به نام خدا

دانشگاه تهران

پردیس دانشکده‌های فنی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

مبانی مکاترونیک

استاد: دکتر طالع ماسوله

مینی پروژه 2

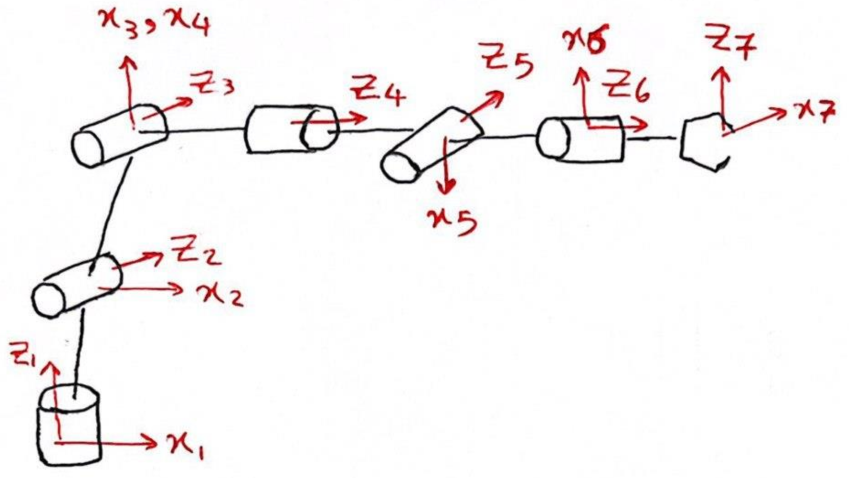
فربد سیاه‌کلی

۸۱۰۱۹۸۵۱۰

فروردین ۱۴۰۱

فهرست گزارش سوالات (لطفاً پس از تکمیل گزارش، این فهرست را به‌روز کنید.)

بردارهای هر joint به منظور بدست آوردن D-H:



جدول پارامتر D-H:

i	a_i	b_i	α_i	θ_i
1	50	380	$\frac{\pi}{2}$	θ_1
2	420	0	0	θ_2
3	25	0	$\frac{\pi}{2}$	θ_3
4	0	440	$\frac{\pi}{2}$	θ_4
5	0	0	$\frac{\pi}{2}$	θ_5
6	0	98	0	θ_6

معادلات سینماتیک مستقیم:

$$a_i = \begin{pmatrix} a_i\ Cos\theta_i \\ a_i\ Sin\theta_i \\ b_i \end{pmatrix}, \quad Q_i = \begin{pmatrix} Cos\theta_i & -Cos\alpha_i\ Sin\theta_i & Sin\alpha_i\ Sin\theta_i \\ Sin\theta_i & Cos\alpha_i\ Cos\theta_i & -Sin\alpha_i\ Cos\theta_i \\ 0 & Sin\alpha_i & Cos\alpha_i \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 50\ Cos\theta_1 \\ 50\ Sin\theta_1 \\ 380 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 420\ Cos\theta_2 \\ 420\ Sin\theta_2 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 25\ Cos\theta_3 \\ 25\ Sin\theta_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 440 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 98 \end{pmatrix}$$

$$P = a_1 + Q_1 a_2 + Q_1 Q_2 a_3 + \cdots$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} Cos\theta_1 & 0 & Sin\theta_1 \\ Sin\theta_1 & 0 & -Cos\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} Cos\theta_2 & -Sin\theta_2 & 0 \\ Sin\theta_2 & Cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} Cos\theta_3 & 0 & Sin\theta_3 \\ Sin\theta_3 & 0 & -Cos\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_4 = \begin{pmatrix} Cos\theta_4 & 0 & Sin\theta_4 \\ Sin\theta_4 & 0 & -Cos\theta_4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_5 = \begin{pmatrix} Cos\theta_5 & 0 & Sin\theta_5 \\ Sin\theta_5 & 0 & -Cos\theta_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_6 = \begin{pmatrix} Cos\theta_6 & -Sin\theta_6 & 0 \\ Sin\theta_6 & Cos\theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_x = 50*cos(theta1) + 880*sin(theta1) + 420*cos(theta1)*cos(theta2) - 98*cos(theta5)*(sin(theta1) + cos(theta1)*cos(theta2)*sin(theta3) + cos(theta1)*cos(theta3)*sin(theta2)) - 25*cos(theta1)*sin(theta2)*sin(theta3) - 98*cos(theta4)*sin(theta5)*(cos(theta1)*sin(theta2)*sin(theta3) - cos(theta1)*cos(theta2)*cos(theta3)) + 25*cos(theta1)*cos(theta2)*cos(theta3) + 880*cos(theta1)*cos(theta2)*sin(theta3) + 880*cos(theta1)*cos(theta3)*sin(theta2)$$

$$P_y = 50*sin(theta1) - 880*cos(theta1) + 420*cos(theta2)*sin(theta1) - 98*cos(theta5)*(cos(theta2)*sin(theta1)*sin(theta3) - cos(theta1) + cos(theta3)*sin(theta1)*sin(theta2)) + 880*cos(theta2)*sin(theta1)*sin(theta3) + 880*cos(theta3)*sin(theta1)*sin(theta2) - 25*sin(theta1)*sin(theta2)*sin(theta3) - 98*cos(theta4)*sin(theta5)*(sin(theta1)*sin(theta2)*sin(theta3) - cos(theta2)*cos(theta3)*sin(theta1)) + 25*cos(theta2)*cos(theta3)*sin(theta1)$$

$$P_z = 420*sin(theta2) - 880*cos(theta2)*cos(theta3) + 25*cos(theta2)*sin(theta3) + 25*cos(theta3)*sin(theta2) + 880*sin(theta2)*sin(theta3) + 98*cos(theta5)*(cos(theta2)*cos(theta3) - sin(theta2)*sin(theta3)) + 98*cos(theta4)*sin(theta5)*(cos(theta2)*sin(theta3) + cos(theta3)*sin(theta2)) + 380$$

حال ماتریس دوران end effector را بدست آورده:

$$Rotation = Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$$

orinetation =

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_6)\,\sigma_2 - \sin(\theta_4)\sin(\theta_6)\,\sigma_6 & -\sin(\theta_6)\,\sigma_2 - \cos(\theta_6)\sin(\theta_4)\,\sigma_6 & -\cos(\theta_5)\,\sigma_7 - \cos(\theta_4)\sin(\theta_5)\,\sigma_6 \\ \cos(\theta_6)\,\sigma_1 - \sin(\theta_4)\sin(\theta_6)\,\sigma_4 & -\sin(\theta_6)\,\sigma_1 - \cos(\theta_6)\sin(\theta_4)\,\sigma_4 & -\cos(\theta_5)\,\sigma_5 - \cos(\theta_4)\sin(\theta_5)\,\sigma_4 \\ \sin(\theta_4)\sin(\theta_6)\,\sigma_8 - \cos(\theta_6)\,\sigma_3 & \sin(\theta_6)\,\sigma_3 + \cos(\theta_6)\sin(\theta_4)\,\sigma_8 & \cos(\theta_5)\,\sigma_9 + \cos(\theta_4)\sin(\theta_5)\,\sigma_8 \end{pmatrix}$$

که در آن سیگماها به صورت زیر هستند:

$$\sigma_1 = \sin(\theta_5)\,\sigma_5 - \cos(\theta_4)\cos(\theta_5)\,\sigma_4$$

$$\sigma_2 = \sin(\theta_5)\,\sigma_7 - \cos(\theta_4)\cos(\theta_5)\,\sigma_6$$

$$\sigma_3 = \sin(\theta_5)\,\sigma_9 - \cos(\theta_4)\cos(\theta_5)\,\sigma_8$$

$$\sigma_4 = \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\sin(\theta_3) - \cos(\theta_2)\cos(\theta_3)\sin(\theta_1)$$

$$\sigma_5 = \cos(\theta_2)\sin(\theta_1)\sin(\theta_3) - \cos(\theta_1) + \cos(\theta_3)\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)$$

$$\sigma_6 = \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\sin(\theta_3) - \cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\cos(\theta_3)$$

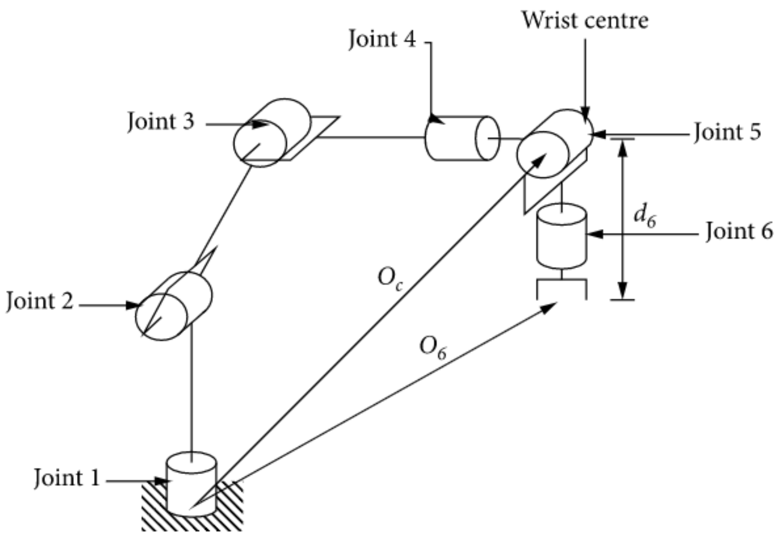
$$\sigma_7 = \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\sin(\theta_3) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_3)\sin(\theta_2)$$

$$\sigma_8 = \cos(\theta_2)\sin(\theta_3) + \cos(\theta_3)\sin(\theta_2)$$

$$\sigma_9 = \cos(\theta_2)\cos(\theta_3) - \sin(\theta_2)\sin(\theta_3)$$

معادلات سینماتیک معکوس:

روش هندسی:

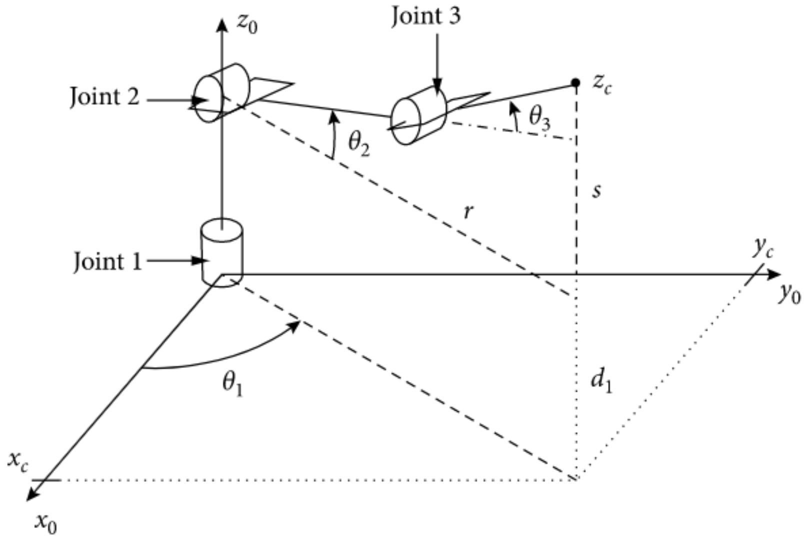


$$P_6^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_6 \end{pmatrix}$$

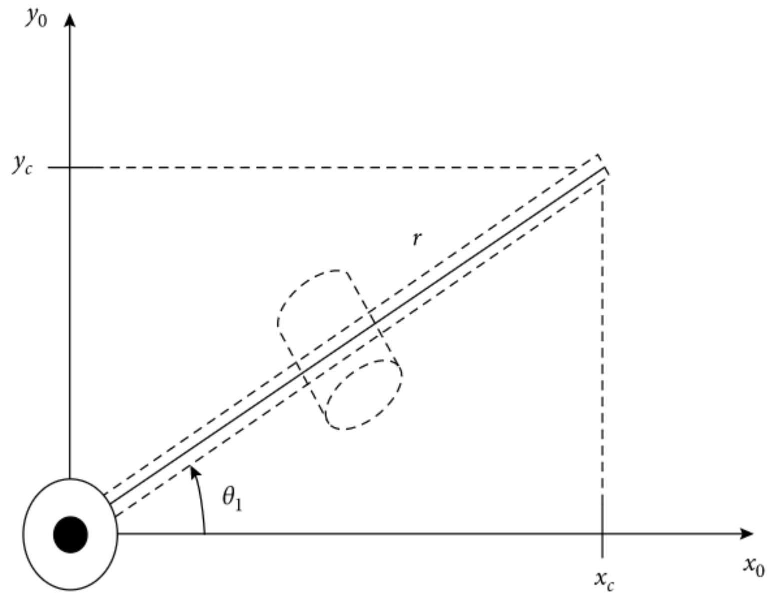
$$O = O_c^0 + d_6 R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_x - d_6 r_{13} \\ O_x - d_6 r_{23} \\ O_x - d_6 r_{33} \end{pmatrix}$$

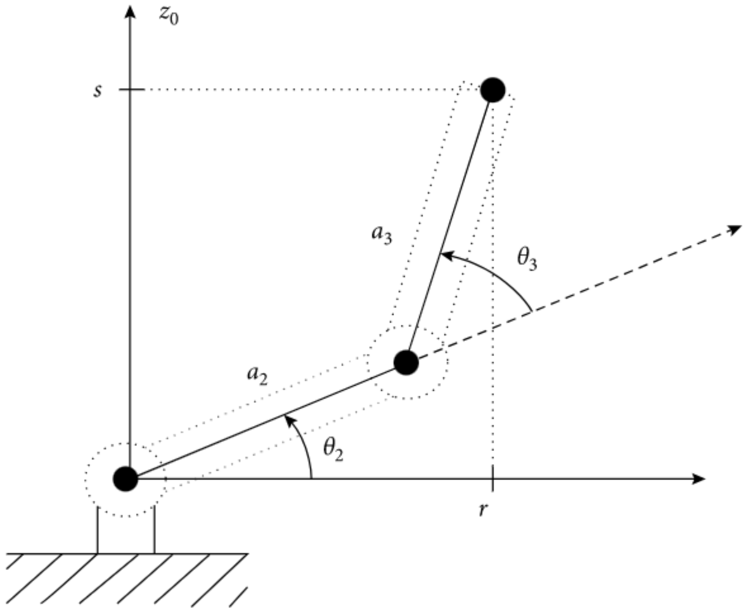
ابتدا از joint مچ به قبل را بررسی کرده:



که با تصویر کردن آن روی محور x, y داریم:



$$\theta_1 = atan\left(\frac{y_c}{x_c}\right) \quad \text{or} \quad \theta_1 = atan\left(\frac{y_c}{x_c}\right) + \pi$$

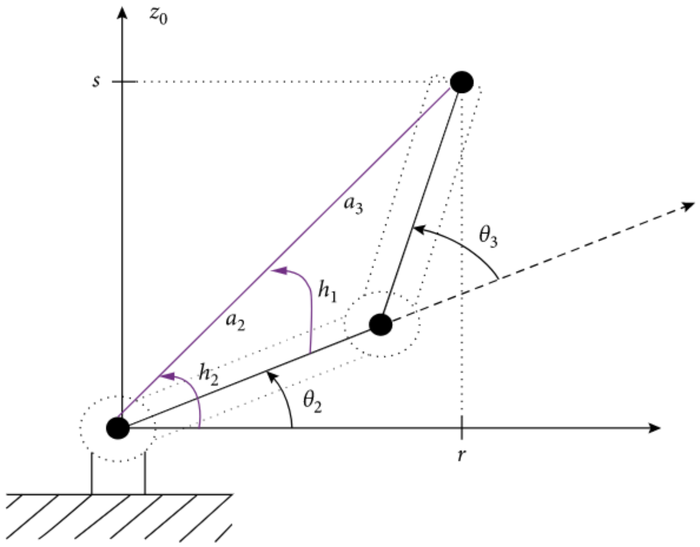


$$cos\theta_3 = \frac{r^2 + s^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3}$$

$$cos\theta_3 = \frac{(x_c^2 + y_c^2 - d^2) + (z_c - d_1)^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3}$$

$$tan\theta_3 = \sqrt{\frac{1 - \cos^2\theta_3}{\cos^2\theta_3}} = \sqrt{\frac{1 - D^2}{D^2}}$$

$$\theta_3 = atan2\left(D, \pm\sqrt{1 - D^2}\right)$$



$$\theta_2 = h_1 - h_2$$

$$h_1 = atan2(r,s) = atan2(\sqrt{x_c^2 - y_c^2}, z_c - d_1)$$

$$h_2 = atan2(a_2 + a_3 cos\theta_3,\ a_3 sin\theta_3)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \theta_2 &= atan2(r,s) \\ &= atan2\left(\sqrt{x_c^2 - y_c^2}, z_c - d_1\right) \\ &- atan2(a_2 + a_3 cos\theta_3,\ a_3 sin\theta_3) \end{aligned}$$

حال برای بدست آوردن زوایای چهارم تا پنجم، از ماتریس دوران joint شماره 3 به 6 استفاده می‌کنیم:

$$T_3^6 = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & P_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & P_y \\ r_{31} & r_{23} & r_{33} & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

if $sin\theta_5 > 0$:

$$\theta_4 = atan2(-r_{13}, r_{32})$$

$$\theta_5 = atan2\left(r_{33}, \pm\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}\right)$$

$$\theta_6 = atan2(r_{31}, -r_{32})$$

if $sin\theta_5 < 0$:

$$\theta_4 = atan2(-r_{13}, -r_{23})$$

$$\theta_5 = atan2\left(r_{33}, \pm\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}\right)$$

$$\theta_6 = atan2(r_{31}, -r_{32})$$

که در بخش اعتبارسنجی به پیاده سازی این معادلات پرداخته شده است.

حل جبری:

$$t_i = tan\frac{\theta_i}{2}$$

$$s_i = \frac{2t_i}{1+t_i^2}, \qquad c_i = \frac{1-t_i^2}{1+t_i^2}$$

$$\rightarrow x = (50 + 420Cos\theta_2 + 25Cos(\theta_2 + \theta_1) + 440Sin(\theta_2 + \theta_3) + 98Cos\theta_4Sin\theta_5Cos(\theta_2 + \theta_3) - 98Cos\theta_5Sin(\theta_2 + \theta_3))Cos\theta_1 + (98Sin\theta_4Sin\theta_5)Sin\theta_1$$

$$y = -(98Sin\theta_4Sin\theta_5)Cos\theta_1 + \big(50 + 420Cos\theta_2 + 25Cos(\theta_2 + \theta_3) + 440Sin(\theta_2 + \theta_3) + 98Cos\theta_4Sin\theta_5Sin(\theta_2 + \theta_3) - 98Cos\theta_5Sin(\theta_2 + \theta_3)\big)Sin\theta_1$$

$$r_{33} = q_{33} \Rightarrow c_4s_5s_{2+3} = r_{33} - c_5c_{2+3}$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = (50 + 420c_2 + 25c_{2+3} + 440s_{2+3} + 98c_4s_5c_{2+3} - 98c_5s_{2+3})^2 + (98s_4s_5)^2$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = (3125 - 9604r_{33}^2) + 42000c_2 + (2500 + 86240r_{33})c_{2+3} + 44000s_{2+3} + 9800c_4s_5c_{2+3} - 9800c_5s_{2+3} + 176400c_2^2 + 21000c_2c_{2+3} + 369600c_2s_{2+3} + 82320c_2c_4s_5c_{2+3} - 82320c_2c_5s_{2+3} + 22000c_{2+3}s_{2+3} + 4900c_4s_5c_{2+3}^2 - 4900c_5c_{2+3}s_{2+3} + 192975s_{2+3}^2 - 86240c_5 - 9604r_{33}c_5c_{2+3} + 9604c_5^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = [(3125 - 9604r_{33}^2) + 42000c_2 + (2500 + 86240r_{33})c_{2+3} + 44000s_{2+3} + 9800c_4s_5c_{2+3} - 9800c_5s_{2+3} + 176400c_2^2 + 21000c_2c_{2+3} + 369600c_2s_{2+3} + 82320c_2c_4s_5c_{2+3} - 82320c_2c_5s_{2+3} + 22000c_{2+3}s_{2+3} + 4900c_4s_5c_{2+3}^2 - 4900c_5c_{2+3}s_{2+3} + 192975s_{2+3}^2 - 86240c_5 - 9604r_{33}c_5c_{2+3} + 9604c_5^2] + [380 + 420s_2 + 25s_{2+3} - 440c_{2+3} + 98c_5c_{2+3} + 98c_4s_5s_{2+3}]^2$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (373125 - 9604r_{33}^2 + (380 + 98r_{33})^2) + 42000c_2 - 331900c_{2+3} + (21000c_2 - 369600s_2)c_{2+3} + (369600c_2 + 21000s_2)s_{2+3} + (9800 + 4900c_{2+3} + 82320c_2)(c_4s_5c_{2+3} - c_5s_{2+3}) - 86240c_5 - 9604r_{33}c_5c_{2+3} + 9604c_5^2 + 840(380 + 98r_{33})s_2 + (63000 + 4900r_{33})s_{2+3}$$

از آنجایی که با $sin\theta_5 = 0$ دو محور z_4 و z_5 موازی با هم قرار گرفته و سینگولاریتی به وجود می‌آورد. در نتیجه داریم که $sin\theta_5 \ != 0$.

حل به روش سیستماتیک:

$$
\begin{aligned}
A &= 2a_1 x_C \\
B &= 2a_1 y_C \\
C &= 2a_2 a_3 - 2b_2 b_4 \mu_2 \mu_3 \\
D &= 2a_3 b_2 \mu_2 + 2a_2 b_4 \mu_3 \\
E &= a_2^2 + a_3^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 - a_1^2 - x_C^2 - y_C^2 - (z_C - b_1)^2 \\
&\quad +2b_2 b_3 \lambda_2 + 2b_2 b_4 \lambda_2 \lambda_3 + 2b_3 b_4 \lambda_3
\end{aligned}
$$

```
A=2.*a(1).*c_vect(1);
B=2.*a(1).*c_vect(2);
C=2.*a(2)*a(3)-2*b(2)*b(4)*miu(2)*miu(3);
D=2*a(3)*b(2)*miu(2)+2*a(2)*b(4)*miu(3);
E=a(2).^2+a(3).^2+b(2).^2+b(3).^2+b(4).^2-a(1).^2-c_vect(1).^2-c_vect(2).^2-(c_vect(3)-b(1)).^2;
```

$$
\begin{aligned}
F &= y_C \mu_1 \\
G &= -x_C \mu_1 \\
H &= -b_4 \mu_2 \mu_3 \\
I &= a_3 \mu_2 \\
J &= b_2 + b_3 \lambda_2 + b_4 \lambda_2 \lambda_3 - (z_C - b_1)\lambda_1
\end{aligned}
$$

```
F=c_vect(2)*miu(1);
G=-c_vect(1)*miu(1);
H=-b(4)*miu(2)*miu(3);
I=a(3)*miu(2);
J=b(2)+b(3)*landa(2)+b(4)*landa(2)*landa(3)-(c_vect(3)-b(1))*landa(1);
```

$$F c_1 + G s_1 + H c_3 + I s_3 + J = 0$$

$$
\begin{aligned}
K &= 4a_1^2 H^2 + \mu_1^2 C^2 \\
L &= 4a_1^2 I^2 + \mu_1^2 D^2 \\
M &= 2(4a_1^2 HI + \mu_1^2 CD) \\
N &= 2(4a_1^2 HJ + \mu_1^2 CE) \\
P &= 2(4a_1^2 IJ + \mu_1^2 DE) \\
Q &= 4a_1^2 J^2 + \mu_1^2 E^2 - 4a_1^2 \mu_1^2 \rho^2
\end{aligned}
$$

$$\rho^2 \equiv x_C^2 + y_C^2$$

```
K=4*a(1).^2*H.^2 + miu(1).^2+C.^2;
L=4*a(1).^2*I.^2 + miu(1).^2+D.^2;
M=2*(4*a(1)^2*H*I+miu(1)^2*C*D);
N=2*(4*a(1)^2*H*J+miu(1)^2*C*E);
P=2*(4*a(1)^2*I*J+miu(1)^2*D*E);
Q=4*a(1)^2*J^2+miu(1)^2*E^2-4*a(1)^2*miu(1)^2*(c_vect(1)^2+c_vect(2)^2);
```

$$R\tau_3^4 + S\tau_3^3 + T\tau_3^2 + U\tau_3 + V = 0$$

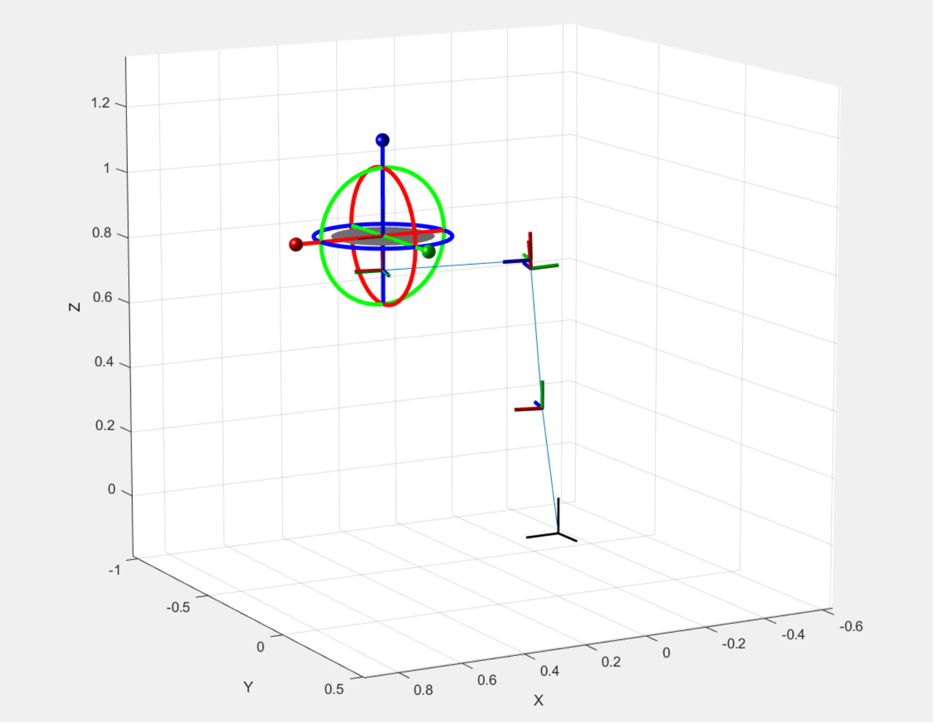
$$
\begin{aligned}
R &= 4a_1^2(J-H)^2 + \mu_1^2(E-C)^2 - 4\rho^2 a_1^2 \mu_1^2 \\
S &= 4[4a_1^2 I(J-H) + \mu_1^2 D(E-C)] \\
T &= 2[4a_1^2(J^2 - H^2 + 2I^2) + \mu_1^2(E^2 - C^2 + 2D^2) \\
&\quad -4\rho^2 a_1^2 \mu_1^2] \\
U &= 4[4a_1^2 I(H+J) + \mu_1^2 D(C+E)] \\
V &= 4a_1^2(J+H)^2 + \mu_1^2(E+C)^2 - 4\rho^2 a_1^2 \mu_1^2
\end{aligned}
$$

```
R = 4*a(1)^2*(J-H)^2+miu(1)^2*(E-C)^2-4*(c_vect(1)^2+c_vect(2)^2)*a(1)^2*miu(1)^2;
S = 4*(4*a(1)^2*I*(J-H)+miu(1)^2*D*(E-C));
T = 2*(4*a(1)^2*(J^2-H^2+2*I^2)+miu(1)^2*(E^2-C^2+2*D^2)-4*(c_vect(1)^2+c_vect(2)^2)*a(1)^2*miu(1)^2);
U = 4*(4*a(1)^2*I*(J+H)+miu(1)^2*D*(C+E));
V = 4*a(1)^2*(J+H)^2+miu(1)^2*(C+E)^2-4*(c_vect(1)^2+c_vect(2)^2)*a(1)^2*miu(1)^2;
coefvct = [R  S  T  U V];
syms x
eq=R*x^4+S*x^3+T*x^2+U*x+V==0;
sol = solve(eq,[x])
%theta_3 = 2*tan(sol)
```

که در نهایت به معادلاتی رسیدیم که θ_3 را نسبت به θهای دگر بیان می‌کند.

اعتبارسنجی معادلات:

شبیه سازی ربات در متلب با استفاده از robotics toolbox:



حال با استفاده از توابع موجود، یک کانفیگ رندوم به ربات داده و IKP آن را بدست آورده‌ایم:

configSoln = 1x6 struct

Fields	JointName	JointPosition
1	'jnt1'	-0.3897
2	'jnt2'	2.7667
3	'jnt3'	-3.1049
4	'jnt4'	0.6931
5	'jnt5'	1.8917
6	'jnt6'	-1.6777

سپس با استفاده از گزاره‌هایی که در حل هندسی بدست آورده‌ایم، اقدام به محاسبه تتاهای ربات می‌کنیم:

```
tform_wrist = getTransform(robot,randConfig,'body4', 'base');
xc = tform_wrist(1,4);
yc = tform_wrist(2,4);
zc = tform_wrist(3,4);
t1 = atan(yc/xc)
```

```
tform_3to6 = getTransform(robot,randConfig,'body6', 'body3');
R_3to6 = tform_3to6(1:3, 1:3);
if sin(configSoln(5).JointPosition)<0
    t4 = atan2(-R_3to6(2,3), -R_3to6(1,3))
    t5 = atan2(sqrt((R_3to6(1,3)^2)+(R_3to6(2,3)^2)), -R_3to6(3,3))
    t5neg = -t5
    t6 = atan2(R_3to6(3,2), -R_3to6(3,1))
end
if sin(configSoln(5).JointPosition)>0
    t4 = atan2(R_3to6(2,3),R_3to6(1,3))
    t5 = atan2(sqrt((R_3to6(1,3)^2)+(R_3to6(2,3)^2)), -R_3to6(3,3))
    t5neg = atan2(-sqrt((R_3to6(1,3)^2)+(R_3to6(2,3)^2)), R_3to6(3,3))
    t6 = -atan2(R_3to6(3,2), R_3to6(3,1))
end
```

مقایسه نتایج:

```
configSoln = 1×6 struct
```

Fields	JointName	JointPosition
1	'jnt1'	-0.3897
2	'jnt2'	2.7667
3	'jnt3'	-3.1049
4	'jnt4'	0.6931
5	'jnt5'	1.8917
6	'jnt6'	-1.6777

```
t1 = -0.3897
t1p = t1 - pi
t1p = -3.5313
t1pp = t1 + pi
t1pp = 2.7519
```

```
t4 = 0.6931
t5 = 1.8917
t5neg = -1.2499
t6 = -1.6777
```

که همانطور که مشاهده می‌شود، θ_1 و θ_4 و θ_5 و θ_6 به درستی محاسبه شدند. متاسفانه برای θ_3 به پاسخ صحیحی نرسیدیم و از آنجایی که θ_2 وابسته به محاسبه صحیح θ_3 بود، ارزشیابی این معادلات ناممکن شد.