دانشکده فنی دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تمرین کامپیوتری اول ریاضیات مهندسی

طراحان

علی آریایی و پریسا محمدی

نیمسال اول ۱۴۰۴-۱۴۰۳

۱ سری فوریه

۱.۱ زلزله‌نگار

در این پروژه، داده‌های ثبت‌شده توسط یک زلزله‌نگار که به‌صورت سری زمانی ذخیره شده است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. فایل داده (data.mat) شامل اطلاعاتی از سیگنال زلزله با نرخ نمونه‌برداری ۱۰۰۰ هرتز می‌باشد. داده‌های شبیه‌سازی‌شده بیانگر وقوع یک زلزله در یک شهر زلزله‌خیز هستند. هدف اصلی این پروژه محاسبه ضرایب سری فوریه داده‌های ثبت‌شده و تحلیل تأثیر مؤلفه‌های فرکانسی مختلف بر ساختمان‌ها با ارتفاع‌های متفاوت است.

یکی از نکات مهم در این بررسی، در نظر گرفتن فرکانس طبیعی ساختمان‌ها و مقایسه آن با فرکانس مؤلفه‌های زلزله است. اگر فرکانس طبیعی یک ساختمان با فرکانس زلزله در یک محدوده قرار گیرد، پدیده تشدید رخ می‌دهد که می‌تواند آسیب‌های شدیدی به ساختمان وارد کند. بنابراین، تحلیل دقیق این داده‌ها می‌تواند به ارائه توصیه‌هایی برای طراحی ساختمان‌هایی با ارتفاع مناسب کمک کند تا در صورت وقوع زلزله، کمترین آسیب ممکن به ساختمان‌ها وارد شود.

برای تحلیل این موضوع، از اطلاعات موجود در جدول زیر استفاده می‌شود:

جدول ۱: ارتباط بین ارتفاع ساختمان و فرکانس طبیعی

ارتفاع ساختمان	فرکانس طبیعی (Hz)
۱-۴ طبقه (کوتاه)	۳-۱۰
۵-۱۰ طبقه (متوسط)	۱-۲
بیشتر از ۱۰ طبقه (بلند)	۰.۱-۱

در ادامه، بخش‌های مختلف پروژه شرح داده شده‌اند:

۱. بارگذاری و نرمال‌سازی داده‌ها: داده‌های ثبت‌شده را بارگذاری کرده و به مقادیر نرمال (بین ۰ و ۱) تبدیل کنید. برای این کار، داده‌ها را بر بزرگ‌ترین مقدار آن تقسیم نمایید. سپس سیگنال نرمال‌شده را با نرخ نمونه‌برداری ۱۰۰۰ هرتز رسم کنید.

۲. محاسبه ضرایب سری فوریه: تابعی بنویسید که سیگنال و مقدار n را به‌عنوان ورودی دریافت کرده و ضرایب سری فوریه (به فرم نمایی) را محاسبه کند. با توجه به اینکه داده‌ها گسسته هستند، به جای استفاده از انتگرال، از جمع مقادیر استفاده کنید.

۳. تحلیل بخش زلزله: بخش مرکزی داده‌ها که شامل ۱۰۰۰ نمونه می‌شود (داده های زمان وقوع زلزله) را جدا کرده و ضرایب سری فوریه برای فرکانس‌های کمتر از ۱۰ هرتز محاسبه کنید. این ضرایب را رسم کنید.

۴. تحلیل آسیب‌پذیری ساختمان‌ها: با استفاده از نتایج بخش قبلی، توضیح دهید که کدام ساختمان‌ها در معرض خطر بیشتری قرار دارند و برای کاهش آسیب، بهتر است ساختمان‌ها چه ارتفاعی داشته باشند.

۲.۱ تشخیص نوت موسیقی

در این پروژه، یک سیگنال صوتی با نام song.wav بررسی می‌شود که مربوط به قطعه‌ای موسیقی شامل چندین نوت است. این نوت‌ها به‌صورت متوالی و با مدت‌زمان برابر 0.4 ثانیه در سیگنال ظاهر می‌شوند. نرخ نمونه‌برداری این سیگنال 44100 هرتز است. هدف پروژه، تحلیل این سیگنال برای استخراج نوت‌های موسیقی و شناسایی نام و فرکانس هر نوت است. هر نوت موسیقی به‌صورت یک موج سینوسی تولید شده که فرکانس آن متناظر با فرکانس مشخص نوت است. فرکانس هر نوت نشان‌دهنده زیر و بمی صدای آن بوده و ویژگی اصلی تمایز نوت‌ها محسوب می‌شود. در این پروژه، با استفاده از تحلیل سری فوریه، ساختار فرکانسی سیگنال بررسی شده و بر اساس ضرایب فوریه، نوت‌های موجود در آهنگ شناسایی خواهند شد. این روش به ما امکان می‌دهد تا از یک سیگنال صوتی پیچیده، اطلاعات مربوط به اجزای فرکانسی آن را استخراج کرده و به تفکیک نوت‌ها بپردازیم.

جدول ۲: فرکانس‌ها و نام نوت‌های موسیقی موجود در فایل صوتی

فرکانس (Hz)	نام نوت
523.25	C (Do)
587.33	D (Re)
659.26	E (Mi)
698.46	F (Fa)
784.00	G (Sol)

بخش‌های مختلف این پروژه به شرح زیر است:

۱. بارگذاری داده‌ها: سیگنال song.wav را بارگذاری کنید .

۲. محاسبه ضرایب سری فوریه: تابعی طراحی کنید که سیگنال و مقدار n را به‌عنوان ورودی دریافت کرده و ضرایب سری فوریه (به فرم نمایی) را محاسبه کند. برای این کار، با توجه به گسسته بودن داده‌ها، به‌جای انتگرال، از جمع مقادیر استفاده نمایید.

۳. جداسازی نوت‌ها: با توجه به مدت‌زمان هر نوت (0.4 ثانیه)، سیگنال را به نوت های جداگانه تقسیم کنید و ضرایب سری فوریه هر بخش را محاسبه کنید. فقط ضرایب مربوط به فرکانس‌های در ناحیه نوت های عنوان شده را استخراج کنید.

۴. رسم ضرایب سری فوریه: ضرایب سری فوریه محاسبه‌شده برای هر نوت را رسم کنید و تمام نمودارها را با استفاده از subplot در یک figure نمایش دهید. هر نمودار ضرایب سری فوریه یک نوت را نشان می‌دهد و محورهای آن فرکانس و مقدار ضریب را مشخص می‌کنند.

۵. تشخیص نوت‌ها: فرکانس نوت‌های داده‌شده (C، D، E، F، G) و اندیس ضرایب متناظر آن‌ها را محاسبه کنید. سپس برای هر نوت، ضریب سری فوریه با بیشترین مقدار (ضریب غالب) و اندیس آن را پیدا کنید. اگر اختلاف بین اندیس ضرایب و اندیس‌های تئوری نوت‌ها برابر با 0 یا 1 باشد، نام نوت مربوطه را به‌درستی تشخیص دهید. برای تمام نوت‌های سیگنال، نام نوت‌های تشخیص‌داده‌شده را به‌ترتیب پرینت کنید و نتیجه نهایی را گزارش دهید

۲ تبدیل فوریه

۱.۲ پیاده سازی محاسبه گر تبدیل فوریه

تابعی به نام general_fourier_transform بنویسید که تبدیل فوریه یک تابع دلخواه محاسبه کند. راهنمایی: برای محاسبه انتگرال در MATLAB، می‌توانید از گزینه‌های زیر استفاده کنید:

- برای محاسبه انتگرال بر روی توابع پیوسته، از دستور integral می‌توانید استفاده کنید. اگر بخواهید انتگرال تابعی گسسته‌زمانی را با استفاده از تابع integral محاسبه کنید، ابتدا باید از کد زیر استفاده کنید: این کد مقادیر تعریف‌نشده تابع در نقاط زمانی را با استفاده از درون‌یابی خطی محاسبه می‌کند.
- برای محاسبه انتگرال بر روی توابع گسسته، می‌توانید از تابع trapz استفاده کنید.

در باقی سوالات تمرین در صورت نیاز به محاسبه تبدیل فوریه از تابعی که در این بخش نوشتید می توانید استفاده کنید.

```
f = @(t_query) interp1(t, f_t, t_query, 'linear', 0);  % Interpolates
    f_t values
```

برای بررسی عملکرد تابعی که در بخش قبل نوشتید، تابع f(t) را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$f(t) = 3 \cdot \Pi\left(\frac{t}{2}\right) + \Pi(t)$$

۱. تبدیل فوریه $f(t)$ را محاسبه کرده و نمودار آن را در MATLAB رسم کنید.

۲. تابع $g(t) = e^{-j2\pi 3t} f(t)$ را تعریف کنید. تبدیل فوریه $g(t)$ را محاسبه کرده و نمودار آن را نیز در MATLAB رسم کنید.

۳. نمودارهای حاصل از تبدیل فوریه $f(t)$ و $g(t)$ را مقایسه کرده و تحلیل کنید که چگونه ضرب $f(t)$ در $e^{-j2\pi 3t}$ بر تبدیل فوریه آن تأثیر گذاشته است.

۲.۲　توابع پنجره‌بندی

در تحلیل سیگنال، بررسی سیگنالی مانند $f(t)$ در بازه‌ی $-\infty < t < \infty$ واقع‌بینانه نیست. جای آن، یک بخش محدودی از سیگنال، مثلاً از $t = -\frac{1}{2}$ تا $t = \frac{1}{2}$ در نظر گرفته می‌شود. این فرآیند به عنوان پنجره‌بندی شناخته می‌شود و با ضرب سیگنال در یک تابع پنجره‌بندی $w(t)$ انجام می‌گیرد.

در این تمرین قصد داریم توضیحات فوق را با محاسبه و تحلیل مثال‌هایی عملی پیاده‌سازی کنیم.

با فرض اینکه تابع پنجره‌بندی به صورت زیر تعریف شده است:

$$w(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & |t| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

برای هر یک از توابع زیر:

$$f_1(t) = \text{sinc}^2(t),$$

$$f_2(t) = e^{-3|t|},$$

مراحل زیر را انجام دهید:

۱. ابتدا تابع $f(t)$ را در تابع پنجره‌ای $w(t)$ ضرب کنید. سپس تبدیل فوریه حاصل را محاسبه کرده و نمودار آن را در MATLAB رسم کنید.

۲. تبدیل فوریه تابع $w(t)$ و $f(t)$ را به صورت جداگانه حساب کنید. سپس کانولوشن این دو تبدیل فوریه را در حوزه فرکانس محاسبه کنید. نتایج را در MATLAB رسم کنید.

۳. خروجی‌های مراحل بالا را با یکدیگر مقایسه کنید. بر اساس خواص تبدیل فوریه، تفاوت یا شباهت نتایج را توجیه کنید.

۳.۲ تخمین تبدیل فوریه با تابع مثلثی

۱.۳.۲ تابع مثلثی

$$\Lambda(\frac{t}{T}) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & \text{if} |t| < T, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

تابعی به نام triangular_function بنویسید که رابطه‌ی ریاضی تابع مثلثی را در لحظات t خروجی دهد:

- t: بردار زمانی
- T: نصف پهنای زمانی تابع مثلثی
- Shift: مقدار شیفت سیگنال در زمان

۲.۳.۲ تبدیل فوریه تابع مثلثی

تابعی به نام triangular_fourier_transform بنویسید که تبدیل فوریه تابع مثلثی را محاسبه کند. ورودی تابع به صورت زیر خواهد بود:

- T: نصف پهنای زمانی تابع مثلثی
- w_vals: برداری از مقادیر فرکانس

برای محاسبه‌ی انتگرال از دستور integral در MATLAB استفاده کنید. این دستور برای محاسبه‌ی انتگرال روی توابع پیوسته تعریف شده است. در نتیجه، تابع مثلثی را به صورت پیوسته با کمک دستور @ در MATLAB تعریف کرده و آن را به دستور integral ورودی دهید.

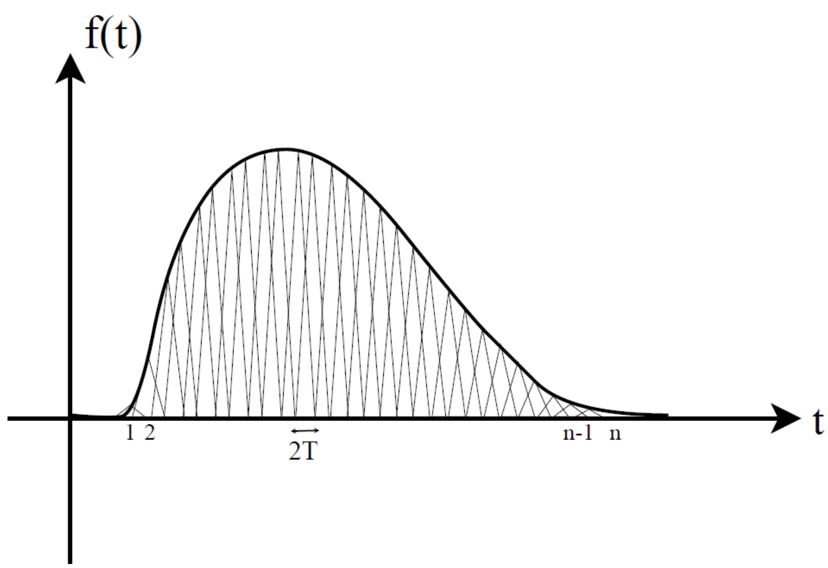
۳.۳.۲ تخمین تبدیل فوریه با تابع مثلثی

در این بخش می خواهیم با استفاده از توابع بخش های قبل، تابعی به نام approximate_fourier_transform بنویسیم که تبدیل فوریه تابعی دلخواه را با کمک توابع مثلثی به صورت تقریبی محاسبه کند. ورودی تابع به فرم زیر خواهد بود :

- f: تابعی دلخواه
- t: بردار زمانی
- w_vals: برداری از مقادیر فرکانس

برای استفاده از این روشِ تخمین، این تابع دلخواه می‌بایست شرایط زیر را داشته باشد تا بتوانیم آن را به صورت مجموع توابع مثلثی شیفت‌یافته تخمین بزنیم:

- در بازه‌ای پیوسته از زمان تعریف شده باشد و در خارج از این بازه صفر باشد.
- مقدار تابع در نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه صفر باشد.



شکل ۱: تقریب مثلثی از تابع

راهنمایی: نقاط ابتدایی و انتهایی بازه‌ای را که تابع در آن مقدار غیر صفر دارد را پیدا کنید. برای این کار می‌توانید از دستور find استفاده کنید. این بازه را به تعداد زیادی زیربازه‌هایی با طول یکسان تقسیم کنید که، طبق شکل هر یک طول T را خواهند داشت. حال به ازای هر w_vals، تبدیل فوریه تابع را با پیاده‌سازی روابط ریاضی زیر به دست آورید.
تابع $f(t)$ به صورت زیر تخمین زده می شود:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n-1} f(kT) \cdot \Lambda_i(t - kT).$$

حال، تبدیل فوریه تابع فوق را محاسبه می‌کنیم:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=1}^{n-1} f(kT)\cdot\Lambda_i(t-kT)\right\} = \sum_{k=1}^{n-1} e^{-i\omega kT}\cdot f(kT)\cdot\mathcal{F}\{\Lambda_i(t)\}.$$

برای بررسی صحت عملکرد توابعی که در بخش‌های قبل نوشتید، تبدیل فوریه تابعِ

$$f_1(t) = \Pi(\frac{t}{5}).(1 - cos(\frac{2\pi t}{5}))$$
$$f_2(t) = \Lambda(t) + \Lambda(t-2) + \Lambda(t-4) + \Lambda(t-6)$$

را به سه روش محاسبه کنید:

۱. به صورت تئوری و مشابه مثال حل‌شده در جزوه

۲. با کمک تابع general_fourier_transform

۳. با کمک تابع approximate_fourier_transform

با کمک دستور subplot، خروجی هر روش را زیر یکدیگر plot کرده و یکسان بودن آن‌ها را نتیجه بگیرید.

نکات کلی درباره پروژه

- در صورتی که در تمرین هرگونه ابهام و یا پرسشی دارید می‌توانید با علی آریایی و پریسا محمدی در ارتباط باشید.
- در صورتی که سوالی از تمرین دارید که ممکن است برای دیگران نیز مفید باشد، آن را در گروه درس مطرح کنید.
- مشورت و همفکری با دوستان خود هنگام نوشتن تمرین کاری مفید و سازنده است و از انجام آن پرهیز نکنید، اما این کار باید در راستای فهم درس و تمرین باشد و از کپی‌کردن تمارین یکدیگر خودداری کنید.
- پاسخ های خود را به صورت یک فایل به فرمت PDF در سامانه درس با فرمت نامگذاری Engmath-CA1-SID بارگذاری نمایید.