دانشکده فنی دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تمرین کامپیوتری دوم ریاضیات مهندسی

طراحان
علی آریایی و پریسا محمدی

نیمسال اول ۱۴۰۴-۱۴۰۳

۱ شبیه‌سازی میدان مغناطیسی استاتیک در جعبه ابزار PDE در متلب

مقدمه

در این سوال، قصد داریم میدان مغناطیسی تولید شده توسط یک سیم‌پیچ حامل جریان که توسط یک هسته آهنی احاطه شده است را شبیه‌سازی و بررسی کنیم. برای انجام این شبیه‌سازی از جعبه‌ابزار PDE در نرم‌افزار متلب استفاده می‌شود. هدف این تمرین، بررسی و تحلیل توزیع پتانسیل برداری مغناطیسی $\vec{A}_z$، چگالی شار مغناطیسی $\vec{B}$، و شدت میدان مغناطیسی $\vec{H}$ در محیط اطراف سیم‌پیچ است.

مقدمه‌ای بر مغناطیس استاتیک

قانون‌های حاکم و روابط مغناطیس‌استاتیک

در مغناطیس‌استاتیک، روابط اساسی به صورت زیر بیان می‌شوند:
قانون آمپر:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

که در آن $\vec{H}$ شدت میدان مغناطیسی و $\vec{J}$ چگالی جریان است.
چگالی شار مغناطیسی:

$$\vec{B} = \mu\vec{H}, \quad \mu = \mu_r\mu_0, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$$

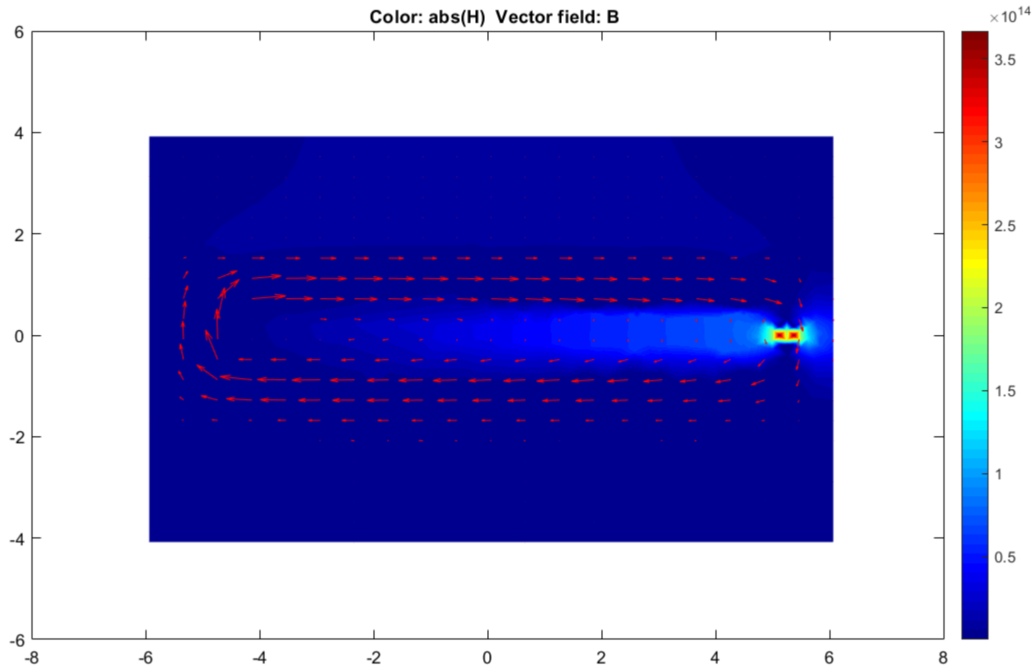
μ تراوایی مغناطیسی است و به تراوایی نسبی (μ_r) و تراوایی خلأ (μ_0) وابسته است.
پتانسیل برداری مغناطیسی:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

با جایگذاری $\vec{B}$ در قانون آمپر و فرض اینکه $\vec{A}$ تنها مولفه‌ای در راستای z دارد، معادله دیفرانسیل جزئی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu}\nabla A_z\right) = J_z$$

که A_z مولفه z پتانسیل برداری و J_z مولفه z چگالی جریان است.



شکل ۱: خروجی نهایی ابزار مدل‌سازی PDE

راهنمای گام‌به‌گام استفاده از PDE Modeler

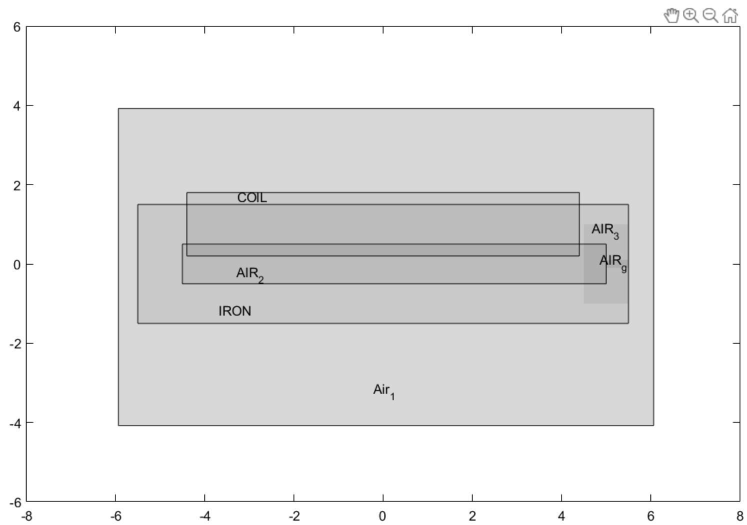
مرحله ۱: اجرای جعبه ابزار PDE

۱. متلب را باز کرده و دستور pdeTool را اجرا کنید.
۲. به مسیر Options → Application → Electromagnetic → Magnetostatic بروید تا حالت کاربردی را به مغناطیس استاتیک تغییر دهید.

مرحله ۲: رسم هندسه

۱. به حالت رسم بروید (Draw → Draw Mode).
۲. با استفاده از ابزار رسم مستطیل، مستطیل‌های زیر را با مختصات داده شده رسم کنید (به تصویر خروجی مطلوب در حالت Draw Mode مراجعه کنید).
۳. همه شکل‌ها را با استفاده از Set Formula → Draw ترکیب کرده و فرمول زیر را وارد کنید:

AIR_g + AIR_۳ + AIR_۲ + Air_۱ + IRON + COIL



شکل ۲: خروجی ابزار در حالت Draw Mode

نام	مختصات x	مختصات y
Air_1	$[-6, 6]$	$[4, -4]$
COIL	$[-4.4, 4.4]$	$[1.8, 0.2]$
IRON	$[-5.5, 5.5]$	$[1.5, -1.5]$
AIR_3	$[4.5, 5.5]$	$[1, -1]$
AIR_2	$[-4.5, 5]$	$[0.5, -0.5]$
AIR_g	$[5, 5.5]$	$[0.1, -0.1]$

مرحله ۳: تنظیم شرایط مرزی

۱. به حالت مرزی بروید (Boundary $\rightarrow$ Boundary Mode).

۲. مرز خارجی مربوط به Air_1 را انتخاب کرده و شرایط مرزی را به صورت زیر تنظیم کنید:

- نوع: دیریکله.
- مقدار: $A = 0$ ($h = 1$، $r = 0$).

مرحله ۴: تخصیص مشخصات زیر دامنه

۱. به حالت PDE بروید (PDE $\rightarrow$ PDE Specification).
۲. با مراجعه به Options $\rightarrow$ Show Subdomain Labels برچسب‌های زیر بخش ها را فعال کنید.
۳. برای هر زیر بخش، مقادیر مناسب را اختصاص دهید
۴. در بخش‌های مناسب سیم‌پیچ، جریان رو به بالا $J = 3 \times 10^{13}$ و رو به پایین $J = -3 \times 10^{13}$ را تنظیم کنید.

زیربخش	μ	**J**
Air_1, AIR_3, AIR_2, AIR_g	$\mu = 4\pi \times 10^{-7}$	$J = 0$
COIL	$\mu = 4\pi \times 10^{-7}$	$J = \pm 3 \times 10^{13}$
IRON	$\mu = 2000 \times (4\pi \times 10^{-7})$	$J = 0$

مرحله ۵: حل مسئله و مشاهده نتایج

۱. مش‌بندی را با استفاده از Mesh $\rightarrow$ Initialize Mesh انجام دهید.
۲. تنظیمات پارامترهای نمودار را در Plot $\rightarrow$ Parameters به صورت زیر انجام دهید:

- رنگ: میدان مغناطیسی
- فلش‌ها: چگالی شار مغناطیسی
- نقشه رنگی: Jet

۳. معادله PDE را با کلیک بر روی Solve $\rightarrow$ Solve PDE حل کنید.

توجه: درگزارش شما بایستی توضیحی از تمامی مراحل فوق وجود داشته باشد.

خواسته ها

۱. خروجی مدل‌سازی را با نمودار پتانسیل برداری مغناطیسی $\vec{A}$ مشابه تصویر ارائه شده خروجی دهید و تأثیر هسته آهنی را بر خطوط چگالی شار مغناطیسی $\vec{B}$ توصیف کنید.

۲. توضیح دهید چگونه تغییر تراوایی مغناطیسی μ در بخش‌های مختلف هندسه (مانند سیم‌پیچ و هسته آهنی) می‌تواند توزیع میدان مغناطیسی $\vec{H}$ را تحت تأثیر قرار دهد.

۳. اگر به جای آهن، از هسته فرضی با $\mu_r = 2$ استفاده شود، چگالی شار و میدان مغناطیسی را نمایش دهید و علت آن را تحقیق کنید.

۲. حل معادله گرما و لاپلاس با تابع pdepe و روش های عددی

هدف این سوال حل معادل گرما با استفاده از روش های مختلف است. فرم کلی این معادله به صورت زیر است:

$$\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T(x,y,t)$$

در شرایط Steady–State نیز معادله به صورت معادله لاپلاس درمی‌آید:

$$\nabla^2 T(x,y,t) = 0$$

۱.۲ بخش اول

برای حل pdeها می‌توان از تابع پیش‌ساخته متلب به نام pdepe استفاده کرد. این تابع با دریافت نوع معادله، شرایط مرزی، و نوع مختصات، امکان حل معادلات دیفرانسیل جزئی را فراهم می‌کند. با این حال، محدودیت‌هایی مانند نیاز به فرم خاصی از معادله (مطابق مستندات Mathworks) و عدم توانایی در حل معادلات پیچیده‌تر یا مسائل دوبعدی پیشرفته دارد. در بسیاری از موارد، حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل جزئی ممکن نیست یا بسیار پیچیده است؛ از این رو استفاده از روش‌های عددی که امکان حل تقریبی و قابل قبول این معادلات را فراهم می‌کنند، ضروری است.

به عنوان جایگزین، می‌توان از روش‌های عددی مختلف مانند FDM، FVM، و FEM استفاده کرد. این روش‌ها را بررسی کرده و نکات کلیدی آن‌ها را توضیح دهید.

۲.۲ بخش دوم

با استفاده از ابزار pdepe در متلب، معادله انتقال حرارت یک‌بعدی را حل کرده و خروجی آن را نمایش می‌دهیم. معادله حاکم به صورت زیر است:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

شرایط مرزی و شرایط اولیه به صورت زیر است:

$$T(t,0) = 0, \quad T(t,1) = 1, \quad T(0,x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

برای نمایش نتایج، می‌توان از دستور **surf** در متلب استفاده کرد.

۳.۲ بخش سوم

در این بخش قصد داریم معادله انتقال حرارت را در حالت Steady–State با استفاده از روش FDM حل کنیم. همان‌طور که اشاره شد، در این حالت، معادله به شکل معادله لاپلاس تبدیل می‌شود. برای این منظور ابتدا مدل را گسسته‌سازی می‌کنیم. فرض کنید یک صفحه مستطیلی به ابعاد $m \times n$ داریم که قرار است انتقال حرارت در آن بررسی شود. اگر این صفحه را به سلول‌های کوچک $p \times p$ تقسیم کرده و هر سلول را به عنوان یک نقطه در نظر بگیریم، معادله دیفرانسیل مربوط به فضای پیوسته به معادله‌ای گسسته تبدیل خواهد شد که قابل محاسبه عددی است.

هر مقدار دما T پس از گسسته‌سازی، به مختصات مربوط به خود در شبکه تعلق می‌گیرد. این گسسته‌سازی به‌گونه‌ای انجام می‌شود که فرم دیفرانسیل معادله، به معادله‌های تفاضلی تبدیل گردد. برای مثال، مشتقات دوم دما نسبت به x و y به صورت زیر تقریب زده می‌شوند:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

که در آن i و j نشان‌دهنده مختصات هر المان در ماتریس هستند. با جای‌گذاری این معادلات در فرم گسسته معادله انتقال حرارت، مقدار $T_{i,j}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$T_{i,j} = \frac{1}{4}\left(T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + (\Delta x)^2 \left(T_{i,j+1} + T_{i,j-1}\right)\right)$$

این رابطه نشان می‌دهد که دمای هر نقطه از شبکه به دماهای نقاط اطراف خود وابسته است و از آن‌ها تأثیر می‌گیرد.

شرایط مرزی نقش بسیار مهمی در حل این معادلات دارند. دماهای مشخص در لبه‌های صفحه و ثابت بودن دما در برخی اضلاع باید به‌درستی اعمال شوند. در نهایت دمای هر سلول از صفحه را در یک صفحه ترسیم کنید. (میتوانید از دستور pcolor یا هر دستور دیگر استفاده کنید.)

نکته: هنگام رسم نمودار نهایی، اطمینان حاصل کنید که شرایط مرزی به‌درستی رعایت شده و تغییرات دما به‌دقت نمایش داده شوند. برای پایان الگوریتم میتوانید هر گاه تغییرات آپدیت شدن از مقداری کمتر شد الگوریتم را متوقف کنید. نکته: برای شرایط مرزی، از شرایط مرزی بخش چهارم استفاده کنید.

۴.۲ بخش چهارم (امتیازی)

در این بخش، هدف ما حل معادله انتقال حرارت در حالت گذرا با استفاده از روش تفاضلات متناهی (FDM) است. برخلاف حالت Steady–State در اینجا پارامتر زمان نیز دارد و لازم است برای مشتق زمانی $\frac{\partial T}{\partial t}$ یک رابطه گسسته‌سازی تعریف کنیم. معادله انتقال حرارت به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

با استفاده از روش تفاضلات متناهی، معادله بالا به صورت زیر گسسته‌سازی می‌شود:

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \alpha \left(\frac{T_{i+1,j}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i-1,j}^{n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i,j-1}^{n}}{(\Delta y)^2} \right)$$

در این رابطه، اندیس n نشان‌دهنده مقدار دما در زمان قبلی و $n+1$ نمایانگر مقدار دما در زمان جاری است. با تنظیم معادله به گونه‌ای که دمای لحظه بعدی را به دست آوریم، خواهیم داشت:

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^{n} + \alpha \Delta t \left(\frac{T_{i+1,j}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i-1,j}^{n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i,j-1}^{n}}{(\Delta y)^2} \right)$$

معادله فوق را می‌توان بازنویسی کرد تا تأثیر تغییرات در دو جهت x و y را با ضرایب جداگانه نشان داد:

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^{n} + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \left(T_{i+1,j}^{n} + T_{i-1,j}^{n} - 2T_{i,j}^{n} \right) + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta y)^2} \left(T_{i,j+1}^{n} + T_{i,j-1}^{n} - 2T_{i,j}^{n} \right)$$

در این سوال به دلیل حضور زمان دیگر نیازی به در نظر گرفتن تلرانس برای حل نداریم و میتوانیم طی زمان آپدیت شدن دما ها را انجام دهیم. با در نظر گرفتن شرایط مرزی و اولیه به صورت زیر، معادله را حل کنید، و انتقال حرارت را از زمان ۰ تا مقدار مناسب به دست آورید. در نهایت روند تغییرات دما را در ۴ زمان مختلف (زمان اول در زمان صفر و زمان آخر در زمان طولانی که به حالت Steady–State میل کند و زمان های میانی دلخواه هستند.) در یک نمودار ترسیم کنید.

برای حل مسئله، باید شرایط مرزی و اولیه را تعیین کنیم:

شرایط مرزی: دماها روی اضلاع صفحه در هر لحظه زمان به‌صورت زیر ثابت در نظر گرفته می‌شوند:

$$T_{up}(x, y = H, t) = 130, \quad 0 < x < W$$

$$T_{left}(x = 0, y, t) = 110, \quad 0 < y < H$$

$$T_{right}(x = W, y, t) = 45, \quad 0 < y < H$$

$$T_{bottom}(x, y = 0, t) = 75, \quad 0 < x < W$$

شرایط اولیه: در زمان اولیه ($t = 0$)، دمای کل صفحه برابر با مقدار زیر فرض می‌شود:

$$T(x, y, t = 0) = 25, \quad 0 < x < W,\ 0 < y < H$$

نکات کلی درباره پروژه

- در صورتی که در تمرین هر گونه ابهام و یا پرسشی دارید می‌توانید با علی آریایی و پریسا محمدی در ارتباط باشید.
- در صورتی که سوالی از تمرین دارید که ممکن است برای دیگران نیز مفید باشد، آن را در گروه درس مطرح کنید.
- مشورت و همفکری با دوستان خود هنگام نوشتن تمرین کاری مفید و سازنده است و از انجام آن پرهیز نکنید، اما این کار باید در راستای فهم درس و تمرین باشد و از کپی‌کردن تمارین یکدیگر خودداری کنید.
- پاسخ های خود را به صورت یک فایل به فرمت zip در سامانه درس با فرمت نامگذاری Engmath-CA1-SID بارگذاری نمایید.