TUGAS 1 MA1101 MATEMATIKA I 2025

Muhammad Faran Aiki (19625041)

5 September 2025

1 Jawaban

(1) Karena bumi diasumsikan sebagai bola sebagai hampiran (meskipun aslinya tidak), rumus luas permukaan bola adalah

$$L_{\text{bola}} = 4\pi r^2$$

Sesuai dengan soal, $r = 6.300$ km. Kita akan menggunakan hampiran bahwa $\pi \approx \frac{22}{7}$ karena $7 \mid 6300$ sehingga

$$\begin{aligned}
L_p &\approx 4 \times \frac{22}{7} \times (6.300\text{ km})^2 \\
&= 4 \times \frac{22}{7} \times 6.300\text{ km} \times 6.300\text{ km} \\
&= 4 \times 22 \times 900 \times 6.300\text{ km}^2 \\
&= 4 \times 22 \times 5.670.000\text{ km}^2 \\
&= 88 \times 5.670.000\text{ km}^2 \\
&= \mathbf{498.960.000\ km^2}
\end{aligned}$$

(2) Untuk menulis kontrapositif dari $p \implies q$, ubah menjadi $\neg q \to \neg p$.

(a) $p =$ Hari ini turun hujan, maka $\neg p =$ Hari ini tidak turun hujan
$q =$ Saya membawa payung, maka $\neg q =$ Saya tidak membawa payung
Kontrapositifnya adalah

$$\neg q \implies \neg p \equiv \text{Jika saya tidak membawa payung, maka hari ini tidak hujan}$$

(b) (Persamaan AM-GM). Agar tidak ambigu, ubah variabel pernyataan menjadi $A \implies B$
$A = p = q$, maka $\neg A = p \neq q$
$B = \sqrt{pq} = \frac{(p+q)}{2}$, maka $\neg B = \sqrt{pq} \neq \frac{(p+q)}{2}$
Kontrapositifnya adalah

$$\neg B \implies \neg A \equiv \text{Jika } \sqrt{pq} \neq \frac{(p+q)}{2}, \text{ maka } p \neq q$$

(3) Untuk menuliskan negasi dari pernyataan kuantor, kita perlu ingat bahwa negasi dari $\exists$ atau ada (terdapat) adalah $\nexists$ dan $\forall$ atau untuk semua adalah $\not\forall$ atau tidak semua. Secara formal, jika ada pernyataan $\exists x, P(x)$, negasinya adalah $\forall x, \neg P(x)$ dan jika ada pernyataan $\forall x, P(x)$, negasinya adalah $\exists x, \neg P(x)$

(a) Misalkan $x =$ Buah dan $P(x) =$ rasanya pedas
Maka,
$$\nexists x, P(x) = \text{Tidak ada buah yang rasanya pedas}$$
atau
$$\forall x, \neg P(x) = \text{Semua buah rasanya tidak pedas}$$

(b) Misalkan $x =$ Mahasiswa dan $P(x) =$ memiliki jaket berwarna hijau
Maka,
$$\nexists x, P(x) = \text{Tidak semua mahasiswa memiliki jaket berwarna hijau}$$
atau
$$\forall x, \neg P(x) = \text{Ada mahasiswa yang tidak memiliki jaket berwarna hijau}$$

(4) Untuk menentukan pernyataan salah atau benar, kita bisa membuktikannya atau memberikan suatu contoh yang salah.

(a) **Salah**. Ambil $n = 1 \in \mathbb{N}$ dan dapat dicek bahwa $n = n^2 = 1$, bukan $n < n^2 = 1$

(b) **Salah**. Ambil persegi panjang dengan panjang 42069 dan lebar 177013. Definisi persegi adalah persegi yang memiliki panjang dan sisinya sama, padahal $42069 \neq 177013$ sehingga tidak setiap persegi panjang adalah persegi meskipun setiap persegi pasti persegi panjang.

(c) **Benar**. Ambil lingkaran dengan jari-jari $r = \sqrt{69}$. Rumus luas lingkaran adalah πr^2 sehingga luasnya adalah $\pi \sqrt{69}^2 = 69\pi$. Karena π adalah bilangan positif, $69 > 10 \implies 69\pi > 10\pi \implies L_{\text{lingkaran}} > 10\pi$.

(5) Menentukan solusi dari pertidaksamaan harus pelan-pelan dan bisa dibagi kasusnya agar tanda berubah atau tidak berubah. Saya akan mengasumsikan bahwa ini bekerja di $\mathbb{R}$. Sebelumnya, saya akan membuktikan beberapa lemma karena saya malas menggambar garis bilangan.

Lemma 1. $(x-a)(x-b) < 0 \implies x \in (a,b)$ dan $(x-a)(x-b) \geq 0 \implies x \in (-\infty, a] \cup [b, \infty)$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a < b$

Bukti 1. Menggunakan pembagian kasus dan trikotomi bilangan riil,

Kasus 1. $x < a$, maka $x - a < 0 \implies 0 > x - a$. Karena $a < b$, menggunakan sifat perkalian pada pertidaksamaan, didapat $-a > -b \implies 0 > x - a > x - b$ sehingga $x - a$ dan $x - b$ negatif. Padahal, negatif kali negatif adalah positif sehingga $x < a$ tidak dalam pada himpunan solusi.

Kasus 2. $a < x < b$, maka $x - a > 0$ dan $x - b < 0$. Karena positif kali negatif adalah negatif, selang ini, yaitu (a, b), ada dalam himpunan solusi.

Kasus 3. $x > b$, maka $x - b > 0$. Karena $a < b$, menggunakan sifat perkalian pada pertidaksamaan, didapat $-a > -b \implies x - a > x - b > 0$ sehingga $x - a$ dan $x - b$ positif. Padahal, positif kali positif adalah positif sehingga $x < a$ tidak ada dalam himpunan solusi.

Dengan demikian, terbukti bahwa $(x-a)(x-b) < 0 \implies x \in (a,b)$.

Menurut trikotomi bilangan riil, pasti salah satu dari $x < 0, x = 0, x > 0$ terpenuhi. Jika $x < 0$ tidak terpenuhi (atau formalnya **negasi** dari pernyataan $x < 0$), sudah **pasti** $x = 0$ atau $x > 0$ sehingga sama saja sudah pasti $x \geq 0$. Maka, solusi **yang tidak ada** dalam $x < 0$, yaitu negasi dari $(a,b) = (-\infty, a] \cup [b, \infty)$ merupakan **solusi** dari $x \geq 0$.

Dengan demikian, terbukti bahwa $(x-a)(x-b) \geq 0 \implies x \in (-\infty, a] \cup [b, \infty)$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$.

Lemma 2. $(x-a)(x-b) \leq 0 \implies x \in [a,b]$ dan $(x-a)(x-b) > 0 \implies x \in (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a < b$

Bukti 2. Pembuktian mirip dengan di atas sehingga tidak akan dibahas.

(a) $1 + 5x > 5 - 3x$

Tambahkan $3x$ ke kedua ruas. Menggunakan sifat pertidaksamaan, menambahkan/mengurangi tidak akan mengganti simbol sehingga

$$1 + 8x > 5$$

Kurangi 1 dari kedua ruas. Menggunakan sifat pertidaksamaan, menambahkan/mengurangi tidak akan mengganti simbol sehingga

$$8x > 4$$

Bagi 8 dari kedua ruas. Menggunakan sifat pertidaksamaan, mengali/membagi dengan bilangan positif $(2 > 0)$ tidak akan mengganti simbol sehingga

$$x > \frac{1}{2}$$

(b) $x^3 - x^2 \leq 0$
Faktorkan menjadi

$$x^2(x-1) \leq 0$$

Perhatikan bahwa x^2 mirip seperti *semidefinit positif* sehingga **tidak akan** mengubah tanda pertidaksamaan. Jadi, satu-satunya $x^2 \leq 0$ adalah ketika $x = 0$ karena irisan dari $x^2 \geq 0$ dan $x^2 \leq 0$ adalah $x^2 = 0$.

Selain itu, karena $\mathbb{R}$ merupakan sebuah medan (*field*) sehingga juga merupakan sebuah domain integral, $\mathbb{R}$ tidak punya pembagi nol. Karena tidak punya pembagi nol, $ab = 0$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ berarti $a = 0$ atau $b = 0$. Oleh karena itu, $x^2 = 0 \implies x = 0$. Perhatikan bahwa $0 \leq 1$ sehingga pertidaksamaan ekuivalen dengan

$$(x-1) \leq 0 \implies x \leq 1$$

Dengan demikian, solusinya adalah $X = \{x \mid x \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$

(c) $x^2 - 2x + 3 \geq 0$
Perhatikan bahwa $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \geq 0$ sehingga

$$\begin{aligned}
&x^2 - 2x + 3 \\
&= x^2 - 2x + 1 + 2 \\
&= (x-1)^2 + 2 \\
&\geq 2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Karena terjadi untuk setiap x di $\mathbb{R}$, maka solusi untuk persoalan ini adalah

$$x \in \mathbb{R}$$

(d) $2x - 3 < x + 4 \geq 3x$
Akan dipecah menjadi dua dan akan dicari irisannya karena harus **memenuhi** semua pertidaksamaan yang ada.

$$2x - 3 < x + 4 \implies x < 7$$

dan

$$x + 4 \geq 3x \implies 2 \geq x$$

Irisannya adalah x yang memenuhi dua pertidaksamaan tersebut, yaitu

$$x \leq 2$$

(e) $-3 < \frac{1}{x} \leq 1$

Perhatikan bahwa $x \neq 0$ karena penyebut tidak boleh nol. Bagi dua kasus menjadi

Kasus 1. $x > 0$, maka tidak akan mengubah simbol pertidaksamaan sehingga

$$-3x < 1 \leq x$$

Cari irisan dari $x > 0$, $x \geq 1$, dan $-3x < 1 \implies x > -\frac{1}{3}$. Maka, untuk kasus ini, solusinya adalah $x \geq 1$

Kasus 2. $x < 0$, maka simbol pertidaksamaan akan diubah sehingga

$$-3x > 1 \geq x$$

Cari irisan dari $x < 0$, $x \leq 1$, dan $-3x > 1 \implies x < -\frac{1}{3}$. Maka, untuk kasus ini, solusinya adalah $x < -\frac{1}{3}$

Gabungan dari dua solusi di atas memiliki solusi

$$x \geq 1 \vee x < -\frac{1}{3}$$

(f) $\frac{2x-3}{x-2} \leq 3$

Perhatikan bahwa $x \neq 2$ karena penyebut tidak boleh nol. Bagi dua kasus menjadi

Kasus 1. $x > 2$, maka tidak akan mengubah simbol pertidaksamaan sehingga

$$\begin{aligned} 2x - 3 &\leq 3(x-2) \\ 2x - 3 &\leq 3x - 6 \\ 3 &\leq x \end{aligned}$$

Cari irisan dari $x > 2$ dan $x \geq 3$, didapat $x > 2$

Kasus 2. $x < 2$, maka simbol pertidaksamaan akan diubah sehingga

$$\begin{aligned} 2x - 3 &\geq 3(x-2) \\ 2x - 3 &\geq 3x - 6 \\ 3 &\geq x \end{aligned}$$

Cari irisan dari $x < 2$ dan $x \leq 3$, didapat $x < 2$

Gabungan dari dua solusi di atas memiliki solusi $x > 2 \vee x < 2$ yang berarti

$$x \in \mathbb{R} \backslash \{2\}$$