов определения управлений для каждого применяемого вида АЛЦ.

Будем считать, что задачами обучения расчетов ПВО и экипажей ЛА являются выработка твердых навыков и умений борьбы с одиночными и групповыми ВЦ.

При решении первой задачи в процессе обучения расчетов ПВО применяемые УИАЛЦ должны воспроизводить траектории движения отдельных боевых самолетов и вертолетов, осуществляющих атаки наземных целей в зоне действия радиолокационных и оптико-электронных систем обнаружения и сопровождения ВЦ конкретного средства ПВО.

Практика отечественных и зарубежных ВВС указывает, что при одиночных атаках наземных целей применяются следующие маневры ЛА [103]:

- горизонтальный полет с «отстрелом» тепловых и радиолокационных «ловушек»;
- пикирование с предварительным энергичным набором высоты;
- кабрирование;
- «полупетля»;
- «горка»;
- «боевой разворот» и др.

При их завершении ЛА обычно выполняют противозенитные маневры, включающие в себя:

- а) резкий поворот траектории со снижением,
- б) «змейка»,
- в) «отворот» и т.п.

Отмеченные выше и другие типовые маневры боевых ЛА должны имитироваться УИАЛЦ при обучении расчетов средств ПВО и БАЛЦ при вскрытии и истощении системы ПВО противника.

При программировании полетов таких АЛЦ предлагается использовать методы, описанные в Разд. 8.1 и Разд. 8.2, с выбором соответствующего описания требуемых траекторий их

движения. Для представления сложных боевых маневров АЛЦ целесообразно при определении векторов управления использовать выражения (8.2.26)-(8.2.29), основанные на применении полетных записей самолетов и вертолетов, которые имитировали такие маневры.

Для каждого  $j$ -го воспроизведенного АЛЦ маневра с помощью ДРРСЧ генерируются координаты его начальной  $(x_{hj}, y_{hj}, z_{hj})$  и конечной  $(x_{kj}, y_{kj}, z_{kj})$  точек, принадлежащих области (8.4.8),  $j \in \overline{1, N}$ .

Количество  $N$  учебных «налетов» УИАЛЦ определяется из выражения (8.4.2) при конкретизации выполняемых в них маневров руководителем обучения.

Отметим, что в процессе таких «налетов» стрельба средств ПВО по УИАЛЦ осуществляется учебными боеприпасами, а смена видов маневров, то есть перевод УИАЛЦ из точки  $(x_{kj}, y_{kj}, z_{kj})$  в точку  $(x_{h, j+1}, y_{h, j+1}, z_{h, j+1})$ ,  $j \in \overline{1, N-1}$ , производится оператором управления МНПУ ИмБАК в радиокомандном режиме по указанию руководителя обучения.

Для БАЛЦ должно быть предусмотрено программное управление смены маневров с использованием предложенных выше переходных траекторий движения БЛА (см. выражения (8.1.36, 8.1.39, 8.1.40)).

Рассмотрим примеры программирования некоторых из представленных выше плоских маневров АЛЦ.

Пусть АЛЦ должна реализовать горизонтальный полет на высоте  $h = y_{hj} = y_{kj}$  между точками с координатами  $(x_{hj}, z_{hj})$  и  $(x_{kj}, z_{kj})$ ,  $j \in \overline{1, N}$ . Уравнение прямой, проходящей через эти точки, имеет вид [17]:

$$\frac{z - z_{hj}}{z_{kj} - z_{hj}} = \frac{x - x_{hj}}{x_{kj} - x_{hj}}, \quad j \in \overline{1, N}.$$

Данное соотношение, записанное в виде уравнения плоскости, перпендикулярной оси МНПУ<sub>у</sub>, представляется как:

$$\Phi(x, z) = \frac{x - x_{\text{hj}}}{x_{\text{kj}} - x_{\text{hj}}} - \frac{z - z_{\text{hj}}}{z_{\text{kj}} - z_{\text{hj}}} = 0. \quad (8.4.21)$$

Плоскость, на которой должна располагаться программируемая траектория АЛЦ, получается из выражения (8.2.13) при  $A = 0, B = 1, C = 0$  и  $D = -h$ .

Эта траектория как частный случай траектории БЛА, изображенной на Рис. 8.6, получается как пересечение рассмотренных выше плоскостей. При этом требуемые для определения управления АЛЦ функции  $\theta_{\text{тр}}(t), \dot{\theta}_{\text{тр}}(t), \dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$  вычисляются с использованием отмеченных выше значений коэффициентов  $A, B, C, D$  и выражения (8.4.21) по формулам (8.2.20), (8.2.23) и (8.1.26), (8.1.27), (8.1.30).

Для минимизации времени пребывания АЛЦ в зоне действия средства ПВО при определении векторов управлений из выражений (5.2.21)-(5.2.23) для АЛЦ СС и (6.3.8), (6.3.9) для АЛЦ ВС будем полагать, что  $V_{\text{зад}}(t) = V_{\text{max}}$ , где  $V_{\text{max}}$  – максимальное значение скорости имитируемого самолета или вертолета.

В этом случае, если обозначить через  $t_{\text{hj}}$  момент времени начала рассматриваемого маневра, то момент времени его завершения определяется как:

$$t_{\text{kj}} = t_{\text{hj}} + \frac{1}{V_{\text{max}}} \sqrt{(x_{\text{kj}} - x_{\text{hj}})^2 + (z_{\text{kj}} - z_{\text{hj}})^2}, \quad j \in \overline{1, N}.$$

Пусть АЛЦ между точками координатами  $(x_{\text{hj}}, y_{\text{hj}}, z_{\text{hj}})$  и  $(x_{\text{kj}}, y_{\text{kj}}, z_{\text{kj}})$ , такими, что  $x_{\text{hj}} < x_{\text{kj}}, y_{\text{hj}} < y_{\text{kj}}, z_{\text{hj}} > z_{\text{kj}}, j \in \overline{1, N}$ , должна выполнить в вертикальной плоскости маневр «пикование».

Для формирования векторов управления АЛЦ СС и АЛЦ ВС, выполняющих этот маневр, необходимо конкретизировать зависимость вида (8.2.4) для  $t \in [t_{\text{hj}}, t_{\text{kj}}]$ ,  $j \in \overline{(1, N)}$ .

Представим эту зависимость в следующей форме:

$$y_{\text{тр}}(t) = at^2 + bt + c, \quad t \in [t_{\text{hj}}, t_{\text{kj}}], \quad (8.4.22)$$

где  $a, b, c$  – некоторые коэффициенты.

Значения этих коэффициентов определим из условий вида:

$$y_{\text{тр}}(t_{\text{hj}}) = y_{\text{hj}}; \quad y_{\text{тр}}(t_{\text{kj}}) = y_{\text{kj}}; \quad \dot{y}_{\text{тр}}(\tau) = V_{\text{зад}}(\tau) \sin \theta_{\text{пр}},$$

где  $\tau \in [t_{\text{hj}}, t_{\text{kj}}]$  – момент времени, при котором АЛЦ имеет предельное значение  $\theta_{\text{пр}}$  угла наклона ее траектории.

С использованием выражения (8.4.22) эти условия представляются следующей системой линейных уравнений для определения значений коэффициентов  $a, b, c$ :

$$\begin{aligned} t_{\text{hj}}^2 a + t_{\text{hj}} b + c &= y_{\text{hj}}; \\ t_{\text{kj}}^2 a + t_{\text{kj}} b + c &= y_{\text{kj}}; \\ 2\tau a + b &= V_{\text{зад}}(\tau) \sin \theta_{\text{пр}}, \end{aligned} \quad (8.4.23)$$

которая решается одним из численных методов, описанных в Разд. 3.2.

Отметим, что при  $\tau = t_{\text{hj}}$  получаем вогнутую траекторию пикирования АЛЦ, а при  $\tau = t_{\text{kj}}$  – выпуклую траекторию ее движения между начальной и конечной точкой (Рис. 8.27).

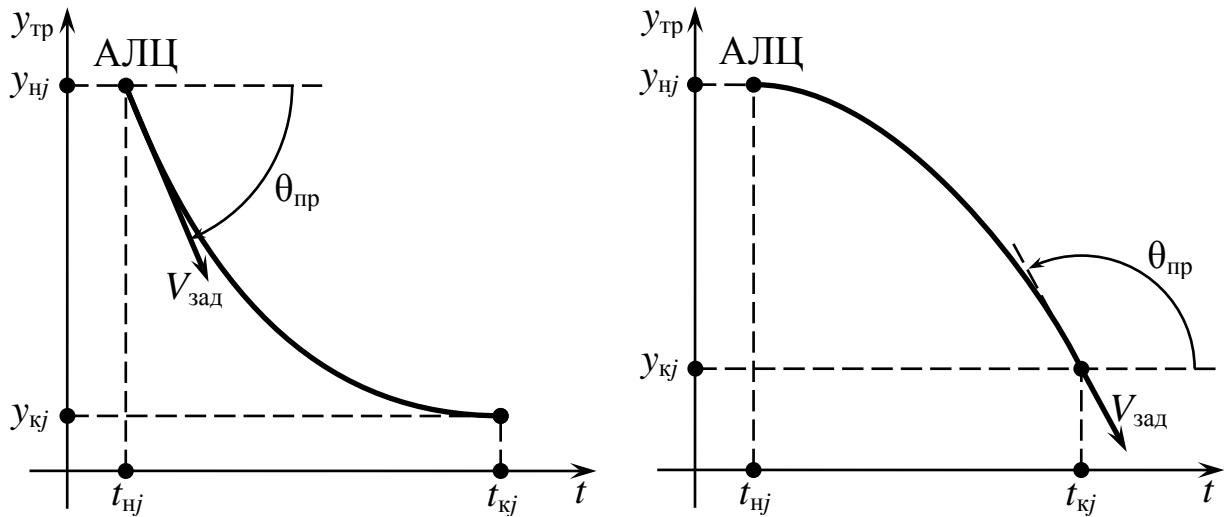


Рис. 8.27

Для минимизации времени выполнения рассматриваемого маневра предлагается в системе уравнений (8.4.23) использовать значение  $\theta_{\text{пр}} = \theta_{\text{пик}}$ , где  $\theta_{\text{пик}}$  – максимальное значение угла пикования рассматриваемого образца АЛЦ.

После конкретизации выражения (8.4.22) исходные данные для определения управления АЛЦ получаем с использованием формул (8.2.7), (8.2.8), (8.2.21), (8.2.11), (8.2.12), (8.1.26), (8.1.29). Конкретное значение вектора  $u(t)$  косвенного управления АЛЦ СС вычисляется из решения системы уравнений (5.1.54). Управление применяемой АЛЦ ВС определяется из решения системы уравнений (6.2.20), (6.2.24).

Аналогичный подход, основанный на использовании выражений (8.4.21)-(8.4.23), предлагается применить при программировании маневра «кабрирование» АЛЦ между точками с координатами  $(x_{hj}, y_{hj}, z_{hj})$  и  $(x_{kj}, y_{kj}, z_{kj})$  при  $y_{hj} < y_{kj}$ ,  $j \in \overline{1, N}$ . Здесь в системе уравнений (8.4.23) угол  $\theta_{\text{пр}}$  необходимо положить равным максимальному значению  $\theta_{\text{каб}}$  угла кабрирования рассматриваемого образца АЛЦ.

Рассмотрим  $(j - 1)$ -й и  $j$ -й пространственные маневры АЛЦ, которые должны выполняться на интервалах времени  $[t_{h,j-1}, t_{k,j-1}]$  и  $[t_{hj}, t_{kj}]$ , где  $t_{k,j-1} < t_{hj}$ ,  $j = \overline{2, N}$ .

Будем считать, что на этих интервалах заданы требуемые законы  $y_{\text{тр},j-1}(t)$  и  $y_{\text{тр},j}(t)$  изменения высоты полета АЛЦ. Для получения гладкой траектории движения АЛЦ на совмещенном интервале времени  $[t_{\text{k},j-1}, t_{\text{h}j}]$  предлагается использовать по аналогии с решением вспомогательной вариационной задачи (8.1.12), (8.1.13) переходную зависимость вида:

$$y_{\text{пер}}(t) = at^3 + bt^2 + ct + d, \quad t \in [t_{\text{k},j-1}, t_{\text{h}j}].$$

Входящие в это уравнение коэффициенты  $a, b, c, d$  вычисляются из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} t_{\text{k},j-1}^3 a + t_{\text{k},j-1}^2 b + t_{\text{k},j-1} c + d &= y_{\text{тр},j-1}(t_{\text{k},j-1}); \\ 3t_{\text{k},j-1}^2 a + 2t_{\text{k},j-1} b + c &= \dot{y}_{\text{тр},j-1}(t_{\text{k},j-1}); \\ t_{\text{h}j}^3 a + t_{\text{h}j}^2 b + t_{\text{h}j} c + d &= y_{\text{тр},j}(t_{\text{h}j}); \\ 3t_{\text{h}j}^2 a + 2t_{\text{h}j} b + c &= \dot{y}_{\text{тр},j}(t_{\text{h}j}). \end{aligned}$$

Такие зависимости с использованием соответствующего численного метода из Разд. 3.2 формируются для каждой пары смежных маневров АЛЦ.

Пусть АЛЦ в горизонтальной плоскости ее полета должна совершить маневр «змейка» между точками с координатами  $(x_{\text{h}j}, y_{\text{h}j}, z_{\text{h}j})$  и  $(x_{\text{k}j}, y_{\text{k}j}, z_{\text{k}j})$  таких, что  $x_{\text{h}j} < x_{\text{k}j}$ ,  $y_{\text{h}j} = y_{\text{k}j} = h$ ,  $z_{\text{h}j} < z_{\text{k}j}$ ,  $j \in \overline{1, N}$ .

В связи с тем, что ось «змейки» должна располагаться на прямой, соединяющей точки с координатами  $(x_{\text{h}j}, z_{\text{h}j})$  и  $(x_{\text{k}j}, z_{\text{k}j})$ , введем в рассмотрение плоскую маневренную СК, представленную на Рис. 8.28.

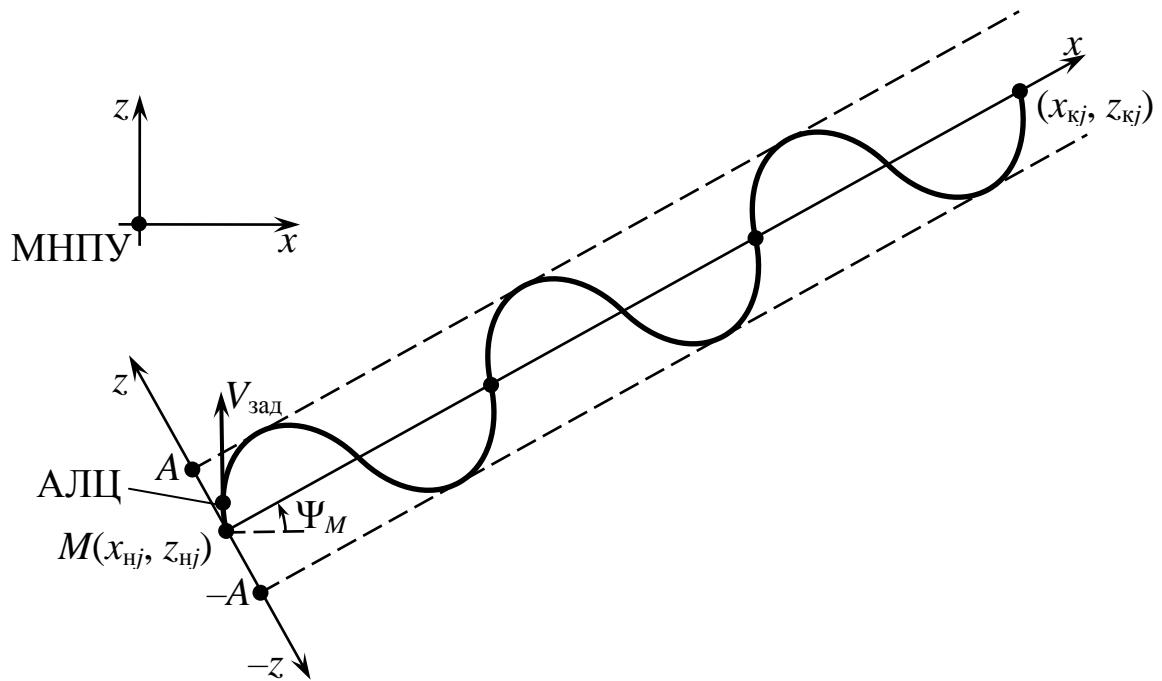


Рис. 8.28

Требуемая система получается путем переноса начала земной СК в точку с координатами  $(x_{hj}, z_{hj})$  и поворота осей на угол:

$$\Psi_M = \arctg \left( \frac{z_{kj} - z_{hj}}{x_{kj} - x_{hj}} \right).$$

Траекторию движения АЛЦ на горизонтальной плоскости  $y = h$  будем описывать уравнением вида:

$$z = A \sin Bx, \quad x \in [0, x_{kj} - x_{hj}],$$

где  $A$  – амплитуда «змейки», которая определяется возможностями действующего против АЛЦ средства ПВО;  $B$  – параметр, определяющий частоту колебаний траектории.

Рассмотрим один из подходов к определению параметра  $B$ .

Из Рис. 8.28 следует, что

$$A \sin B(x_{kj} - x_{hj}) = 0.$$

Это условие выполняется при следующем соотношении:

$$B(x_{kj} - x_{hj}) = k\pi, \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots,$$

где  $k$  – требуемое число колебаний «змейки» на интервале  $[x_{hj}, x_{kj}]$ .

Отсюда, задаваясь значением  $k$ , имеем, что

$$B = \frac{k\pi}{x_{kj} - x_{hj}}.$$

Перепишем уравнение траектории движения АЛЦ в неявной форме (8.1.24) как:

$$\Phi(x, z) = A \sin Bx - z = 0. \quad (8.4.24)$$

Как было показано выше, для определения векторов управления АЛЦ СС и ВС с помощью выражений (5.2.21)-(5.2.23) и (6.3.8), (6.3.9) в качестве исходных данных используются следующие значения функций:

$$V_{\text{зад}}(t) = V_{\max}, \quad \theta_{\text{тр}}(t) = 0, \quad \dot{\theta}_{\text{тр}}(t) = 0, \quad \dot{\Psi}_{\text{тр}} = \dot{\Psi}_{\text{тр}}(t), \quad t \in [t_{hj}, t_{kj}].$$

Для определения функции  $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$  будем использовать выражения (8.4.24), (8.1.25)-(8.1.29) с учетом следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \Phi_x(x, z) &= AB \cos Bx, \quad \Phi_z(x, z) = -1; \\ x(t_{hj}) &= 0, \quad z(t_{hj}) = 0; \end{aligned} \quad (8.4.25)$$

$$\Phi_{xx}(x, z) = -AB^2 \sin Bx, \quad \Phi_{xz}(x, z) = \Phi_{zz}(x, z) = 0.$$

При этом момент времени  $t_{kj}$  окончания рассматриваемого маневра определяется как:

$$t_{kj} = \arg \{x(t) = x_{kj}\},$$

где  $x(t)$  – решение системы уравнений (8.1.25), сформированной на основе выражений (8.4.25).

При выполнении «змейки» в вертикальной плоскости в маневренной СК (см. Рис. 8.28) на базовой высоте  $y_{hj} = y_{kj}$  уравнение траектории будет иметь вид:

$$y = y_{hj} + A \sin Bx, \quad x \in [0, x_{kj} - x_{hj}].$$

В этом случае управления АЛЦ СС и АЛЦ ВС определяются с использованием систем уравнений (5.2.16), (5.2.17) и (6.3.3).

Отметим, что при программировании пространственных маневров одиночных АЛЦ можно использовать с соответствующей конкретизацией подход, описываемый выражениями (8.2.3)-(8.2.12), (8.1.26)-(8.1.30), а также (8.2.28) или (8.2.29).

### 8.4.3. Управление групповыми полетами авиационных ложных целей

Как было отмечено выше, второй задачей обучения персонала ПВО и экипажей ЛА является выработка у них твердых навыков и умений борьбы с групповыми ВЦ.

В этом случае УИАЛЦ должны имитировать полеты определенных групп зарубежных боевых самолетов и вертолетов.

Заметим, что наиболее характерным в перспективных операциях ВВС является групповое применение БАЛЦ, имитирующих информационные и летно-технические характеристики отечественных боевых самолетов и вертолетов [89].

В связи с тем, что групповые полеты таких ЛА в район боевых действий и по заданному маршруту осуществляются некоторым строем, рассмотрим методы программирования групповых траекторий движения совокупности  $m$  АЛЦ.

Обозначим через  $z_1(x), z_2(x), \dots, z_m(x)$  – требуемые траектории полета группы АЛЦ в горизонтальной плоскости на заданной высоте  $h$ . Будем считать, что при движении АЛЦ в строю их скорости должны соответствовать условию:

$$V_{\text{зад},k} = V_{\text{зад}} = \text{const}, \quad k = \overline{1, m}.$$

При описании траекторий АЛЦ в явной форме:

$$z_k = f_k(x), \quad k = \overline{1, m}, \quad (8.4.26)$$

предполагается заданной величина  $l \geq 0$  расстояния между соседними АЛЦ группы, отсчитываемого по оси  $z$ .

В этом случае семейство траекторий (8.4.26) представляется с помощью следующего рекуррентного уравнения:

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= z_k + l_z, \quad k = \overline{1, m-1}, \\ z_1 &= f_1(x), \end{aligned}$$

Здесь АЛЦ с номером  $k = 1$  выполняет роль «ведущей» ложной цели.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$z_k = f_k(x) = f_1(x) + (k-1)l_z, \quad k = \overline{1, m}, \quad (8.4.27)$$

На Рис. 8.29,*a* представлено семейство траекторий (8.4.26) в некоторой плоской маневренной СК.

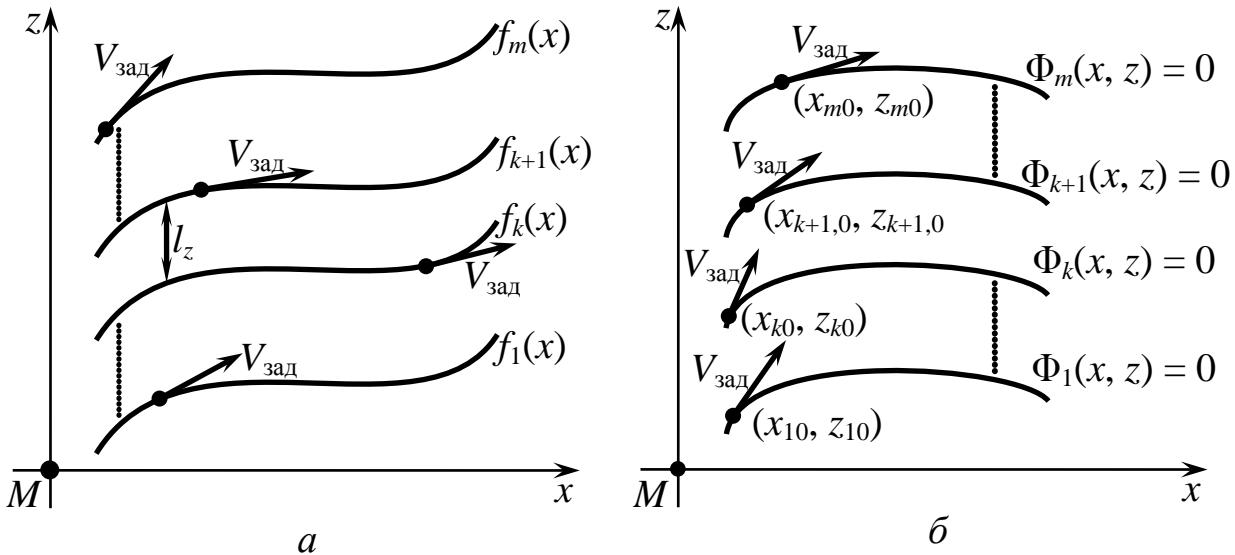


Рис. 8.29

Параметрическое представление  $x_k(t)$ ,  $z_k(t)$  траектории каждой АЛЦ группы формируются с использованием выражения (8.1.21) и системы уравнений (8.1.22), в которые подставляются функции  $f_k(x)$ , определяемые формулой (8.4.27). Начальные условия (8.1.23) определяют вид строя группы АЛЦ.

На Рис. 8.30 приведены виды начальных условий для порядков типа «фронт» (*а*), «левый пеленг» (*б*) и «колонна» (*в, г*) для случая группы  $m = 3$  АЛЦ и линейных траекторий их движения.

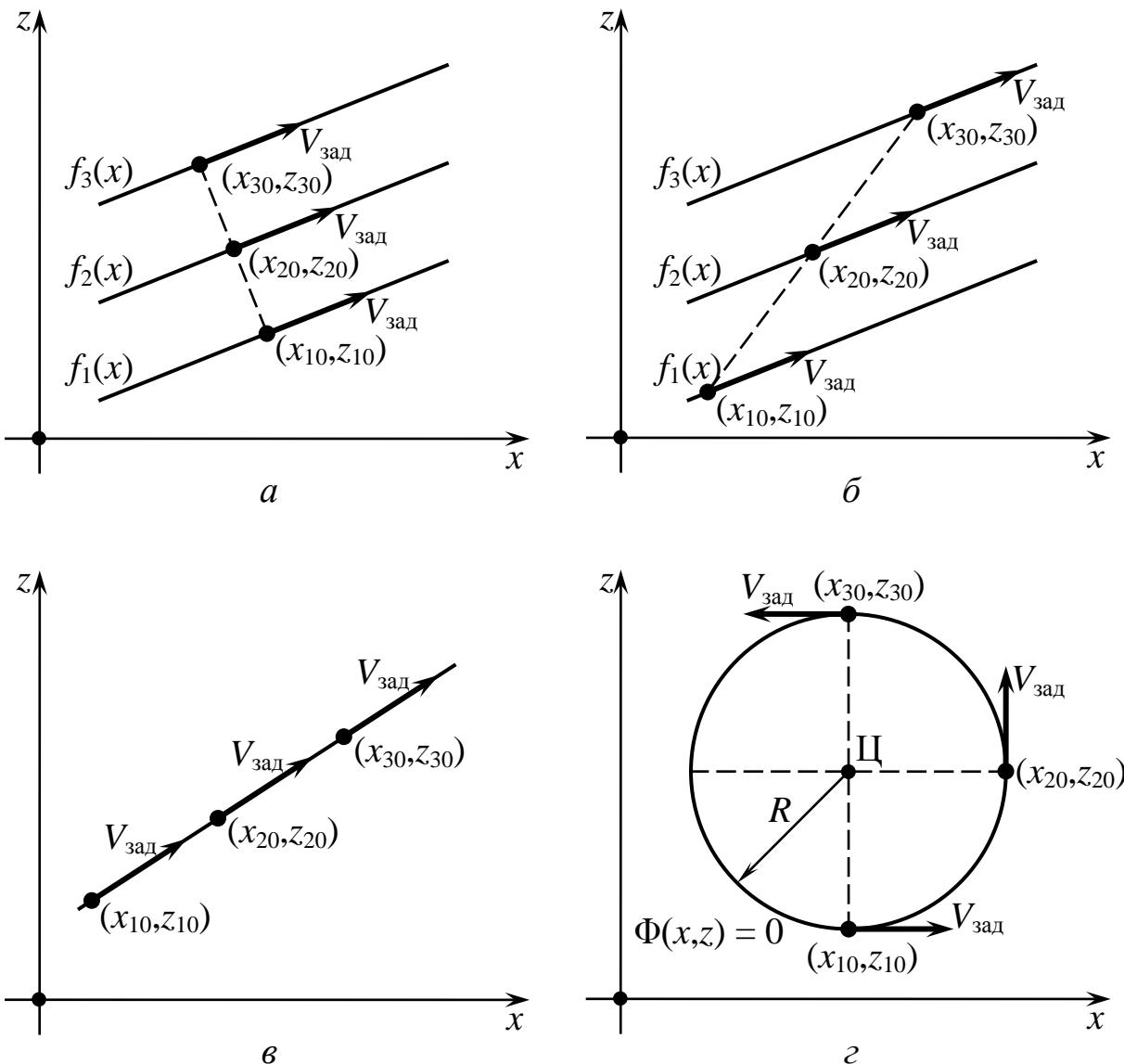


Рис. 8.30

В общем случае, определение вектора косвенного управления  $u_k(t)$  каждой АЛЦ группы, состоящей из БЛА СС, осуществляется путем  $m$ -кратного использования выражений (5.1.21)-(5.1.23). Для группы АЛЦ ВС осуществляется  $m$ -кратное решение системы уравнений (6.3.8), (6.3.9). При этом используются фиксированные значения  $V_{\text{зад},k}(t) = V_{\text{зад}}$  и различные функции  $\dot{\Psi}_{\text{тр},k}(t)$ ,  $k = \overline{1, m}$ .

Для задания требуемой траектории движения  $k$ -той АЛЦ может быть использовано неявное представление вида:

$$\Phi_k(x, z) = 0, \quad k = \overline{1, m}. \quad (8.4.28)$$

При имитации полета АЛЦ строим функции  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m$  должны иметь одинаковый вид и отличаться между собой значениями некоторых входящих в них параметров (см. Рис. 8.29,*б*).

Например, при движении группы АЛЦ строим по концентрическим круговым траекториям вида (8.1.29) таким параметром является их радиус, который вычисляется при заданном значении радиуса  $R_1$  траектории «ведущей» АЛЦ как:

$$R_k = R_1 + (k - 1)\Delta R, \quad k = \overline{1, m}.$$

где  $\Delta R$  – требуемое расстояние между каждой парой АЛЦ.

В этом случае для вычисления функций  $\dot{\Psi}_{\text{тр},k}(t)$ ,  $k = \overline{1, m}$  используются соотношения (8.1.25)-(8.1.30). Вид строя группы АЛЦ, как и выше, задается назначением начальных условий  $(x_{k0}, z_{k0})$ ,  $k = \overline{1, m}$ .

Программирование движения АЛЦ, входящих в группу, по различным плоским траекториям осуществляется путем задания различных функций вида (8.4.26) или (8.27). На Рис. 8.31 представлен пример таких траекторий для  $m = 3$  и их описания в форме (8.4.26).

При необходимости программирования пространственного группового полета АЛЦ в определенном строю в общем случае производится задание согласованного семейства функций (8.4.28) и описание требуемого изменения высоты полета каждой АЛЦ рекуррентным уравнением вида:

$$y_{\text{тр},k+1} = y_{\text{тр},k} + l_y, \quad k = \overline{1, m-1};$$

$$y_{\text{тр},1} = y_1(t),$$

где  $l_y \geq 0$  – сдвиг высоты полета каждой АЛЦ группы;  $y_1(t)$  – заданный закон изменения высоты «ведущей» АЛЦ.

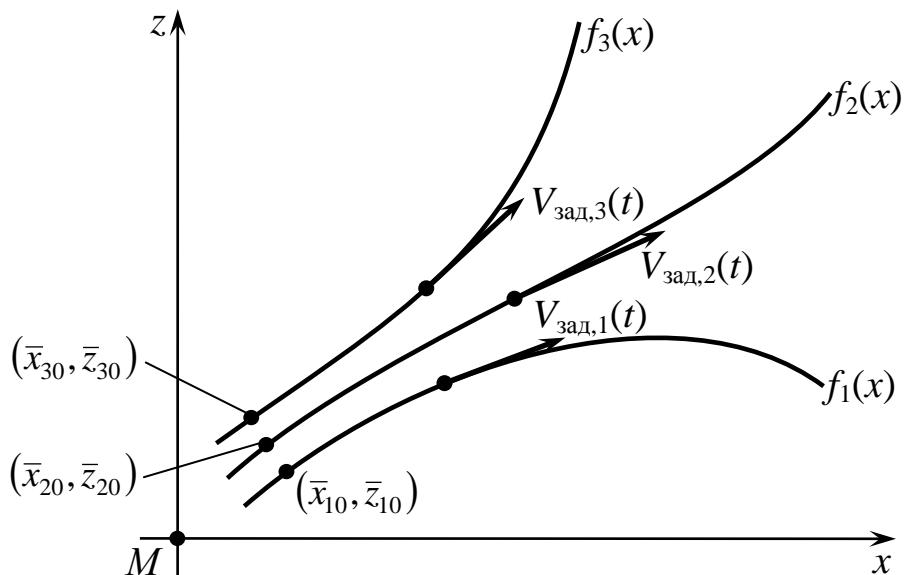


Рис. 8.31

Решение этого рекуррентного уравнения записывается как:

$$y_{\text{тр},k}(t) = y_1 + (k-1)l_y, \quad k = \overline{1, m}. \quad (8.4.29)$$

При формировании векторов управления для группы АЛЦ используется подход, описанный в разд. 8.2, в котором применяются зависимость вида (8.4.29) и начальные условия  $(x_{k0}, y_{k0}, z_{k0})$ ,  $k = \overline{1, m}$ , определяющие требуемый вид строя АЛЦ.

Опыт зарубежных и отечественных ВВС по групповым атакам самолетами и вертолетами наземных целей в условиях сильной ПВО противника указывает на применение следующих основных тактических приемов (ТП) [103]:

1. Роспуск группы перед нанесением ударов.
2. «Схождение» и «расхождение» трех ЛА.
3. Полет пары ЛА по пересекающимся маршрутам.
4. Выполнение групповых маневров типа «с проходом», «с круга», «с горки», «с боевого разворота», «с полупетли», «завеса», «веер» (с обратного направления).
5. Одиночные и парные маневры при минимальных взаимных расстояниях с различных направлений.

## 6. Поперечные действия нескольких групп ЛА с различных направлений.

Рассмотрим вопросы применения траекторного подхода к формированию управлений группами АЛЦ при имитации таких тактических приемов.

При воспроизведении ТП 1 для  $m$  АЛЦ предлагается использовать методы расчета управлений при их движении по составным траекториям полетов, рассмотренных в Разд. 8.3. Например, при полете группы из 3 АЛЦ на постоянной высоте  $h$  первый участок их траекторий может быть представлен линейными функциями  $f_i(x)$  (см. Рис. 8.30,*a* или Рис. 8.30,*b*), а участок роспуска группы, который начинается в точках  $(\bar{x}_{10}, \bar{z}_{10})$ ,  $(\bar{x}_{20}, \bar{z}_{20})$ ,  $(\bar{x}_{30}, \bar{z}_{30})$ , удовлетворяющих при  $y = h$  неравенствам (8.4.3), траекториями  $f_i(x)$ , изображенными на Рис. 8.31. При полете группы АЛЦ на различных высотах для определения управления каждой АЛЦ используется выражение (8.4.29).

При имитации ТП 2 траектории полета АЛЦ имеют вид, представленный на Рис. 8.32.

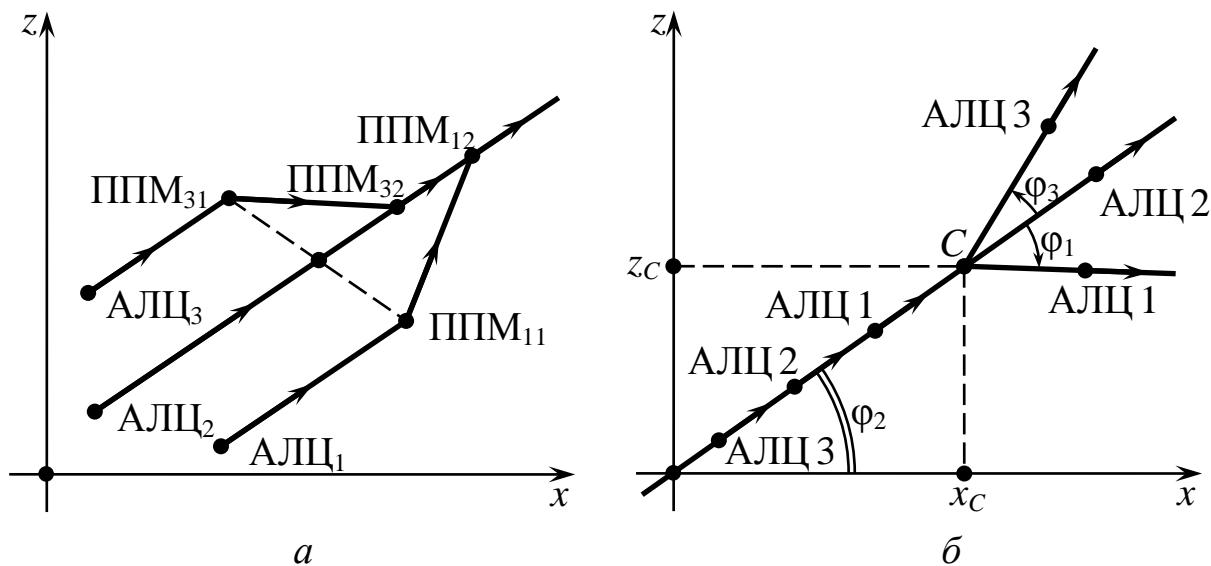


Рис. 8.32

Маневр «схождение» АЛЦ является переходом от их строя типа «фронт» или «пеленг» к строю типа «колонна» (см. Рис. 8.30,*в*).

На Рис. 8.32,*а* представлен этот маневр, в котором АЛЦ 1 и АЛЦ 3 переходят на траекторию движения АЛЦ 2. Для выбора векторов управления АЛЦ 1 и АЛЦ 3 предлагается использовать подход, рассмотренный в Разд. 8.3 при программировании полета БЛА-РМ в процессе контроля линейных объектов (см. Рис. 8.8,*б*). При программировании маневра «схождение» на траекториях  $f_1(x)$  и  $f_3(x)$  выделяются точки ППМ<sub>11</sub> и ППМ<sub>31</sub>, в которых начинаются участки перехода АЛЦ 1 и АЛЦ 3 в точки ППМ<sub>12</sub> и ППМ<sub>32</sub>, лежащие на траектории  $f_2(x)$  полета АЛЦ 2. Для формального описания линейных участков составных траекторий используются выражения (8.3.22), (8.3.23), а для получения «гладких» переходных траекторий движения АЛЦ 1 и АЛЦ 3 – соотношения (8.3.25)-(8.3.33).

Определение векторов управлений для АЛЦ СС и АЛЦ ВС осуществляется на основе выражений (8.3.33) с помощью отмеченных соотношений. Данный подход может быть использован для случая  $m > 3$  АЛЦ.

Маневр «расхождение», представленный на Рис. 8.32,*б*, состоит в роспуске группы из 3 АЛЦ, следовавшей в строю «колонна», в расходящуюся совокупность траекторий. Выход каждой АЛЦ из «колонны» происходит при ее достижении точки С с координатами  $(x_C, z_C)$ , которые совместно со значением  $y = h$  должны удовлетворять условиям (8.4.8).

Пусть заданы углы  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  и траектория движения АЛЦ 2 описывается уравнением прямой вида:

$$f_2(x) = a_2 x + b_2, \quad (8.4.30)$$

угловой коэффициент которой равен:

$$a_2 = \operatorname{tg} \phi_2$$

Будем считать заданной координату  $x_C$  точки «ветвления» траекторий группы АЛЦ. Тогда координата  $z_C$  этой точки с использованием выражения (8.4.30) определяется как:

$$z_C = a_2 x_C + b_2.$$

Уравнения  $f_1(x)$  и  $f_3(x)$  траекторий движения АЛЦ 1 и АЛЦ 3 при их «расхождении» запишем с использованием уравнения прямой, проходящей через заданную точку плоскости с фиксированным углом ее наклона [17].

В этом случае имеем, что

$$f_1(x) = a_1 x + b_1; \quad f_3(x) = a_3 x + b_3, \quad x \geq x_C,$$

где:

$$a_1 = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1); \quad a_3 = \operatorname{tg}(\varphi_2 + \varphi_3);$$

$$b_1 = z_C - a_1 x_C; \quad b_3 = z_C - a_3 x_C.$$

Для формирования управлений АЛЦ 1, АЛЦ 2 и АЛЦ 3 используются следующие уравнения базовых составных траекторий их движения:

$$f_1(x) = \begin{cases} a_1 x + b_1, & x \leq x_C; \\ a_2 x + b_2, & x \geq x_C; \end{cases}$$

$$f_2(x) = a_2 x + b_2;$$

$$f_3(x) = \begin{cases} a_3 x + b_3, & x \leq x_C; \\ a_2 x + b_2, & x \geq x_C. \end{cases}$$

При этом «гладкие» переходные траектории движения АЛЦ 1 и АЛЦ 3 получаются путем «вписывания» в соответствующие прямые участков, описываемых уравнениями (8.3.27), и решения системы уравнений (8.3.30), (8.3.31). Непосредственное определение векторов управления АЛЦ, осуществляющих рассматриваемый маневр, производится при записи требуемых траекторий движения АЛЦ 1 и АЛЦ 3 в форме выражений (8.3.33) и требуемой траектории полета АЛЦ 2, представленной уравнением (8.4.30).

Данный подход также может быть использован при имитации маневра «расхождение» для  $m \geq 2$  АЛЦ.

Полет пары АЛЦ на постоянной высоте  $h$  по пересекающимся маршрутам иллюстрирует Рис. 8.33.

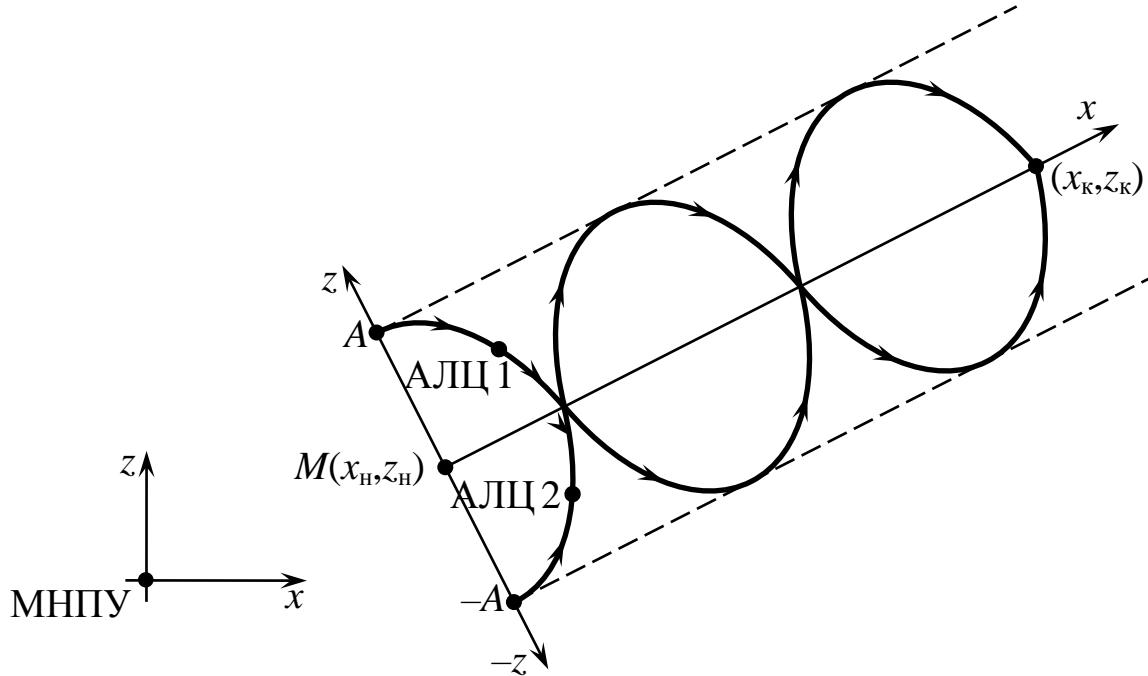


Рис. 8.33

Из этого рисунка следует, что ТП 3 может быть определен как «парная змейка», которая является развитием маневра «змейка», представленного на Рис. 8.28.

Определение векторов управлений, выполняющих этот прием АЛЦ 1 и АЛЦ 2, по аналогии с выражением (8.4.24) базируется на представлении их траекторий в следующей форме:

$$\Phi_1(x, z) = A \cos Bx - z = 0, \quad x \in [0; x_k - x_h];$$

$$\Phi_2(x, z) = -A \cos Bx - z = 0, \quad x \in [0; x_k - x_h].$$

При этом используется описанный выше подход к программированию маневра «змейка» с той особенностью, что заданные законы изменения скорости АЛЦ 1 и АЛЦ 2 должны для предотвращения их столкновения в точках пересечения маршрутов быть такими, что  $V_{\text{зад},1}(t) \neq V_{\text{зад},2}(t)$ .

Отметим, что координаты начальной  $(x_h, z_h)$  и конечной  $(x_k, z_k)$  точек маршрутов полета АЛЦ 1 и АЛЦ 2, определяемые

с использованием ДРРСЧ, должны при  $y = h$  удовлетворять неравенствам (8.4.8). При этом для учебных, испытательных и боевых применений АЛЦ должно быть сгенерировано  $2N$  таких точек.

При программировании ТП 4-ТП 6 применения АЛЦ будем считать, что средства объектовой или зональной системы ПВО размещены в некоторой прямоугольной области с размерами  $(L_1 \times L_2)$  км.

Введем в рассмотрение маневренную СК с началом в центре этой области (Рис. 8.34).

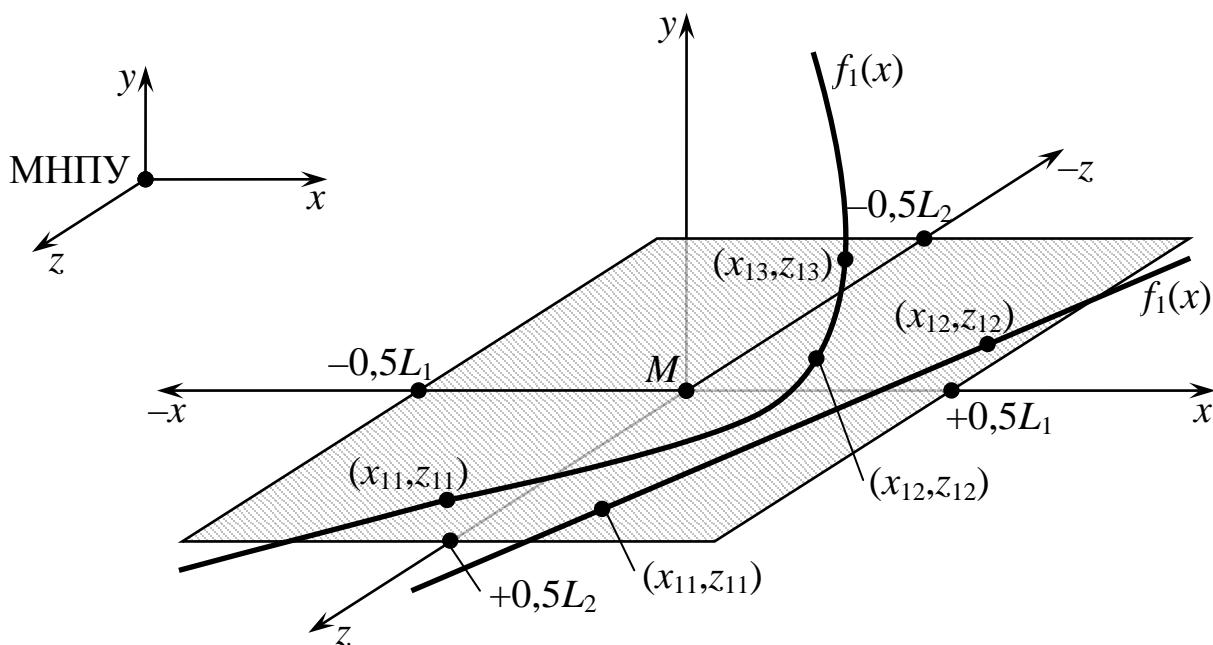


Рис. 8.34

Заметим, что введенная выше в рассмотрение точка размещения РЛС обнаружения и сопровождения ВЦ с координатами  $(x^*, 0, z^*)$  должна лежать в этой области.

Рассмотрим методы формирования траекторий групповых маневров АЛЦ при реализации ТП 4.

Будем считать, что маневр «с проходом» подразумевает атаку наземных целей группой  $m$  АЛЦ в определенном строю с горизонтального полета на высоте  $h$ .

Пусть полет группы АЛЦ осуществляется по прямолинейным траекториям, примеры которых приведены на Рис. 8.30,*a* и Рис. 8.30,*б*.

Для прохождения этих траекторий через область размещения средств ПВО, представленную на Рис. 8.34, определим траекторию «ведущей» АЛЦ группы уравнением вида:

$$z = f_1(x) = A_1 x + B_1. \quad (8.4.31)$$

Для конкретизации значений коэффициентов  $A_1$  и  $B_1$  сгенерируем с помощью ДРРСЧ координаты двух точек  $(x_{11}, z_{11})$  и  $(x_{12}, z_{12})$ , лежащих в прямоугольнике  $(L_1 \times L_2)$  км.

Из Рис. 8.34 следует, что эти координаты должны удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} -0,5L_1 &\leq x_{11} \leq 0,5L_1; & -0,5L_2 &\leq z_{11} \leq 0,5L_2; \\ -0,5L_1 &\leq x_{12} \leq 0,5L_1; & -0,5L_2 &\leq z_{12} \leq 0,5L_2. \end{aligned} \quad (8.4.32)$$

Проводя через эти точки прямую и выполнив несложные преобразования, получим следующие значения искомых коэффициентов:

$$A_1 = \frac{z_{12} - z_{11}}{x_{12} - x_{11}}, \quad B_1 = z_{11} - \frac{x_{11}(z_{12} - z_{11})}{x_{12} - x_{11}}. \quad (8.4.33)$$

При заданном значении  $l_z > 0$  расстояния между каждой парой АЛЦ из выражения (8.4.27) и (8.4.31) следует, что уравнения траекторий движения остальных АЛЦ группы записываются как:

$$z = f_k(x) = A_1 x + B_1 + (k-1)l_z, \quad k = \overline{(2, m)}, \quad (8.4.34)$$

где параметры  $A_1$  и  $B_1$  определяются по формулам (8.4.33). При программировании полета группы АЛЦ, выполняющей рассматриваемый маневр, предварительно необходимо задать для каждой АЛЦ начальные значения  $(x_{k0}, z_{k0})$ ,  $k = \overline{(1, m)}$ , определяющие строй их группы, удовлетворяющие уравнениям (8.4.31) и (8.4.34).

Нелинейные траектории движения группы АЛЦ, примеры которых приведены на Рис. 8.29,*a* и Рис. 8.29,*б*, могут быть получены при задании уравнения движения «ведущей» АЛЦ в виде параболы:

$$z = f_1(x) = A_1 x^2 + B_1 x + C_1$$

или окружности:

$$\Phi_1(x, z) = (x - x_{\text{ц}})^2 + (z - z_{\text{ц}})^2 - R_1^2 = 0. \quad (8.4.35)$$

В первом случае с помощью ДРРСЧ формируются координаты точек  $(x_{11}, z_{11}), (x_{12}, z_{12}), (x_{13}, z_{13})$  (см. Рис. 8.34), удовлетворяющие условиям типа неравенств (8.4.32), а коэффициенты  $A_1, B_1, C_1$  определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений вида:

$$x_{1s}^2 A_1 + x_{1s} B_1 + C_1 = z_{1s}, \quad s = \overline{(1, 3)}.$$

По аналогии с выражением (8.4.34) можно записать уравнения параболических траекторий движения группы из  $m$  АЛЦ как:

$$z = f_k(x) = A_1 x^2 + B_1 x + C_1 + (k-1)l_z, \quad k = \overline{(1, m)}. \quad (8.4.36)$$

Для круговой траектории подбираются координаты центра  $(x_{\text{ц}}, z_{\text{ц}})$  и ее радиус  $R_1$  таким образом, чтобы траектории  $z_1(x)$  «ведущей» АЛЦ и всех остальных АЛЦ группы проходили через область «атаки».

В маневре «с круга» рассматриваемого ТП предполагается, что  $m$  АЛЦ имитирует атаку наземной цели каждой из них со снижением и набором высоты в составе строя «круговая колонна», пример которого представлен на Рис. 8.30,*г*.

Пусть в качестве объекта их атаки выбрана РЛС обнаружения и сопровождения ВЦ, имеющая координаты  $(x^*, z^*)$ , где  $x^* \in [-0,5L_1; 0,5L_1]$  и  $z^* \in [-0,5L_2; 0,5L_2]$ .

Будем считать, что пространственные траектории движения  $m$  АЛЦ располагаются на плоскости (8.2.14), а их проекциями на плоскость  $Mxz$  является окружность (8.4.35) (см. Рис. 8.6).

Для полной имитации атаки на РЛС необходимо обеспечить определенную ориентацию плоскости полета группы АЛЦ, а также задать координаты центра и радиус окружности (8.4.35).

Рассмотрим частный случай размещения РЛС в области над прямой, соединяющей точки прямоугольника с координатами  $(0,5L_1; 0)$  и  $(0; 0,5L_2)$ . Тогда параметры  $a$  и  $c$  в уравнении (8.4.14) примут следующий вид:

$$a = 0,5L_1; \quad c = 0,5L_2. \quad (8.4.37)$$

Потребуем, чтобы высота от точки размещения РЛС до плоскости была равна высоте ее эффективной атаки  $H_{\text{ат}}$ . Тогда для определения параметра  $b$ , входящего в уравнение (8.2.14), можно использовать следующее соотношение:

$$\frac{x^*}{0,5L_1} + \frac{H_{\text{ат}}}{b} + \frac{z^*}{0,5L_2} = 1.$$

Из этого выражения имеем:

$$b = H_{\text{ат}} \left/ \left( 1 - \frac{x^*}{0,5L_1} - \frac{z^*}{0,5L_2} \right) \right. \quad (8.4.38)$$

Определим центр и радиус окружности (8.4.35).

Уравнение нормали к ней, проходящей через ее точку с координатами  $(x^*, z^*)$ , имеет вид [17]:

$$z - z^* = \left( \frac{x^*}{z^*} \right) (x - x^*).$$

Перепишем это уравнение в форме:

$$Ax + Cz + D = 0,$$

где

$$A = \frac{x^*}{z^*}; \quad C = -1; \quad D = z^* - \frac{x^{*2}}{z^*}.$$

Тогда при предположении, что величина радиуса  $R$  круговой траектории является заданной величиной, координаты ее центра

$(x_{\text{ц}}, z_{\text{ц}})$  можно определить из решения следующей системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$Ax_{\text{ц}} + Cz_{\text{ц}} = -D + R\sqrt{A^2 + C^2};$$

$$(x^* - x_{\text{ц}})^2 + (z^* - z_{\text{ц}})^2 = R^2.$$

При программировании траекторий движения АЛЦ применяется представление их плоскости полета в форме (8.2.13), коэффициенты которой получаются с использованием выражений (8.2.17), (8.4.37) и (8.4.38).

Для определения вектора управления каждой АЛЦ группы требуемые функции формируются с помощью выражений (8.2.22)-(8.2.25), (8.4.35), (8.1.26), (8.1.27) и (8.1.30).

При боевой учебе расчетов средств ПВО используется совокупность  $N$  возможных мест расположения целей с координатами  $(\bar{x}_i, \bar{z}_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , генерируемых с помощью ДРРСЧ. Согласно Рис. 8.34 и выражениям (8.4.37) эти координаты должны удовлетворять неравенствам:

$$\begin{aligned} -0,5L_1 &\leq x \leq 0,5L_1; \quad -0,5L_2 \leq z \leq 0,5L_2; \\ \frac{x}{0,5L_1} + \frac{z}{0,5L_2} &\leq 1. \end{aligned} \tag{8.4.39}$$

Такой же подход можно использовать при вскрытии и исчезновении с помощью БАЛЦ системы ПВО.

Программирование маневров типа «с горки», «с боевого разворота», «с полупетли» и «веер», входящих в рассматриваемый ТП, путем формального задания требуемых траекторий движения группы АЛЦ затруднительно из-за сложности выбора функций  $z_k(x)$ ,  $y_k(t)$ ,  $k = \overline{1, m}$ , адекватно описывающих каждый из этих маневров.

В этом случае предлагается программирование движения «ведущей» АЛЦ осуществлять с использованием полетных данных ЛА-имитатора, выполняющего соответствующий из приведенных выше маневров.

Пусть в результате полета такого самолета или вертолета получены данные вида (8.2.26) и на их основе с использованием выражений (8.2.28) или (8.2.29) получен вектор  $u_1(t)$  управления «ведущей» АЛЦ СС.

Будем считать, что для этой АЛЦ определены ее фазовые координаты:  $V_{\text{зад},1}(t) = V_{\text{пр}}(t)$ ,  $\theta_{\text{тр},1}(t) = \theta^*(t)$ ,  $\Psi_{\text{тр},1}(t)$ ,  $x_1(t)$ ,  $y_1(t) = H_{\text{пр}}(t)$ ,  $z_1(t)$ . При этом  $\Psi_{\text{тр},1}(t)$ ,  $x_1(t)$ ,  $z_1(t)$  являются решениями системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}_{\text{тр},1} &= -\frac{g}{V_{\text{пр}} \cos \theta^*} (n_y^* \sin \gamma^* + n_z^* \cos \gamma^*); \\ \dot{x}_1 &= V_{\text{пр}} \cos \theta^* \cos \Psi_{\text{тр},1}; \\ \dot{z}_1 &= V_{\text{пр}} \cos \theta^* \sin \Psi_{\text{тр},1},\end{aligned}\tag{8.4.40}$$

сформированной на основе выражений (8.2.27) и кинематических уравнений движения БЛА.

Используя вышеизложенный подход к описанию групповых траекторий полета АЛЦ, параметрическое представление движения  $k$ -й АЛЦ будет иметь вид:

$$\begin{aligned}x_k(t) &= x_1(t) + (k-1)l_x; \\ y_k(t) &= y_1(t) + (k-1)l_y; \\ z_k(t) &= z_1(t) + (k-1)l_z; \quad k = (\overline{2, m}).\end{aligned}\tag{8.4.41}$$

Здесь  $l_x$ ,  $l_y$ ,  $l_z$  – требуемые расстояния между парами АЛЦ соответственно по удалению, высоте и смещению, определяющие вид строя группы АЛЦ.

Эти зависимости совместно с функциями  $V_{\text{зад},k}(t) = V_{\text{зад},1}(t)$ ,  $\theta_{\text{тр},k}(t) = \theta_{\text{тр},1}(t)$ ,  $\dot{\theta}_{\text{тр},k}(t) = \dot{\theta}_{\text{тр},1}(t)$ ,  $\dot{\Psi}_{\text{тр},k}(t) = \dot{\Psi}_{\text{тр},1}(t)$  используются для определения вектора  $u_k(t)$  управления  $k$ -й АЛЦ,  $k = (\overline{2, m})$ , совершающей программируемый групповой маневр ложных целей.

При имитации ТП 5 предполагается, что АЛЦ осуществляют рассмотренные выше маневры одиночных и групповых (при  $m = 2$ ) атак наземных целей с различных направлений.

Программирование  $N$  таких маневров при атаках целей с координатами  $(\bar{x}_i, \bar{z}_i)$  с направлениями, описываемыми углами  $\Psi_i$  в маневренной СК (см. Рис. 8.34),  $i = \overline{1, N}$  будем проводить в предположении, что координаты целей и направления атак, удовлетворяющие условиям (8.4.39) и  $\Psi_i \in (0; 2\pi)$ , сгенерированы с помощью ДРРСЧ.

В этом случае каждый полет одиночной АЛЦ и «ведущей» АЛЦ пары должен проводиться в вертикальной плоскости, след которой на координатной плоскости  $Mxz$  описывается уравнением прямой, проходящей через точку с координатами  $(\bar{x}_i, \bar{z}_i)$  под углом  $\Psi_i$  [17]:

$$z - \bar{z}_i = (x - \bar{x}_i) \operatorname{tg} \Psi_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

Это выражение, представленное в форме (8.2.3), записывается как:

$$\Phi_i(x, z) = (x - \bar{x}_i) \operatorname{tg} \Psi_i - z + \bar{z}_i = 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (8.4.42)$$

Тогда программирование  $i$ -го полета АЛЦ или пары АЛЦ осуществляется с использованием этого выражения и соотношений (8.4.29), (8.2.7)-(8.2.12), (8.1.26), (8.1.27), (8.1.30), (8.1.29) соответственно при  $m = 1$  и  $m = 2$ .

Аналогичный подход предлагается использовать при имитации группами из  $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_N$  АЛЦ действий, предусмотренных ТП 6.

При программировании их траекторий предполагается, что каждая «ведущая» АЛЦ  $i$ -й группы должна совершать полет в плоскости (8.4.42).

Отметим, что для невозможности визуального обнаружения противником БАЛЦ их полеты над районом размещения его средств ПВО должны осуществляться в вечернее и ночное время.

Рассмотрим вопросы применения УИАЛЦ при обучении и тренировках экипажей самолетов и вертолетов борьбе с ВЦ. Применяемые при этом УИАЛЦ должны имитировать характеристики и тактику лучших зарубежных образцов боевой авиационной техники.

Отметим, что обучение и тренировки экипажей ЛА осуществляются в рамках учебно-боевых воздушных боев с применением требуемого числа и типов УИАЛЦ.

По существующей классификации воздушные бои подразделяются на следующие виды [103]:

- 1) по дальности: (дальние ракетные бои, ближние маневренные бои);
- 2) по количеству участников: (одиночные бои, групповые бои);
- 3) по виду боев: (наступательные бои, оборонительные бои).

В учебно-боевых реализациях таких боев УИАЛЦ должны имитировать полеты следующих видов ВЦ:

- а) истребители противника в процессах перехвата и атак самолетов и вертолетов,
- б) самолеты и вертолеты тактической авиации (ТА) противника, осуществляющие атаки наземных целей,
- в) самолеты стратегической (СА) и военно-транспортной (ВТА) авиации при их движении по маршрутам и выполнении боевых задач.

Отметим, что в настоящее время теория применения УИАЛЦ при обучении и тренировках экипажей самолетов и вертолетов ВВС полностью отсутствуют.

В любом воздушном бою выделяются такие этапы как сближение с ВЦ, занятие требуемого позиционного положения («заязка атаки»), атака, выход из атаки и из-под атаки [103].

При этом используются следующие виды боевых порядков:

- замкнутые порядки, применяемые на этапах полета групп ЛА, не связанных с решением тактических задач;
- разомкнутые порядки, в состав которых входят:
  - предбоевые порядки, предназначенные для выполнения тактических маневров;
  - боевые порядки, используемые в воздушном бою.

Боевыми порядками пары ЛА являются «фронт» и «пеленг», для звена ЛА – «кончики пальцев» и «колонна» («эшелон») [103]. В каждом боевом порядке назначаются ведущие и ведомые летчики и пары (звенья).

Занятие позиционного положения («завязка боя») осуществляется [103]:

- 1) на встречных курсах с ВЦ на дальностях, больших дальности пуска авиационных управляемых ракет (АУР) (дальний ракетный бой),
- 2) на виражах, когда противники обнаруживают друг друга на удалении применения авиационных средств поражения (АСП), но в неудобном взаимном положении (высокоманевренный ближний бой),
- 3) на догоне с большой скоростью сближения и под большим ракурсом с дальностью обнаружения, превышающей дальность применения АСП,
- 4) на догоне с малой скоростью сближения по кривой погони с небольшим ракурсом и с атакой ВЦ в задней полусфере.

Как показала практика воздушных боев, виды 1) и 2) дают равные шансы выигрыша воздушного боя, а в видах 3) и 4) преимущество имеется у атакующего ЛА.

В наступательных воздушных боях группа истребителей первой атакует группу ЛА противника, заняв выгодное позиционное положение.

Например, при атаке истребителей сопровождения некоторой группы ЛА применяется наступательный маневр «винт»,

отсекающий истребители противника от этой группы и связывающий их воздушным боем [103].

Оборонительные воздушные бои включают в себя следующие типовые маневры, которые затрудняют противнику ведение прицельного огня:

- а) на больших высотах – резкие развороты с набором или снижением высоты,
- б) на средних высотах – «спираль» с набором высоты или снижением,
- в) на малых высотах – «бочка» с набором высоты и большой перегрузкой.

Истребители перед началом воздушного боя могут находиться в зонах боевого дежурства и сопровождения ЛА, в районе самостоятельного поиска ВЦ и действовать по вызову. При этом группа истребителей осуществляет полеты в сомкнутых порядках с небольшими взаимными интервалами и эшелонированием по высоте и глубине [103].

При разработке методик применения УИАЛЦ предлагается использовать следующие этапы обучения летчиков ВВС США борьбе с ВЦ [103]:

1. Поиск, обнаружение и атака цели одиночно и в составе пары.
2. Бой одиночного истребителя с парой истребителей, пары с парой, пары с четверкой и четверки с шестеркой истребителей противника.

Рассмотрим некоторые виды требуемых траекторий движения УИАЛЦ при обучении и тренировках летчиков-истребителей. При формировании таких траекторий будем руководствоваться требованиями наличия в них наступательных и оборонительных маневров, а также простоты их программирования.

Для выработки устойчивых навыков борьбы с ВЦ в процессах индивидуального обучения и тренировок летчиков-истреби-

телей УИАЛЦ используются для имитации ведения дальнего ракетного (ДРВБ) и ближнего (БВБ) воздушных боев.

При этом будем считать, что истребитель может находиться в следующих исходных состояниях:

- поиск ВЦ;
- барражирование в некотором районе боевого дежурства.

Как было отмечено выше, первым этапом ведения любого воздушного боя является его «заязка».

На Рис. 8.35 представлены такие этапы для типовых траекторий полетов УИАЛЦ в горизонтальной плоскости при их атаках истребителем (И) из режима поиска ВЦ на встречных курсах ( $a$ ,  $b$ ), на догоне ( $c$ ) и на параллельных встречных курсах ( $g$ ).

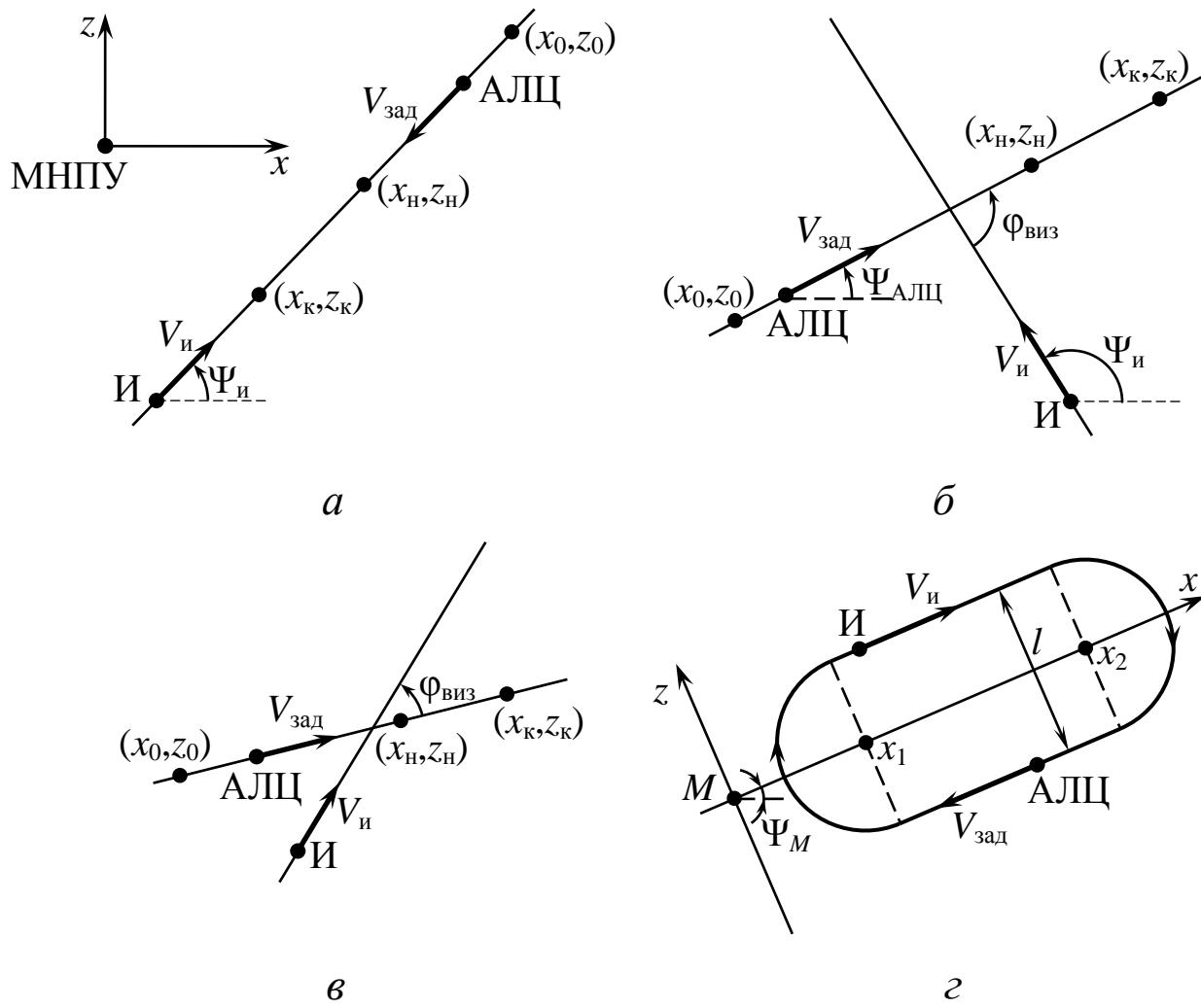


Рис. 8.35

При программировании траектории полета УИАЛЦ, представленной на Рис. 8.35,*a*, используется ее представление в форме уравнения:

$$z = f_1(x) = a_1x + b_1, \quad (8.4.43)$$

коэффициенты которого при известном курсовом угле  $\Psi_i$  истребителя и заданных значениях координат  $(x_0, z_0)$  точки начального состояния УИАЛЦ вычисляются как:

$$a_1 = \operatorname{tg} \Psi_i; \quad b_1 = z_0 - x_0 \operatorname{tg} \Psi_i. \quad (8.4.44)$$

При этом величина скорости  $V_{\text{зад}}(t)$  движения УИАЛЦ полагается равной максимальной скорости  $V_{\max}$  полета имитируемого самолета или вертолета.

Если при движении УИАЛЦ по прямой (8.4.43) до точки с координатами  $(x_h, z_h)$  она не будет «уничтожена» в ДРВБ, что фиксируется ее бортовой аппаратурой измерения промахов, то на интервале  $[x_h, x_k]$  УИАЛЦ осуществляет программное выполнение соответствующих оборонительных маневров и истребитель начинает вести БВБ.

В ситуации, представленной на Рис. 8.35,*b*, при ее программировании также используется уравнение траектории движения УИАЛЦ вида (8.4.43) с использованием выражений (8.4.44), в которых вместо угла  $\Psi_i$  подставляется заданное значение  $\Psi_{\text{АЛЦ}}$  курсового угла УИАЛЦ. Для усложнения условий ее атаки это значение выбирается таким, чтобы угол визирования  $\varphi_{\text{виз}}$  цели истребителем был острым углом. Это требование реализуется ДРРСЧ, с помощью которого генерируется значение угла  $\Psi_{\text{АЛЦ}} \in \left(0; \Psi_i - \frac{\pi}{2}\right)$ .

Здесь, так же, как и выше, в точке с координатами  $(x_h, z_h)$  может начаться БВБ, при котором УИАЛЦ на интервале  $[x_h, x_k]$  выполняет оборонительные маневры, соответствующие типу имитируемого самолета или вертолета.

Ситуация «боя» истребителя с УИАЛЦ, представленная на Рис. 8.35,*в*, программируется аналогичным образом с учетом того, что угол  $\varphi_{\text{виз}}$  должен удовлетворять условию:

$$0 < \varphi_{\text{виз}} < \frac{\pi}{2}.$$

Заметим, что при программировании рассмотренных выше ситуаций используются составные траектории движения УИАЛЦ, включающие в себя линейные участки на интервале  $[x_0, x_h]$  и нелинейные – на интервале  $[x_h, x_k]$ .

Траектория полета УИАЛЦ, представленная на Рис. 8.35,*г*, соответствует ситуации БВБ. При ее программировании используется маневренная СК, повернутая относительно земной СК на угол  $\Psi_M$ .

Используемое при программировании представление составной траектории движения УИАЛЦ по аналогии с выражениями (8.3.33) записывается как:

$$\begin{aligned}\Phi_1(x, z) &= z - 0,5l = 0, \quad x \in [x_1; x_2]; \\ \Phi_2(x, z) &= (x - x_2)^2 + z^2 - 0,25l^2 = 0, \\ &\quad x \in [x_2; x_2 + 0,5l]; \\ \Phi_3(x, z) &= z + 0,5l = 0, \quad x \in [x_1; x_2]; \\ \Phi_4(x, z) &= (x - x_1)^2 + z^2 - 0,25l^2 = 0, \\ &\quad x \in [x_1 - 0,5l; x_1],\end{aligned}\tag{8.4.45}$$

где  $l$  – заданное расстояние между маршрутами движения истребителя и УИАЛЦ;  $x_1$  и  $x_2$  – выбранные значения точек их маневрирования.

Траектории, представленные на Рис. 8.35,*б* и Рис. 8.35,*в*, могут быть использованы при обучении и тренировках операторов оборонительного вооружения, входящих в состав экипажей самолетов дальней (ДА) и военно-транспортной авиации

(ВТА). В этом случае в качестве объекта выступает УИАЛЦ, а в качестве последней – соответствующий самолет ДА или ВТА.

Пусть истребитель находится в состоянии боевого дежурства, барражируя по круговой траектории радиуса  $R_i$  на постоянной высоте. В процессе его полета осуществляется обзор воздушного пространства с использованием БРЛС для поиска и обнаружения ВЦ.

При ее обнаружении начинается ДРВБ по одной из траекторий сближения, представленным на Рис. 8.35,*a*-Рис. 8.35,*в*.

Область обнаружения УИАЛЦ, имитирующей определенный тип ВЦ, изображена на Рис. 8.36.

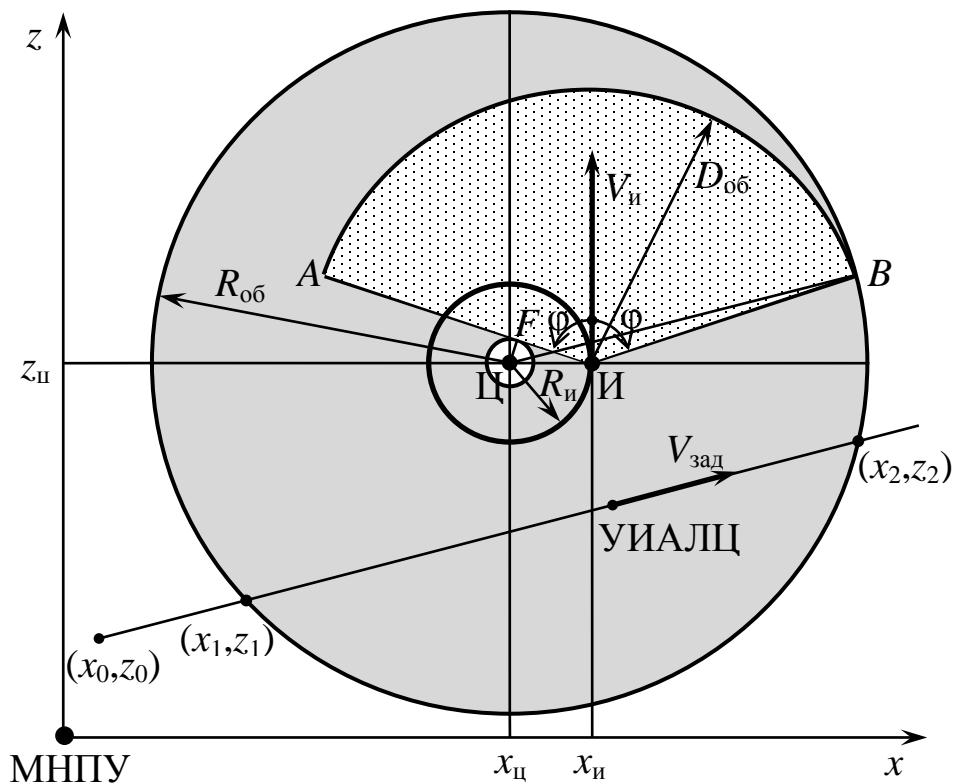


Рис. 8.36

Будем считать, что траектория движения истребителя (И) описывается уравнением окружности радиуса  $R_i$  с центром в точке  $\Pi$ :

$$(x - x_{\Pi})^2 + (z - z_{\Pi})^2 - R_i^2 = 0.$$

Скорость движения истребителя равна  $V_{ii}$ . Установленная на истребителе БРЛС имеет дальность обнаружения воздушной цели (ВЦ)  $D_{ob}$  и угол обзора воздушного пространства, равный  $\pm\phi$ .

Как видно из рисунка, при  $\phi < \frac{\pi}{2}$  имеет место «слепая» зона БРЛС, граница которой описывается окружностью радиуса  $CF = r$ .

Радиус этой окружности определяется выражением:

$$r = R_{ii} \cos \phi.$$

Отсюда видно, что значение  $r = 0$  при  $\phi = \frac{\pi}{2}$ . Таким образом, при значении  $\phi \geq \frac{\pi}{2}$  барражирующий истребитель будет вести поиск и обнаружение ВЦ в области, описываемой кругом радиуса  $R_{ob}$  без «слепых» зон.

Проводя необходимые выкладки, получим для  $R_{ob}$  выражение вида:

$$R_{ob} = \sqrt{R_{ii}^2 + D_{ob}^2 + 2R_{ii}D_{ob} \sin \phi}.$$

Площадь области обзора БРЛС воздушного пространства определяется в зависимости от значения ее угла азимута  $\phi$  по следующей формуле:

$$S_{ob} = \begin{cases} \pi(R_{ii}^2 \sin^2 \phi + D_{ob}^2 + 2R_{ii}D_{ob} \sin \phi) & \text{при } \phi < \frac{\pi}{2}; \\ \pi R_{ob}^2 & \text{при } \phi \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Из Рис. 8.36 следует, что уравнение границы области обнаружения ВЦ можно определить как:

$$(x - x_{ii})^2 + (z - z_{ii})^2 - R_{ob}^2 = 0. \quad (8.4.46)$$

Потребуем, чтобы определенная часть (отрезок) линейной траектории движения УИАЛЦ вида (8.4.43) проходил через область ее обнаружения БРЛС, барражирующего истребителя.

Для этого сгенерируем две случайные точки с координатами  $(x_1, z_1)$  и  $(x_2, z_2)$ , лежащие на кривой (8.4.46). При этом с помощью ДРРСЧ сформируем значения  $x_i \in (x_{\Pi} - R_{\text{об}}; x_{\Pi} + R_{\text{об}})$ ,  $i = \overline{(1;2)}$ , а значения  $z_i$  определим по формуле:

$$z_i = z_{\Pi} + \sqrt{R_{\text{об}}^2 - (x - x_{\Pi})^2}, \quad i = \overline{(1;2)}$$

Проводя через сгенерированные точки прямую, получаем следующие значения коэффициентов выражения (8.4.43):

$$a_1 = \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}; \quad b_1 = z_1 - \frac{x_1(z_2 - z_1)}{x_2 - x_1}. \quad (8.4.47)$$

Следующим этапом обучения и тренировок летчика-истребителя является выработка устойчивых навыков борьбы с одиночными ВЦ, осуществляющими движение по пространственным траекториям. При программировании полетов УИАЛЦ, имитирующих движение определенных типов ВЦ по таким траекториям, предлагается использовать методы, изложенные в Разд. 8.2.

В частности, УИАЛЦ может осуществлять полет по «пространственной змейке», когда в качестве функции (8.2.3) используется уравнение (8.4.24), а зависимость (8.2.4) конкретизируется как

$$y_{\text{тр},1}(t) = y_0 + a \sin b(t - t_0), \quad t \in [t_0, t_{\kappa}], \quad (8.4.48)$$

где  $a$  и  $b$  – соответственно требуемые значения амплитуды и частоты изменения высоты полета УИАЛЦ;  $y_0$  – высота ее полета в точке с координатами  $(x_{\text{н}}, z_{\text{н}})$ .

Траектория полета УИАЛЦ может располагаться на произвольной плоскости (8.2.13), представленной на Рис. 8.6. В этом случае сложность учебного боя состоит в том, что для выполнения БВБистребитель должен переместиться за минимальное время из произвольной точки воздушного пространства на эту плоскость.

При реализации этого подхода предлагается формировать уравнение (8.2.15) плоскости полета УИАЛЦ путем генерации с помощью ДРРСЧ параметров  $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ ,  $p \in (p_1, p_2)$  и использования выражений (8.2.19).

Для получения траектории полета УИАЛЦ с переменной кривизной, что усложняет условия проведения БВБ, в качестве функции (8.4.43) предлагается использовать уравнение эллипса [17]:

$$\Phi_1(x, z) = \frac{(x - x_{\Pi})^2}{c^2} + \frac{(z - z_{\Pi})^2}{d^2} - 1 = 0. \quad (8.4.49)$$

в котором, согласно Рис. 8.6, координаты центра должны удовлетворять условиям:

$$0 < x_{\Pi} < a, \quad 0 < z_{\Pi} < b,$$

а значения его большой  $c$  и малой  $d$  полуоси выбираются так, чтобы  $c > d$ . При формировании этих параметров функции (8.4.49) также можно использовать ДРРСЧ.

Важным этапом обучения и тренировок летчиков-истребителей является борьба в их одиночном или групповом составах с групповыми ВЦ.

Обозначим через  $n \geq 1$  и  $m \geq 1$  соответственно число истребителей и УИАЛЦ, принимающих участие в программируемом учебном воздушном бою.

На Рис. 8.37 представлена ситуация «заязки» такого боя в горизонтальной плоскости при перехвате  $n = 2$  истребителями  $m = 4$  УИАЛЦ.

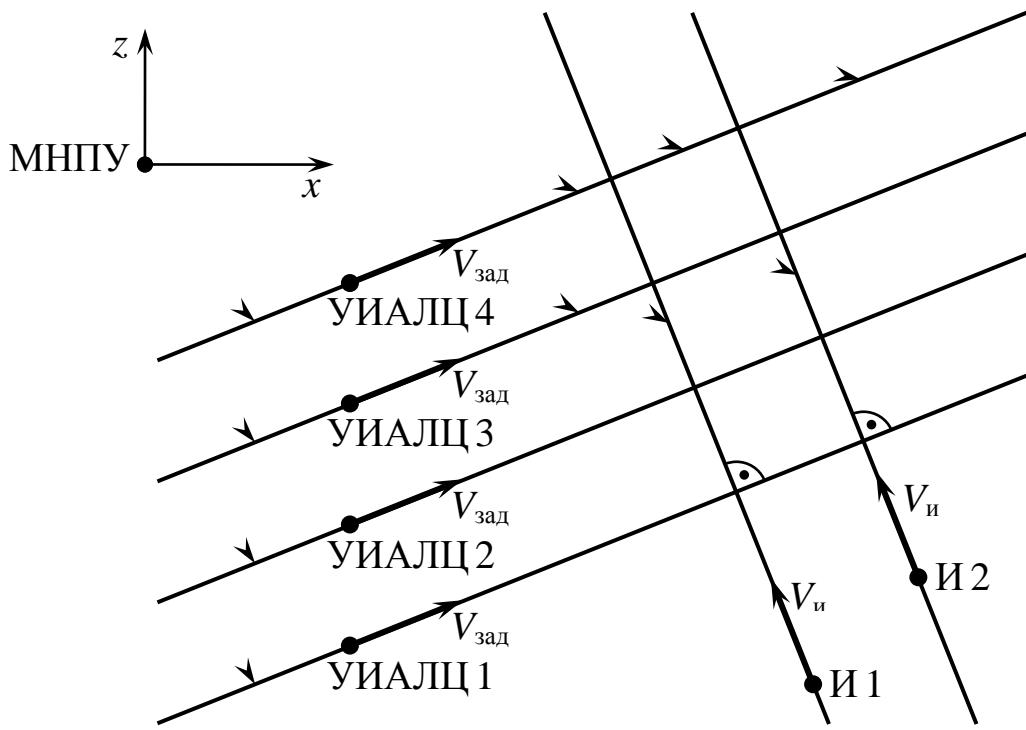


Рис. 8.37

Отметим, что данная ситуация является общим случаем ситуаций, приведенных на Рис. 8.35,*б* и Рис. 8.35,*в* при  $\Phi_{\text{виз}} = \frac{\pi}{2}$ .

Уравнения групповых траекторий *m* применяемых УИАЛЦ (см. Рис. 8.29,*а*) формируются в общем случае с использованием выражения (8.4.27), где  $f_1(x)$  – траектория движения «ведущей» УИАЛЦ.

Если в качестве такой функции рассматривается линейная зависимость (8.4.43), коэффициенты которой вычисляются по формулам (8.4.47), то, по аналогии с (8.4.34), выражение (8.4.27) примет вид:

$$z = f_k(x) = a_1 x + b_1 + (k - 1)l_z, \quad k = (\overline{1, m}).$$

Нелинейные групповые траектории полета УИАЛЦ могут быть получены в явном виде с использованием выражения (8.4.36), а в неявном виде (см. Рис. 8.29,*б*) – с привлечением уравнений (8.4.35) или (8.4.49). При этом роспуск группы

УИАЛЦ, начиная с некоторых точек их траекторий, описывается при  $m = 3$  подходом, представленным на Рис. 8.31.

Для программирования пространственных групповых маневров УИАЛЦ дополнительно к приведенным выше представлениям функций  $z_k(x)$ ,  $k = \overline{1, m}$  используется зависимость вида (8.4.29), где функция  $y_1(t)$ , в частности, может представляться формулой (8.4.48).

При описании движения каждой из  $m$  УИАЛЦ в собственной плоскости вида (8.2.15) с помощью ДРРСЧ генерируется  $m$  значений параметров  $p, \phi, \lambda$  и используется семейство функций (8.4.28),  $k = \overline{1, m}$ , построенных на основе уравнений (8.4.35) или (8.4.49).

Имитация наступательного маневра группы истребителей противника типа «винт» производится при использовании для описания траектории «ведущей» УИАЛЦ группы выражений (8.3.38) при  $k = 1$ . С учетом этого траектории движения остальных ( $m - 1$ ) УИАЛЦ формируются с помощью соотношений (8.4.41).

Эти соотношения применяются в случае, когда БВБ имитируется путем использования при программировании полетов группы УИАЛЦ реальных маневров самолетов и вертолетов. Здесь, как и выше, для описания фазовых координат «ведущей» АЛЦ используются соответствующие полетные данные и результаты решения системы уравнений (8.4.40).

Важной функцией истребительной авиации является борьба с истребителями-бомбардировщиками, штурмовиками и вертолетами противника, осуществляющими атаки наземных целей, в том числе и средств ПВО [103]. Для обучения и тренировок летчиков-истребителей решению таких задач при программировании полетов группировок УИАЛЦ предлагается использовать рассмотренные выше методы группового применения

АЛЦ при их «взаимодействии» с системами ПВО условного и реального противника.

Такое применение УИАЛЦ позволяет выработать у летчиков устойчивые навыки ведения групповых БВБ на малых высотах.

Отметим, что выработка таких навыков при ведении одиночных и групповых ДРВБ и БВБ в различных рассмотренных боевых ситуациях подразумевает проведение серии учебных боев, количество  $N$  которых определяется с помощью выражения (8.4.2).

Рассмотрим основные подходы к программированию траекторий БАЛЦ при их использовании в операциях армейской (АА), оперативно-тактической (ОТА), дальней (ДА) и военно-транспортной (ВТА) авиации.

В таких операциях на БАЛЦ возлагаются следующие задачи [89]:

1. Вскрытие координат РЛС управления средствами ПВО и мест дислокации последних. Истощение боезапаса этих средств при имитации интенсивных атак наземных целей противника.

2. Создание ложной оперативной обстановки в центрах управления средствами ПВО и авиацией противника путем имитации полетов групп самолетов и вертолетов, отмеченных видов авиации, на ложных направлениях и «размножения» их численности.

3. Прикрытие действующих в составе смешанных группировок самолетов и вертолетов от огня средств ПВО и истребителей противника, позволяющие минимизировать их потери.

Отметим, что для эффективного решения этих задач БАЛЦ должны максимальным образом имитировать существующие и перспективные образцы отечественной боевой авиации.

Методы программирования траекторий БАЛЦ при решении первой задачи аналогичны рассмотренным выше методам про-

граммирования полетов УИАЛЦ, используемых при обучении и тренировках расчетов средств ПВО и летчиков-истребителей.

В состав применяемых при решении этой задачи демонстрационной группы БАЛЦ должны быть включены БЛА-РМ и БЛА-PTR, оснащенные целевой нагрузкой для проведения видовой и радиоэлектронной разведки.

Например, при действиях ударной группы (УГ) штурмовиков АА демонстрационная группа БАЛЦ и таких БЛА пересекает линию боевого соприкосновения (ЛБС) с противником на удалении 50-80 км от их маршрута и, имитируя полет УГ, подходит к району атаки под углом 90° к ее маршруту с упреждением 2-5 минут. Далее до подхода штурмовиков группа БАЛЦ имитирует атаки наземных целей, отвлекая на себя огонь средств ПВО и выявляя с помощью БЛА-РМ и БЛА-PTR их координаты, которые передаются УГ. После выполнения своих задач уцелевшие БАЛЦ демонстрационной группы и вспомогательные БЛА возвращаются в районы их посадки.

При решении второй задачи формируются группы БАЛЦ и траектории их движения, отвлекающие противника от реальных направлений действия подразделений АА, ОТА, ДА и ВТА в конкретных боевых операциях.

Примерами таких операций являются высадки десантов вертолетами АА и самолетами ВТА, формирование коридоров прорыва системы ПВО при действиях ОТА и ДА, полеты групп самолетов ОТА и ДА к целям, находящимся на значительном удалении от ЛБС и др. [103].

Отметим, что при имитации дальних полетов групп самолетов ДА и ВТА должны применяться БАЛЦ воздушного старта и воздушные пункты управления их группировками.

При программировании движения БАЛЦ, имитирующих полеты на постоянной высоте самолетов и вертолетов по ложным маршрутам, предлагается для формирования траектории

движения «ведущей» БАЛЦ группы использовать подход, применяемый для программирования полета БЛА-РМ при контроле линейных объектов (см. Рис. 8.8,*б*). В этом случае такая траектория для «ведущей» БАЛЦ будет иметь вид, представленный на Рис. 8.15. Ложный маршрут ее движения задается совокупностью  $n$  ППМ, на базе которых формируются уравнения составных участков траектории вида (8.3.33).

С использованием этих уравнений методом, предложенным в разд. 8.3, формируются векторы управления  $u_{j-1}(t)$ ,  $u_j(t)$ ,  $u_{j+1}(t)$ ,  $j = \overline{(2, n-1)}$ , «ведущей» БАЛЦ СС и параметрическое представление  $x_1(t)$ ,  $z_1(t)$  траектории ее полета.

Траектории движения остальных БАЛЦ СС группы в требуемом строю определяются по соответствующим формулам (8.4.41). Параметрические представления этих траекторий используются в последующем для формирования векторов управлений каждой  $k$ -й группы БАЛЦ СС,  $k = \overline{(2, m)}$ .

Известно, что при действиях крупных группировок ВВС для контроля воздушного пространства и наведения истребителей прикрытия используются самолеты дальнего радиолокационного обнаружения и управления (ДРЛОУ), барражирующие в определенных районах на высоте 8000-10000 м в течение нескольких часов [103].

Для имитации движения такого самолета предлагается использовать замкнутую траекторию полета БАЛЦ, представленную на Рис. 8.35,*г*, которая описывается выражениями (8.4.45). Повышение достоверности наличия в воздухе ложного самолета ДРЛОУ достигается путем размещения в окрестности имитирующей его БАЛЦ пары барражирующих БАЛЦ, которые имитируют движение пары истребителей прикрытия этого самолета.

Перспективным направление применения БАЛЦ является их использование совместно с вертолетами и самолетами АА, ОТА, ДА и ВТА в составе смешанных авиационных группиро-

вок. При этом БАЛЦ выступают средствами «размножения» их боевых порядков (задача 1) и прикрытия от ударов средств ПВО и истребителей противника (задача 3).

В последнем случае применяемые БАЛЦ объединяются в группы прикрытия пилотируемых ЛА максимальным образом воспроизводящих их летные и информационные характеристики.

Общий состав взаимного расположения группы ЛА и совокупности групп ее прикрытия от всевозможных направлений дальних и ближних ракетных атак противника приведен на Рис. 8.38. На этом рисунке представлен сомкнутый боевой порядок смешанной группировки ЛА и БАЛЦ при видах сбоку (*a*) и сверху (*b*).

Для обеспечения согласованного движения смешанной группировки скорости полета  $V_{\text{зад}}(t)$  каждой из групп БАЛЦ с численностями  $m_1, m_2, \dots, m_6$  должны быть равны скорости  $V_{\text{ЛА}}$  движения прикрываемой группы из  $n$  ЛА.

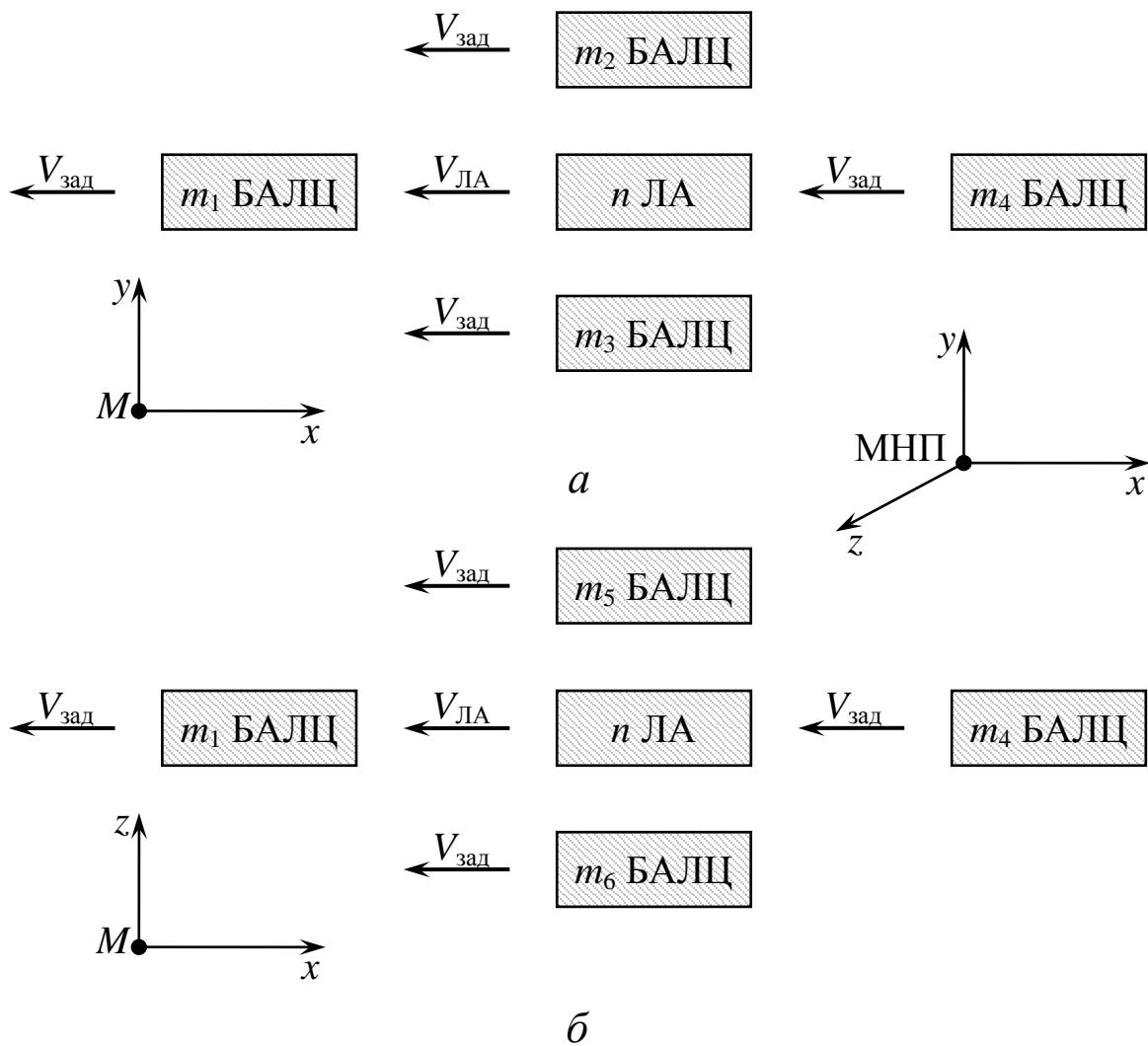


Рис. 8.38

Наличие групп БАЛЦ зависит от режимов полета прикрываемой группы ЛА.

Так при прикрытии самолетов ДА и ВТА, совершающих полеты на максимальных высотах их полетов, вторая группа БАЛЦ может отсутствовать, то есть  $m_2 = 0$ . При полетах ЛА на предельно малых высотах отсутствует третья группа БАЛЦ ( $m_3 = 0$ ).

Рассмотрим некоторые примеры применения групп прикрытия различных видов ЛА [103].

При высадке тактического десанта с вертолетов АА применимые для их прикрытия группы БАЛЦ ВС осуществляют полет до точки высадки с полным повторением профиля группы

десантных вертолетов. В районе высадки эти БАЛЦ барражируют вокруг приземлившейся группы вертолетов на определенном удалении.

После завершения высадки уцелевшие от огня средств ПВО и истребителей противника БАЛЦ занимают исходный порядок вокруг прикрываемых вертолетов, и смешанная группировка возвращается через ЛБС в точки вылета ее составляющих.

Группы прикрытия бомбардировщиков ДА после роспуска их строя отходят к коридору прорыва системы ПВО и барражируют вдоль его границ, ожидая возврата УГ.

При обратном пролете бомбардировщиков оставшиеся БАЛЦ восстанавливают их прикрытие, обеспечивая безопасность возврата на аэродром базирования.

Программирование траекторий движения применяемых групп БАЛЦ, представленных на Рис. 8.38, производится с использованием описанного выше подхода к программированию групповых полетов АЛЦ.

Здесь в качестве исходных данных выступает траектория полета «ведущего» ЛА прикрываемой группы. На ее основе определяются требуемые траектории «ведущих» БАЛЦ каждой группы прикрытия и с их использованием строй и требуемые траектории остальных БАЛЦ группы. Программирование маневров «роспуск» и «схождение» групп БАЛЦ также проводится описанными выше методами.

В заключение отметим, что анализ состояния рассматриваемого в данном разделе вопроса показал наличие порядка десяти зарубежных и отечественных образцов АЛЦ [89] и при этом полное отсутствие теории создания и применения этого нового класса БЛА.

При решении вопросов создания АЛЦ необходимо разработать методики проектирования их образцов максимальным образом имитирующих летно-технические и информационные характеристики существующих и перспективных отечествен-

ных и зарубежных образцов боевых ЛА и имеющих при этом минимальную стоимость их производства и эксплуатации.

В состав первоочередных задач *теории применения АЛЦ* предлагается включить:

1. Создание методов управления крупными группами находящихся в воздухе АЛЦ при их формировании, роспуске и сборе в определенные порядки.

2. Определение оптимального количественного состава групп прикрытия смешанных авиационных группировок при решении определенными типами вертолетов и самолетов конкретных боевых задач, обеспечивающего минимальное значение вероятности их поражения огнем противника и минимальное общее число применяемых при этом АЛЦ. Один из подходов к решению этой задачи приведен в работе [89].

#### ***8.4.4. Об одном теоретико-игровом подходе к применению авиационных ложных целей***

Общеизвестно, что любые боевые действия имеют состязательный характер [14]. Как было показано выше, АЛЦ либо имитируют такие действия, либо непосредственно участвуют в них.

Это означает, что и вопросы реализации состязательности должны быть в достаточно полной мере отражены в теории применения АЛЦ. Задачи эффективного управления различными видами БЛА и, в частности, АЛЦ являются трудно формализуемыми задачами.

Поэтому решение этих задач должно основаться на применении человека-машинного подхода к управлению УИАЛЦ и БАЛЦ. В данном разделе будет рассмотрен один из таких подходов.

По классификации работы [14] учебно-испытательные и боевые операции с использованием АЛЦ могут быть отнесены к операциям, в которых участвующие стороны имеют противоположные интересы. В частности, задачей условного или реального противника является уничтожение АЛЦ за минималь-

ное время, а задачей персонала наземного или воздушного пункта управления (ПУ), соответствующего ИмБАК, состоит в максимально возможном увеличении времени пребывания АЛЦ в воздухе за счет выбора и реализации определенного управления.

В отмеченной работе для исследования операций с противоположными интересами предлагается использовать математический аппарат теории игр.

Для игры «противник – АЛЦ», которая происходит во времени и пространстве, наиболее подходящим является такой ее раздел, как теория дифференциальных игр [5, 29 и др.].

Классическая модель такой игры, в которой участвуют «перехватчик» и «цель», в общем случае имеет вид:

$$T = T(u, v) \rightarrow \min_v \max_u;$$

$$\dot{x}_{\text{пер}} = f(x_{\text{пер}}, v); \quad \dot{x}_{\text{ц}} = \varphi(x_{\text{ц}}, u), \quad t \in [t_0, T]; \quad (8.4.50)$$

$$x_{\text{пер}}(t_0) = x_{0,\text{пер}}; \quad x_{\text{ц}}(t_0) = x_{0,\text{ц}}.$$

Здесь  $x_{\text{пер}} = x_{\text{пер}}(t)$ ,  $x_{\text{ц}} = x_{\text{ц}}(t)$  – фазовые векторы перехватчика и цели;  $v = v(t)$ ,  $u = u(t)$  – векторы управлений перехватчика и цели;  $T$  – время перехвата цели (функционал игры), которое первая сторона стремится минимизировать, а вторая – максимизировать.

Из приведенной модели следует, что методы теории дифференциальных игр являются развитием задач теории оптимального управления, рассмотренных в Разд. 2.5, при решении которых должен достигаться минимакс используемых в них функционалов.

Для случая кинематической игры на плоскости, в которой уравнения (8.4.50) представляются выражениями вида (8.5.17), (8.5.18), в работе [58] утверждается, что оптимальной стратегией перехватчика (ракета, самолет) является его полет по кривой погони [7, 52], а оптимальной стратегией самолета-цели – движение по линии визирования. Как отмечалось в работе [29], в нели-

нейных дифференциальных играх преследования выполнить синтез оптимальных стратегий в замкнутой форме не удается.

Результаты аналитических исследований задачи уклонения от преследования рассматривались в ряде работ, библиография которых приведена в статье [58]. В этих работах определен ряд условий существования вариантов ухода. Один из результатов исследования состоит в том, что оптимальное управление боковой перегрузкой  $n_z$  самолета-цели состоит в периодическом переключении между значениями  $n_{z,\min}$  и  $n_{z,\max}$  [58].

На наш взгляд, применение методов теории дифференциальных игр при выборе оптимального управления АЛЦ нецелесообразно по следующим причинам:

1. Высокая трудоемкость решения на вычислительных средствах ПУ АЛЦ нелинейных задач, в которых должны использоваться уравнения динамики полета АЛЦ и перехватчика вида (8.4.50).
2. Отсутствие точных значений характеристик и параметров, входящих в первую группу дифференциальных уравнений из состава выражений (8.4.50), из-за неопределенности знания о типах перехватчиков, действующих против конкретных боевых АЛЦ.
3. Невозможность учета в модели (8.4.50) действия против конкретной АЛЦ нескольких ракет и истребителей, а также зенитно-пушечных комплексов.
4. Невозможность обеспечить отмеченный выше режим оптимального управления перегрузкой  $n_z$  по конструктивным соображениям в составе существующих и перспективных АЛЦ, которые должны иметь минимальную стоимость.

Как было показано выше, траектория полета АЛЦ может рассматриваться как определенная совокупность его маневров, выполняемых в зоне решения целевой задачи.

В работе [61] рассматривались методы определения параметров динамической системы, универсальной для заданного класса маневров в предположении, что известна частота, с которой нужно выполнить каждый маневр.

Работа [62] исключает это предположение и вводит в рассмотрение априори заданные границы диапазона возможных маневров.

В этих работах «маневр» характеризуется набором граничных значений фазовых координат вектора  $x_{\text{ц}}$  и временем его выполнения. Динамическая система, описываемая уравнениями вида (8.4.50), характеризуется набором управляющих параметров  $w_1, w_2, \dots, w_q$ , задающих совокупность маневров. При этом управлении  $u(t)$  рассматриваемой системой считаются известными. В рассмотренной игровой постановке [62] игрок «Природа» задает функцию распределения частоты выполнения маневров так, чтобы максимизировать проигрыш другого игрока, а игрок «Конструктор» выбирает значение параметров системы, чтобы минимизировать свой проигрыш. В этих работах отсутствует активная позиция «противника», а предлагаемые методы сводятся к выбору параметров двигателя космического ЛА.

С учетом отмеченных выше недостатков, для реализации состязательного подхода в процессах применения АЛЦ предлагаются использовать двухкритериальную теоретико-игровую модель для выбора оптимальных смешанных стратегий [14] командного управления АЛЦ (см. выражения (1.10) и (1.11)) в зоне действия средств борьбы с ВЦ условного и реального противника.

Эта модель с использованием результатов работы [10] имеет вид:

$$\begin{aligned}
C = v \rightarrow \min; \quad T = \sum_{j=1}^n \tau_j p_j \rightarrow \max; \\
\sum_{j=1}^n p_j q_{j,s} \geq v, \quad s = (\overline{1, S}); \quad p_\alpha \geq p_\beta, \quad \alpha, \beta \in (\overline{1, n}); \quad (8.4.51) \\
\sum_{j=1}^n p_j = 1; \quad 0 \leq p_j \leq 1, \quad j = (\overline{1, n}).
\end{aligned}$$

Здесь  $v$  – средняя вероятность уничтожения АЛЦ (цена игры);  $q_{j,s}$  – вероятность уничтожения АЛЦ, управляемого командой  $k_j(a) \in K$  при использовании противником  $s$ -го средства поражения (платежная матрица игры);  $p_j$  – вероятность использования при полете АЛЦ команды управления  $k_j(a) \in K$ ;  $\tau_j$  – время выполнения АЛЦ маневра, задаваемого командой  $k_j(a) \in K$ ;  $T$  – среднее время нахождения АЛЦ в воздухе.

В предлагаемой модели игры со стороны ПУ АЛЦ используются  $n$  стратегий, каждая из которых является реализацией определенного маневра, выполняемого АЛЦ в ходе ее полета. В состав этих маневров включены рассмотренные выше типовые маневры АЛЦ.

В модели (8.4.51) учитывается требуемое упорядочение выполняемых АЛЦ маневров вида:

$$\alpha > \beta, \quad \alpha, \beta \in (\overline{1, n}),$$

которое означает, что маневр  $\alpha$  является более предпочтительным с точки зрения «живучести» АЛЦ по сравнению с маневром  $\beta$ .

Например, маневр «пикование» АЛЦ является в этом смысле более предпочтительным, чем маневр «горизонтальный полет».

В совокупность стратегий противника включаются наименования применяемых им средств борьбы с ВЦ, которым присваиваются номера  $s$  от 1 до  $S$ . Для УИАЛЦ, используемых при обучении конкретных расчетов ПВО и летчиков-истребителей,

величина  $S = 1$ . В процессах применения УИАЛЦ для испытаний разработанных или модифицированных средств борьбы с ВЦ полагается  $S = 2$ . Это означает, что в «игре» оценивается эффективность старого ( $s = 1$ ) и нового ( $s = 2$ ) образцов такого средства.

При использовании АЛЦ в ходе войсковых учений и в боевых операциях ВВС в связи с неопределенностью условий их применения предполагается, что против АЛЦ будут действовать ЗРК ( $s = 1$ ), ЗПРК ( $s = 2$ ), ПЗРК ( $s = 3$ ) и истребители ( $s = 4$ ) условного или реального противника.

Элементы  $[q_{js}]_{n \times S}$  платежной матрицы игры определяются при разработке АЛЦ в процессе имитационного моделирования действий  $s$ -го средства борьбы с ВЦ при выполнении АЛЦ  $j$ -го маневра.

Паретооптимальное множество  $\{p_j^0\}$  стратегий применения АЛЦ формируется методом, предложенным в работе [10].

Из этого множества командир расчета ПУ АЛЦ выбирает вариант смешанных стратегий  $p_1^0, p_2^0, \dots, p_n^0$  применения команд управлений  $k_j(a), j = \overline{1, n}$ , наиболее подходящий для заданных условий использования АЛЦ.

Для реализации в полете АЛЦ конкретной последовательности команд управления применяется рандомизированный алгоритм, основанный на методе Монте-Карло [14], который иллюстрируется Рис. 8.39.

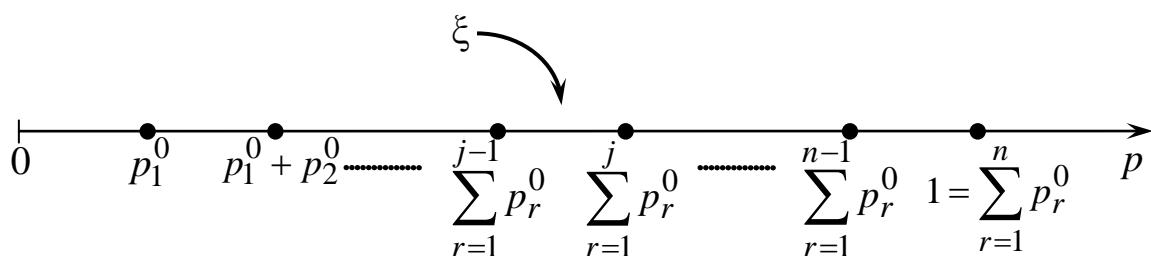


Рис. 8.39

Согласно этому алгоритму, в интервале  $(0; 1)$  генерируется случайное равномерно распределенное число  $\xi$  и определяется значение  $j$ , для которого выполняется неравенство вида:

$$\sum_{r=1}^{j-1} p_r^0 \leq \xi \leq \sum_{r=1}^j p_r^0, \quad j = (\overline{1, n}). \quad (8.4.52)$$

Последнее означает, что для управления АЛЦ используется команда  $k_j(a) \in K$ . Далее с помощью ДРРСЧ генерируется следующее значение  $\xi \in (0, 1)$ , последовательно для  $j$  от 1 до  $n$  проверяется выполнение условий (8.4.52) и определяется следующая команда  $k_r(a) \in K$ ,  $r \in (\overline{1, n})$  управления АЛЦ.

Рассмотрим метод автоматизированного формирования векторов управления  $\Delta_j(t)$ ,  $j \in (\overline{1, n})$  для реализации выбранных для исполнения команд из множества  $K$ .

Будем считать, что в составе функционального программного обеспечения (ПО) АРМ оператора управления АЛЦ имеется совокупность программ:

$$\Pi_{\text{управ}} = \{\pi_1(a), \pi_2(a), \dots, \pi_n(a)\}, \quad (8.4.53)$$

предназначенных для вычисления векторов  $\Delta_1(t), \Delta_2(t), \dots, \Delta_n(t)$  управления АЛЦ при реализации команд  $k_1(a), k_2(a), \dots, k_n(a)$ . При этом соответствующие векторы параметров  $a$  являются исходными данными для каждой программы  $\pi_j(a)$ ,  $j = (\overline{1, n})$ .

Для реализации «гладкой» стыковки в воздухе маневров АЛЦ, задаваемых командами множества  $K$ , в состав ПО АРМ включим множество программ:

$$\Pi_{\text{пер}} = \{\pi_{jr} \mid j, r = (\overline{1, n})\}, \quad (8.4.54)$$

назначением которых является расчет векторов управлений  $\Delta_{jr}(t)$ , обеспечивающих переход АЛЦ от выполнения  $j$ -го маневра к  $r$ -му маневру,  $j = (\overline{1, n})$ ,  $r = (\overline{1, n})$ .

В основу метода формирования таких векторов полагаются рассмотренные в предыдущих разделах данной главы методы

построения плоских и пространственных переходных траекторий движения БЛА.

Процесс автоматизированного формирования рандомизированного управления АЛЦ включает в себя следующие этапы:

1. Решение в среде АРМ оператора управления АЛЦ задачи (8.4.51).

2. Выбор командиром расчета ПУ и оператором из парето-оптимального множества решений задачи варианта  $p_1^0, p_2^0, \dots, p_n^0$ .

3. Формирование с использованием условия (8.4.52) реализуемой команды управления  $k_j(a), j \in (\overline{1, n})$ .

4. Поиск в каталоге (8.4.53) программы  $\pi_j(a)$  формирования вектора управления  $\Delta_j(t), j \in (\overline{1, n})$ .

5. Ввод оператором в выбранную программу значений вектора  $a$  параметров и интервала времени выполняемого  $j$ -го маневра.

6. Вычисление вектора управления  $\Delta_j(t)$  и его передача по командной радиолинии в БВК САУ АЛЦ для непосредственного выполнения.

7. Формирование с помощью условия (8.4.52) последующей команды управления  $k_r(a), r \in (\overline{1, n})$ .

8. Выполнение п.п. 4, 5 для  $j = r$ .

9. Поиск в каталоге (8.4.54) программы  $\pi_{jr}$  формирования вектора переходного управления  $\Delta_{jr}(t), j \in (\overline{1, n}), r \in (\overline{1, n})$ .

10. Ввод оператором требуемых исходных данных в найденную программу и ее запуск.

11. Формирование вектора управления  $\Delta_r(t)$  и передача его совместно с вектором  $\Delta_{jr}(t)$  на борт АЛЦ для выполнения после окончания  $j$ -го маневра.

Этапы 3-11 повторяются до полного исчерпания списка маневров, для которых значения вероятностей  $p_j^0 \neq 0, j \in (\overline{1, n})$ .

Заметим, что этапы 7-11 реализуются в течение выполнения АЛЦ  $j$ -го маневра.

Исходя из текущей воздушной обстановки для обеспечения безопасности полетов и более полного решения поставленных перед АЛЦ задач оператор может самостоятельно выбрать любую из команд множества  $K$ , представленного выражением (1.11).

Отметим, что рассмотренные методы управления АЛЦ могут быть использованы в процессах управления близких к ним по функциям боевых БЛА.

## **8.5. Управление боевыми БЛА**

Как показывает мировая практика, в настоящее время боевые БЛА (ББЛА) являются активно развивающимся направлением беспилотной авиационной техники [44, 101].

Из проведенного анализа состояния данной проблемы следует, что существующие ББЛА представляют собой ударные БЛА среднего и дальнего действия типа X-45 (США) и разведывательно-ударные БЛА, представляющие собой БЛА-РМ, оснащенные средствами поражения наземных целей.

Другие виды ББЛА, представленные на Рис. 1.2, практически не представлены в отечественной и зарубежной практике или находятся на стадиях исследований и разработок.

Следует отметить, что вопросы управления ББЛА в существующей доступной литературе полностью отсутствуют.

### **8.5.1. Управление ударными БЛА**

Главным видом ББЛА являются ударные БЛА, решающие задачи поражения наземных целей в условиях их прикрытия сильной объектовой или зональной системой ПВО. В отличие от существующих этот вид ББЛА предлагается использовать в тактической и оперативной глубине от ЛБС для решения следующих задач:

- 1) уничтожение средств ПВО противника при формировании коридоров прорыва самолетов ОТА, ДА и ВТА,
- 2) уничтожение наступающих мотопехотных, танковых и других видов подразделений противника,
- 3) вывод из строя мостов, переправ, баз снабжения и других объектов инфраструктуры противника,
- 4) нанесение ударов по местам выгрузки и сосредоточения резервов противника.

При выполнении этих задач должны использоваться ударные БЛА СС и ВС, оснащенные малогабаритными средствами поражения целей, аналогичными АУР класса «воздух-земля», кассетными авиабомбами и самоприцеливающимися боевыми элементами, применяемыми на вертолетах и штурмовиках АА. Последнее связано с требованием минимальных массогабаритных характеристик и стоимости ББЛА.

Применение ударных БЛА должно осуществляться совместно с БЛА-РМ и БАЛЦ, которые используются для вскрытия и истощения средств ПВО противника.

В связи с тем, что при программном и радиокомандном управлении ударными БЛА не удастся в силу объективных причин добиться полного решения сформулированных выше задач, их окончательное решение осуществляется вертолетами и самолетами АА, следующими вторым эшелоном за этими БЛА.

При программировании траекторий движения группы ударных БЛА предлагается использовать методы программирования групповых полетов АЛЦ при имитации атак наземных целей, описанных в Разд. 8.4.3.

Будем считать, что траектория полета «ведущего» БЛА группы описывается уравнением прямой (8.4.30), в котором коэффициенты  $A_1$  и  $B_1$  определяются координатами начальной точки  $(x_{10}, z_{10})$  его полета в район атакуемой цели и точки

$(x_{11}, z_{11})$ , в которой начинаются боевые маневры группы БЛА при ее атаке.

Траектории движения остальных БЛА группы в составе  $m$  единиц описываются выражением (8.4.33).

Будем считать, что группа ударных БЛА следует в район атакуемой цели на постоянной высоте  $h$ .

Для преодоления зоны действия средств ПВО необходимо выполнять полеты БЛА на низких высотах, на которых эффективность действия таких средств резко снижается. При этом должен учитываться рельеф местности для исключения возможности столкновения БЛА с расположенными на нем препятствиями.

Определим оптимальное значение высоты полета «ведущего» БЛА, при котором вероятность его столкновения с препятствием и вероятность поражения средствами ПВО будут минимальными. Заметим, что графическое решение этой задачи было приведено в работе [100].

Обозначим через  $p(h)$  – вероятность столкновения БЛА с некоторым препятствием,  $q(h)$  – вероятность поражения БЛА средствами ПВО при его полете на высоте  $h$ . Будем считать, что функция  $p(h)$  является убывающей функцией высоты полета  $h$ , так как с увеличением высоты полета БЛА вероятность его столкновения с некоторым препятствием уменьшается. В свою очередь функция  $q(h)$  будет возрастающей функцией высоты полета  $h$ , так как с увеличением высоты полета БЛА вероятность его поражения средствами ПВО увеличивается.

Вероятность непреодоления БЛА зоны ПВО с использованием теоремы сложения вероятностей независимых событий [17] можно вычислить как:

$$P(h) = p(h) + q(h). \quad (8.5.1)$$

Оптимальную высоту  $h_0$  пролета БЛА этой зоны будем определять из решения следующей задачи оптимизации:

$$P(h) \rightarrow \min_{h_1 \leq h \leq h_2} , \quad (8.5.2)$$

где  $[h_1, h_2]$  – интервал эксплуатационных высот полета рассматриваемого образца БЛА.

Для конкретизации функций  $p(h)$  и  $q(h)$  можно указать следующие подходы:

1) обработка статистики полетов БЛА в зонах действия различных средств ПВО при различных рельефах местности;

2) имитационное моделирование полетов БЛА над пересеченной местностью в условиях действия против них различных средств ПВО;

3) применение экспертных оценок специалистов по средствам ПВО.

В данном разделе для решения задачи (8.5.2) рассмотрим применение третьего подхода.

Будем считать, что функции  $p(h)$  и  $q(h)$  описываются зависимостями вида:

$$p(h) = e^{-ah} ; \quad q(h) = bh^c , \quad (8.5.3)$$

где  $a, b, c$  – некоторые параметры.

Рассмотрим методы определения параметров  $a, b$  и  $c$ , входящих в эти зависимости.

Обозначим через  $\bar{p}$  экспертную оценку вероятности наличия в преодолеваемой БЛА зоне ПВО препятствий (горы, лесные возвышенности, линии электропередачи и т.п.) высотой  $h_1$ . Тогда значение параметра  $a$  функции  $p(h)$  можно определить из уравнения:

$$e^{-ah_1} = \bar{p} .$$

Решая это уравнение, получим, что

$$a = \frac{|\ln \bar{p}|}{h_1} .$$

Будем считать, что экспертами по средствам ПВО заданы значения оценок следующих вероятностей:

$\bar{q}_1$  – вероятность уничтожения БЛА на его минимальной высоте полета  $h_1$ ;

$\bar{q}_2$  – вероятность уничтожения БЛА при полете на высоте  $h_2$ .

Следует отметить, что высота  $h_2$  должна соответствовать максимальному значению вероятности уничтожения БЛА предполагаемыми средствами ПВО на конкретном маршруте его полета, описываемом уравнением (8.4.30).

Тогда значения параметров  $b$  и  $c$ , входящих в выражение (8.5.3) можно определить из следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} bh_1^c &= \bar{q}_1; \\ bh_2^c &= \bar{q}_2, \end{aligned}$$

решение которой имеет вид:

$$b = \frac{\bar{q}_2}{h_2^c}; \quad c = \frac{\ln \bar{q}_1 - \ln \bar{q}_2}{\ln h_1 - \ln h_2}.$$

Для нахождения минимума функции (8.5.1) воспользуемся необходимым условием ее экстремума вида (2.2.1).

Для принятых зависимостей  $p(h)$  и  $q(h)$  минимум функции  $P(h)$  всегда существует, что иллюстрирует Рис. 8.40.

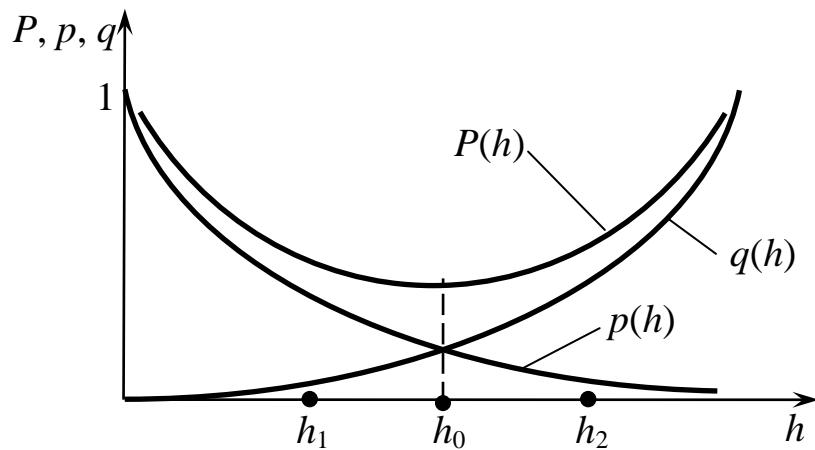


Рис. 8.40

Нахождение минимального значения функции  $P(h)$  осуществляется на допустимом множестве в виде числового отрезка  $[h_1, h_2]$  вещественной оси.

Если функция  $P(h)$  на отрезке  $[h_1, h_2]$  имеет конечное число стационарных точек, подозрительных на экстремум, то наименьшего значения она может достигать либо на концах этого отрезка, либо внутри него.

Для нахождения наименьшего значения функции  $P(h)$ , непрерывной на отрезке  $[h_1, h_2]$ , необходимо:

- 1) найти все стационарные точки этой функции;
- 2) вычислить значения функции  $P(h)$  во всех найденных стационарных точках;
- 3) вычислить значения функции  $P(h_1)$  и  $P(h_2)$  на концах отрезка;
- 4) из всех полученных значений функции выбрать наименьшее значение.

Для нахождения стационарных точек функции (8.5.1) воспользуемся необходимым условием ее экстремума вида:

$$\frac{dP(h)}{dh} = 0.$$

Применяя это условие, получаем с учетом вида функции  $P(h)$  следующее уравнение для определения значения точки, подозрительной на экстремум:

$$\frac{dp}{dh} + \frac{dq}{dh} = 0. \quad (8.5.4)$$

Для определения характера экстремума функции  $P(h)$  воспользуемся достаточным условием экстремума функции одной переменной вида (2.2.2).

Пусть  $h_0$  – точка функции  $P(h)$ , удовлетворяет условию (8.5.4), и существует вторая производная  $\frac{d^2 P(h)}{dh^2}$  этой функции.

Если  $\frac{d^2 P(h)}{dh^2} > 0$ , то  $h_0$  является точкой минимума функции  $P(h)$ .

Это условие с учетом выражения (8.5.1) конкретизируется следующим образом:

$$\left. \frac{d^2 p}{dh^2} \right|_{h_0} + \left. \frac{d^2 q}{dh^2} \right|_{h_0} > 0. \quad (8.5.5)$$

Уравнение (8.5.4) с учетом выражений (8.5.3) записывается в виде:

$$-ae^{-ah} + bch^{c-1} = 0. \quad (8.5.6)$$

Дифференцируя левую часть этого равенства по  $h$ , получим конкретную форму неравенства (8.5.5):

$$\left. a^2 e^{-ah} \right|_{h_0} + bc(c-1)h^{c-2} \left. \right|_{h_0} > 0. \quad (8.5.7)$$

Нелинейное уравнение (8.5.6) решается одним из численных методов, приведенных в Разд. 3.3. Корень  $h_0$  этого уравнения подставляется в выражение (8.5.7) для установления факта наличия в этой точке минимума функции  $P(h)$ .

Если при конкретных значениях ее параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$  имеем, что  $h_0 \notin [h_1, h_2]$ , то оптимальная высота полета БЛА определяется путем выбора наименьшего из значений вероятностей  $P(h_0)$ ,  $P(h_1)$  и  $P(h_2)$ .

Одним из подходов к снижению потерь от огня средств ПВО противника является полет ЛА на предельно малых высотах с огибанием рельефа местности [100].

При использовании такого подхода к программированию полетов групп ударных БЛА в район атакуемых наземных целей целесообразно воспользоваться такими современными средствами геоинформационных технологий, как «Карта-2008»,

«Интеграция» и др. Заметим, что геоинформационная система (ГИС) «Интеграция» была использована в работе [34] для моделирования и визуализации движения вертолета на реальных участках подстилающей поверхности в районах выполнения полетных заданий.

В этой ГИС рельеф местности формируется на основе регулярной сетки (матрицы) высот, представляющей массив (файл) значений высоты  $u$  в точках с фиксированным шагом по координатам  $x$  и  $z$  земной СК. Этот массив как совокупность записей  $(x_r, y_r, z_r)$ ,  $r = \overline{(1, R)}$ , является трехмерной картой местности, применяемой для решения разнообразных задач, в том числе для построения профиля местности в заданном направлении [34].

В работе [34] предлагаются следующие этапы применения ГИС «Интеграция»:

1. Загрузка комплекта электронных топографических карт в формате *SXF* в одном из требуемых масштабов (1:1000000; 1:50000; 1:20000).
2. Выбор и загрузка требуемого района земной поверхности.
3. Задание используемого масштаба местности.
4. Загрузка матрицы высот.
5. Поворот матрицы относительно осей  $x$  и  $z$  на угол, описывающий направление, по которому необходимо построение профиля местности.
6. Экспорт полученного файла в требуемом формате в рабочий файл для дальнейшего использования.
7. Визуализация полученного профиля местности в указанном районе.
8. Требуемая обработка рабочего файла.

На Рис. 8.41 показана реализация этапов 5 и 7 на видеографме ГИС, приведенной в работе [34].

Для программирования полета группы ударных БЛА с использованием трехмерной карты района будем использовать

представленную на Рис. 8.42 маневренную СК с началом в точке  $(x_{10}, z_{10})$  и повернутой относительно земной СК на угол:

$$\Psi_M = \arctg \left( \frac{z_{11} - z_{10}}{x_{11} - x_{10}} \right).$$

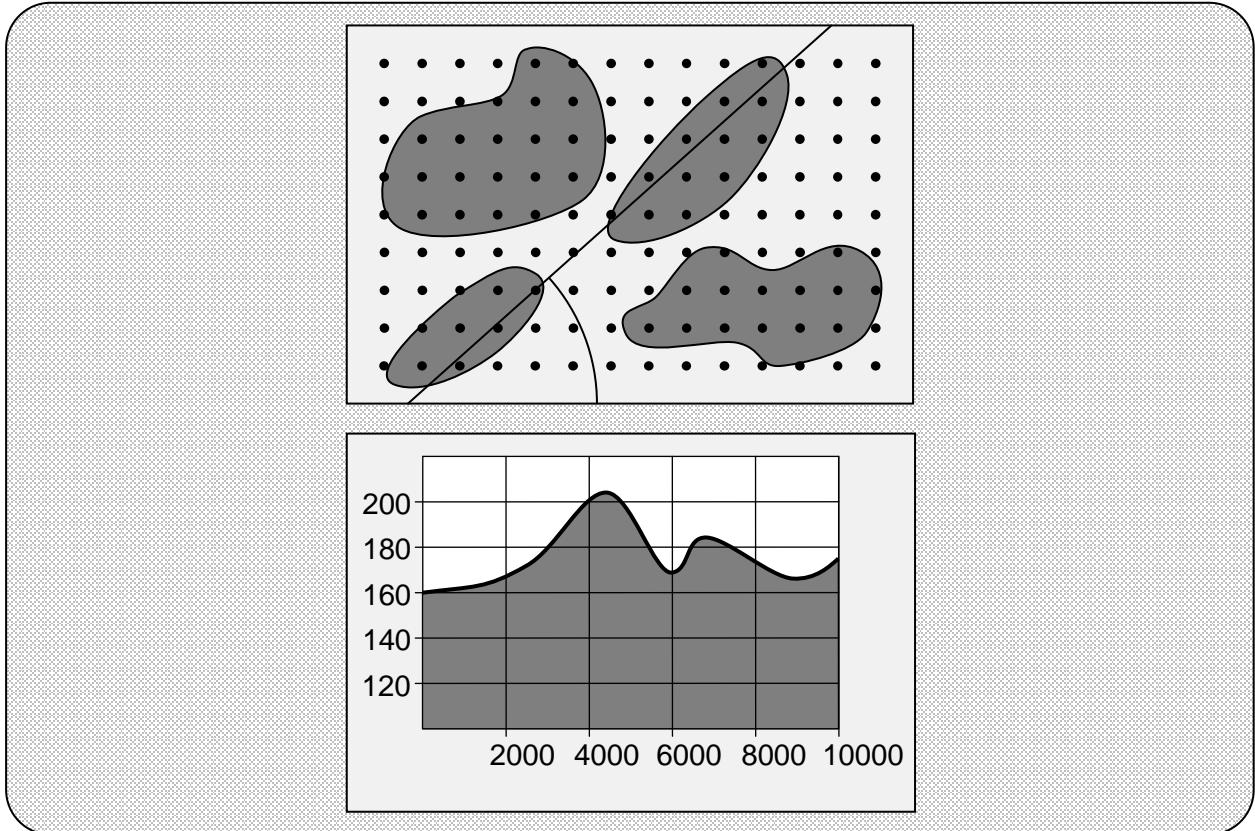


Рис. 8.41

Расположение оси  $Mx$  этой системы описывается уравнением прямой (8.4.30). На этой оси выделены точки  $0, 1, 2, \dots, i, \dots, n$ , полученные при выполнении этапа 5.

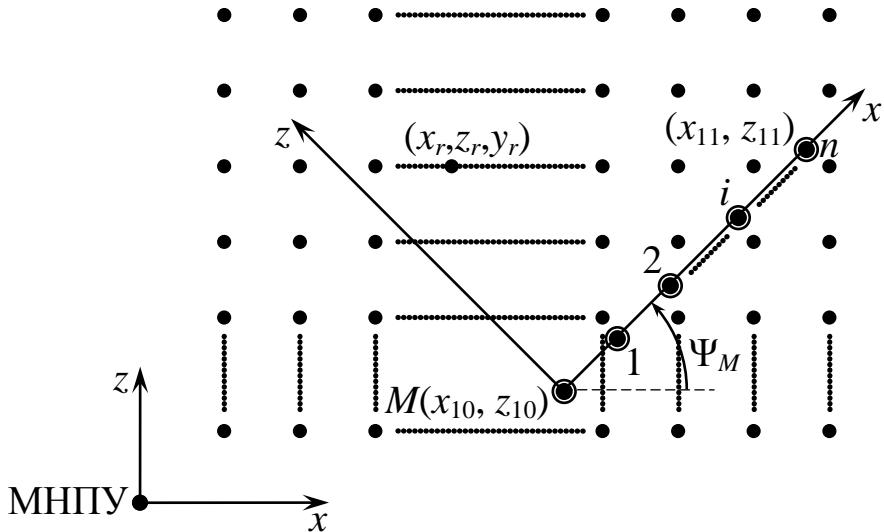


Рис. 8.42

Будем считать, что в результате выполнения этапа 6 получен рабочий файл с записями  $(\bar{x}_i, \bar{z}_i, \bar{y}_i)$  значений матрицы высот в  $i$ -й точке, лежащей на оси  $Mx$ ,  $i = (\overline{0, n})$ . На его основе осуществляется контрольная визуализация профиля местности, по которому должен пройти маршрут полета «ведущего» БЛА группы (этап 7).

В рамках выполнения этапа 8 сформируем файл  $(\bar{x}_i, y_{tp,i})$ ,  $i = (\overline{0, n})$ , в котором требуемое значение высоты полета определяется как:

$$y_{tp,i} = \bar{y}_i + h_1, \quad i = (\overline{0, n}).$$

С использованием этого файла и методов сплайн-интерполяции, описанных в Разд. 8.1, формируется зависимость вида (8.1.31), которую будем рассматривать как требуемый закон  $y_{tp,1} = y_{tp,1}(x)$  изменения высоты полета «ведущего» БЛА группы при  $x \in [0; x_{11} - x_{10}]$ .

Для обеспечения полета БЛА по этой траектории функция  $\theta_{tp,1}(t)$  вычисляется как:

$$\theta_{tp,1}(t) = \arctg(y'_{tp,1}(x_1(t))),$$

а зависимость  $\dot{\theta}_{\text{тр},1}(t)$  определяется по формуле (8.1.17) при замене в ней функции  $f(x)$  на сформированную зависимость  $y_{\text{тр},1}(x)$ . Аналогичная замена производится в уравнениях (8.1.18). Требуемое значение угла  $\Psi_{\text{тр},1}(t) = \Psi_M = \text{const}$ . Отсюда имеем, что  $\dot{\Psi}_{\text{тр},1}(t) = 0$ .

В соответствие с этим вектор  $\Delta_1(t)$  управления «ведущего» БЛА группы в зависимости от его вида определяется методами, описанными в Главах 5 и 6.

В связи с тем, что группа БЛА движется в район атакуемой цели определенным строем (см. Рис. 8.30,*a* и Рис. 8.30,*б*) по параллельным маршрутам, определяемым из выражения (8.4.33), но с различными законами  $y_{\text{тр},k}(x)$  изменения высоты каждого БЛА, для определения управлений  $\Delta_k(t)$ ,  $k = (\overline{2, m})$  используется вышеизложенная совокупность действий.

Первым этапом при этом является размещение маневренной СК в точке с координатами  $(x_{k0}, z_{k0})$ , ось  $Mx$  которой проходит через точку  $(x_{k1}, z_{k1})$ ,  $k = (\overline{2, n})$ .

После достижения группой БЛА точек с координатами  $(\bar{x}_{k1}, \bar{z}_{k1}, y_{\text{тр},k}(x_{k1} - x_{k0}))$ ,  $k = (\overline{1, m})$  управления  $\Delta_k(t)$ , определяющие боевые маневры каждого  $k$ -го БЛА формируются с использованием изложенных в Разд. 8.4.3 методов программирования движений АЛЦ при имитации атак наземных целей. В частности, при решении боевых задач с применением ББЛА ВС могут быть использованы методы программирования таких маневров УИАЛЦ, как «висение» и «подскок».

Непосредственное управление каждым ударным БЛА в процессе выполнения им атак конкретных наземных целей осуществляется в радиокомандном режиме операторами управления и целевой нагрузки МНПУ соответствующего боевого БАК.

Отметим, что при необходимости для обеспечения связи с удаленными ударными БЛА применяются БЛА-Р (см. Разд. 8.3.4).

Для эффективного выполнения атак в состав целевой нагрузки ударных БЛА, кроме бортового оружия, включается оптико-электронная аппаратура обзора наземной поверхности, выполняющая в дневное и ночное время для персонала МНПУ роль прицельно-навигационного комплекса.

Дополнительными задачами операторов управления ударными БЛА являются их вывод из атаки в точки начала маршрутов возврата в район приземления. Программирование таких обычно прямолинейных маршрутов осуществляется методами, описанными в Разд. 8.4.3.

В связи с тем, что персонал МНПУ боевого БАК осуществляет дистанционное принятие решений при атаках удаленных наземных целей, актуальной является задача его обучения и тренировок для выработки устойчивых навыков эффективного управления БЛА и его оружием. Решение этой задачи предлагаются осуществлять в два этапа:

- обучение и тренировки с использованием тренажерных программ, реализованных в составе АРМ МНПУ;
- закрепление навыков в условиях выполнения учебно-боевых полетов БЛА и применения оружия на соответствующих полигонах, оснащенных различными видами наземных целей.

Отметим, что автономное применение ударных БЛА возможно в будущем при использовании перспективных интегрированных интеллектуальных систем управления их полетом и оружием. Основные вопросы построения таких систем рассмотрены в Главе 10.

### ***8.5.2. Управление БЛА радиоэлектронной борьбы***

Важную роль при проведении боевых операций играет применение средств радиоэлектронной борьбы (РЭБ) [56, 100]. В настоящее время существуют наземные, самолетные и вертолетные средства РЭБ, которые могут работать в режимах ра-

диоэлектронного подавления (РЭП) радиорелейных и спутниковых каналов связи, аппаратуры потребителей спутниковых навигационных систем, РЛС, радиостанций, средств РТР противника. Перспективным направлением применения средств РЭБ является дезинформация противника с использованием его радиотехнических средств.

Применение БЛА-РЭБ, на которое было указано в статье [56], позволяет отказаться от использования в качестве носителей аппаратуры РЭБ пилотируемых ЛА, имеющих более значительную стоимость эксплуатации по сравнению с беспилотной авиационной техникой [1]. Вместе с тем, здесь возникает задача создания такой аппаратуры с минимальными массогабаритными и энергетическими характеристиками, обеспечивающей требуемые уровни и диапазоны частот, создаваемых при РЭП прицельных, заградительных и других видов помех радиотехническим средствам противника.

При решении этой задачи в качестве целевой нагрузки БЛА-РЭБ можно использовать специализированные модули аппаратуры РЭП конкретных видов таких средств. В этом случае БЛА-РЭБ перед началом соответствующей операции оснащается конкретным модулем аппаратуры РЭП соответствующего назначения.

В настоящее время на БЛА-РЭБ предполагается устанавливать два вида аппаратуры РЭП с вариантами секторов создания помех, представленными на Рис. 8.43.

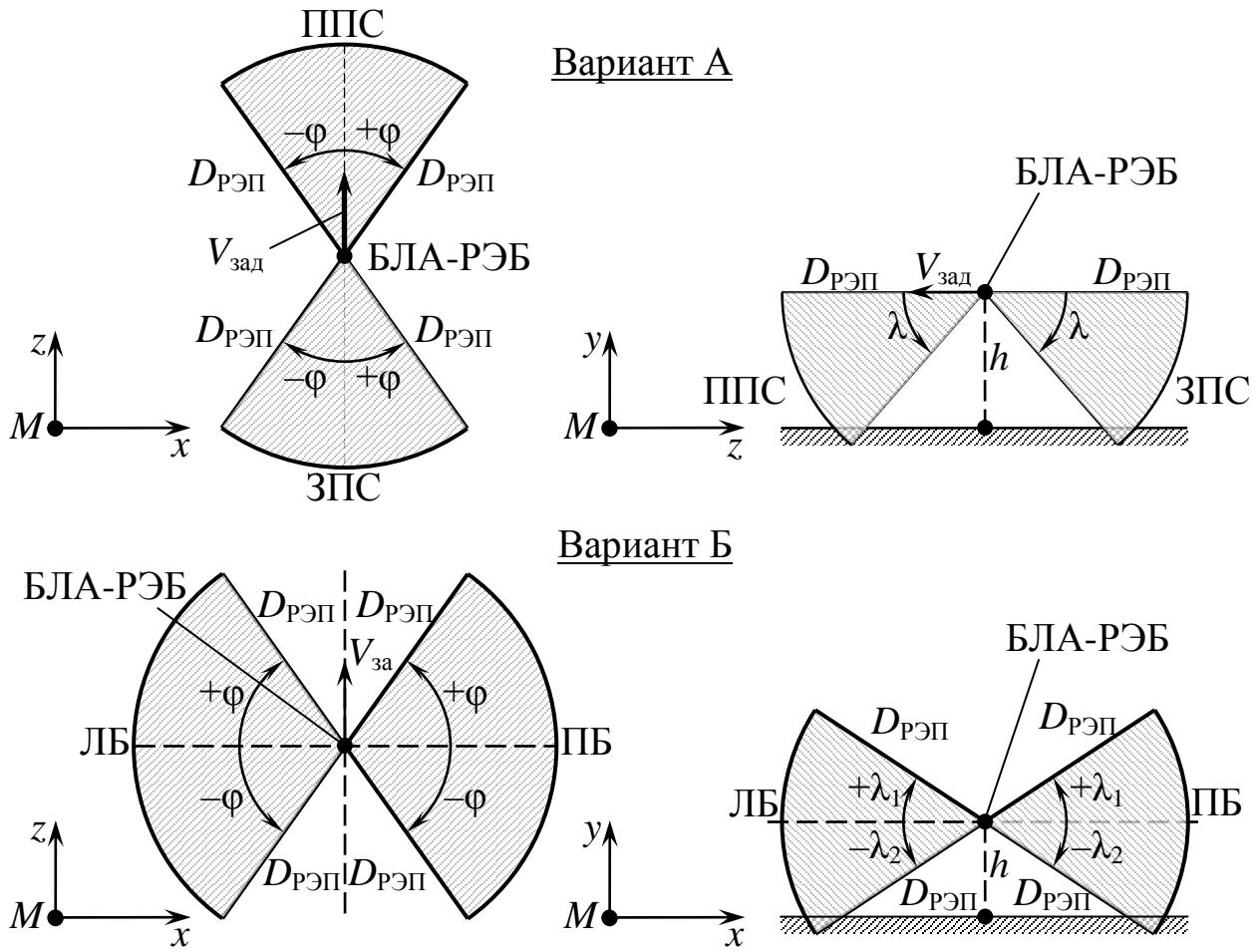


Рис. 8.43

На этом рисунке параметр  $D_{РЭП}$  определяет дальность гарантированного противодействия радиоэлектронным средствам противника. Отметим, что в варианте Б использованы обозначения: ЛБ – левый борт, ПБ – правый борт БЛА РЭБ. По оценкам специалистов, углы азимута должны принимать значения  $\phi_1 = 45^\circ - 60^\circ$ ,  $\phi_2 = 60^\circ - 70^\circ$ , углы места –  $\lambda_1 = 30^\circ - 40^\circ$ ,  $\lambda_2 = 45^\circ - 60^\circ$ , а дальность  $D_{РЭП} = 30-80$  км.

Применение БЛА-РЭБ предлагается осуществлять следующими способами:

1. Движение по траектории барражирования над некоторой областью территории противника при слабой или практически отсутствующей системе ПВО.

2. Движение по траекториям барражирования над своей территорией вдоль границ определенной области расположения

противника с сильной системой ПВО, например, вдоль «коридора» прорыва самолетов ОТА и ДА.

3. Движение в составе групп прикрытия на маршрутах полетов пилотируемых ЛА.

Отметим, что способы 1 и 2 используются для РЭП наземных объектов. Третий способ применяется для РЭП средств ПВО и истребителей противника.

Наиболее эффективной траекторией полета БЛА-РЭБ при первом способе их применения для РЭП наземных объектов противника, расположенных в прямоугольной области  $(A \times B)$  км, является барражирование по круговой траектории (см. Рис. 8.21). Для реализации такого подхода необходимо использовать аппаратуру РЭП, имеющую секторы подавления объектов в нижней полусфере (НПС) вида, представленного на Рис. 8.44.

Для этого варианта угол азимута  $\phi$  равен  $360^\circ$ , а угол места –  $\lambda = 60^\circ - 70^\circ$ . В этом случае для программирования движения БЛА-РЭБ можно использовать подход, примененный при программировании полета БЛА-Р, описываемый выражениями (8.4.7)-(8.4.15) при  $D_p = h/\cos\lambda$ .

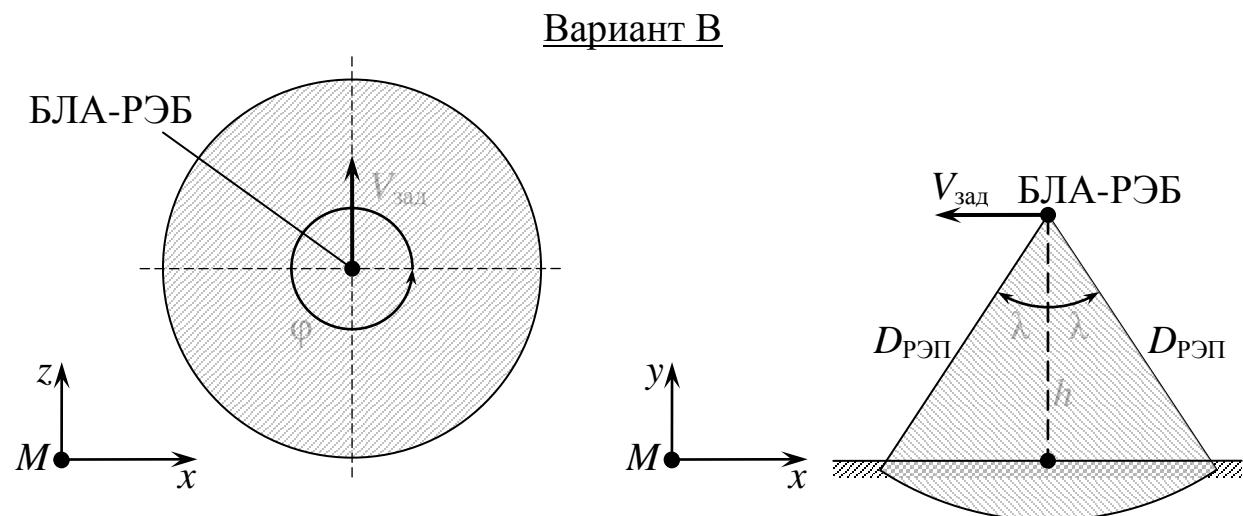


Рис. 8.44

Для реализации второго способа применения БЛА-РЭБ предлагаются использовать аппаратуру РЭП, обеспечивающую секторы создания помех варианта Б, представленного на Рис. 8.43.

Определим область бокового излучения помех по ПБ БЛА-РЭБ, осуществляющего полет на высоте  $h$ , используя расчетную схему, приведенную на Рис. 8.45.

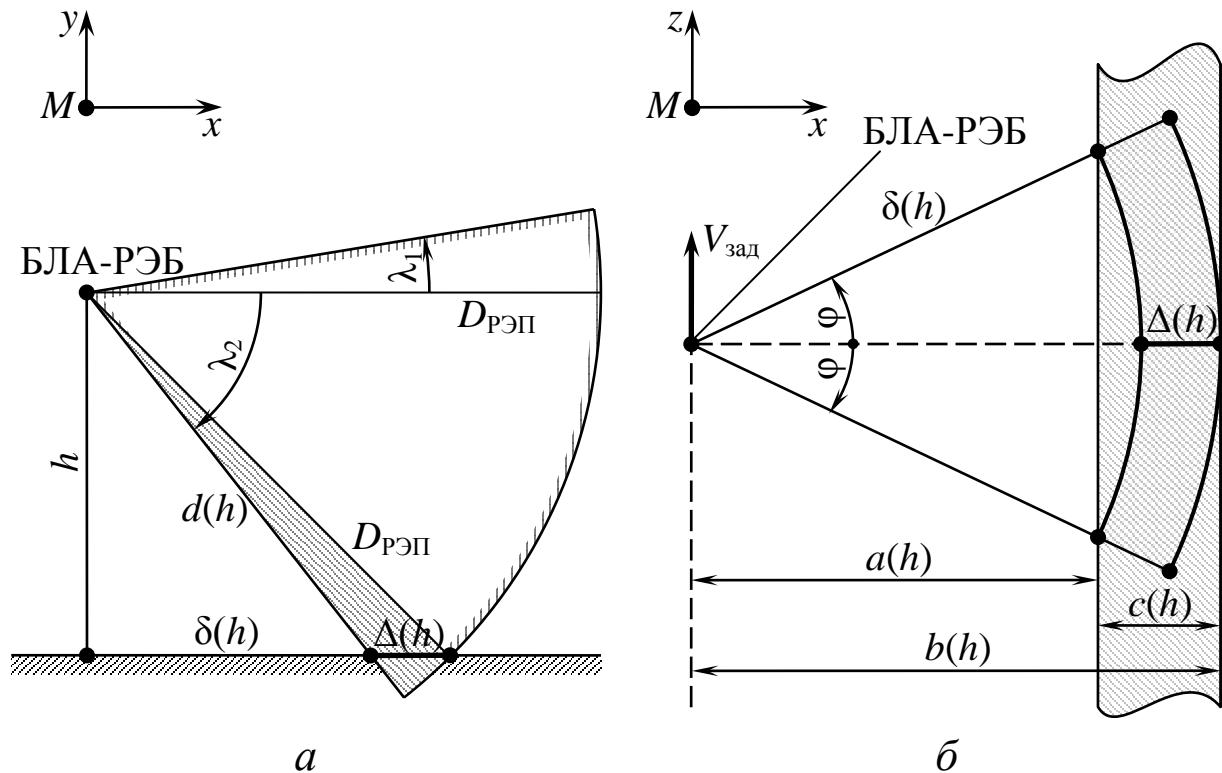


Рис. 8.45

Вычислим геометрические характеристики этой области.

Используя схему на Рис. 8.45,*a*, имеем:

$$d(h) = h / \sin \lambda_2; \quad \delta(h) = h \operatorname{ctg} \lambda_2;$$

$$\Delta(h) = \sqrt{D_{P\bar{E}P}^2 - h^2} - h \operatorname{ctg} \lambda_2.$$

Область облучения наземной поверхности при полете БЛА-РЭБ будет представлять собой полосу, образованную движущимся сектором, сформированным радиусами  $\delta(h)$  и  $(\delta(h) + \Delta(h))$  в пределах углов  $\pm\phi$  (см. Рис. 8.35,*b*).

Ширина такой полосы, которая определяется расстояниями:

$$a(h) = \delta(h) \cos \phi = h \operatorname{ctg} \lambda_2 \cos \phi; \quad (8.5.8)$$

$$b(h) = \delta(h) + \Delta(h) = \sqrt{D_{P\bar{E}P}^2 - h^2},$$

будет равна:

$$c(h) = b(h) - a(h) = \sqrt{D_{\text{РЭП}}^2 - h^2} - h \operatorname{ctg} \lambda_2 \cos \varphi. \quad (8.5.9)$$

Пусть РЭП должны подвергнуться наземные объекты, расположенные в прямоугольной области с размерами  $L_1 \times L_2$  км. Поместим начало маневренной СК в центральную точку этой области.

Барражирование БЛА-РЭБ предлагается осуществлять по траектории, представленной на Рис. 8.46.

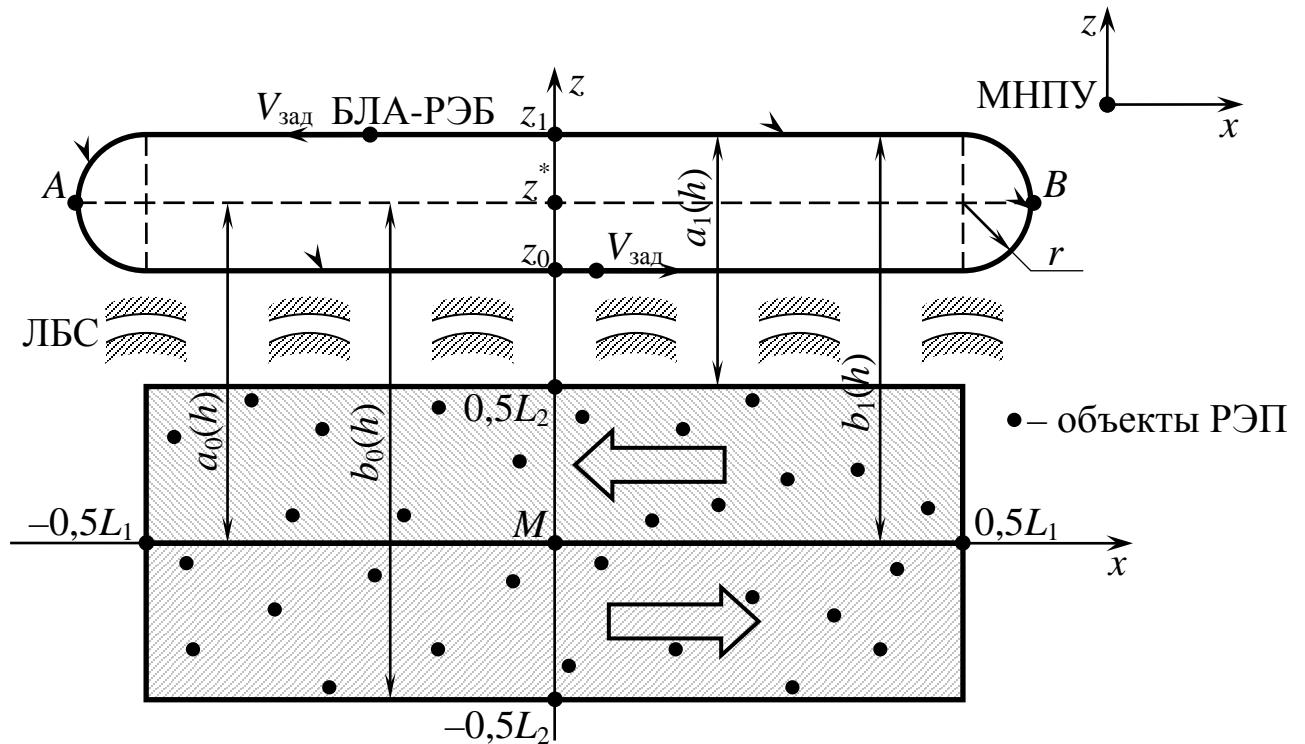


Рис. 8.46

Здесь предполагается, что БЛА-РЭБ двигаясь по прямой  $z = z_1$ , с использованием антенн ЛБ проводит РЭП объектов, расположенных в той части области, где  $x \in [-0,5L_1; 0,5L_1]$  и  $z \in [0; 0,5L_2]$ . При движении БЛА-РЭБ в обратном направлении, то есть по прямой  $z = z_0$ , работают антенны ПБ, с помощью которых осуществляется РЭП объектов с координатами  $x \in [-0,5L_1; 0,5L_1]$  и  $z \in [0; 0,5L_2]$ .

В точках  $A$  и  $B$  с координатами  $(-0,5L_1 - r; z^*)$  и  $(0,5L_1 + r; z^*)$  осуществляется циклическое выключение и вклю-

чение антенно-фидерных систем, расположенных по соответствующим бортам БЛА-РЭБ.

Отметим, что на этой траектории барражирования БЛА-РЭБ может находиться заданное время  $T$ , последовательно проводя РЭП в отмеченных частях заданной прямоугольной области.

Условия того, что ширина полосы воздействия на наземные объекты будет равна величине  $0,5L_2$ , с учетом выражения (8.5.9), запишется в следующей форме:

$$\sqrt{D_{\text{РЭП}}^2 - h^2} - h \operatorname{ctg} \lambda_2 \cos \varphi = 0,5L_2.$$

Преобразуем это соотношение к квадратному уравнению для определения требуемой высоты  $h_6$  барражирования БЛА-РЭБ:

$$(1 + \operatorname{ctg}^2 \lambda_2 \cos^2 \varphi_2) h^2 + h L_2 \operatorname{ctg} \lambda_2 \cos \varphi_2 + (0,25L_2^2 D_{\text{РЭП}}^2) = 0.$$

Подходящий корень этого уравнения вычисляется по формуле вида:

$$h_6 = \frac{\sqrt{4D_{\text{РЭП}}^2(1 + \operatorname{ctg}^2 \lambda_2 \cos^2 \varphi_2) - L_2^2} - L_2 \operatorname{ctg} \lambda_2 \cos \varphi_2}{2(1 + \operatorname{ctg}^2 \lambda_2 \cos^2 \varphi_2)}. \quad (8.5.10)$$

Из этого выражения следует, что значение  $h_6$  будет положительным при выполнении неравенства:

$$D_{\text{РЭП}} > 0,5L_2. \quad (8.5.11)$$

Проекция схемы РЭП на вертикальную плоскость  $M_{zy}$  применяемой маневренной СК представлена на Рис. 8.47.

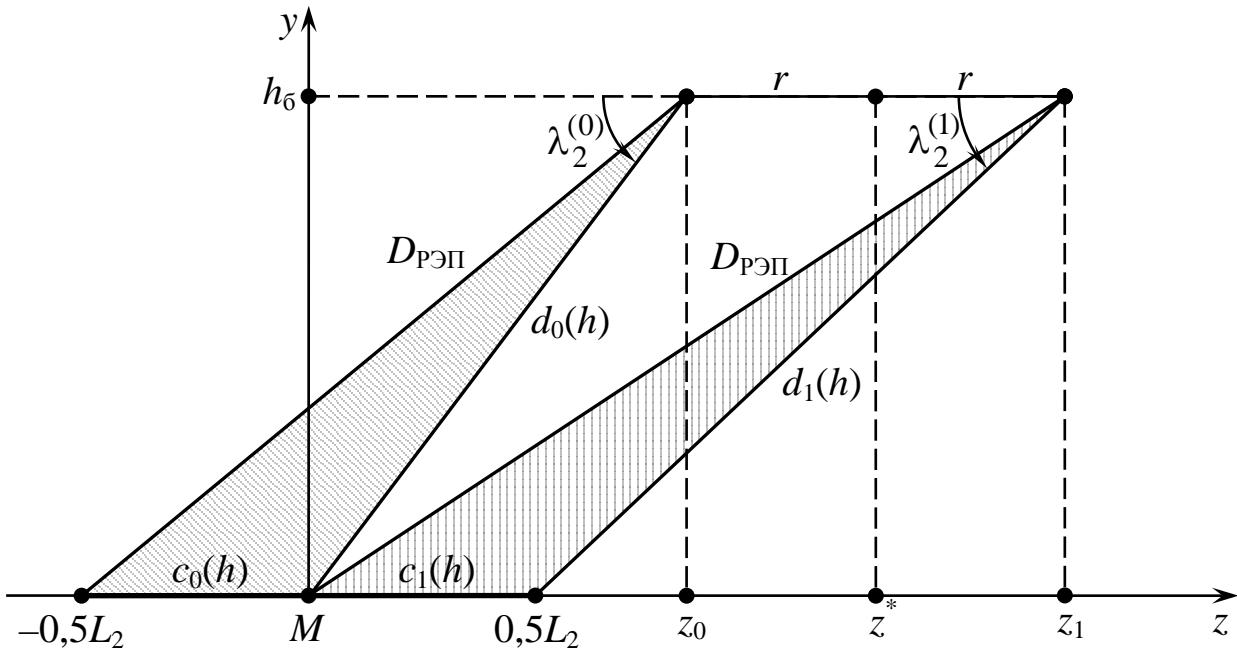


Рис. 8.47

Будем считать, что координата  $z_0$  траектории БЛА-РЭБ является заданной величиной, исходя из его требуемого удаления от ЛБС (см. Рис. 8.46) и требований безопасности полетов над своей территорией.

Из этого рисунка следует, что выполнение условия:

$$c_0(h_6) > 0,5L_2$$

при высоте полета, определяемой выражением (8.5.10), можно добиться путем выбора значения угла места  $\lambda_2^{(0)}$ , удовлетворяющего равенству:

$$a_0(h_6) = z_0.$$

Применяя в этой формуле соотношения (8.5.8) и (8.5.10), получаем нелинейное уравнение вида:

$$h_6 \left( \lambda_2^{(0)} \right) \operatorname{ctg} \lambda_2^{(0)} \cos \varphi - z_0 = 0, \quad (8.5.12)$$

которое решается одним из численных методов, приведенных в Разд. 3.3.

Для выполнения условия:

$$c_1(h_6) = 0,5L_2, \quad (8.5.13)$$

необходимо определить координату  $z_1$  и угол места  $\lambda_2^{(1)}$ .

Значение координат  $z_1$  и  $z^*$  предлагаются вычислять по следующим формулам:

$$z_1 = z_0 + 2r_{\min}, \quad z^* = z_0 + r_{\min}, \quad (8.5.14)$$

где  $r_{\min}$  – минимальное значение радиуса виража используемого образца БЛА-РЭБ.

С использованием Рис. 8.47 и выражений (8.5.8), (8.5.10) условие (8.5.13) конкретизируется как:

$$z_1 - h_6(\lambda_2^{(1)}) \operatorname{ctg} \lambda_2^{(1)} \cos \varphi - 0,5L_2 = 0. \quad (8.5.15)$$

Пусть  $\bar{\lambda}_2^{(0)}$  – решение уравнения (8.5.12). Тогда условие того, что траектория барражирования БЛА-РЭБ будет лежать в горизонтальной плоскости, имеет вид:

$$h_6(\lambda_2^{(1)}) = \bar{h}_6(\bar{\lambda}_2^{(0)}).$$

С учетом этого равенства и с использованием выражения (8.5.14), соотношение (8.5.15) перепишем в следующей форме:

$$z_0 + 2r_{\min} - h_6(\bar{\lambda}_2^{(0)}) \operatorname{ctg} \lambda_2^{(1)} \cos \varphi - 0,5L_2 = 0.$$

Отсюда искомый угол  $\bar{\lambda}_2^{(1)}$  определяется как:

$$\bar{\lambda}_2^{(1)} = \operatorname{arc ctg} \left( \frac{z_0 + 2r_{\min} - 0,5L_2}{h_6(\bar{\lambda}_2^{(0)}) \cos \varphi} \right). \quad (8.5.16)$$

При программировании движения БЛА-РЭБ по составной траектории, представленной на Рис. 8.46, используется ее неявное представление вида:

$$\Phi_1(x, z) = z - z_1 = 0, \quad x \in [-0,5L_1; 0,5L_1];$$

$$\Phi_2(x, z) = (x + 0,5L_1)^2 + (z - z^*)^2 - r_{\min}^2 = 0, \\ x \in [-0,5L_1 - r_{\min}; -0,5L_1];$$

$$\Phi_3(x, z) = z - z_0 = 0, \quad x \in [-0,5L_1; 0,5L_1];$$

$$\Phi_4(x, z) = (x - 0,5L_1)^2 + (z - z^*)^2 - r_{\min}^2 = 0, \\ x \in [0,5L_1; 0,5L_1 + r_{\min}].$$

и соответствующие методы формирования управлений, описанные в Разд. 8.1.

Если значения требуемых углов места  $\bar{\lambda}_2^{(0)}$  и  $\bar{\lambda}_2^{(1)}$ , определенные с помощью выражений (8.5.10), (8.5.12) и (8.5.16), не будут лежать в интервале  $[0, \lambda_2]$  (см. Рис. 8.45), то осуществляется соответствующее механическое или электронное управление диаграммой направленности антенн ЛБ и ПБ аппаратуры РЭП в вертикальной плоскости.

При отсутствии такой возможности полет БЛА-РЭБ на участках его траектории, которые описываются уравнениями  $\Phi_1(x, z) = 0$  и  $\Phi_3(x, z) = 0$ , осуществляется с углами крена:

$$\gamma_{\text{зад}}^{(0)} = \bar{\lambda}_2^{(0)} - \lambda_2; \quad \gamma_{\text{зад}}^{(1)} = \bar{\lambda}_2^{(1)} - \lambda_2,$$

которые используются для формирования соответствующих векторов управлений  $\Delta_1(t)$  и  $\Delta_3(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ . Здесь  $(T - t_0)$  – общее время барражирования БЛА-РЭБ.

При использовании ББЛА для поражения наземных целей противника необходимо комплексное применение БАЛЦ, БЛА-РМ, БЛА-PTR, БЛА-РЭБ, ударных БЛА и, как было отмечено выше, вертолетов (штурмовиков) АА.

Один из вариантов тактики такого применения приведен на Рис. 8.48.

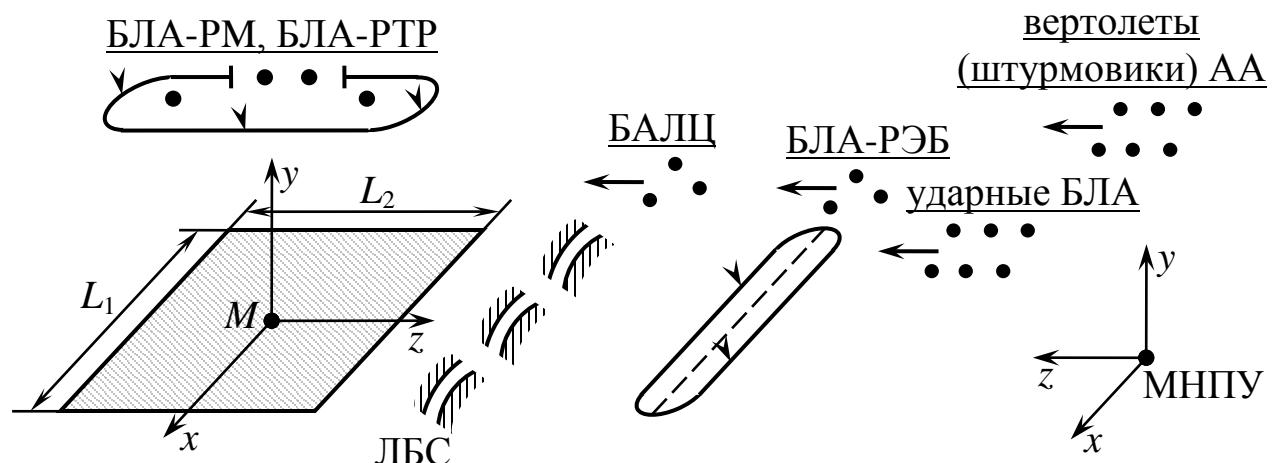


Рис. 8.48

Согласно этой схеме, группа БЛА-РМ и БЛА-РЭБ предварительно располагается над районом проведения операции, выявляя средства ПВО противника. При этом до и во время применения группы БАЛЦ, группа БЛА-РЭБ, оснащенная аппаратурой РЭП, действуя помехами в ППС (Вариант А), следует перед группой ударных БЛА.

После атаки ударных БЛА по наземным целям БЛА-РМ фиксируют степень их поражения с передачей соответствующих данных на МНПУ ИнБАК.

Информация о не уничтоженных целях передается на командный пункт подразделения АА, осуществляющего «зачистку» района атак ударных БЛА. При подходе к этому району группы вертолетов (штурмовиков) АА начинает РЭП оставшихся средств ПВО противника барражирующий БЛА-РЭБ, использующий Вариант Б, который за счет угла места  $\lambda_1 > 0$  защищает их и от атак его истребителей.

Проконтролировав результаты нанесения ударов этой группой, оставшиеся БЛА-РМ возвращаются в район их приземления. Отметим, что управление группировкой применяемых БЛА осуществляется в рамках мобильной распределенной АСУ с использованием требуемого числа МНПУ соответствующих БАК [55].

При реализации третьего способа применения БЛА-РЭБ они включаются в состав  $i$ -й группы БАЛЦ с численностью  $m_i$ ,  $i = \{1; 6\}$ , осуществляющих защиту группы пилотируемых ЛА от средств ПВО и истребителей противника (см. Рис. 8.38).

В этом случае в состав 1 и 4 групп прикрытия включаются БЛА-РЭБ с аппаратурой РЭП, работающей соответственно в ППС и ЗПС варианта А, представленного на Рис. 8.43. Во 2 и 3 группах прикрытия используются БЛА-РЭБ с вариантом А в ППС. В 5 группу включаются БЛА-РЭБ, работающие в варианте Б по ПБ, а в группу 6 – по ЛБ.

### **8.5.3. Адаптивное управление БЛА-истребителем при перехвате воздушной цели**

Перспективным видом ББЛА являются БЛА, предназначенные для борьбы с ВЦ [45].

При решении задачи управления БЛА-истребителями (БЛА-И) предполагается, что они будут в основном использоваться для перехвата и уничтожения на удаленных рубежах ударных, разведывательных и других видов БЛА противника. Для обнаружения и сопровождения воздушных целей в состав целевого оборудования БЛА-И включаются бортовые РЛС [114], осуществляющие определение текущих значений скорости цели и расстояния до нее в каждый момент времени. Для формирования программного управления БЛА-И предлагается использовать кинематические уравнения метода параллельного сближения с ВЦ в горизонтальной плоскости [7, 52]. Найденная из этих уравнений зависимость  $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$  используется для определения с помощью выражений (5.2.21)-(5.2.23) и (5.5.8)-(5.5.23) вектора управления  $\Delta(t)$ , применяемого для перехвата ВЦ БЛА-И самолетной схемы. Особенностью этой задачи является формирование вектора  $\Delta(t)$  в реальном масштабе времени на перспективном бортовом вычислительном комплексе (БВК) БЛА-И, структура которого приведена в Главе 10.

Пусть ВЦ осуществляет полет со скоростью  $V_{\text{ц}} = V_{\text{ц}}(t)$  в горизонтальной плоскости на высоте  $h$ . На эту высоту в точку с координатами  $(x_0, z_0)$  в момент времени  $t_0$  выведен БЛА-И, целевой задачей которого является быстрейший перехват и уничтожение ВЦ его бортовым вооружением. Для выполнения этого требования будем считать, что перехват ВЦ осуществляется со скоростью  $V = V_{\text{зад}}(t) = V_{\text{max}}$ ,  $t \geq t_0$ .

Требуется сформировать реализуемый в реальном времени (РВ) вектор управления  $\Delta(t)$ ,  $t \geq t_0$ , обеспечивающий перехват

ВЦ с использованием бортовых средств измерений и обработки информации БЛА-И.

Будем считать, что в качестве последних используются БРЛС, САУ полетом и БВК БЛА-И.

На Рис. 8.49 приведена расчетная схема процесса перехвата ВЦ.

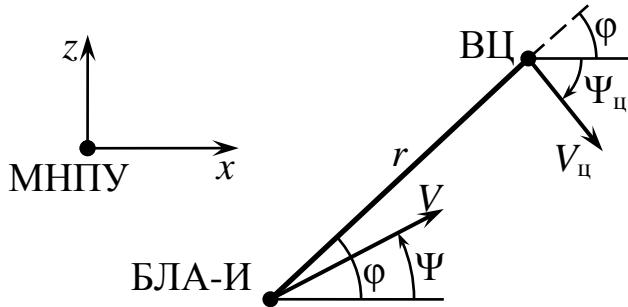


Рис. 8.49

Кинематические уравнения относительного движения БЛА-И и ВЦ имеют вид [7, 52]:

$$\dot{r} = V_{\text{ц}} \cos(\varphi - \Psi_{\text{ц}}) - V \cos(\varphi - \Psi); \quad (8.5.17)$$

$$r\dot{\varphi} = -V_{\text{ц}} \sin(\varphi - \Psi_{\text{ц}}) + V \sin(\varphi - \Psi_{\text{ц}}). \quad (8.5.18)$$

Здесь  $r = r(t)$  – дальность до ВЦ;  $\varphi = \varphi(t)$  – угол ее азимута (наклона линии визирования цели);  $\Psi_{\text{ц}} = \Psi_{\text{ц}}(t)$  и  $\Psi = \Psi(t)$  – углы поворота траекторий ВЦ и БЛА-И в момент времени  $t \in [t_0, t_k]$ .

Условие окончания процесса наведения в момент времени  $t_k$  представим как:

$$r(t_k) \leq r_{\text{ПО}}, \quad (8.5.19)$$

где  $r_{\text{ПО}}$  – расстояние эффективного применения бортового оружия БЛА-И.

В работе [16] предлагается зависимость:

$$p(t) = \frac{\dot{\varphi}(t) r^2(t)}{\sqrt{\dot{r}^2(t) + \dot{\varphi}^2(t) r^2(t)}}, \quad (8.5.20)$$

определяющая по результатам интегрирования системы (8.5.17), (8.5.18) точность самонаведения в виде текущего значения промаха  $p$  в момент времени  $t$ .

При наведении БЛА-И на ВЦ из известных методов [2, 7, 15] будем использовать метод наведения в мгновенную точку их встречи (метод параллельного сближения). Данный метод характерен тем, что угол визирования ВЦ в любой момент времени удовлетворяет условию [52]:

$$\phi(t) = \phi_0 = \text{const.}$$

Отсюда следует, что  $\dot{\phi}(t) = 0$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ , и вследствие формулы (8.5.20) текущий промах БЛА-И при перехвате ВЦ будет равен нулю.

Используя такое значение  $\dot{\phi}(t)$ , из уравнения (8.5.18) получим равенство вида:

$$V \sin(\phi - \Psi) = V_{\Pi} \sin(\phi - \Psi_{\Pi}).$$

Откуда требуемый закон изменения угла  $\Psi$  при полете БЛА-И может быть записан как:

$$\Psi_{\text{тр}}(t) = \phi - \arcsin \left[ \frac{V_{\Pi}}{V} \sin(\phi - \Psi_{\Pi}) \right]. \quad (8.5.21)$$

Требуемая угловая скорость поворота траектории БЛА имеет вид:

$$\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) = \frac{V_{\Pi}(t) \dot{\Psi}_{\Pi}(t) \cos(\phi - \Psi_{\Pi}(t)) - \dot{V}_{\Pi}(t) \sin(\phi - \Psi_{\Pi}(t))}{\sqrt{V_{\max}^2 - V_{\Pi}(t) \sin^2(\phi - \Psi_{\Pi}(t))}}. \quad (8.5.22)$$

Из этого выражения следует необходимое условие того, что перехват БЛА-И маневрирующей ВЦ возможен:

$$V_{\max} > V_{\Pi}(t) \sin(\phi - \Psi_{\Pi}(t)). \quad (8.5.23)$$

Будем считать, что наземные РЛС обнаружения и сопровождения воздушных целей передали на МНПУ БЛА-И по конкретной ВЦ координаты  $(x_{\Pi 0}, h, z_{\Pi 0})$  и результаты ее сопровождения в виде временных рядов значений  $V_{\Pi}(t)$ ,  $\dot{V}_{\Pi}(t)$ ,  $\dot{\Psi}_{\Pi}(t)$ ,

$\varphi(t)$ ,  $r(t)$  с момента обнаружения ВЦ до момента времени  $t_0$  включительно.

Все эти данные передаются в момент времени  $t_0$  по радиоканалу на борт БЛА-И и запоминаются в его БВК.

Из Рис.8.49 следует, что значение угла визирования ВЦ определяется по формуле:

$$\varphi_0 = \arctg \left( \frac{z_{\text{ц}0} - z_0}{x_{\text{ц}0} - x_0} \right).$$

Для обеспечения наведения и формирования управления БЛА-И в РВ введем временную сетку со значениями:

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (8.5.24)$$

где  $\Delta t$  – шаг сетки, значение которого отражает затраты времени БРЛС на выполнение радиолокационных измерений (РЛИ) текущих характеристик ВЦ, их обработку в БВК, расчет управляющих воздействий и их реализацию исполнительными механизмами САУ полетом БЛА-И.

Будем считать, что с помощью прямых (непосредственных) РЛИ в каждый момент времени  $t = t_i$  определены и переданы в БВК значения  $r(t_i)$ ,  $\varphi(t_i)$ ,  $V_{\text{ц}}(t_i)$ ,  $\dot{V}_{\text{ц}}(t_i)$ . Координаты БЛА-И  $x(t_i)$ ,  $z(t_i)$  поступают в БВК от САУ полетом БЛА-И,  $i = (\overline{1, m})$ .

Для определения остальных характеристик процесса наведения будем использовать результаты косвенных РЛИ, полученных путем соответствующей обработки результатов прямых измерений.

Координаты ВЦ в момент времени  $t_i$  определяются согласно Рис. 8.49 как:

$$\begin{aligned} x_{\text{ц}}(t_i) &= x(t_i) + r(t_i) \cos \varphi(t_i); \\ z_{\text{ц}}(t_i) &= z(t_i) + r(t_i) \sin \varphi(t_i), \quad i = (\overline{1, m}). \end{aligned}$$

Функция  $\Psi_{\text{ц}}(t)$  в эти моменты времени приближенно вычисляется по следующей формуле:

$$\Psi_{\Pi}(t_i) \equiv \arctg \left( \frac{z_{\Pi}(t_i) - z_{\Pi}(t_{i-1})}{x_{\Pi}(t_i) - x_{\Pi}(t_{i-1})} \right), \quad i = (\overline{1, m}). \quad (8.5.25)$$

Угловую скорость  $\dot{\Psi}_{\Pi}(t)$  определим численным дифференцированием по формуле вида:

$$\dot{\Psi}_{\Pi}(t_i) = \frac{\Psi_{\Pi}(t_i) - \Psi_{\Pi}(t_{i-1})}{\Delta t}, \quad i = (\overline{1, m}). \quad (8.5.26)$$

Отметим, что для повышения точности определения этих величин можно использовать другие более сложные формулы численного дифференцирования [17, 25].

Управление БЛА-И в РВ будем формировать в соответствие с сеткой (8.5.24) по следующему правилу: «В текущий момент времени  $t_i$  формируется прогнозное значение функции (8.5.22) на момент времени  $t_{i+1}$ . Далее в течение времени  $\Delta t$  определяются значения векторов  $u(t_{i+1})$  и  $\Delta(t_{i+1})$  и выдаются команды исполнительным механизмам САУ полетом БЛА-И для реализации последнего в момент времени  $t_{i+1}$ ».

Прогнозное значение  $\dot{\Psi}_{\Pi}(t_{i+1})$  предлагается формировать путем экстраполяции в момент времени  $t_{i+1}$  значений функций, входящих в правую часть выражения (8.5.25), и использования формулы (8.5.26). Отметим, что прогнозирование значений фазовых координат БЛА по результатам их измерений было использовано в работе [99].

Для исключения влияния ошибок прямых и косвенных РЛИ предлагается при экстраполяции использовать к соответствующим временным рядам методы экспоненциального сглаживания или скользящего среднего [18], которые применительно к произвольной функции  $W(t)$  в общем виде представляются как:

$$W(t_{i+1}) = \sum_{j=0}^n a_j W(t_{i-j}),$$

где  $a_j$  – коэффициенты соответствующего метода;  $n$  – число членов временного ряда, используемых для экстраполяции (прогнозирования) значений функции  $W(t)$ .

В нашем случае в качестве такой функции выступают такие характеристики процесса наведения, как  $V_{\text{ц}}(t)$ ,  $\dot{V}_{\text{ц}}(t)$ ,  $\Psi_{\text{ц}}(t)$ ,  $\dot{\Psi}_{\text{ц}}(t)$ .

После вычисления в БВК на их основе значения  $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t_{i+1})$  определяются значения управлений  $P(t_{i+1})$ ,  $\alpha(t_{i+1})$ ,  $\gamma(t_{i+1})$ , с использованием которых вычисляются и передаются в САУ полетом БЛА-И непосредственные управляющие воздействия  $\bar{n}(t_{i+1})$ ,  $\delta_{\text{в}}(t_{i+1})$ ,  $\delta_{\text{н}}(t_{i+1})$ ,  $\delta_{\text{э}}(t_{i+1})$ ,  $i = \overline{0, K-1}$ .

Процесс адаптивного управления перехватом ВЦ продолжается до выполнения условия (8.5.19).

Предложенный метод при его практической реализации должен уточняться с учетом конкретного состава измеряемых БРЛС характеристик ВЦ (расстояние, углы, угловые скорости, угловые ускорения), которые в БВК БЛА-И должны преобразовываться в приведенные выше соотношения.

#### **8.5.4. Управление вспомогательными боевыми БЛА**

Самолеты и вертолеты АА на поле боя, кроме поражения объектов противника, решают ряд вспомогательных задач, включающих в себя [103]:

1. Минирование местности;
2. Постановка дымовых и аэрозольных завес;
3. Создание проходов в минных полях взрывным способом.

Первая задача решается в рамках боевого цикла «разведка – задержка – целеуказание – поражение», применяемого для уничтожения выдвигающихся и наступающих мотопехотных, танковых и самоходно-артиллерийских подразделений противника. Задержка этих подразделений состоит в ограничении их подвижности путем оперативной установки блокирующих, сковывающих, заградительных и комбинированных минных

полей. При остановке колонн противника для разминирования полей выполняется более точное целеуказание и поражение его боевой техники.

Постановка завес (задача 2) имеет целью защиту своих войск от применения противником противотанковых средств и высокоточного оружия с лазерной и тепловизионной системами наведения.

Третья задача решается путем сброса фугасных бомб залпом или серией в указанных участках местности (коридорах прохода своих подразделений).

Для сокращения потерь АА при решении этих задач и ее применения для выполнения основных (боевых) задач предлагаются использовать специальный вид ББЛА – *вспомогательные БЛА* (ВБЛА), которые придаются соответствующим подразделениям сухопутных войск. В связи с тем, что АА решает отмеченные выше задачи в основном по вызову последних, такая организация применения ВБЛА позволит, на наш взгляд, повысить эффективность боевых операций таких войск.

По классификации БЛА, приведенной в Главе 1, ВБЛА можно отнести к БЛА малой дальности. Целевая нагрузка таких БЛА должна включать в себя противотанковые и противопехотные мины, контейнеры с химическими веществами для постановки завес, кассетные авиабомбы и авиабомбы фугасного действия.

Для оперативной смены такой нагрузки предлагается использовать ее в виде подвешиваемых элементов ВБЛА.

При программировании полетов ВБЛА применяются соответствующие методы формирования управлений различными видами БЛА, рассмотренные в данной главе.

В частности, при программировании полетов группы ВБЛА для установки минных полей можно использовать подход к вы-

бору управления БЛА-РМ при контроле линейных объектов (см Рис. 8.8,б).

Пусть с использованием  $m$  ВБЛА требуется блокировать группировку противника в плоской области с размерами  $L_1 \times L_2$  км. Ширина устанавливаемого минного поля должна быть равна  $b$  км (Рис. 8.50). Для формирования требуемой траектории полета «ведущего» ВБЛА группы используем совокупность ППМ, представленных на этом рисунке.

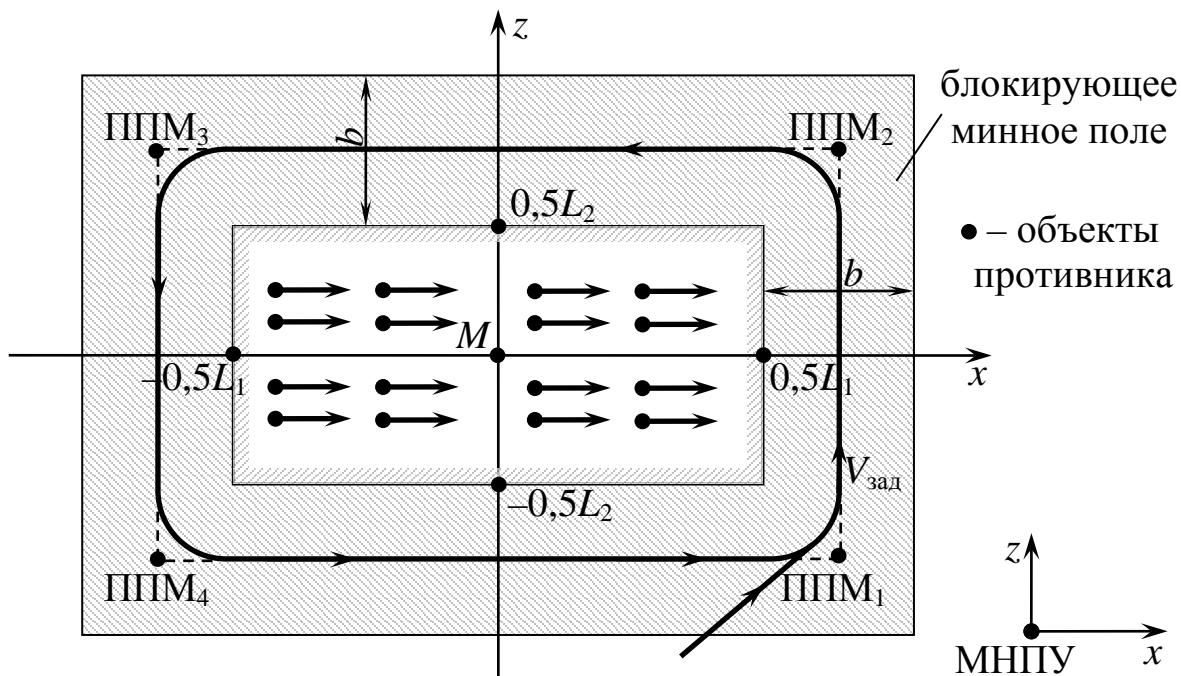


Рис. 8.50

Координаты применяемых ППМ такого ВБЛА будут равны:

$$(x_1, z_1) = (0,5L_1 + 0,5b; -0,5L_2 - 0,5b);$$

$$(x_2, z_2) = (0,5L_1 + 0,5b; 0,5L_2 + 0,5b);$$

$$(x_3, z_3) = (-0,5L_1 - 0,5b; 0,5L_2 + 0,5b);$$

$$(x_4, z_4) = (-0,5L_1 - 0,5b; -0,5L_2 - 0,5b).$$

С использованием этих координат методами, описанными в Разд. 8.1 и Разд. 8.3.1, формируется вектор  $\Delta_1(t)$  управления «ведущим» ВБЛА группы. Для определения векторов управления остальными ВБЛА группы выбирается вид строя группы, задается, исходя из значения  $b$ , расстояние  $l_z$  между ними и с

помощью методов, представленных в Разд. 8.4.3, определяются векторы управлений  $\Delta_k(t)$ ,  $k = \overline{2, m}$ , остальных ВБЛА группы.

Аналогичный подход с использованием совокупности ППМ<sub>1</sub> и ППМ<sub>2</sub> используется для программирования полетов ВБЛА при установке заградительного минного поля.

После установки с помощью ВБЛА соответствующего вида минного поля и задержке колонны противника ее уничтожение может быть проведено по схеме, представленной на Рис. 8.48.

Последнее означает, что ВБЛА должны наряду с БЛА-РМ, БЛА-PTR, БАЛЦ, БЛА-РЭБ использоваться в группировках беспилотных и пилотируемых ЛА.

При решении задачи 2 программирование полета ВБЛА осуществляется с помощью расчетной схемы, приведенной на Рис. 8.51. Здесь также для задания маршрута движения применяемого ВБЛА и направления устанавливаемой им дымовой или аэрозольной завесы используются ППМ<sub>1</sub> и ППМ<sub>2</sub>. Кроме того, на маршруте полета ВБЛА задается точка с координатами  $(x^*, z^*)$ , в которой производится выброс из его бортового контейнера соответствующего химического вещества. Заметим, что при выборе значений координат применяемых ППМ необходимо учитывать с помощью подхода, описанного в Главе 4, направление и скорость действующего ветра  $W$ . При необходимости постановки совокупности завес аналогичные описания маршрутов используются для каждого применяемого ВБЛА.

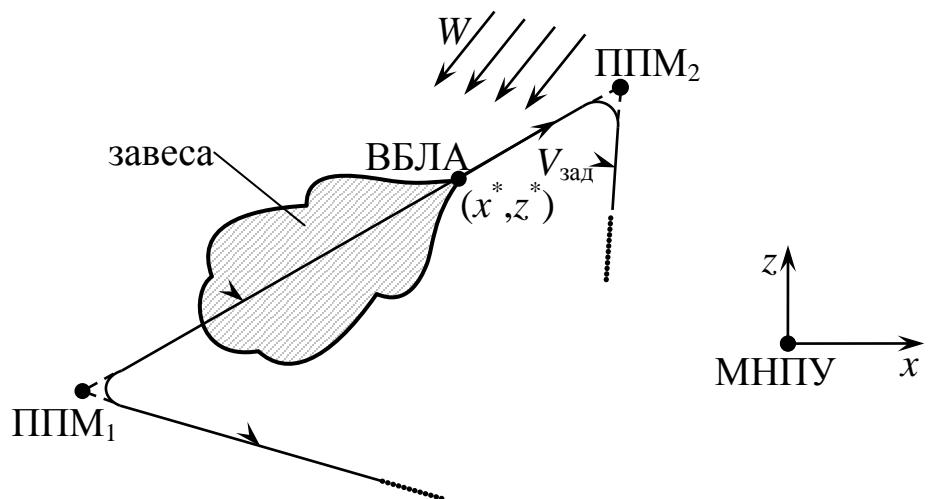


Рис. 8.51

Для программирования полетов ВБЛА при проведении разминирования взрывным способом (задача 3) используется расчетная схема, представленная на Рис. 8.52.

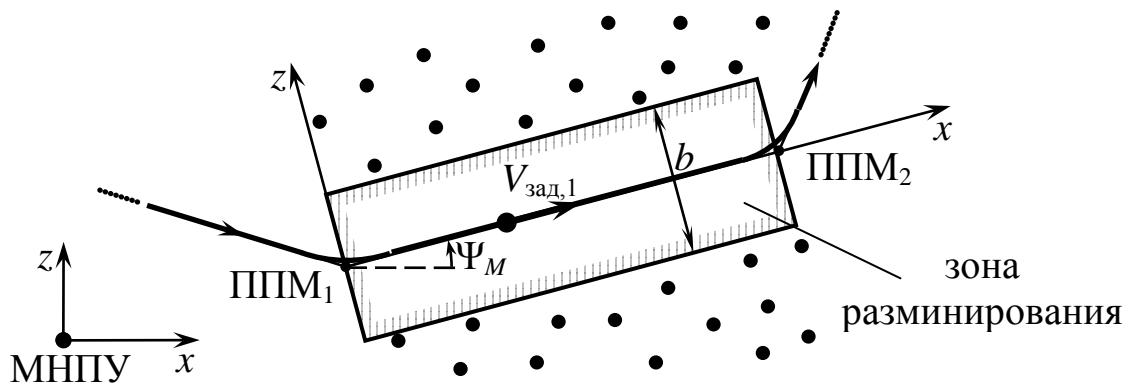


Рис. 8.52

На этом рисунке точки ППМ<sub>1</sub> и ППМ<sub>2</sub> определяют маршрут движения «ведущего» ВБЛА группы разминирования, *b* – ширина требуемого коридора прохода соответствующего подразделения своих войск. Здесь также используется маневренная СК с началом в точке размещения ППМ<sub>1</sub>. Для сокращения затрат времени на проведение разминирования необходимо одновременно использовать группу ВБЛА. Программирование полета такой группы выполняется с использованием рассмотренных выше подходов к формированию группового управления движением БЛА в заданном строю (см. Разд. 8.4.3).

На ВБЛА может быть возложено решение перспективной задачи проведения РЭБ с помощью забрасываемых в расположение противника дистанционно-управляемых малогабаритных образцов аппаратуры РЭП (АРЭП). При решении этой задачи используются методы оптимального покрытия [93] заданного участка территории минимальным количеством кругов радиуса  $D_{РЭП}$  действия АРЭП.

Пусть задана некоторая область  $S$  на территории противника, на которой должны быть размещены забрасываемые с помощью ВБЛА образцы АРЭП. Основным требованием к размещению этих образцов является обеспечение РЭП средств противника, расположенных в любой точке области  $S$ , минимальным числом образцов АРЭП.

При определении значений координат размещения АРЭП в произвольной области  $S$ , заданной ее электронной картой местности, предлагается использовать человеко-машинный алгоритм, изложенный в работе [81]. На Рис. 8.53 представлен вариант оптимального размещения  $N$  образцов АРЭП в области  $S$ .

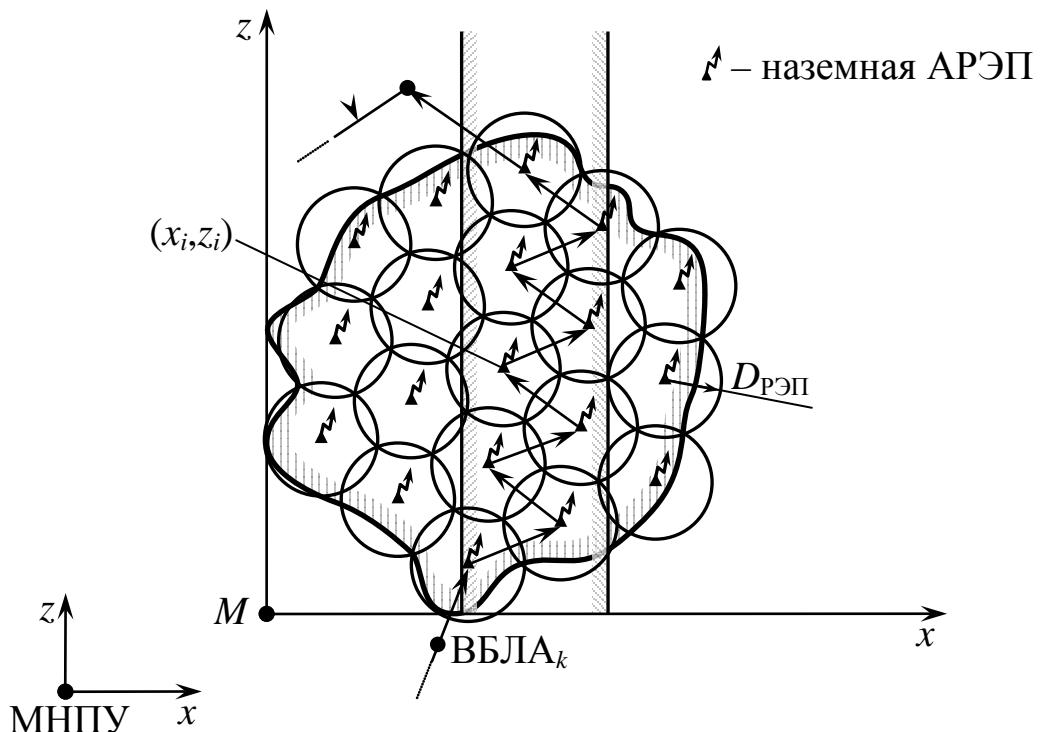


Рис. 8.53

Для размещения этих образцов в точках с координатами  $(x_i, z_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , с максимальной точностью и с минимальными затратами времени на проведение операции по их установке предлагается использовать группу  $m$  ВБЛА ВС, осуществляющих сброс АРЭП в режиме зависания над каждой из таких точек, лежащей на их маршрутах.

При программировании полетов ВБЛА необходимо выделить в области  $S$  минимальное число полос, параллельных оси  $Mz$ , в каждой из которых размещается маршрут движения одного ВБЛА.

Для каждого  $k$ -го ВБЛА,  $k = \overline{1, m}$ , координаты  $(x_i, z_i)$ ,  $i \in \overline{1, N}$ , принадлежащие его полосе выступают в качестве координат поворотных пунктов его маршрута (см. Рис. 8.53). Формирование векторов программного управления ВБЛА осуществляется с использованием методов, описанных в Разд. 8.4.3.

Для обеспечения скрытности установки АРЭП предлагается проводить полеты ВБЛА в ночное время суток. Установленные с их помощью образцы АРЭП приводятся в действие с помощью радиокоманд или часовых механизмов перед началом наземной или воздушной операции в области  $S$ .

Методы программирования полетов ВБЛА при постановке дымовых и аэрозольных завес могут быть применены для формирования управления БЛА сельскохозяйственного назначения, выполняющих опыление полей требуемыми химическими веществами. Методы управления ВБЛА при разминировании можно использовать для программирования полетов гражданских БЛА при сбросе необходимых грузов в заданные точки. Отсюда можно сделать вывод, что введенные в рассмотрение вспомогательные ББЛА могут использоваться в качестве БЛА двойного назначения.

Отметим, что для эффективного использования беспилотной авиационной техники в различных боевых операциях должна быть разработана теория *комплексного применения ББЛА*.

В заключение главы отметим, что применение на практике изложенных методов программного управления различными видами существующих и перспективных БЛА подразумевает обязательное использование соответствующих численных методов, приведенных в Главе 3.

## **Глава 9. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ БЛА**

Задачи оптимального управления различными видами ЛА начали активно формироваться и решаться в отечественной научно-технической литературе в 60-70-х годах XX века. Основой методов решения таких задач, которые касались в основном ЛА ракетной и космической техники, являлись математические методы, приведенные в Разд. 2.4 и Разд. 2.5.

В работах [4, 5] рассматривались только теоретические подходы к оптимизации управления БЛА, включая методы, представленные в этих разделах.

К настоящему времени можно констатировать тот факт, что достаточно разработанные методы оптимального управления ЛА не получили широкого практического применения.

На наш взгляд основными причинами этого являются слабое распространение в 70-80 г.г. прошлого века средств вычислительной техники на стадии эксплуатации ЛА и отсутствие соответствующих знаний по применению методов оптимального управления ЛА у эксплуатирующего их персонала.

Как было отмечено в Главе 1, современные БАК оснащаются достаточно мощными ПЭВМ и серверами. Кроме этого в состав персонала БАК и БАЭ предлагается ввести математиков - системных программистов, владеющих такими методами. Все это создает серьезные предпосылки для активного использования методов оптимального управления в практике эксплуатации БЛА различного назначения.

Заметим, что для широкого практического применения методов оптимального управления в рамках прикладной теории управления БЛА должен быть разработан достаточно подробный раздел, посвященный их применению при эксплуатации БЛА самолетных и вертолетных схем. Использование таких ме-

тодов позволит минимизировать затраты топлива БЛА, время решения целевых задач, вероятность их уничтожения противником, а также максимизировать область действия целевой аппаратуры БЛА, его скороподъемность и др.

В данной главе рассматриваются некоторые задачи формирования оптимального управления наиболее распространенного в отечественной и мировой практике БЛА самолетной схемы. Для уменьшения трудоемкости их решения предлагается с использованием методов, представленных в Разд. 2.4 и Разд. 2.5, первоначально определять оптимальные траектории движения БЛА или оптимальные законы изменения их кинематических характеристик  $\theta_{\text{тр}}^0(t)$  или (и)  $\Psi_{\text{тр}}^0(t)$ . В дальнейшем эти результаты используются для формирования оптимальных векторов  $u^0(t)$  косвенного управления БЛА методами, описанными в Глазах 5 и 8.

Кроме этого в главе рассмотрены задачи, в которых методами Разд. 2.5 осуществляется непосредственное определение вектора  $u^0(t)$  с использованием моделей движения БЛА, приведенных в Разд. 5.1 и Разд. 5.2.

Кроме отмеченных выше методов оптимизации управления БЛА в главе предлагается использовать методы классического и параметрического нелинейного программирования, основы которых изложены в Разд. 2.2. Первые применяются для решения задач оптимизации установившихся режимов полета БЛА, которые полностью отсутствуют в существующей литературе, а вторые – для непосредственного вычисления вектора  $u^0(t)$  из динамических уравнений движения БЛА.

Векторы  $\Delta^0(t)$  оптимального прямого управления БЛА определяются во всех рассмотренных в данной главе задачах по сформированным векторам  $u^0(t)$  и соответствующим зависимостям  $V_{\text{зад}}^0(t)$ ,  $\theta_{\text{тр}}^0(t)$  и  $\Psi_{\text{тр}}^0(t)$  методами, приведенными в Разд. 5.5.

## 9.1. Управление противозенитными маневрами БЛА

Противозенитные маневры являются важными элементами траектории полета АЛЦ и БЛА.

Как было отмечено в Разд. 8.4.2, такой маневр характеризуется резкими изменениями высоты полета БЛА и углов ориентации его траектории. При плоских траекториях движения БЛА противозенитный маневр заключается в резком изменении высоты или направления его полета. При выполнении этого маневра в вертикальной плоскости движения БЛА осуществляется интенсивное увеличение угла наклона траектории  $\theta$ .

Рассмотрим простейшую вариационную задачу формирования оптимальной траектории  $y(x)$  противозенитного маневра БЛА на интервале дальностей  $[x_1, x_2]$ , удовлетворяющей условиям вида:

$$y(x_1) = y_1; \quad y'(x_1) = y'_1. \quad (9.1.1)$$

Выполнение этих условий обеспечивает «гладкий» переход к рассматриваемому маневру от маневра, выполненного БЛА на интервале дальностей  $[x_0, x_1]$  (Рис. 9.1).

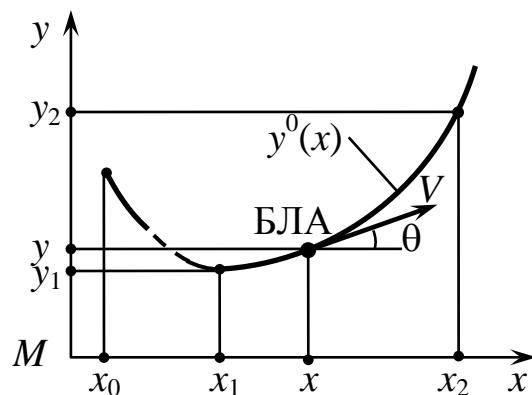


Рис. 9.1

Будем считать, что в противозенитном маневре текущее значение угла  $\theta$  в каждый момент времени должно быть максимальным образом пропорционально значению  $y$  высоты полета БЛА.

Известно, что значение угла  $\theta$  в некоторой точке  $x$  однозначно определяется значением производной  $y'$  в этой точке.

Тогда функционал вида (2.4.4) решаемой задачи можно представить выражением вида:

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} (y'(x) - ay(x))^2 dx \rightarrow \min_{y(x)}, \quad (9.1.2)$$

где  $a \geq 1$  – коэффициент пропорциональности, определяющий «крутизну» формируемой траектории.

Подынтегральное выражение этого функционала конкретизируется как:

$$F(y, y') = (y' - ay)^2.$$

Для этой функции частные производные (2.4.9) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} F_y &= -2a(y' - ay) = -2ay' + 2a^2y; \\ F_{y'} &= 2(y' - ay); \end{aligned}$$

С учетом этого уравнение Эйлера (2.4.7) конкретизируется как:

$$-2ay' + 2a^2y + 2ay' - 2y'' = 0.$$

Приводя подобные члены, получаем линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка вида (2.1.26):

$$y'' - a^2y = 0. \quad (9.1.3)$$

Характеристическое уравнение (2.1.27), соответствующее уравнению (9.1.3), записывается как:

$$k^2 - a^2 = 0,$$

Решая это уравнение, получим следующие значения его корней:

$$k_1 = -a; \quad k_2 = a.$$

В соответствии с ними общее решение уравнения (9.1.2) в форме (2.1.28) примет вид:

$$y(x) = C_1 e^{-ax} + C_2 e^{ax}. \quad (9.1.4)$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определим с учетом условий (9.1.1) из решения системы уравнений вида:

$$\begin{aligned} C_1 e^{-ax_1} + C_2 e^{ax_1} &= y_1; \\ -C_1 e^{-ax_1} + C_2 e^{ax_1} &= \frac{y'_1}{a}. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получим:

$$C_1 = \frac{(ay_1 - y'_1)e^{ax_1}}{2a}; \quad C_2 = \frac{(ay_1 - y'_1)e^{-ax_1}}{2a}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (9.1.4), получаем уравнение оптимальной траектории противозенитного маневра БЛА:

$$y^0(x) = \frac{ay_1 - y'_1}{2a} \left[ e^{-a(x-x_1)} + e^{a(x-x_1)} \right]. \quad (9.1.5)$$

Для определения вектора  $u^0(t) = (P^0(t), \alpha^0(t))$  косвенного управления БЛА, обеспечивающего его движение по этой траектории при  $f(x) = y^0(x)$ , используются выражения (8.1.17), (8.1.18) и система уравнений (5.2.22), (5.2.23). При этом начальные условия для интегрирования системы уравнений (8.1.18) в соответствие с первым из выражений (9.1.1) имеют вид:

$$x(t_0) = x_1; \quad y(t_0) = y_1.$$

Аналогичную приведенной выше вариационную задачу можно использовать для определения траектории  $z^0(x)$  противозенитного маневра БЛА при его полете в горизонтальной плоскости на высоте  $h$ .

Если потребовать, чтобы угол  $\Psi$  поворота траектории БЛА был максимальным образом пропорционален координате  $z$ , то вариационная задача примет следующий вид:

$$\begin{aligned} J[z(x)] &= \int_{x_1}^{x_2} (z'(x) - bz(x))^2 dx \rightarrow \min_{z(x)}; \\ z(x_1) &= z_1; \quad z'(x_1) = z'_1, \end{aligned} \quad (9.1.6)$$

где  $b > 1$  – заданное значение коэффициента пропорциональности.

Решение этой задачи по аналогии с выражением (9.1.5) записывается как:

$$z^0(x) = \frac{bz_1 - z'_1}{2b} \left[ e^{-b(x-x_1)} + e^{b(x-x_1)} \right]. \quad (9.1.7)$$

Определение вектора  $u^0(t) = (P^0(t), \alpha^0(t), \gamma^0(t))$  косвенного управления БЛА, обеспечивающего его движение по траектории  $f(x) = z^0(x)$ , производится с использованием соответствующих выражений из Разд. 8.1 и соотношений (5.2.21)-(5.2.23).

Примененное выше предположение о пропорциональной зависимости производной фазовой координаты от ее текущего значения используем при формировании требуемого закона (8.2.4) изменения высоты полета БЛА при его пространственном движении.

В этом случае вариационная задача будет иметь вид:

$$J[y_{\text{тр}}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} (\dot{y}_{\text{тр}}(t) - cy_{\text{тр}}(t))^2 dt \rightarrow \min_{y_{\text{тр}}(x)}; \quad (9.1.8)$$

$$y_{\text{тр}}(t_0) = y_0; \quad y_{\text{тр}}(t_k) = y_k. \quad (9.1.9)$$

где  $c > 1$  – коэффициент пропорциональности:  $[y_0, y_k]$  – интервал изменения высоты полета БЛА.

Проводя аналогичные выкладки, получаем следующее уравнение Эйлера:

$$\ddot{y}_{\text{тр}} - c^2 y_{\text{тр}} = 0.$$

Общее решение этого уравнения записывается как:

$$y_{\text{тр}}(t) = C_1 e^{-ct} + C_2 e^{ct}. \quad (9.1.10)$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  вычисляются с использованием краевых условий (9.1.9) из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 e^{-ct_0} + C_2 e^{ct_0} &= y_0; \\ C_1 e^{-ct_k} + C_2 e^{ct_k} &= y_k. \end{aligned}$$

Решая эту систему линейных уравнений, получим:

$$C_1 = \frac{y_0 e^{ct_k} - y_k e^{ct_0}}{e^{c(t_k-t_0)} - e^{-c(t_k-t_0)}}; \quad C_2 = \frac{y_k e^{-ct_0} - y_0 e^{-ct_k}}{e^{c(t_k-t_0)} - e^{-c(t_k-t_0)}}.$$

Подставляя правые части этих формул в выражение (9.1.10), запишем окончательный вид решения задачи (9.1.8), (9.1.9):

$$y_{\text{tp}}^0(t) = \frac{\left(y_0 e^{ct_k} - y_k e^{ct_0}\right) e^{-ct} + \left(y_k e^{-ct_0} - y_0 e^{-ct_k}\right)}{e^{c(t_k - e_0)} - e^{-c(t_k - e_0)}}. \quad (9.1.11)$$

Оптимальное управление  $u^0(t) = (P^0(t), \alpha^0(t), \gamma^0(t))$  при выполнении БЛА пространственного противозенитного маневра вычисляется с использованием зависимостей (8.2.3), (9.1.11), (8.2.5), (8.2.7), (8.2.8), (8.2.11), (8.2.12), (8.1.29) и системы уравнений (5.1.54).

## **9.2. Управление полетами БЛА в плоских неодносвязных областях**

Будем называть плоскую область, в которой осуществляется движение БЛА, неодносвязной, если в ней заданы некоторые множества точек, которые должны учитываться при формировании его траектории. Пример такой области на плоскости  $xOy$  представлен на Рис. 2.9.

В практических задачах применения БЛА неодносвязные области в зонах их полетов образуются при наличии некоторых плоских объектов (см. Рис. 8.8,в) и «запрещенных» областей (зоны действия средств ПВО противника, грозовые фронты и т.п.).

### ***9.2.1. Управление полетом БЛА с максимальной площадью охвата ограниченной наземной поверхности***

При практическом решении с помощью соответствующих БЛА задач разведки, мониторинга и радиопротиводействия возникает необходимость построения траекторий их полета, охватывающих часть наземной поверхности, имеющей максимальную площадь, ограниченную заданной кривой  $z = \varphi(x)$ . В качестве последней могут выступать функции, аппроксимирующие границы морской (речной) береговой линии, линии боевого соприкосновения с войсками противника, границы

крупной группировки таких войск и т.п. Отметим, что наличие области поверхности, ограниченной этой кривой, превращает плоскость в неодносвязную область.

В работе [20] эту задачу предлагается решать методами вариационного исчисления, но без конкретизации параметров получаемой экстремали  $z^0(x)$ .

В приложениях данной задачи предполагается, что БЛА-РМ оснащен целевой аппаратурой бокового обзора, а БЛА-РЭБ имеет сектор постановки помех варианта Б, представленного на Рис. 8.43.

Постановка решаемой задачи формулируется следующим образом: «Требуется найти оптимальную траекторию  $z^0(x)$  полета БЛА на высоте  $h = \text{const}$  с заданной скоростью  $V = \text{const}$ , позволяющую ему за фиксированное время  $\tau$  охватить максимальную площадь  $S$ , представленную на Рис. 9.2».

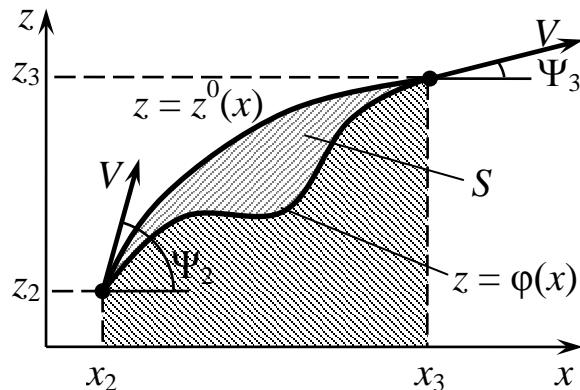


Рис. 9.2

Формальная постановка этой изопериметрической вариационной задачи, которая в общем случае описывается выражениями (2.4.14) и (2.4.34), записывается как:

$$S = \int_{x_2}^{x_3} (z(x) - \varphi(x)) dx \rightarrow \max_{z(x)}; \quad (9.2.1)$$

$$\int_{x_2}^{x_3} \sqrt{1 + (z'(x))^2} dx = \tau V; \quad (9.2.2)$$

$$z(x_2) = z_2; \quad z(x_3) = z_3. \quad (9.2.3)$$

Функционал (9.2.1) описывает площадь фигуры, ограниченной кривыми  $z(x)$  и  $\varphi(x)$  [17].

Условие (9.2.2) отражает требование того, что кривая  $z(x)$  должна иметь заданную длину, равную  $\tau V$ .

Правые части граничных условий (9.2.3) вычисляются как:

$$z_2 = \varphi(x_2); \quad z_3 = \varphi(x_3). \quad (9.2.4)$$

Представим функционал (9.2.1) в виде разности интегралов:

$$S = S_1 - S_2 = \int_{x_2}^{x_3} z(x) dx - \int_{x_2}^{x_3} \varphi(x) dx. \quad (9.2.5)$$

В связи с тем, что функция  $\varphi(x)$  считается заданной, величина  $S_2 = \text{const}$  и не зависит от выбора функции  $z = z(x)$ . Это позволяет в решаемой задаче использовать функционал:

$$S_1 = \int_{x_2}^{x_3} z(x) dx \rightarrow \max_{z(x)}. \quad (9.2.6)$$

В этом случае выражение (2.4.36) с использованием соотношений (9.2.6) и (9.2.2) записывается в следующей форме:

$$\bar{F} = z + \lambda \sqrt{1 + z'^2} \quad (9.2.7)$$

где  $\lambda$  – множитель Лагранжа.

Соответственно вспомогательный функционал (2.4.35) задачи примет вид:

$$\bar{J} = \int_{x_2}^{x_3} \bar{F} dx = \int_{x_2}^{x_3} \left( z + \lambda \sqrt{1 + z'^2} \right) dx, \quad (9.2.8)$$

Уравнение Эйлера для этого функционала:

$$\bar{F}_z - \frac{d}{dx} \bar{F}_{z'} = 0, \quad (9.2.9)$$

формируемое при

$$\bar{F}_z = 1, \quad \bar{F}_{z'} = \frac{\lambda z'}{\sqrt{1 + z'^2}}, \quad (9.2.10)$$

записывается как:

$$(1 + z'^2)(1 - 2\lambda z' z'') + 2\lambda z'^3 = 0.$$

Численное решение этого нелинейного уравнения, учитывавшего краевые условия (9.2.3), методами, описанными в Разд. 3.6, является затруднительным из-за наличия в нем неизвестного значения параметра  $\lambda$ .

Для получения аналитического решения задачи (9.2.8), (9.2.2), (9.2.3) воспользуемся тем, что ее функционал не зависит в явном виде от переменной  $x$ .

Это означает, что уравнение Эйлера (9.2.9) имеет первый интеграл вида [20]:

$$\bar{F} - z' \bar{F}_{z'} = C_1,$$

где  $C_1$  – произвольная постоянная.

С использованием соотношений (9.2.7) и (9.2.10) это выражение конкретизируется как:

$$z + \lambda \sqrt{1 + z'^2} - \frac{\lambda z'^2}{\sqrt{1 + z'^2}} = C_1.$$

Откуда, проводя несложные преобразования, получим:

$$z - C_1 = -\frac{\lambda}{\sqrt{1 + z'^2}}. \quad (9.2.11)$$

Введём в рассмотрение курсовой угол  $\Psi$ , который связан с функцией  $z(x)$  формулой:

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \Psi. \quad (9.2.12)$$

Тогда выражение (9.2.11) примет вид:

$$z - C_1 = -\lambda \cos \Psi. \quad (9.2.13)$$

Выделим из выражения (9.2.12) дифференциал  $dx$  и, дифференцируя выражение (9.2.13) по  $\Psi$ , получим:

$$dx = \frac{dz}{\operatorname{tg} \Psi} = \frac{\lambda \sin \Psi d\Psi}{\operatorname{tg} \Psi} = \lambda \cos \Psi d\Psi. \quad (9.2.14)$$

Интегрируя обе части этого равенства, имеем, что

$$x = \lambda \sin \Psi + C_2. \quad (9.2.15)$$

Объединяя выражения (9.2.13) и (9.2.15), получаем параметрическое представление искомой экстремали  $z^0(x)$ :

$$\begin{aligned} x - C_2 &= \lambda \sin \Psi, \\ z - C_1 &= -\lambda \cos \Psi. \end{aligned} \quad (9.2.16)$$

Суммируя квадраты этих выражений, получим уравнение оптимальной траектории движения БЛА в координатной форме:

$$(x - C_2)^2 + (z - C_1)^2 = \lambda^2. \quad (9.2.17)$$

Из этого выражения следует, что параметры  $C_1$  и  $C_2$  имеют смысл координат  $(x_{ц}, z_{ц})$  центра соответствующей окружности, а  $\lambda$  – ее радиуса. Эти параметры будем определять с использованием условий (9.2.2) и (9.2.3).

Вычислим интеграл (9.2.2) с учетом выражения (9.2.12) и (9.2.14):

$$\int_{x_2}^{x_3} \sqrt{1 + z'^2} dx = \int_{\Psi_2}^{\Psi_3} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Psi} \cdot \lambda \cos \Psi d\Psi = \lambda (\Psi_3 - \Psi_2).$$

Приравнивая полученный результат к правой части равенства (9.2.2), имеем, что множитель Лагранжа  $\lambda$  определяется по формуле:

$$\lambda = \frac{\tau V}{(\Psi_3 - \Psi_2)}.$$

Определим значения  $\Psi_2$  и  $\Psi_3$  угла  $\Psi$ , исходя из следующих требований:

$$\operatorname{tg} \Psi_2 = \varphi'(x_2); \quad \operatorname{tg} \Psi_3 = \varphi'(x_3). \quad (9.2.18)$$

Тогда радиус окружности (9.2.17) может быть вычислен по следующей формуле:

$$\lambda^0 = \frac{\tau V}{|\operatorname{arctg} \varphi'(x_3) - \operatorname{arctg} \varphi'(x_2)|}. \quad (9.2.19)$$

Применение модуля в знаменателе этой формулы объясняется тем, что угол  $\Psi_3$  может быть как больше, так и меньше угла  $\Psi_2$ .

Поделив первое соотношение из состава выражений (9.2.16) на второе соотношение, имеем что

$$\operatorname{tg} \Psi = -\frac{x - C_2}{z - C_1}.$$

Используя это равенство и краевые условия (9.2.3), получаем систему линейных уравнений для нахождения значений  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \Psi_2 (z_2 - C_1) + (x_2 - C_2) &= 0; \\ \operatorname{tg} \Psi_3 (z_3 - C_1) + (x_3 - C_2) &= 0.\end{aligned}$$

С учетом выражений (9.2.4) и (9.2.18) эта система в стандартной форме примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\varphi'(x_2)C_1 + C_2 &= -(x_2 + \varphi(x_2)\varphi'(x_2)); \\ \varphi'(x_3)C_1 + C_2 &= -(x_3 + \varphi(x_3)\varphi'(x_3)).\end{aligned}$$

Решением этой системы являются значения:

$$\begin{aligned}C_1^0 &= \frac{x_3 + \varphi(x_3)\varphi'(x_3) - x_2 - \varphi(x_2)\varphi'(x_2)}{\varphi'(x_2) - \varphi'(x_3)}; \\ C_2^0 &= -x_2 - \varphi(x_2)\varphi'(x_2) - \\ &\quad - \frac{\varphi'(x_2)[x_3 + \varphi(x_3)\varphi'(x_3) - x_2 - \varphi(x_2)\varphi'(x_2)]}{\varphi'(x_2) - \varphi'(x_3)}.\end{aligned}\tag{9.2.20}$$

Соотношения (9.2.19) и (9.2.20), подставленные в уравнение (9.2.17), полностью определяет оптимальную траекторию полета БЛА в форме неявно заданной функции вида (8.1.24).

Вектор оптимального управления  $u^0(t) = (P^0(t), \alpha^0(t), \gamma^0(t))$  при полете БЛА СС по траектории (9.2.17) определяется с использованием выражений (5.2.21)-(5.2.23), при конкретизации которых полагается  $V_{\text{зад}}(t) = V = \text{const}$ ,  $\theta_{\text{тр}}(t) = \dot{\theta}_{\text{тр}}(t) = 0$ , а производная  $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$  вычисляется с применением соотношений (8.1.25)-(8.1.30).

### 9.2.2. Управление БЛА при облете зоны действия средств ПВО противника

Пусть БЛА, выполняя полет в горизонтальной плоскости на высоте  $h$  со скоростью  $V = \text{const}$ , должен за минимальное время  $\tau$  осуществить перелет между точками с координатами  $(x_0, z_0)$  и  $(x_k, z_k)$ .

Оптимальная траектория перелета  $z^0(x)$  может быть определена из решения следующей вариационной задачи:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{V} \int_{x_0}^{x_k} \sqrt{1 + z'^2} dx \rightarrow \min_{z(x)}; \\ z(x_0) &= z_0; \quad z(x_k) = z_k. \end{aligned}$$

Из Примера 2.11 следует, что экстремалью в этой задаче является прямая:

$$z^0(x) = z_0 + \frac{z_k - z_0}{x_k - x_0}(x - x_0). \quad (9.2.21)$$

Будем считать, что на плоскости  $Mxz$  имеется зона действия средств ПВО противника, граница которой описывается уравнением окружности:

$$(x - x^*)^2 + (z - z^*)^2 - R_{\text{обн}}^2 = 0. \quad (9.2.22)$$

Такое уравнение может быть построено как сечение на высоте  $y = h$  фигуры, представленной на Рис 8.23, которая описывает область действия РЛС обнаружения воздушных целей средств ПВО противника. В этом случае имеем, что радиус  $R_{\text{обн}}$  обнаружения БЛА будет функцией его высоты полета  $h$ .

Пусть траектория (9.2.21) проходит через плоскую область с границей, описываемой выражением (9.2.22) (Рис. 9.3).

Будем считать, что решение задачи (8.5.2) не дало удовлетворительного значения высоты  $h_0$  пролета БЛА зоны действия РЛС обнаружения. В этом случае такая зона выступает в качестве «запрещенной» области для экстремали  $z^0(x)$ , и требуется найти новую траекторию движения БЛА из точки  $A(x_0, z_0)$  в точку  $D(x_k, z_k)$ .

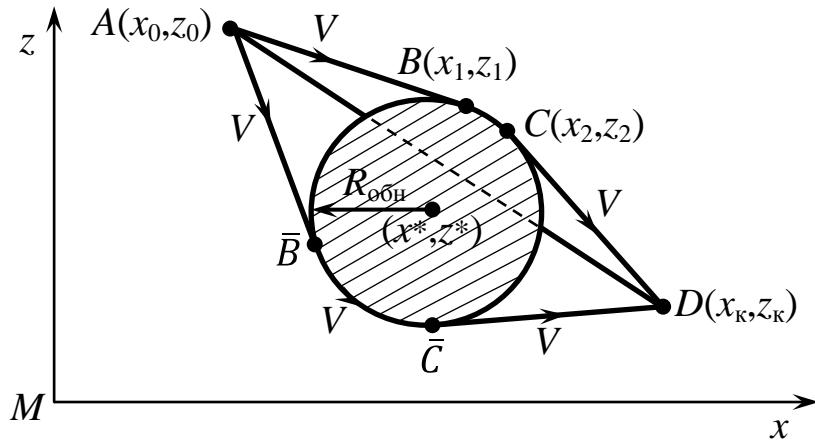


Рис. 9.3

Сформулируем требования к этой траектории:

1. Траектория полета БЛА должна быть гладкой функцией.
2. Сформированная траектория должна располагаться на минимальном расстоянии от экстремали (9.2.21), то есть иметь минимальные затраты времени при ее реализации.

При выполнении этих требований воспользуемся подходом к решению вариационных задач с «запрещенными» областями, приведенном в Разд. 2.4.3.

Для решения задачи сформируем составную траекторию движения БЛА, включающую в себя отрезок прямой  $AB$ , дугу окружности  $BC$  и отрезок прямой  $CD$ . (см. Рис. 9.3). При этом будем предполагать, что при движении БЛА по дуге окружности (9.2.22) вероятность его обнаружения РЛС, расположенной в точке с координатами  $(x^*, z^*)$  равна нулю.

При решении задачи будем использовать неявное представление составной траектории БЛА вида:

$$\Phi_1(x, z) = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = 0, \quad x \in [x_0, x_1]; \quad (9.2.23)$$

$$\Phi_2(x, z) = (x - x^*)^2 + (z - z^*)^2 - R_{\text{обн}}^2 = 0; \quad x \in [x_1, x_2]; \quad (9.2.24)$$

$$\Phi_3(x, z) = \frac{z - z_2}{z_k - z_2} - \frac{x - x_2}{x_k - x_2} = 0, \quad x \in [x_2, x_k]. \quad (9.2.25)$$

Здесь функции (9.2.23) и (9.2.25) являются уравнениями прямых, проходящих через точки  $A(x_0, z_0)$ ,  $B(x_1, z_1)$  и  $C(x_2, z_2)$ ,  $D(x_k, z_k)$ .

Для обеспечения гладкости такой траектории потребуем равенства значений производной  $z'$  неявно заданной функции  $z = z(x)$  в точках  $B(x_1, z_1)$  и  $C(x_2, z_2)$ .

Используя представление производной от неявной функции  $z(x)$ , заданной уравнением  $\Phi(x, z) = 0$  [8]:

$$z' = -\frac{\Phi_x(x, z)}{\Phi_z(x, z)},$$

получаем следующие условия:

$$\begin{aligned} \frac{z_1 - z_0}{x_1 - x_0} + \frac{x_1 - x^*}{z_1 - z^*} &= 0; \\ \frac{x_2 - x^*}{z_2 - z^*} + \frac{z_k - z_2}{x_k - x_2} &= 0, \end{aligned} \quad (9.2.26)$$

обеспечивающие равенства производных, вычисленных с использованием формул (9.2.23), (9.2.24) и (9.2.24), (9.2.25) в отмеченных выше точках.

В выражения (9.2.26) входят неизвестные значения координат  $(x_1, z_1)$  и  $(x_2, z_2)$ . Потребуем, чтобы эти точки располагались на окружности (9.2.24).

Данное требование, записанное в форме соотношений:

$$\begin{aligned} (x_1 - x^*)^2 + (z_1 - z^*)^2 - R_{\text{обн}}^2 &= 0; \\ (x_2 - x^*)^2 + (z_2 - z^*)^2 - R_{\text{обн}}^2 &= 0, \end{aligned} \quad (9.2.27)$$

позволяет получить совместно с выражениями (9.2.26) систему нелинейных алгебраических уравнений 4-го порядка для определения искомых значений координат  $x_1, z_1, x_2, z_2$ .

Система уравнений (9.2.26), (9.2.27) решается одним из численных методов, описанных в Разд. 3.4.

Вид этой системы и физический смысл решаемой задачи указывает на наличие двух решений, которые будем обозначать как  $x_1^{(1)}, z_1^{(1)}, x_2^{(1)}, z_2^{(1)}$  и  $x_1^{(2)}, z_1^{(2)}, x_2^{(2)}, z_2^{(2)}$ .

Пусть согласно Рис. 9.3 первое решение задает координаты точек  $B$  и  $C$ , а второе – точек  $\bar{B}$  и  $\bar{C}$ . Это означает, что существует две альтернативные траектории облета БЛА зоны его обнаружения. Выберем из них траекторию, имеющую минимальные затраты полетного времени БЛА. Такие затраты времени, следя Рис. 9.3, будут вычисляться по формулам:

$$\tau = \frac{1}{V} (d_{AB} + d_{BC} + d_{CD}); \quad (9.2.28)$$

$$\bar{\tau} = \frac{1}{V} (d_{A\bar{B}} + d_{\bar{B}\bar{C}} + d_{\bar{C}D}), \quad (9.2.29)$$

где параметр  $d$  означает длину соответствующего участка составной траектории полета БЛА.

Для вычисления значений этих параметров воспользуемся известными соотношениями, описывающими длины отрезков прямых и дуг окружностей [17]:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_0 - x_1^{(1)})^2 + (z_0 - z_1^{(1)})^2};$$

$$d_{BC} = 2R_{\text{обн}} \arcsin \left( \frac{\sqrt{(x_1^{(1)} - x_2^{(1)})^2 + (z_1^{(1)} - z_2^{(1)})^2}}{2R_{\text{обн}}} \right);$$

$$d_{CD} = \sqrt{(x_2^{(1)} - x_k)^2 + (z_2^{(1)} - z_k)^2};$$

$$d_{A\bar{B}} = \sqrt{(x_0 - x_1^{(2)})^2 + (z_0 - z_1^{(2)})^2};$$

$$d_{\bar{B}\bar{C}} = 2R_{\text{обн}} \arcsin \left( \frac{\sqrt{(x_1^{(2)} - x_2^{(2)})^2 + (z_1^{(2)} - z_2^{(2)})^2}}{2R_{\text{обн}}} \right);$$

$$d_{\bar{C}D} = \sqrt{(x_2^{(2)} - x_k)^2 + (z_2^{(2)} - z_k)^2}.$$

Подставляя вычисленные по этим формулам значения длин соответствующих участков траекторий  $ABCD$  и  $A\bar{B}\bar{C}D$  в выражения (9.2.28) и (9.2.29), определяем минимальное значение из затрат времени  $\tau$  и  $\bar{\tau}$  на их реализацию. Из этого сравнения выбирается оптимальная траектория облета БЛА зоны его возможного обнаружения.

Параметры  $x_1, z_1, x_2, z_2$  этой траектории используются в выражениях (9.2.23)-(9.2.25), которые в свою очередь применяются для формирования оптимальных векторов  $u_1^0(t) = (P_1^0(t), \alpha_1^0(t), \gamma_1^0(t))$ ,  $u_2^0(t) = (P_2^0(t), \alpha_2^0(t), \gamma_2^0(t))$ ,  $u_3^0(t) = (P_3^0(t), \alpha_3^0(t), \gamma_3^0(t))$  косвенного управления БЛА при его движении по соответствующим участкам составной траектории полета.

Следует заметить, что такая траектория является при  $r_{\text{в}} = R_{\text{обн}}$  фрагментом траектории, представленной на Рис. 8.15, а отмеченные выше выражения представляют собой частный случай соотношений (8.3.33). Это позволяет для окончательного решения рассматриваемой задачи использовать методы формирования косвенного и прямого управления БЛА, применяемые для программирования полета БЛА-РМ при контроле линейных объектов, описанные в Разд. 8.3.1.

Перспективной является задача формирования оптимальной траектории облета БЛА совокупности пересекающихся зон действия средств ПВО противника.

### **9.3. Управление полетом БЛА по замкнутой траектории с максимальной площадью охвата наземной поверхности**

Данная задача применяется при формировании оптимального управления такими видами БЛА как БЛА-РМ, БЛА-РТР, БЛА-Р и БЛА-РЭБ.

#### ***9.3.1. Полет БЛА в спокойной атмосфере***

Будем считать, что БЛА в процессе выполнения полетного задания (ПЗ) осуществляет движение в горизонтальной плоско-

сти на высоте  $h$  со скоростью  $V_{\text{зад}}(t) = V = \text{const}$ ,  $t \in [t_2, t_3]$  по замкнутой траектории, начальная и конечная точки которой заданы координатами  $(x_0, z_0)$ .

Согласно ПЗ БЛА должен, реализуя замкнутую траекторию полета, охватить областью действия своей целевой аппаратуры максимально возможную за время  $(t_3 - t_2)$  площадь наземной поверхности, контролируемой бортовыми ОЭС или «обрабатываемой» средствами РТР, ретрансляции и РЭБ.

Оптимальную траекторию полета БЛА будем определять из решения вариационной задачи на условный экстремум (см. Разд. 2.4.4 и Разд. 2.4.5).

Пусть траектория полета БЛА в параметрической форме задается функциями  $x = x(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $t \in [t_2, t_3]$ . Тогда функционал (2.4.40), описывающий площадь облетаемой поверхности, записывается как [11, 20]:

$$S = 0,5 \int_{t_2}^{t_3} (x\dot{z} - z\dot{x}) dt \rightarrow \max. \quad (9.3.1)$$

С использованием выражений (5.2.9), (5.2.10) уравнения (2.4.33) запишутся в виде дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \Psi; \\ \dot{z} &= V \sin \Psi; \end{aligned} \quad (9.3.2)$$

с начальными условиями:

$$x(t_2) = x_0; \quad z(t_2) = z_0.$$

Условия замкнутости траектории БЛА представляются выражениями вида:

$$x(t_2) = x(t_3) = x_0; \quad z(t_2) = z(t_3) = z_0. \quad (9.3.3)$$

В качестве искомых функций в вариационной задаче (9.3.1)-(9.3.3) будем рассматривать фазовые координаты  $x(t)$ ,  $z(t)$ ,  $\Psi(t)$ ,  $t \in [t_2, t_3]$ , представленные на Рис. 9.4.

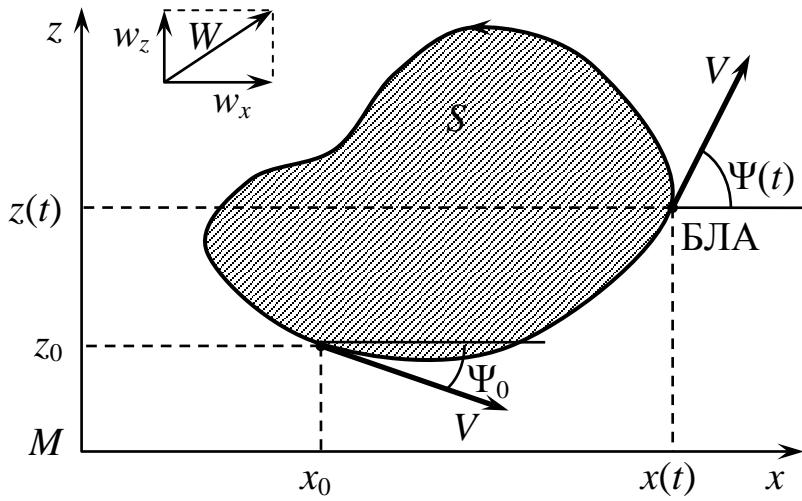


Рис.9.4

При этом функция  $\Psi(t)$  будет рассматриваться как кинематическое управление движением ЛА по траектории  $x(t)$ ,  $z(t)$ ,  $t \in [t_2, t_3]$ .

Из сравнения задачи (9.3.1)-(9.3.3) с общей записью параметрического представления вариационных задач динамики полета ЛА вида (2.4.43)-(2.4.45) следует, что она может быть отнесена к задаче Лагранжа с функционалом вида:

$$\bar{J} = \int_{t_2}^{t_3} \bar{\Phi}(x, z, \Psi, \dot{x}, \dot{z}, \lambda_1, \lambda_2) dt \rightarrow \max,$$

где подынтегральная функция в соответствие с выражениями (2.4.46), (2.4.44), (9.3.1) и (9.3.2) имеет вид:

$$\bar{\Phi} = 0,5(x\dot{z} - z\dot{x}) + \lambda_1(\dot{x} - V \cos \Psi) + \lambda_2(\dot{z} - V \sin \Psi). \quad (9.3.4)$$

В этом выражении функции  $\lambda_1 = \lambda_1(t)$  и  $\lambda_2 = \lambda_2(t)$  – множители Лагранжа.

Уравнения Эйлера-Лагранжа (2.4.47) записываются как:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}'_x - \frac{d}{dt} \bar{\Phi}_{\dot{x}} &= 0; \\ \bar{\Phi}'_z - \frac{d}{dt} \bar{\Phi}_{\dot{z}} &= 0; \\ \bar{\Phi}'_\Psi - \frac{d}{dt} \bar{\Phi}_{\dot{\Psi}} &= 0. \end{aligned} \quad (9.3.5)$$

Из выражения (9.3.4) имеем:

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}_x &= 0,5\dot{z}; \quad \overline{\Phi}_{\dot{x}} = -0,5z + \lambda_1; \quad \frac{d}{dt}\overline{\Phi}_{\dot{x}} = -0,5\dot{z} + \dot{\lambda}_1; \\ \overline{\Phi}_z &= -0,5\dot{x}; \quad \overline{\Phi}_{\dot{z}} = 0,5x + \lambda_2; \quad \frac{d}{dt}\overline{\Phi}_{\dot{z}} = 0,5\dot{x} + \dot{\lambda}_2; \\ \overline{\Phi}_\Psi &= \lambda_1 V \sin \Psi - \lambda_2 V \cos \Psi; \quad \frac{d}{dt}\overline{\Phi}_\Psi = 0.\end{aligned}$$

Тогда уравнения (9.3.5) конкретизируются как:

$$\begin{aligned}0,5\dot{z} + 0,5\dot{z} - \dot{\lambda}_1 &= \dot{z} - \dot{\lambda} = 0; \\ -0,5\dot{x} - 0,5\dot{x} - \dot{\lambda} &= -\dot{x} - \dot{\lambda} = 0_2; \\ V(\lambda_1 \sin \Psi - \lambda_2 \cos \Psi) &= 0.\end{aligned}\tag{9.3.6}$$

Интегрируя первые два уравнения этой системы, найдем, что

$$\lambda_1(t) = z(t) + C_1;$$

$$\lambda_2(t) = -x(t) - C_2,$$

где  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования.

Подставляя полученные выражения в последнее уравнение из состава выражений (9.3.6), представим его в следующей форме:

$$(z + C_1) \sin \Psi + (x + C_2) \cos \Psi = 0.$$

Это выражение следует рассматривать как необходимое условие оптимальности траектории облета БЛА максимальной площади [11].

Из этого уравнения имеем:

$$\operatorname{tg} \Psi = -\frac{x + C_2}{z + C_1},\tag{9.3.7}$$

Тогда оптимальный кинематический закон управления БЛА, выраженный через его текущие координаты определяется как:

$$\Psi^0(x, z) = \operatorname{arctg} \left( -\frac{x + C_2}{z + C_1} \right).\tag{9.3.8}$$

Поделив второе уравнение системы (9.3.2) на первое уравнение, получим

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \Psi.$$

Подставляя в правую часть этой формулы выражение (9.3.7), запишем дифференциальное уравнение 1-го порядка:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x + C_2}{z + C_1} \quad (9.3.9)$$

с начальным условием вида:

$$z(x_0) = z_0. \quad (9.3.10)$$

Интегрируя это уравнение методом разделения переменных (см. Разд. 2.1) и проводя несложные преобразования, получаем выражение вида:

$$\Phi(x, z) = (x + C_2)^2 + (z + C_1)^2 - C_3 = 0, \quad (9.3.11)$$

где  $C_3$  – постоянная интегрирования.

Отсюда следует, что оптимальная траектория полета БЛА представляет собой окружность с центром в точке  $(-C_2, -C_1)$  радиуса  $\sqrt{C_3}$ , что соответствует существующему представлению о плоской замкнутой геометрической фигуре, имеющей максимальную площадь.

Сформулируем совокупность условий для определения значений постоянных  $C_1, C_2, C_3$ .

Из выражения (9.3.7) и Рис. 9.4 следует, что

$$\frac{x_0 + C_2}{z_0 + C_1} = -\operatorname{tg} \Psi_0, \quad (9.3.12)$$

где  $\Psi_0$  – начальное значение угла поворота траектории БЛА.

Преобразуя это выражение, получаем уравнение вида:

$$C_1 \sin \Psi_0 + C_2 \cos \Psi_0 = -(x_0 \cos \Psi_0 + z_0 \sin \Psi_0). \quad (9.3.13)$$

Уравнение прямой, проходящей через точку  $(x_0, y_0)$  под углом  $\Psi_0$  [17], имеет вид:

$$(z - z_0) = \operatorname{tg} \Psi_0 (x - x_0).$$

Это уравнение в канонической форме [17]:

$$ax + bz + c = 0$$

имеет следующие значения коэффициентов:

$$a = \operatorname{tg} \Psi_0; \quad b = -1; \quad c = z_0 - x_0 \operatorname{tg} \Psi_0. \quad (9.3.14)$$

Расстояние от некоторой точки с координатами  $(x_{\text{ц}}; z_{\text{ц}})$  до этой прямой определяется как [17]:

$$\delta = \frac{ax_{\text{ц}} + bz_{\text{ц}} + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (9.3.15)$$

Расстояние  $\delta$ , рассчитываемое по нормали к рассматриваемой прямой, является радиусом окружности (9.3.11), который равен значению  $\sqrt{C_3}$ .

Используя это свойство и тот факт, что  $x_{\text{ц}} = -C_2$ ,  $z_{\text{ц}} = -C_1$ , формула (9.3.15) может быть представлена в виде:

$$\frac{-aC_2 - bC_2 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{C_3}.$$

Подставляя в эту формулу выражения (9.3.14) и проводя требуемые преобразования, с учетом того, что

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2 \Psi_0 + 1} = \frac{1}{\cos \Psi_0},$$

получим второе уравнение для определения параметров  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  искомой траектории движения БЛА:

$$C_1 \cos \Psi_0 - C_2 \sin \Psi_0 - \sqrt{C_3} = x_0 \sin \Psi_0 - z_0 \cos \Psi_0. \quad (9.3.16)$$

Третье уравнение с использованием выражений (9.3.3) записывается в следующей форме:

$$(x_0 + C_2)^2 + (z_0 + C_1)^2 - C_3 = 0. \quad (9.3.17)$$

Таким образом, значения постоянных интегрирования  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  определяются из решения системы уравнений (9.3.13), (9.3.16), (9.3.17) одним из численных методов, приведенных в Разд. 3.4.

Пусть  $C_1^0$ ,  $C_2^0$ ,  $C_3^0$  – решения этой системы. Тогда полученный выше оптимальный закон  $\Psi^0(x, z)$  угла поворота траектории БЛА конкретизируется как:

$$\Psi^0(x, z) = \operatorname{arctg} \left( -\frac{x + C_2^0}{z + C_1^0} \right). \quad (9.3.18)$$

В силу уравнений (9.3.2) входящие в него координаты  $x$  и  $z$  являются функциями времени. Отметим, что полученная формула является реализацией выражения (2.5.4), то есть решением задачи синтеза оптимального управления БЛА. Определим с учетом этого требуемую угловую скорость поворота траектории БЛА.

Дифференцируя по  $t$  выражение (9.3.18) и проводя несложные преобразования, получим:

$$\dot{\Psi}_{\text{tp}}^0(t) = \frac{\dot{z}(t)(x(t) + C_2^0) - x(t)(z(t) + C_1^0)}{(x(t) + C_2^0)^2 + (z(t) + C_1^0)^2}. \quad (9.3.19)$$

Входящие в это выражение функции времени  $x(t)$  и  $z(t)$ , как и выше, определяются системой уравнений (8.1.25), в которой используется функция (9.3.11) при  $C_1 = C_1^0$ ,  $C_2 = C_2^0$ ,  $C_3 = C_3^0$ . При этом вектор оптимального косвенного управления  $u^0(t) = (P^0(t), \alpha^0(t), \gamma^0(t))$  для БЛА СС вычисляются с помощью выражений (5.2.21)-(5.2.23).

Рассмотрим подход к определению значения угла  $\Psi_0$ .

Пусть этап полета БЛА в зону выполнения ПЗ начинается в точке с координатами  $(x_1, h, z_1)$ . На Рис. 9.5 представлено взаимодействие траектории движения БЛА на этом этапе с его оптимальной траекторией (9.3.11).

Первая траектория, реализуемая на высоте  $h$ , представляет собой прямую, проходящую через точки  $(x_1, z_1)$  и  $(x_0, z_0)$ , описываемую уравнением вида [17]:

$$\frac{z - z_1}{z_0 - z_1} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}.$$

Преобразуем это выражение к форме  $z = kx + b$ , где  
 $k = \frac{z_0 - z_1}{x_0 - x_1}$ ,  $b = z_1 - \frac{x_1(z_0 - z_1)}{x_0 - x_1}$ .

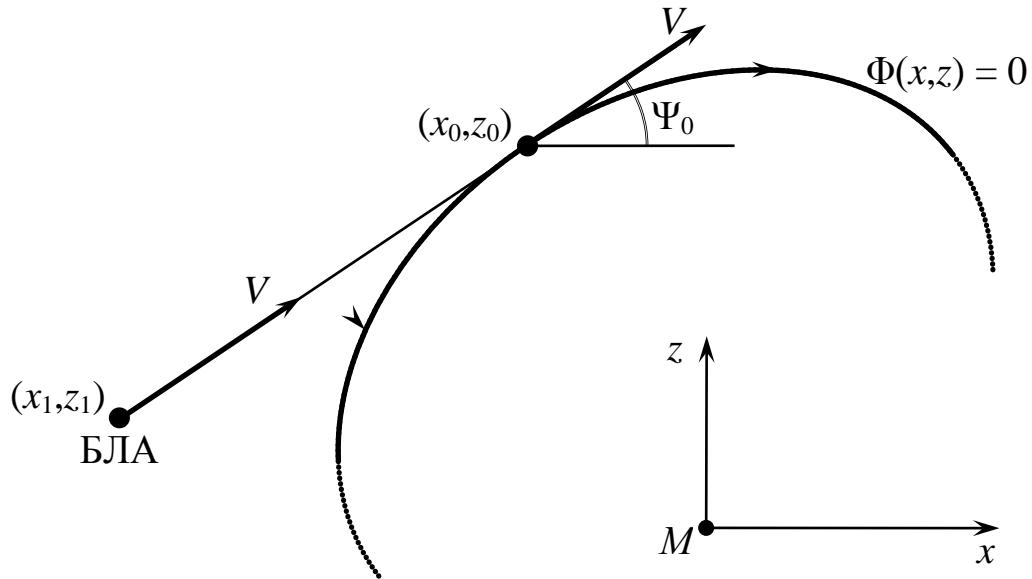


Рис. 9.5

В связи с тем, что  $k = \operatorname{tg} \Psi_0$ , искомый угол  $\Psi_0$  вычисляется по формуле:

$$\Psi_0 = \operatorname{arctg} \left( \frac{z_0 - z_1}{x_0 - x_1} \right). \quad (9.3.20)$$

### 9.3.2. Полет БЛА при действии ветровых возмущений

Рассмотрим задачу формирования оптимального управления БЛА при наличии в области выполнения ПЗ ветра с известными значениями компонент  $w_x = \text{const}$  и  $w_z = \text{const}$  вектора  $W$  его скорости (см. Рис. 9.4).

Заметим, что в работе [11] эта задача решалась в частном случае при  $w_x \neq 0$  и  $w_z = 0$ .

При непосредственном учете ветровых возмущений система уравнений (9.3.2) примет вид:

$$\dot{x} = V \cos \Psi \pm w_x; \quad \dot{z} = V \sin \Psi \pm w_z. \quad (9.3.21)$$

Отметим, что знаки перед вторыми слагаемыми в этих уравнениях определяются направлениями действия компонент вектора скорости ветра  $W$ . В ситуациях, представленных на Рис. 9.4 и Рис. 9.6, в уравнениях (9.3.21) используются знаки «плюс». При учете действия ветра, показанного на Рис. 9.8, ненулевые значения компонент  $w_x$  и  $w_z$ , имеют знак «минус».

Начальные условия для системы (9.3.21) описываются выражениями (9.3.3).

В выражение (9.3.4) параметры  $w_x$  и  $w_z$  включаются во второе и третье слагаемые с противоположными знаками. В связи с тем, что они имеют постоянные значения, вид уравнений (9.3.6) не изменяется. В этом случае сохраняется вид соотношения (9.3.7), из которого следует формула (9.3.8). Из этого соотношения следует первое условие для определения значений  $C_1$  и  $C_2$ , которое представляется выражением (9.3.13).

Как следует из результатов Главы 4, траектория полета БЛА под действием ветровых возмущений должна деформироваться. Определим форму такой траектории, используя выражения (9.3.21).

Если, следуя работе [11], перенести начало координат в точку  $(-C_2, -C_1)$ , тогда новые координаты траектории БЛА определяются по формулам вида:

$$\bar{x} = x + C_2, \quad \bar{z} = z + C_1. \quad (9.3.22)$$

С учётом этого условия оптимальности (9.3.7) запишется в следующей форме:

$$\operatorname{tg} \Psi = -\frac{\bar{z}}{\bar{x}}. \quad (9.3.23)$$

Введем в рассмотрение угол  $\beta$ , связанный с углом  $\Psi$  соотношением:

$$\beta = \Psi + 0,5 \pi. \quad (9.3.24)$$

Тогда из формулы (9.3.23) получим выражение:

$$\bar{z} \cos \beta - \bar{x} \sin \beta = 0.$$

Отсюда следует представление координат  $\bar{x}$  и  $\bar{z}$  вида:

$$\bar{x} = r \cos \beta, \quad \bar{z} = r \sin \beta. \quad (9.3.25)$$

Эти выражения описывают текущее положение БЛА в полярной системе координат, представленной на Рис. 9.6, где  $r$  и  $\beta$  вычисляются по формулам:

$$r = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}, \quad \beta = \arctg\left(\frac{\bar{z}}{\bar{x}}\right). \quad (9.3.26)$$

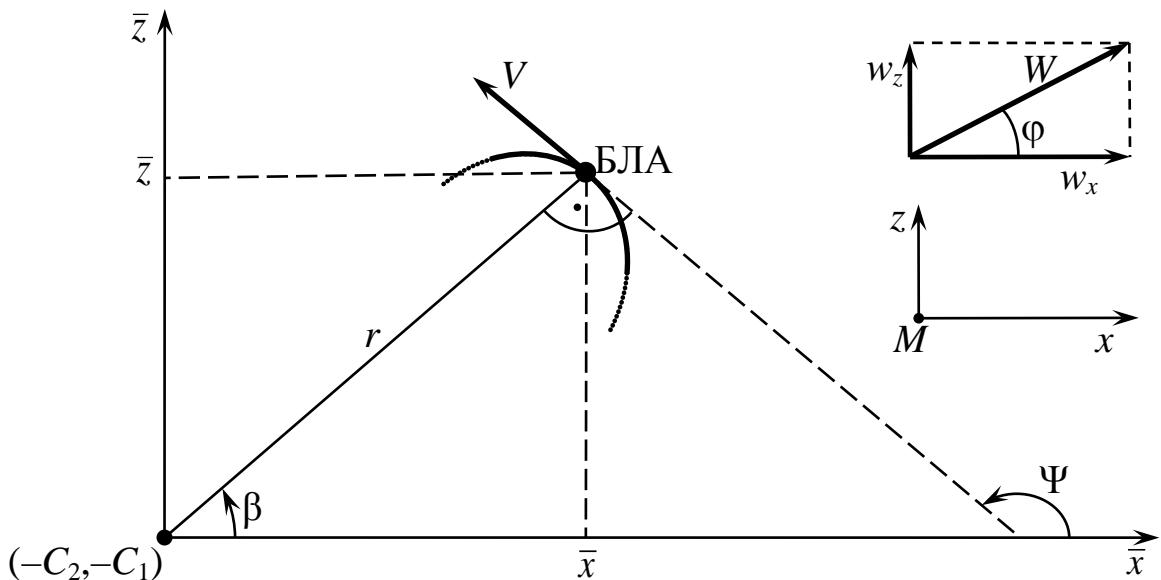


Рис. 9.6

Дифференцируя выражения (9.3.25) по времени  $t$ , получим:

$$\dot{\bar{x}} = \dot{r} \cos \beta - r \dot{\beta} \sin \beta; \quad \dot{\bar{z}} = \dot{r} \sin \beta + r \dot{\beta} \cos \beta.$$

Отсюда, умножив первое уравнение на  $\cos \beta$ , второе – на  $\sin \beta$  и просуммировав их, имеем:

$$\dot{r} = \dot{\bar{x}} \cos \beta + \dot{\bar{z}} \sin \beta.$$

Заменим  $\dot{\bar{x}}$  и  $\dot{\bar{z}}$  правыми частями уравнений (9.3.21), в которых вследствие (9.3.22)  $\dot{x} = \dot{\bar{x}}$ ,  $\dot{z} = \dot{\bar{z}}$ . Тогда, учитывая требование (9.3.24), получим выражения вида:

$$\cos \beta = \cos\left(\Psi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \Psi;$$

$$\sin \beta = \sin\left(\Psi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \Psi,$$

Предполагая для определенности, что компоненты  $w_x$  и  $w_z$  входят в уравнения (9.3.21) со знаком «полюс» и применяя эти соотношения, вычислим производную от полярного радиуса  $r$  (см. Рис. 9.6):

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \cos\beta(V \cos\Psi + w_x) + \sin\beta(V \sin\Psi + w_z) = \\ &= -V \sin\Psi \cos\Psi - w_x \sin\Psi + \\ &\quad + V \cos\Psi \sin\Psi + w_z \cos\Psi = \\ &= w_z \cos\Psi - w_x \sin\Psi.\end{aligned}\tag{9.3.27}$$

Преобразуем уравнения (9.3.21) к виду:

$$\cos\Psi = \frac{\dot{x} - w_x}{V}, \quad \sin\Psi = \frac{\dot{z} - w_z}{V}$$

и подставим их в правые части полученного уравнения (9.3.27):

$$\begin{aligned}\dot{r} &= w_z \left( \frac{\dot{x} - w_x}{V} \right) - w_x \left( \frac{\dot{z} - w_z}{V} \right) = \\ &= \frac{w_z \dot{x} - w_x w_z - w_x \dot{z} + w_x w_z}{V} = \\ &= \frac{w_z \dot{x} - w_x \dot{z}}{V}.\end{aligned}$$

Интегрируя обе части этого соотношения, получим:

$$r = \frac{1}{V} (w_z \bar{x} - w_x \bar{z}) + C_3,$$

где  $C_3$  – постоянная интегрирования.

Заменим  $\bar{x}$  и  $\bar{z}$  их представлениями вида (9.3.25):

$$r = \frac{r}{V} (\cos\beta - \sin\beta) + C_3$$

и выполним следующее преобразование:

$$r \left( 1 + \frac{w_x \sin\beta - w_z \cos\beta}{V} \right) = C_3.$$

Отсюда получаем уравнение оптимальной траектории полета БЛА в полярных координатах вида:

$$r = \frac{C_3}{1 + \left(\frac{w_x}{V}\right) \sin \beta - \left(\frac{w_z}{V}\right) \cos \beta}. \quad (9.3.29)$$

которая представляет собой эллипс, определенным образом расположенный на плоскости.

Установлено, что при построении функции  $r(\beta)$  угол  $\beta$  должен изменяться в пределах от  $(-0,5\pi - \varphi)$  до  $(0,5\pi + \varphi)$ , где  $\varphi$  – угол азимута ветра, введенный в Главе 4, который определяется по формуле (9.3.30).

Заметим, что при  $w_z \equiv 0$  из уравнения (9.3.29) получается решение задачи С.А. Чаплыгина, приведенное в работе [11]. В этой работе утверждается, что оптимальной траекторией полета является эллипс, представленный на Рис. 9.7,*a*, но не приводятся его параметры.

Нетрудно показать, что при  $w_x \equiv 0$  траектория полета будет иметь вид, представленный на Рис. 9.7,*b*.

При  $w_x \neq 0$  и  $w_z \neq 0$  получим оптимальную траекторию полета БЛА, в которой большая ось эллипса будет перпендикулярна направлению вектора  $W$ , которое задается углом (см. Рис. 9.7,*c*):

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{w_z}{w_x} \right). \quad (9.3.30)$$

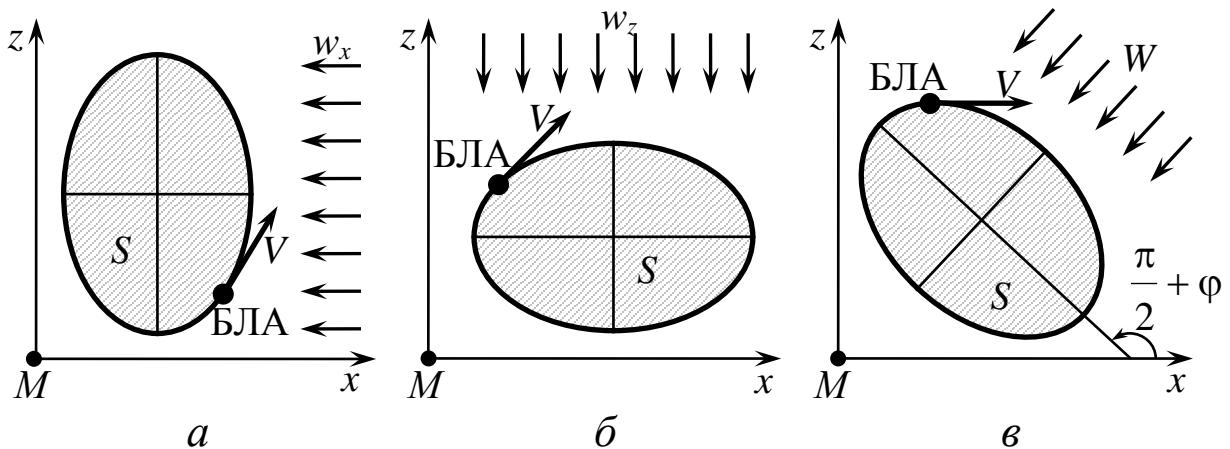


Рис. 9.7

Величины большой ( $a$ ) и малой ( $b$ ) полуосей эллипса из выражения (9.3.29) определяются как  $a = r_{\max}$  и  $b = r_{\min}$  при фиксированном значении параметра  $C_3$ .

Запишем необходимое условие экстремума функции (9.3.29):

$$\frac{dr}{d\beta} = \frac{\left(\frac{w_x}{V}\right)\cos\beta + \left(\frac{w_z}{V}\right)\sin\beta}{\left[1 + \left(\frac{w_x}{V}\right)\sin\beta - \left(\frac{w_z}{V}\right)\cos\beta\right]^2} = 0.$$

Тогда экстремальное значение угла  $\beta^*$  определяется из уравнения вида:

$$w_x \cos\beta + w_z \sin\beta = 0.$$

Поделив это уравнение на  $\cos\beta$ , имеем:

$$w_x + w_z \operatorname{tg}\beta = 0.$$

Откуда с учётом (9.3.30) получаем:

$$\operatorname{tg}\beta^* = -\frac{w_x}{w_z} = -\operatorname{tg}\varphi.$$

Из этого равенства следует, что точка экстремума функции  $r(\beta)$  определяется как:

$$\beta^* = -\varphi.$$

Значения  $\sin\beta^*$  и  $\cos\beta^*$ , выраженные через  $w_x$  и  $w_z$ , имеют вид:

$$\sin\beta^* = \frac{w_z}{\sqrt{w_x^2 + w_z^2}}; \quad \cos\beta^* = \frac{w_x}{\sqrt{w_x^2 + w_z^2}}. \quad (9.3.31)$$

Подставляя правые части этих выражений в формулу (9.3.29), получим:

$$r(\beta^*) = C_3. \quad (9.3.32)$$

Введем в рассмотрение угол:

$$\beta^{**} = \beta^* + 0,5 \pi$$

и вычислим по формуле (9.3.29) значение:

$$\begin{aligned}
r(\beta^{**}) &= \frac{C_3}{1 + \left(\frac{w_x}{V}\right) \sin(\beta^* + 0,5\pi) - \left(\frac{w_z}{V}\right) \cos(\beta^* + 0,5\pi)} = \\
&= \frac{C_3}{1 + \left(\frac{w_x}{V}\right) \cos \beta^* + \left(\frac{w_z}{V}\right) \sin \beta^*}.
\end{aligned}$$

Подставляя в эту формулу выражения (9.3.31) и проводя необходимые преобразования, получим:

$$r(\beta^{**}) = \frac{C_3}{1 + \frac{\sqrt{w_x^2 + w_z^2}}{V}}. \quad (9.3.33)$$

Из сравнения выражений (9.3.32) и (9.3.33) следует, что  $r(\beta^{**}) < r(\beta^*)$ . Это означает, что значения полуосей эллипса будут соответственно равны:  $a = r(\beta^*)$ ,  $b = r(\beta^{**})$  и он будет повёрнут относительно оси  $Mx$  на угол  $(0,5\pi + \varphi)$ .

Сформируем в дополнение к условию (9.3.13) уравнения для определения значений параметров  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ .

Построим на основе выражений (9.3.21) дифференциальное уравнение:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{V \sin \Psi + w_z}{V \cos \Psi + w_x}$$

и потребуем выполнение условия:

$$\left( \frac{dz}{dx} \right)_{x_0, z_0} = \operatorname{tg} \Psi_0.$$

Заменяя  $\operatorname{tg} \Psi_0$  выражением (9.3.12) и проводя несложные преобразования, получаем уравнение вида:

$$\begin{aligned}
&(V \sin \Psi_0 + w_z) C_1 + (V \cos \Psi_0 + w_x) C_2 - \\
&- z_0 (V \sin \Psi_0 + w_z) - x_0 (V \cos \Psi_0 + w_x) = 0.
\end{aligned} \quad (9.3.34)$$

Обозначим через  $C_1^0$  и  $C_2^0$  решение системы (9.3.13), (9.3.34), которое имеет смысл координат центра эллипса, то есть  $x_{\text{ц}} = -C_2^0$  и  $z_{\text{ц}} = -C_1^0$ .

Выражение (9.3.29) с учетом (9.3.22), (9.3.26) для известных значений  $x_0, z_0, \Psi_0, C_1^0, C_2^0$  примет вид:

$$\sqrt{(x_0 + C_2^0)^2 + (z_0 + C_1^0)^2} = \frac{C_3}{1 + \left(\frac{w_x}{V}\right)\cos \Psi_0 + \left(\frac{w_z}{V}\right)\sin \Psi_0}.$$

Отсюда получаем формулу для определения параметра  $C_3$ :

$$C_3^0 = \sqrt{(x_0 + C_2^0)^2 + (z_0 + C_1^0)^2} \times \\ \times \left(1 + \left(\frac{w_x}{V}\right)\cos \Psi_0 + \left(\frac{w_z}{V}\right)\sin \Psi_0\right). \quad (9.3.35)$$

Это значение подставляется в выражения (9.3.32) и (9.3.33) для расчёта длин  $a$  и  $b$  полуосей полученной эллиптической траектории полета БЛА.

Построим представление кривой (9.3.29) в декартовой системе координат, предварительно переписав его с учётом (9.3.24) в форме:

$$r = \frac{C_3^0 V}{V + w_x \cos \Psi + w_z \sin \Psi}.$$

С использованием выражений (9.3.22), (9.3.26), представления  $\sin \Psi$  и  $\cos \Psi$  через  $\operatorname{tg} \Psi$  и формулы (9.3.7) это соотношение примет вид:

$$\sqrt{(x + C_2^0)^2 + (z + C_1^0)^2} = \\ = \frac{C_3^0 V}{V + \frac{w_x(z + C_1^0)}{\sqrt{(x + C_2^0)^2 + (z + C_1^0)^2}} + \frac{w_z(x + C_2^0)}{\sqrt{(x + C_2^0)^2 + (z + C_1^0)^2}}}.$$

Проводя соответствующие преобразования, получим следующее неявное представление оптимальной траектории полета БЛА:

$$\Phi(x, z) = 1 - \frac{VC_3^0}{V\sqrt{(x + C_2^0)^2 + (z + C_1^0)^2} \pm w_x(z + C_1^0) \pm w_z(x + C_2^0)} = 0, \quad (9.3.36)$$

Это уравнение представляет собой эллипс, параметры которого зависят от начальных условий движения БЛА, скорости его полета, а также значений и направлений действующих ветровых возмущений.

Уравнение (9.3.36) совместно с выражением (9.3.19), значениями  $V = V_{\text{зад}}(t)$ ,  $\theta_{\text{тр}}(t) = \dot{\theta}_{\text{тр}}(t) = 0$  и уравнениями (5.2.21)-(5.2.22) используется для формирования вектора оптимального косвенного управления  $u^0(t) = (P^0(t), \alpha^0(t), \gamma^0(t))$  БЛА.

Отметим, что применяемые для вычисления вектора  $u^0(t)$  уравнения (8.1.25) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{V_{\text{зад}} \Phi_z(x, z)}{\sqrt{\Phi_x^2(x, z) + \Phi_z^2(x, z)}} \pm w_x; \\ \dot{z} &= -\frac{V_{\text{зад}} \Phi_x(x, z)}{\sqrt{\Phi_x^2(x, z) + \Phi_z^2(x, z)}} \pm w_z. \end{aligned} \quad (9.3.37)$$

Здесь  $\Phi_x$  и  $\Phi_z$  – частные производные функции (9.3.36). Система уравнений (9.3.37) интегрируется на интервале времени  $[t_2; t_3]$  при начальных условиях:

$$x(t_2) = x_0, \quad z(t_2) = z_0. \quad (9.3.38)$$

Вид уравнений (9.3.37) соответствует случаю движения БЛА по траектории (9.3.36) «по часовой стрелке». При необходимости его движения «против часовой стрелки» знаки перед первыми слагаемыми в правых частях этих уравнений заменяются на противоположные.

### 9.3.3. Учет основных характеристик целевой аппаратуры БЛА оптико-электронной разведки и мониторинга

Проведем согласование полученной оптимальной траектории полета БЛА с такими основными характеристиками применяемой целевой аппаратуры БЛА-РМ, как наклонная дальность действия  $L$ , угол визирования  $\alpha_{\text{виз}}$  объектива применяемой ОЭС бокового обзора и углы ее вертикального  $2\beta_V$  и горизонтального  $2\beta_H$  полей зрения.

На Рис. 9.8 представлена «развертка» координатного пространства  $Mxyz$ .

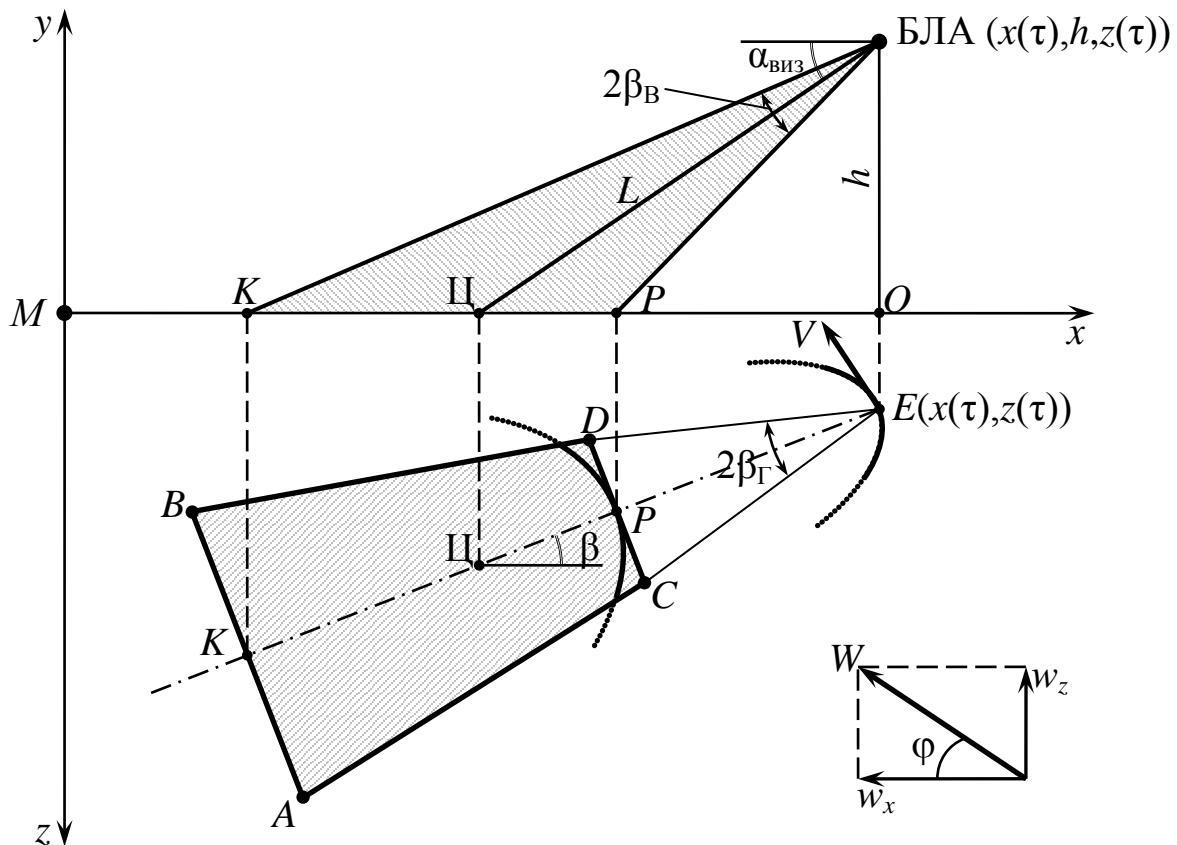


Рис. 9.8

Наиболее удалённая от точки  $\Pi(x_{\Pi}, z_{\Pi})$  точка  $P$  границы обзора наземной поверхности, достигаемая в момент времени  $t = \tau$ , располагается на большой полуоси эллипса, описываемой отрезком  $\Pi E$ , равным  $a = C_3^0$ . Отметим, что на этом рисунке использованы обозначения из Рис. 8.7.

Потребуем, чтобы линия визирования применяемой целевой аппаратуры проходила через точки Ц и БЛА ( $x(\tau), h, z(\tau)$ ).

Тогда длину отрезка ЦЕ, описывающего проекцию этой линии на плоскость  $Mxz$ , можно определить как:

$$l_1 = \sqrt{L^2 - h^2} = L \cos \alpha_{\text{виз}}. \quad (9.3.39)$$

Длину отрезка ЕК вычислим по следующей формуле:

$$l_2 = \frac{h}{\operatorname{tg}(\alpha_{\text{виз}} + \beta_B)}.$$

На большой полуоси эллипса ему соответствует отрезок с длиной:

$$l_3 = \frac{l_2}{\cos \beta^*} = \frac{h}{\cos \beta^* \operatorname{tg}(\alpha_{\text{виз}} + \beta_B)}. \quad (9.3.40)$$

Тогда из Рис. 9.8 следует, что координаты  $X(\tau), Z(\tau)$  точки К на этой полуоси вычисляются как:

$$X(\tau) = x_{\text{Ц}} + (a - l_3) \cos \beta^*; \quad Z(\tau) = z_{\text{Ц}} + (a - l_3) \sin \beta^*.$$

Перепишем эти выражения в следующей форме:

$$X(\tau) = x(\tau) - l_3 \cos \beta^*; \quad Z(\tau) = z(\tau) - l_3 \sin \beta^*.$$

Если считать, что область обзора наземной поверхности расположена в любой момент времени  $t \in [t_2, t_3]$  на расстоянии  $l_3$  от траектории полета БЛА, то текущие координаты границы такой области определяются как:

$$X(t) = x(t) - l_3 \cos \beta; \quad Z(t) = z(t) - l_3 \sin \beta.$$

Используя выражения (9.3.26) при  $\bar{x} = x - x_{\text{Ц}}$  и  $\bar{z} = z - z_{\text{Ц}}$  и проводя несложные преобразования, окончательно имеем:

$$\begin{aligned} X(t) &= x(t) - \frac{l_3(x(t) - x_{\text{Ц}})}{\sqrt{(x(t) - x_{\text{Ц}})^2 + (z(t) - z_{\text{Ц}})^2}}; \\ Z(t) &= z(t) - \frac{l_3(z(t) - z_{\text{Ц}})}{\sqrt{(x(t) - x_{\text{Ц}})^2 + (z(t) - z_{\text{Ц}})^2}}, \end{aligned} \quad (9.3.41)$$

где  $l_3$  определяется формулой (9.3.40) при  $\beta^* = \phi$ .

Из Рис. 9.8 следует, что

$$l_1 = a \cos \beta^*.$$

Подставляя это выражение в формулу (9.3.39), получаем значения требуемых параметров полета БЛА и его целевой аппаратуры:

$$h = \sqrt{L^2 - a^2 \cos^2 \varphi},$$

$$\alpha_{\text{виз}} = \arccos \left( \frac{a}{L} \cos \varphi \right).$$

Эти значения используются в формуле (9.3.40) для конкретизации параметра  $l_3$ , входящего в выражения (9.3.41), в которых  $x(t)$  и  $z(t)$  находятся из решения задачи Коши (9.3.37), (9.3.38).

#### 9.4. Управление БЛА при перелете между заданными точками маршрута в неспокойной атмосфере

Рассмотрим подходы, позволяющие путем выбора соответствующего управления БЛА парировать действующие ветровые возмущения при его движении между заданными точками маршрута.

Пусть БЛА должен осуществить перелет в горизонтальной плоскости на высоте  $h$  со скоростью  $V_{\text{зад}}(t) = V = \text{const}$  между точками  $A(x_0, z_0)$  и  $B(x_1, z_1)$  при наличии «плоского» ветра с характеристиками его скорости  $w_x = \text{const}$ ,  $w_z = \text{const}$ . Примеры таких маршрутов представлены на Рис. 8.8,*a,b,g* и Рис. 9.5.

Оптимальной траекторией такого перелета с минимальными затратами времени при  $w_x = w_y = 0$  является прямая вида (9.2.21), соединяющая эти точки (Рис. 9.9), которая реализуется с помощью кинематического управления:

$$\Psi_0 = \arctg \left( \frac{z_1 - z_0}{x_1 - x_0} \right). \quad (9.4.1)$$

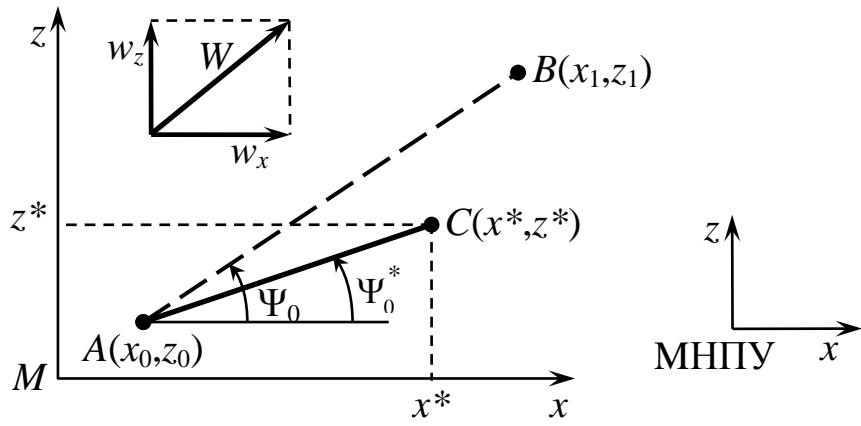


Рис. 9.9

В общем случае кинематические уравнения движения БЛА при действии ветровых возмущений имеют вид:

$$\dot{x} = V \cos \Psi \pm w_x; \quad \dot{z} = V \sin \Psi \pm w_z, \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (9.4.2)$$

Траектория полета БЛА в неспокойной атмосфере должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$x(t_1) = x_0; \quad z(t_1) = z_0; \quad (9.4.3)$$

$$x(t_2) = x_1; \quad z(t_2) = z_1; \quad (9.4.4)$$

Как было отмечено в Разд. 4.2, полет БЛА при наличии ветра приводит в зависимости от его направления к дополнительному расходу или экономии топлива. Поэтому в качестве критерия оптимальности управления БЛА выберем затраты топлива, используемого при его движении по заданному маршруту в неспокойной атмосфере:

$$G_{\text{топ}} = q_{\text{сек}}(t_2 - t_1) \rightarrow \min, \quad (9.4.5)$$

где  $q_{\text{сек}} = q_{\text{ч}}/3600$  – секундный расход топлива силовой установки БЛА.

В этом случае решаемая задача формулируется следующим образом: «Определить кинематическое управление  $\Psi = \Psi(t)$  и значение момента времени  $t_2$ , доставляющие минимальное значение функционалу (9.4.5) при выполнении условий (9.4.2)-(9.4.4)».

Данную задачу, как и в работе [11], будем решать с использованием принципа максимума Л.С. Понtryгина, изложенного в Разд. 2.5.2.

Из сопоставления видов функционалов (2.5.6) и (9.4.5) следует, что эта задача является задачей Майера, в которой функционал (2.5.11) конкретизируется как

$$J = f_0(t_2) = q_{\text{сек}} t_2 \rightarrow \min_{\Psi, t_2}. \quad (9.4.6)$$

Гамильтониан задачи (2.5.12), формируемый с использованием уравнений (9.4.2), имеет вид:

$$H = \lambda_1(V \cos \Psi \pm w_x) + \lambda_2(V \sin \Psi \pm w_z). \quad (9.4.7)$$

Уравнения (2.5.13) для определения сопряженных функций  $\lambda_1 = \lambda_1(t)$  и  $\lambda_2 = \lambda_2(t)$  записываются как:

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0; \quad \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0. \quad (9.4.8)$$

Отсюда имеем, что  $\lambda_1(t) = C_1$ ;  $\lambda_2(t) = C_2$ . В связи с отсутствием ограничений вида (2.5.5) на угол  $\Psi$  оптимальное управление БЛА находим из уравнения:

$$\frac{\partial H}{\partial \Psi} = V(-\lambda_1 \sin \Psi + \lambda_2 \cos \Psi) = 0, \quad (9.4.9)$$

которое является конкретизацией выражения (2.5.16).

Условие (2.5.15), которое соответствует варьированию параметра  $t_2$ , с учетом (9.4.6) и (9.4.7) имеет вид:

$$\lambda_{12}(V \cos \Psi_2 \pm w_x) + \lambda_{22}(V \sin \Psi_2 \pm w_z) = q_{\text{сек}}, \quad (9.4.10)$$

где  $\lambda_{12} = \lambda_1(t_2)$ ,  $\lambda_{22} = \lambda_2(t_2)$ ,  $\Psi_2 = \Psi(t_2)$ .

Продифференцируем по  $t$  уравнение (9.4.9):

$$-\dot{\lambda}_1 \sin \Psi - \lambda_1 \dot{\Psi} \cos \Psi + \dot{\lambda}_2 \cos \Psi - \lambda_2 \dot{\Psi} \sin \Psi = 0.$$

Подставляя сюда выражения  $\dot{\lambda}_1$  и  $\dot{\lambda}_2$ , определяемые уравнениями (9.4.8), получим:

$$-\lambda_1 \dot{\Psi} \cos \Psi - \lambda_2 \dot{\Psi} \sin \Psi = 0.$$

Из этого выражения, учитывая, что согласно принципу максимума функции  $\lambda_1(t)$  и  $\lambda_2(t)$  не должны тождественно равняться нулю при  $t \in [t_1, t_2]$ , будем иметь:

$$\dot{\Psi} = 0.$$

Из полученного соотношения следует, что оптимальное управление БЛА имеет вид:

$$\Psi_0^*(t) = \text{const} = \Psi_0^*,$$

то есть не зависит от времени.

Для получения значения  $\Psi_0^*$  и оптимальной продолжительности  $t_2^0$  полета БЛА проинтегрируем уравнения (9.4.2) с начальными условиями (9.4.3):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + (V \cos \Psi_0^* \pm w_x)(t - t_1), \\ z(t) &= z_0 + (V \sin \Psi_0^* \pm w_z)(t - t_1) \end{aligned} \quad (9.4.11)$$

Значения координат БЛА при  $t = t_2$  с учетом (9.4.4) будут равны:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + (V \cos \Psi_0^* \pm w_x)(t_2 - t_1), \\ z_1 &= z_0 + (V \sin \Psi_0^* \pm w_z)(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Перепишем эти соотношения в виде:

$$\begin{aligned} \cos \Psi_0^* &= \frac{1}{V} \left( \frac{x_1 - x_0}{t_2 - t_1} \mp w_x \right); \\ \sin \Psi_0^* &= \frac{1}{V} \left( \frac{z_1 - z_0}{t_2 - t_1} \mp w_z \right). \end{aligned} \quad (9.4.12)$$

Поделив второе из этих соотношений на первое и проводя несложные преобразования, получим:

$$\operatorname{tg} \Psi_0^* = \frac{(z_1 - z_0) \mp w_z (t_2 - t_1)}{(x_1 - x_0) \mp w_x (t_2 - t_1)}.$$

Откуда оптимальное значение курсового угла полета БЛА при действии ветра вычисляется как:

$$\Psi_0^* = \operatorname{arc tg} \left[ \frac{(z_1 - z_0) \mp w_z (t_2 - t_1)}{(x_1 - x_0) \mp w_x (t_2 - t_1)} \right]. \quad (9.4.13)$$

Из сравнения полученного выражения с формулой (9.4.1) следует, что при  $w_x = w_z = 0$  угол  $\Psi_0^*$  равен углу  $\Psi_0$  поворота траектории при полете БЛА по кратчайшему отрезку прямой, соединяющей точки  $(x_0, z_0)$  и  $(x_1, z_1)$  (см. Рис. 9.9). При этом полетное время  $\tau$  будет равно:

$$\tau = (t_2 - t_1) = \frac{1}{V} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}. \quad (9.4.14)$$

Для определения значения  $t_2^0$  возведем в квадраты обе части каждого из соотношений (9.4.12) и, просуммировав результаты, получим выражение вида:

$$\frac{1}{V^2} \left[ \left( \frac{x_1 - x_0}{t_2 - t_1} \mp w_x \right)^2 + \left( \frac{z_1 - z_0}{t_2 - t_1} \mp w_z \right)^2 \right] = 1.$$

Проводя преобразования этого выражения с учетом того, что  $w_x^2 + w_z^2 = W^2$ , получим для определения значения  $t_2^0$  квадратное уравнение:

$$(V^2 - W^2)(t_2 - t_1)^2 + 2(t_2 - t_1)[\pm(x_1 - x_0)w_x \pm (z_1 - z_0)w_z] - [(x_1 - x_0)^2 + (z_1 - z_0)^2] = 0.$$

Решая это уравнение, имеем:

$$\begin{aligned} \tau^0 = (t_2^0 - t_1) &= \\ &= \frac{\sqrt{[\pm(x_1 - x_0)w_x \pm (z_1 - z_0)w_z]^2 + (V^2 - W^2)[(x_1 - x_0)^2 + (z_1 - z_0)^2]}}{V^2 - W^2} - \\ &\quad - \frac{\pm(x_1 - x_0)w_x \pm (z_1 - z_0)w_z}{V^2 - W^2}. \end{aligned} \quad (9.4.15)$$

Из этого выражения при значениях  $w_x = w_z = W = 0$  следует формула (9.4.14). Полученная величина  $(t_2^0 - t_1)$ , подставленная в выражение (9.4.13), полностью определяет оптимальное кинематическое управление БЛА в условиях действия ветровых возмущений.

Проведем исследование полученных результатов, отсутствующее в работе [11].

Из Рис. 9.9 и сравнения зависимостей (9.4.12) и (9.4.1) следует, что путевой угол  $\Psi_0^*$  направлен из точки  $A(x_0, z_0)$ , в точку  $C(x^*, z^*)$ , координаты которой определяются как:

$$\begin{aligned}x^* &= x_1 \mp w_x(t_2^0 - t_1); \\z^* &= z_1 \mp w_z(t_2^0 - t_1).\end{aligned}$$

Последнее означает, что для парирования действующего ветра БЛА должен осуществлять полет из начальной точки  $A$  в упреждающую точку  $C$ . При этом выполнение условий (9.4.4), то есть попадание БЛА в точку  $B$  обеспечивается его «сносом» под воздействием компонент скорости ветра  $w_x \neq 0$ ,  $w_z \neq 0$ , что, как было отмечено в Разд. 4.2, широко применяется в практике пилотирования самолетов и вертолетов при наличии ветра.

Отметим, что в формулах (9.4.12) и (9.4.14) значения компонент  $w_x$  и  $w_z$  подставляются с их знаками, определяющими направления действия ветра с учетом направлений соответствующих осей используемой маневренной СК.

Из выражения (9.4.13) следует, что  $\dot{\Psi}_0^*(t) \equiv 0$ . Оптимальное косвенное управление БЛА  $u^0(t) = (P^0(t), \alpha^0(t), \gamma^0(t))$  находится из соотношений (5.2.21)-(5.2.23) при  $\theta_{\text{тр}}(t) = 0$ ,  $\dot{\theta}_{\text{тр}}(t) = 0$ ,  $\Psi_{\text{тр}}(t) = \Psi_0^*$ ,  $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) = \dot{\Psi}_0^*(t) = 0$ ,  $t \in [t_1, t_2^0]$ .

По результатам проведенных расчетов с использованием формул (9.4.5), (9.4.15) можно определить с помощью соотношения:

$$\Delta G_{\text{топ}} = q_{\text{сек}}(\tau^0 - \tau)$$

объем сэкономленного или перерасходованного топлива при движении БЛА в условиях действующего ветра.

Пусть БЛА должен осуществить перелет в вертикальной плоскости со скоростью  $V_{\text{зад}}(t) = V = \text{const}$  между точками с координатами  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$  за минимальное время  $(t_2 - t_1)$ . Бу-

дем считать, что в этой плоскости действуют ветровые возмущения с компонентами  $w_x$  и  $w_y$ .

В рассматриваемом случае его координаты  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$  определяются дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x} = V \cos \theta \pm w_x; \quad \dot{y} = V \sin \theta \pm w_y; \quad t \in [t_1, t_2], \quad (9.4.16)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x_0, & y(t_1) &= y_0; \\ x(t_2) &= x_1, & y(t_2) &= y_1. \end{aligned} \quad (9.4.17)$$

Проводя аналогичные выкладки, получаем, что оптимальное кинематическое управление БЛА задается значением угла наклона его траектории:

$$\theta_0^* = \operatorname{arctg} \left( \frac{y_1 - y_0 \mp w_y(t_2^0 - t_1)}{x_1 - x_0 \mp w_x(t_2^0 - t_1)} \right), \quad (9.4.18)$$

которое получается на основе решения задачи Коши (9.4.16), (9.4.17) вида:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + (V \cos \theta \pm w_x)(t - t_1); \\ y(t) &= y_0 + (V \sin \theta \pm w_y)(t - t_1). \end{aligned}$$

Полетное время  $\tau^0 = (t_2^0 - t_1)$ , входящее в формулу (9.4.18), вычисляется с помощью выражения (9.4.15) при следующих заменах:

$$z = y; \quad w_z = w_y; \quad W^2 = w_x^2 + w_y^2.$$

В данном случае для парирования действующих ветровых возмущений БЛА должен иметь направление полета из начальной точки маршрута в упреждающую точку с координатами:

$$\begin{aligned} x^* &= x_1 \mp w_x(t_2^0 - t_1); \\ y^* &= y_1 \mp w_y(t_2^0 - t_1). \end{aligned}$$

Вектор  $u^0(t) = (P^0(t), \alpha^0(t))$ ,  $t \in [t_1, t_2^0]$  определяется из уравнений (5.2.22), (5.2.23) при следующих исходных данных:

$$\begin{aligned} V_{\text{зад}}(t) &= V; \quad \dot{V}_{\text{зад}}(t) = 0; \quad \theta_{\text{тр}}(t) = \theta_0^*; \\ \dot{\theta}_{\text{тр}}(t) &= 0; \quad \Psi_{\text{тр}}(t) = 0; \quad \dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) = 0. \end{aligned}$$

Пусть БЛА должен осуществить пространственный перелет со скоростью  $V = \text{const}$  между точками  $A(x_0, y_0, z_0)$  и  $B(x_1, y_1, z_1)$  при действии ветровых возмущений с характеристиками  $w_x \neq 0$ ,  $w_y \neq 0$ ,  $w_z \neq 0$ .

Координаты  $x(t), y(t), z(t)$  возмущенной траектории движения БЛА определяются из системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V \cos \theta \cos \Psi \pm w_x; \\ \dot{y} &= V \sin \theta \pm w_y; \\ \dot{z} &= V \cos \theta \sin \Psi \pm w_z; \quad t \in [t_1, t_2],\end{aligned}\tag{9.4.19}$$

сформированной на основе модели (5.1.16)-(5.1.21) пространственного движения БЛА.

Входящие в правые части этих уравнений компоненты вектора  $W$  скорости действующего ветра должны иметь знаки, согласованные с направлениями осей применяемой маневренной СК  $Mxyz$ .

Координаты БЛА должны удовлетворять граничным условиям вида:

$$x(t_1) = x_0; \quad y(t_1) = y_0; \quad z(t_1) = z_0; \tag{9.4.20}$$

$$x(t_2) = x_1; \quad y(t_2) = y_1; \quad z(t_2) = z_1. \tag{9.4.21}$$

Требуется определить кинематические управлении  $\theta = \theta(t)$ ,  $\Psi = \Psi(t)$  и значение момента времени  $t_2$ , доставляющие минимальное значение функционалу (9.4.5) при выполнении условий (9.4.19)-(9.4.21).

Функция Гамильтона (2.5.12), построенная на основе уравнений (9.4.19), записывается как:

$$\begin{aligned}H &= \lambda_1(V \cos \theta \cos \Psi \pm w_x) + \lambda_2(V \sin \theta \pm w_y) + \\ &\quad + \lambda_3(V \cos \theta \sin \Psi \pm w_z).\end{aligned}\tag{9.4.22}$$

Уравнения (2.5.13) для определения входящих в это выражение сопряженных функций  $\lambda_1 = \lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2 = \lambda_2(t)$ ,  $\lambda_3 = \lambda_3(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$  имеют следующий вид:

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0; \quad \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0; \quad \dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Интегрируя эти уравнения, имеем:

$$\lambda_1(t) = C_1; \quad \lambda_2(t) = C_2; \quad \lambda_3(t) = C_3, \quad (9.4.23)$$

где  $C_1, C_2, C_3$  – постоянные интегрирования.

Оптимальные кинематические управления БЛА определяются из решения системы уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \theta} &= -\lambda_1 V \sin \theta \cos \Psi + \lambda_2 V \cos \theta - \lambda_3 V \sin \theta \sin \Psi = 0; \\ \frac{\partial H}{\partial \Psi} &= -\lambda_1 V \cos \theta \sin \Psi + \lambda_3 V \cos \theta \cos \Psi = 0,\end{aligned}$$

которая является конкретизацией выражений (2.5.16).

Проводя несложные преобразования, получим следующий вид этой системы:

$$-\sin \theta (\lambda_1 \cos \Psi + \lambda_3 \sin \Psi) + \lambda_2 \cos \theta = 0; \quad (9.4.24)$$

$$\cos \theta (-\lambda_1 \sin \Psi + \lambda_3 \cos \Psi) = 0. \quad (9.4.25)$$

Из выражений (9.4.23) следует, что решения  $\theta_0$  и  $\Psi_0$  системы (9.4.24), (9.4.25) не зависят от времени, то есть являются постоянными значениями на интервале времени  $[t_1, t_2]$ .

В связи с тем, что  $\cos \theta$  при произвольных значениях координат точек  $A$  и  $B$  выполняемого маршрута не равен нулю, из выражения (9.4.25) получаем уравнение вида:

$$-\lambda_1 \sin \Psi + \lambda_3 \cos \Psi = 0.$$

Проводя в нем замену (9.4.23), имеем, что

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{C_3}{C_1}. \quad (9.4.26)$$

Решая уравнение (9.4.24) относительно управления  $\theta$  с учетом соотношений (9.4.23), получим:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{C_2}{C_1 \cos \Psi + C_3 \sin \Psi}. \quad (9.4.27)$$

Используя известные тригонометрические формулы [17] и выражение (9.4.26), сформируем следующие вспомогательные соотношения:

$$C_1 \cos \Psi = \frac{C_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Psi}} = \frac{C_1^2}{\sqrt{C_1^2 + C_3^2}};$$

$$C_3 \sin \Psi = \frac{C_3 \operatorname{tg} \Psi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Psi}} = \frac{C_3^2}{\sqrt{C_1^2 + C_3^2}}.$$

Подставляя эти соотношения в формулу (9.4.27), получим выражение вида:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{C_2 \sqrt{C_1^2 + C_3^2}}{C_1^2 + C_3^2} = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_3^2}}. \quad (9.4.28)$$

Конкретизируем значения постоянных интегрирования  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ , входящие в выражения (9.4.26) и (9.4.28).

Представим условия (9.4.21) в форме равенств вида (2.5.22):

$$f_1(x_1) = x(t_2) - x_1 = 0;$$

$$f_2(y_1) = y(t_2) - y_1 = 0; \quad (9.4.29)$$

$$f_3(z_1) = z(t_2) - z_1 = 0;$$

В связи с тем, что в решаемой задаче параметр  $t_2$  является варьируемым, значения сопряженных функций  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  при  $t = t_2$  должны удовлетворять второй группе равенств из состава выражений (2.5.23).

С учетом соотношений (9.4.6) и (9.4.29) эти равенства принимают следующий вид:

$$\lambda_1(t_2) - \mu_1 = 0; \quad \lambda_2(t_2) - \mu_2 = 0; \quad \lambda_3(t_2) - \mu_3 = 0, \quad (9.4.30)$$

где  $\mu_i = \text{const}$  – неопределенные множители Лагранжа,  $i = (\overline{1,3})$ .

Сопоставляя эти выражения с решением (9.4.23) сопряженной системы уравнений задачи, имеем, что  $C_1 = \mu_1$ ,  $C_2 = \mu_2$  и  $C_3 = \mu_3$ .

В этом случае соотношения (9.4.26) и (9.4.28) примут вид:

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{\mu_3}{\mu_1}; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_3^2}}. \quad (9.4.31)$$

Для дальнейшего решения задачи сформируем на их основе следующие вспомогательные соотношения:

$$\begin{aligned}\cos \Psi &= \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_3^2}}; \quad \sin \Psi = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_3^2}}; \\ \cos \theta &= \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_3^2}{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}}; \quad \sin \theta = \frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}}.\end{aligned}\tag{9.4.32}$$

Решение задачи Коши (9.4.19), (9.4.20) при  $V = \text{const}$ ,  $\theta = \text{const}$  и  $\Psi = \text{const}$  записывается как:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + (V \cos \theta \cos \Psi \pm w_x)(t - t_1); \\ y(t) &= y_0 + (V \sin \theta \pm w_y)(t - t_1); \\ z(t) &= z_0 + (V \cos \theta \sin \Psi \pm w_z)(t - t_1).\end{aligned}$$

Эти соотношения представляют собой уравнения пространственной прямой в параметрической форме [17].

В момент времени  $t = t_2$  это решение должно удовлетворять условиям (9.4.21), то есть иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}x_0 + (V \cos \theta \cos \Psi \pm w_x)(t_2 - t_1) &= x_1; \\ y_0 + (V \sin \theta \pm w_y)(t_2 - t_1) &= y_1; \\ z_0 + (V \cos \theta \sin \Psi \pm w_z)(t_2 - t_1) &= z_1.\end{aligned}$$

Подставим в эти соотношения выражения (9.4.32) и представим их в виде совокупности уравнений:

$$\begin{aligned}\left( \frac{V\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}} \pm w_x \right) (t_2 - t_1) - x_1 + x_0 &= 0; \\ \left( \frac{V\mu_2}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}} \pm w_y \right) (t_2 - t_1) - y_1 + y_0 &= 0; \\ \left( \frac{V\mu_3}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}} \pm w_z \right) (t_2 - t_1) - z_1 + z_0 &= 0.\end{aligned}\tag{9.4.33}$$

В уравнения (9.4.33) входят неизвестные параметры  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  и  $t_2$ . Четвертое уравнение для их определения сформируем с использованием второго равенства из состава выражений (2.5.24).

При  $t = t_2$  это равенство с использованием формул (9.4.22) и (9.4.6) конкретизируется как:

$$\lambda_1(t_2)(V \cos \theta \cos \Psi \pm w_x) + \lambda_2(t_2)(V \sin \theta \pm w_y) + \\ + \lambda_3(t_2)(V \cos \theta \sin \Psi \pm w_z) + q_{\text{сек}} = 0.$$

Применяя выражения (9.4.30) и (9.4.32) и проводя несложные преобразования, получаем уравнение вида:

$$V \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2} \pm \mu_1 w_x \pm \mu_2 w_y \pm \mu_3 w_z + q_{\text{сек}} = 0. \quad (9.4.34)$$

Решение системы нелинейных уравнений (9.4.33), (9.4.34) может быть получено одним из численных методов, описанных в Разд. 3.4.

Пусть  $\mu_1^0, \mu_2^0, \mu_3^0, t_2^0$  – решение этой системы. Тогда из выражений (9.4.31) следует, что оптимальное кинематическое управление БЛА в окончательном виде определяется из следующих формул:

$$\Psi_0 = \arctg \left( \frac{\mu_3^0}{\mu_1^0} \right); \quad \theta_0 = \arctg \left( \frac{\mu_2^0}{\sqrt{(\mu_1^0)^2 + (\mu_3^0)^2}} \right). \quad (9.4.35)$$

Координаты точки упреждения при полете БЛА в неспокойной атмосфере вычисляются как:

$$\begin{aligned} x^* &= x_1 \mp w_x(t_2^0 - t_1); \\ y^* &= y_1 \mp w_y(t_2^0 - t_1); \\ z^* &= z_1 \mp w_z(t_2^0 - t_1). \end{aligned}$$

Заметим, что в этих формулах составляющие скорости ветра  $w_x, w_y, w_z$  должны иметь противоположные знаки по отношению к знакам, используемым в системе уравнений (9.4.33), (9.4.34).

Оптимальный вектор косвенного управления  $u^0(t) = (P^0(t), \alpha^0(t), \gamma^0(t))$ , обеспечивающий перелет БЛА на интервале времени  $[t_1, t_2^0]$  из точки  $A(x_0, y_0, z_0)$  в точку  $B(x_1, y_1, z_1)$ , вычисляется при исходных данных:

$V_{\text{зад}}(t) = V$ ;  $\theta_{\text{тр}}(t) = \theta_0$ ;  $\dot{\theta}_{\text{тр}}(t) = 0$ ;  $\Psi_{\text{тр}}(t) = \Psi_0$ ;  $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) = 0$  путем решения системы уравнений (5.1.54).

Отметим, что задача оптимального пространственного перелета ЛА в неспокойной атмосфере в работе [11] не рассматривалась.

## 9.5. Управление торможением и разгоном БЛА

В данном разделе рассматривается метод непосредственного формирования оптимального вектора  $u^0(t)$  косвенного управления БЛА с использованием принципа максимума Л.С. Понtryгина, изложенного в Разд. 2.5.2.

Пусть БЛА должен осуществить в вертикальной плоскости прямолинейный полет на высоте  $h$  на заданном отрезке времени  $[t_2; t_3]$ . При этом считаются заданными начальные значения его скорости  $V_2 = V(t_2)$  и местоположения  $x_2 = x(t_2)$  (Рис. 9.10).

Необходимо выбрать вектор управления  $u(t) = (P(t), \alpha(t))$ , доставляющий минимум функционалу вида (2.5.11), который конкретизируется как:

$$J = V_3 \rightarrow \min_{u(t)} . \quad (9.5.1)$$

где  $V_3 = V(t_3)$  – скорость БЛА в момент времени  $t = t_3$ .

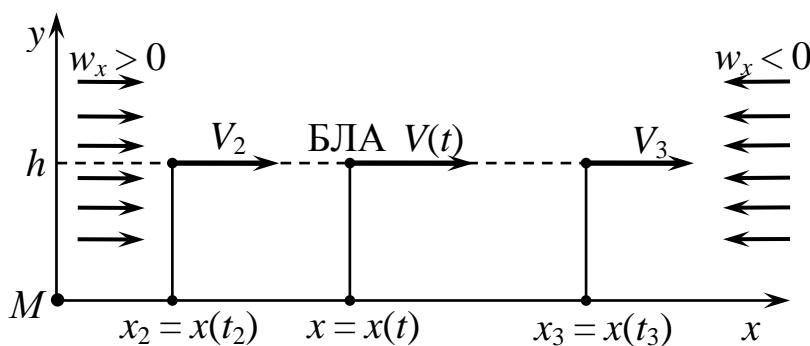


Рис. 9.10

Смысл этого критерия состоит в обеспечении на заданном интервале времени  $[t_2, t_3]$  процесса оптимального торможения БЛА для  $V_3 < V_2$ .

Динамика полета БЛА в вертикальной плоскости описывается выражениями (5.2.1)-(5.2.4).

Из Разд. 5.2 известно, что при полете БЛА на постоянной высоте  $h$  углы  $\theta(t) = 0$ ,  $\dot{\theta}(t) = 0$ .

При этих условиях модель движения БЛА будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{P - X(V, \alpha, h)}{m}; \\ P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, h) - mg &= 0; \\ \dot{x} &= V; \quad \dot{y} = 0.\end{aligned}$$

Второе уравнение этой системы описывает условие осуществления БЛА горизонтального полета на постоянной высоте  $h$ .

Выделим из второго уравнения массу БЛА:

$$m = \frac{1}{g}[P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, h)]$$

и, подставив ее в первое уравнение, получим систему уравнений, описывающую процессы торможения и разгона БЛА на интервале времени  $[t_2; t_3]$ :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{g[P - X(V, \alpha, h)]}{P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, h)}; \\ \dot{x} &= V, \quad t \in [t_2, t_3].\end{aligned}\tag{9.5.2}$$

с начальными условиями  $V(t_2) = V_2$ ;  $x(t_2) = x_2$ .

Эти уравнения для рассматриваемой задачи являются конкретизацией модели управляемого движения БЛА вида (2.5.1).

При этом ограничения (2.5.5) имеют вид:

$$P_{\min} \leq P \leq P_{\max}; \quad \alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}.$$

Гамильтониан (2.5.12) задачи, формируемый на основе уравнений (9.5.2), конкретизируется в форме следующего выражения:

$$H = \lambda_1 \frac{g[P - X(V, \alpha, h)]}{P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, h)} + \lambda_2 V. \quad (9.5.3)$$

Уравнения (2.5.13) для вычисления сопряженных функций  $\lambda_1(t)$  и  $\lambda_2(t)$  записываются как:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial V} = \\ &= -\lambda_1 g \frac{\frac{\partial X}{\partial V}(P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, h)) - \frac{\partial Y}{\partial V}(P - X(V, \alpha, h))}{(P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, h))^2} - \lambda_2; \quad (9.5.4) \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Для определения оптимальных управлений  $P^0(t)$  и  $\alpha^0(t)$  используются уравнения (2.5.16), которые в нашем случае примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \alpha} &= -\lambda_1 g \frac{\frac{\partial X}{\partial \alpha}(P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, h)) - \left(P\varphi_{\text{дв}} + \frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right)(P - X(V, \alpha, h))}{(P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, h))^2} = 0; \\ \frac{\partial H}{\partial P} &= \lambda_1 g \frac{P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, h) - (\alpha + \varphi_{\text{дв}})(P - X(V, \alpha, h))}{(P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, h))^2} = 0. \end{aligned}$$

В связи с тем, что знаменатель в этих формулах и сомножитель  $\lambda_1(t)g$  не равны нулю, запишем полученные уравнения в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \alpha}(P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, h)) + \left(P\varphi_{\text{дв}} + \frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right)(P - X(V, \alpha, h)) &= 0; \\ P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, h) - (\alpha + \varphi_{\text{дв}})(P - X(V, \alpha, h)) &= 0. \end{aligned} \quad (9.5.5)$$

Заметим, что в эти уравнения не входят сопряженные функции  $\lambda_1(t)$  и  $\lambda_2(t)$ . Начальные условия для системы уравнений (9.5.4), задаваемые в момент времени  $t = t_3$  с учетом второго из равенств (2.5.14) запишутся как:

$$\lambda_1(t_3) = -1; \quad \lambda_2(t_3) = 0. \quad (9.5.6)$$

Отметим, что при этих начальных условиях уравнения (9.5.4) интегрируются в «обратном» времени, то есть от  $t_3$  до  $t_2$ .

Конкретизируем вид уравнений (9.5.5), используя следующие представления силы лобового сопротивления БЛА и его подъемной силы:

$$\begin{aligned} X(V, \alpha, h) &= 0,5c_x(V, \alpha)\rho(h)V^2S; \\ Y(V, \alpha, h) &= 0,5c_y(V, \alpha)\rho(h)V^2S, \end{aligned} \quad (9.5.7)$$

где согласно выражениям (5.1.43) и (5.1.44) коэффициенты этих сил представляются как:

$$\begin{aligned} c_y(V, \alpha) &= B(V, \alpha) + D(V, \alpha)\alpha; \\ c_x(V, \alpha) &= E(V, \alpha) + K(V, \alpha)(\alpha + \alpha_0)^2, \end{aligned} \quad (9.5.8)$$

Входящие в эти выражения вспомогательные функции  $B(V, \alpha)$ ,  $D(V, \alpha)$ ,  $E(V, \alpha)$  и  $K(V, \alpha)$  вычисляются по формулам (5.1.45).

Определим частные производные от  $X$  и  $Y$  по  $\alpha$ , входящие в первое уравнение системы (9.5.5).

Конкретизируем вид выражений (9.5.7) путем подстановки в них зависимостей (9.5.8):

$$\begin{aligned} X(V, \alpha, h) &= 0,5[E(V, \alpha) + K(V, \alpha)(\alpha + \alpha_0)^2]\rho(h)V^2S; \\ Y(V, \alpha, h) &= 0,5[B(V, \alpha) + D(V, \alpha)\alpha]\rho(h)V^2S. \end{aligned} \quad (9.5.9)$$

где  $a = a(h)$  – скорость звука на высоте  $h$ , вычисляемая по формуле (5.1.42).

С учетом этого имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \alpha} &= K(V, \alpha)\rho(h)V^2S(\alpha + \alpha_0); \\ \frac{\partial Y}{\partial \alpha} &= 0,5D(V, \alpha)\rho(h)V^2S. \end{aligned} \quad (9.5.10)$$

Подставляя соотношения (9.5.9) и (9.5.10) в выражения (9.5.5), получаем окончательный вид системы нелинейных параметрических уравнений для вычисления оптимальных управлений  $P^0 = P^0(t)$  и  $\alpha^0 = \alpha^0(t)$  при  $t \in [t_2, t_3]$ :

$$\begin{aligned}
& K(V, a) \rho(h) V^2 S (\alpha + \alpha_0) [P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + \\
& + 0,5[B(V, a) + D(V, a)\alpha] \rho(h) V^2 S + \\
& + [P\varphi_{\text{дв}} + 0,5D(V, a)\rho(h)V^2 S][P - 0,5(E(V, a) + \\
& + K(V, a)(\alpha + \alpha_0)^2 \rho(h)V^2 S)] = 0; \\
& P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + 0,5(B(V, a) + D(V, a)\alpha) \rho(h) V^2 S - \\
& - (\alpha + \varphi_{\text{дв}}) \{P - 0,5[E(V, a) + K(V, a)(\alpha + \alpha_0)^2]\} \times \\
& \times \rho(h) V^2 S = 0.
\end{aligned} \tag{9.5.11}$$

Представим систему уравнений (9.5.11) в общем виде как:

$$\begin{aligned}
F_1(\alpha(t), P(t), V(t)) &= 0; \\
F_2(\alpha(t), P(t), V(t)) &= 0, \quad t \in [t_2, t_3].
\end{aligned} \tag{9.5.12}$$

Для решения задачи введем сетку значений времени  $t$  вида:

$$t_2 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_i < \tau_{i+1} < \tau_n < t_3 \tag{9.5.13}$$

с шагом  $\tau_{i+1} - \tau_i = \Delta\tau$ ,  $i = (\overline{0, n-1})$ .

Шаг сетки определим с использованием выражения:

$$\Delta\tau = \frac{t_3 - t_2}{n}, \tag{9.5.14}$$

где  $n$  – достаточно большое число.

Значения узлов сетки (9.5.13) вычисляются по следующей формуле:

$$\tau_i = t_2 + i \Delta\tau, \quad i = (\overline{0, n}). \tag{9.5.15}$$

С учетом этого, полагая  $t = \tau_i$ , перепишем систему уравнений (9.5.12) в форме:

$$\begin{aligned}
F_1(\alpha_i, P_i, V_i) &= 0; \\
F_2(\alpha_i, P_i, V_i) &= 0, \quad i = (\overline{0, n}).
\end{aligned} \tag{9.5.16}$$

Данная система уравнений решается методами, описанными в Разд. 3.5.

Нелинейная система дифференциальных уравнений (9.5.2) интегрируется одним из численных методов, приведенных в Разд. 3.1.

Пусть для определенности таким методом является метод Эйлера, расчетная схема которого имеет вид:

$$V(t + \Delta t) = V(t) + \Delta t \frac{g[P(t) - X(V(t), \alpha(t), h)]}{P(t)(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V(t), \alpha(t), h)};$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t V(t),$$

где  $\Delta t$  – шаг интегрирования.

При использовании сетки (9.5.13)-(9.5.15) эта схема может быть представлена в следующей дискретной форме:

$$\begin{aligned} V_{i+1} &= V_i + \Delta \tau \frac{g[P_i - X(V_i, \alpha_i, h)]}{P_i(\alpha_i + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V_i, \alpha_i, h)}; \\ x_{i+1} &= x_i + \Delta \tau V_i, \quad i = (\overline{0, n-1}); \\ V_0 &= V_2; \quad x_0 = x_2. \end{aligned} \quad (9.5.17)$$

Заметим, что при использовании этих рекуррентных уравнений в них подставляются выражения (9.5.9).

Преобразуем к аналогичному виду систему уравнений (9.5.4) для вычисления сопряженных функций  $\lambda_1(t)$  и  $\lambda_2(t)$ .

Из второго уравнения этой системы и начальных условий (9.5.6) следует, что  $\lambda_2(t) = \text{const} = 0$ .

Подставляя это решение в первое уравнение системы (9.5.4) и проводя соответствующие преобразования, получаем дифференциальное уравнение вида:

$$\dot{\lambda}_1 = -g \frac{\frac{\partial X}{\partial V}[P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, h)] - \frac{\partial Y}{\partial V}[P - X(V, \alpha, h)]}{[P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, h)]^2} \lambda_1 \quad (9.5.18)$$

с начальным условием:

$$\lambda_1(t_3) = -1. \quad (9.5.19)$$

Производные, входящие в правую часть этого уравнения с использованием выражений (9.5.9) будут равны:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial V} &= \rho(h)VS[E(V,a) + K(V,a)(\alpha + \alpha_0)^2] + \\ &\quad + 0,5[E_V(V,a) + K_V(V,a)(\alpha + \alpha_0)^2]\rho(h)V^2S; \quad (9.5.20) \\ \frac{\partial Y}{\partial V} &= \rho(h)VS[B(V,a) + D(V,a)\alpha] + \\ &\quad + 0,5[B_V(V,a) + D_V(V,a)\alpha]\rho(h)V^2S,\end{aligned}$$

где функции  $B, D, E, K$  определяются выражениями (5.1.45), а их производные имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}B_V(V,a) &= \frac{b_1}{a}; \quad D_V(V,a) = \frac{d_1}{a}; \\ E_V(V,a) &= \frac{c_1}{a}; \quad K_V(V,a) = 2A\left(d_0 + \frac{d_1}{a}V\right)\frac{d_1}{a}. \quad (9.5.21)\end{aligned}$$

Введем обозначение:

$$F(V,\alpha,P) = g \frac{\frac{\partial X}{\partial V}[P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V,\alpha,h)] - \frac{\partial Y}{\partial V}[P - X(V,\alpha,h)]}{[P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V,\alpha,h)]^2}, \quad (9.5.22)$$

которое конкретизируется с использованием выражений (9.5.20), (5.1.45), (9.5.21) и (9.5.9).

Тогда уравнение (9.5.18) представляется в общем виде как:

$$\dot{\lambda}_1 = -F(V,\alpha,P)\lambda_1.$$

В дальнейшем индекс «1» у функции  $\lambda_1(t)$  будет опущен.

Расчетная схема интегрирования этого уравнения методом Эйлера в «обратном» времени на сетке (9.5.13)-(9.5.15) при начальном условии (9.5.19) имеет вид:

$$\begin{aligned}\lambda_{i-1} &= \lambda_i + \Delta\tau F(V_i, a_i, P_i)\lambda_i, \quad i = n, n-1, \dots, 1; \\ \lambda_n &= -1.\end{aligned} \quad (9.5.23)$$

Применение расчетной схемы (9.5.17) должно осуществляться совместно с решением системы уравнений (9.5.16) на каждом шаге вычислительного процесса.

Результаты  $\alpha_0$  и  $P_0$  решения при  $i = 0$  системы уравнений:

$$F_1(\alpha_0, P_0, V_2) = 0;$$

$$F_2(\alpha_0, P_0, V_2) = 0$$

подставляются в правую часть первого соотношения из состава выражений (9.5.17).

На их основе вычисляются значения  $V_1$  и  $x_1$ , первое из которых подставляется в левую часть системы (9.5.16), и используются для определения значений  $\alpha_1$ ,  $P_1$ . Последние подставляются в выражения (9.5.17), и на их основе вычисляются значения  $V_2$  и  $x_2$  и т.д. до определения значений  $V_n$  и  $x_n$ . При этом число  $V_n$  является значением функционала (9.5.1) при управлении, оформленных в виде массивов  $\mathcal{A} = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  и  $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ , сформированных на базе дискретного представления условий оптимальности (9.5.5) вида (9.5.16).

Будем считать, что результаты применения расчетной схемы (9.5.17) с использованием этих массивов также представляют собой массивы вида:

$$\mathcal{M}_V^{(0)} = \{V_0^{(0)}, V_1^{(0)}, \dots, V_n^{(0)}\}; \quad \mathcal{M}_x^{(0)} = \{x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\}.$$

С помощью массивов  $\mathcal{M}_V^{(0)}$ ,  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{P}$  реализуется расчетная схема (9.5.23), результаты которой после сортировки в «прямом» времени представляются массивом вида:

$$\Lambda^{(0)} = \{\lambda_0^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_n^{(0)}\}.$$

С использованием выражений (9.5.9) и массивов  $\Lambda^{(0)}$ ,  $\mathcal{M}_V^{(0)}$ ,  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{P}$  сформируем по формуле:

$$H = \lambda_1 \frac{g[P - X(V, \alpha, h)]}{P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, h)}$$

массив значений функции Гамильтона (9.5.3):

$$\mathcal{H}^{(0)} = \{H_0^{(0)}, H_1^{(0)}, \dots, H_n^{(0)}\}$$

на временной сетке (9.5.13)-(9.5.15).

Определим с использованием известных численных процедур максимальный элемент  $H_{\max}^{(0)}$  этого массива.

Согласно условиям (2.5.16)-(2.5.18) и Рис. 2.12 максимум функции  $H$  может достигаться как в ее стационарной точке, описываемой массивами  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{P}$ , так и в граничных точках интервалов  $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$  и  $[P_{\min}, P_{\max}]$ . При этом оптимальному управлению БЛА  $u^0(t)$  соответствует наибольшее значение функции  $H$ .

Для выделения такого управления будем рассматривать следующие варианты дискретного представления управляющих воздействий:

$$u^{(0)} = \{\mathcal{A}; \mathcal{P}\}; \quad u^{(1)} = \{\alpha_{\min}; \mathcal{P}\}; \quad u^{(2)} = \{\alpha_{\max}; \mathcal{P}\}; \\ u^{(3)} = \{\mathcal{A}; P_{\min}\}; \quad u^{(4)} = \{\mathcal{A}; P_{\max}\}.$$

Каждое из управлений  $u^{(r)}$  подставляется в расчетную схему (9.5.17) и на его основе формируются массивы:

$$\mathcal{M}_V^{(r)} = \{V_0^{(r)}, V_1^{(r)}, \dots, V_n^{(r)}\}; \\ \mathcal{M}_x^{(r)} = \{x_0^{(r)}, x, \dots, x_n^{(r)}\}, \quad r = (\overline{1,4}).$$

Далее массив  $\mathcal{M}_V^{(r)}$  совместно с множеством  $u^{(r)}$  и расчетной схемой (9.5.23) используется при формировании массива  $\Lambda^{(r)}$  значений сопряженной функции  $\lambda_{1i}$ ,  $i = (\overline{0, n})$ . Полученный массив и множество  $u^{(r)}$  с привлечением формулы (9.5.24) применяется для табулирования функции Гамильтона в форме массива  $\mathcal{H}^{(r)}$ , в котором выделяется максимальный элемент  $H_{\max}^{(r)}$ ,  $r = (\overline{1,4})$ .

Оптимальным косвенным управлением БЛА является управление, определяемое как:

$$u^{(S)} = \arg \max \left\{ H_{\max}^{(0)}, H_{\max}^{(1)}, \dots, H_{\max}^{(4)} \right\}, \quad S \in (\overline{0,4}).$$

При этом критерий оптимальности (9.5.1) принимает значение, равное величине  $V_n^{(s)}$ ,  $s \in (\overline{0,4})$ .

Отметим, что оптимальный вектор  $u^0(t)$  также может быть найден с помощью численного метода, приведенного в Разд. 3.8.

При решении задачи оптимизации процесса разгона БЛА на интервале времени  $[t_2, t_3]$  применяемый функционал записывается как:

$$J = V_3 \rightarrow \max_{u(t)}.$$

Если его с помощью известного приема преобразовать к виду:

$$J = -V_3 \rightarrow \min_{u(t)}, \quad (9.5.25)$$

то к данной задаче с небольшими корректировками полностью применим изложенный выше метод формирования оптимального вектора  $u^0(t) = (P^0(t), \alpha^0(t))$  косвенного управления БЛА.

В частности, из вида функционала (9.5.25) следует, что начальное условие для сопряженной функции  $\lambda_1(t)$  запишется как:

$$\lambda_1(t_3) = 1.$$

Это условие в форме:

$$\lambda_n = 1,$$

используется в расчетной схеме (9.5.23).

В качестве развития рассмотренных задач оптимизации процессов торможения и разгона БЛА наибольший практический интерес представляют задачи выбора управлений  $u(t) = (P(t), \alpha(t))$ ,  $t \in [t_2, t_3]$  при действии попутного ( $+w_x$ ) и встречного ( $-w_x$ ) ветра (см. Рис. 9.9).

В этих случаях с привлечением вместо выражений (9.5.2) моделей движения БЛА в условиях действия ветровых возмущений вида:

$$\dot{V} = \frac{g[P - X(V \pm w_x, \alpha, h)]}{P(\alpha + \Phi_{\text{ДВ}}) + Y(V \pm w_x, \alpha, h)};$$

$$\dot{x} = V \pm w_x; \quad t \in [t_2, t_3];$$

$$V(t_2) = V_2 \pm w_x; \quad x(t_2) = x_2$$

полностью применим описанный выше подход к определению оптимального управления БЛА при его торможении и разгоне на интервале времени  $[t_2, t_3]$ .

Дальнейшее развитие задачи связано с выбором оптимального управления БЛА при его торможении (разгоне) на фиксированном интервале движения  $[x_2; x_3]$  при действии ветровых возмущений.

## 9.6. Управление набором высоты БЛА

Пусть в маневренной СК, представленной на Рис. 9.11, задана начальная точка набора высоты БЛА с координатами  $(L_1, h_1)$ .

Этот процесс, который осуществляется на интервале времени  $[t_1, t_2]$ , должен завершиться в точке с координатами  $(L_2, h_2)$ .

В начальной и конечной точках траектории БЛА кроме их координат считаются заданными требуемые значения углов  $\theta_1$  и  $\theta_2$  наклона его траектории.

Согласно выражениям (5.2.1)-(5.2.4) математическая модель движения БЛА в вертикальной плоскости имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{P - X(V, \alpha, y)}{m} - g \sin \theta; \quad t_1 \leq t \leq t_2; \\ \dot{\theta} &= \frac{P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, y)}{m} - \frac{g}{V} \cos \theta; \\ \dot{x} &= V \cos \theta; \quad \dot{y} = V \sin \theta.\end{aligned}\tag{9.6.1}$$

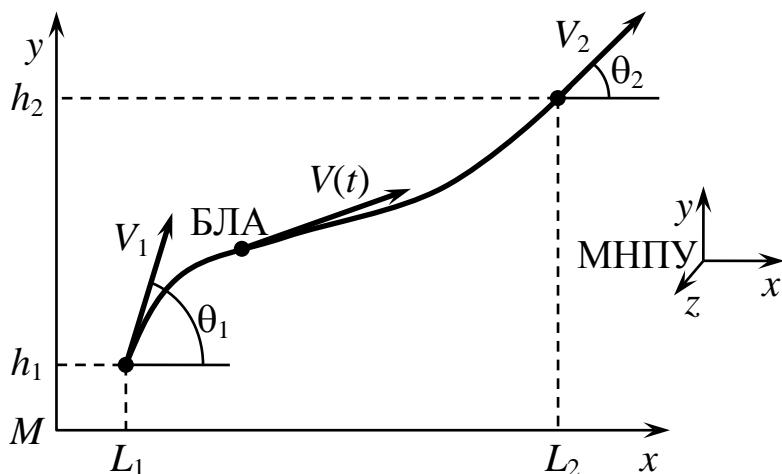


Рис. 9.11

Управление набором высоты БЛА будем осуществлять с помощью вектора  $u(t) = (P(t), \alpha(t))$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ , компоненты которого входят в правые части этой системы уравнений и на которые налагаются ограничения  $P_{\min} \leq P \leq P_{\max}$ ;  $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ .

Управление БЛА должно обеспечить выполнение следующих граничных условий:

$$V(t_1) = V_1; \quad \theta(t_1) = \theta_1; \quad x(t_1) = L_1; \quad y(t_1) = h_1; \quad (9.6.2)$$

$$V(t_2) = V_2; \quad \theta(t_2) = \theta_2; \quad x(t_2) = L_2; \quad y(t_2) = h_2; \quad (9.6.3)$$

Оптимизация процесса набора высоты ЛА подразумевает решение следующих задач [11]:

1. Выбор управления, реализующего набор высоты с минимальным расходом топлива (задача об экономичном наборе высоты).

2. Формирование управления, обеспечивающего максимальное значение скорости в конечной точке траектории набора высоты (задача о скороподъемности ЛА).

Отметим, что в работе [11] эти задачи сводятся к разрывным вариационным задачам и указывается только возможный вид оптимальных траекторий подъема ЛА без конкретизации необходимых для их реализации управлений.

Первая задача является весьма актуальной при эксплуатации БЛА большой продолжительности полетов на высотах  $h_2 \gg h_1$ . Выбор оптимального управления  $u^0(t) = (P^0(t), \alpha^0(t))$  такими БЛА будем проводить с использованием функционала вида:

$$J_1 = q_{\text{сек}}(t_2 - t_1) = f_0(t_2) \rightarrow \min_{u(t), t_2}, \quad (9.6.4)$$

где  $q_{\text{сек}}$  – секундный расход топлива силовой установки рассматриваемого образца БЛА.

Из вида этого функционала следует, что значение момента времени  $t_2$ , входящего в выражения (9.6.1), (9.6.3), является

варьируемым (свободным) в отличие от фиксированного (заданного) значения момента времени  $t_1$  начала набора высоты.

Будем решать эту задачу с использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина (см. Разд. 2.5.2).

Гамильтониан (2.5.12), сформированный с использованием уравнений (9.6.1), имеет вид:

$$H = \lambda_1 \left( \frac{P - X(V, \alpha, y)}{m} - g \sin \theta \right) + \\ + \lambda_2 \left( \frac{P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, y)}{mV} - \frac{g}{V} \cos \theta \right) + \\ + \lambda_3 V \cos \theta + \lambda_4 V \sin \theta. \quad (9.6.5)$$

Система уравнений (2.5.13) для определения сопряженных функций  $\lambda_j = \lambda_j(t)$ ,  $j = (\overline{1,4})$  записывается как:

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial V} = \frac{\lambda_1}{m} \frac{\partial X}{\partial V} - \\ - \lambda_2 \left[ \frac{\frac{\partial Y}{\partial V} mV - m(P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, y))}{m^2 V^2} + \frac{g}{V^2 \cos \theta} \right] - \lambda_3 \cos \theta - \lambda_4 \sin \theta; \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \lambda_1 g \cos \theta - \frac{\lambda_2 g}{V} \sin \theta + \lambda_3 V \sin \theta - \lambda_4 \cos \theta; \quad (9.6.6) \\ \dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0; \\ \dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\lambda_1}{m} \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\lambda_2}{mV} \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

Конкретизируем вид частных производных, входящих в последнее уравнение этой системы. Для этого будем использовать выражения (9.5.7), в которых зависимости плотности воздуха и скорости звука от высоты полета БЛА имеют следующий вид:

$$\rho(y) = \rho_0 e^{-ky}; \quad a(y) = 340 - 0,004y, \quad y \geq 0. \quad (9.6.7)$$

Дифференцируя функции  $X(V, \alpha, y)$  и  $Y(V, \alpha, y)$  по переменной  $y$ , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &= 0,5\rho_0 e^{-ky} \left[ E_y(V, a(y)) + K_y(V, a(y))(\alpha + \alpha_0)^2 \right] V^2 S - \\ &\quad - 0,5k\rho_0 e^{-ky} \left[ E(V, a(y)) + K(V, a(y))(\alpha + \alpha_0)^2 \right] V^2 S; \\ \frac{\partial Y}{\partial y} &= 0,5\rho_0 e^{-ky} \left[ B_y(V, a(y)) + D_y(V, a(y))\alpha \right] V^2 S - \\ &\quad - 0,5k\rho_0 e^{-ky} \left[ B(V, a(y)) + D(V, a(y))\alpha \right] V^2 S. \end{aligned} \quad (9.6.8)$$

Входящие в полученные соотношения вспомогательные функции  $E, K, B, D$  и их частные производные конкретизируются с учетом выражений (5.1.45) и (9.6.7) следующим образом:

$$\begin{aligned} B(V, a(y)) &= b_0 + \frac{b_1 V}{340 - 0,004 y}; \\ D(V, a(y)) &= d_0 + \frac{d_1 V}{340 - 0,004 y}; \\ E(V, a(y)) &= c_0 + \frac{c_1 V}{340 - 0,004 y}; \\ K(V, a(y)) &= A \left( d_0 + \frac{d_1 V}{340 - 0,004 y} \right)^2; \\ B_y(V, a(y)) &= \frac{\partial}{\partial y} B(V, a(y)) = - \frac{0,004 b_1 V}{(340 - 0,004 y)^2}; \\ D_y(V, a(y)) &= \frac{\partial}{\partial y} D(V, a(y)) = - \frac{0,004 d_1 V}{(340 - 0,004 y)^2}; \\ E_y(V, a(y)) &= \frac{\partial}{\partial y} E(V, a(y)) = - \frac{0,004 c_1 V}{(340 - 0,004 y)^2}; \\ K_y(V, a(y)) &= \frac{\partial}{\partial y} K(V, a(y)) = - \frac{0,008 A d_1 V}{(340 - 0,004 y)^2} \left( d_0 + \frac{d_1 V}{340 - 0,004 y} \right). \end{aligned} \quad (9.6.9)$$

Функция  $Y(V, \alpha, y)$  и производные  $\frac{\partial X}{\partial V}, \frac{\partial Y}{\partial V}$ , входящие в первое уравнение системы (9.6.6), определяются выражениями

(9.5.9), (9.5.20), (9.5.21) при подстановке в них соотношений (9.6.7) и (9.6.9).

Таким образом, система уравнений (9.6.6) полностью определяется приведенными выше соотношениями.

Условия оптимальности (2.5.16) управления БЛА с использованием выражения (9.6.5) имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial P} &= \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{V} (\alpha + \varphi_{\text{дв}}) = 0; \\ \frac{\partial H}{\partial \alpha} &= -\lambda_1 \frac{\partial X}{\partial \alpha} + \frac{\lambda_2}{V} \left( P + \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \right) = 0.\end{aligned}\quad (9.6.10)$$

Разрешая эти уравнения относительно управляющих воздействий  $\alpha = \alpha(t)$  и  $P = P(t)$ , получим:

$$\alpha = -\varphi_{\text{дв}} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} V; \quad P = \frac{\lambda_1 V}{\lambda_2} \frac{\partial X}{\partial \alpha} - \frac{\partial Y}{\partial \alpha}. \quad (9.6.11)$$

Входящие во вторую формулу частные производные конкретизируются с использованием выражений (9.5.10), (9.6.7) и (9.6.9) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial \alpha} &= A \rho_0 e^{-ky} \left( d_0 + \frac{d_1 V}{340 - 0,004 y} \right)^2 V^2 S(\alpha + \alpha_0); \\ \frac{\partial Y}{\partial \alpha} &= 0,5 \rho_0 e^{-ky} \left( d_0 + \frac{d_1 V}{340 - 0,004 y} \right)^2 V^2 S.\end{aligned}$$

С учетом этих соотношений выражения (9.6.11) принимают вид:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= -\left( \varphi_{\text{дв}} + \frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} V(t) \right); \\ P(t) &= \frac{\lambda_1(t) V(t)}{\lambda_2(t)} \left[ A \left( d_0 + \frac{d_1 V(t)}{340 - 0,004 y(t)} \right)^2 \times \right]\end{aligned}\quad (9.6.12)$$

$$\begin{aligned} & \times \rho_0 e^{-ky(t)} \left( \alpha_0 - \left( \varphi_{\text{дв}} + \frac{\lambda_1(t)V(t)}{\lambda_2(t)} \right) \right) V^2(t) S \Big] - \\ & - 0,5 \rho_0 e^{-ky(t)} \left( d_0 + \frac{d_1 V(t)}{340 - 0,004 y(t)} \right) V^2(t) S. \end{aligned}$$

Из этих формул следует, что для определения компонент вектора  $u^0(t)$  оптимального управления БЛА необходимо использовать результаты интегрирования систем уравнений (9.6.1) и (9.6.6).

Характерной особенностью решаемой задачи является наличие граничных условий вида (9.6.2), (9.6.3), которые определяют значения функций  $\lambda_i(t)$ ,  $i = (\overline{1,4})$ .

Начальные условия для системы (9.6.6) сформируем с использованием выражений (2.5.23) и (9.6.3).

Ограничения  $f_S$  вида (2.4.22) в нашем случае конкретизируются как:

$$\begin{aligned} f_1 &= V(t_2) - V_2 = V_{12} - V_2 = 0; \quad f_2 = \theta(t_2) - \theta_2 = \theta_{22} - \theta_2 = 0; \\ f_3 &= x(t_2) - L_2 = x_{32} - L_2 = 0; \quad f_4 = y(t_2) - h_2 = y_{42} - h_2 = 0. \end{aligned}$$

Дифференцируя эти равенства по параметрам  $V_{12}, \theta_{22}, x_{32}, y_{42}$  и используя вторую группу условий из состава выражений (2.5.23), получим:

$$\lambda_{i2} = -\mu_i; \quad i = (\overline{1,4}), \quad (9.6.13)$$

где  $\lambda_{i2} = \lambda_i(t_2)$  – начальные условия системы (9.6.6);  $\mu_i = \text{const}$  – неопределенные множители Лагранжа,  $i = (\overline{1,4})$ .

Второе из выражений (2.5.24) при  $t = t_2$  с учетом (9.6.4) и (9.6.13) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} & -\mu_1 \left( \frac{P_2 - X(V_2, \alpha_2, y_2)}{m} - g \sin \theta_2 \right) - \\ & -\mu_2 \left( \frac{P_2(\alpha_2 + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V_2, \alpha_2, y_2)}{mV_2} - \frac{g}{V_2} \cos \theta_2 \right) - \quad (9.6.14) \\ & -\mu_3 V_2 \cos \theta_2 - \mu_4 V_2 \sin \theta_2 + q_{\text{сек}} = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $P_2 = P(t_2)$ ,  $\alpha_2 = \alpha(t_2)$  – значения компонент вектора управления БЛА в момент времени  $t_2$  завершения набора высоты.

Эти значения получаются путем подстановки выражений (9.6.13) в формулы (9.6.12).

Заметим, что в выражение (9.6.14) не входит в явном виде искомый параметр  $t_2$  решаемой задачи. Другой важной ее особенностью является задание начальных условий системы уравнений (9.6.6) на правом конце интервала времени  $[t_1, t_2]$  в форме соотношений (9.6.13), содержащих неопределенные множители Лагранжа, тогда как такие условия для системы (9.6.1) определены в виде выражений (9.6.2) на его левом конце.

Отмеченные особенности задачи требуют использования специального численного метода ее решения. Градиентный метод решения задач оптимального управления с фиксированными граничными условиями, приведенный в работе [11], обладает значительной трудоемкостью и неопределенностью при выборе множителей Лагранжа, значения которых должны подбираться в процессе формирования вектора оптимального управления и искомых параметров решаемой задачи.

При реализации предлагаемого метода выражения (9.6.12) представляются в уравнения (9.6.1) и (9.6.6) и полученная система дифференциальных уравнений 8-го порядка численно интегрируется (см. Разд. 3.1) в «обратном» времени от момента времени  $t_2$  до момента времени  $t_1$  с начальными условиями (9.6.3) и (9.6.13). При этом используется шаг интегрирования  $\Delta t$  со знаком «минус».

Множители Лагранжа  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  будем определять, исходя из требования выполнения для подсистемы уравнений (9.6.1) граничных условий (9.6.2).

Для вычисления значений  $\mu_i$ , ( $i = \overline{1,4}$ ) предлагается использовать метод «пристрелки» решения краевых задач, изложенный в Разд. 3.6.

Следуя выражению (3.6.3), сформируем функции:

$$\begin{aligned}\varphi_1(\mu_1) &= V(t_1) - V_1; \\ \varphi_2(\mu_2) &= \theta(t_1) - \theta_1; \\ \varphi_3(\mu_3) &= y(t_1) - y_1; \\ \varphi_4(\mu_4) &= x(t_1) - x_1,\end{aligned}\tag{9.6.15}$$

которые описывают меры отклонения соответствующих решений системы (9.6.1), (9.6.6) от заданных граничных значений  $V_1, \theta_1, y_1$  и  $x_1$ . В этом случае неизвестные значения  $\mu_i$  вычисляются из решения уравнений  $\varphi_i(\mu_i) = 0, i = \overline{1,4}$ .

Расчетная схема итерационного процесса вычисления ис-комых множителей Лагранжа по аналогии с формулой (3.6.5) запишется как:

$$\begin{aligned}\mu_{1,k+2} &= \mu_{1,k+1} - \frac{(\mu_{1,k+1} - \mu_{1,k})\varphi_1(\mu_{1,k+1})}{\varphi_1(\mu_{1,k+1}) - \varphi_1(\mu_{1,k})}; \\ \mu_{2,k+2} &= \mu_{2,k+1} - \frac{(\mu_{2,k+1} - \mu_{2,k})\varphi_2(\mu_{2,k+1})}{\varphi_2(\mu_{2,k+1}) - \varphi_2(\mu_{2,k})}; \\ \mu_{3,k+2} &= \mu_{3,k+1} - \frac{(\mu_{3,k+1} - \mu_{3,k})\varphi_3(\mu_{3,k+1})}{\varphi_3(\mu_{3,k+1}) - \varphi_3(\mu_{3,k})}; \\ \mu_{4,k+2} &= \mu_{4,k+1} - \frac{(\mu_{4,k+1} - \mu_{4,k})\varphi_4(\mu_{4,k+1})}{\varphi_4(\mu_{4,k+1}) - \varphi_4(\mu_{4,k})},\end{aligned}\tag{9.6.16}$$

$k = 0,1,2,3,\dots$

В этой схеме в соответствии с выражениями (9.6.15) счита-ется, что

$$\begin{aligned}\varphi_1(\mu_{1,k}) &= V^{(k)}(t_1) - V_1; \\ \varphi_2(\mu_{2,k}) &= \theta^{(k)}(t_1) - \theta_1; \\ \varphi_3(\mu_{3,k}) &= y^{(k)}(t_1) - y_1; \\ \varphi_4(\mu_{4,k}) &= x^{(k)}(t_1) - x_1,\quad k = 0,1,2,3,\dots\end{aligned}\tag{9.6.17}$$

где  $V^{(k)}(t_1), \theta^{(k)}(t_1), y^{(k)}(t_1), x^{(k)}(t_1)$  – результаты интегри-рования системы уравнений (9.6.1), (9.6.6) в момент времени

$t = t_1$ , полученные при значениях множителей Лагранжа  $\mu_1 = \mu_{1,k}, \mu_2 = \mu_{2,k}, \mu_3 = \mu_{3,k}, \mu_4 = \mu_{4,k}$ .

Отметим, что для применения формул (9.6.16) необходимо задаться начальными приближениями  $\mu_{10}, \mu_{11}, \mu_{20}, \mu_{21}, \mu_{30}, \mu_{31}, \mu_{40}, \mu_{41}$ .

Итерационный процесс по формулам (9.6.16), (9.6.17) при фиксированном значении момента времени  $t_2$  реализуется до некоторого шага с номером  $N$ , при котором выполняется следующее условие его останова:

$$\max\{|\varphi_1(\mu_{1,N})|, |\varphi_2(\mu_{2,N})|, |\varphi_3(\mu_{3,N})|, |\varphi_4(\mu_{4,N})|\} \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – требуемая точность выполнения граничных условий (9.6.2).

При этом искомыми значениями множителей Лагранжа являются значения  $\mu_{1,N}, \mu_{2,N}, \mu_{3,N}$  и  $\mu_{4,N}$ .

Как было отмечено выше, равенство (9.6.14) не содержит в явном виде искомый параметр  $t_2$ . В связи с этим предлагается следующий подход для нахождения его оптимального значения  $t_2^0$ .

Зададимся множеством  $t_{2,1}, t_{2,2}, \dots, t_{2,r}, \dots, t_{2,R}$  моментов времени  $t_2$ . Эти значения выбираются из интервала  $[t_{\min}, t_{\max}]$ , границы которого вычисляются по формулам:

$$t_{\min} = \frac{1}{V_{\max}} \sqrt{(L_2 - L_1)^2 + (h_2 - h_1)^2};$$

$$t_{\max} = \frac{1}{V_{\min}} \sqrt{(L_2 - L_1)^2 + (h_2 - h_1)^2},$$

где  $V_{\min}, V_{\max}$  – минимальная и максимальная скорости рассматриваемого образца БЛА.

Для каждого из значений  $t_{2,r}$  определим выше приведенным методом «пристрелки» значения множителей Лагранжа, которые обозначим как  $\bar{\mu}_{1,r}, \bar{\mu}_{2,r}, \bar{\mu}_{3,r}, \bar{\mu}_{4,r}, r = (\overline{1, R})$ .

Сформируем с использованием этих значений и выражений (9.6.3), (9.6.14) функции:

$$H_r = H(t_{2,r}) = -\bar{\mu}_{1,r} \left( \frac{P_{2,r} X(V_2, \alpha_{2,r}, h_2)}{m} - g \sin \theta_2 \right) - \\ - \bar{\mu}_{2,r} \left( \frac{P_{2,r}(\alpha_{2,r} + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V_2, \alpha_{2,r}, h_2)}{m V_2} - \frac{g}{V_2} \cos \theta_2 \right) - (9.6.18) \\ - \bar{\mu}_{3,r} V_2 \cos \theta_2 - \bar{\mu}_{4,r} V_2 \sin \theta_2 + q_{\text{сек}}, \quad r = (\overline{1, R}).$$

Здесь  $P_{2,r}$  и  $\alpha_{2,r}$  вычисляются с использованием значений  $\bar{\mu}_{1,r}$  и  $\bar{\mu}_{2,r}$  указанным выше способом.

Если установлено, что при некотором  $r = \rho \in (\overline{1, R})$  функция  $H_\rho$  обращается в ноль, то искомое значение параметра  $t_2^0$  будет равно  $t_{2,\rho}$ . В этом случае в качестве оптимальных управляющих воздействий  $P^0(t)$  и  $\alpha^0(t)$  выступают результаты расчета по формулам (9.6.12), в которых использовано решение системы уравнений (9.6.1), (9.6.6) с начальными условиями:

$$V(t_{2,\rho}) = V_2; \quad \theta(t_{2,\rho}) = \theta_2; \quad y(t_{2,\rho}) = h_2; \quad x(t_{2,\rho}) = L_2; \\ \lambda_1(t_{2,\rho}) = \bar{\mu}_{1,\rho}; \quad \lambda_2(t_{2,\rho}) = \bar{\mu}_{2,\rho}; \quad \lambda_3(t_{2,\rho}) = \bar{\mu}_{3,\rho}; \quad \lambda_4(t_{2,\rho}) = \bar{\mu}_{4,\rho}.$$

В связи с тем, что эта задача Коши решается в «обратном» времени, полученные массивы значений  $P^0(t)$  и  $\alpha^0(t)$ ,  $t \in [t_2^0, t_2^0 - \Delta t, \dots, t_1]$  упорядочиваются по возрастанию значений  $t$  в интервале  $[t_1, t_2^0]$ .

Рассмотрим случай, когда при  $r = \sigma$  и  $r = \sigma + 1$  функции  $H_\sigma$  и  $H_{\sigma+1}$  имеют разные знаки,  $\sigma \in (\overline{1, R})$ . Из предположения, что функция  $H_r = H(t_{2,r})$  является монотонной функцией указанного аргумента, можно сделать вывод о существовании в интервале  $[t_{2,\sigma}, t_{2,\sigma+1}]$  значения  $t_2^0$ , при котором эта функция будет равна нулю.

Предполагая линейный вид зависимости функции  $H(t_2)$  при  $t_2 \in [t_{2,\sigma}, t_{2,\sigma+1}]$ , представленной на Рис. 9.12, искомый момент времени будем вычислять по следующей формуле:

$$t_2^0 = t_\sigma - \frac{H_\sigma(t_{\sigma+1} - t_\sigma)}{H_{\sigma+1} - H_\sigma}. \quad (9.6.19)$$

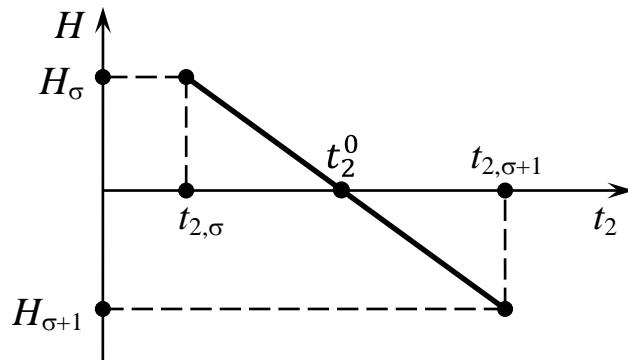


Рис. 9.12

Далее для этого момента времени указанным выше методом определяются значения множителей Лагранжа  $\mu_{1,N}^0, \mu_{2,N}^0, \mu_{3,N}^0, \mu_{4,N}^0$ , при вычислении которых формируются компоненты вектора управления  $u^0(t) = (P^0(t), \alpha^0(t))$  в «обратном» времени, то есть от момента времени  $t_2^0$  до момента времени  $t_1$ .

Компоненты этого вектора в «прямом» времени, как и выше, формируются с использованием соответствующей сортировки.

При необходимости учета изменения массы БЛА в процессе набора высоты в выражения (9.6.1) и (9.6.2) вводятся соотношения:

$$\dot{m} = -q_{\text{сек}}; \quad m(t_1) = m_1$$

и применяется описанный выше метод определения вектора оптимального управления БЛА.

При решении второй задачи используется функционал:

$$J_2 = V(t_2) \rightarrow \max_{u(t)} \quad (9.6.20)$$

и математическая модель (9.6.1)-(9.6.3), в которой отсутствует первое граничное условие из состава выражений (9.6.3).

Эта задача может быть использована при оптимальном управлении БЛА-И для его вывода в плоскость перехвата воздушной цели (см. Разд. 8.5.3).

Отметим, что в данной задаче момент времени  $t_2$  является заданным. При ее решении будем использовать приведенный

выше метод определения оптимального управления  $u^0(t)$  с соответствующими корректировками.

Перепишем функционал (9.6.20) в следующей форме:

$$J_2 = f_0(V_2) = -V_2 \rightarrow \min_{u(t)}. \quad (9.6.21)$$

Выражения (9.6.5), (9.6.6) и (9.6.12) остаются без изменений.

Сформируем с использованием вторых соотношений из состава выражений (2.5.23) начальные значения  $\lambda_{i2} = \lambda_i(t_2)$   $i = (\overline{1,4})$  для системы уравнений (9.6.6).

Запишем используемые в данной задаче условия (9.6.3) в виде:

$$f_2 = \theta_{22} - \theta_2 = 0; \quad f_3 = x_2 - L_2 = 0; \quad f_4 = y_2 - h_2 = 0, \quad (9.6.22)$$

где  $\theta_{22} = \theta(t_2)$ ,  $x_2 = x(t_2)$ ,  $y_2 = y(t_2)$ .

Тогда дифференцируя зависимости (9.6.21) и (9.6.22) по переменным  $V_2, \theta_{22}, x_2, y_2$ , конкретизируем выражения (2.5.23) для решаемой задачи как:

$$\lambda_{12} = +1; \quad \lambda_{22} = -\mu_2; \quad \lambda_{32} = -\mu_3; \quad \lambda_{42} = -\mu_4, \quad (9.6.24)$$

где  $\mu_2, \mu_3, \mu_4$  – множители Лагранжа.

Заметим, что в данной задаче наряду с этими множителями искомым параметром является значение  $V_2$  скорости БЛА в момент времени  $t_2$  завершения им набора высоты.

Как и в первой задаче, подставим выражения (9.6.12) в соответствующие уравнения (9.6.1) и (9.6.6).

Искомые параметры  $V_2, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  определяются путем применения метода «пристрелки» при численном интегрировании полученной системы уравнений в «обратном» времени с варьируемыми начальными условиями:

$$\begin{aligned} V(t_2) &= V_{2,k}; \quad \theta(t_2) = \theta_2; \quad y(t_2) = h_2; \quad x(t_2) = L_2; \\ \lambda_1(t_2) &= +1; \quad \lambda_2(t_2) = -\mu_{2,k}; \quad \lambda_3(t_2) = -\mu_{3,k}; \quad \lambda_4(t_2) = -\mu_{4,k}, \\ k &= 0,1,2,3,\dots \end{aligned}$$

Выполнение с заданной точностью условий (9.6.2) достигается использованием выражений (9.6.15)-(9.6.17), в которых производятся следующие изменения.

В этих формулах функция  $\varphi_1$  будет иметь аргументом переменную  $V_2$ . Первая формула из состава выражений (9.6.16) примет следующий вид:

$$V_{2,k+2} = V_{2,k+1} - \frac{(V_{2,k+1} - V_{2,k}) \varphi_1(V_{2,k+1})}{\varphi_1(V_{2,k+1}) - \varphi_1(V_{2,k})},$$

где  $\varphi_1(V_{2,k}) = V^{(k)}(t_1) - V_1$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Для применения этой формулы необходимо задаться начальными приближениями  $V_{2,0}$  и  $V_{2,1}$  искомого параметра  $V_2$ .

Конкретные значения варьируемых параметров задачи при фиксированном значении времени  $t_2$  определяются при выполнении на некотором  $N$ -м шаге метода следующего условия останова итерационного процесса:

$$\max\{|\varphi_1(V_{2,N})|, |\varphi_2(\mu_{2,N})|, |\varphi_3(\mu_{3,N})|, |\varphi_4(\mu_{4,N})|\} \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – требуемая точность выполнения условий (9.6.2).

После выполнения этого условия фиксируется массив значений вектора  $u^0(t) = (P^0(t), \alpha^0(t))$ ,  $t \in \{t_2, t_2 - \Delta t, \dots, t_1\}$ , полученный с применением значений  $V_{2,k}$ ,  $\mu_{2,k}$ ,  $\mu_{3,k}$ ,  $\mu_{4,k}$  при  $k = N$  и формул (9.6.12). Значения вектора  $u^0(t)$  оптимального косвенного управления БЛА в «прямом» времени, то есть при  $t \in \{t_1, t_1 + \Delta t, \dots, t_2\}$  формируются из указанного выше массива с помощью соответствующей сортировки.

Приведенные в данном разделе задачи оптимального управления БЛА можно решать предлагаемыми методами при учете действующих ветровых возмущений. Для этого в правые части двух последних уравнений системы (9.6.1) необходимо ввести с соответствующими знаками значения  $w_x$  и  $w_y$  компонент вектора скорости действующего ветра.

В качестве развития вышеприведенных задач можно рассмотреть задачу управления пространственным набором высоты БЛА. При ее решении используются функционалы (9.6.4) и (9.6.20), математическая модель движения БЛА (5.1.16)-(5.1.21) и граничные условия вида:

$$\begin{aligned} V(t_1) &= V_1; \quad \theta(t_1) = \theta_1; \quad \Psi(t_1) = \Psi_1; \\ x(t_1) &= x_1; \quad y(t_1) = y_1; \quad z(t_1) = z_1; \\ V(t_2) &= V_2; \quad \theta(t_2) = \theta_2; \quad \Psi(t_2) = \Psi_2; \\ x(t_2) &= x_2; \quad y(t_2) = y_2; \quad z(t_2) = z_2. \end{aligned}$$

Управлениями БЛА в этих задачах являются векторы  $u(t) = (P(t), \alpha(t), \gamma(t))$ , для оптимизации которых можно использовать изложенные в данном разделе численные методы.

## 9.7. Управление разбегом БЛА по взлетно-посадочной полосе аэродрома

Математическое моделирование движения БЛА по ВПП аэродрома с учетом ее состояния и уклона было рассмотрено в Разд. 7.3. В связи с тем, что разбег БЛА осуществляется при максимальном значении тяги  $P_{\max}$  его силовой установки, косвенное управление этим процессом производится соответствующим изменением угла атаки  $\alpha$ .

Как известно [7], подъемная сила БЛА возрастает при увеличении значений угла атаки  $\alpha$ , но при этом увеличивается его лобовое сопротивление, что существенным образом влияет на длину  $L_{\text{разб.}}$  разбега БЛА по ВПП.

В работе [23] предлагается метод определения оптимального значения  $\alpha_{\text{опт}}$  угла атаки самолета, которое максимизирует его ускорение  $\dot{V}(t)$  в каждый момент времени  $t$  в процессе его разбега по ВПП. Эта задача решается при предположении, что  $c_x = \text{const}$ ,  $c_y = \text{const}$  и без учета вертикальной проекции  $P(\alpha + \varphi_{\text{дв}})$  силы тяги (см. Рис. 7.6).

Решим эту задачу в общем случае с использованием уравнения (7.3.7).

Из этого уравнения следует, что максимум ускорения БЛА  $\dot{V}(t)$  при  $t \in [t_0, t_{\text{отр}}]$  достигается при наибольшем значении первого слагаемого, входящего в правую часть этого уравнения. Это требование может быть выполнено путем решения следующей задачи оптимизации:

$$J = P_{\max} (1 + f(\alpha + \varphi_{\text{дв}})) - 0,5(c_x(\alpha, V) - f c_y(\alpha, V) \rho_0 V^2 S) \rightarrow \max; \quad (9.7.1)$$

$$\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}, \quad (9.7.2)$$

где  $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$  – интервал эксплуатационных значений угла атаки БЛА.

Отметим, что за счет изменения скорости БЛА в процессе его разбега критерий оптимальности  $J$  также будет функцией времени. Последнее означает, что задача (9.7.1), (9.7.2) является параметрической задачей нелинейного программирования вида (2.2.3), (2.2.14), (2.2.17), в которой параметром является время  $t \in [t_0, t_{\text{отр}}]$ .

Следуя выражениям (5.1.43) и (5.1.44), представим коэффициенты  $c_x$  и  $c_y$  без учета экранирующего эффекта от ВПП в виде:

$$c_x(\alpha, V) = E(V, a) + K(V, a)(\alpha + \alpha_0)^2 = \\ = \left( c_0 + \frac{c_1}{a} V \right) + A \left( d_0 + \frac{d_1}{a} V \right)^2 (\alpha + \alpha_0)^2; \quad (9.7.3)$$

$$c_y(\alpha, V) = B(V, a) + D(V, a)\alpha = \\ = \left( b_0 + \frac{b_1}{a} V \right) + \left( d_0 + \frac{d_1}{a} V \right) \alpha,$$

где  $c_0, c_1, b_0, b_1, d_0, d_1$  – эмпирические коэффициенты, рассчитываемые по методике, предложенной в Разд. 5.1;  $a$  – скорость звука на высоте ВПП;  $\alpha_0$  – балансировочный угол атаки БЛА.

Подставляя эти выражения в целевую функцию (9.7.1), получим:

$$\begin{aligned}
J = & P_{\max} (1 + f(\alpha + \varphi_{\text{дв}})) - \\
& - 0,5 \left[ c_0 + \frac{c_1}{a} V + A \left( d_0 + \frac{d_1}{a} V \right)^2 (\alpha + \alpha_0)^2 \right] \rho_0 V^2 S + \\
& + 0,5 f \left[ b_0 + \frac{b_1}{a} V + \left( d_0 + \frac{d_1}{a} V \right) \alpha \right] \rho_0 V^2 S.
\end{aligned}$$

Используя необходимое условие экстремума этой функции в каждый момент времени  $t \in [t_0, t_{\text{отр}}]$  вида (2.2.1), имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{dJ}{d\alpha} = & P_{\max} f - \rho_0 V^2 S A \left( d_0 + \frac{d_1}{a} V \right)^2 (\alpha + \alpha_0) + \\
& + 0,5 f \rho_0 V^2 S \left( d_0 + \frac{d_1}{a} V \right) = 0.
\end{aligned} \tag{9.7.4}$$

Разрешая это уравнение относительно угла атаки  $\alpha$ , получим оптимальный закон управления БЛА вида:

$$\alpha_{\text{опт}}(V) = \frac{P_{\max} f + 0,5 f \rho_0 V^2 S \left( d_0 + \frac{d_1}{a} V \right)}{A \rho_0 V^2 S \left( d_0 + \frac{d_1}{a} V \right)} - \alpha_0. \tag{9.7.5}$$

Дифференцируя по  $\alpha$  выражение (9.7.4), имеем:

$$\frac{d^2 J}{d\alpha^2} = -\rho_0 V^2 S A \left( d_0 + \frac{d_1}{a} V \right)^2 < 0.$$

Последнее с использованием достаточных условий экстремума функции одной переменной (2.2.2) показывает, что критерий оптимальности  $J$  достигает максимума при управлении (9.7.5) для всех значений  $V = V(t)$ ,  $t \in [t_0, t_{\text{отр}}]$ .

Полученное управление  $\alpha_{\text{опт}}(V)$  является конкретизацией зависимостей вида (2.5.4), т.е. реализует управление БЛА по принципу обратной связи, который иллюстрируется Рис. 2.10,б.

Эффективность управления  $\alpha_{\text{опт}}(V)$  проверяется путем подстановки выражений (9.7.3) и (9.7.5) в первое уравнение системы (7.3.8) и численного решения задачи Коши (7.3.8), (7.3.9)

одним из методов, изложенных в Разд. 3.1. По результатам ее решения с использованием соотношений (7.3.10) и (7.3.11) определяются момент времени, координата и скорость отрыва БЛА от ВПП, а также длина дистанции его разбега. При этом для различных значений  $t_{взл}$ ,  $f$  и  $\theta_{ВПП}$  проводится серия вычислительных экспериментов по проверке выполнения условия «невыкатывания» БЛА за пределы ВПП вида (7.3.12).

Для учета действия «горизонтального» ветра, действующего вдоль ВПП со скоростью  $\pm w_x$ , в законе управления (9.7.5) вместо приборной скорости  $V$  используется путевая скорость  $V_p = V \pm w_x$  БЛА.

Откорректированный таким образом закон управления записывается в БЦВМ САУ полетом БЛА.

В процессе предполетной подготовки в память БЦВМ вводятся значения коэффициента  $f$  трения колес шасси БЛА для конкретного состояния ВПП в момент времени его взлета и скорость действующего в этот момент ветра с соответствующим знаком. При попутном ветре, действующем в направлении разбега БЛА, значение его скорости  $w_x > 0$ , а при встречном –  $w_x < 0$ .

В процессе движения БЛА по ВПП с помощью соответствующего датчика измеряется и передается в БЦВМ текущее значение  $V = V(t)$  его приборной скорости. Это значение пересчитывается в путевую скорость БЛА, с использованием которой с помощью формулы (9.7.5) в БЦВМ вычисляется требуемое значение угла атаки  $\alpha_{опт}(V)$ . Полученное значение сопоставляется с ограничением (9.7.2). При нарушении этого условия угол атаки полагается равным соответствующему граничному значению  $\alpha_{min}$  или  $\alpha_{max}$ .

Вектор  $u^0(V)$  косвенного управления БЛА, включающий в себя компоненты  $P_{max}$  и  $\alpha_{опт}(V)$  с применением соответствующих выражений (5.5.8)-(5.5.23) пересчитывается в вектор  $\Delta^0(V)$

прямого управления, который реализуется соответствующим исполнительными механизмами САУ полетом БЛА.

## **9.8. Оптимизация установившихся режимов полета БЛА**

Как показал анализ литературы по оптимальным задачам динамики полета ЛА [11, 13, 29, 52 и др.], вопросы оптимизации установившихся режимов их движения в этих работах полностью отсутствуют. Рассмотрение таких вопросов также отсутствует и в монографиях, посвященных задачам оптимального управления БЛА [4, 5].

На важность постановки и решения таких задач указывает тот факт, отмеченный в Разд. 5.4, что установившиеся режимы полета различных типов БЛА широко применяются при их эксплуатации. Математическим аппаратом, используемым при решении задач оптимизации установившихся режимов полета БЛА, являются методы классического нелинейного программирования (см. Разд. 2.2).

В данном разделе приводятся примеры постановок задач выбора оптимальных параметров установившихся режимов полета БЛА самолетной схемы.

### **9.8.1. Прямолинейный горизонтальный полет БЛА**

Пусть БЛА должен осуществить прямолинейный полет со скоростью  $V = \text{const}$  на высоте  $h = \text{const}$  на интервале дальностей  $[L_1, L_2]$ . Модель (5.4.8) данного режима полета БЛА имеет вид:

$$\begin{aligned} P - X(\alpha, V, h) &= 0; \\ P(\alpha + \phi_{\text{дв}}) + Y(\alpha, V, h) - mg &= 0. \end{aligned} \quad (9.8.1)$$

Потребуем, чтобы этот режим полета выполнялся с минимальным расходом топлива. В качестве критерия оптимальности режима будем использовать следующее выражение [19]:

$$G_{\text{T}} = \frac{q_{\text{сек}}(L_2 - L_1)}{V}, \quad (9.8.2)$$

где  $q_{\text{сек}}$  – секундный расход топлива силовой установки БЛА.

В рассматриваемом режиме полета БЛА вектор косвенного управления согласно выражению (5.4.4) имеет вид:

$$u = (P, \alpha),$$

где  $P = \text{const}$ ,  $\alpha = \text{const}$ .

Включим в состав искомых параметров режима наряду с компонентами этого вектора значение  $V$  скорости полета БЛА.

В этом случае постановка решаемой задачи будет формулироваться следующим образом: «Определить значения переменных  $V$ ,  $P$ ,  $\alpha$ , доставляющих минимум целевой функции (9.8.2) при выполнении ограничений (9.8.1)».

По классификации задач оптимизации, приведенной в Разд. 2.2, эта задача относится к задачам вида (2.2.3), (2.2.5) и может быть решена методом Лагранжа.

Функция Лагранжа (2.2.6), построенная с использованием выражений (9.8.1) и (9.8.2), записывается как:

$$\begin{aligned} L(V, P, \alpha, \mu_1, \mu_2) = & \frac{q_{\text{сек}}(L_2 - L_1)}{V} + \mu_1 [P - X(\alpha, V, h)] + \\ & + \mu_2 [P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha, V, h) - mg], \end{aligned}$$

где  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  – множители Лагранжа.

Первая группа соотношений из состава выражений (2.2.7) в нашем случае будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial V} = & -\frac{q_{\text{сек}}(L_2 - L_1)}{V^2} - \mu_1 \frac{\partial X}{\partial V} + \mu_2 \frac{\partial Y}{\partial V} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial P} = & \mu_1 + \mu_2 (\alpha + \varphi_{\text{дв}}) = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha} = & -\mu_1 \frac{\partial X}{\partial \alpha} + \mu_2 \left( P + \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \right) = 0. \end{aligned} \quad (9.8.4)$$

Второй группе соотношений из выражений (2.2.7) соответствуют уравнения (9.8.1).

Для конкретизации частных производных, входящих в правые части уравнений (9.8.4), воспользуемся результатами

Разд. 9.5. Производные  $\frac{\partial X}{\partial V}$  и  $\frac{\partial Y}{\partial V}$  описываются выражениями (9.5.20) и (9.5.21). При конкретизации производных  $\frac{\partial X}{\partial \alpha}$  и  $\frac{\partial Y}{\partial \alpha}$  используются формулы (9.5.10).

Таким образом, для определения значений  $V^0, P^0, \alpha^0, \mu_1^0, \mu_2^0$ , доставляющих минимум целевой функции (9.8.3), необходимо решить систему нелинейных уравнений (9.8.1), (9.8.4) одним из численных методов, приведенных в Разд. 3.4.

В случае если по условиям эксплуатации БЛА обязательным является учет ограничений вида:

$V_{\min} \leq V \leq V_{\max}; \quad P_{\min} \leq P \leq P_{\max}; \quad \alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ , система уравнений (9.8.1), (9.8.4) преобразуется с использованием замены переменных задачи вида (2.5.19).

При учете ветрового возмущения, действующего со скоростью  $\pm w_x$ , в уравнениях (9.8.1), (9.8.4) вместо приборной скорости  $V$  используется путевая скорость БЛА, равная величине  $V \pm w_x$ .

### 9.8.2. Барражирование БЛА по круговой траектории

Во многих задачах применения БЛА необходимо обеспечить его длительный многократный полет по круговой замкнутой траектории радиуса  $R$  на постоянной высоте  $h$  с постоянной скоростью  $V$ . Примерами такого движения являются процессы барражирования БЛА, осуществляющих наблюдение за изменением границ плоских объектов (см. Разд. 8.3), ретрансляцию сигналов связи наземных и воздушных абонентов (см. Разд. 8.4), дежурство в воздухе и др.

При оптимизации такого режима полета БЛА потребуем, чтобы каждый оборот по круговой траектории занимал максимально возможное время, которое определяется по формуле вида:

$$T = \frac{2\pi R}{V} \rightarrow \max. \quad (9.8.5)$$

Достижение этой цели осуществляется путем совместного выбора параметров полета  $V, R$  и вектора косвенного управления  $u = (P, \alpha, \gamma)$  движением БЛА.

Отметим, что, как было показано в Разд. 5.4, компоненты этого вектора и значение скорости полета БЛА являются постоянными величинами, удовлетворяющими условиям:

$$\begin{aligned} P_{\min} &\leq P \leq P_{\max}; \quad \alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}; \\ \gamma_{\min} &\leq \gamma \leq \gamma_{\max}; \quad V_{\min} \leq V \leq V_{\max}. \end{aligned} \quad (9.8.6)$$

Кроме этих ограничений искомые значения  $V, R, P, \alpha, \gamma$  должны удовлетворять дополнительным условиям установившегося режима полета БЛА в горизонтальной плоскости, изложенным в Разд. 5.4.

В рассматриваемом режиме полета БЛА по круговой траектории имеем:

$$V = \text{const}; \quad \dot{V} = 0; \quad \dot{\Psi} = \frac{V}{R} = \text{const}.$$

Тогда выражения (5.4.14) представляются в следующей форме:

$$\begin{aligned} P - X(V, \alpha, h) &= 0; \\ (P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, h)) \cos \gamma - mg &= 0; \\ (P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, h)) \sin \gamma - \frac{mV^2}{R} &= 0. \end{aligned} \quad (9.8.7)$$

В эту модель входит вектор косвенного управления БЛА, представленный выражением (5.4.13).

Таким образом, получаем следующую задачу классического нелинейного программирования: «Определить значения переменных  $V, R, P, \alpha, \gamma$ , доставляющих максимум целевой функции (9.8.5) при выполнении ограничений (9.8.6) и (9.8.7)».

Исключим из рассмотрения условия (9.8.6) и будем решать поставленную задачу методом Лагранжа, представленным в Разд. 2.2.

Построим с использованием выражений (9.8.5) и (9.8.7) функцию Лагранжа вида:

$$L(V, R, P, \alpha, \gamma, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = \frac{2\pi R}{V} + \mu_1 [P - X(V, \alpha, h)] + \\ + \mu_2 [(P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, h)) \cos \gamma - mg] + \\ + \mu_3 \left[ (P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, h)) \sin \gamma - \frac{mV^2}{R} \right],$$

где  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  – множители Лагранжа.

Необходимые условия экстремума этой функции записываются как:

$$\frac{\partial L}{\partial V} = -\frac{2\pi R}{V^2} - \mu_1 \frac{\partial X}{\partial V} + \mu_2 \frac{\partial Y}{\partial V} \cos \gamma + \mu_3 \left[ \frac{\partial Y}{\partial V} \sin \gamma - \frac{2mV}{R} \right] = 0; \quad (9.8.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial R} = \frac{2\pi}{V} + \mu_3 \frac{mV^2}{R^2} = 0; \quad (9.8.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial P} = \mu_1 + (\mu_2 + \mu_3)(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) = 0; \quad (9.8.10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -\mu_1 \frac{\partial X}{\partial \alpha} + \mu_2 \left( P + \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \right) \cos \gamma + \mu_3 \left( P + \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \right) \sin \gamma = 0; \quad (9.8.11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = -\mu_2 (P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, h)) \sin \gamma + \\ + \mu_3 (P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(V, \alpha, h)) \cos \gamma = 0 \quad (9.8.12)$$

Согласно методу Лагранжа искомые переменные  $V, R, P, \alpha, \gamma, \mu_1, \mu_2, \mu_3$  определяются из решения системы нелинейных уравнений (9.8.7)-(9.8.12).

Конкретизируем вид этих уравнений, используя результаты Разд. 9.5.

Подставляя в уравнения (9.8.7) соотношения (9.5.9), имеем:

$$P - 0,5 \left( E(V, a) + K(V, a)(\alpha + \alpha_0)^2 \right) \rho(h) V^2 S = 0; \quad (9.8.13)$$

$$\begin{aligned} & [P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + 0,5(B(V, a) + \\ & + D(V, a)\alpha)\rho(h)V^2 S] \cos \gamma - mg = 0; \end{aligned} \quad (9.8.14)$$

$$\begin{aligned} & [P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + 0,5(B(V, a) + \\ & + D(V, a)\alpha)\rho(h)V^2 S] \sin \gamma - \frac{mV^2}{R} = 0; \end{aligned} \quad (9.8.15)$$

Частные производные от функции  $X(V, a, h)$  и  $Y(V, a, h)$  с использованием выражений (9.5.10) и (9.5.20) конкретизируются как:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial a} &= K(V, a)\rho(h)V^2 S(\alpha + \alpha_0); \\ \frac{\partial Y}{\partial a} &= 0,5D(V, a)\rho(h)V^2 S; \\ \frac{\partial X}{\partial V} &= \rho(h)VS + \left( E(V, a) + K(V, a)(\alpha + \alpha_0)^2 \right) + \\ & + 0,5\rho(h)V^2 S \left( E_V(V, a) + K_V(V, a)(\alpha + \alpha_0)^2 \right) \end{aligned} \quad (9.8.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial V} &= \rho(h)VS + (B(V, a) + D(V, a)) + \\ & + 0,5\rho(h)V^2 S (B_V(V, a) + D_V(V, a)\alpha). \end{aligned}$$

Подставляя в уравнения (9.8.8)-(9.8.12) правые части выражений (9.8.16) и (9.5.9), получим:

$$\begin{aligned} & -\frac{2\pi R}{V^2} - \mu_1 \left[ \rho(h)VS \left( E(V, a) + K(V, a)(\alpha + \alpha_0)^2 \right) + \right. \\ & \left. + 0,5 \left( E_V(V, a) + K_V(V, a)(\alpha + \alpha_0)^2 \right) \right] + \\ & + [\rho(h)VS(B(V, a) + D(V, a)\alpha) + \\ & + 0,5(B_V(V, a) + D_V(V, a)\alpha)] (\mu_2 \cos \gamma + \mu_3 \sin \gamma) - \\ & - \mu_3 \frac{2mV}{R} = 0; \end{aligned} \quad (9.8.17)$$

$$\frac{2\pi}{V} + \mu_3 \frac{mV^2}{R^2} = 0; \quad (9.8.18)$$

$$\mu_1 + (\mu_2 + \mu_3)(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) = 0; \quad (9.8.19)$$

$$\begin{aligned} & \mu_1 \rho(h) V^2 S K(V, a)(\alpha + \alpha_0) + \\ & + P(\mu_2 \cos \gamma + \mu_3 \sin \gamma) + \end{aligned} \quad (9.8.20)$$

$$\begin{aligned} & + 0,5(\mu_2 \cos \gamma + \mu_3 \sin \gamma) \rho(h) V^2 S K(V, a) = 0; \\ & (-\mu_2 \cos \gamma + \mu_3 \sin \gamma) \rho(h) V^2 S [P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + \\ & + 0,5(B(V, a) + D(V, a)\alpha)] = 0. \end{aligned} \quad (9.8.21)$$

Таким образом, искомые переменные  $V, R, P, \alpha, \gamma, \mu_1, \mu_2, \mu_3$  решаемой задачи определяются из решения системы нелинейных уравнений (9.8.13)-(9.8.15), (9.8.17)-(9.8.21) одним из численных методов, приведенных в Разд. 3.4. При ее решении в левые части уравнений подставляется конкретный вид эмпирических функций  $E, K, B, D$  и их частные производные по скорости  $V$ , задаваемых формулами (5.1.44) и (9.5.21).

В некоторых конкретных задачах применения БЛА радиус траекторий их барражирования может быть заданной величиной. В этих случаях переменная  $R$  исключается из состава оптимизируемых параметров полета БЛА.

Для определения оптимальных значений параметров  $V, P, \alpha, \gamma$  используется изложенный выше подход со следующими изменениями:

- 1) в выражение (9.8.5) и в третье уравнение из состава соотношений (9.8.7) подставляется значение  $R_{\text{зад}}$ ,
- 2) из состава системы (9.8.8)-(9.8.12) исключается уравнение (9.8.9) и как следствие этого – уравнение (9.8.18).

Полученные из решения соответствующих систем уравнений оптимальные параметры  $V^0, R^0, P^0, \alpha^0, \gamma^0$  или  $V^0, P^0, \alpha^0, \gamma^0$  должны быть проверены на выполнение ограничений (9.8.6). Для учета этих ограничений во всех полученных выше системах уравнений используется замена переменных вида (2.5.19).

В заключение главы отметим необходимость активного развития методов оптимального управления различными вида-

ми и типами БЛА. Применение таких методов, на наш взгляд, позволит значительно повысить эффективность их использования при решении разнообразных военных и гражданских задач.

## **Глава 10. ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ БЛА**

Анализ состояния и перспектив развития БАК позволил выделить следующие основные тенденции:

- применение в соответствующих операциях крупных группировок БЛА [55];
- совместное групповое применение БЛА и пилотируемых ЛА [89];
- увеличение числа БЛА, обслуживаемых в режиме «online» операторами БАК с наземных и воздушных пунктов управления [2, 89];
- активное использование против БАК средств радиоэлектронного подавления [56].

Учет этих тенденций требует новых подходов к решению вопросов эффективного управления БЛА различного назначения в достаточно быстро изменяющихся разнообразных и не-предсказуемых условиях их применения.

Одним из современных инструментов решения этих вопросов является применение в составе перспективных БАК интеллектуальных систем управления БЛА.

Целью данной главы является постановка и обсуждение направлений решения проблемы создания и применения таких систем в перспективных БАК.

Актуальность данной проблемы определяется тем, что известные отечественные и зарубежные работы в области создания и применения авиационных средств искусственного интеллекта [58, 63-65, 67, 68] в основном ориентированы на автоматизацию функций экипажа ЛА в условиях сложной психофизиологической обстановки и дефицита времени на принятие соответствующих решений. В единственной работе [91] рассматриваются вопросы построения таких средств для микро-БЛА нетрадиционной схемы.

## **10.1. Постановка проблемы интеллектуального управления БЛА**

Отмеченные выше перспективные задачи применения БЛА предполагают синтез цели их функционирования в полете, принятие оптимальных оперативных решений с учетом разнообразных факторов, отражающих состояние БЛА и внешней среды, исполнение этих решений с высокой точностью. Эти функции перспективных БЛА могут быть реализованы с помощью нового класса интеллектуальных систем управления [90].

Под *интеллектуальной системой* понимается объединенная информационным процессом совокупность технических средств и программного обеспечения, работающая во взаимосвязи с человеком (коллективом людей) или автономно, способная на основе использования сведений и знаний при наличии мотивации синтезировать цель, вырабатывать решение о действии и находить рациональные способы её достижения.

Таким образом, существенное расширение тактико-технических и эксплуатационных характеристик перспективных БЛА предполагает необходимость разработки бортовых систем управления нового поколения, построенных на основе комплексного использования современных интеллектуальных технологий и обеспечивающих возможность их функционирования в условиях неопределенности.

Общая отличительная особенность задач управления БЛА вне зависимости от их типа и назначения заключается в необходимости учета различных проявлений неопределенности, основными источниками которой являются следующие факторы [91]:

- нечеткость целей функционирования и задач управления;
- нестационарность параметров БЛА и его системы управления;
- априорная неопределенность обстановки и условий выполнения полетного задания;

- наличие случайных воздействий внешней среды;
- искажения поступающей входной информации в каналах дистанционной передачи данных.

Следует отметить, что системы управления подавляющего большинства беспилотных и дистанционно-управляемых летательных аппаратов первых поколений, построенные на основе классических подходов, обладают ограниченными функциональными возможностями, ориентированными на автоматические или полуавтоматические режимы работы в детерминированных условиях [91].

Автономность и эксплуатационная эффективность перспективных БЛА будут во многом зависеть от наличия развитых средств их предполетной подготовки, разработка которых включает необходимость решения следующих задач [91]:

- создание интеллектуальных систем автоматизации процессов подготовки полетных заданий;
- создание интеллектуальных систем комплексной диагностики БЛА.

С возрастанием сложности систем, уровень которой оценивается объемом циркулирующей в них информации, следует попытаться использовать, создать и развивать наиболее интеллектуальные системы и компоненты управления. При создании систем интеллектуального управления, следя работе [90], необходимо придерживаться следующих основных принципов:

- принцип информационного обмена;
- принцип открытости системы интеллектуального управления для самообучения и самоорганизации;
- принцип прогнозирования изменений во внешней среде и системе;

На основе этих принципов в работе [90] выделяются четыре класса динамических систем интеллектуального управления:

- 1) системы идентификационного управления [39];

2) системы адаптивного управления (системы с самонастройкой) [5];

3) системы интеллектного управления без целеполагания;

4) системы интеллектуального управления с целеполаганием.

Появление функции целеполагания существенно отличает последний класс систем от систем интеллектного управления без целеполагания. В интеллектуальных системах рассматриваются три уровня управления [90]:

- верхний уровень управления (ВУУ), обеспечивающий целеполагание;

- средний уровень управления (СУУ), осуществляющий поиск способа достижения поставленной на верхнем уровне цели;

- нижний уровень управления (НУУ), реализующий выбранный на среднем уровне способ достижения поставленной цели.

В настоящем и ближайшем будущем системы интеллектуального управления пилотируемыми летательными аппаратами, основанные на этих трех уровнях, должны функционировать следующим образом [65]:

1. Постановка определенной цели функционирования (выбор одной из определенного множества конкретных типовых ситуаций). При этом решение задачи целеполагания целиком возлагается на человека, которому предоставляется проектировщиками бортового алгоритмического и индикационного обеспечения только информативная модель внешней обстановки, размещаемая на управляющем поле кабины.

2. Анализ возможных путей достижения цели и выбор из них предпочтительного варианта. Решение задач СУУ обеспечивается, например, бортовой оперативно советующей экспертной системой (БОСЭС), тенденция последующего развития которой состоит в применении методов логического вывода.

3. Исполнение выбранного решения реализации цели. Задачи НУУ аппаратно - алгоритмически поддерживаются глав-

ным образом традиционным бортовым оборудованием и САУ полетом ЛА, хотя применение интеллектуальных компонентов управления целесообразно даже и на этом уровне.

В теории и практике разработки систем интеллектуального управления общепринятыми в настоящее время являются следующие элементы [90]:

- нейронные сети;
- эволюционные алгоритмы;
- механизмы логических рассуждений;
- экспертные системы.

Эволюционные алгоритмы и нейронные сети обладают высокой распараллелимостью и, как следствие, повышенным быстродействием, что важно в задачах управления в реальном времени, когда идентификация или формирование закона управления осуществляется в темпе текущего времени. В силу своей реактивности и способности к обучению эти элементы уже в сегодняшнем их состоянии развития могут быть успешно использованы при создании многоуровневых и многофункциональных систем управления с элементами искусственного интеллекта.

*Экспертными системами* (ЭС) принято называть системы, основанные на знаниях специалистов определенной предметной области. Такие системы являются прототипом современных средств интеллектуального управления. ЭС способны оценивать состояние объекта и среды, сопоставлять параметры желаемого и реального результатов действия, принимать решения и вырабатывать управление, способствующее достижению цели. В общем случае такие системы оперируют с более широкой информацией – логическими, объектно-ориентированными и другими моделями, основанными на знаниях экспертов. Вместе с тем ЭС могут использовать и традиционные алгоритмы, базирующиеся на уравнениях динамики объекта управления. По-

этому, как и в случае использования нейронных сетей и эволюционных алгоритмов, класс решаемых задач принципиально расширяется, по сравнению с традиционной проблематикой теории управления динамическими системами. Экспертные системы должны обладать базой знаний и располагать методами решения задач. Основная функция ЭС состоит в решении задач на основе базы знаний, то есть вырабатывании определенных выводов-заключений [92]. Для представления знаний и решения задач в ЭС применяются следующие механизмы, основанные на логических рассуждениях [92]:

- 1) продукционные правила, типа «Если выполняется условие, то делай...»,
- 2) нечеткие правила, формулируемые в удобных для человека качественных терминах, а именно в терминах нечетких понятий: «много», «мало», «выше», «ниже» и т.п. [91],
- 3) логическое программирование (использующее языки типа «Пролог» и др.),
- 4) методы логического вывода, включающие в себя:
  - автоматическое доказательство теорем;
  - автоматическое гипотезирование (выдвижение гипотез);
  - рассуждение по аналогии;

Для иллюстрации целей, задач и средств интеллектуализации управления БЛА различного назначения рассмотрим подход, использованный в интеллектуальной системе управления (ИСУ) микро-БЛА, которая должна осуществлять решение следующих задач [91]:

- обеспечение автоматических режимов старта, посадки и рулежки БЛА, в том числе и с неподготовленных площадок;
- обеспечение режимов автономного полета БЛА вдоль заданной последовательности опорных точек или к указанной цели без априорно установленного маршрута с уклонением от за-

ранее известных или вновь обнаруженных областей и зон нежелательного появления, возникающих на пути препятствий и т.д.;

- обеспечение автоматического режима соблюдения группового порядка БЛА в воздушном строю, а также их группового взаимодействия;
- организация автоматических режимов бортовой обработки разведывательной информации и оперативно-тактических данных, собираемых непосредственно в процессе полета;
- организация процессов передачи командной управляющей информации и обмена данными на основе современных сетевых технологий;
- организация интеллектуального человека-машинного интерфейса, обеспечивающего возможность управления поведением БЛА с помощью команд и целеуказаний на уровне естественного или близкого к нему языка.

ИСУ данного микро-БЛА предлагается формировать по иерархическому принципу. Система включает в себя стратегический, тактический и исполнительный уровни со следующими основными модулями [91]:

- картографическая база данных;
- система внешнего очувствления;
- система навигации;
- анализатор общей обстановки;
- нечеткая система управления поведением и целеуказанием;
- анализатор локальной обстановки;
- нечеткая система управления полетом;
- нечеткая система управления исполнительными механизмами.

*Картографическая база данных* обеспечивает своевременное обновление исходных данных на входе стратегического уровня управления поведением и целеуказания и тактического

уровня управления полетом БЛА. Содержимым базы данных является полная цифровая карта местности с разметкой высот рельефа, координат ориентиров, объектов наблюдения, целей полета и т.п. В процессе полета априорно заложенная картографическая информация может пополняться по результатам обработки сенсорной информации, проводимой непосредственно на борту аппарата.

*Система внешнего очувствления*, укомплектованная средствами технического зрения, датчиками скорости, высоты и т.д., обеспечивает сбор информации об условиях полета БЛА, а также о состоянии наземной и воздушной обстановки.

*Система навигации* обеспечивает привязку текущего местоположения микро-БЛА к карте местности и последующее определение относительных координат целей.

*Подсистема анализа общей обстановки* осуществляет сканирование карты местности, выявляя пространственные зоны, опасные для полета БЛА. Сканирование производится по четырем различным областям – в курсовом направлении, вдоль текущего участка полета и в двух боковых (левой и правой) областях. На основе анализа каждой зоны определяются средние показатели плотности рассредоточения объектов, представляющих потенциальную угрозу продолжению полета БЛА.

Верхний (стратегический) уровень ИСУ отвечает за решение задач целеуказания и планирования поведения, обеспечивая формирование глобального направления средней скорости полета БЛА на основе навигационных данных и результатов анализа общей обстановки.

*Подсистема анализа локальной обстановки* обеспечивает детальное сканирование близлежащих областей пространства и оценку необходимости совершения маневров при полете микро-БЛА вдоль заданного глобального направления.

Тактический уровень ИСУ отвечает за реализацию полета вдоль выбранного глобального направления. Здесь на основе поступающих навигационных данных, а также результатов анализа локальной обстановки осуществляется формирование параметров выполнения необходимых маневров.

Исполнительный уровень ИСУ, получая значения параметров курсового направления полета, его скорости и высоты, обеспечивает их отработку.

Подсистемы стратегического, тактического и исполнительного уровней управления БЛА построены по единым принципам организации нечеткого логического вывода с помощью метода «центра тяжести» композиции «MAX-MIN».

Синтез алгоритмов управления на базе методов нечеткой логики осуществляется по общей для всех уровней схеме.

Модель объекта управления (БЛА) строится в виде логико-лингвистического описания взаимосвязей входных управляющих воздействий и выходных координат его состояния. При этом для каждого из входных и выходных параметров устанавливается собственная лингвистическая переменная. В свою очередь, значения лингвистических переменных определяют разбиение области допустимых изменений входных и выходных параметров на пересекающиеся нечеткие множества, соответствие которым задается их функциями принадлежности.

Необходимо отметить, что по аналогии с автоматическими системами, построенными на базе нечетких представлений, нечеткий алгоритм формирования управляющих воздействий с учетом заданной цели управления следует синтезировать по принципу обращения логико-лингвистического описания причинно-следственных связей в модели управляемого объекта. Таким образом, как утверждают авторы цитируемой работы, подобный подход позволяет с единых методологических пози-

ций формировать и исследовать как модель объекта, так и алгоритм нечеткого управления объектом.

Соответствующие преобразования между входными и выходными параметрами относятся к классу нелинейных и могут быть представлены в виде гиперповерхности в многомерном пространстве переменных. Такая форма представления может быть использована для реализации нечетких алгоритмов управления на базе технологии ассоциативной памяти. Эта технология предполагает наличие механизмов восстановления целостных образов по их отдельным элементам и в конечном итоге сводится к работе с многомерными массивами памяти. Основные преимущества, получаемые при переходе к данной технологии, связаны с простотой как программной, так и аппаратной реализации ассоциативной памяти, быстродействие которой и в том, и в другом случае будет определяться только временем обращения к ее отдельной ячейке и иметь высокие интегральные показатели.

Главная проблема синтеза алгоритмов управления на основе применения технологии ассоциативной памяти заключается в обеспечении их устойчивости в зависимости от дискретизации параметров. Важно отметить, что выбранная дискретность непосредственно обуславливает и объемы требуемой памяти. Использование специально разработанных критериев позволяет гарантировать абсолютную устойчивость систем управления с ассоциативной памятью, обладающей минимально необходимым объемом.

Практическая проверка развивающегося подхода к построению интеллектуальной бортовой системы управления автономным микро-БЛА, а также синтеза и отладки ее программно-алгоритмического обеспечения потребовала создания специализированного моделирующего комплекса, обладающего следующим набором основных функциональных возможностей [91]:

- моделирование процессов функционирования ИСУ БЛА, построенной на основе аппарата нечеткой логики;
- моделирование автономного полета БЛА, совершающего в априорно неизвестных условиях под контролем его ИСУ;
- оперативный синтез и моделирование произвольного рельефа местности;
- оперативное формирование, пополнение и редактирование базы нечетких знаний в интерактивном режиме;
- оперативная отладка базы знаний и настройка ИСУ БЛА;
- моделирование случайных возмущений внешней среды;
- управление БЛА в ручном режиме;
- визуализация карты местности с отображением текущей наземной обстановки и траектории полета БЛА;
- корректировка параметров динамической модели движения БЛА;
- изменение параметров моделей, определяющих имитацию случайных изменений внешней среды.

Данный комплекс позволяет обеспечить проведение широкомасштабной серии экспериментальных исследований по моделированию полетов автономного микро-БЛА, отработке технологий интеллектуального управления на основе методов нечеткой логики, проверке адекватности различных вариантов математического описания управляемого объекта, а также провести синтез и отладку знаний, регламентирующих стратегии целесообразного поведения при решении требуемых прикладных задач в априорно неполно заданных условиях при наличии внешних возмущений случайного характера [91].

Заметим, что применение нечеткой логики в ИСУ БЛА ставит задачу объективного задания значений функций принадлежности используемых нечетких множеств («fuzzy sets»), введенных в рассмотрение Л. Заде в 70-х годах прошлого века.

Поэтому, на наш взгляд, целесообразно начинать построение интеллектуальных систем управления БЛА с использованием результатов, полученных в области авиационных систем искусственного интеллекта (СИИ), применяющих методологию ЭС.

Рассмотрим существующие подходы к построению авиационных СИИ с формированием рекомендаций по созданию ИСУ БЛА. Как показал анализ существующих в этом направлении работ [57, 58, 63-65, 67, 68, 74], все разрабатываемые системы представляют собой средства, обеспечивающие «разгрузку» экипажа ЛА при принятии решений при дефиците времени. Практически все зарубежные и отечественные системы представлены как бортовые оперативно советующие экспертные системы (БОСЭС).

Согласно работам [67, 68] авиационные СИИ должны охватывать автоматизацией следующие уровни принятия решений:

1. Оперативное целеполагание.
2. Выбор рационального способа достижения оперативно назначенной цели.
3. Реализация выбранного способа достижения цели.

При этом ЛА рассматриваются как *антропоцентрический объект*, в котором главенствующая роль принадлежит команде операторов (экипажу) [68].

В научной и инженерной практике для таких объектов принята следующая классификация бортовых интеллектуальных систем (БИС) [68]:

- БИС ситуационной осведомленности экипажа, обеспечивающая ему адекватное представление о внешней и внутрибортовой обстановке (БИС 1);
- БИС решения «тактических» задач, вырабатывающая рекомендации экипажу по способу оперативно назначенной цели (БИС 2);

- БИС, обеспечивающая эффективную работу комплексов бортовой аппаратуры объекта (БИС 3).

Каждая из этих БИС функционирует на основе собственной базы знаний (БЗ), в которой должна содержаться предварительно загружаемая априорная и текущая информация от бортовых измерительных устройств.

В соответствии с опытом разработки исследовательских СИИ рекомендуется следующий состав БЗ [67, 68]:

- 1) двухуровневая иерархическая база механизмов вывода,
- 2) база математических моделей,
- 3) блок формирования комментариев к выбранным рекомендациям,
- 4) блок регистрации отказов экипажа от выданных рекомендаций.

Первый уровень базы механизмов вывода строится на использовании продукционных правил вида:

**«ЕСЛИ <условие>, ТО <решение>, ИНАЧЕ <переход>»,(10.1.1)** система которых обеспечивает выбор (активацию) текущей проблемной ситуации (ТПрС) из множества проблемных ситуаций (ПрС). При этом используется ситуационный вектор, состоящий из фазовых координат, описывающих возможные проблемные ситуации объекта. Данный уровень формируется на основе работы с экспертами по проблемным ситуациям рассматриваемого объекта.

На втором уровне осуществляется выбор решения, которое разрешает возникшую ТПрС. Механизм вывода этого уровня формируется на основе продукционных правил вида (10.1.1), использования прецедентов, множества альтернатив, сообщаемых экипажем или априори полученных на основе специальных моделей. В последнее время в его составе начинают использовать так называемый оптимизационный вывод, при котором выбор способа ликвидации ТПрС осуществляется на ос-

нове решения специальной многокритериальной задачи оптимизации.

База математических моделей используется для пространственно-временного описания развития ПрС и определения для каждой из них возможных моментов времени наступления. В БОСЭС, представленной в работе [67], для этих целей применяются модели движения истребителей и используемых в воздушном бою управляемых ракет. Другая группа моделей предназначена для генерации альтернатив при разрешении ТПрС. В упомянутой выше работе в качестве такой модели использована платежная матрица «игры» [14] двух истребителей.

В базе моделей могут присутствовать отмеченные выше модели оптимального выбора способов действий и, при необходимости, формирования координат ситуационных векторов с использованием бортовой измерительной аппаратуры.

Две последние составляющие БЗ БИС формируются по общим правилам создания экспертных систем [66].

Сформируем следующую последовательность этапов разработки БИС БЛА, основываясь на результатах работы [68]:

1. Изучение предметной среды БИС, выделение множества ПрС и формирование для каждой из них соответствующих ситуационных векторов.
2. Выбор или разработка математических моделей, используемых в БЗ БИС.
3. Поиск оптимальных (рациональных) способов действий при возникновении ПрС.
4. Построение для каждой ПрС адекватного механизма вывода, однозначно указывающего на соответствующий способ действий.
5. Формирование БЗ с исключением невостребованных при интеграции этапов 1-3 результатов их выполнения.

6. Подготовка перечня входных и выходных данных, используемых при работе БИС.

7. Отработка БЗ БИС на имитационных моделях возникновения и ликвидации ПрС.

8. Летные испытания БИС в составе БЛА и устранение выявленных недостатков.

9. Опытная эксплуатация БИС при решении БЛА целевых задач.

10. Доработка БИС БЛА по результатам опытной эксплуатации.

Согласно оценкам, приведенным в работе [74], для ЭС управления автономными транспортными средствами требуется порядка 6000 производственных правил и наличие вычислительной мощности около  $10^9$  оп/с.

Разработку БЗ БИС БЛА предлагается осуществлять на основе проектного документа, который включает в себя следующие разделы [68]:

- 1) этап полета (решаемая целевая задача),
- 2) условия возникновения ПрС,
- 3) состав и причинно-следственные связи между ПрС,
- 4) состав действий операторов при ликвидации каждой ПрС,
- 5) полный состав информации (априорной, бортовой, «интуитивной»), необходимой операторам БАК для принятия решений по каждой ПрС,
- 6) структура решений,
- 7) способ реализации каждого решения.

Этот документ создается специалистами по управлению конкретным типом БЛА, для которого создается соответствующая БИС, и опытными летчиками, выполняющими роль его «экипажа» совместно с оператором управления БАК.

Существенную роль в процессе эффективной эксплуатации БИС отводится вычислительной среде ее реализации. Отметим, что в существующих работах [57, 58, 63-65, 67] этот вопрос практически не освещался.

Основными перспективными задачами эффективного применения БЛА различного назначения кроме применения БИС, которые должны быть реализованы в составе функций их комплексов бортового оборудования (КБО), являются:

1. Сжатие больших объемов видеоданных, полученных целевой аппаратурой в процессе полетов информационных БЛА перед их передачей по радиоканалам на наземные пункты управления [69].
2. Обработка информации, поступающей от бортовой радиолокационной запрос-ответной аппаратуры для принятия достоверных решений по опознаванию целей, обнаруженных целевой аппаратурой боевых БЛА [70].
3. Помехоустойчивое кодирование/декодирование, шифрование и дешифрование данных при обмене информацией с наземными пунктами управления и другими абонентами по радиоканалам связи с БЛА [71].
4. Обеспечение оптимального управления процессами наведения на маневрирующую цель боевых БЛА-истребителей [45].

Проведенный анализ показал, что в КБО большинства современных БЛА отсутствует в явном виде бортовая цифровая вычислительная машина (БЦВМ) [2, 5, 83, 101, 102]. В лучшем случае в составе некоторых систем комплекса, например ПНК, САУ и др., используются специализированные цифровые микропроцессорные устройства, решающие их локальные задачи небольшой размерности. Вместе с тем, следует отметить, что вследствие расширения состава задач, решаемых БЛА, и усложнения модульных цифровых элементов КБО их эффективная эксплуатация невозможна без подчинения этих элементов управляющему бортовому вычислительному комплексу (БВК) БЛА.

В области пилотируемой авиационной техники за рубежом за последние 20 лет выполнены крупные научно-исследовательские программы (DAIS, PAVE PILLAR, PAVE PACE) по разра-

ботке интеллектуальных КБО самолетов F-16, F-18, F-20, Tornado, Rafal, F-22, EFA, JSF, в которых сформулированы принципы организации неоднородных многомашинных БВК с фиксированным распределением решаемых задач и с определенными возможностями их реконфигурации на аппаратном уровне [72]. Интерфейс между элементами таких БВК предлагается организовать с использованием централизованных и децентрализованных методов доступа, таких как MIL-STD-1553B, STANAG 3910, AS 4074, AS4075.

В этом случае КБО ЛА с входящими в его состав БВК рассматривается как бортовая информационно-вычислительная сеть, в которой процесс обработки информации распараллеливается во времени, и обеспечивается возможность реконфигурации сети при отказах элементов КБО и БВК. Важным преимуществом сетевой организации является возможность модернизации и замены элементов КБО практически без изменений топологии физических соединений. При этом повышается надежность КБО ЛА и снижается стоимость его технического обслуживания.

В работе [72] отмечается, что в отечественных разработках БВК необходима детальная проработка возможностей применения элементов магистрально-модульной архитектуры на базе стандартного канала по ГОСТ 26765.52-87 со скоростью передачи данных 1 Мбит/с и возможного применения его функционального расширения по ГОСТ Р50832-95 (скорость передачи данных не менее 20 Мбит/с), которое может быть использовано при разработке перспективных ЛА. Характерной особенностью КБО таких ЛА является наличие интегрированной многодатчиковой информационной среды без подразделения комплекса на функциональные подсистемы.

К недостаткам работы [72] можно отнести декларируемую в ней ориентацию БВК на эффективную работу только следующих информационных каналов такой среды:

- канал бортовой РЛС;
- оптико-электронный прицельно-навигационный канал;
- индикационно-информационный канал экипажа ЛА;
- канал радиотехнической разведки;
- канал информационного подавления

без учета в перспективном КБО ЛА задач управления силовой установкой, системой электроснабжения, исполнительными механизмами, оружием, средствами связи и другими важными бортовыми системами ЛА, которые существенно влияют на выполнение полетного задания.

Разработку БВК перспективных БЛА как изделий авиационной техники необходимо проводить с учетом их специфики, основываясь на современном состоянии и перспективах развития таких комплексов для пилотируемых ЛА [107]. Это объясняется тем, что разработкой и производством БВК для КБО БЛА будут заниматься организации и предприятия, специализирующиеся на создании и изготовлении БВК для самолетов и вертолетов.

Сформулируем основные требования к архитектуре типового БВК перспективных БЛА [107]:

- минимальные массогабаритные характеристики и энергопотребление элементов БВК;
- высокая функциональная надежность БВК;
- модульный принцип построения аппаратных и программных средств БВК;
- наличие в БВК высокоскоростного канала обмена данными и системными командами;
- реализация параллельных алгоритмов обработки информации [73];
- многозадачный режим работы вычислительных модулей БВК;

- возможность адаптации программно-аппаратных средств типового БВК с минимальной трудоемкостью к различным видам и типам БЛА;
- открытость архитектуры БВК, позволяющая осуществлять его модификацию при появлении новых аппаратных и программных средств, а также новых (модифицированных) элементов КБО БЛА;
- функциональная и аппаратная интеграция средств БВК на основе бортовой распределенной информационно-вычислительной сети БЛА.

Под *архитектурой БВК* будем понимать принципы организации, определяющие состав его аппаратных и программных средств, их функции и взаимодействие в процессе работы комплекса [72].

Структура БВК является аппаратурной реализацией его архитектуры, ориентированной на конкретное применение.

Общая структура БВК перспективных БЛА, сформированная на основе типового состава КБО существующих БЛА, приведенного на Рис. 1.1, представлена на Рис. 10.1.

В данной структуре аппаратными модулями БВК являются многопроцессорные БЦВМ 0, БЦВМ 1, ..., БЦВМ 8, каждая из которых должна удовлетворять приведенным выше требованиям. Отметим, что представленная структура БВК в полном объеме должна использоваться в перспективных БЛА, входящих в состав беспилотных авиационных комплексов (БАК) оперативного и стратегического назначения [1]. Заметим, что для некоторых типов БЛА часть приведенных БЦВМ может отсутствовать с передачей их функций другим БЦВМ. Минимальной единицей БВК, которая обязательно должна входить в любой БЛА тактического назначения, является БЦВМ 0 (см. Рис. 10.1).

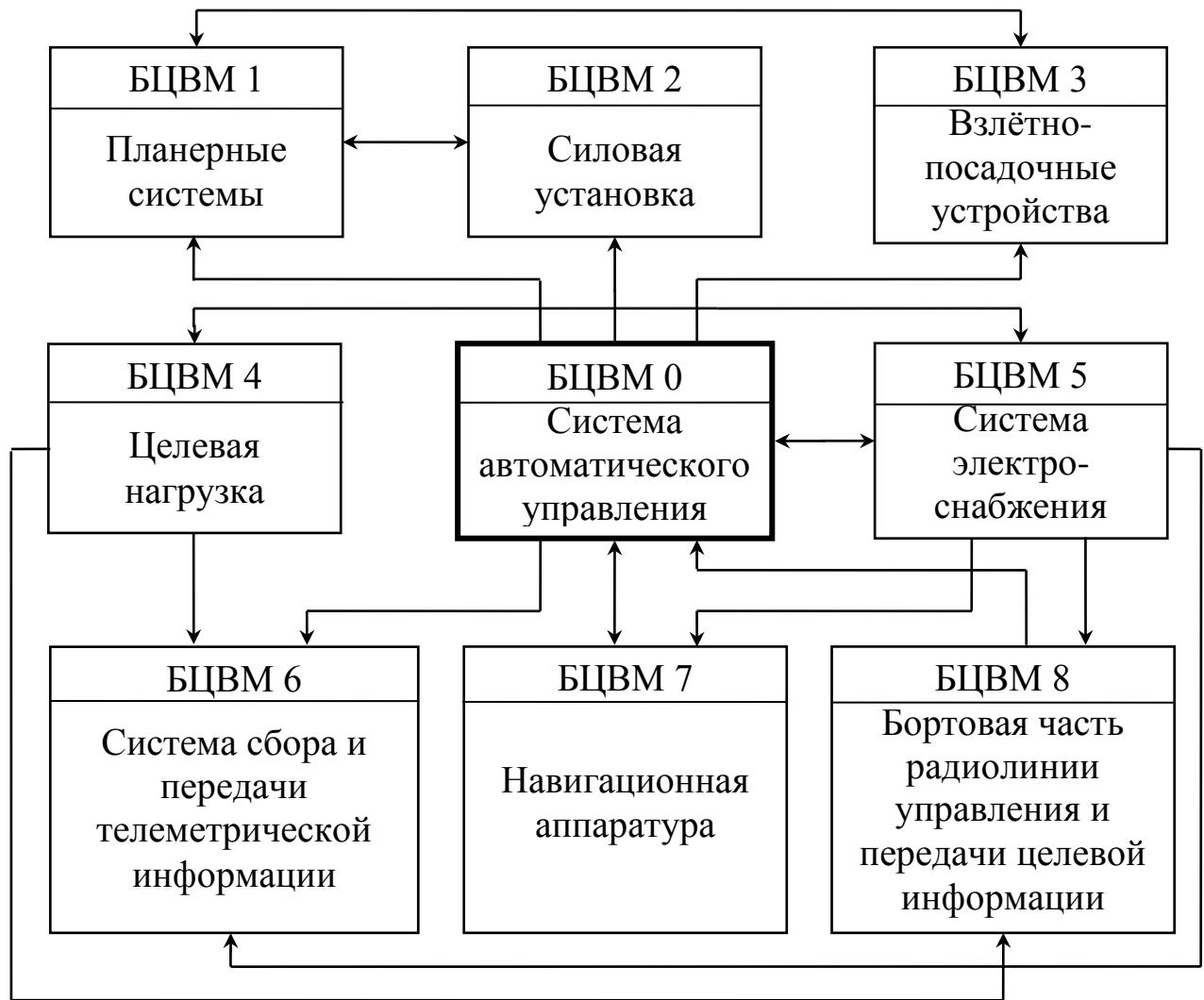


Рис. 10.1

На Рис. 10.2 приведена структура взаимодействия БЦВМ 0, БЦВМ 1,..., БЦВМ 8 с каналом передачи данных и системами КБО БЛА.

Для организации высокоскоростного канала обмена данными и командами предлагается использовать аппаратно-программные средства волоконно-оптических каналов связи. Информационное взаимодействие элементов БВК может быть реализовано с помощью интерфейсов, представленных в ГОСТ 26765.52-87 и ГОСТ Р50832-95. Для аппаратной реализации БВК используются платформа VMEbus с последующим переходом на перспективную платформу CPClbus (Compact PCI) [72].



Рис. 10.2

Такая организация бортовых вычислительных средств БЛА обеспечит создание интегрированных КБО БЛА и возможность решения задач БИС и других отмеченных выше перспективных задач в реальном или близком к реальному масштабам времени.

Как и при решении любой сложной научно-технической проблемы, проблема интеллектуального управления БЛА должна решаться с привлечением системного подхода.

Следуя этому подходу и в связи со значительной ролью персонала БАК в процессах применения БЛА, в составе интегрированной интеллектуальной системы управления (ИИСУ) [66] перспективных БЛА предлагается выделить два взаимосвязанных компонента, представленных на Рис. 10.3.



Рис. 10.3

Взаимодействие этих частей осуществляется с помощью информационной и командной радиолиний (ИКРЛ) БАК [113].

Аппаратно-программные средства бортовой части ИИСУ БЛА должны быть включены в состав комплекса бортового оборудования (КБО) БЛА и активно взаимодействовать с его системами в процессе выполнения соответствующего полетного задания. При этом предполагается соответствующие элементы и подсистемы этой части использовать как «надстройки» над существующими элементами КБО БЛА. Такой подход обеспечивает последовательное внедрение элементов искусственного интеллекта в КБО БЛА путем замещения его «жестко» определенных функций «мягкими» интеллектуальными функциями. На Рис. 10.4 в качестве иллюстрации предлагаемого подхода приведено взаимодействие системы автоматического управления полетом БЛА (см. Рис. 1.1) с перспективной бортовой интеллектуальной системой навигации и управления (ИСНУ) сверхзвукового БЛА [12, 113].

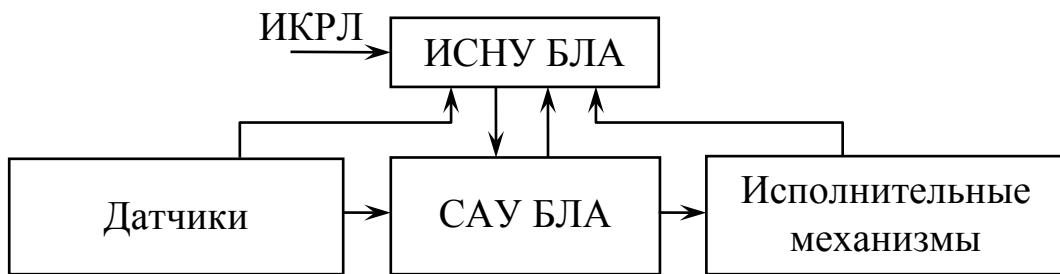


Рис. 10.4

Наземная часть ИИСУ БЛА выступает как средство повышения эффективности деятельности персонала БАК, входящего в состав МНПУ БЛА. Другой важной задачей этой части системы является накопление и корректировка знаний и решений, применяемых в бортовой части ИИСУ БЛА.

На Рис. 10.5 для типового состава персонала такого пункта приведена перспективная структура наземной части ИИСУ БЛА.

Эта часть реализуется в среде аппаратно-программных средств МНПУ БЛА в виде совокупности систем, аналогичных

существующим бортовым оперативно советующим экспертным системам пилотируемых ЛА, выполняющих функции «Электронного помощника летчика» [57, 58, 65, 74].



Рис. 10.5

При этом предлагается использовать двухуровневую систему принятия решений, где на первом уровне решение принимает «электронный помощник», и после его контроля окончательное решение формирует человек (второй уровень).

Как было отмечено выше, возникающие в процессе управления БЛА проблемные ситуации и принимаемые при этом решения наземной частью ИИСУ БЛА используются при развитии бортовой части интегрированной системы.

Следует отметить, что с повышением степени интеллектуальности бортовой части ИИСУ роль ее наземной части при управлении отдельными БЛА должна сокращаться с увеличением объема задач по управлению крупными группировками БЛА.

## 10.2. Структура перспективной интегрированной интеллектуальной системы управления БЛА

Целью создания ИИСУ БЛА является обеспечение максимальной степени автономности выполнения БЛА поставленного полетного задания с минимальным взаимодействием с персоналом МНПУ БАК.

В данном разделе эта система будет рассмотрена применительно к боевым БЛА как наиболее сложным изделиям беспилотной авиационной техники, описанным в Разд. 8.5.

Для реализации интеллектуального управления БЛА на всех этапах полета предлагается выделить в составе ИИСУ следующие подсистемы [12, 113]:

- функциональная подсистема «Полет», обеспечивающая решение задач навигации и управления для осуществления полета БЛА по запрограммированному маршруту;
- функциональная подсистема «Целевое задание», осуществляющая управление БЛА на этапах решения целевой задачи (выполнение боевого маневрирования, решение задач прицеливания и выхода в точку применения оружия, взаимодействие с информацией от целевого оборудования и др.);
- функциональная подсистема «Живучесть», предназначенная для оценки степени поражения планера и технического состояния систем БЛА, а также принятия решения о корректировке законов управления или возможности дальнейшего продолжения полета;
- функциональная подсистема «Взаимодействие», отвечающая за управление средствами связи БЛА и обеспечивающая безопасность его полета (предупреждение столкновений с другими беспилотными и пилотируемыми воздушными объектами и др.).

Взаимодействие и координацию работы этих подсистем осуществляет управляющая подсистема ИИСУ БЛА.

Функциональная структура перспективной ИИСУ БЛА представлена на Рис. 10.6.

Рассмотрим задачи, решаемые каждой подсистемой и интеллектуальные средства их поддержки.



Рис.10.6.

**Подсистема «Полет»** имеет целью обеспечение максимально возможного уровня реализации запланированного в первоначальной программе маршрута полета БЛА и его автономной корректировки при изменении текущих условий выполнения полетного задания.

Данная подсистема, которая реализуется в виде бортовой экспертной системы БЭС1, должна формировать управляющие воздействия на БЛА при выполнении следующих типовых этапов его полета, рассмотренных в Главе 1:

Этап 1. Старт (взлет) БЛА;

Этап 2. Полет к зоне выполнения целевого задания;

Этап 3. Движение БЛА при выполнении целевого задания;

Этап 4. Полет к зоне посадки;

Этап 5. Посадка БЛА.

Предполагается, что каждый  $j$ -й этап полета БЛА реализуется на интервале времени  $[t_{j-1}, t_j]$ ,  $j = (\overline{1,5})$ .

При разработке БЭС1 для каждого из этих этапов выделяются и фиксируются в базе знаний БЗ 1 потенциально возможные проблемные ситуации (ПрС) и соответствующие им ситуационные векторы.

В штатном режиме подсистема «Полет» решает стандартные задачи навигации и управления БЛА. В режим интеллектуального управления эта подсистема переключается на принятие решений с помощью применяемых в БЭС1 механизмов вывода по корректировке траектории полета по данным, поступившим от датчиков и других подсистем ИИСУ БЛА.

Подсистема «Полет» совместно с САУ БЛА (см. Рис. 10.4) обеспечивает решение следующих задач управления:

1. Осуществление старта (взлета) БЛА способами, описанными в Разд. 7.1 или Разд. 7.3.
2. Вывод БЛА на заданную высоту полета.
3. Стабилизацию БЛА вокруг центра масс относительно трех осей связанной СК.
4. Стабилизацию заданной барометрической высоты полета.
5. Подъем и снижение БЛА по командам оператора МНПУ, автономно по программе и по решениям, принятым БЭС1.
6. Развороты и довороты БЛА по курсу как в режиме горизонтального полета, так и в режимах подъема или снижения по командам оператора, автономно по программе и по решениям БЭС1.
7. Выполнение БЛА следующих маневров [113]:
  - пикирование с заданными углами тангажа с последующим выходом в режим горизонтального полета по команде оператора МНПУ, при достижении допустимых значений минимальной высоты полета, максимальных значений приборной скорости или числа М или по решениям БЭС1;
  - кабрирование с заданными углами тангажа с последующим выходом в режим горизонтального полета по команде оператора, при достижении минимально допустимого значения приборной скорости или по решениям БЭС1;
  - пикирование с последующим кабрированием с заданными углами тангажа из режима горизонтального полета с последующим выходом в режим горизонтального полета по команде оператора, при достижении минимально допустимого значения приборной скорости или по решениям БЭС1.
8. Предупреждение выхода БЛА за предельные значения его угла атаки.
9. Полет БЛА с выдерживанием курса по ортодромии.

10. Стабилизацию центра масс БЛА на заданной траектории полета.

11. Стабилизацию заданной воздушной скорости на дозвуковых и сверхзвуковых скоростях полета БЛА.

12. Вывод БЛА на малую высоту полета и полет на малой высоте с огибанием рельефа местности.

13. Посадку БЛА способами, описанными в Разд. 7.2 или Разд. 7.3.

Данная подсистема является главной функциональной подсистемой ИИСУ БЛА, обеспечивающей выполнение им полетного задания. Помимо основных, одной из задач этой подсистемы является формирование управляющих воздействий на БЛА при наступлении непредусмотренных в программе полета событий.

Эта задача решается программным обеспечением (ПО) подсистемы на основе реализованных в его составе математических методов и алгоритмов управления БЛА, а также formalизованных в БЗ подсистемы приемов и методов вывода БЛА из «критических» режимов полета. Последние отражают знания, навыки и умения опытных летчиков-испытателей по пилотированию ЛА в «критических» ситуациях. Эти приемы и методы могут быть получены путем проведения предварительных экспериментов на компьютерном тренажере БЛА с имитацией «критических» ситуаций, в котором САУ БЛА заменена средствами ручного управления полетом.

В состав математических методов и алгоритмов управления БЛА, входящих в состав БЗ подсистемы «Полет», должны быть включены:

1. Методы и алгоритмы оптимального по быстродействию управления БЛА, обеспечивающие его вывод из «критических» режимов полета, определяемых большими значениями углов атаки, тангажа, крена, рыскания, значительными отклонениями

в поворотных пунктах (ППМ) и характерных точках маршрута (ХТМ) по координатам и скорости БЛА и др. Информация для их реализации поступает от датчиков пилотажных параметров, представленных на Рис. 10.4.

2. Методы и алгоритмы определения остаточных значений летных характеристик БЛА при наличии информации о техническом состоянии его систем и боевых повреждений, полученная от подсистемы «Живучесть».

3. Методы и алгоритмы управления БЛА при корректировке траектории его полета в общем воздушном пространстве с пилотируемыми ЛА и БЛА, реализуемые по данным, поступающим от подсистемы «Взаимодействие».

Методы и алгоритмы первой и третьей групп реализуются с помощью выбора соответствующей совокупности команд управления БЛА, входящих в модель его движения вида (1.10), (1.11).

Множество  $K$  таких команд вместе с векторами  $a$  параметров их настройки должно быть записано в БЗ подсистемы.

При использовании в механизмах вывода БЭС1 правил вида (10.1.1) для выбора команд управления БЛА решениями являются управляющие функции  $w_j(t)$  вида (1.12) и моменты времени  $\tau_j$  и  $\tau_{j+1}$  их применения,  $j = \overline{1, m - 1}$ .

Для проверки правильности выбора этих функций и формирования объяснений оператору управления МНПУ на БВК производится моделирование предлагаемого движения БЛА путем решения задачи Коши (1.14). Если прогноз его движения не ликвидирует возникающую ПрС, то выбор команд управления БЛА осуществляется наземной частью ИИСУ БЛА.

Отметим, что и задачи второй группы могут быть реализованы и с помощью процедур механизмов вывода БЭС1 вида (10.1.1), работающих с БЗ подсистемы «Полет». Приоритет применения формальных методов или эмпирических подходов в текущей ситуации зависит от полноты исходных данных и от

запаса времени на формирование требуемых управляющих воздействий.

В процессе работы данная подсистема должна активно взаимодействовать с «электронным помощником» оператора управления БЛА наземной части ИИСУ (см. Рис. 10.5).

**Подсистема «Целевое задание»** является одной из важнейших функциональных подсистем ИИСУ БЛА. Основным ее назначением является обеспечение максимально возможного уровня автономного выполнения поставленных перед БЛА целевых задач в неопределенных условиях проведения конкретной боевой операции. Данная подсистема реализуется в виде бортовой экспертной системы БЭС2.

Рассмотрим состав и функции подсистемы «Целевое задание» для ударных БЛА при решении следующих функциональных задач:

1. Разведка и распознавание (опознавание) целей, описанных в полетном задании;
2. Доразведка и дополнительное распознавание (опознавание) целей в случае их потери или неудовлетворительной идентификации выявленных разведкой целей;
3. Уничтожение целей видами авиационных средств поражения (АСП), предписанными полетным заданием;
4. Доуничтожение целей при выявленной недостаточной степени их поражения.

Для каждой из этих задач при разработке БЗ подсистемы выделяются проблемные ситуации (ПрС) и описывающие их ситуационные векторы (СВ).

При реализации БЛА отмеченных выше задач необходимо обеспечить парирование действий противника по противодействию решению этих задач. В качестве видов таких противодействий будем рассматривать применение противником в процессе решения БЛА целевых задач истребительной авиации,

средств ПВО и средств РЭБ [56]. Отсюда возникает еще одна из важных задач рассматриваемой подсистемы – формирование исходных данных для подсистемы «Полет» для успешного решения отмеченных выше задач в условиях применения против БЛА средств его поражения. При проектировании БЗ подсистемы для каждого из видов действий противника формируются соответствующие ПрС и СВ.

Для решения сформулированных выше задач с максимально возможным уровнем автономности в составе подсистемы должны быть предусмотрены следующие основные аппаратно-программные средства:

- система машинного зрения, обеспечивающая поиск, обнаружение, распознавание и автоматическую идентификацию, как целей, так и степени ее поражения [75, 111, 112];
- система радиолокационного опознавания наземных целей [70];
- система идентификации видов и пространственных областей действия применяемых противником видов оружия.

В систему машинного зрения БЭС2 предлагается включить:

1. Оптико-электронные (ОЭС) и радиолокационные (РЛС) системы разведки целей, составляющие целевую нагрузку БЛА;
2. Программные комплексы обработки изображений, полученных каждым видом ОЭС и РЛС, реализуемые на БВК БЛА (см. Рис. 10.1).

В составе последних решаются задачи сжатия видеоданных перед их передачей по ИКРЛ оператору целевой БЛА [69].

В состав системы идентификации применяемых против БЛА средств противника предлагается включить:

1. Радиолокационные, радиотехнические и оптико-электронные (телевизионные, тепловизионные, лазерные и др.) датчики, фиксирующие факты и измеряющие характеристики применяемых средств и проводящие их опознание.
2. Программные средства обработки результатов измерений.

В этом случае также обработка информации по действиям противника проводится на БВК БЛА.

Трехуровневая структура комплекса технических средств подсистемы приведена на Рис. 10.7.

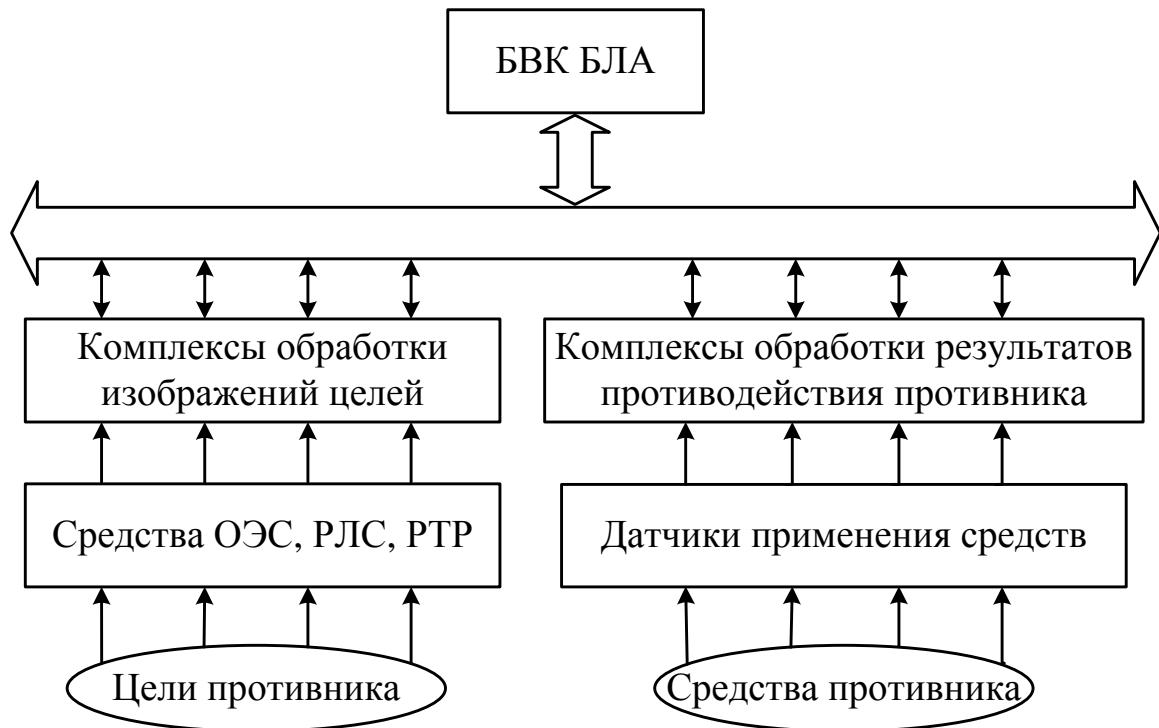


Рис. 10.7

На БВК БЛА, кроме отмеченных выше, решаются следующие основные задачи подсистемы:

1. Выбор по результатам разведки (доразведки) применяемых при уничтожении (доуничтожении) целей АСП, которыми оснащен БЛА;
2. Контроль результатов разведки и уничтожения целей с передачей результатов управляющей подсистеме ИИСУ БЛА;
3. Принятие решений о повторном «заходе на цель» при ее доразведке и доуничтожении и передача этого решения подсистеме «Полет»;
4. Выделение опасных зон в пространстве полета БЛА с последующей передачей их характеристик в подсистему «Полет».

Отметим, что при решении первой задачи, когда все имеющиеся на борту АСП использованы, а цель является непора-

женной, в подсистему «Полет» передается решение об ее уничтожении путем выбора траектории «встречи» БЛА и цели.

Для решения отмеченных выше задач, в особенности задач машинного зрения и выделения опасных зон, в настоящее время практически отсутствует математический аппарат, позволяющий получать достаточно адекватные для боевой практики результаты. Поэтому их решение предлагается в основном осуществлять с помощью специальных процедур вывода, работающих с БЗ подсистемы.

В этой базе должны быть размещены формализованные знания, навыки и умения опытных операторов-десифровщиков результатов работы целевого оборудования разведки, боевых летчиков по применению АСП в различных боевых условиях, а также результаты экспериментов по применению против БЛА различных видов средств поражения [113].

Эта база организуется как семейство производственных правил вида (10.1.1), функционирующих в составе БЭС2. При формировании в БЗ блока математических моделей можно использовать модели, входящие в состав БОСЭС, описанной в работе [67]. Кроме этого, для определения множества альтернатив парирования действий средств нападения противника можно воспользоваться результатами работы [58].

Важное значение в БЭС2 отводится системе машинного зрения, которая не рассматривалась ранее в отмеченных выше работах по авиационным СИИ. Как отмечается в работе [75], современные цифровые видеодатчики позволяют получать высококачественные изображения с размерами порядка  $10^6$  элементов и более. Там же утверждается, что вычислительные мощности перспективных БЦВМ и их систем позволяют в приемлемые сроки проводить обработку видеоизображений. Но проблема «понимания» изображений в настоящее время является нерешенной. Это не позволяет создавать полностью авто-

номные интеллектуально управляемые БЛА, способные самостоятельно выполнять любые сложные боевые и народнохозяйственные задачи.

Решение задач навигации и целеопределения в таких БЛА сводится к максимально достоверному обнаружению определенных видов объектов на местности и в воздушном пространстве, их идентификацию в пределах установленных классов и выдаче определенных директив исполнительным органам управления [111, 112].

За рубежом проводятся активные работы по использованию машинного зрения в системах самонаведения крылатых ракет (КР), предназначенных для автономного поиска и уничтожения особо важных целей [75]. В качестве целевой аппаратуры обнаружения объектов в КР используются РЛС миллиметрового диапазона, лазерный локатор и тепловизионная аппаратура. Алгоритмы распознавания целей в этих системах используют сопоставление их трехмерного изображения с моделью, введенной в память БЦВМ, или их сигнатур, полученных под различными углами обзора объектов. В случае недостатка данных КР может сойти с маршрута, сблизиться с объектом и провести его облет.

Следуя этому подходу, в БЗ подсистемы должны быть зафиксированы образы разведываемых, доразведываемых и атакуемых целей. При недостатке информации для их распознавания подсистеме «Полет» передается команда на снижение и облет БЛА идентифицируемой цели.

В связи с многоуровневостью структуры подсистемы «Целевое задание» ее БЗ может иметь двухуровневую организацию, применение которой на нижнем уровне должно сочетаться с использованием соответствующих математических методов и алгоритмов обработки изображений и локализации определенных областей пространства полета БЛА.

Перспективными задачами данной подсистемы являются

задачи оперативного выбора целевых заданий из состава предполетного задания и задачий, поступивших от других ЛА группировки, а также с МНПУ с исключением задачий, которые не могут быть выполнены БЛА в данный момент времени из-за ряда объективных причин (отказы оборудования, значительные боевые повреждения и т.п.). Оптимальный выбор исполняемого задания предлагается осуществлять с использованием критерииев минимума затрат времени и максимума вероятности выполнения этого целевого задания.

В связи с большим объемом и сложностью выполнения функций подсистема «Целевое задание» должна активно взаимодействовать с «электронными помощниками» командира расчета и оператора целевой нагрузки БЛА, входящими в состав наземной части ИИСУ БЛА (см. Рис. 10.5).

**Подсистема «Живучесть»** предназначена для текущей оценки возможности выполнения БЛА полетного задания.

В ее составе должны быть реализованы следующие основные задачи сбора и обработки информации:

1. Определение фактического и прогнозируемого числа отказавших и близких к отказам бортовых систем и агрегатов БЛА;
2. Определение числа и характера боевых повреждений конструкции БЛА, полученных от огня противника.

Укрупненная структура комплекса технических средств подсистемы «Живучесть», построенная по магистрально-модульному принципу, представлена на Рис. 10.8.

Первая задача решается на основе информации, поступающей от датчиков технического состояния, входящих в системы и агрегаты БЛА. Прогнозирование возможных отказов может осуществляться путем построения трендов значений их контролируемых параметров и расчета моментов времени их выхода за пределы соответствующих допусков.

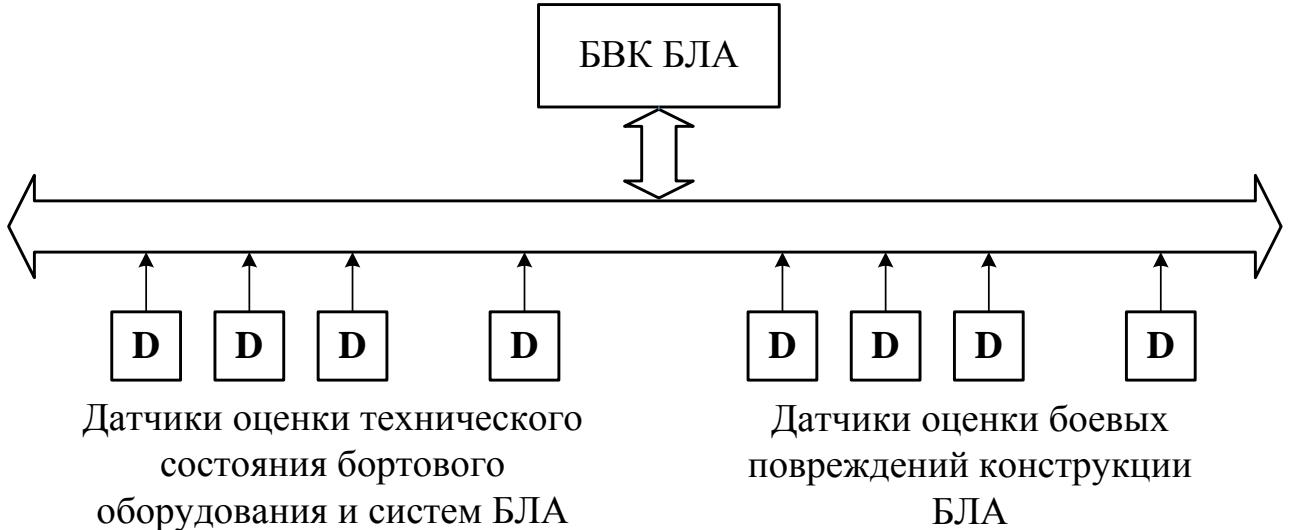


Рис. 10.8

На Рис. 10.9 показаны измеренные в полете значения и функция тренда  $p(t, a)$  некоторого контролируемого параметра  $p$  КБО БЛА.

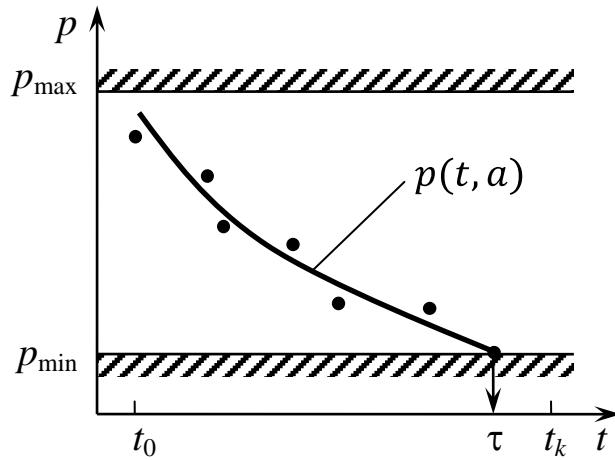


Рис. 10.9

На этом рисунке значения  $p_{\min}$  и  $p_{\max}$  определяют поле допуска эксплуатационных значений контролируемого параметра  $p$ ,  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$  – вектор значений параметров функции тренда.

Эти параметры для заданной функции вида:

$$p = p(t, a_1, a_2, \dots, a_m) \quad (10.2.1)$$

определяются по измеренным в момент времени  $t_1, t_2, \dots, t_N$  значениям  $p_1, p_2, \dots, p_n$  контролируемого параметра  $p$  методом наименьших квадратов [17].

Прогнозируемый момент времени  $\tau$  выхода параметра  $p$  из поля допуска находится как решение одного из уравнений вида:

$$\begin{aligned} p(t, a) - p_{\min} &= 0; \\ p(t, a) - p_{\max} &= 0. \end{aligned} \quad (10.2.2)$$

Здесь для нелинейных функций (10.2.1) используется один из численных методов, описанных в Разд. 3.3.

Отметим, что при использовании предлагаемого подхода возникает задача выбора наиболее подходящей функции  $p(t, a)$  для описания изменения (дрейфа) значений параметра  $p$  в процессе полета БЛА. Для этих целей в БЗ подсистемы должно храниться семейство функций вида (10.2.1), включающее в себя функцию линейного тренда:

$$p(t) = a_1 t + a_2,$$

из которого с помощью специальных процедур будет осуществляться выбор функции, наиболее адекватной для прогнозирования состояния параметра  $p$ .

Эти задачи должны решаться на соответствующих БЦВМ комплекса, представленного на Рис. 10.1.

Например, если  $p$  – число оборотов вала двигателя, то задачи выбора вида функции (10.2.1), определения значений ее параметров  $a_1, a_2, \dots, a_m$  и решения уравнений (10.2.2) производится на БЦВМ 2 БВК БЛА. Если  $p$  – напряжение переменного тока, вырабатываемого системой электроснабжения БЛА, то эти задачи решаются на БЦВМ 5 (см. Рис. 10.1).

Для решения второй задачи подсистемы конструкция БЛА (фюзеляж, крылья, органы управления и т.п.) должны быть оснащены «сетью» расположенных на ней датчиков, выходные данные с которых позволяли бы с помощью специальных алгоритмов определять число и размеры механических повреждений элементов конструкции БЛА. Перспективной формой получения информации о повреждениях конструкции БЛА явля-

ется использование при его создании полимерно-композиционных материалов с волоконно-оптическими каналами.

В БЗ подсистемы «Живучесть», которая реализуется в форме системы БЭС3, должны быть записаны правила вида (10.1.1), позволяющие с использованием моделей решения вышеупомянутых задач формальным образом принимать решение о возможности или невозможности выполнения полетного задания в каждый текущий момент времени.

При наличии допустимого текущего уровня живучести БЛА параметры его изменившегося состояния (уменьшение числа оборотов турбины, сокращение площади крыла за счет пробоин и т.п.) передаются в подсистему «Полет» для принятия с помощью БЭС1 решений о продолжении выполнения или корректировке полетного задания. Последнее может включать в себя аварийную или нормальную посадку БЛА.

При принятии решения о невозможности выполнения полетного задания результаты решения задач передаются управляющей подсистеме ИИСУ БЛА для их передачи на МНПУ и осуществляется самоликвидация (подрыв) БЛА.

Момент времени самоликвидации выбирается при решении БЭС3 специальной задачи на основе текущей информации о местоположении БЛА в составе группировки, поступающей из подсистемы «Взаимодействие». Это необходимо для того, чтобы не нанести повреждений и не мешать выполнению полетных заданий другим БЛА группировки. Данная задача также может быть решена с помощью как формального, так и эвристического алгоритма, где последний подразумевает использование специальных правил вида (10.1.1) БЗ подсистемы «Живучесть». Отметим, что эта подсистема должна активно взаимодействовать с «электронным помощником» командира расчета МНПУ БАК (см. Рис. 10.5).

**Подсистема «Взаимодействие»** предназначена для оценки местоположения БЛА относительно других БЛА группировки в каждый текущий момент времени выполнения целевого задания [55]. Другой важной функцией подсистемы является прием от подсистемы «Целевое задание» характеристик последнего задания и передача его через управляющую подсистему ИИСУ БЛА ближайшим БЛА группировки. Эта функция выполняется после принятия решений о возврате БЛА в точку базирования или его самоликвидации, то есть по результатам работы подсистемы «Живучесть». Кроме этого задачей подсистемы является обеспечение помехозащищенной и защищенной от перехвата противником радиосвязи БЛА с МНПУ БАК и другими БЛА группировки.

Текущая оценка местоположения БЛА в группе необходима для устранения с помощью подсистемы «Полет» ситуаций, которые могут привести к столкновению БЛА с другими БЛА группировки. Для решения этой задачи используется специальная бортовая аппаратура контроля попадания воздушных объектов в зону безопасного пилотирования БЛА. Такая зона, сечения которой в зависимости от маневренных характеристик БЛА и вида используемой на его борту аппаратуры контроля (радиотехнические, оптикоэлектронные, акустические и др. средства) могут иметь вид, представленный на Рис. 10.10.

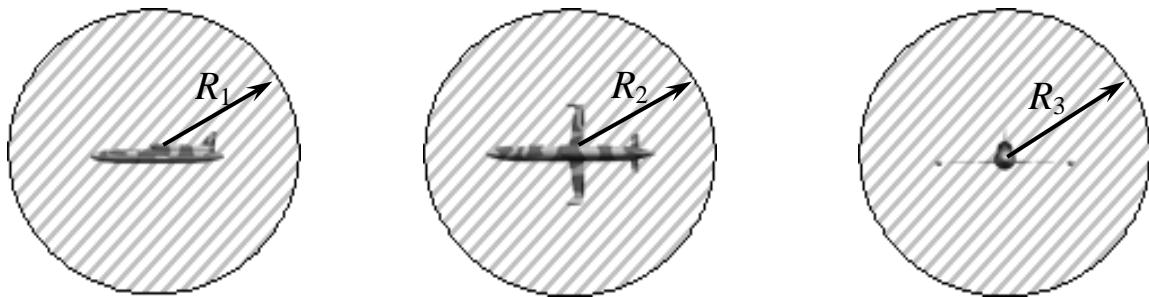


Рис. 10.10

Отметим, что при определении размеров  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  такой зоны необходимо учитывать характеристики области разлета осколков БЛА при его самоликвидации.

Сформулируем условие опасного сближения БЛА с другими находящимися в воздухе БЛА.

Представим границу области опасного сближения сферой радиуса  $R = \min\{R_1, R_2, R_3\}$ . Тогда в процессе полета  $i$ -го БЛА на интервале времени  $[t_0, t_k]$  будем иметь движущийся шар, описываемый неравенством:

$$(x(t) - x_i(t))^2 + (y(t) - y_i(t))^2 + (z(t) - z_i(t))^2 < R^2, \quad (10.2.3)$$

где  $x_i(t), y_i(t), z_i(t)$  – координаты ЦМ БЛА в момент времени  $t \in [t_0, t_k], i \in (\overline{1, n})$ .

Пусть некоторый  $j$ -й БЛА группировки, состоящей из  $n$  БЛА, имеет в этот момент времени координаты  $x_j(t), y_j(t), z_j(t), j \in (\overline{1, n})$ .

Рассматриваемые  $i$ -й и  $j$ -й БЛА будут находиться в опасном взаимном сближении в момент времени  $t \in [t_0, t_k]$ , если будет выполнено условие вида:

$$(x_j(t) - x_i(t))^2 + (y_j(t) - y_i(t))^2 + (z_j(t) - z_i(t))^2 < R^2, \quad (10.2.4)$$

которое получено путем подстановки в неравенство (10.2.3) координат  $j$ -го БЛА группировки,  $j \in (\overline{1, n})$  вместо значений координат  $x, y, z$  земной СК.

Условие (10.2.4) должно быть записано в БЗ подсистемы каждого  $i$ -го БЛА и проверяться в каждый момент  $t$  времени его полета. При этом с помощью правила вида (10.1.1) устанавливается номер БЛА, сблизившегося на расстояние, меньшее  $R$ . Полученное решение с координатами этого БЛА передается в подсистему «Полет» и «электронному помощнику» оператора управления БЛА для ликвидации опасного сближения.

Структура подсистемы «Взаимодействие» показана на Рис. 10.11.

Основной компонентой ПО подсистемы являются программы, определяющие типы и количество БЛА, попавших в зону данного БЛА, а также их кинематические характеристики

$x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ ,  $V_x(t)$ ,  $V_y(t)$ ,  $V_z(t)$ . Эти данные передаются подсистеме «Полет» для корректировки траектории полета БЛА, позволяющей избежать столкновений со смежными БЛА группировки. При использовании в составе средств подсистемы «Взаимодействие» телевизионной или тепловизионной аппаратуры, распределенной по конструкции БЛА должна использоваться система машинного зрения воздушного обзора. В этом случае структура подсистемы становится трехуровневой, аналогично структуре приведенной на Рис. 10.7.

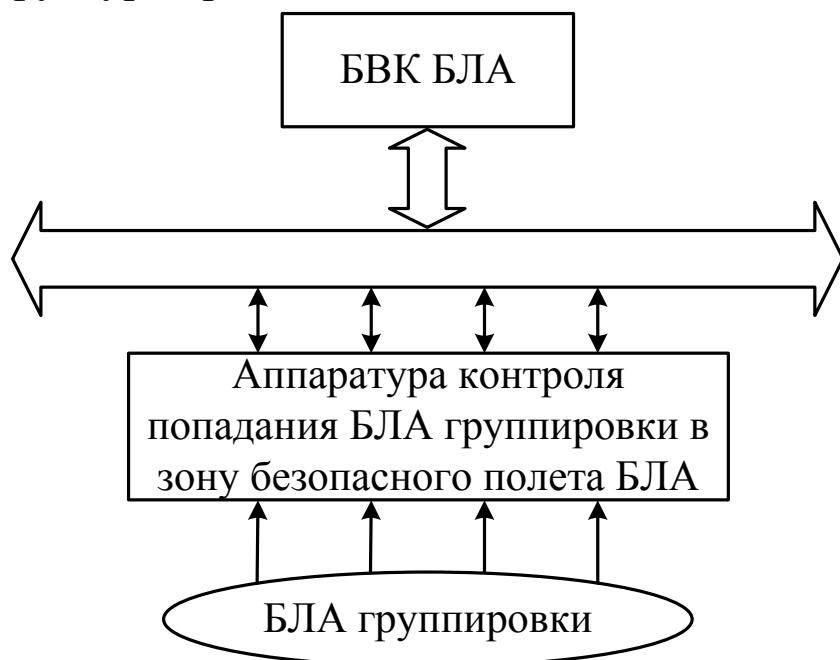


Рис. 10.11

В подсистеме на основе данных о действующих в конкретный момент времени средствах РЭБ противника решаются задачи выбора оптимальных методов шифрования информации, передаваемой на МНПУ БАК и другим БЛА группировки.

При такой организации подсистемы, которая реализуется в виде бортовой экспертной системы БЭС4, принятие решений о фактах попадания БЛА в заданную зону осуществляется с помощью БЗ подсистемы, в которой отражены знания, навыки и умения опытных операторов-десифровщиков по распознаванию и идентификации воздушных объектов.

Система БЭС4 как и системы БЭС1, БЭС2, БЭС3 строится с использованием подходов, описанных в предыдущем разделе данной главы.

Рассматриваемая подсистема в процессе ее функционирования взаимодействует с «электронными помощниками» оператора связи и командира расчета МНПУ БАК, составляющими наземную часть ИИСУ БЛА.

Отметим, что обозначенные выше бортовые задачи интеллектуального управления БЛА, особенно задачи обеспечения машинного зрения и оперативной корректировки траекторий полета БЛА, являются весьма трудоемкими и требуют решения в минимально возможное время. Этот факт подразумевает, что часть задач ИИСУ БЛА может решаться на наземных вычислительных серверах БАК с обменом данными по ИКРЛ связи с БЛА.

Система принятия решений, являющаяся основой ИИСУ БЛА, должна включать в себя следующие компоненты:

1. Комплексы программ решения соответствующих задач (КПРЗ) на базе выбранных (разработанных) математических алгоритмов.

2. Базы данных (БД) для решения этих задач.

3. Интерфейсные программы (ИП), обеспечивающие сбор и передачу данных, как в составе каждой подсистемы, так и между подсистемами ИСНУ СБЛА.

4. Комплекс программ работы с БЗ (КПРБЗ), состоящих из следующих модулей:

- модуль БЗ подсистемы (МБЗ);
- модуль корректировки и пополнения БЗ (МКПБЗ);
- модуль формирования вариантов решений (МФВР);

5. Комплекс программ анализа вариантов и выбора конкретного решения (КПАВВКР) по критериям времени и вероятности успешной реализации.

6. Комплекс программ преобразования выбранного решения (КППВР) в исполняемую форму, в частности в цифровой код для его реализации в САУ БЛА и (или) в системе связи БЛА, а также при использовании в соответствующих подсистемах ИИСУ БЛА.

Структурная схема системы принятия решений, которая описывает технологию ее функционирования, приведена на Рис. 10.12.

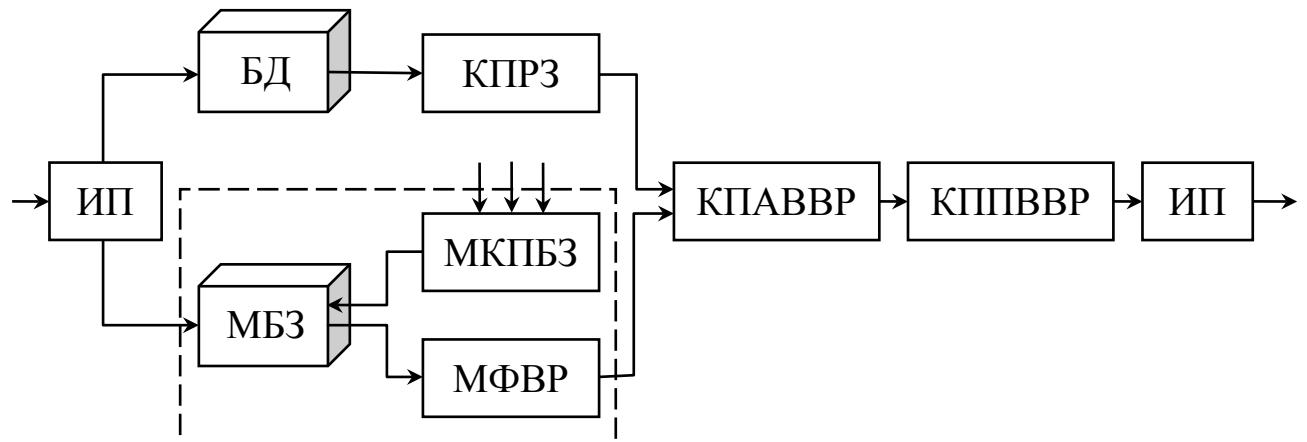


Рис. 10.12

Сформулируем основные требования, учитываемые при разработке системы принятия решений в среде ИИСУ БЛА:

1. Программное обеспечение системы, включающее в себя ИП, КПРЗ, МФВР, КПАВВР должно быть реализовано на языках типа Ассемблер и C++ и иметь максимальное быстродействие при решении соответствующих задач, а также минимальный объем занимаемой массовой памяти БВК (см. Рис. 10.2).

2. Бортовые части БД и МБЗ должны храниться во флэш-памяти БВК.

3. Наземные части БД и МБЗ должны храниться на серверах БАК и передаваться со сверхвысоким быстродействием управляющей подсистеме ИИСУ БЛА.

4. В перспективе при формировании МБЗ и МФВР должны быть использованы самые эффективные по глубине описания

предметной области, объему памяти и быстродействию методы формализации знаний и получения из них требуемых выводов.

При успешном выполнении этих требований, дополненных жесткими системотехническими требованиями к БВК и периферийному оборудованию ИИСУ БЛА возможно обеспечить максимальную степень автономности БЛА при решении поставленных боевых задач.

Согласно Рис. 10.5 наземную часть ИИСУ БЛА представим в форме наземных экспертных систем НЭС1, НЭС2, НЭС3 и НЭС4, каждая из которых является реализацией «электронного помощника» соответствующего члена расчета МНПУ БАК, который является антропоцентрическим (эргатическим, человекомашинным) объектом (см. Разд. 10.1). В этом случае разработка НЭС1,..., НЭС4 может проводиться с использованием существующих общих методик построения ЭС и подходов, предлагаемых в работах [59, 65-68, 92].

Интеграция систем БЭС1,..., БЭС4 и НЭС1,..., НЭС4 в единую ИИСУ БЛА аппаратно осуществляется с использованием ИКРЛ БАК (см. Рис. 10.3) и методически производится с привлечением технологий, описанных в работе [66].

### **10.3. Базовая бортовая экспертная система БЛА**

Введенные выше БЭС1,..., БЭС4, которые составляют основу подсистем бортовой части ИИСУ БЛА, должны создаваться с использованием общих проектных решений. Это объясняется необходимостью как их взаимодействия в процессе выполнения БЛА целевых задач, так и сокращения трудоемкости разработки бортовой части ИИСУ БЛА за счет применения типовых проектных решений, содержащихся в базовой бортовой ЭС.

Совместно с формированием структуры такой системы в данном разделе предлагается ее теоретико-множественная модель [113], которая наряду с описательной функцией содержит

рекомендации по практической реализации базовой бортовой экспертной системы (ББЭС) БЛА.

Будем считать, что базовая БЭС состоит из множества  $B$  элементов, включающих в себя следующие блоки:

- $b_1$  – блок целеполагания (БЦ);
- $b_2$  – блок формирования решений (БФР);
- $b_3$  – блок анализа и выбора решений (БАВР);
- $b_4$  – блок формирования исполняемых решений (БФИР);
- $b_5$  – база данных и знаний (БДЗ);
- $b_6$  – база фактов (БФ).

Все эти блоки должны быть реализованы в виде соответствующих комплексов программ и файлов в среде предложенного выше БВК БЛА.

Функционирование ББЭС осуществляется с использованием исходных данных, поступающих от множества  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  датчиков БЛА, множества  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$  элементов целевой нагрузки (аппаратуры) и от множества  $E = \{E_i | i \in \overline{1,8}\}$  других введенных выше бортовых и наземных ЭС.

Принятые этой системой решения с помощью БФИР передаются для выполнения на множество  $I_1$  исполнительных механизмов системы управления (ИМСУ) БЛА и множество  $I_2$  исполнительных механизмов (устройств) его целевой нагрузки (аппаратуры) (ИМЦН(А)). Примерами таких механизмов являются рулевые машинки БЛА, гиростабилизированная платформа оптико-электронной аппаратуры, пусковые средства АСП и др.

На Рис. 10.13 представлена схема взаимодействия элементов базовой БЭС.

При описании структуры и функционирования ББЭС будем использовать теорию бинарных отношений дискретных множеств [60]. Приведем некоторые определения этой теории.

Пусть даны два таких множества  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  и  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ .

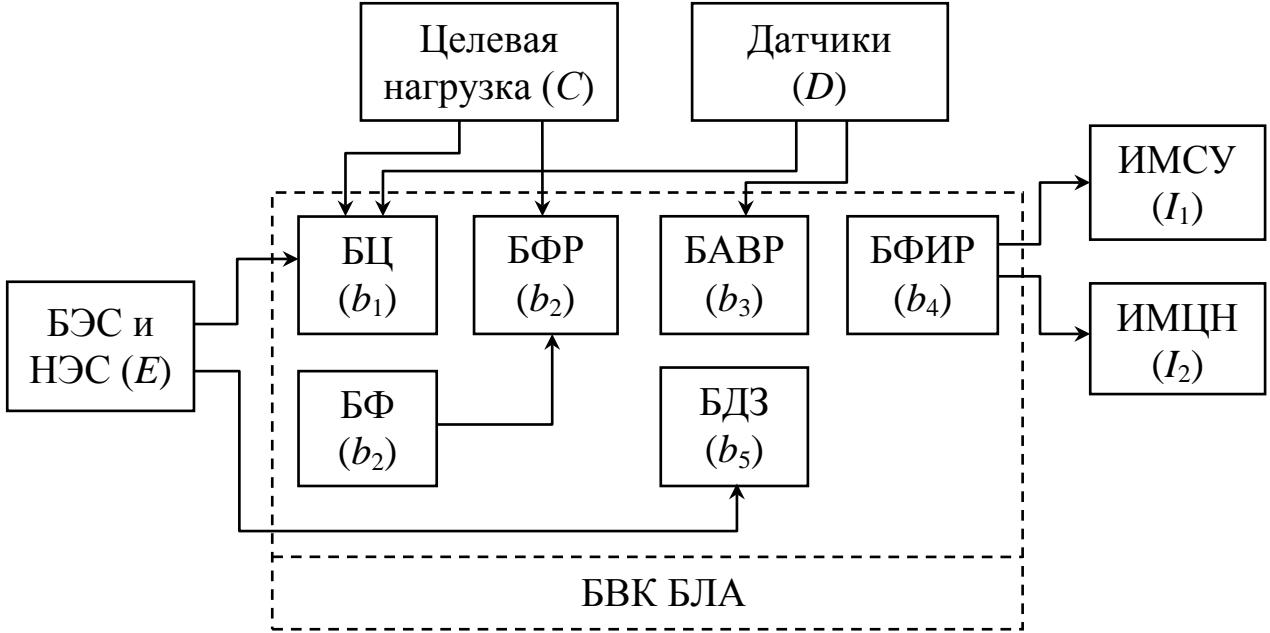


Рис. 10.13

Бинарным отношением  $Q \subseteq X \times Y$  называется подмножество  $Q = \{x_i, y_j | i \in (\overline{1, k}), j \in (\overline{1, r})\}$  упорядоченных пар их элементов, построенных по определенному правилу [60].

Геометрическим представлением отношения  $Q$  является двудольный ориентированный граф, вершинами которого являются элементы  $x_i \in X$  и  $y_j \in Y$ ,  $i = (\overline{1, k})$ ,  $j = (\overline{1, r})$ .

Аналитическим представлением такого отношения является матрица  $Q = [q_{ij}]$  размерности  $k \times r$  с элементами:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если пара } (x_i, y_j) \text{ входит в отношение } Q; \\ 0, & \text{в противном случае, } i = (\overline{1, k}), j = (\overline{1, r}). \end{cases} \quad (10.3.1)$$

Взаимодействие элементов ББЭС и элементов других множеств, представленных на Рис. 10.13, в процессе полета БЛА на интервале времени  $[t_0, t_k]$  будем описывать следующими динамическими отношениями [60]:

$$\begin{aligned} Q_1(t) &\subseteq B \times B; \quad Q_2(t) \subseteq C \times B; \quad Q_3(t) \subseteq D \times B; \\ Q_4(t) &\subseteq E \times B; \quad Q_5(t) \subseteq \{b_4\} \times I_1; \quad Q_6(t) \subseteq \{b_4\} \times I_2, \quad (10.3.2) \\ &t \in [t_0, t_k]. \end{aligned}$$

Эти отношения описывают взаимодействия во времени элементов ББЭС, источников и потребителей ее информации.

Например, в некоторый момент времени  $t \in [t_0, t_k]$  БФИР может запросить данные у соответствующих датчиков о текущих значениях углов отклонения рулевых поверхностей БЛА. В отношения  $Q_5(t)$  и  $Q_6(t)$  входит одноэлементное множество, состоящее из БФИР.

Отношения (10.3.2) описываются соответствующими матричными функциями [60], элементы которых являются функциями времени, удовлетворяющими в каждый момент времени  $t \in [t_0, t_k]$  условиям (10.3.1).

Рассмотрим описания функционирования элементов БЭС.

При формировании БЦ БЭС будем считать, что система оперирует с двумя видами целей:

- 1) основные цели, определяемые выполняемым БЛА на интервале времени  $[t_0, t_k]$  целевым заданием,
- 2) вспомогательные цели, состоящие в ликвидации возникающих в полете проблемных ситуаций (ПрС).

Будем считать, что проблемные ситуации возникают в случайные моменты времени  $t \in [t_0, t_k]$ .

Обозначим через  $\mathbb{C}$  и  $S$  соответственно множество целей 1-го вида и множество потенциально возможных проблемных ситуаций (цели 2-го вида).

Введем в рассмотрение множество  $T = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}$  моментов времени полета БЛА, в которые планируется достижение конкретных целей из множества  $\mathbb{C}$ .

Связь элементов множества  $\mathbb{C}$  и  $T$  представим отношением вида:

$$Q_7 \subseteq T \times \mathbb{C}. \quad (10.3.3)$$

Графическое представление этого отношения приведено на Рис. 10.14.

Выделим в множестве  $\mathbb{C}$  подмножества достигнутых ( $\mathbb{C}_d$ ) и недостигнутых ( $\mathbb{C}_{nd}$ ) целей. Первой задачей БЦ является выделение в момент времени  $\tau_l \in T$  невыполненных целей  $\mathbb{C}_p \in \mathbb{C}_{nd}$ .

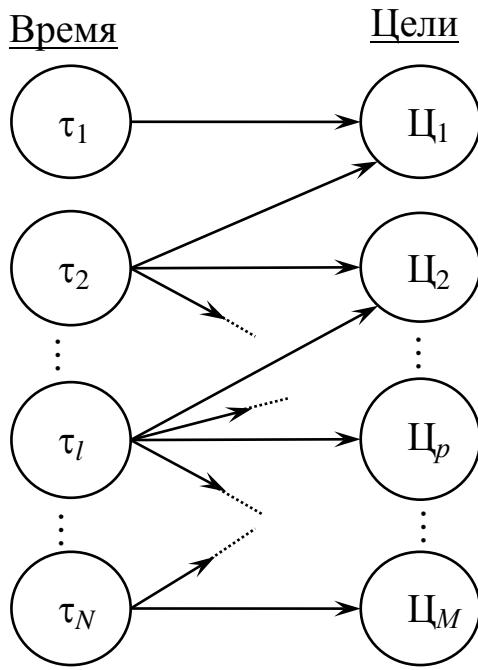


Рис 10.14

Для решения этой задачи в БЦ используется множество продукционных правил вида (10.1.1):

$$\Pi_1 = \{\pi_{lp}^{(1)} \mid l = (\overline{1, N}), \quad p = (\overline{1, M})\}, \quad (10.3.4)$$

состоящее из правил:

$$\begin{aligned} \pi_{lp}^{(1)} : & \text{ЕСЛИ } \{P_p^{(1)}(c(\tau_l), d(\tau_l), e(\tau_l)) = 1\}, \text{ ТО } \{\Pi_p \in \Pi_{\text{д}}\} \\ & \text{ИНАЧЕ } \{\Pi_p \in \Pi_{\text{нд}}\}. \end{aligned} \quad (10.3.5)$$

В этих правилах для анализа достижения каждой запланированной в момент времени  $t = \tau_l$  цели используются соответствующие предикаты  $P_p^{(1)}$ , значения которых описывают факты выполнения («1») или невыполнения («0») условий, при которых цель  $\Pi_p$  считается достигнутой.

Аргументами этих предикатов являются значения векторов данных  $c(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_m(t))$ ,  $d(t) = (d_1(t), d_2(t), \dots, d_m(t))$ , поступающих в момент времени  $t = \tau_l$  от целевой нагрузки (аппаратуры) и датчиков БЛА, а также от других ЭС ИИСУ БЛА (вектор  $e(t)$ ).

Отметим, что активация правил (10.3.5) осуществляется в соответствии с отношением (10.3.3). С использование таймера ББЭС в каждый момент времени  $\tau_l \in T$  рассматриваемый блок с использованием этих правил определяет наличие текущих целей таких, что

$$\mathbf{Ц}_p = \arg\{P_p^{(1)}(c(\tau_l), d(\tau_l), e(\tau_l)) = 0\}, \quad \tau_l \in T. \quad (10.3.6)$$

Правая часть этого выражения означает, что в текущий момент времени  $t = \tau_l$  запланированная согласно отношению (10.3.3) цель  $\mathbf{Ц}_p$  недоступна, то есть относится к подмножеству  $\mathbf{Ц}_{\text{нд}}(\tau_l) \subset \mathbf{Ц}_{\text{нд}}$ .

Для конкретизации каждого правила множества (10.3.4) необходимо описать состав аргументов, используемых в них предикатов. Эту конкретизацию будем представлять отношениями вида:

$$Q_8 \subseteq C \times P^{(1)}; \quad Q_9 \subseteq D \times P^{(1)}; \quad Q_{10} \subseteq E \times P^{(1)}, \quad (10.3.7)$$

где  $P^{(1)} = \{P_p^{(1)} \mid p = (\overline{1, M})\}$  – множество предикатов, используемых в правилах (10.3.5).

На Рис. 10.15 приведены представления отношений  $Q_8$  и  $Q_9$  в форме соответствующих графов.

Для формирования в БЦ целей 2-го вида будем использовать множество  $Z$  этапов полета (решаемых задач) БЛА и множество  $S$  потенциально возможных проблемных ситуаций, требующих от БЭС формирования и реализации соответствующих решений.

Связь этих множеств представим отношением:

$$Q_{11} \subseteq Z \times S, \quad (10.3.8)$$

пример которого приведен на Рис. 10.16.

Отметим, что одному элементу  $z_\alpha \in Z$  может соответствовать несколько проблемных ситуаций, и одна и та же ситуация может возникнуть на нескольких этапах полета БЛА при решении им различных задач.

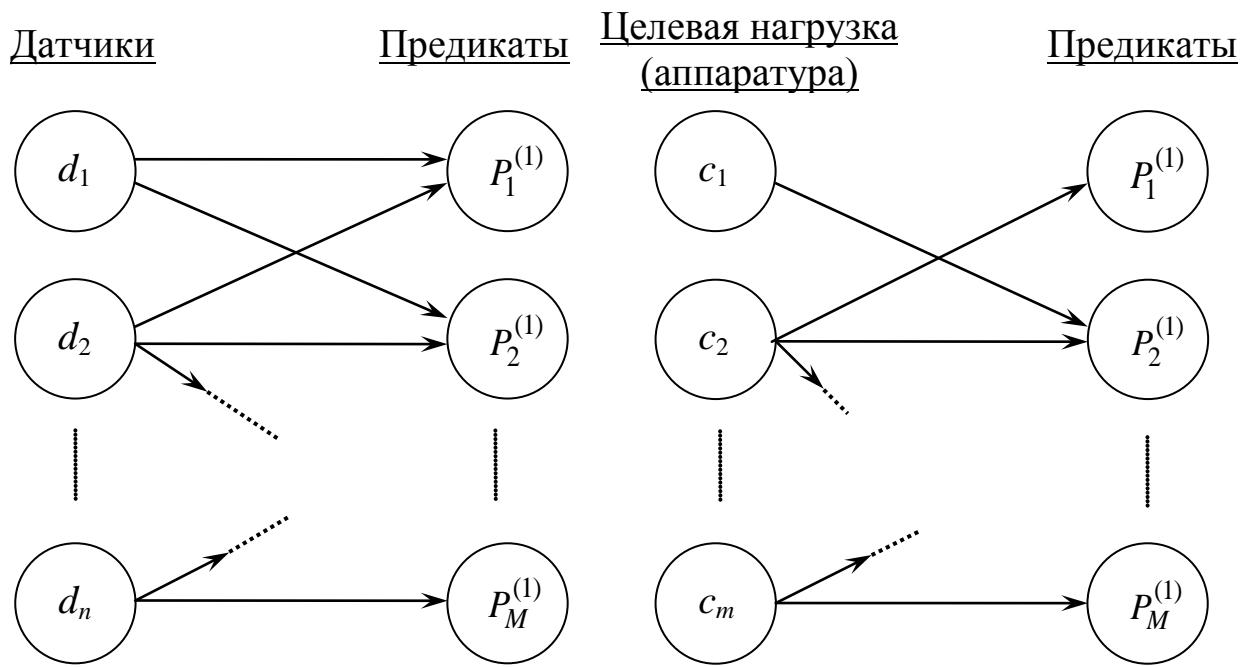


Рис. 10.15

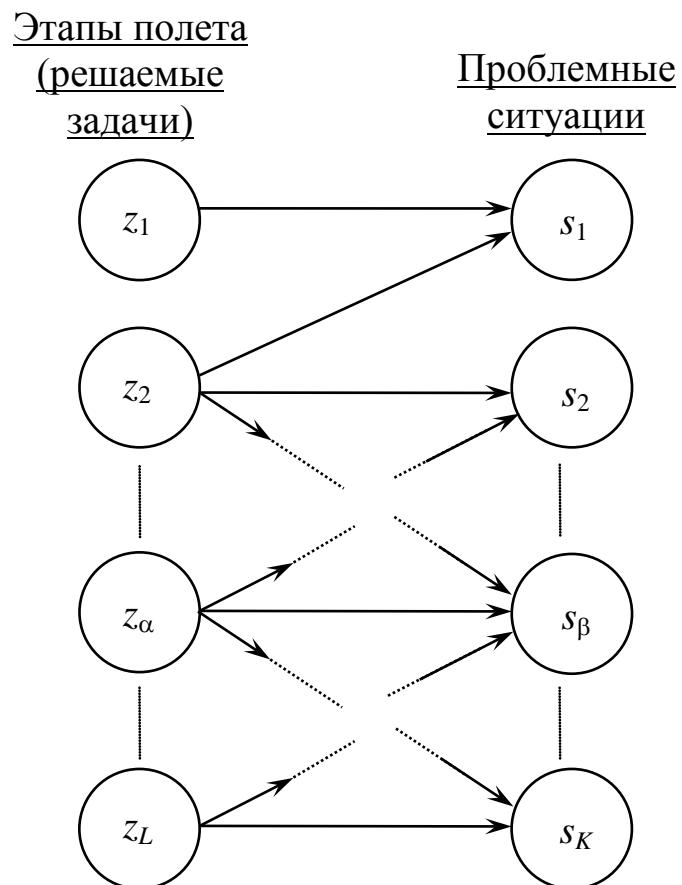


Рис. 10.16

Будем считать, что для выделения в каждый момент времени  $t \in [t_0, t_k]$  проблемной ситуации (ПрС), требующей принятия ББЭС конкретного решения, используется информация, поступающая от элементов множеств  $C, D$  и  $E$  (см. Рис. 10.13)

Пусть эта информация содержится в значениях вектора  $c(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_m(t))$ , описывающего характеристики обстановки, вектора  $d(t) = (d_1(t), d_2(t), \dots, d_n(t))$ , описывающего показания датчиков БЛА и вектора  $e(t)$ , описывающего сообщения от других бортовых и наземных ЭС.

Тогда для выделения текущих целей 2-го вида будем использовать систему продукционных правил:

$$\Pi_2 = \{\pi_{\alpha\beta}^{(2)} \mid \alpha = (\overline{1, L}), \beta = (\overline{1, K})\}, \quad (10.3.9)$$

где каждое правило  $\pi_{\alpha\beta}$  является конкретизацией выражения (10.1.1) вида:

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha\beta}^{(2)} : & \text{ЕСЛИ } \{P_\alpha^{(2)}(c(t), d(t), e(t)) = 1\}, \text{ ТО } \{\text{ситуация } S_\beta\} \\ & \text{ИНАЧЕ } \{\text{переход к } \pi_{\delta\gamma}^{(2)}\}, \end{aligned} \quad (10.3.10)$$

Заметим, что правило  $\pi_{\delta\gamma}^{(2)}$  принадлежит множеству  $\Pi_1$ , описываемому выражениями (10.3.4) и (10.3.5).

В выражении (10.3.10) через  $P_\alpha^{(2)}(c(t), d(t), e(t))$  обозначен  $\alpha$ -й предикат, который при выполнении некоторых условий, зависящих от значений векторов  $c(t), d(t), e(t)$ , принимает значение «1», в противном случае – «0». Параметр  $S_\beta$  представляет собой идентификатор  $\beta$ -й ПрС, которая является элементом заданного для данной БЭС множества  $S$  таких ситуаций.

Состав аргументов множества предикатов  $P_2 = \{P_\alpha^{(2)} \mid \alpha = (\overline{1, L})\}$ , используемых в правилах (10.3.10), описываются следующими отношениями:

$$Q_{11} \subseteq C \times P^{(2)}; \quad Q_{12} \subseteq D \times P^{(2)}; \quad Q_{13} \subseteq E \times P^{(2)}. \quad (10.3.11)$$

Второй задачей БЦ является выделение в соответствующие моменты времени  $t \in [\tau_l, \tau_{l+1}]$  множества ПрС, требующих решения:

$$S_\beta = \arg \{ P_\alpha^{(2)}(c(t), d(t), e(t)) = 1 \mid \alpha \in (\overline{1, L}) \}, \quad (10.3.12)$$

которые включаются в подмножество  $S(t) \subset S$  текущих проблемных ситуаций. В связи с тем, что проблемные ситуации возникают в случайные моменты времени, множество  $S(t)$  должно формироваться путем прогнозирования значений векторов  $c(t)$  и  $d(t)$ , входящих в предикаты  $P_1^{(2)}, P_2^{(2)}, \dots, P_L^{(2)}$ .

Таким образом, работа БЦ ББЭС заключается в использовании множеств правил (10.3.9), (10.3.10) в каждый текущий момент времени  $t \in [t_0, t_k]$  полета БЛА и правил (10.3.4), (10.3.5) в заданные моменты времени  $\tau_l \in T$ . Результатами работы этого блока являются множества возникших проблемных ситуаций  $S(t)$  и недостигнутых целей  $\Pi_{\text{нд}}(\tau_l)$ , элементы которых формируются с использованием выражений (10.3.12) и (10.3.6). Если эти множества в соответствующие моменты времени не являются пустыми множествами, то они передаются в качестве входных данных в блок *формирования решений* (БФР) для их устранения.

Рассмотрим работу этого блока, предполагая заданным множество  $R = \{r_\gamma \mid \gamma = (\overline{1, F})\}$  решений, принимаемых БЭС.

Функционирование БФР основывается на использовании отношений:

$$Q_{14} \subseteq \Pi_{\text{нд}} \times R; \quad Q_{15} \subseteq S \times R,$$

которые указывают потенциально возможные решения для реализации недостигнутых целей и ликвидации возникающих в полете проблемных ситуаций.

Будем считать, что для каждого решения  $r_\gamma \in R$  имеется некоторое множество  $A_\gamma$  альтернатив его практической реализа-

ции механизмами (устройствами), входящими в состав множеств  $I_1$  и  $I_2$  (см. Рис. 10.13).

Полное множество альтернатив решений, принимаемых БЭС, определяется как:

$$A = \bigcup_{\gamma=1}^F A_\gamma. \quad (10.3.13)$$

Заметим, что использованная в этом выражении операция объединения множеств [17] при ее программной реализации оставляет в одном экземпляре повторяющиеся элементы, входящие в состав множеств  $A_1, A_2, \dots, A_F$ .

Связь между решениями и альтернативами их реализации представим отношением:

$$Q_{16} \subseteq R \times A. \quad (10.3.14)$$

Используя операцию композиции отношений [60], построим отношения, непосредственно связывающие множества  $\Pi_{\text{нд}}$  и  $S$  с множеством  $A$ :

$$Q_{17} = Q_{14} \circ Q_{16} = (\Pi_{\text{нд}} \times R) \circ (R \times A) \subseteq \Pi_{\text{нд}} \times A; \quad (10.3.15)$$

$$Q_{18} = Q_{15} \circ Q_{16} = (S \times R) \circ (R \times A) \subseteq S \times A. \quad (10.3.16)$$

Формирование отношений  $Q_{17}$  и  $Q_{18}$  производится с помощью достаточно простого метода, приведенного в работе [60], который оперирует с матричными представлениями вида (10.3.1) отношений (10.3.12) и (10.3.14).

Для выбора подходящих для реализации альтернатив решений будем использовать многокритериальный оптимизационный подход.

Проиллюстрируем его для случая, когда БЭС должна обеспечить перевод некоторой цели из множества  $\Pi$  в множество  $\Pi_d$ .

Рассмотрим некоторую цель  $\pi_p \in \Pi_{\text{нд}}(\tau_l)$ , которая выявлена с использованием выражений (10.3.6).

Используя отношение (10.3.15) для этой цели, определим подмножество альтернатив  $A_p = \{a_{p1}, a_{p2}, \dots, a_{pn_p}\}$  решений по ее переводу в множество  $\Pi_{\text{д}}$ .

Для выбора из множества  $A_p$  оптимальных по Парето [93] альтернатив введем булевские переменные  $\xi_{pk}$ , удовлетворяющие условию:

$$\xi_{pk} \in \{0; 1\}, \quad k = (\overline{1, n_p}), \quad \forall p \in \Pi_{\text{нд}}(\tau_l) \quad (10.3.17)$$

При этом предполагается, что

$$\xi_{pk} = \begin{cases} 1, & \text{если выбрана альтернатива } a_{pk} \in A_p; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

С учетом ограничений вида (10.3.17) условие выбора из  $A_p$  одной альтернативы запишется как:

$$\sum_{k=1}^{n_p} \xi_{pk} = 1, \quad \forall p \in \Pi_{\text{нд}}(\tau_l). \quad (10.3.18)$$

Для проведения оптимизационного выбора (вывода [68]) предлагается использовать следующие критерии:

$$\begin{aligned} T_p &= \sum_{k=1}^{n_p} t_{pk} \xi_{pk} \rightarrow \min; \\ \Omega_p &= \sum_{k=1}^{n_p} \omega_{pk} \xi_{pk} \rightarrow \max. \end{aligned} \quad (10.3.19)$$

где  $t_{pk}$  – затраты времени на отработку БЛА альтернативы  $a_{pk}$  решения по переводу цели  $\Pi_p$  в множество достигнутых целей;  $\omega_{pk}$  – вероятность успешной реализации этой альтернативы в процессе полета БЛА.

Задача (10.3.19), (10.3.18), (10.3.17) является двухкритериальной задачей булевского линейного программирования [93], которая решается известными методами [94] для каждой цели  $\Pi_p \in \Pi_{\text{нд}}(\tau_l)$ .

Результатом решения этой задачи является множество  $A_p^0 = \{a_{pk}^0 \mid k \in (\overline{1, n_p})\}$  паретооптимальных вариантов альтернатив перевода цели  $\mathbf{c}_p$  в множество  $\mathbf{C}_{nd}$  достигнутых целей.

Аналогичным образом для каждой проблемной ситуации  $s_\beta \in S(t)$ , определяемой выражением (10.3.12), с помощью отношения (10.3.16) формируется множество альтернатив  $A_\beta = \{a_{\beta 1}, a_{\beta 2}, \dots, a_{\beta n_\beta}\}$  по ее ликвидации. Далее для ситуации  $s_\beta \in S(t)$  решается задача вида (10.3.19), (10.3.18), (10.3.17) и формируется множество  $A_\beta^0 = \{a_{\beta k}^0 \mid k \in (\overline{1, n_\beta})\}$  оптимальных по Парето вариантов альтернативных решений по ее ликвидации.

Сформированные в БФР множества вариантов  $A_p$ ,  $\mathbf{c}_p \in \mathbf{C}_{nd}(\tau_l)$  и  $A_\beta$ ,  $s_\beta \in S(t)$  поступают в *блок анализа и выбора решений* (БАВР) для выбора из этих множеств конкретных реализуемых вариантов.

В этом блоке анализ поступивших вариантов решений осуществляется с помощью программных реализаций множества математических моделей  $\mathfrak{M}$ , описывающих в общем случае движение БЛА, работу его целевой нагрузки (аппаратуры) и датчиков, а также функционирование КБО БЛА.

Отметим, что каждая из введенных выше БЭС1, ..., БЭС4 имеет собственное множество моделей  $\mathfrak{M}$ .

Для использования последних применяется отношение:

$$Q_{19} \subseteq A \times \mathfrak{M}. \quad (10.3.20)$$

С помощью этого отношения по множеству  $A_p^0 \subset A$  устанавливается необходимое для анализа входящих в него вариантов подмножество  $\mathfrak{M}_p \subset \mathfrak{M}$  применяемых моделей.

По результатам моделирования из множества  $A_p^0$  выбирается альтернатива:

$$a_p^* = \arg \{P_p^{(1)}(\bar{c}(\tau_l), \bar{d}(\tau_l), e(\tau_l)) = 1\}, \quad (10.3.21)$$

которая переводит цель  $\zeta_p \in \Pi_{\text{нд}}(\tau_l)$  в множество  $\Pi_{\text{д}}(\tau_l)$  достигнутых целей.

В этом выражении векторы  $\bar{c}(\tau_l)$  и  $\bar{d}(\tau_l)$  имеют значения, эмулированные с помощью математических моделей целевой нагрузки (аппаратуры) и датчиков БЛА при использовании в качестве входных данных альтернатив  $a_{pk}^0 \in A_p^0$ .

При наличии для цели  $\zeta_p \in \Pi_{\text{нд}}(\tau_l)$  нескольких альтернатив  $a_p^*$  из них выбирается «наиболее быстродействующая» альтернатива, для которой время реализации  $t_{pk}$  будет минимальным.

Аналогичным образом, на основе множества  $A_\beta^0$  и отношения (10.3.20) формируется альтернатива:

$$a_\beta^* = \arg \{ P_\beta^{(1)} (\bar{c}(\tau_l), \bar{d}(\tau_l), e(\tau_l)) = 1 \} \quad (10.3.22)$$

решения, ликвидирующего ПрС  $s_\beta \in S(t)$ .

При неединственности таких альтернатив применяется приведенное выше правило.

Выбранные решения, определяемые выражениями (10.3.21), (10.3.22), передаются в соответствующие моменты времени в блок *формирования исполняемых решений* (БФИР) для выработки по известным алгоритмам (программам) управляющих данных, передаваемых исполнительным механизмам БЛА и его целевой нагрузки.

При работе этого блока применяются отношения вида:

$$Q_{20} \subseteq A \times I_1; \quad Q_{21} \subseteq A \times I_2,$$

которые для каждого решения  $a_p \in A$  или  $a_\beta^* \in A$  однозначно определяют состав исполнительных механизмов для выдачи на них соответствующих управляющих данных.

В *базе данных и знаний* (БДЗ) предлагается выделить два блока:

1. Блок необходимой для функционирования БЭС информации, включающей в себя файлы со структурами данных,

описываемыми отношениями  $Q_8 - Q_{13}$ , программу полета БЛА и исходные данные для моделей множества  $\mathfrak{M}$ .

2. Блок знаний БЭС, содержащий матричные (спиковые) представления отношений  $Q_7, Q_{11}, Q_{14} - Q_{21}$ .

Кроме этого в состав БДЗ входят программы корректировки состава информации этих блоков

Важным компонентом БЭС является *база фактов* (БФ), позволяющая формировать решения «по прецедентам» [59]. В эту базу включаются решения, проверенные предшествующей практикой эксплуатации БЛА.

В основу функционирования БФ предлагается положить условную систему правил:

$$\pi_{l\sigma}^{(3)} : \text{ЕСЛИ } \{\text{при } t \in (\tau_l, \tau_{l+1}) \text{ имеем ПрС } s_\sigma\}, \\ \text{ТО } \{\text{решение } a_\sigma\}; \quad (10.3.24)$$

$$\pi_{lq}^{(4)} : \text{ЕСЛИ } \{\text{при } t = \tau_l \text{ не выполнена цель } \mathbb{C}_q\}, \\ \text{ТО } \{\text{решение } a_q\}; \quad (10.3.25)$$

Если на начальных этапах эксплуатации БЭС элементы  $s_\sigma, \mathbb{C}_q, a_\sigma, a_q$  не входят в множества  $S, \mathbb{C}, A$ , то они должны быть включены в их состав с корректировкой соответствующих элементов БДЗ. В последующем в состав БФ включаются апробированные на практике описания проблемных ситуаций, целей и принятых решений.

Таким образом, считается, что в каждый момент времени полета БЛА функционирует БЦ, который определяет наличие ПрС и невыполненных целей. При их появлении начинает работать БФ системы, в которой проверяется выполнение правил (10.3.24) или (10.3.25). Определенные с их помощью решения передаются в БФИР БЭС для реализации.

Если ни одно из правил БФ не выполняется, по результатам БЦ начинает работать БФР и другие ее блоки по описанным выше методам.

## **10.4. Основные вопросы реализации бортовой экспертной системы подсистемы «Полет» интегрированной интеллектуальной системы управления БЛА**

С точки зрения предлагаемой прикладной теории управления БЛА важную роль играет БЭС1, входящая в состав подсистемы «Полет» ИИСУ БЛА. Основным назначением БЭС1 является поддержка и обеспечение эффективного применения на практике методов управления БЛА, рассмотренных в Главах 5-9 данной работы.

Рассмотрим особенности реализации этой системы с использованием проектных решений по базовой БЭС ИИСУ БЛА.

Как было отмечено в Разд. 10.1, на первых этапах внедрения методов и средств интеллектуального управления БЛА эта система должна выступать в качестве «надстройки» над его САУ (см. Рис. 10.4). Поэтому в структуре БЭС, представленной на Рис. 10.13 исключим элементы множеств  $I_1$  и  $I_2$ , заменив их на САУ БЛА. Здесь предполагается, что выходные данные БФИР БЭС1 будут передаваться в САУ БЛА, которая будет управлять соответствующими ИМСУ.

В связи с тем, что БЭС1 на первых этапах ее применения решает только задачи поддержки программного управления БЛА, из состава ее источников входных данных исключается множество  $C$  элементов целевой нагрузки (аппаратуры) БЛА. Это означает, что предикаты множеств  $P^{(1)}$  и  $P^{(2)}$ , входящие в выражения (10.3.5) и (10.3.10), должны формироваться без использования вектора  $c(t)$ .

При развитии БЭС1, когда в ее состав войдут задачи управления БЛА по видеоизображениям обстановки, соответствующие элементы множества  $C$  должны быть использованы при работе этой системы.

В качестве множеств  $T$  и  $\mathbb{C}$ , входящих в отношение (10.3.3) в БЭС1 предлагается использовать моменты времени  $t_0, t_1, \dots, t_6$  начала и завершения этапов полета БЛА, введенных в Разд. 10.2, и соответствующие значения фазовых координат БЛА, определенных в процессе программирования его траектории.

Таким образом, множество  $\mathbb{C}$  включает в себя элементы  $\mathbb{c}_1, \mathbb{c}_2, \dots, \mathbb{c}_6$ , где цель  $\mathbb{c}_i$  формируется как «*i-я фазовая координата БЛА имеет заданное значение*»,  $i = (\overline{1,6})$ .

При конкретизации отношения  $Q_7$  (см. Рис. 10.14) элементы множества  $T$  заменяются числовыми значениями  $\tau_l = t_l$ ,  $l = (\overline{0,6})$ , а элементы множества  $\mathbb{C}$  – конкретизациями приведенной выше общей формулировки целей.

Предикаты  $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, \dots, P_6^{(1)}$  множества  $P^{(1)}$ , входящие в правила (10.3.5) формируются на основе следующих неравенств:

$$\begin{aligned} V^*(\tau_l) - \varepsilon_V &\leq V(\tau_l) \leq V^*(\tau_l) + \varepsilon_V; \\ \theta^*(\tau_l) - \varepsilon_\theta &\leq \theta(\tau_l) \leq \theta^*(\tau_l) + \varepsilon_\theta; \\ \Psi^*(\tau_l) - \varepsilon_\Psi &\leq \Psi(\tau_l) \leq \Psi^*(\tau_l) + \varepsilon_\Psi; \\ x^*(\tau_l) - \varepsilon_x &\leq x(\tau_l) \leq x^*(\tau_l) + \varepsilon_x; \\ y^*(\tau_l) - \varepsilon_y &\leq y(\tau_l) \leq y^*(\tau_l) + \varepsilon_y; \\ z^*(\tau_l) - \varepsilon_z &\leq z(\tau_l) \leq z^*(\tau_l) + \varepsilon_z. \end{aligned} \quad (10.3.26)$$

Здесь  $V(\tau_l), \Psi(\tau_l), \theta(\tau_l), x(\tau_l), y(\tau_l), z(\tau_l)$  – фактические значения фазовых координат БЛА в момент времен  $\tau_l$ , полученные с помощью показаний соответствующих датчиков множества  $D$  и обработанных в БВК БЛА;  $\varepsilon_i$  – допустимое значение отклонения *i-й фазовой координаты* от ее программного значения, обеспечиваемое автопилотом САУ,  $i = (\overline{1,6})$ . Символом (\*) отмечены фазовые координаты программного движения БЛА.

Отметим, что в множество  $\mathbb{C}_{\text{нд}}(\tau_l)$  включаются те цели, для которых не выполняется при  $t = \tau_l$  соответствующие из приве-

денных выше неравенств. В этом случае считается, что соответствующий предикат  $P_p^{(1)} = 0$ ,  $p \in (\overline{1,6})$ . Например, при невыполнении четвертого неравенства имеем, что  $P_4^{(1)} = 0$  и  $\zeta_4 \in \Pi_{\text{нд}}(\tau_l)$ .

Как следует из Рис. 10.13, в БЦ БЭС1 могут поступать цели от других БЭС и НЭС НИСУ БЛА.

Например, от БЭС2 подсистемы «Целевое задание» могут в моменты времени  $\tau_l$  быть переданы следующие сообщения:

- «*повторный заход на объект атаки*»;
- «*столкновение с объектом атаки*».

В подсистеме «Живучесть» ее БЭС3 может выработать решение «*возврат БЛА в точку старта*» и передать его в виде цели для исполнения в подсистему «Полет».

Все такие сообщения представляются в множестве  $\mathbb{Z}$  рассматриваемой БЭС как новые цели  $\zeta_p \in \Pi_{\text{нд}}(\tau_l)$ , по которым с помощью БФ, БФР и БДЗ должны быть приняты и выполнены соответствующие решения.

В подсистеме «Полет» проблемными ситуациями будем считать события невыполнения в момент времени  $t \in [\tau_l, \tau_{l+1}]$  неравенств типа (10.3.26). Такие события возникают в некоторый момент времени  $t$  полета БЛА в силу ряда причин, вызывающих отклонения от фазовой траектории  $V^*(t)$ ,  $\theta^*(t)$ ,  $\Psi^*(t)$ ,  $x^*(t)$ ,  $y^*(t)$ ,  $z^*(t)$  программного движения БЛА, которые не могут быть ликвидированы подсистемой стабилизации (автопилотом) его САУ.

Для БЭС1 отношение  $Q_{11}$ , описываемое формулой (10.3.8), формируется на основе множеств  $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_5\}$  и  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_5\}$ . В множестве  $Z$  элемент  $z_\alpha$  является идентификатором (номером)  $\alpha$ -го этапа полета, совокупность которых была введена в Разд. 10.2.

Проблемные ситуации, составляющие множество  $S$ , будем представлять следующими событиями:

$$\begin{aligned}
s_1 &: V(t) \notin [V^*(t) - \varepsilon_V; V^*(t) + \varepsilon_V]; \\
s_2 &: \theta(t) \notin [\theta^*(t) - \varepsilon_\theta; \theta^*(t) + \varepsilon_\theta]; \\
s_3 &: \Psi(t) \notin [\Psi^*(t) - \varepsilon_\Psi; \Psi^*(t) + \varepsilon_\Psi]; \\
s_4 &: x(t) \notin [x^*(t) - \varepsilon_x; x^*(t) + \varepsilon_x]; \\
s_5 &: y(t) \notin [y^*(t) - \varepsilon_y; y^*(t) + \varepsilon_y]; \\
s_6 &: z(t) \notin [z^*(t) - \varepsilon_z; z^*(t) + \varepsilon_z].
\end{aligned} \tag{10.3.27}$$

В правилах (10.3.10), определяющих наличие в момент времени  $t$  проблемных ситуаций предикаты  $P_\alpha^{(1)}$ ,  $\alpha \in (\overline{1,6})$  принимают значения «1» или «0» в зависимости от выполнения или невыполнения в этот момент времени соответствующих условий из состава выражений (10.3.27).

Например, если в некоторый момент времени  $t$  выполняются 1-е, 4-е, 6-е условия из их состава, имеем, что

$$P_1^{(2)} = 1, P_2^{(2)} = 0, P_3^{(2)} = 0, P_4^{(2)} = 1, P_5^{(2)} = 0, P_6^{(2)} = 1.$$

Это означает, что вследствие (10.3.12) множество проблемных ситуаций, требующих ликвидации в этот момент времени определяется как  $S(t) = \{s_1, s_4, s_6\}$ .

При этом входящие в левые части выражений (10.3.27) параметры полета БЛА определяются в его БВК по показаниям датчиков, состав которых описывается отношением  $Q_{12}$  (см. выражение (10.3.11)).

Множество решений  $R$ , принимаемых БЭС1, включает в себя формулировки вида: «Увеличить (уменьшить) значение фазовой координаты <наименование>; «Вывести БЛА в точку с координатой <значение>». Примерами таких решений являются решения: «Увеличить скорость БЛА до значения  $V^*(t)$ »; «Уменьшить угол наклона траектории БЛА до значения  $\theta^*(t)$ »; «Вывести БЛА в точку со значением координаты  $y = y^*(t)$ ». Для целей, поступивших от других БЭС и НЭС, элементы множества  $R$  формируются как «Выбрать управление БЛА для <сообщение>

*ние от БЭС или НЭС».* Например, «Выбрать управление БЛА для <повторного захода на объект атаки>», «Выбрать управление БЛА для <возврата в точку старта (взлета)>».

Сформированным элементам множества  $R$  присваиваются идентификаторы (номера)  $r_\gamma$ ,  $\gamma = (\overline{1, F})$ , которые используются при построении отношений  $Q_{14}$  и  $Q_{15}$ , описывающих их соответствие элементам множеств  $\Pi_{\text{нд}}$  и  $S$ .

На этапе разработки БЭС1 для каждого решения  $r_\gamma \in R$  формируется множество альтернатив  $A_\gamma$  его реализаций. В связи с тем, что реализация решений по управлению БЛА с помощью БЭС1 осуществляется в командном режиме, множества  $A_\gamma$  составляются из последовательностей множества команд управления, определяемого выражением (1.11). Обозначим такие последовательности как  $K_\gamma$ ,  $\gamma = (\overline{1, F})$ . Тогда полное множество управляющих альтернатив БЭС1 по аналогии с выражением (10.3.13) будет иметь вид:

$$K = \bigcup_{\gamma=1}^F K_\gamma$$

С использованием этого множества строятся отношения  $Q_{16}$ ,  $Q_{17}$ ,  $Q_{18}$  (см. выражения (10.3.14)-(10.3.16)).

Подмножества альтернатив  $K_p$  и  $K_\beta$  для целей  $\Pi_p \in \Pi_{\text{нд}}(\tau_l)$  и проблемных ситуаций  $s_\beta \in S(t)$  формируются с применением отношений  $Q_{17}$  и  $Q_{18}$ . При выработке этих альтернатив в БФР производится выбор управлений  $w_j$ , удовлетворяющих условиям (1.12) и (1.13). При этом используется подход к выбору и согласованию требуемых команд управления БЛА, описанных в Разд. 8.4.4. В частности, применяются множества программ (8.4.53) и (8.4.54), реализуемых на БВК БЛА.

Паретооптимальные варианты альтернатив  $K_p$  и  $K_\beta$  выделяются из этих подмножеств путем решения задач вида (10.3.19), (10.3.18), (10.3.17). Отметим, что временные и веро-

ятностные параметры критериев (10.3.19) определяются при различных  $K_\gamma$  с помощью имитационного моделирования с привлечением моделей вида (1.10) на этапе создания БЭС1. Эти варианты поступают в БАВР БЭС1, в котором в качестве моделей множества  $\mathfrak{M}$ , входящего в отношение (10.3.20), используются модели движения БЛА, рассмотренные в Главах 5-7, которые представлены в форме выражений (1.14). При наличии действующего на БЛА ветра при анализе вариантов решений, входящих в множества  $K_p$  и  $K_\beta$ , в этом блоке используется метод его учета, описанный в Разд. 4.3.

При выборе конкретного решения используются правила (10.3.21) и (10.3.22), в которых в соответствующих предикатах, построенных на основе условий (10.3.26) и (10.3.27), использованы значения фазовых координат, полученных с помощью соответствующих моделей множества  $\mathfrak{M}$ .

На начальных этапах эксплуатации БЭС1 характеристики выбранных решений после обработки в ее БФИР передаются САУ БЛА для их исполнения. На последующих этапах для исполнения решений используются отношения вида (10.3.23).

Отметим, что в БДЗ БЭС1 наряду с описанным выше содержанием должна быть включена программа полета БЛА в виде файлов, описывающих значения вектора управления  $\Delta^*(t)$  и фазовых координат  $V^*(t)$ ,  $\theta^*(t)$ ,  $\Psi^*(t)$ ,  $x^*(t)$ ,  $y^*(t)$ ,  $z^*(t)$ , на сетке значений  $t \in [t_0, t_k]$ . Для выбора решений «по прецедентам» используется БФ БЭС1, построенная с использованием системы условных правил вида (10.3.24) и (10.3.25).

Рассмотрим основные вопросы эксплуатации БЭС1 ИИСУ БЛА.

Эксплуатационным персоналом БЭС1 являются:

- командир расчета МНПУ БАК;
- оператор управления МНПУ БАК;
- математик - системный программист МНПУ БАК.

Работа этого персонала связана с «обучением» системы на первоначальных этапах ее внедрения и корректировки содержания БДЗ и БФ, а также алгоритмов и программ функционирования БЦ, БФР, БАВР и БФИР в процессе эксплуатации БЭС1.

Для решения этих задач на МНПУ БАК должна храниться текущая версия БЭС1. Фактические значения параметров полета БЛА и принимаемые этой версией решения поступают с помощью ИКРЛ на дисплеи и запоминающие устройства АРМ указанного выше персонала МНПУ БАК.

Оператор управления и командир расчета МНПУ имеют возможность корректировать в «ручном» режиме эти решения в реальном масштабе времени с их фиксацией в своих АРМ. После полета БЛА вся полученная информация анализируется специалистами МНПУ БАК, и проводится требуемая корректировка соответствующих компонент БЭС1. Программную реализацию таких корректировок в БВК БЛА проводят с помощью соответствующих средств автоматизации программирования математик - системный программист МНПУ БАК.

Эксплуатация бортовой ЭС подсистемы «Полет» должна быть подчинена таким критериям эффективности БЭС1 как минимум числа корректировок, вносимых ее персоналом и максимум степени автономности решения поставленных БЛА целевых задач. Такие же критерии предлагается использовать при создании БЭС2, БЭС3 и БЭС4.

В заключении данной главы отметим, что проблема практической реализации интеллектуального управления БЛА находится в настоящее время на начальных стадиях ее решения. Успехи в этой области могут быть достигнуты при проведении широких теоретических и экспериментальных исследований и разработок, базирующихся на достижениях современной прикладной математики и информатики. Полученные при этом результаты позволят резко повысить эффективность применения перспективных БЛА различного назначения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная монография представляет собой первоначальный опыт систематического изложения на современном уровне вопросов программного управления БЛА самолетной и вертолетной схем. Несомненно, эти вопросы требуют дальнейшего развития в рамках предлагаемой прикладной теории управления БЛА.

Укажем основные направления развития этой теории.

Для расширения областей практического использования предлагаемых методов необходимо разработать методики формирования векторов требуемого прямого управления для БЛА схем типов «утка», «летающее крыло» и других неклассических конструкционных схем БЛА. Необходимо уточнить модели управляемого движения беспилотного вертолета одновинтовой схемы с учетом наличия в его конструкции крыла и оперения, а также указать связи управлений с его моментными характеристиками. Кроме этого должны быть разработаны общая и частные модели управляемого движения беспилотного вертолета двухвинтовой схемы и методы программирования его полетов.

Актуальной задачей теории является разработка методов комплексного управления движением БЛА и бортовым целевым оборудованием.

В развитие предложенных моделей динамики старта, взлета и посадки БЛА практика их современного применения требует создания достаточно простых и адекватных моделей воздушного старта с самолетных и вертолетных носителей. В этом же разделе теории необходимо разработать модели и методики расчета характеристик парашютной посадки БЛА с использованием управляемого парашюта при наличии ветровых возмущений, а также исследовать вопросы применения тормозного парашюта при аэродромной посадке БЛА.

Необходимо более подробно рассмотреть задачи управления информационными, имитационными и боевыми БЛА с учетом перспективных образцов их целевой нагрузки и новых подходов в тактике применения БЛА. Актуальными вопросами здесь являются разработка методов управления крупными группировками таких БЛА.

Требуется сформировать состав типов и функций БЛА гражданского назначения и разработать для них методики управления, базируясь на методах программирования полетов информационных и вспомогательных боевых БЛА.

Одним из основных направлений дальнейшего развития прикладной теории управления БЛА является постановка системы задач оптимального управления различными типами БЛА, охватывающие все этапы их полетов от старта (взлета) до приземления (посадки). Особое внимание при этом необходимо уделить задачам оптимального управления беспилотными вертолетами, постановки которых практически отсутствуют в существующей литературе. К неразработанным на сегодняшний день вопросам относятся также задачи оптимального управления БЛА при учете всевозможных случайных факторов (действие ветра со случайными значениями компонент вектора скорости, рассеивания значений характеристик конструкций БЛА и стартового оборудования, полученные при их производстве и т.п.).

Характерная особенность таких задач состоит в том, что функционалы и ограничения в них представляются в форме математических ожиданий, дисперсий и вероятностей наступления соответствующих случайных событий. При постановке и решении задач оптимального управления БЛА при действии случайных факторов можно воспользоваться подходом, изложенным в работе [11].

Абсолютно не исследованными являются задачи многокритериальной оптимизации управления БЛА. Применение на

практике таких задач позволит командиру расчета МНПУ БАК выбирать из паретооптимального множества вариантов управления БЛА вариант, наиболее соответствующий конкретным условиям текущей обстановки.

Развитие такого перспективного направления, как интеллектуальное управление БЛА, на наш взгляд, должно осуществляться путем создания экспериментальных образцов бортовых и наземных экспертных систем с их широким исследованием на моделирующих стендах. Результаты проведенных исследований и разработок должны быть в обязательном порядке проведены в летных испытаниях опытных образцов БЛА. На их основании вносятся соответствующие корректировки как в теорию интеллектуального управления БЛА, так и в состав применяемых для его реализации бортовых и неземных экспертных систем.

Отметим, что в процессе дальнейшей разработки прикладная теория управления БЛА должна существенным образом взаимодействовать с теорией эффективного применения БЛА различного назначения, которая также требует активного развития. В перспективе эти две теории должны объединиться в рамках общей теории оптимального применения БЛА при решении военных и гражданских задач.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев В.С., Гущина Д.С., Моисеев Г.В. Основы теории создания и применения информационных беспилотных авиационных комплексов (Серия «Современная прикладная математика и информатика»). Казань: Изд-во МОиН РТ, 2010. 196 с.
2. Беспилотные летательные аппараты. Основы устройства и функционирования. Под ред. И.С. Голубева и И.К. Туркина. М.: Изд-во МАИ, 2008. 656 с.
3. Один из главных аспектов безопасности полетов БПЛА – подготовка операторов. Электронный ресурс: <http://vpk.name/news>.
4. Дмитриевский А.А., Лысенко Л.Н. Прикладные задачи теории оптимального управления движением беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 328 с.
5. Новоселов А.С., Болонкин В.Е., Чинаев П.И., Юрьев А.Н. Системы адаптивного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987. 280 с.
6. Лазарев Ю.Н. Управление аэрокосмическими объектами. – Самара: Сам. центр РАН, 2007. 274 с.
7. Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1973. 616 с.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. М.: Физматгиз, 1962. 607 с.
9. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: нелинейные модели. М.: Наука, 1988. 328 с.
10. Моисеев В.С., Козар А.Н., Тутубалин П.И., Бормотов К.В. Двухкритериальная теоретико-игровая модель с заданным упорядочиванием стратегий // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева, № 1, 2005. С. 40-45.

11. Куршев Н.В., Кожевников Ю.В. Оптимальные задачи динамики полета. Изд. 2-е, дополн. и перераб. Казань: Изд-во КГТУ им. А.Н. Туполева, 2010. 326 с.
12. Моисеев В.С., Матвеев И.В. Структура и функции перспективной интеллектуальной системы навигации и управления БЛА. «Кибернетика и высокие технологии XXI века». Материалы XII Междунар. научно-техн. конф., т.2. – Воронеж, 2011. С. 622-631.
13. Остославский И.В., Стражева И.В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969. 499 с.
14. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Сов. Радио, 1972. 632 с.
15. Беспилотные летательные аппараты. Под ред. Л.С. Чернобровкина. М.: Машиностроение, 1967. 440 с.
16. Динамическое проектирование систем управления автоматических маневренных ЛА. Под ред. Е.А. Федосова. М.: Машиностроение, 1997.
17. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 631 с.
18. Грешилов А.А., Стакун В.А., Стакун А.А. Математические методы построения трендов. М.: Радио и связь, 1997. 112 с.
19. Справочник авиационного инженера. М.: Изд-во «Транспорт», 1973. 400 с.
20. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука: 1969. 425с.
21. Миеле А. Механика полета. Т.1. Теория траекторий полета. М.: Наука, 1965. 408 с.
22. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Физматгиз, 1961. 400 с.
23. Котик М.Г. Динамика взлета и посадки самолетов. М.: Машиностроение, 1984. 256 с.

24. Брюшганс Г.С., Студнев Р.В. Динамика самолета. Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1983. 320 с.
25. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Под ред. Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1967. 368 с.
26. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966 г., 664 с.
27. Динамика полета. Под ред. А.М. Мхитаряна. М.: Машиностроение, 1971. 368 с.
28. Аэромеханика самолета. Динамика полета. Под ред. А.Ф. Бочкирева и В.В. Андреевского. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1985. 360 с.
29. Летов А.М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 360 с.
30. Володько А.М. Основы аэродинамики и динамики полета вертолетов. М.: Транспорт, 1988. 342 с.
31. Борзов Г.Е., Козар А.Н., Моисеев В.С. Применение беспилотных разведывательно-корректировочных вертолетов в разведывательно-огневых комплексах артиллерии тактического звена. Казань: КВВКУ (военный институт), 2009. 148 с.
32. Дремов Ф.В. Математическое моделирование процесса торможения вертолета. // Изв. вузов «Авиационная техника», № 4, 2002. С. 22-26.
33. Есаулов С.Ю., Бахов О.П., Дмитриев И.С. Вертолет как объект управления. М.: Машиностроение, 1977. 192 с.
34. Сафонов А.А. Численное моделирование сложных маневров вертолета и анализ выполнения полетных заданий с учетом рельефа местности. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук. Казань, 2009. 138 с.
35. Гессоу А., Мейерс Г. Аэrodинамика вертолета. М.: Оборонгиз, 1954. 255 с.

36. Акимов А.И. Аэродинамика и летные характеристики вертолетов. М.: Машиностроение, 1988. 144 с.
37. Юрьев Б.Н. Аэродинамический расчет вертолетов. М.: Оборонгиз, 1956. 559 с.
38. Моисеев В.С., Матвеев И.В., Нестерова Л.Е. Модели и методы создания перспективных учебно-тренировочных вертолетов. (Серия «Современная прикладная математика и информатика»). Казань: РИЦ, 2011. 160 с.
39. Колоколов С.Н., Коновалов А.П., Курацов В.А. Динамика управляемого движения вертолетов. М.: Машиностроение, 1987. 144 с.
40. Динамика движения парашютных систем. М.: Машиностроение, 1982. 152 с.
41. Трямкин А.В., Скиданов С.Н. Исследование процесса наполнения парашютных систем. Электронный ресурс: [www.mai.ru/science/trudy/articles/num3/article1/print.htm](http://www.mai.ru/science/trudy/articles/num3/article1/print.htm).
42. Нэке Т.В. Руководство по проектированию парашютных спасательных систем. М.: ЦНТИ «Волна», 1989. 152 с.
43. Unmanned Aircraft Systems Roadmap 2005-2030 USA Office of Secretary of Defense. Электронный ресурс: [www.acq.osd.mil/usd/roadmaplast.pdf](http://www.acq.osd.mil/usd/roadmaplast.pdf), 2006. 213 р.
44. Куликов Л., Растворчин В., Бондаренко Н. Беспилотные авиационные системы военного назначения: проблемы и перспективы развития. // Аэрокосмическое обозрение, 2004, № 1. С. 20-23.
45. Крипунов С., Макаров А. Беспилотные истребители в воздушном бою. // Аэрокосмическое обозрение, 2004, № 6. С. 32-35.
46. Гребеньков О.А. Конструкция самолетов. М.: Машиностроение, 1984. 240 с.
47. Тищенко М.Н., Некрасов А.В., Радин А.С. Вертолеты. М.: Машиностроение, 1976. 366 с.

48. Доброленский Ю.П. Динамика полета в неспокойной атмосфере. М.: Машиностроение, 1969. 256 с.
49. Управление и наведение беспилотных маневренных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий. Под ред. М.Н. Красильникова, Т.Г. Серебрякова. М.: Физматлит, 2005. 280 с.
50. Янкевич Ю. Применение беспилотных авиационных комплексов в гражданских целях. // Аэрокосмический курьер, 2006, № 6. С. 55-57.
51. Александров В.Л. Воздушные винты. М.: Оборонгиз, 1951. 493 с.
52. Расчет и анализ движения летательных аппаратов. Инженерный справочник. М.: Машиностроение, 1971. 352 с.
53. Гурман В.И., Расина И.В., Блинов А.О. Эволюция и перспективы приближенных методов оптимального управления // Программные системы: теория и приложения. Электронный журнал, 2011, № 2. С. 11-29.
54. Моисеев В.С., Перспективные задачи теории управления беспилотными летательными аппаратами. Труды X Междунар. Четаевской конф. «Аналитическая механика, устойчивость и управление», Т. 3, ч. II, Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. С. 171-181.
55. Моисеев В.С., Гущина Д.С., Шафигуллин Р.Р. Мобильная распределенная интегрированная система управления группировками беспилотных летательных аппаратов. Сборник докладов Международной научно-практической конференции «Современные технологии и материалы – ключевое звено в возрождении отечественного авиастроения». Т.II. Казань: Изд-во «Вертолет», 2010, С 535-543.
56. Викулов О.В., Добыкин В.Д., Дрогалин В.В. и др. Современное состояние и перспективы развития авиационных средств

радиоэлектронной борьбы. // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники, 1998, № 12. С. 3-16.

57. Осипов Г.С., Тихомиров И.А., Хачумов В.М., Яковлев К.С. Интеллектуальные системы управления автономными транспортными средствами: стандарты, проекты, реализация. // Авиакосмическое приборостроение, 2009, № 6. С. 34-43.

58. Сентябрев О.И., Малышев В.А. Применение элементов искусственного интеллекта для решения задач защиты самолета от управляемых ракет в воздушном бою. Материалы XII Международной научно-технической конференции «Кибернетика и высокие технологии XXI века», Т. 2, Воронеж. С. 497-503.

59. Халил М. Интеллектуальные технологии принятия решений по управлению техническими средствами в системах обработки информации. // Вестник Воронежского государственного технического университета, Т. 5, № 7, 2009. С. 10-13.

60. Моисеев В.С., Зайдуллин С.С., Тутубалин П.И., Шафигуллин Р.Р. Некоторые новые результаты теории бинарных отношений дискретных множеств. Препринт. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2010. 55 с.

61. Токарев В.В. К выбору параметров динамической системы, универсальной для заданного класса маневров. // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 5. С. 15-20.

62. Токарев В.В., Фаткин Ю.М. Игровой подход к задаче выбора оптимальных параметров динамической системы. // Механика твердого тела, 1966, № 6. С. 3-10.

63. Shinar J., Siegel A.W., Gold Y.J. A medium range combat game colution by pilot advisory system // AIAA-89-3630-CP, 1989.

64. Brydon, Stanger. Fundamentals MMI for future computer aided aircraft // AGARD Conf. Proceeding, 1989, № 404.

65. Федунов Б.Е. Бортовые оперативно советующие экспертизы системы тактических самолетов 5-го поколения (ана-

литический обзор по материалам зарубежной печати). / Под общей ред. Е.А. Федосова. М.: ГОСНИИАС, 2002.

66. Рыбина Г.В. Теория и технологии построения интегрированных экспертных систем. М.: Научтехлитиздат, 2008. 482 с.

67. Демкин М.А., Тищенко Ю.Е., Федунов Б.Е. Базовая бортовая оперативно советующая система для дуэльной ситуации дальнего воздушного боя. // Изв. РАН. Теория и системы управления, 2008, № 4. С. 59-75.

68. Федунов Б.И. Базовая алгоритмическая оболочка бортовых оперативно советующих экспертных систем типовых ситуаций функционирования объекта. // Изв. РАН. Теория и системы управления, 2009, № 5. С. 82-93.

69. Моисеев В.С., Ляшева С.А., Шлеймович М.П. К проблеме сжатия видеоданных в информационных беспилотных авиационных комплексах. Материалы VI Международной научно-технической конференции «Проблемы и перспективы развития авиации, наземного транспорта и энергетики «АНТЭ-2011», Т. 2. Казань: Изд-во Казанского гос. техн. ун-та, 2011. С. 337-342.

70. Моисеев В.С., Гущина Д.С., Шевченко А.И. Оптимизация выбора радиолокационных средств опознавания при проектировании БЛА. Труды XVIII Международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация и связь (RLNC 2012)». Т. 2. Воронеж: 2012. С. 835-842.

71. Моисеев В.С., Тутубалин П.И. К проблеме обеспечения информационной безопасности беспилотных авиационных комплексов. Материалы VI Международной научно-технической конференции «Проблемы и перспективы развития авиации, наземного транспорта и энергетики» «АНТЭ-2011», Т. 2. Казань, 2011. С. 324-331.

72. Павлов А.М. Принципы организации бортовых вычислительных систем перспективных летательных аппаратов. //

Электронный журнал «Мир компьютерной автоматизации», №4, 2001.

73. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. Спб.: БХВ – Петербург, 2002. 600 с.
74. Аринич А., Бахтурина Г. Стратегическая компьютерная программа США. // Зарубежное военное обозрение, 1989, № 3. С. 9-14.
75. Желтов С.Ю., Визильтер Ю.В. Перспективы интеллектуализации систем управления ЛА за счет применения машинного зрения. // Труды МФТИ, 2009, Т. 1, № 4. С. 164-181.
76. Кожевников Ю.В., Моисеев В.С., Корниенко И.А. и др. Основы систем автоматизированного проектирования. Казань: Изд-во Казанского гос. ун-та, 1988. 225 с.
77. Моисеев В.С., Гущина Д.С., Козар А.Н., Борзов Г.Е. К задаче выбора оптимального количества информационных БЛА. // Изв. вузов. Авиационная техника, № 2, 2009. С. 58-61.
78. Моисеев В.С., Гущина Д.С., Козар А.Н., Борзов Г.Е. Оптимизация обслуживания заявок информационными БЛА. // Изв. вузов. Авиационная техника, № 3, 2009. С. 78-80.
79. Моисеев В.С., Бутузова А.В., Мейко А.В. Оптимизация объема запасных элементов для изделий авиационной техники с мгновенным восстановлением. // Изв. вузов. Авиационная техника, № 1, 2007. С. 54-57.
80. Гущина Д.С., Шафигуллин Р.Р. Оптимизация размещения наземных элементов информационных БАК. Материалы VI Международной научно-технической конференции «Проблемы и перспективы развития авиации, наземного транспорта и энергетики» «АНТЭ-2011», Т. 1. Казань, 2011. С. 92-99.
81. Моисеев В.С., Гущина Д.С., Шафигуллин Р.Р. Рациональное размещение и выбор количества информационных БАК для непрерывного мониторинга крупных территорий. // Изв. вузов. Авиационная техника, № 3, 2012. С. 3-7.

82. Микеладзе В.Г., Титов В.М. Основные геометрические и аэродинамические характеристики самолетов и ракет. М.: Машиностроение, 1978, 124 с.
83. UAV. Беспилотная авиация. Спецвыпуск МАКС 2011.
84. Ростопчин В.В. Элементарные основы оценки эффективности применения беспилотных авиационных систем для воздушной разведки. Электронный ресурс: [www.uav.ru](http://www.uav.ru), 2006. 15 с.
85. Миллер Б.М., Степанян К.В., Андреев А.В. О применении триангуляции Делоне для построения среза высот вдоль заданной траектории БПЛА. Сборник тезисов докладов 16 Международной научной конференции «Системный анализ, управление и навигация», Евпатория, 2011. С. 150-151.
86. Адгамов Р.И., Кожевников Ю.В., Моисеев В.С. и др. Автоматизированные испытания в авиастроении. М.: Машиностроение, 1980, 252 с.
87. Ляпунов В.В., Матвеев В.Г. Сыздыков Е.К., Титова С.Ю. Технология полунатурного моделирования БЛА на комплексном стенде. Труды X Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление». Т. 3, Ч. II, Казань, 2012. С. 92-101.
88. Шевченко А.И. Компьютерные технологии обучения операторов БЛА опознаванию и идентификации обнаруженных объектов. Труды X Всероссийской межвузовской научно-практической конференции «Компьютерные технологии в науке, практике и образовании», Самара, 2011. С. 402-405.
89. Моисеев Г.В., Моисеев В.С. Основы теории создания и применения имитационных беспилотных авиационных комплексов. (Серия «Современная прикладная математика и информатика») Казань: РЦМКО, 2013. 208 с.

90. Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федосов Е.А., Федунов Б.Е. Интеллектное управление динамическими системами. М.: Физматлит, 2000. 352 с.
91. Макаров И.М., Лохин В.М., Манько С.В. и др. Интеллектуальные системы управления беспилотными летательными аппаратами на основе комплексного применения технологий нечеткой логики и ассоциативной памяти. // Авиакосмическое приборостроение. №2, 2002. С. 29-36.
92. Джарратано Д., Райли Г. Экспертные системы: принципы разработки и программирование, изд. 4-е. М.: «И.Д. Вильямс», 2007, 1152 с.
93. Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы: Учеб. пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 240 с.
94. Моисеев В.С., Альмухаметова А.Ф., Гущина Д.С., Мейко А.В. Об одном методе формирования эффективных управленческих и проектных решений на дискретном множестве альтернатив. // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева. №1. 2008. С. 67-69.
95. Кузин Л.Т. Основы кибернетики: Т. 1. Математические основы кибернетики. М.: Энергия, 1994. 584 с.
96. Моисеев В.С., Гимадеев Р.Г. Программирование горизонтального полёта БЛА по неявно заданной траектории. Материалы Всероссийской научно-технической конференции «Проблемы и перспективы развития информационных технологий». – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. С. 211-220.
97. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 398 с.
98. Попов В., Федутдинов Д. Тенденции развития систем передачи данных при использовании беспилотных летательных аппаратов // Зарубежное военное обозрение, № 4, 2006. С. 47-51.
99. Алешин М.Г., Дьяконов С.В., Сивов А.Ю. Обоснование

основных характеристик системы и параметров управления мощностью передатчика ретранслятора связи на беспилотном летательном аппарате. // Электронное издание. «Журнал радиоэлектроники», № 12, 2011. 17 с.

100. Палий А.И. Радиоэлектронная борьба. М.: Воениздат, 1989. 350 с.

101. Павлущенко М.И., Евстафьев Г.М., Макаренко ИК. Беспилотные летательные аппараты: история, применение, угроза распространения и перспективы развития. М.: Изд-во ПИР-центра, 2005. 610 с.

102. Основы проектирования, конструирования и производства летательных аппаратов (дистанционно пилотируемые летательные аппараты). Под ред. И.С. Голубева и Ю.И. Янкевича. М.: Изд-во МАИ, 2006. 528 с.

103. Статьи циклов «Тактика в боевой подготовке», «В арсенал военного летчика», «Тактика и моделирование», «В ВВС иностранных армий», «Авиация в локальных конфликтах». // Авиация и космонавтика, 1988-91 гг.

104. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином, 2003. 632 с.

105. Мельников Ю.П. Воздушная радиотехническая разведка (методы оценки эффективности). М.: Радиотехника, 2005. 304 с.

106. Моисеев В.С. Российская беспилотная авиационная техника: основные проблемы и пути решения. Материалы Всероссийской научно-технической конференции «Х Научные чтения, посвященные памяти Н.Е. Жуковского» / Сборник докладов. М.: Изд-во Академии им. Н.Е. Жуковского, 2013. С. 554-559.

107. Моисеев В.С. Архитектура типового бортового вычислительного комплекса перспективных беспилотных летательных аппаратов. Материалы Международной научно-практической конференции «Современные технологии, материалы, оборудование и ускоренное восстановление кадрового потенциала

– ключевые звенья в возрождении отечественного авиа- и ракетостроения». Казань: Вертолет, 2012. Т. 4, С. 30-36.

108. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1980. 300 с.

109. Моисеев В.С., Горбунов Д.А., Комисарова Е.М., Гущина Д.С. Численные методы решения параметрических нелинейных уравнений. // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева, № 4 2004. С. 27-33.

110. Моисеев В.С., Горбунов Д.А. Основы прикладной теории неявных математических моделей и методов. (Серия «Современная прикладная математика и информатика»). Казань: РИЦ, 2012, 172 с.

111. Степанов Д.Н., Тищенко И.П. Задача моделирования полета беспилотного летательного аппарата на основе системы машинного зрения. // Программные системы: теория и приложения. Электронный журнал. 2011, №4(8). С. 33-34.

112. Ардентов А.А., Бесчастный И.Ю., Маштаков А.П. и др. Алгоритм вычисления положения БПЛА с использованием системы машинного зрения. // Программные системы: теория и приложения. Электронный журнал. 2012. №3(12). С. 23-29.

113. Емалетдинова Л.Ю., Моисеев В.С., Матвеев И.В. и др. Построение моделей компонентов интеллектуальной системы навигации и управления. Отчет №1 о НИР по теме: «Разработка алгоритмического и программно-математического обеспечения интеллектуальной системы навигации и управления сверхзвукового БЛА» (Гос. контракт №14740.11.042, № г/р. 01201066176). Казань: КГТУ им. А.Н. Туполева, 2010. 211 с.

114. Гимадеев Р.Г., Моисеев В.С., Арутюнова Н.К. Обратные задачи управления беспилотными летательными аппаратами артиллерийской разведки. (Серия «Современная прикладная математика и информатика»). Казань: Изд-во РЦМКО, 2013, 245 с.

**Виктор Сергеевич Моисеев**

**ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ  
БЕСПИЛОТНЫМИ ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ**

**Монография**

Подписано к печати 25.09.2013.

Формат 60x84<sup>1/16</sup>. Бумага офсетная.

Гарнитура «Times». Печать ризографическая.

Усл. печ. 48 л. Тираж 100 экз. Заказ № 173.

420111, Казань, Дзержинского, 3. Тел.: 292-24-76.

Отпечатано с готового оригинал-макета в РИО ГБУ «РЦМКО»