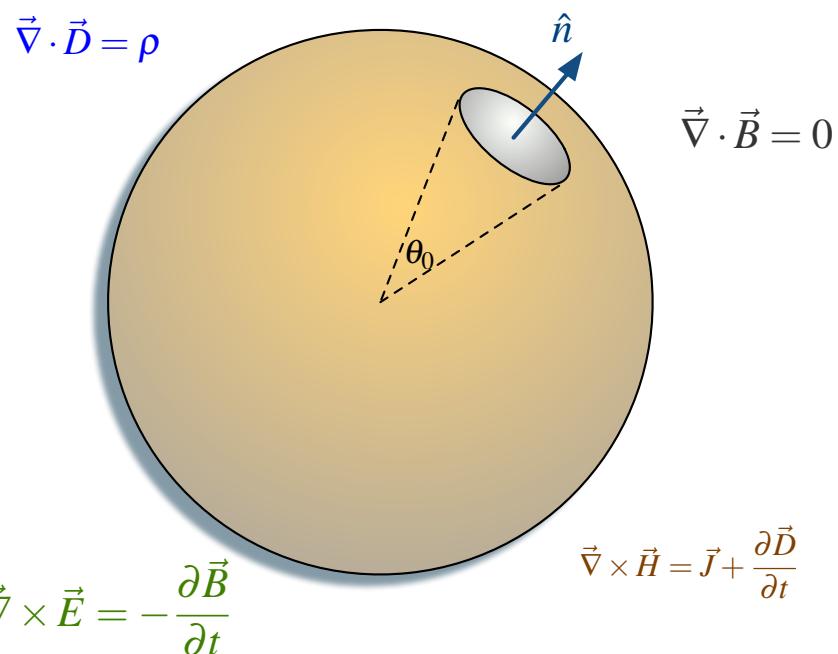


Problemas Propuestos y Resueltos

de Electromagnetismo



Rodrigo Chi Durán

email: rchi@ing.uchile.cl

Versión α 1.2 - Marzo 2016

Índice general

I Electrostática	1
1. Ley de Coulomb y Distribuciones Discretas de Cargas	3
I. Problemas Propuestos	3
II. Soluciones	5
2. Distribuciones Continuas de Carga	7
I. Problemas Propuestos	7
II. Soluciones	12
3. Ley de Gauss	25
I. Problemas Propuestos	25
II. Soluciones	29
4. Conductores, Condensadores y Energía	35
I. Problemas Propuestos	35
II. Soluciones	41
5. Ecuación de Laplace/Poisson y Método de las Imágenes	57
I. Problemas Propuestos	57
II. Soluciones	62

6. Dipolo Eléctrico	79
I. Problemas Propuestos	79
II. Soluciones	81
II Corriente Eléctrica	87
7. Medios Conductores y Ecuación de Continuidad	89
I. Problemas Propuestos	89
II. Soluciones	94
8. Circuitos Eléctricos	99
I. Problemas Propuestos	99
II. Soluciones	102
III Magnetostática	105
9. Ley de Biot-Savart	107
I. Problemas Propuestos	107
II. Soluciones	110
10. Fuerza de Lorentz	113
I. Problemas Propuestos	113
II. Soluciones	117
11. Ley de Ampère	119
I. Problemas Propuestos	119
II. Soluciones	122



12. Potencial Vectorial y Momento Magnético	127
I. Problemas Propuestos	127
II. Soluciones	131
IV Campos Electromagnéticos Variantes en el Tiempo	137
13. Ley de Faraday-Lenz	139
I. Problemas Propuestos	139
II. Soluciones	143
14. Inductancia y Energía Magnética	147
I. Problemas Propuestos	147
II. Soluciones	152
15. Corriente Alterna	159
I. Problemas Propuestos	159
II. Soluciones	164
16. Leyes de Maxwell y Ondas Electromagnéticas	167
I. Problemas Propuestos	167
II. Soluciones	171
V Campos Electromagnéticos en Medios Materiales	175
17. Campo Eléctrico en Medios Materiales	177
I. Problemas Propuestos	177
II. Soluciones	182



18. Campo Magnético en Medios Materiales	191
I. Problemas Propuestos	191
II. Soluciones	195
 VI Respuestas	 199
 19. Respuestas	 201



Prólogo

El Electromagnetismo es posiblemente una de las ramas más bonitas de la física, la cual tiene muchas aplicaciones cotidianas de las cuales no nos damos cuenta: prender la luz, llamar por celular o usar el computador. El estudio de esta área en el último siglo ha provocado un avance considerable en la tecnología y nos entregan un mayor bienestar diariamente.

El apunte aquí presente, nace como una recopilación de problemas propuestos y resueltos durante el tiempo que he sido Profesor Auxiliar en la Universidad de Chile y mi breve paso por la Universidad de los Andes. La mayoría de los problemas disponibles han sido extraídos de evaluaciones (controles, ejercicios, tareas, etc) y de guías de problemas propuestos que elaboré para que mis alumnos estudiaran. Aclaro que la mayoría de los problemas presentes no son de mi autoría sino de los profesores con los que he trabajado y de algunos libros de la bibliografía.

Mi principal objetivo con este apunte es entregar un buen material de estudio para las personas que necesiten estudiar y/o que simplemente quieran aprender. Además, el hecho de reunir el material que confeccioné durante varios semestres en un solo lugar hace que el trabajo sea mucho más útil y duradero para las personas que quieran utilizarlo.

Este compilado posee dos tipos de problemas: algunos con su solución completa y otros que solamente poseen su respuesta final. Como siempre es recomendado, es importante que al momento de usar este apunte se den el tiempo de pensar el problema antes de mirar su solución (si es que la posee). Un rol activo en la resolución de problemas les traerá muy buenos resultados durante este curso.

He querido ser detallista en la selección de problemas, de modo que en la mayoría de los capítulos he intentado plasmar un espectro representativo de los de problemas que suelen ser preguntados en la FCFM (aunque hay profesores que su ingenio siempre puede más).

Dado lo reciente de esta recopilación, probablemente existan errores de los cuales han pasado desapercibidos. Les pido por favor a los estudiantes que los encuentren que me los notifiquen, así ganarán buen karma y otros futuros estudiantes se los agradecerán ☺.

Finalmente, quiero agradecer a las personas que han hecho posible realizar este proyecto, a los profesores Pablo Zegers, Daniel Escaff, Simón Casassus, Carlos Cartes, Takeshi Asahi, Matías Montesinos y en particular, a Marcel Clerc y Claudio Romero. También a mis compañeros auxiliares que aportaron con problemas y soluciones: Susana Márquez y Luis Mateluna.

¡Mucho Éxito!



Notas sobre la Versión α 1.2

- La presente versión cuenta con 18 capítulos, donde existen 201 problemas propuestos de los cuales 86 tienen solución.
- Los problemas tienen una simbología de acuerdo a su dificultad:
 - ● significa que un problema es sencillo y debería ser resuelto en forma rápida.
 - ♦ significa que el problema intermedio y requiere un mayor análisis o trabajo algebraico.
 - ★ significa que es un problema difícil, que requiere un análisis prolongado.
- Todos los problemas del apunte cuentan con su respectiva respuesta al final del documento. Se puede llegar fácilmente a su respuesta presionando el símbolo ✓.
- En el enunciado de cada problema se detalla si este tiene solución mediante el símbolo ⓘ. Si se presiona el símbolo se puede llegar rápidamente a su solución.
- He dejado el capítulo de Campo Eléctrico/Magnético en Medios Materiales al final del apunte, ya que siempre me ha gustado más esa forma de ver los contenidos del curso.



Parte I

Electrostática

1

Ley de Coulomb y Distribuciones Discretas de Cargas

I. Problemas Propuestos

Problema 1.1

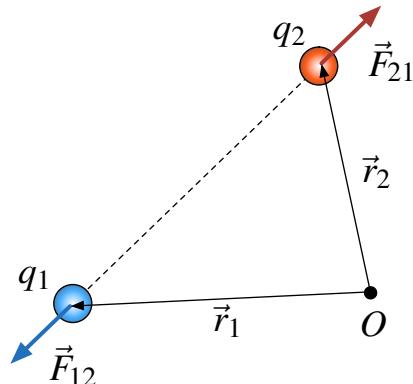


Suponga que en lugar de la Ley de Coulomb, uno hubiera encontrado experimentalmente que la fuerza entre dos cargas puntuales fuera

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \sqrt{\alpha|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|})}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

donde α es una constante.

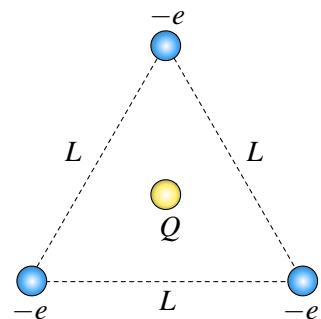
- Escriba el campo eléctrico a una carga puntual. Coloque el origen de coordenadas en la carga puntual.
- Elija una trayectoria cerrada alrededor de la carga y calcule la integral $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Compare el resultado obtenido con la Ley de Coulomb.
- Encuentre en valor de la integral $\iint \vec{E} \cdot d\vec{S}$ sobre una superficie esférica centrada en la carga. Compare el resultado obtenido con la Ley de Coulomb.



Problema 1.2



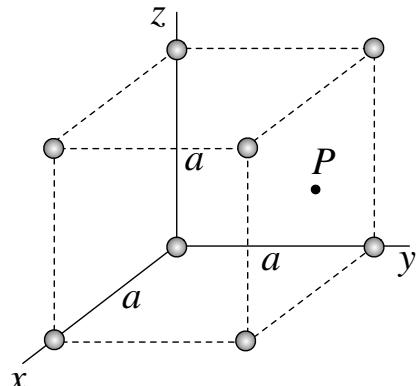
En los vértices de un triángulo equilátero de lado L se han situado tres cargas negativas $-e$. Si en el centro de gravedad del triángulo se sitúa una carga de magnitud Q , determine el valor que debe poseer esa carga para mantener el sistema en equilibrio.



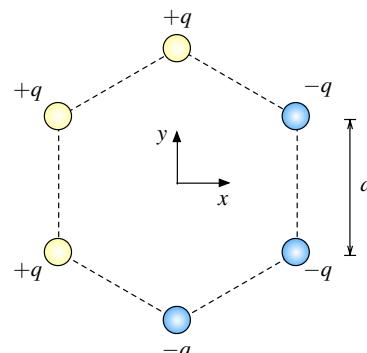
Problema 1.3  

Ocho partículas puntuales con carga q están ubicadas en los vértices de un cubo de lado a como se muestra en la figura. Llamaremos P al punto ubicado en el centro de la cara del cubo que yace sobre el plano $y = a$ (ver figura).

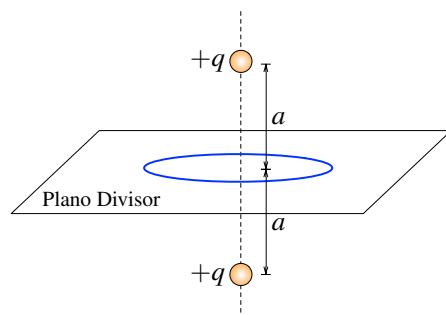
- Determine el campo eléctrico producido en el punto P por las cuatro cargas que se ubican en $y = a$.
- Encuentre el campo eléctrico en P producido por la carga ubicada en el origen.
- Calcule el campo eléctrico total en el punto P .


Problema 1.4  

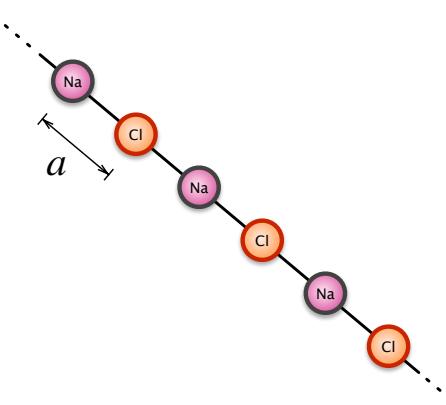
Considere seis cargas puntuales ubicadas en los vértices de un hexágono regular de lado a . Existen tres cargas positivas $+q$ y tres cargas negativas $-q$ distribuidas como se muestra en la figura. Determine el campo eléctrico y el potencial eléctrico en el centro de hexágono.


Problema 1.5  

Dos cargas puntuales positivas $+q$ están separadas por una distancia $2a$. Por el punto medio del segmento que las une se traza un plano perpendicular al mismo. El lugar de los puntos en que la fuerza sobre una carga de prueba situada en el plano es máxima es, por razón de simetría, una circunferencia. Encuentre su radio.


Problema 1.6  

La cohesión en los cristales iónicos se debe a las fuerzas eléctricas de atracción entre los iones positivos y negativos. Considere un modelo unidimensional de un cristal de Cloruro de Sodio (NaCl) que consiste en una línea recta infinita en que están colocados los iones, alternándose los iones positivos de Na y los iones negativos de Cl . La distancia entre iones vecinos es a . Los iones positivos tienen carga $+e$ y los iones negativos $-e$. Calcule la energía que hay que entregarle a un ion positivo de Na para sacarlo de su lugar y llevarlo a una distancia muy grande respecto a a .



II. Soluciones

Solución 1.1  

- a) Colocando la carga q_1 en el origen se obtiene $\vec{r}_1 = 0$. Luego llamando $q_1 = q$ y recordando que $\vec{F} = q_2 \vec{E}$, se puede obtener que

$$\vec{F} = \frac{q_2 q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(1 - \sqrt{\alpha|\vec{r}_2|})}{|\vec{r}_2|^3} \vec{r}_2 \implies \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(1 - \sqrt{\alpha|\vec{r}_2|})}{|\vec{r}_2|^3} \vec{r}_2$$

Como la dirección de la fuerza y el campo es radial podemos decir que $\vec{r}_2 = r\hat{r}$. Finalmente

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(1 - \sqrt{\alpha r})}{r^2} \hat{r}$$

- b) Basta tomar una trayectoria cerrada Γ , por ejemplo, una circunferencia de radio R alrededor de la carga. En ese caso se tiene que la curva queda parametrizada como:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} |\vec{E}| \hat{r} \cdot R d\theta \hat{\theta} = 0$$

Para el caso de la ley de Coulomb se tiene que el campo es siempre conservativo, es decir $\nabla \times \vec{E} = 0$, por lo cual $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ para cualquier camino cerrado Γ . Se concluye que la ley de Coulomb y la ley encontrada experimentalmente entregan el mismo resultado.

- c) Para este caso hay que calcular una integral de flujo. Por simplicidad se elige una esfera de radio R centrada en el origen. Luego el flujo sobre su superficie es

$$\iint_{\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(1 - \sqrt{\alpha R})}{R^2} \hat{r} R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \hat{r} = \frac{q}{\epsilon_0} (1 - \sqrt{\alpha R})$$

Para el caso de la ley de Coulomb, se sabe que esa integral es conocida ya que coincide con la Ley de Gauss, es decir

$$\iint_{\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Para la nueva ley se tiene que difiere en un factor $(1 - \sqrt{\alpha R})$, además el flujo no es constante como en la Ley de Gauss y depende de la superficie esférica que se tome.



Solución 1.2 

En este problema se aprecia una simetría con respecto a la carga Q , ya que todas las cargas negativas sienten la misma fuerza de atracción/repulsión. Por ejemplo, haciendo el DCL a la carga superior se obtiene lo siguiente

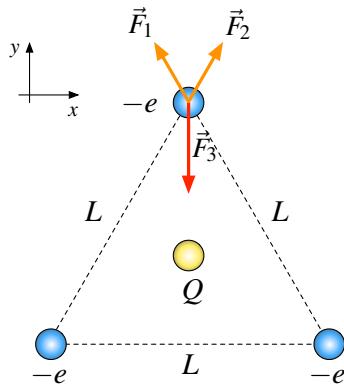


Figura 1.1: DCL Sobre la Carga Superior

Las fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 son repulsivas (generadas por las otras cargas negativas), mientras que la fuerza \vec{F}_3 generada por la carga Q positiva es atractiva. Usando el sistema de referencia de la Figura 1.1 y la Ley de Coulomb, es posible descomponer las fuerzas de la siguiente forma

$$\vec{F}_1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 L^2} \left(-\hat{x} \cos \frac{\pi}{3} + \hat{y} \sin \frac{\pi}{3} \right), \quad \vec{F}_2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 L^2} \left(\hat{x} \cos \frac{\pi}{3} + \hat{y} \sin \frac{\pi}{3} \right), \quad \vec{F}_3 = -\frac{eQ}{4\pi\epsilon_0 d^2} \hat{y}$$

donde d es la distancia desde cualquier vértice al centro del triángulo. Usando el Teorema del Coseno, es posible despejar d como

$$L^2 = d^2 + d^2 - 2d^2 \cos \frac{2\pi}{3} \implies d^2 = \frac{L^2}{3}$$

por lo tanto la fuerza total vale

$$\vec{F}_T = \left(\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 L^2} \sin \frac{\pi}{3} - \frac{3eQ}{4\pi\epsilon_0 L^2} \right) \hat{y}$$

Dado que se desea el sistema en equilibrio se impone $\vec{F}_T = 0$, obteniéndose que

$$\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 L^2} \sin \frac{\pi}{3} - \frac{3eQ}{4\pi\epsilon_0 L^2} = 0 \implies Q = \frac{e\sqrt{3}}{3} = \frac{e}{\sqrt{3}}$$



Distribuciones Continuas de Carga

I. Problemas Propuestos

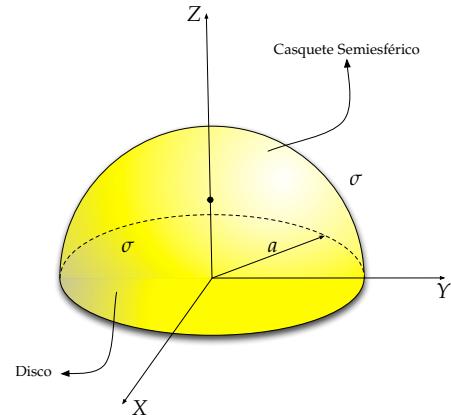
Problema 2.1



Un disco de radio a completa un casquete semiesférico de radio a . Ambas superficies tienen densidad de carga uniforme σ . Calcule el campo eléctrico en un punto $\frac{a}{2}$ sobre el eje Z .

Hint:

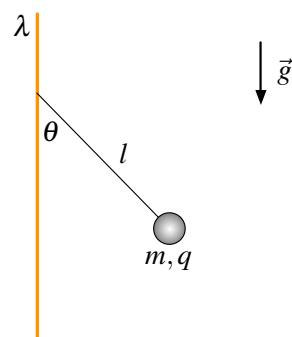
$$\frac{d}{dx} \left[\frac{r - z \cos(x)}{z^2 \sqrt{r^2 - 2rz \cos x + z^2}} \right] = \frac{(z - r \cos x) \sin x}{(r^2 \sin^2 x + (z - r \cos x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$



Problema 2.2



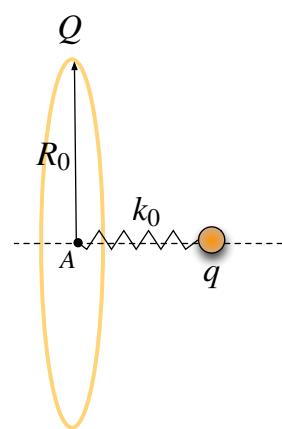
Considere una barra infinita de densidad de carga lineal λ . Sobre esta barra se cuelga un péndulo ideal de largo l y una masa puntual m y carga q , bajo la influencia del campo gravitatorio como se ilustra en la figura. Encuentre el ángulo de equilibrio del péndulo y determine cuál es ángulo límite cuando el valor de q crece infinitamente.



Problema 2.3



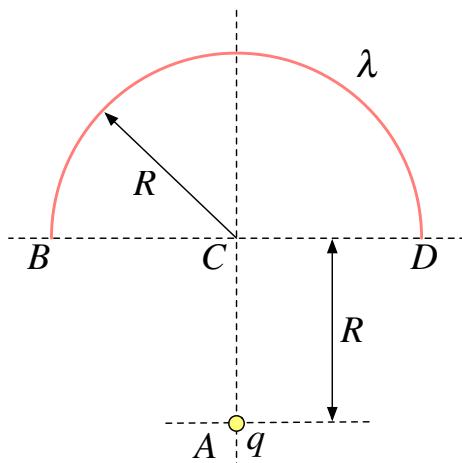
Un anillo de radio R_0 tiene una carga Q positiva, la cual está distribuida de manera uniforme sobre el anillo, como se ilustra en la figura. Considere una carga puntual de carga negativa q ($q < 0$) y masa m , la cual es depositada en reposo sobre el eje central del anillo cerca del centro representado por el punto A , además la carga está soldada a un resorte ideal de constante elástica k_0 y largo natural cero con extremo fijo en el punto A . Calcule la frecuencia de oscilación partícula puntual. Indicación: Considere que la partícula se mueve sobre el eje central del anillo.



Problema 2.4  

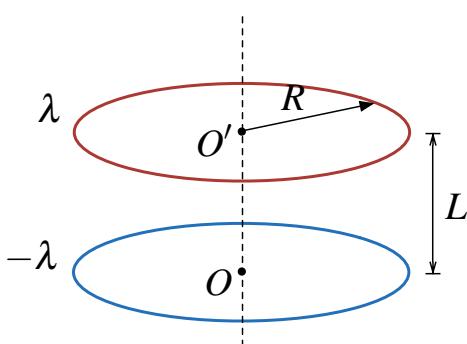
Una densidad de carga lineal λ está repartida de forma homogénea a lo largo de un semicírculo BD centrada en C y de radio R . Una carga puntual q está ubicada en punto A como se indica en la Figura. ($CA = R$).

- Calcule el potencial eléctrico en el punto C , $V(C)$.
- Por argumentos de simetría, determine la dirección del campo eléctrico $\vec{E}(C)$. Calcule $\vec{E}(C)$.
- Determine la relación entre λ y q tal que $\vec{E}(C) = 0$

**Problema 2.5**  

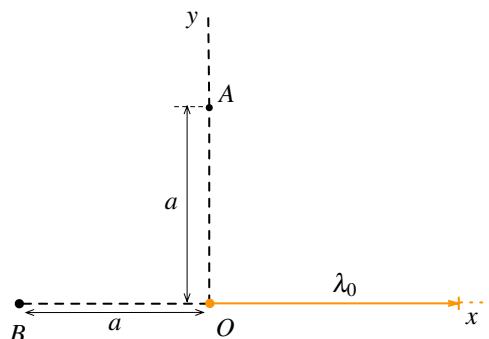
Se tienen dos anillos coaxiales del mismo radio a , contenidos en planos paralelos y separados entre sí una distancia L . Uno de los anillos tiene densidad de carga uniforme $+\lambda$ y el otro $-\lambda$.

- Calcule el campo eléctrico en el eje común de los anillos, o sea en el eje $O'O$ en la figura.
- Calcule la diferencia de potencial entre los centros O' y O de los anillos.

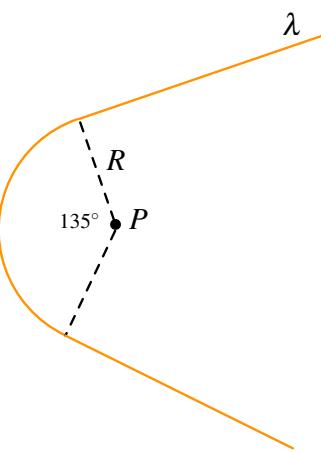
**Problema 2.6**  

Un alambre semi-infinito cargado yace sobre el semieje positivo x . El alambre posee una densidad lineal homogénea λ_0 .

- Determine el valor del campo eléctrico en el punto A de la figura el cual está ubicado sobre el eje y a una distancia a del origen.
- Determine el valor del campo eléctrico en el punto B de la figura el cual está ubicado sobre el eje x a una distancia a del origen.

**Problema 2.7**   

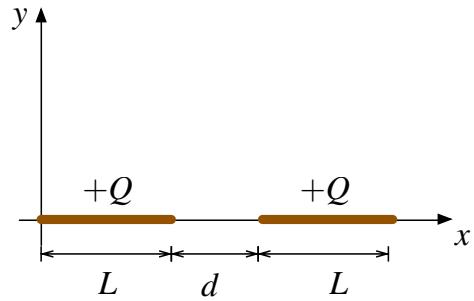
Considere un alambre muy delgado como el de la figura, éste esta compuesto por dos rectas infinitas y una arco de círculo de 135° . El alambre tiene una densidad lineal de carga λ constante. Encuentre el campo producido en el punto P .



Problema 2.8   

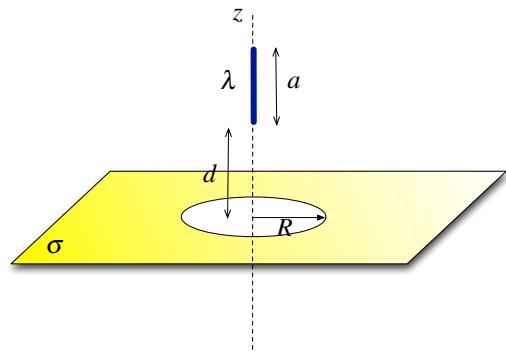
Dos barras delgadas e iguales de longitud L y carga total Q distribuida uniformemente, están situadas sobre el eje x , separadas una distancia d como se indica en la figura.

- Calcule el campo eléctrico producido por la carga de la izquierda para un punto situado sobre el eje x , es decir $\vec{E}(x)$.
- Calcule la fuerza que ejerce la carga de la izquierda sobre la carga de la derecha.
- Pruebe que si $d \gg L$ la fuerza entre las barras equivale a la de dos cargas puntuales de carga Q . Puede ser útil la aproximación $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$ si $|x| \ll 1$.

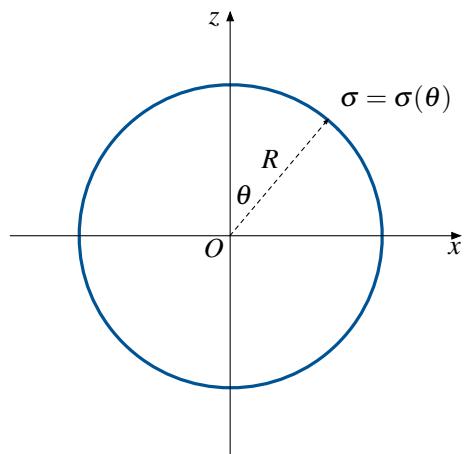
**Problema 2.9**  

Considere un plano infinito con carga superficial $\sigma > 0$. El plano contiene un orificio circular de radio R en su superficie.

- Calcule el campo eléctrico en cualquier punto del eje z .
- A lo largo del eje del orificio se coloca una línea de carga de largo a , densidad lineal $\lambda > 0$ y cuyo punto más próximo se encuentra a una distancia d del centro del orificio. Calcule la fuerza de repulsión que experimenta la línea de carga.

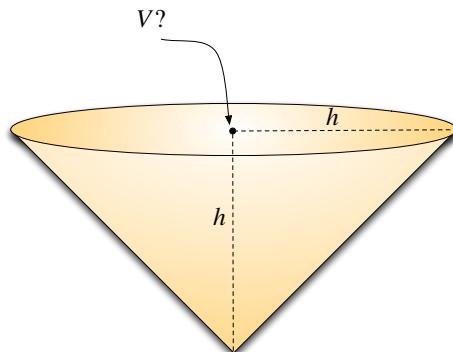
**Problema 2.10**  

Calcular el campo electrostático que genera un casquete esférico de centro O y radio R que porta una densidad superficial de carga $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ (en coordenadas esféricas) en su mismo centro.



Problema 2.11 ★ ✓

Considere un cono de altura h y radio basal h . La superficie (manto) del cono está cargada uniformemente con una densidad σ_0 . Calcule el potencial en el centro de la base del cono.

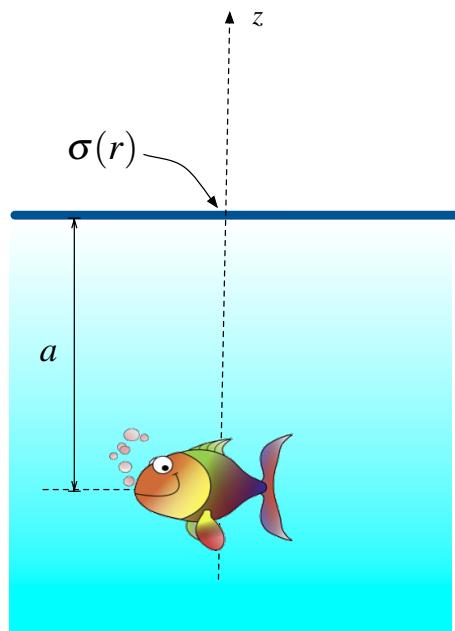
**Problema 2.12** ♦ ✓

La contaminación por compuestos químicos de un lago de forma circular ha dejado su densidad superficial de carga que, expresada en coordenadas polares se puede escribir como

$$\sigma(r) = -\frac{\sigma_0 a^3}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

donde “ a ” y σ_0 son constantes conocidas. Aquí el origen de coordenadas es el centro del lago. Se pide:

- Determine el campo eléctrico que afectará la vida en el lago. Suponga que los peces sólo viven en las cercanías del centro del lago (eje z) y a profundidades mucho menores que la extensión del lago, por lo cual éste puede considerarse infinito.
- Suponga que debido a esta contaminación, un pez adquiere una carga Q . Determine el trabajo electrostático que debe efectuar el pez para llegar al centro del lago si se encontraba nadando a una distancia “ a ” profundidad sobre el eje z de la Figura.

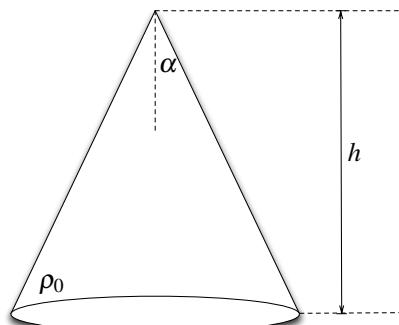


Hint:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{-(a^2 + 2r^2 + z^2)}{(a^2 - z^2)\sqrt{(a^2 + r^2)(z^2 + r^2)}} \right] = \frac{r}{((a^2 + r^2)(z^2 + r^2))^{\frac{3}{2}}}$$

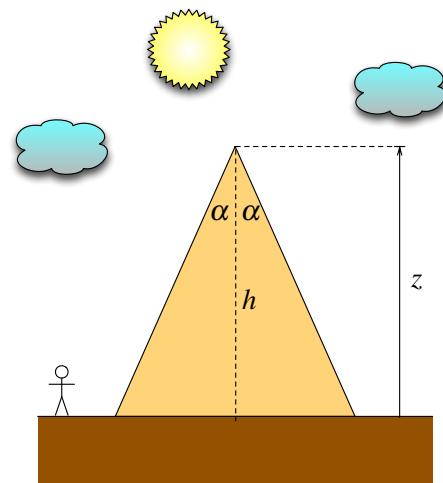
Problema 2.13 ♦ ✓

Calcule el campo eléctrico creado por un cono macizo de altura h y semi ángulo α , uniformemente cargado con una densidad volumétrica de carga ρ_0 en su vértice.



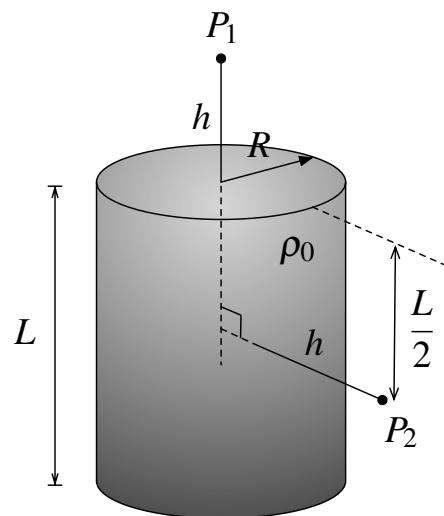
Problema 2.14 ★ ✓

En una primera aproximación, una montaña puede ser modelada como un cono de altura h y semi ángulo α de masa total M distribuida uniformemente. Geofísicos han determinado que la gravedad en su cima tiene un valor $\vec{g}_1 = -g_1 \hat{z}$ la cual está a una distancia h sobre el nivel suelo. Los mismos científicos saben que si la montaña no existiese el campo gravitacional terrestre en el mismo punto sería $\vec{g}_0 = -g_0 \hat{z}$. Determine $\Delta\vec{g} = \vec{g}_1 - \vec{g}_0$. (Hint: Puede ser útil el Problema 2.13)

**Problema 2.15** ♦ ✓ ⓘ

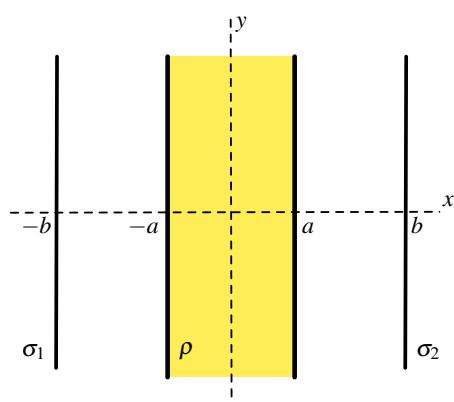
Considere un cilindro macizo de radio R y largo L como se muestra en la Figura. El cilindro posee una densidad de carga volumétrica ρ_0 . Determine

- El módulo del campo eléctrico en un punto P_1 ubicado una distancia h sobre su base superior y sobre el eje del cilindro.
- El módulo del campo eléctrico en un punto P_2 ubicado una distancia $h > R$ del eje cilindro, justo a la mitad de la altura del cilindro.

**Problema 2.16** ♦ ✓

Un bloque infinito posee una densidad de carga uniforme ρ que ha sido localizado entre $x = -a$ y $x = a$. Este bloque es infinito en la dirección y y z (saliendo de página). Dos planos infinitos son localizados en $x = -b$ y $x = b$, los cuales poseen una densidad de carga σ_1 y σ_2 , respectivamente. Al medir el campo eléctrico se observa que:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & x < -b \\ +E_0 \hat{x} & -b < x < -a \\ -E_0 \hat{x} & a < x < b \\ 0 & x > b \end{cases}$$



- Calcule la densidad de carga ρ del bloque infinito.
- Calcule las densidades de carga superficiales σ_1 y σ_2 de los planos a la izquierda y derecha del bloque respectivamente.



II. Soluciones

Solución 2.1

Todos los problemas donde se pida determinar el campo eléctrico se pueden abordar mediante la definición. Sin embargo, no en todos los problemas siempre será fácil usar esta técnica (ya que se pueden llegar a integrales bastante complejas). En general en todos los problemas donde se pida determinar el campo eléctrico en un punto o en un eje (y no en todo el espacio) se pueden abordar por definición.

Dado que este problema cumple con esa característica, se debe tener claro como parametrizar la superficie para poder usar la definición. Sin embargo, no es claro que haya una fórmula matemática con que se pueda representar de una sola vez a la unión casquete-disco. La parametrización anterior se ve solucionada usando el principio de superposición; primero se calcula el campo eléctrico generado por el disco y luego el del casquete semiesférico, para luego sumar ambos resultados y obtener el campo final en el punto.

- Campo generado por el disco.

Usando definición:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot dq$$

Se debe tener claro que:

- \vec{r} : Es el vector que señala dónde se quiere conocer el campo eléctrico (puede ser un punto en específico, un eje, una superficie, etc.).
- \vec{r}' : Es el vector que señala dónde está lo que genera el campo eléctrico. Este vector es variable y no representa un punto por sí solo en distribuciones continuas de carga ya que parametriza una línea/superficie/volumen.
- dq : Es el diferencial de carga, y puede valer $dq = \lambda dl = \sigma dS = \rho dV$, eventualmente las densidades de carga λ, σ y ρ no necesariamente son constantes y podrían depender del vector \vec{r}' (ie. depende de alguna variable de integración).
- Ω : Es el espacio de integración de la línea/área/volumen de lo que está generando el campo eléctrico. Establece los límites de todas las integrales.

Luego, aplicado lo anterior al disco de radio a se tiene que (en coordenadas cilíndricas):

$$\vec{r} = (0, 0, a) = \frac{a}{2} \hat{z}$$

$$\vec{r}' = r\hat{r}$$

$$dq = \sigma dS$$

Donde los límites de integración serán $r \in [0, a]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ (¡qué es la parametrización del disco!).



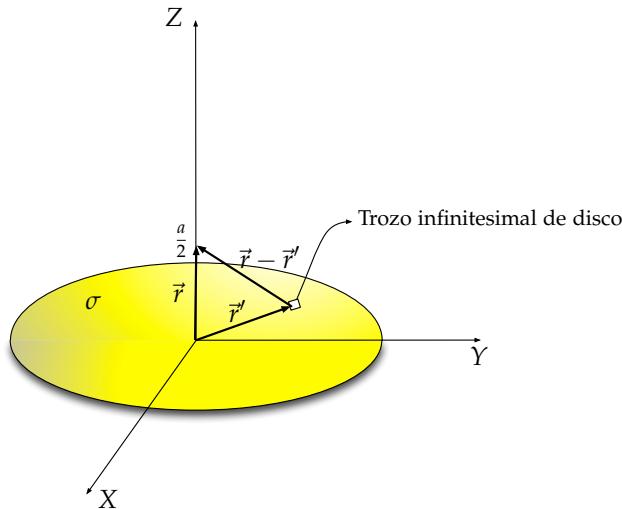


Figura 2.1: Campo Eléctrico generado por un disco.

Calculando la integral:

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Omega} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma dS \\
 &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\frac{a}{2}\hat{z} - r\hat{r}}{\left|\frac{a}{2}\hat{z} - r\hat{r}\right|^3} r dr d\theta \\
 &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\frac{a}{2}\hat{z} - r\hat{r}}{\left((\frac{a}{2})^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} r dr d\theta \\
 &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\frac{a}{2}\hat{z} - r(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y})}{\left((\frac{a}{2})^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} r dr d\theta
 \end{aligned}$$

En este caso se separará por cada componente del vector \vec{E} , de modo que

$$\begin{aligned}
 |\vec{E}_x| &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{-r \cos\theta}{\left((\frac{a}{2})^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} r dr d\theta \\
 &= -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta}_{=0} \cdot \int_0^a \frac{r^2}{\left((\frac{a}{2})^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} dr
 \end{aligned}$$

Dado que la integral del coseno en un período es nula, se tiene que el campo eléctrico no tiene componente según x . Análogamente, sucede lo mismo al momento de calcular $|\vec{E}_y|$, por lo que



tampoco existe una coordenada según y . Luego

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\frac{a}{2}\hat{z}}{\left((\frac{a}{2})^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} r dr d\theta \\ &= \frac{\sigma a \hat{z}}{8\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^a \frac{r}{\left((\frac{a}{2})^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} dr \\ &= \frac{\sigma a \hat{z}}{4\epsilon_0} \cdot \int_0^a \frac{r}{\left((\frac{a}{2})^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} dr\end{aligned}$$

Nótese que $\frac{d}{dr} \left[-\frac{1}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + r^2}} \right] = \frac{r}{\left((\frac{a}{2})^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ por lo tanto

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\sigma a \hat{z}}{4\epsilon_0} \cdot \left. -\frac{1}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + r^2}} \right|_{r=0}^{r=a} \\ &= \frac{\sigma a \hat{z}}{4\epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + a^2}} + \frac{1}{\frac{a}{2}} \right] \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \hat{z}\end{aligned}$$

■ Campo generado por el semicasquete

Al igual que el caso anterior debe procederse a calcular los vectores \vec{r} , \vec{r}' y dq , en este caso se tiene que (en coordenadas esféricas):

$$\vec{r} = (0, 0, a) = \frac{a}{2} \hat{z}$$

$$\vec{r}' = a\hat{r}$$

$$dq = \sigma dS = \sigma a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Donde los límites de integración serán $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Omega} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma dS \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{a}{2}\hat{z} - rr\hat{r}}{\left|\frac{a}{2}\hat{z} - ar\hat{r}\right|^3} a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{a}{2}\hat{z} - a(\sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z})}{\left|\frac{a}{2}\hat{z} - a(\sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z})\right|^3} a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{a}{2}\hat{z} - a(\sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z})}{(a^2 \sin^2 \theta + (\frac{a}{2} - a \cos \theta)^2)^{\frac{3}{2}}} a^2 \sin \theta d\theta d\varphi\end{aligned}$$



En este caso vuelve a ocurrir lo mismo que pasó cuando se calculó el campo que genera un disco, ya que se anulan las componentes en x e y debido a que aparecen un $\cos\varphi$ y $\sin\varphi$ integrados en un período.

En general, uno también puede argumentar por simetría que algunas componentes del campo eléctrico son nulas, no siempre es necesario el cálculo (siempre se llegará a funciones sinusoidales integradas en un período).

Por lo tanto el valor del campo generado por el semicasquete es:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\sigma \hat{z}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{a}{2} - a \cos\theta}{(a^2 \sin^2\theta + (\frac{a}{2} - a \cos\theta)^2)^{\frac{3}{2}}} a^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{\sigma a^2 \hat{z}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\frac{a}{2} - a \cos\theta) \sin\theta}{(a^2 \sin^2\theta + (\frac{a}{2} - a \cos\theta)^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta \\ &= \frac{\sigma a^2 \hat{z}}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi \cdot \left. \frac{a - \frac{a}{2} \cos\theta}{(\frac{a}{2})^2 \sqrt{(\frac{a}{2})^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot a \cdot \cos\theta + a^2}} \right|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2\sigma \hat{z}}{\epsilon_0} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + a^2}} - \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2}} \right) \\ &= \frac{2\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - 1 \right) \hat{z}\end{aligned}$$

Dado los resultados anteriores, se procede a sumarlos para encontrar el campo final en el punto

$$\vec{E}_{total} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \hat{z} + \frac{2\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - 1 \right) \hat{z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{7}{\sqrt{5}} - 3 \right) \hat{z}$$

Solución 2.2

Para encontrar el ángulo de equilibrio, se debe considerar que la suma de fuerzas que actúan sobre la masa m deben anularse, por consiguiente se hace un DCL para deducir las ecuaciones de movimiento.

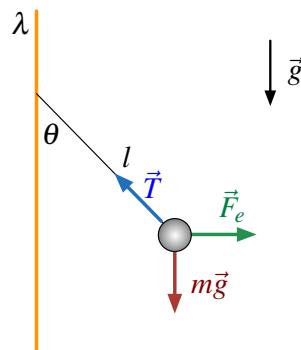


Figura 2.2: DCL para masa m .



Con lo anterior las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_e - T \sin \theta = 0 \\ m\ddot{y} &= T \cos \theta - mg = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos \theta} \end{aligned}$$

Como $\vec{F}_e = q\vec{E}$, se calculará el campo \vec{E} a una distancia $d = l \sin \theta$ producido por la barra infinita de densidad de carga lineal λ . Considerando que

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l^{\infty} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq$$

Donde $\vec{r} = d\hat{x} = l \sin \theta \hat{x}$ correspondiente a la posición donde se quiere calcular el campo, $\vec{r}' = z\hat{z}$ correspondiente a quien genera el campo, y $dq = \lambda dz$ dónde $z \in (-\infty, +\infty)$. Además se considera que por la simetría del problema, el campo será el mismo independiente de la posición en \hat{z} de la masa, por lo que \vec{E} sólo tiene componente en \hat{x} . Con lo anterior la ecuación anterior queda:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l \sin \theta \hat{x}}{((l \sin \theta)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \lambda dz \\ &= \frac{\lambda l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \hat{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{((l \sin \theta)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Se hace el cambio de variable $z = (l \sin \theta) \tan \phi$, lo cual implica que $dz = (l \sin \theta) \sec^2 \phi d\phi$, y los límites de integración cambian de $z \in (-\infty, +\infty) \Rightarrow \phi \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$. Luego:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\lambda l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \hat{x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{(l \sin \theta) \sec^2 \phi d\phi}{((l \sin \theta)^2 + (l \sin \theta)^2 \tan^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\lambda l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \hat{x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{(l \sin \theta) \sec^2 \phi d\phi}{(l \sin \theta)^3 (1 + \tan^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 (l \sin \theta)} \hat{x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 \phi d\phi}{\sec^3 \phi} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 (l \sin \theta)} \hat{x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \phi d\phi \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 (l \sin \theta)} \hat{x} \sin \phi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (l \sin \theta)} \hat{x} \end{aligned}$$

Como ya se conoce el campo, luego $\vec{F}_e = q \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (l \sin \theta)} \hat{x}$. Dicho valor en las ecuaciones de movimiento y despejando T , se llega a:

$$m\ddot{x} = F_e - T \sin \theta = q \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (l \sin \theta)} - \frac{mg}{\cos \theta} \sin \theta = 0 \Rightarrow \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 l m g} = qK$$



Se usa la identidad trigonométrica $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$:

$$\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} = qK \implies \cos^2 \theta + qK \cos \theta - 1 = 0 \implies \cos \theta = \frac{-qK \pm \sqrt{(qK)^2 + 4}}{2}$$

Como se espera que $\theta \in (0, \pi/2)$ (el péndulo no dará la vuelta completa), $\cos \theta > 0$, luego se escoge la solución positiva. Finalmente si $q \rightarrow \infty$, se cumple que $\sqrt{(qK)^2 + 4} \approx qK$, entonces

$$\cos \theta = \frac{-qK + qK}{2} = 0$$

El resultado anterior implica que $\theta = \frac{\pi}{2}$, esto es esperable ya que al ser una carga positiva se alejará lo más posible de quién genere el campo y eso de logra a la mayor distancia, es decir, con el ángulo encontrado.

Solución 2.3

La fuerza sobre la carga q es $\vec{F}_q = \vec{F}_e + \vec{F}_r$ donde F_e corresponde a la fuerza que el anillo ejerce sobre q , y F_r , la fuerza que ejerce el resorte.

La fuerza que ejerce el campo eléctrico que genera el anillo sobre la carga q está dada por

$$\vec{F}_e = q\vec{E}_A$$

Entonces el campo eléctrico que genera el anillo en su eje es:

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq$$

Donde $\vec{r} = z\hat{z}$, $\vec{r}' = R_0\hat{r}$ (en coordenadas cilíndricas) y $dq = \lambda R_0 d\theta$ con $\theta \in (0, 2\pi)$. Además, dado que la carga total en el anillo es Q y se distribuye homogéneamente, λ se puede calcular como:

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{2\pi R_0}$$

con lo anterior:

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{z\hat{z} - R_0\hat{r}}{(z^2 + R_0^2)^{\frac{3}{2}}} \lambda R_0 d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^{2\pi} \frac{z\hat{z}}{(z^2 + R_0^2)^{\frac{3}{2}}} \lambda R_0 d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{R_0\hat{r}}{(z^2 + R_0^2)^{\frac{3}{2}}} \lambda R_0 d\theta \right)$$

Nótese que por la simetría del anillo la segunda integral se anulará. También se puede justificar notando que $\hat{r} = \sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}$, y como la integral de $\sin \theta$ y $\cos \theta$ se anulan en un intervalo entre $(0, 2\pi)$, el segundo sumando se anula. Luego:

$$\vec{E}_A = \frac{\lambda R_0 z\hat{z}}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R_0^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\lambda R_0 z\hat{z}}{2\epsilon_0(z^2 + R_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Finalmente, sustituyendo λ , se concluye el valor de \vec{F}_e :

$$\vec{F}_e = q\vec{E}_A = q \frac{Q}{2\pi R_0} \frac{R_0 z\hat{z}}{2\epsilon_0(z^2 + R_0^2)^{\frac{3}{2}}} \implies \vec{F}_e = \frac{qQ z\hat{z}}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$



Nótese que como $q < 0$ esta fuerza apunta en la dirección $-\hat{z}$.

Por otro lado, la fuerza elástica para una distancia z (notar que el resorte se mueve sólo en el eje), es la que genera el resorte de constante k_0 , la cual está dada por

$$\vec{F}_r = -k_0 z \hat{z}$$

Dado los cálculos anteriores, la fuerza total sobre q es:

$$\vec{F}_q = \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R_0^2)^{\frac{3}{2}}} - k_0 \right) z \hat{z}$$

Por otra parte, la fuerza en el eje \hat{z} esta dada por:

$$\vec{F}_q = m \ddot{z} \hat{z}$$

Si se desea encontrar la frecuencia para pequeñas oscilaciones, consideramos que los valores que toma $z \ll 1$, con lo que $z^2 \approx 0$. Finalmente:

$$m \ddot{z} = \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R_0^3} - k_0 \right) z \implies \ddot{z} + \frac{1}{m} \left(-\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R_0^3} + k_0 \right) z = 0$$

y como la ecuación de la frecuencia en pequeñas oscilaciones cumple $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \left(-\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R_0^3} + k_0 \right)}$$

Solución 2.4

- a) Es necesario calcular el potencial generado por la semicircunferencia y el creado por la carga puntual. Para el caso de la semicircunferencia se puede calcular usando la expresión

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

en este caso $\vec{r} = 0$ y $\vec{r}' = R\hat{r}$ con $\theta \in [0, \pi]$ y $dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$. Luego

$$V_{alambe}(0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{R d\theta}{| -R\hat{r}|} = \frac{\lambda}{4\epsilon_0}$$

Adicionalmente es sabido que el potencial que genera una carga puntual esta dado por

$$V_{carga}(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Por lo tanto el potencial pedido es la superposición de los resultados anteriores

$$V(C) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{\lambda}{4\epsilon_0}$$



- b) Por simetría las componentes en horizontales se anulan en el punto C , por ende en ese punto sólo existe la superposición de componentes verticales. El campo generado por el alambre vale

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq$$

nuevamente se tiene que $\vec{r} = 0$ y $\vec{r}' = R\hat{r}$ con $\theta \in [0, \pi]$ y $dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$, por lo que

$$\vec{E}_{alambre}(0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{(0 - R\hat{r})Rd\theta}{| - R\hat{r}|^3} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^\pi [\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}] d\theta = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}\hat{y}$$

al igual que la parte anterior el campo eléctrico generado por la carga está dado por

$$\vec{E}_{carga}(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{y}$$

Finalmente el campo total es

$$\vec{E}(C) = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \right) \hat{y}$$

- c) Imponiendo $\vec{E}(C) = 0$, se tiene que

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \implies q = 2R\lambda$$

Solución 2.5

- a) Inicialmente determinaremos el potencial que genera un anillo por si sólo y luego se usará el hecho que $\vec{E} = -\nabla V$ para determinar el campo eléctrico. De este modo el potencial de un sólo anillo de radio a y densidad homogénea λ y con su centro en el origen provoca un potencial dado por:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

donde $\vec{r} = z\hat{z}$, $\vec{r}' = a\hat{r}$ y $dq = \lambda ad\theta$ con $\theta \in [0, 2\pi]$. Por ende

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda ad\theta}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0 \sqrt{z^2 + a^2}}$$

Extrapolando este resultado al problema se tiene que los anillos están a distancia L , de modo que suponiendo que el origen está en el punto de medio de su separación, el potencial en el eje es

$$V(z) = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0 \sqrt{(z - \frac{L}{2})^2 + a^2}} - \frac{\lambda a}{2\epsilon_0 \sqrt{(z + \frac{L}{2})^2 + a^2}} = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(z - \frac{L}{2})^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z + \frac{L}{2})^2 + a^2}} \right)$$

Dado que

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$



Por lo que finalmente

$$\vec{E} = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \left(\frac{z - \frac{L}{2}}{\left((z - \frac{L}{2})^2 + a^2 \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{z + \frac{L}{2}}{\left((z + \frac{L}{2})^2 + a^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{z}$$

b) Considerando lo obtenido en a)

$$V(O) = V\left(z = -\frac{L}{2}\right) = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + a^2}} \right)$$

$$V(O') = V\left(z = \frac{L}{2}\right) = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{L^2 + a^2}} - \frac{1}{a} \right)$$

Por lo que la diferencia vale:

$$V(O) - V(O') = \frac{\lambda a}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + a^2}} \right)$$

Solución 2.6 P ✓

a) Recordando, que el campo eléctrico producido por una distribución de carga $dq(\vec{r}')$ vale:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq(\vec{r}')$$

Luego se tiene que: $\vec{r} = a\hat{y}$; $\vec{r}' = x\hat{x}$; $dq = \lambda dx$, por lo tanto:

$$\vec{E}(a\hat{y}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\hat{y} \int_0^\infty \frac{adx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} - \hat{x} \int_0^\infty \frac{x dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Realizando el cambio de variable:

$$x = a \tan \theta \implies dx = a \sec^2 \theta d\theta$$

Resulta:

$$\vec{E}(a\hat{y}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\hat{y} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \sec^2 \theta d\theta}{a^3 \sec^3 \theta} - \hat{x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \tan \theta \sec^2 \theta d\theta}{a^3 \sec^3 \theta} \right)$$

$$\vec{E}(a\hat{y}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\hat{y} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta - \hat{x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \right)$$

Obteniendo, finalmente que:

$$\vec{E}(a\hat{y}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\hat{y} - \hat{x})$$



b) Nuevamente usando la definición se tiene que $\vec{r} = -a\hat{x}$; $\vec{r}' = x\hat{x}$; $dq = \lambda dx$

$$\vec{E}(-a\hat{x}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\hat{x} \int_0^\infty \frac{-a-x}{| -a-x |^3} dx \right)$$

Manejando algebraicamente la expresión se obtiene que

$$\vec{E}(-a\hat{x}) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^2} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \hat{x} \cdot \left[-\frac{1}{x+a} \right]_0^\infty = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \hat{x}$$

Solución 2.7

Separando el problema en dos partes:

- i) Campo producido por las rectas semi-infinitas: Sean $(\hat{x}'; \hat{y}')$ el sistema de referencia para la recta superior en la figura, y $(\hat{x}''; \hat{y}'')$ para la recta inferior, orientados de manera que coincidan con el sistema de referencia de la parte a) entonces:

$$\vec{E}_1 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (-\hat{x}' + \hat{y}') \quad \vec{E}_2 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (-\hat{x}'' + \hat{y}'')$$

Ahora descomponiendo en los ejes \hat{x} e \hat{y} (\hat{x} horizontal hacia la derecha, \hat{y} vertical hacia arriba):

$$\hat{x}' = \cos \frac{\pi}{8} \hat{x} + \sin \frac{\pi}{8} \hat{y}$$

$$\hat{y}' = \cos \frac{3\pi}{8} \hat{x} - \sin \frac{3\pi}{8} \hat{y}$$

$$\hat{x}'' = \cos \frac{\pi}{8} \hat{x} - \sin \frac{\pi}{8} \hat{y}$$

$$\hat{y}'' = \cos \frac{3\pi}{8} \hat{x} + \sin \frac{3\pi}{8} \hat{y}$$

Como $\cos \frac{3\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{8}$, y superponiendo los campos, entonces:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{x} \left(-\cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} \right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{x} \left(-\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \right) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{x} \left(\sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{8} \right)$$

Otra forma mucho más rápida de resolver esta parte es la siguiente:

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Entonces, debido a la simetría con respecto al eje x , las componentes en \hat{y} de los campos producidos por las dos rectas se anulan, y se obtiene que:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -2|\vec{E}_1| \cos \frac{3\pi}{8} = -\frac{\lambda \hat{x}}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 R} \cos \frac{3\pi}{8}$$



- ii) Campo producido por el sector circular: Calculando por definición, de manera similar a la parte anterior:

$$\vec{E}_3(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq(\vec{r}')$$

Con: $\vec{r} = 0$; $\vec{r}' = R\hat{r}$; $dq = \lambda R d\theta$. Entonces:

$$\vec{E}_3(0) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{\frac{5\pi}{8}}^{\frac{11\pi}{8}} \hat{r} d\theta$$

Descomponiendo \hat{r} en los ejes cartesianos, y por la paridad e imparidad del coseno y seno, la integral en \hat{y} se anula (también se puede comprobar esto último debido a la simetría con respecto a \hat{x}) resulta:

$$\vec{E}_3(0) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{\frac{5\pi}{8}}^{\frac{11\pi}{8}} \hat{x} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda \hat{x}}{2\pi\epsilon_0 R} \int_0^{\frac{3\pi}{8}} \cos \theta d\theta$$

Luego:

$$\vec{E}_3(0) = \frac{\lambda \hat{x}}{2\pi\epsilon_0 R} \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\lambda \hat{x}}{2\pi\epsilon_0 R} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\lambda \hat{x}}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\sin \frac{5\pi}{8} - \sin \frac{11\pi}{8} \right)$$

Finalmente, sumando todos los campos, se obtiene que el campo eléctrico total en el punto P vale:

$$\vec{E}_T = \frac{\lambda \hat{x}}{\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{2} \sin \frac{3\pi}{8} - \frac{\cos \frac{3\pi}{8}}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\lambda \hat{x}}{2\pi\epsilon_0 R} \left(\cos \frac{\pi}{8} - \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{8} \right)$$

Solución 2.8

- a) Primero debe usarse el campo eléctrico por definición para hallar una expresión

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

En la fórmula anterior $\vec{r} = x\hat{x}$, $\vec{r}' = x'\hat{x}$ y $dq = \lambda dx'$ con $x' \in [0, L]$ donde $\lambda = \frac{Q}{L}$.

Analizando por intervalos

- $x > L$

$$\vec{E}(x) = \frac{\lambda \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{x - x'}{(x - x')^3} dx' = \frac{\lambda \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dx'}{(x - x')^2} = \frac{\lambda \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{x - x'} \Big|_0^L = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x - L} - \frac{1}{x} \right) \hat{x}$$

- $x < 0$

Análogo a lo anterior:

$$\vec{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x - L} - \frac{1}{x} \right) \hat{x}$$



- $0 \leq x \leq L$

En este caso el campo eléctrico es infinito ya se cae en un punto de carga infinita. Esto puede verse en la integral, ya que si $x = x'$ diverge.

b) En este caso un diferencial de fuerza está dado por $d\vec{F} = \vec{E}(x)dq = \vec{E}(x)\lambda dx$, por lo tanto

$$\vec{F} = \frac{\lambda^2 \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \int_{L+d}^{2L+d} \left(\frac{1}{x-L} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{\lambda^2 \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{L+d}{d}\right) - \ln\left(\frac{2L+d}{L+d}\right) \right] = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{(L+d)^2}{d(2L+d)}\right) \hat{x}$$

c) Para la última parte debe notarse lo siguiente

$$\ln\left(\frac{(L+d)^2}{d(2L+d)}\right) = \ln\left(\frac{L^2 + 2Ld + d^2}{2Ld + d^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{L^2}{2Ld + d^2}\right) \approx \ln\left(1 + \frac{L^2}{d^2}\right) \approx \frac{L^2}{d^2}$$

De lo anterior se termina deduciendo que

$$\vec{F} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\lambda L)^2}{d^2} \hat{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{d^2} \hat{x}$$

Que coincide con la fuerza que sienten dos cargas puntuales de carga $Q = \lambda L$.

Solución 2.15

a) En este caso, se usará el resultado conocido del campo eléctrico que genera un disco de radio R y densidad de carga σ , el cual corresponde a

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \hat{z}$$

Ahora, usando este resultado se considerará $z = 0$ en el punto P_1 creciendo hacia arriba. A partir de esto, el cilindro está compuesto por la superposición infinitesimal de discos (uno encima del otro). El aporte de campo eléctrico $d\vec{E}$ que provoca uno de estos discos de ancho infinitesimal es

$$d\vec{E} = \frac{\rho_0 \cdot dz}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \hat{z}$$

Por lo que el campo total en el punto está dado por

$$\vec{E}(P_1) = \frac{\rho_0 \hat{z}}{2\epsilon_0} \int_{-(L+h)}^{-h} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) dz = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left[L - (\sqrt{h^2 + R^2} - \sqrt{(L+h)^2 + R^2}) \right] \hat{z}$$

b) Para resolver este problema, se usará una técnica de analogías. Este problema es un poco difícil planteando las integrales correspondientes, pero se puede usar otro resultado conocido como el que genera una barra de densidad lineal λ_0 de largo L sobre un punto ubicado un eje perpendicular a ella justo en su mitad.

En este caso, tomando el eje z coincidente con eje de la barra y el origen su punto medio, se obtiene $\vec{r} = h\hat{r}$, $\vec{r}' = z\hat{z}$ con $z \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ y $dq = \lambda_0 dz$. Entonces

$$\vec{E}(P_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{h\hat{r} - z\hat{z}}{(h^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \lambda_0 dz = \frac{\lambda_0 L}{2\pi\epsilon_0 h \sqrt{4h^2 + L^2}} \hat{r}$$



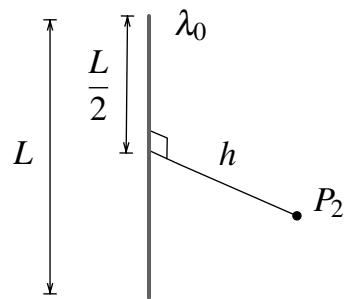


Figura 2.3: Situación análoga al cilindro.

Ahora, volviendo al problema, si V es el volumen de un cilindro es posible afirmar que

$$\lambda_0 = \frac{dq}{dz} = \frac{dq}{dV} \frac{dV}{dz} = \rho_0 \frac{dV}{dz} = \rho_0 \frac{d}{dz}(\pi R^2 z) = \rho_0 \pi R^2$$

El valor obtenido es equivalente a la carga por unidad de largo que tiene el cilindro del problema. Finalmente el campo es

$$\vec{E}(P_2) = \frac{\rho_0 R^2 L}{2\epsilon_0 h \sqrt{4h^2 + L^2}} \hat{r}$$



Ley de Gauss

I. Problemas Propuestos

Problema 3.1

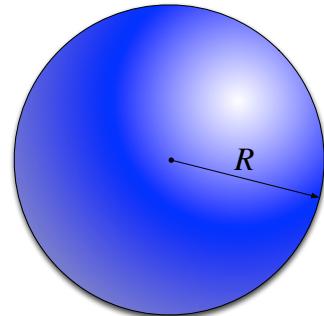


Una distribución de carga esférica ρ se extiende desde $r = 0$ a $r = R$, con

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Calcular:

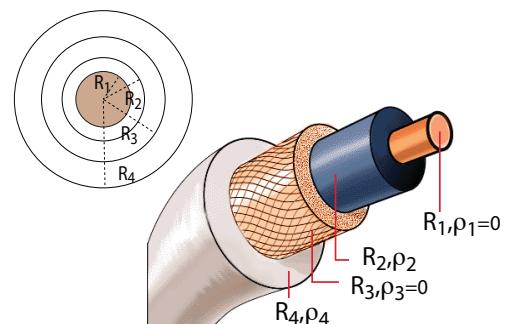
- La carga total Q .
- El campo eléctrico en todo el espacio.
- El potencial eléctrico en todo el espacio.



Problema 3.2



Considere un cable coaxial infinito y rectilíneo, el cual está compuesto por un cilindro central y diferentes casquetes cilíndricos, de radios R_1 , R_2 , R_3 y R_4 respectivamente, como se ilustra en la figura. Cada material tiene respectivamente una densidad de carga volumétrica ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 y ρ_4 (Ver Figura). En el caso que el cilindro y segundo casquete cilíndrico (de radio R_3) tienen densidad de carga cero ($\rho_1 = \rho_3 = 0$). Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio.



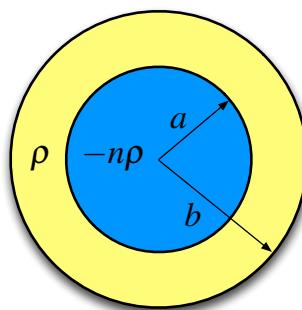
Problema 3.3



Considere la siguiente distribución de volumétrica de carga en coordenadas esféricas

$$\rho(r) = \begin{cases} -n\rho & 0 < r < a \\ \rho & a \leq r \leq b \end{cases}$$

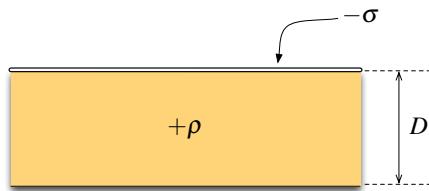
Donde ρ es una constante y n es un entero no negativo.
Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio.



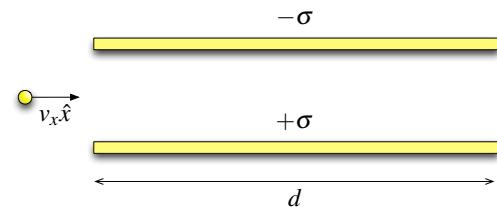
Problema 3.4  

Se tiene una placa infinita no conductora de espesor despreciable la cual posee una densidad superficial de carga $-\sigma$, y continua a ella, un bloque infinito de espesor D con una densidad de carga uniforme $+\rho$. Todas las cargas están fijas. Calcule la dirección y la magnitud del campo eléctrico:

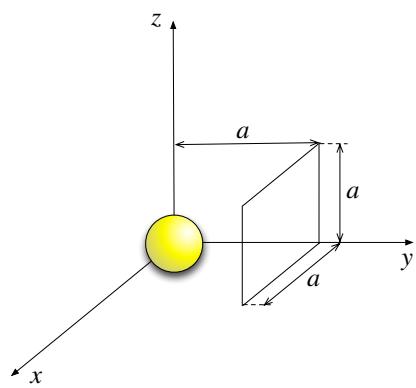
- a una distancia h encima de la placa cargada negativamente.
- b) dentro del bloque a una distancia d debajo de la placa cargada negativamente ($d < D$).
- c) a una distancia H bajo fondo del bloque.


Problema 3.5  

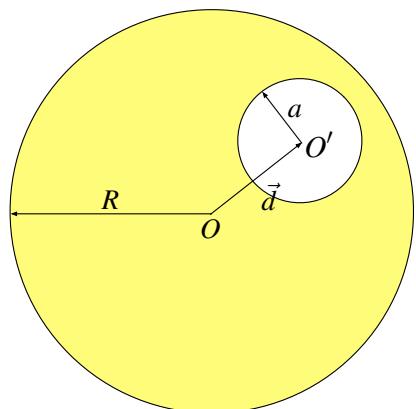
Considere dos placas paralelas cargadas con densidades $+\sigma$ y $-\sigma$ de ancho d como muestra en la figura. Se arroja una carga $+q$ y masa m horizontalmente por el espacio entre las placas con una velocidad v_x . Despreciando efectos de borde, encuentre la trayectoria seguida por la partícula cargada y el ángulo que hace su vector de velocidad con la horizontal en el momento de salir. Asuma que la separación de las placas es suficiente para que la carga pueda salir de ellas.


Problema 3.6  

Considere una esfera maciza de radio R y carga Q . Determine el flujo de campo eléctrico sobre el cuadrado de lado a mostrado en la Figura.


Problema 3.7  

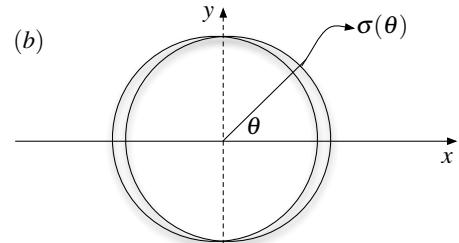
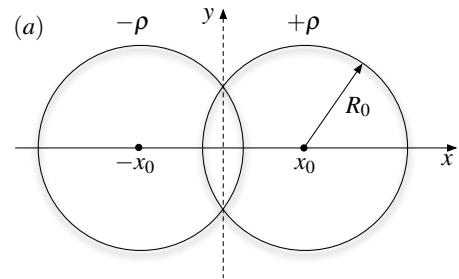
Considere una esfera maciza de densidad de carga ρ_0 y radio R la cual posee una perforación esférica de radio $a < \frac{R}{2}$ a una distancia de d entre sus centros. Demuestre que el campo eléctrico es constante en cualquier punto dentro de la cavidad y determine su valor.



Problema 3.8   

Considere dos cilindros infinitos de radios R_0 los cuales poseen sus ejes paralelos al eje z (entran y salen de la hoja de papel). Las densidades de carga volumétricas de los cilindros son ρ y $-\rho$ y sus ejes centrales pasan por los puntos $(x_0, 0)$ y $(-x_0, 0)$, respectivamente. Considerando que $x_0 < R_0$.

- Determine el campo eléctrico en la zona de intersección.
- Si $x_0 \ll R_0$, ambos cilindros quedan infinitesimalmente cerca, creando un único cilindro equivalente de radio R_0 con una densidad de superficial de carga $\sigma(\theta)$. Encuentre el valor de esa densidad.

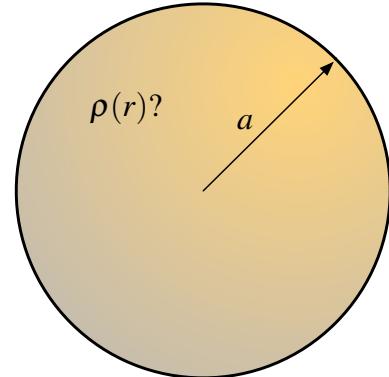
Cilindro Equivalente ($x_0 \ll R_0$)**Problema 3.9**  

Dentro de una esfera de radio a centrada en el origen hay un campo eléctrico

$$\vec{E}(r \leq a) = \frac{E_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \hat{r}$$

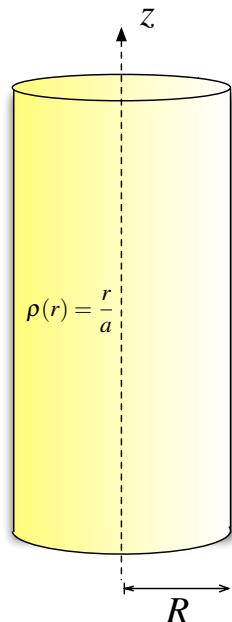
Para $r > a$ hay vacío. Se pide determinar

- La distribución de carga $\rho(r)$ para $r \leq a$.
- El campo \vec{E} y el potencial eléctrico para $r > a$
- El potencial eléctrico $V(r < a)$.

**Problema 3.10**   

Un cilindro infinito de radio R tiene su eje coincidente con el eje z . El cilindro posee una densidad volumétrica $\rho(r) = \frac{r}{a}$ donde a es una constante positiva y r es la distancia desde el eje del cilindro.

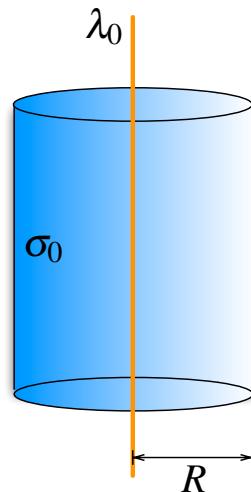
- Calcule la carga contenida en un cilindro centrado en el eje z , de radio r y altura h para los casos $r < R$ y $r > R$.
- Determinar el campo eléctrico $\vec{E}(r)$ en todo el espacio.
- Calcular el potencial eléctrico $V(r)$ en todo el espacio. Tome como referencia $V(r = 0) = 0$.
- Grafique $|\vec{E}(r)|$ y $V(r)$ en función de r .



Problema 3.11  

Considere un cable infinito cargado con una densidad lineal de carga λ_0 rodeada por un casquete cilíndrico infinito de radio R de densidad superficial homogénea σ_0 . Si la densidad lineal coincide con el eje del cilindro, determine:

- El campo eléctrico en todo el espacio, ¿es continuo el campo eléctrico?
- El potencial eléctrico en todo el espacio, ¿es continuo el potencial eléctrico?. (Use como referencia $V(r = R) = 0$)
- Si el alambre se desplazara una distancia δ del eje del cilindro, ¿cómo determinaría el nuevo valor del campo eléctrico?

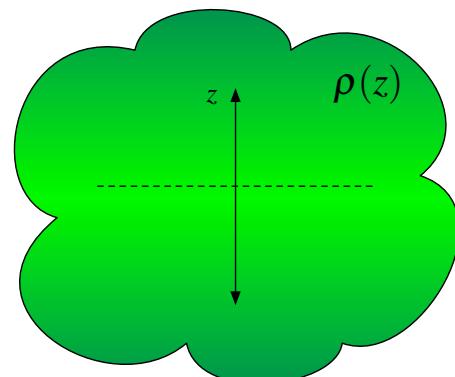
**Problema 3.12**  

Use el teorema de Gauss para encontrar el campo eléctrico debido a una distribución de carga

$$\rho = \rho_0 e^{-k|z|}$$

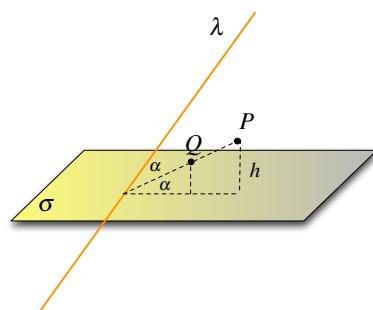
con ρ_0 y k constantes positivas.

- Muestre que el campo es de la forma $\vec{E} = (0, 0, E(z))$, con $E(-z) = -E(z)$ para $z > 0$.
- Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio.

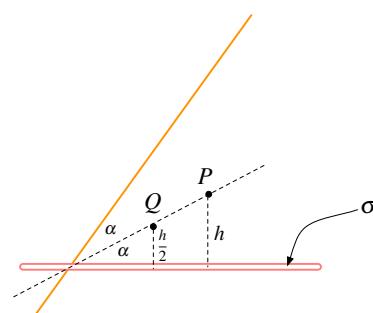
**Problema 3.13**   

Se tiene una fuente cargada que consiste en una recta infinita cargada, con densidad uniforme λ y un plano infinito cargado con densidad de carga uniforme σ . La recta forma un ángulo agudo 2α con el plano. Considere un punto P está a una altura h sobre el plano. Determine

- El campo eléctrico total en un punto P sobre la recta que bisecta al ángulo entre la recta y el plano.
- El trabajo necesario para mover una carga puntual q_0 desde el punto P hasta el punto Q el cual está ubicado a una distancia $\frac{h}{2}$ sobre el plano.



(a) Vista Isométrica



(b) Vista Frontal



II. Soluciones

Solución 3.1 

- a) La carga total en el átomo está dada por

$$\begin{aligned} Q &= \iiint \rho(r) dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= 4\pi\rho_0 \int_0^R \left(r^2 - \frac{r^4}{R^2}\right) dr \\ &= 4\pi\rho_0 \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{5}\right) \\ &= \frac{8\pi}{15}\rho_0 R^3 \end{aligned}$$

En general $Q \neq \frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \rho(r)$ (hacer esto es un error muy común en el curso). Esto es verdad solamente cuando $\rho(r) = \text{cte}$.

- b) El campo eléctrico está dado por Ley de Gauss, para ello se deben considerar dos posibles casos (dentro y fuera de la esfera). En ambos casos se asume por simetría esférica que $\vec{E} = E(r)\hat{r}$.

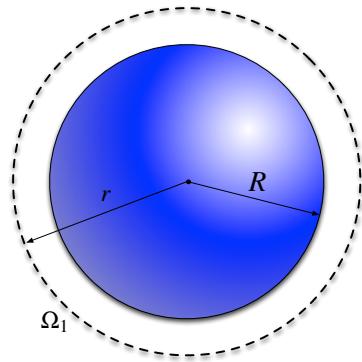


Figura 3.1: Superficie Gaussiana Ω_1 para $r \geq R$

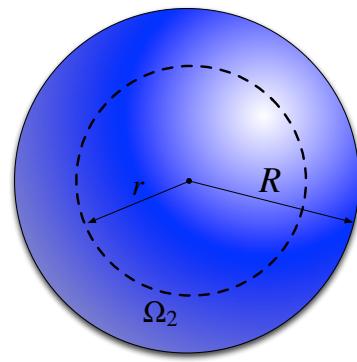


Figura 3.2: Superficie Gaussiana Ω_2 para $r < R$

- $r \geq R$: En este caso se toma como superficie Gaussiana Ω_1 , la cual representa un casquete esférico de radio $r > R$.

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \\ 4\pi r^2 E(r) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ \vec{E}(r) &= \frac{2\rho_0 R^3}{15\epsilon_0 r^2} \hat{r} \end{aligned}$$



- $r < R$: En este caso se toma como superficie Gaussiana Ω_2 , la cual representa un casquete esférico de radio $r < R$.

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \\ 4\pi r^2 E(r) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ 4\pi r^2 E(r) &= \frac{4\pi \rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}\right) \\ \vec{E}(r) &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5R^2}\right) \hat{r} \end{aligned}$$

Notar que dado que r es arbitrario, el lado de izquierdo de la ecuación de ley de Gauss valdrá siempre $4\pi r^2$ en problemas de simetría esférica.

- c) Mientras que el potencial (considerando $V(r \rightarrow \infty) = 0$)

- $r \geq R$

$$\begin{aligned} V(r) &= - \int_{\infty}^r E(r \geq R) dr \\ &= - \int_{\infty}^r \frac{2\rho_0 R^3}{15\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{2\rho_0 R^3}{15\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

- $r < R$

$$\begin{aligned} V(r) &= - \int_{\infty}^R E(r \geq R) dr - \int_R^r E(r < R) dr \\ &= - \int_{\infty}^R \frac{2\rho_0 R^3}{15\epsilon_0 r^2} dr - \int_R^r \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5R^2}\right) dr \\ &= \frac{2\rho_0 R^2}{15\epsilon_0} - \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{6}(r^2 - R^2) - \frac{1}{20R^2}(r^4 - R^4)\right) \end{aligned}$$

Solución 3.8

- a) Primero se debe calcular el campo eléctrico producido por un cilindro infinito cargado (radio R , densidad ρ constante) centrado en el origen. Usando Ley de Gauss:

Dada la geometría del problema: $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ en coordenadas cilíndricas, luego:

Para $r < R$:

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^h Erd\theta dz = 2\pi rhE = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



Por otro lado

$$Q = \iiint \rho dV = \rho \pi r^2 h \implies 2\pi r h E = \frac{\rho \pi r^2 h}{\epsilon_0} \implies \vec{E}(r < R) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \hat{r}$$

El caso $r > R$ es irrelevante para esta pregunta, luego no es necesario calcularlo ya que la zona donde se pide calcular el campo es tal que $r < R$ siempre.

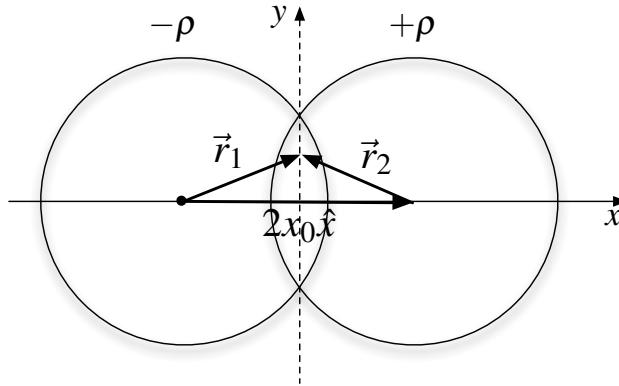


Figura 3.3: Vectores posición en el área de intersección

Ahora volviendo al problema original, sean \vec{E}_1 y \vec{E}_2 los campos producidos por los cilindros cargados con $-\rho$ y $+\rho$ respectivamente, usando el resultado anteriormente encontrado:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= -\frac{\rho r_1}{2\epsilon_0} \hat{r}_1 = -\frac{\rho \vec{r}_1}{2\epsilon_0} \\ \vec{E}_2 &= \frac{\rho r_2}{2\epsilon_0} \hat{r}_2 = \frac{\rho \vec{r}_2}{2\epsilon_0}\end{aligned}$$

Donde los vectores \vec{r}_1 y \vec{r}_2 se miden desde el centro del cilindro correspondiente a cada uno de ellos (Figura 3.3). Finalmente, usando que:

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = 2x_0 \hat{x}$$

Se obtiene:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\frac{\rho x_0}{\epsilon_0} \hat{x}$$

b) Si $x_0 \ll R$ entonces en el borde del "Cilindro equivalente" posee un espesor $\Delta r = r_1 - r_2$.

Donde los segmentos de r_1 , r_2 y $2x_0$ forman un triángulo, cuyo ángulo opuesto al lado r_2 es θ . Así, usando el teorema del coseno (y, por simplicidad, definiendo $d = 2x_0$) :

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 + d^2 - 2r_1 d \cos \theta}$$

Luego como $\frac{d}{x_0} \rightarrow 0$ entonces se realiza una aproximación de Taylor en torno a $d = 0$, de lo que resulta:

$$r_2 \approx r_1 + \frac{1}{2\sqrt{r_1^2 + d^2 - 2r_1 d \cos \theta}} (2d - 2r_1 \cos \theta)|_{d=0} (d=0) = r_1 - d \cos \theta$$

Por lo tanto:

$$\Delta r = r_1 - r_2 \approx d \cos \theta$$



Por otra parte, en un pequeño volumen dV en el borde del “Cilindro equivalente” existe una carga ΔQ , que cumple:

$$\Delta Q = \rho dV = \rho \Delta A \Delta r = \rho \Delta A d \cos \theta$$

Finalmente, de la relación anterior es posible definir una densidad de carga superficial en el borde del “Cilindro equivalente” cuando $x_0 \ll R$:

$$\sigma = \rho \Delta r \Rightarrow \sigma = \rho d \cos \theta = 2x_0 \rho \cos \theta$$

Nota: observar que dicha densidad σ es consistente en sus signo con la distribución de las cargas en el “Cilindro equivalente” pues es proporcional a $\cos \theta$.

Solución 3.10

a) La carga contenida será para $r \leq R$:

$$Q_{enc}(r \leq R) = \iiint \rho(r) dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{r}{a} \cdot r dr d\theta dz = \frac{2\pi h r^3}{3a}$$

mientras tanto, en el caso $r > R$

$$Q_{enc}(r > R) = \iiint \rho(r) dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r}{a} \cdot r dr d\theta dz = \frac{2\pi h R^3}{3a}$$

b) Usando la ley de Gauss para $r \leq R$:

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{2\pi h r^3}{3a\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{r^2}{3a\epsilon_0} \hat{r}$$

De igual forma, para $r > R$:

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{2\pi h R^3}{3a\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{R^3}{3a\epsilon_0 r} \hat{r}$$

c) El potencial $V(r)$, usando como referencia $V(r=0) = 0$, estará dado por

$$V(r) = V(r) - V(0) = - \int_0^r E(r) dr$$

Para un radio $r \leq R$ el potencial está dado por

$$V(r) = - \int_0^r \frac{r^2}{3a\epsilon_0} dr = - \frac{r^3}{9a\epsilon_0}$$

de forma parecida, el potencial para un radio $r > R$ es

$$V(r) = - \int_0^R \frac{r^2}{3a\epsilon_0} dr - \int_R^r \frac{R^3}{3a\epsilon_0 r} dr = - \frac{R^3}{3a\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{3} \right]$$

d) Los gráficos están dados por



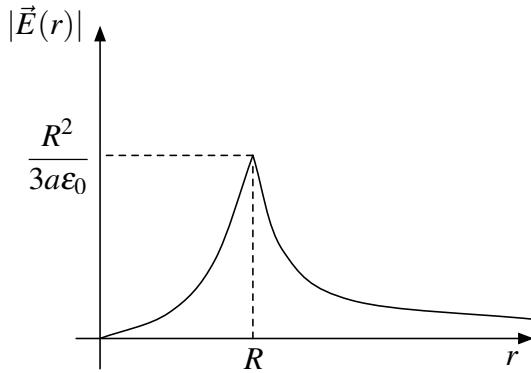


Figura 3.4: Campo Eléctrico

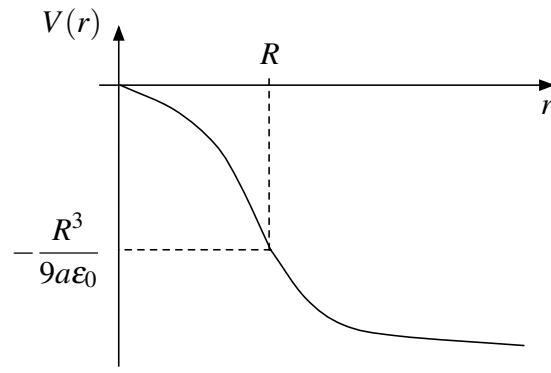


Figura 3.5: Potencial Eléctrico

Solución 3.13

- a) Dado que el sistema está compuesto por una recta infinita y un plano infinito, se determina cual es el campo eléctrico que genera cada uno de ellos y luego se procederá a la rotación del resultado. Como resultados generales para un plano infinito y una recta se tiene que:

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \implies 2AE(z) = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \implies \vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}$$

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \implies 2\pi r L E(r) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \implies \vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \hat{r}$$

En este problema se debe tomar como referencia la siguiente Figura

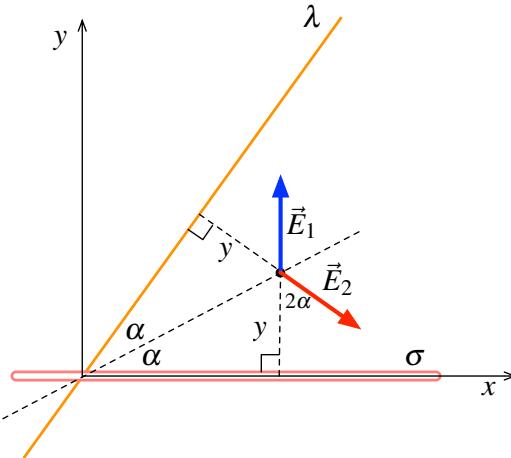


Figura 3.6: Campos Eléctricos en un punto sobre la bisectriz

Se toma un punto P arbitrario a una distancia y desde la bisectriz hasta el plano. Sobre ese punto actúan dos campos eléctricos (\vec{E}_1 y \vec{E}_2 provocados por el plano y por la recta, respectivamente), de modo que la superposición de ambos campos es el campo total en el punto. Usando el sistema de referencia de la Figura 3.6, el campo total vale:

$$\vec{E}_T = |\vec{E}_1| \hat{y} - |\vec{E}_2| \cos(2\alpha) \hat{y} + |\vec{E}_2| \sin(2\alpha) \hat{x}$$



Donde

$$|\vec{E}_1| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad |\vec{E}_2| = \frac{\lambda}{2\pi y \epsilon_0}$$

Nótese que dado la recta donde se quiere conocer el campo es bisectriz, la distancia del plano al punto debe ser igual a la de la recta cargada a la bisectriz (congruencia de triángulos). Finalmente el campo total cuando $y = h$ vale

$$\vec{E}_T(h) = \frac{\lambda \sin(2\alpha)}{2\pi h \epsilon_0} \hat{x} + \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\lambda \cos(2\alpha)}{2\pi h \epsilon_0} \right) \hat{y}$$

- b) El trabajo necesario para mover la carga está dado por la siguiente expresión

$$W = -q \int_A^B \vec{E}_T(y) \cdot d\vec{l}$$

En esta caso $A = h$ y $B = \frac{h}{2}$, además dado que no es ni un camino horizontal ni vertical, se tiene que $d\vec{l} = dx\hat{x} + dy\hat{y}$, donde en la recta bisectriz se cumple que $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$ (pendiente de la bisectriz). Reemplazando

$$\begin{aligned} W &= -q \int_h^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\lambda \sin(2\alpha)}{2\pi y \epsilon_0} \hat{x} + \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\lambda \cos(2\alpha)}{2\pi y \epsilon_0} \right) \hat{y} \right) \cdot \left(\frac{dy}{\tan \alpha} \hat{x} + dy\hat{y} \right) \\ &= -q \left[\int_h^{\frac{h}{2}} \frac{\lambda \sin(2\alpha)}{2\pi y \epsilon_0} \frac{dy}{\tan \alpha} + \int_h^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\lambda \cos(2\alpha)}{2\pi y \epsilon_0} \right) dy \right] \\ &= q \left[\frac{\lambda \sin(2\alpha)}{2\pi \epsilon_0 \tan \alpha} \ln(2) + \left(\frac{\sigma h}{4\epsilon_0} - \frac{\lambda \cos(2\alpha)}{2\pi \epsilon_0} \ln(2) \right) \right] \\ &= \frac{q\sigma h}{4\epsilon_0} + \frac{q\lambda \ln(2)}{2\pi \epsilon_0} \left(\frac{\sin 2\alpha}{\tan \alpha} - \cos 2\alpha \right) \end{aligned}$$



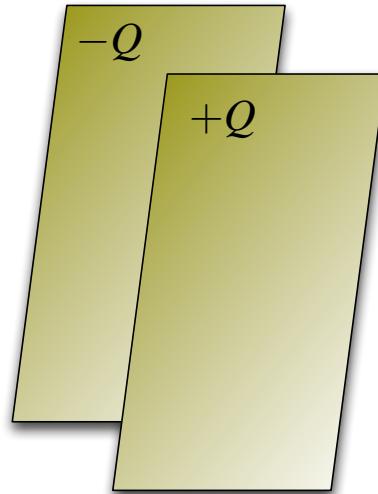
Conductores, Condensadores y Energía

I. Problemas Propuestos

Problema 4.1



- Calcule la fuerza eléctrica que actúa sobre las placas de un condensador de placas planas, cargado con carga Q .
- Considere que la carga Q sobre las placas del condensador se mantiene y que su capacidad es C . Calcule el trabajo que se realiza al llevar las placas a la mitad de la distancia original, manteniendo la carga constante. Puede suponer que las placas poseen una área A muy grande.
- Este nuevo condensador se conecta en paralelo con otro condensador inicialmente descargado e igual al condensador de la parte (a). Calcule la diferencia de potencial entre las placas del condensador equivalente.

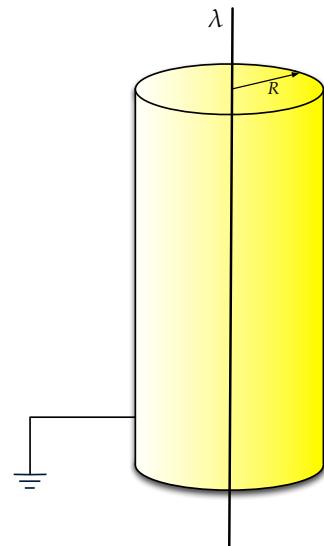


Problema 4.2



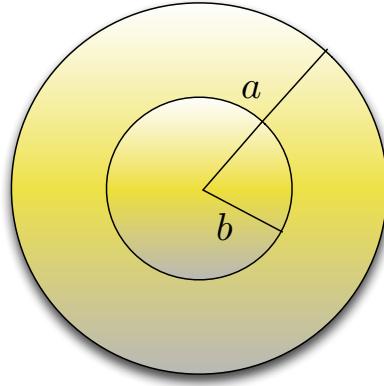
Un alambre infinito tiene una distribución lineal de carga $\lambda > 0$. El alambre se encuentra ubicado en el centro de una superficie cilíndrica conductora infinita muy delgada de radio R conectada a tierra como se muestra en la Figura.

- Encuentre la densidad de carga superficial inducida σ en la superficie interior conductora.
- Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio.
- Encuentre el potencial eléctrico en todo el espacio.

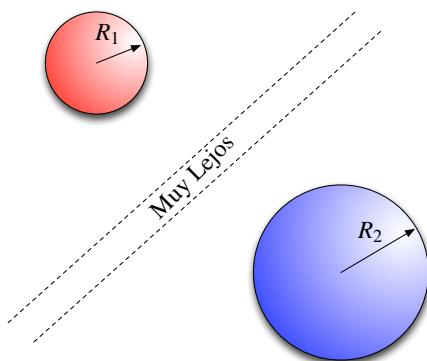


Problema 4.3   

Se desea diseñar un condensador esférico a partir de un casquete conductor esférico de radio exterior a , que sea capaz de almacenar la mayor cantidad de energía posible, sujeto a la restricción que el campo eléctrico en la superficie de la esfera conductora interior, concéntrica con el casquete y de radio $b < a$, no pueda exceder un valor dado E_0 . Calcule, en función de E_0 , a y constantes, el valor que debe tener el radio b y la magnitud de la energía que puede almacenar el conductor.

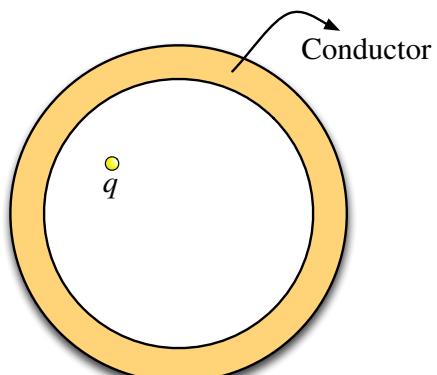
**Problema 4.4**   

Se tienen dos esferas conductoras de radio R_1 y R_2 separadas entre sí una distancia suficientemente grande que asegura que cualquier carga sobre ellas se distribuye uniformemente, sin que la presencia de una esfera afecte a la otra. Se desea distribuir una carga Q entre las dos esferas de manera que la energía potencial electrostática del sistema de las dos esferas sea mínima. Claramente, en una esfera habrá $Q - q$ y en la otra q . ¿Cuánto vale q , cuál es energía total y cuál es el potencial de cada esfera cuando se alcanza la condición de energía mínima?.

**Problema 4.5**  

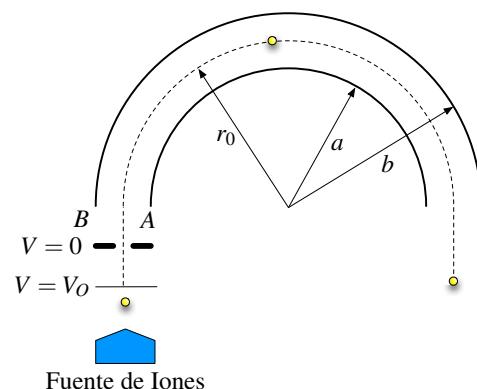
Una esfera metálica se encuentra inicialmente descargada. Ahora imagine que una carga positiva q es colocada en algún lugar (no necesariamente el centro) dentro de la esfera y sin tocar las paredes.

- ¿Qué carga se induce en la pared interior y exterior de la esfera?. Indicar cualitativamente la concentración de densidad de carga inducida.
- Suponga que se mueve la carga q dentro de la cavidad. ¿Cambia la distribución en la superficie exterior de la esfera?.
- Ahora se coloca una carga q en contacto con la superficie interior de la esfera. ¿Cómo queda la distribución de carga en la superficie interior y exterior?.
- ¿Qué sucede si ahora se acerca otra carga q' cerca de la superficie exterior del conductor?.

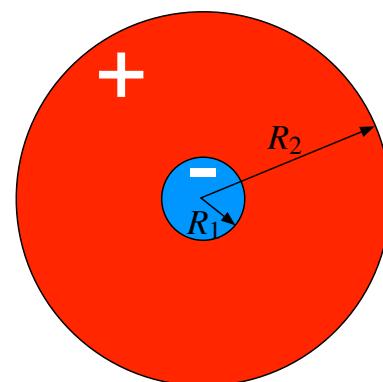


Problema 4.6   

Un ión es acelerado desde el reposo hasta una diferencia de potencial V_0 para luego entrar en una región entre dos electrodos cilíndricos muy largos A y B , de radios a y b respectivamente ($a < b$). El ión recorre una media circunferencia de radio r_0 haciendo una trayectoria circular. Despreciando efectos de borde y asumiendo que los cilindros son muy largos en comparación al espacio que los separa, encuentre la diferencia de potencial V_{BA} .

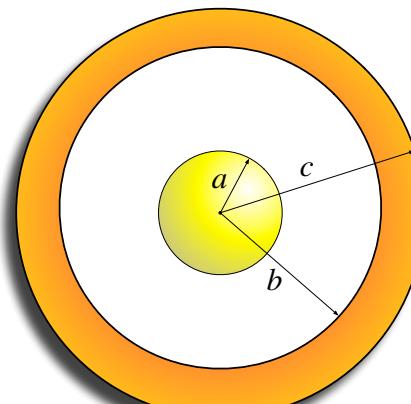
**Problema 4.7**  

Uno de los primeros modelos de átomo, como un ente compuesto de partes cargadas, lo propuso el descubridor del electrón Joseph John Thomson en 1904. Este modelo, también conocido como *el modelo del pastel de fresas*, concibe al átomo como una esfera de carga positiva, en la cual están incrustados los electrones. En el espíritu del *modelo del pastel de fresas*, modelemos un átomo de hidrógeno (en equilibrio estático) como una esfera de radio R_1 de carga negativa $-e$ uniformemente distribuida en su volumen (el *electrón fresa*), rodeada de una esfera más grande (concéntrica a la primera), de radio $R_2 > R_1$, con carga positiva $+e$ uniformemente distribuida en el volumen comprendido entre R_1 y R_2 . Determine la energía de formación de este átomo (i.e. el trabajo necesario para formarlo trayendo las cargas desde el infinito).

**Problema 4.8**   

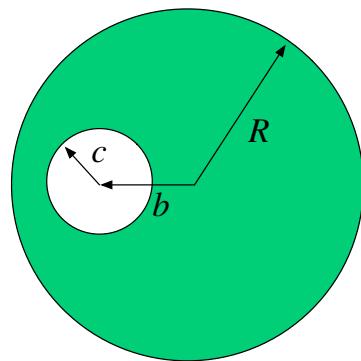
Considere una esfera maciza conductora de radio a se encuentra a un potencial V_0 en toda su superficie con respecto al infinito. La esfera está recubierta por un casquete esférico conductor de radio interno b y radio externo c .

- Determine el campo eléctrico y el potencial eléctrico en todo el espacio. Además encuentre las densidades de carga inducidas en los conductores.
- Si el casquete esférico se conecta a tierra, ¿cómo cambian sus respuestas anteriores?.



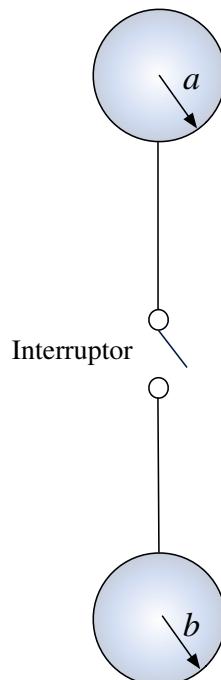
Problema 4.9   

Considere una esfera maciza conductora de radio R con una burbuja esférica excéntrica de radio c . El centro de la burbuja está a una distancia b del centro de la esfera metálica. La esfera tiene una carga Q . Determine el potencial en el interior de la burbuja. ¿Cómo se modifica el resultado si la burbuja no es esférica?

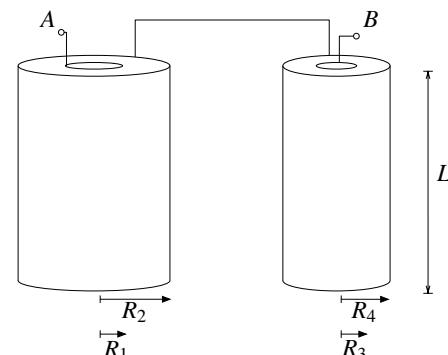
**Problema 4.10**  

Considere dos esferas conductoras de radios a y b . Las esferas están lo suficientemente lejos una de otra como para despreciar su interacción, (i.e. el equilibrio electroestático de una esfera no se ve afectado por el campo que genera la carga contenida en la otra).

- Suponga que las esferas tienen cargas Q_1 y Q_2 , respectivamente. Las esferas se ponen en contacto mediante un cable lo suficientemente largo, el cual posee un interruptor. Se conectan las dos esferas y se espera hasta que el sistema alcance el equilibrio electroestático, para luego desconectar el interruptor. Determine la carga que posee cada esfera luego que se desconecta el interruptor. ¿Qué esfera queda con mayor carga?
- Considere ahora que las esferas están descargadas y desconectadas. Suponga ahora que la distancia que separa las esferas es $d \gg a, b$ desde sus centros. Considerando que dos conductores cualesquiera pueden formar un capacitor, determine la capacitancia de esta configuración.

**Problema 4.11**  

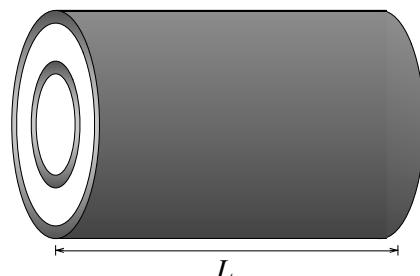
Considere dos condensadores cilíndricos como se indican en la figura. Los condensadores tienen radios R_1 y R_2 y el otro R_3 y R_4 (ver figura), determine la capacitancia equivalente entre los puntos A y B . Suponga que $R_1, R_2, R_3, R_4 \ll L$.



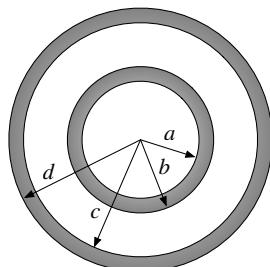
Problema 4.12   

Un sistema consiste de dos cascarones conductores cilíndricos concéntricos de longitud $L \gg d$ (a, b, c, d definidos en la figura). El cascarón interior contiene una carga total $+Q$ y el exterior una carga total $-Q$. Determine:

- La densidad carga en cada una de las cuatro superficies conductoras.
- El potencial en todo el espacio.
- La diferencia de potencial de los conductores cilíndricos.



(a) Vista Exterior



(b) Vista Interior

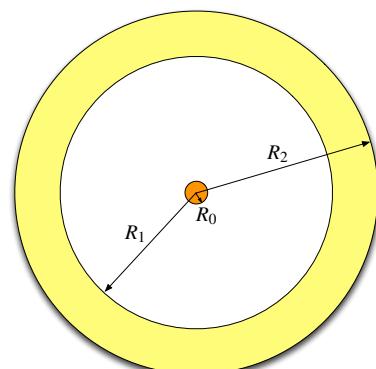
Problema 4.13  

Una carga $+Q$ se encuentra inserta en un alambre conductor de largo L y radio R_0 muy pequeño. Un cascarón cilíndrico conductor neutro de radios interno R_1 y externo R_2 y largo L es ubicado simétricamente alrededor del alambre (ver figura). Tener en cuenta que: $R_0 \ll R_1, R_2 \ll L$. Calcule:

- La densidad lineal de carga λ del alambre.
- La densidad superficial de carga en la capa interna y externa del cascarón; y la densidad volumétrica de carga dentro del conductor.
- El campo eléctrico en todo el espacio.

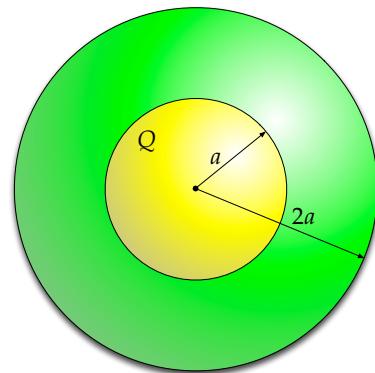
Ahora deposite una carga $-Q$ en el cascarón cilíndrico, calcule:

- Las nuevas densidades de carga superficiales en las capas interna y externa del cascarón, y también la densidad volumétrica dentro de éste.
- El nuevo campo eléctrico en todo el espacio.
- La diferencia de potencial entre el cilindro y el alambre $\Delta V = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{alambre}}$.
- La capacidad (o capacitancia) del sistema.
- La energía almacenada en el sistema.
- La capacidad C' si ahora el alambre tiene carga $+2Q$ y el cascarón tiene carga $-2Q$.



Problema 4.14   

Una esfera maciza de radio a y carga Q uniformemente distribuida es blindada por una capa conductora de espesor uniforme a . La carga neta de la capa es nula. Calcule y grafique el potencial $\phi(r)$ en todo el espacio. Considere ϕ nulo infinitamente lejos de la esfera.

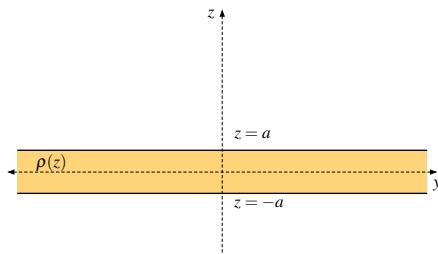
**Problema 4.15**   

Un bloque macizo infinito en sus coordenadas x e y , posee su espesor entre $z = a$ y $z = -a$. En el espacio existe una densidad de carga dada por

$$\rho(z) = \begin{cases} 0 & |z| > a \\ \rho_0 \left[\exp\left(-\frac{z+a}{\delta}\right) + \exp\left(\frac{z-a}{\delta}\right) \right] & |z| \leq a \end{cases}$$

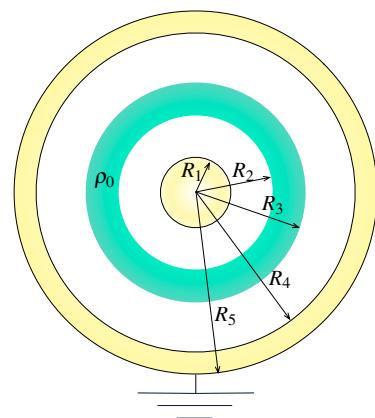
con ρ_0 y δ constantes positivas conocidas.

- El campo eléctrico en todo el espacio.
- Si $\delta \ll a$, determine nuevamente el campo eléctrico en el espacio ¿qué tipo de comportamiento presenta el material?. Justifique su respuesta. Dibuje las líneas de campo en la proximidad del material considerando la aproximación.
- Usando el campo eléctrico calculado en b) determine el potencial electrostático en todo el espacio. Use como referencia $V(z = -a) = V_0$. Dibuje claramente las superficies equipotenciales.

**Problema 4.16**   

Sean dos cilindros infinitos concéntricos conductores, uno de ellos macizo de radio R_1 , y el otro un cascarón de radios R_4 y R_5 conectado a tierra, como muestra la figura. Se coloca una densidad volumétrica de carga ρ_0 entre los cilindros de ancho ($R_3 - R_2$).

- Determine el campo eléctrico en todo el espacio y las densidades de cargas inducidas en las superficies conductoras.
- Calcule la diferencia de potencial entre los conductores.



II. Soluciones

Solución 4.1  

- a) La energía de un condensador es $U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$, dado que un condensador es de placas paralelas su capacitancia está dada por $C = \frac{A\epsilon_0}{z}$ donde A es el área de las placas y z la distancia que las separa, por lo que la fuerza es

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial z} \hat{z} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A} \hat{z} = -\frac{1}{2} \frac{Q\sigma}{\epsilon_0} \hat{z}$$

- b) Si se desea disminuir a la mitad la distancia entre las placas del condensador $C = \frac{A\epsilon_0}{z}$, se tiene que la nueva capacitancia vale

$$C' = \frac{A\epsilon_0}{\frac{z}{2}} = 2C$$

Por lo que el trabajo puede ser calculado por la diferencia de energías que experimenta el condensador

$$W = U_{\text{final}} - U_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{2C} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = -\frac{Q^2}{4C}$$

- c) En este caso los condensadores son conectados en paralelo, por lo que la capacitancia del condensador equivalente es

$$C_{eq} = C + 2C = 3C$$

donde la diferencia de potencial queda determinada por

$$\Delta V = \frac{Q}{3C}$$

Solución 4.2  

- a) Para iniciar el problema hay calcular el campo eléctrico usando la ley de Gauss. Para $r \leq R$ se tiene que:

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \implies E(r) 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \implies \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

De este resultado ya puede deducirse la densidad de carga, dado que en el borde de un conductor se tiene que $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (-\hat{r})$. El resultado anterior tiene que ser igual a $\vec{E}(R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{r}$, por lo que

$$\sigma = -\frac{\lambda}{2\pi R}$$

- b) Luego para $r > R$: Dado que la capa externa del conductor está conectada a tierra, éste posee potencial cero en toda su superficie lo que provoca que solamente exista la carga negativa anteriormente calculada. Por lo tanto, volviendo a usar ley de Gauss:

$$\iint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L + (-\frac{\lambda}{2\pi R}) \cdot 2\pi RL}{\epsilon_0} = 0 \implies \vec{E} = 0$$

Notar que la conexión a tierra provoca físicamente una descarga de la capa exterior del conductor.



c) Para el cálculo de potenciales hay que notar que para $r > R$ se tiene que

$$\vec{E} = -\nabla V = 0 \implies V(r) = Cte.$$

Luego como el potencial es continuo y $V(R) = 0$ (conexión a tierra) se deduce que

$$V(r) = V(R) = 0$$

Finalmente para $r < R$ se tiene que:

$$V(r) = V(r) - V(R) = - \int_R^r E(r) dr = - \int_R^r \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

Solución 4.3

Suponiendo una carga Q en la superficie conductora de radio b , entonces el campo eléctrico a una distancia r del origen será de la forma:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \implies V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

Donde V es la diferencia de potencial entre la superficie de radio interior y exterior. De esta manera, se obtiene la capacidad del sistema:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{a - b}$$

Por otro lado, tomando el caso límite $r = b$ en el cual el campo eléctrico alcanza su máximo valor posible $E(r = b) = E_0$, se tiene:

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \implies Q = 4\pi b^2 \sigma = 4\pi b^2 \epsilon_0 E_0 \implies E(r) = \frac{b^2 E_0}{r^2}$$

Luego se usan estos valores obtenidos para calcular la energía del sistema:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{2\pi\epsilon_0 b^3 E_0^2 (a - b)}{a}$$

Ahora para encontrar su máximo (o mínimo):

$$\frac{dU}{db} = \frac{2\pi\epsilon_0 E_0^2}{a} (3ab^2 - 4b^3) = 0 \implies b = \frac{3a}{4}$$

Luego calculando la segunda derivada:

$$\frac{d^2U}{db^2} = \frac{2\pi\epsilon_0 E_0^2}{a} (6ab - 12b^2) \implies U''\left(b = \frac{3a}{4}\right) = \frac{2\pi\epsilon_0 E_0^2}{a} \left(\frac{18a^2 - 27a^2}{4} \right) < 0$$

Por lo tanto, $U\left(b = \frac{3a}{4}\right)$ es máximo, con:

$$U\left(b = \frac{3a}{4}\right) = \frac{27\pi\epsilon_0 E_0^2 a^3}{128}$$



Solución 4.4 

Se supondrá que la esfera conductora de radio R_1 tiene una carga $Q - q$ y que la esfera conductora de radio R_2 tiene una carga q . Los campos eléctricos que generan ambas esferas son

$$\vec{E}_1(r_1 > R_1) = \frac{Q - q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \hat{r}_1 \quad \vec{E}_2(r_2 > R_2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \hat{r}_2$$

Donde \hat{r}_1 y \hat{r}_2 son vectores unitarios en coordenadas esféricas con origen en las esferas R_1 y R_2 , respectivamente. Dado que las dos esferas están muy alejadas entre sí, se considera que el campo eléctrico de una no afecta sobre la otra, por lo que la energía de la esfera de radio R_1 es

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{Todo el Espacio}} |E_1|^2 d\tau \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{R_1}^\infty \left(\frac{Q - q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \right)^2 r_1^2 \sin\theta dr_1 d\theta d\varphi \\ &= \frac{(Q - q)^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^\infty \frac{dr_1}{r_1^2} \\ &= \frac{(Q - q)^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} \end{aligned}$$

Análogamente, se tiene que $U_2 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R_2}$. Luego, la energía total es

$$U_T = U_1 + U_2 = \frac{(Q - q)^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R_2}$$

Dado que se desea encontrar un mínimo o un máximo

$$\frac{dU_T}{dq} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{Q - q^*}{R_1} + \frac{q^*}{R_2} \right] = 0 \implies q^* = \frac{QR_2}{R_1 + R_2}$$

Lo que es efectivamente mínimo ya que

$$\frac{d^2U_T}{dq^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] > 0$$

Por lo que la energía mínima total está dada por

$$U_{min} = \frac{(Q - q^*)^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q^{*2}}{8\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0(R_1 + R_2)}$$

Por lo tanto, los potenciales a mínima energía son

$$V_1(R_1) = \int_{R_1}^{\infty} E_1(r_1) \hat{r}_1 \cdot dr_1 \hat{r}_1 = \frac{Q - q^*}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_1 + R_2)}$$

$$V_2(R_2) = \int_{R_2}^{\infty} E_2(r_2) \hat{r}_2 \cdot dr_2 \hat{r}_2 = \frac{q^*}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_1 + R_2)}$$



Solución 4.6 

Dada la configuración de la figura, se llamará V_A y V_B a los potenciales de la placa interior y exterior respectivamente. Dado que inicialmente el ión de masa m y carga q se encuentra en reposo y es acelerado mediante una diferencia de potencial, se tiene que por conservación de la energía

$$U_{\text{inicial}} + K_{\text{inicial}} = U_{\text{final}} + K_{\text{final}} \implies \frac{1}{2}mv_{\text{inicial}}^2 + qV_{\text{inicial}} = \frac{1}{2}mv_{\text{final}}^2 + qV_{\text{final}}$$

De este modo si $v_{\text{inicial}} = 0$, $V_{\text{inicial}} = V_0$, $V_{\text{final}} = 0$, se obtiene que la velocidad con la cual el ión entra a las placas cilíndricas es

$$v = \sqrt{\frac{2qV_0}{m}}$$

Por otra parte, si se supone una densidad de carga σ_a (a priori desconocida) en el electrodo interior y se obvian efectos de borde, el campo eléctrico que existe dentro de los electrodos semicilíndricos es el mismo en el que existiría en un capacitor cilíndrico completo, por lo tanto por ley de Gauss para $r \in [a, b]$ se tiene que

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \implies E(r) \cdot 2\pi r L = \frac{\sigma_a \cdot 2\pi a L}{\epsilon_0} \implies \vec{E}(r) = \frac{\sigma_a a}{\epsilon_0 r} \hat{r}$$

Volviendo a analizar el movimiento del ión, si se desea que cumpla un movimiento circular de radio r_0 , su aceleración en coordenadas cilíndricas debe estar dada por

$$\vec{a} = -r_0 \dot{\theta}^2 \hat{r} \implies \vec{a} = -\frac{v^2}{r_0} \hat{r}$$

Por Newton

$$\vec{F} = q\vec{E}(r_0) = m\vec{a} \implies q \cdot \frac{\sigma_a a}{\epsilon_0 r_0} = -m \cdot \frac{v^2}{r_0} \implies \sigma_a = -\frac{2V_0\epsilon_0}{a}$$

Reemplazando

$$\vec{E}(r) = -\frac{2V_0}{r} \hat{r}$$

Finalmente

$$V_B - V_A = \int_a^b \frac{2V_0}{r} dr = 2V_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Solución 4.8 

- a) Se supondrá conocida la densidad de carga σ_a de la esfera de radio a . Dada la simetría esférica y que el conductor de radios b y c está descargado se tiene por ley de Gauss que

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi a^2 \sigma_a}{\epsilon_0} \implies E(r) = \frac{\sigma_a a^2}{\epsilon_0 r^2}$$

En resumen

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < a \\ \frac{\sigma_a a^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} & a \leq r < b \\ 0 & b \leq r < c \\ \frac{\sigma_a a^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} & r \geq c \end{cases}$$



En los intervalos $[0, a) \cup [b, c)$ el campo eléctrico es 0 debido a que en ese espacio hay un conductor.

Luego dado que el potencial sobre en la esfera es V_0 se tiene que

$$V_0 = - \int_{\infty}^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^c \frac{\sigma_a a^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} - \int_c^b 0 \cdot dr \hat{r} - \int_b^a \frac{\sigma_a a^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} = \frac{\sigma_a a^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)$$

De la última expresión

$$\sigma_a = \frac{\epsilon_0 V_0}{a^2 \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)}$$

Dado que esta carga induce las otras cargas de inducción en el otro conductor, se cumple que

$$4\pi a^2 \sigma_a = -4\pi b^2 \sigma_b \quad (\text{inducción de carga en la superficie interior})$$

$$4\pi b^2 \sigma_b = -4\pi c^2 \sigma_c \quad (\text{inducción de carga en la superficie exterior})$$

Por lo tanto

$$\sigma_b = -\frac{a^2}{b^2} \sigma_a = -\frac{\epsilon_0 V_0}{b^2 \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)}$$

$$\sigma_c = -\frac{b^2}{c^2} \sigma_b = \frac{\epsilon_0 V_0}{c^2 \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)}$$

Usado lo calculado en la parte anterior se tiene que el campo eléctrico es

- Si $r \in [0, a) \cup [b, c)$

$$\vec{E} = 0$$

- Si $r \in (a, b] \cup (c, \infty)$.

$$\vec{E} = \frac{\sigma_a a^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{V_0}{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) r^2} \hat{r}$$

El potencial estará dado por intervalos

- Si $r \in (c, \infty)$.

$$V(r) = - \int_{\infty}^c \frac{\sigma_a a^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} = \frac{\sigma_a a^2}{\epsilon_0 r} = \frac{V_0}{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) r}$$

- Si $r \in (b, c]$.

$$V(r) = - \int_{\infty}^c \frac{\sigma_a a^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} - \int_c^r 0 \hat{r} \cdot dr \hat{r} = \frac{\sigma_a a^2}{\epsilon_0 c} = \frac{V_0}{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) c}$$



- Si $r \in (a, b]$.

$$V(r) = - \int_{\infty}^c \frac{\sigma_a a^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} - \int_c^r 0 \hat{r} \cdot dr \hat{b} - \int_b^r \frac{\sigma_a a^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} = \frac{\sigma_a a^2}{\epsilon_0 c} + \frac{\sigma_a a^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$$

$$V(r) = \frac{V_0 \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{r} \right)}{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)}$$

- Si $r \in [0, a]$.

$$V(r) = V_0$$

d) La conexión a tierra provoca los siguientes cambios:

- La conexión a tierra provoca por definición potencial nulo en cada punto del conductor, luego para que esta condición se cumpla es necesario que cargas negativas suban de la tierra y anulen la carga que existe en la capa de radio c del conductor. En consecuencia se tendrá $\sigma_c = 0$, con lo cual se cumple que el potencial es nulo en el conductor, ya que σ_b anula el campo eléctrico es producido por σ_a (las cuales se mantienen constantes). De esta forma, el potencial es nulo para cualquier radio $r > c$.
- El campo eléctrico en ese caso vale
 - Si $r \in (0, a) \cup [b, \infty)$.

$$\vec{E} = 0$$

- Si $r \in [a, b)$.

$$\vec{E} = \frac{V_0}{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) r^2} \hat{r}$$

- El potencial en este caso vale
 - Si $r \in [b, \infty)$.

$$V(r) = 0$$

- Si $r \in [a, b)$.

$$V(r) = \frac{V_0}{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$$

- Si $r \in [0, a)$.

$$V(r) = \frac{V_0}{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Solución 4.9

La esfera conductora tiene una carga $+Q$ que se puede distribuir tanto en su superficie exterior como dentro de la cavidad interior. Dado que no existe ninguna carga dentro de la burbuja, la carga que se



acumula en el borde de la misma es nula. Luego, la carga $+Q$ se distribuye homogéneamente en la superficie exterior de radio R .

De lo anterior, también se deduce que el campo eléctrico es nulo en cualquier punto dentro de la esfera ($r \leq R$), incluyendo los puntos dentro de la burbuja.

Entonces, el campo eléctrico para $r \geq R$ puede ser determinado por Ley de Gauss

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \implies \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Lo anterior implica que el potencial en $V(R)$ es

$$V(R) = - \int_{\infty}^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Como el campo eléctrico es nulo en todos los puntos $r \leq R$, el potencial es constante en todos los puntos (incluyendo la cavidad) y tiene un valor de $V(R)$ (valor del borde). Nótese el hecho que no es necesario una forma esférica para que este análisis siga siendo válido.

Solución 4.12

- a) Dada la simetría cilíndrica del problema, es posible usar la Ley de Gauss. Para encontrar las densidades de cargas inducidas en las superficies conductoras σ_a y σ_b se aplica Gauss para un $r \in [a, b]$

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_a \cdot 2\pi a L}{\epsilon_0}$$

Por una parte dentro de un conductor siempre $\vec{E} = 0$, por lo que $\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$. Luego se debe cumplir que

$$\frac{\sigma_a \cdot 2\pi a L}{\epsilon_0} = 0 \implies \sigma_a = 0$$

Como el conductor interior está cargado con $+Q$, las densidades de sobre sus superficies deben cumplir que

$$\sigma_a \cdot 2\pi a L + \sigma_b \cdot 2\pi b L = Q \implies \sigma_b = \frac{Q}{2\pi b L}$$

Análogamente, al aplicar Gauss para $r \in [c, d]$ se tiene que

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{Q + \sigma_c \cdot 2\pi c L}{\epsilon_0} = 0 \implies \sigma_c = -\frac{Q}{2\pi c L}$$

Finalmente como el conductor está cargado $-Q$ se tiene que

$$\sigma_c \cdot 2\pi c L + \sigma_d \cdot 2\pi d L = -Q \implies \sigma_d = 0$$

- b) Para determinar el potencial, previamente hay que determinar el campo eléctrico. En base a lo anterior para $r < b$ se tiene $q_{enc} = 0$, luego

$$\vec{E} = 0$$



Para $r \in (b, c)$ se tiene $q_{enc} = Q$, por lo que

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \implies E(r) \cdot 2\pi r L = \frac{Q}{\epsilon_0} \implies \vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r L} \hat{r}$$

Luego para $r > c$ nuevamente $q_{enc} = 0$ (notar que toda la carga $-Q$ se acumula en la superficie en $r = c$), entonces

$$\vec{E} = 0$$

Entonces tomando el potencial $V(r \rightarrow \infty) = 0$, se obtiene que

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Para un $r > c$ se tiene que

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E}(r > c) \cdot d\vec{l} = 0$$

Para $r \in [b, c]$ se tiene que

$$V(r) = - \int_{\infty}^c \vec{E}(r > c) \cdot d\vec{l} - \int_c^r \vec{E}(b < r < c) \cdot d\vec{l} = - \int_c^r \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r L} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{c}{r}\right)$$

Finalmente para $r < b$

$$V(r) = - \int_{\infty}^c \vec{E}(r > c) \cdot d\vec{l} - \int_c^b \vec{E}(b < r < c) \cdot d\vec{l} - \int_b^r \vec{E}(r < b) \cdot d\vec{l} = - \int_c^b \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{c}{b}\right)$$

c) La diferencia de potencial está dada por

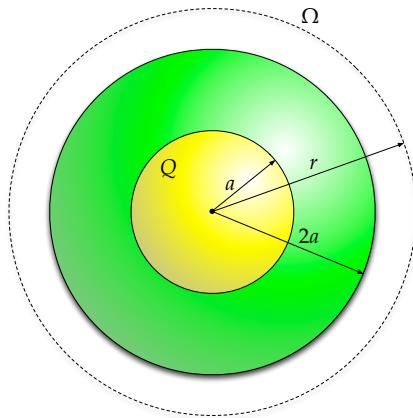
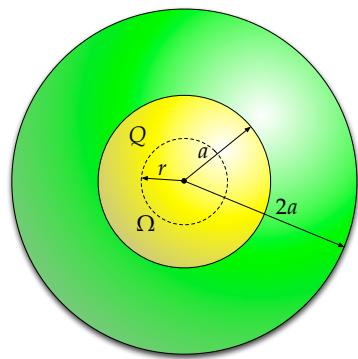
$$V(c) - V(b) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{c}{b}\right)$$

Solución 4.14

Para iniciar este problema se debe primero intuir como será el potencial en todo el espacio, para ello se debe notar lo siguiente:

- La función potencial ϕ es continua en todo el espacio.
- Un conductor es una equipotencial, por lo que en cualquier punto dentro de él la función ϕ tendrá el mismo valor. Por lo tanto para $r \in [a, 2a]$ la función ϕ valdrá un valor ϕ_0 constante.
- La Ley de Gauss es ciega, sólo le importa la cantidad de carga encerrada dentro de la superficie gaussiana que se este tomando (respetando la simetría del problema) por lo que para $r > 2a$ el campo eléctrico será el mismo si existiese o no el conductor. Evidentemente pasará lo mismo para $r < a$.



Figura 4.1: Campo Eléctrico para $r > 2a$ Figura 4.2: Campo Eléctrico para $r < a$

Dadas las consideraciones anteriores y la simetría esférica, procedemos a calcular el campo eléctrico en todo el espacio (para luego calcular el potencial).

- Para $r > 2a$.

$$\iint_{\Omega} \vec{E}(r) d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \implies E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \implies \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

- Para $a < r < 2a$.

$$\vec{E}(r) = 0$$

- Para $r < a$.

$$\iint_{\Omega} \vec{E}(r) d\vec{S} = \frac{q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0} \implies E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Qr^3}{\epsilon_0 a^3} \implies \vec{E}(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \hat{r}$$

Luego el potencial estará dado por

- Para $r > 2a$.

$$\phi(r) = \int_{\Gamma} \vec{E}(r) d\vec{r} = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- Para $a \leq r \leq 2a$. Dado que el potencial es continuo, tendrá el mismo valor que tiene en la frontera para el caso anterior, es decir:

$$\phi(r) = \phi(2a) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a}$$

- Para $r < a$.

$$\phi(r) = - \int_{\infty}^r E(r) dr = - \left(\int_{\infty}^{2a} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \underbrace{\int_{2a}^a E(r) dr}_{=0} + \int_a^r \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} dr \right) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q(a^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 a^3}$$



Finalmente el gráfico estará dado por:

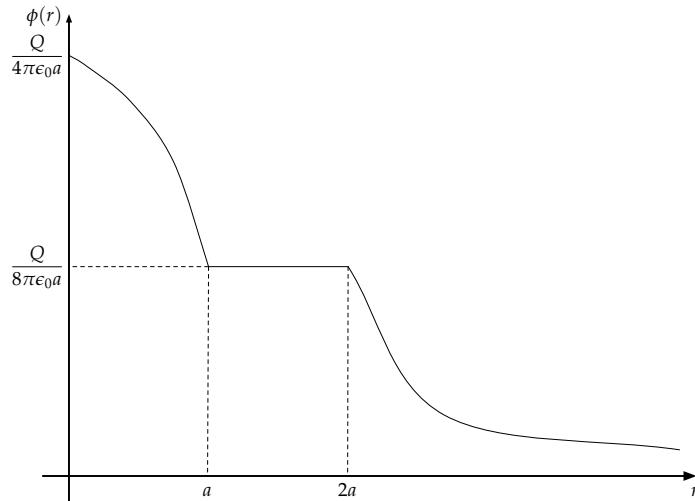


Figura 4.3: Gráfico de la función $\phi(r)$

Solución 4.15

- a) Usando la geometría del problema, se puede deducir que el campo eléctrico es de la forma $\vec{E} = E(z)\hat{z}$. En particular cabe notar que como $\rho(z) = \rho(-z)$ el campo eléctrico en un punto z_0 sobre el eje z apuntará en el sentido inverso en punto $-z_0$ de modo que $|\vec{E}(-z_0)| = |\vec{E}(z_0)| \implies \vec{E}(-z_0) = -\vec{E}(z_0)\hat{z}$ (ie. existe una simetría del campo eléctrico con respecto al plano xy). Para encontrar el valor del campo eléctrico es necesario usar la ley de Gauss tomando un cilindro centrado en origen con tapas de área A . Luego

- Para $|z_0| \leq a$

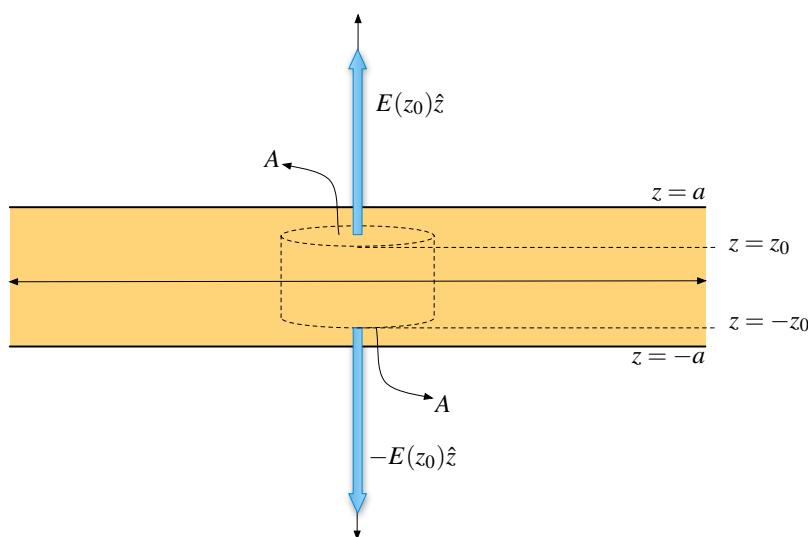


Figura 4.4: Superficie Gaussiana para $|z| \leq a$



Usando ley de Gauss para calcular el campo eléctrico en punto $z_0 \in [-a, a]$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\text{Tapas}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0} \\
 & E(z_0)\hat{z} \cdot A\hat{z} + -E(z_0)\hat{z} \cdot -A\hat{z} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\text{Cilindro}} \rho(z) dV \\
 & 2A \cdot E(z_0) = \frac{A}{\epsilon_0} \int_{-z_0}^{z_0} \rho_0 \left[\exp\left(-\frac{z+a}{\delta}\right) + \exp\left(\frac{z-a}{\delta}\right) \right] dz \\
 & E(z_0) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left[\int_{-z_0}^{z_0} \exp\left(-\frac{z+a}{\delta}\right) dz + \int_{-z_0}^{z_0} \exp\left(\frac{z-a}{\delta}\right) dz \right] \\
 & = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left[-\delta \exp\left(-\frac{z_0+a}{\delta}\right) \Big|_{-z_0}^{z_0} + \delta \exp\left(\frac{z_0-a}{\delta}\right) \Big|_{-z_0}^{z_0} \right] \\
 & = \frac{\rho_0 \delta}{\epsilon_0} \left[-\exp\left(-\frac{z_0+a}{\delta}\right) + \exp\left(\frac{z_0-a}{\delta}\right) \right] \\
 & = -\frac{\rho_0 \delta}{\epsilon_0} \left[\exp\left(-\frac{z_0+a}{\delta}\right) - \exp\left(\frac{z_0-a}{\delta}\right) \right]
 \end{aligned}$$

Ahora se puede concluir que $\vec{E}(z_0) = E(z_0)\hat{z}$ para $z_0 \in [0, a]$ y $\vec{E}(z_0) = -E(z_0)\hat{z}$ para $z_0 \in [-a, 0]$, pero dado que $E(-z_0) = -E(z_0)$, se resume que

$$\vec{E}(z_0) = -\frac{\rho_0 \delta}{\epsilon_0} \left[\exp\left(-\frac{z_0+a}{\delta}\right) - \exp\left(\frac{z_0-a}{\delta}\right) \right] \hat{z}$$

- Para $|z_0| > a$

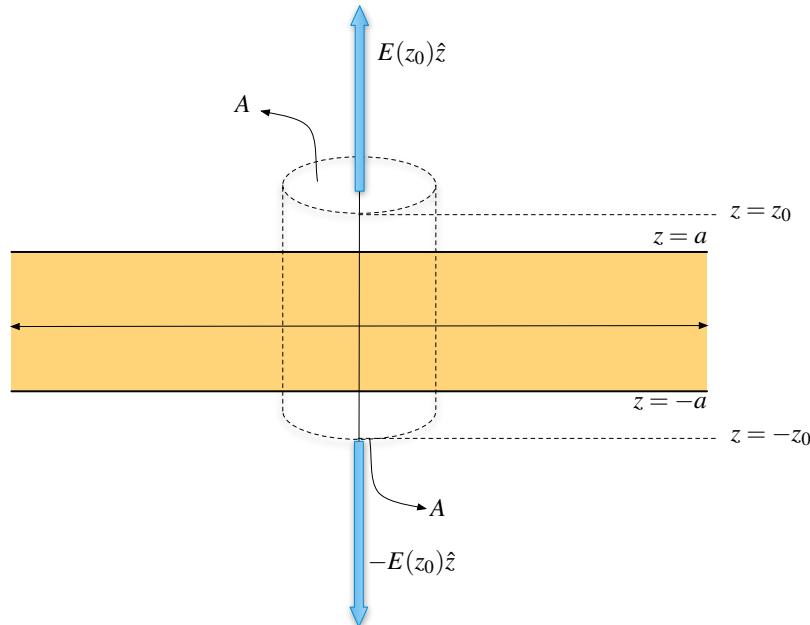


Figura 4.5: Superficie Gaussiana para $|z| > a$



Análogo al cálculo anterior, se tiene que para un punto z_0 fuera del bloque macizo se tiene

$$\begin{aligned} \iint_{\text{Tapas}} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0} \\ E(z_0) &= \frac{1}{2\epsilon_0} \int_{-a}^a \rho_0 \left[\exp\left(-\frac{z+a}{\delta}\right) + \exp\left(\frac{z-a}{\delta}\right) \right] dz \\ &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left[\int_{-a}^a \exp\left(-\frac{z+a}{\delta}\right) dz + \int_{-a}^a \exp\left(\frac{z-a}{\delta}\right) dz \right] \\ &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left[-\delta \exp\left(-\frac{z+a}{\delta}\right) \Big|_{-a}^a + \delta \exp\left(\frac{z-a}{\delta}\right) \Big|_{-a}^a \right] \\ &= \frac{\rho_0 \delta}{\epsilon_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right) \right] \end{aligned}$$

Por lo que se concluye que

$$\vec{E}(z_0) = \begin{cases} \frac{\rho_0 \delta}{\epsilon_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right) \right] \hat{z} & z_0 > a \\ -\frac{\rho_0 \delta}{\epsilon_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right) \right] \hat{z} & z_0 < -a \end{cases}$$

b) La aproximación dice que $\delta \ll a$ por lo que se asumirá que $\frac{a}{\delta} \rightarrow \infty$. Para $|z| > a$, se tiene que:

$$E(z_0) = \frac{\rho_0 \delta}{\epsilon_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right) \right] \approx \frac{\rho_0 \delta}{\epsilon_0}$$

Por lo tanto

$$\vec{E}(z_0) = \begin{cases} \frac{\rho_0 \delta}{\epsilon_0} \hat{z} & z_0 > a \\ -\frac{\rho_0 \delta}{\epsilon_0} \hat{z} & z_0 < -a \end{cases}$$

Para el caso $|z| < a$ se puede hacer de más de una forma, una es analizando la expresión

$$\begin{aligned} E(z_0) &= \frac{\rho_0 \delta}{\epsilon_0} \left[-\exp\left(-\frac{z_0+a}{\delta}\right) + \exp\left(\frac{z_0-a}{\delta}\right) \right] \\ &= \frac{\rho_0 \delta}{\epsilon_0} \exp\left(-\frac{a}{\delta}\right) \left[-\exp\left(-\frac{z_0}{\delta}\right) + \exp\left(\frac{z_0}{\delta}\right) \right] \end{aligned}$$

Se tiene que $\exp\left(-\frac{a}{\delta}\right) \rightarrow 0$, por lo que $E(z_0) \rightarrow 0$. Sin embargo hay que tener cuidado ya que cuando $z_0 \rightarrow a^-$ (en las cercanías del borde), el valor de $\exp\left(\frac{z_0}{\delta}\right)$ se vuelve muy grande y anula el efecto anterior dejando $E(z_0 \rightarrow a)$ constante (¡la aproximación provoca que la función $E(z_0)$ crezca muy rápido en las cercanías de a^- !).



El análisis también es válido para $z_0 \rightarrow -a$ por simetría.

Otra forma mucho más clara para verlo es usar una aproximación según Taylor al primer orden, es decir

$$\begin{aligned} E(z_0) &= \frac{\rho_0 \delta}{\epsilon_0} \left[-\exp\left(-\frac{z_0 + a}{\delta}\right) + \exp\left(\frac{z_0 - a}{\delta}\right) \right] \\ &\approx \frac{\rho_0 \delta}{\epsilon_0} \left[-\exp\left(-\frac{a}{\delta}\right) + \frac{z_0}{\delta} \exp\left(-\frac{a}{\delta}\right) + \exp\left(-\frac{a}{\delta}\right) + \frac{z_0}{\delta} \exp\left(-\frac{a}{\delta}\right) \right] \\ &\approx \frac{2\rho_0 z_0}{\epsilon_0} \exp\left(-\frac{a}{\delta}\right) \end{aligned}$$

Si examina la expresión, se sabe que el valor z_0 está acotado por “ a ” por lo tanto la expresión no puede crecer infinitamente y no puede contrastar el hecho que $\exp\left(-\frac{a}{\delta}\right) \rightarrow 0$.

Se concluye que $\vec{E} = 0$ para $z_0 \in (-a, a)$.

Como ya se vio, los casos interesantes ocurren en los valores $z_0 = a$ o $z_0 = -a$, en el cual aparece una discontinuidad entre los valores de campo eléctrico. Dado los resultados anteriores, podemos concluir que el material se comporta como un bloque conductor, dentro de él se tiene $\vec{E} = 0$ y fuera de él se tiene un valor constante (debido a la carga en sus caras). El término $\rho_0 \delta \rightarrow \sigma$ corresponde a la densidad de carga superficial en las caras del conductor. Las líneas de carga se representan en la Figura 4.6.

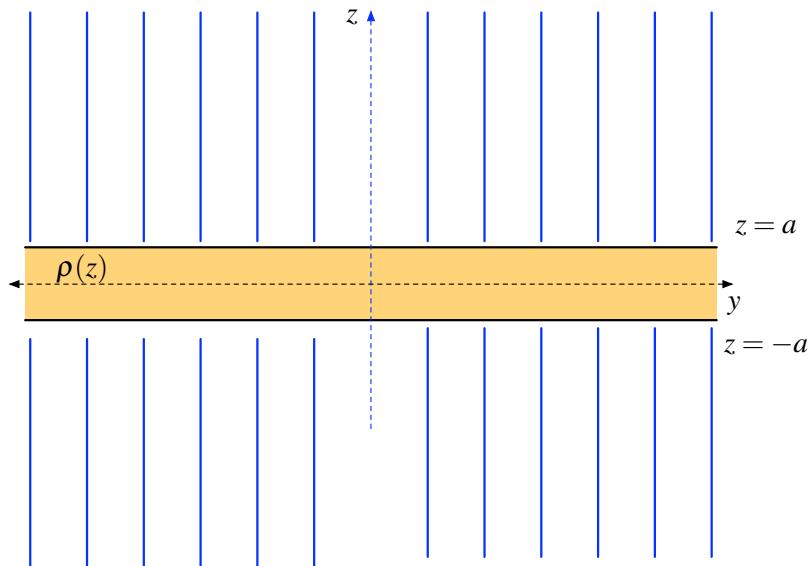


Figura 4.6: Líneas de Campo perpendiculares al bloque (en azul).

Las líneas de campo poseen esta forma debido a que siguen la dirección del campo eléctrico (paralelo al eje z). Dentro del conductor no hay líneas debido a que no hay campo eléctrico.



- c) Usando de referencia $V(z = -a) = V_0$ se tiene que la expresión genérica para el potencial eléctrico es

$$V(z) - V(-a) = - \int_{-a}^z E(z) dz \implies V(z) = - \int_{-a}^z E(z) dz + V_0$$

Analizando por intervalos:

- $-a \leq z \leq a$

$$V(z) = - \underbrace{\int_{-a}^z E(z) dz}_{0} + V_0 = V_0$$

- $z > a$

$$V(z) = - \underbrace{\int_{-a}^a E(z) dz}_{0} - \int_a^z E(z) dz + V_0 = V_0 - \int_a^z \frac{\rho_0 \delta}{\epsilon_0} dz = V_0 - \frac{\rho_0 \delta}{\epsilon_0} (z - a)$$

- $z < -a$

$$V(z) = - \int_{-a}^z E(z) dz + V_0 = V_0 - \int_{-a}^z -\frac{\rho \delta}{\epsilon_0} dz = V_0 + \frac{\rho_0 \delta}{\epsilon_0} (z + a)$$

Notar que el valor del potencial es simétrico con respecto al plano xy en el caso que $|z| > a$, ya que se cumple que $V(-z_0) = V(z_0)$. Lo anterior es intuitivo, ya que el trabajo de mover una carga desde el origen hasta z_0 será el mismo que del origen a $-z_0$, todo debido a la simetría.

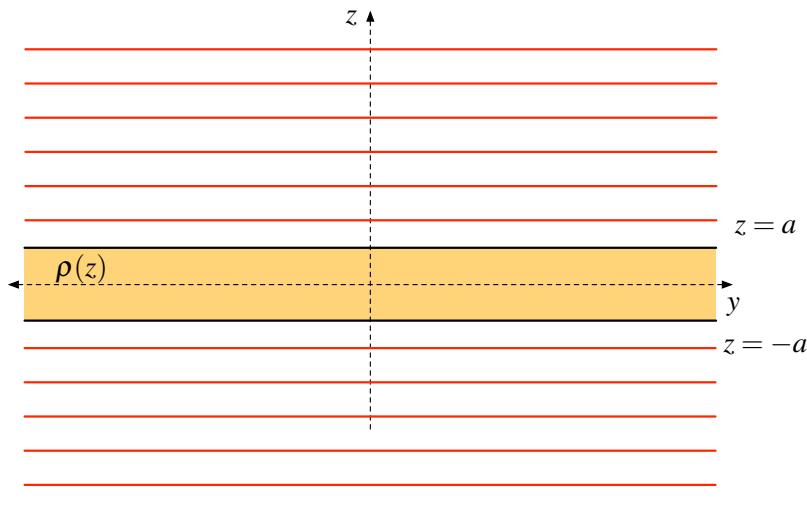


Figura 4.7: Equipotenciales paralelas al plano xy (en rojo).

Las equipotenciales son las mostradas en la Figura 4.7, estas superficies son planos paralelos al xy , ya que el potencial depende sólo del valor de la altura z .



Solución 4.16 

a) Se consideran los distintos casos según la distancia r desde el centro de la esfera interior.

- $\vec{E}(0 < r < R_1)$

Dado que el cilindro interior es un conductor,

$$\vec{E} = 0$$

- $\vec{E}(R_1 < r < R_2)$

Considerando la simetría del problema, se puede hacer uso de la Ley de Gauss:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

Nótese que no hay carga encerrada en el interior de un radio $r < R_2$, antes de la densidad de carga. Luego se tiene:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \implies \vec{E} = 0$$

La densidad de carga sobre un conductor puede ser obtenida de

$$\vec{E}(R_1) = \frac{\sigma(r = R_1)}{\epsilon_0} \hat{r} \implies \sigma(r = R_1) = 0$$

- $\vec{E}(R_2 < r < R_3)$

Haciendo uso de la Ley de Gauss con un procedimiento análogo al anterior, se tendrá que:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \\ \int_0^{2\pi} \int_0^h Er d\theta dz &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{R_2}^r \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho_0 r dr d\theta dz \\ 2\pi rh E &= \frac{\rho_0 \pi (r^2 - R_2^2) h}{\epsilon_0} \\ \vec{E} &= \frac{\rho_0 (r^2 - R_2^2)}{2r\epsilon_0} \hat{r} \end{aligned}$$

- $\vec{E}(R_3 < r < R_4)$

Haciendo un cálculo similar al anterior, pero considerando que como $r > R_3$, la carga encerrada se considerará siempre hasta R_3 . Luego:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \\ \int_0^{2\pi} \int_0^h Er d\theta dz &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{R_2}^{R_3} \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho_0 r dr d\theta dz \\ \vec{E} &= \frac{\rho_0 (R_3^2 - R_2^2)}{2r\epsilon_0} \hat{r} \end{aligned}$$

Por otro lado, $\vec{E}(R_4) = \frac{\sigma(r=R_4)}{\epsilon_0}(-\hat{r}) \implies \sigma(r = R_4) = -\frac{\rho_0(R_3^2 - R_2^2)}{2R_4}$.



- $\vec{E}(R_4 < r < R_5)$

Por tratarse del espacio interior entre conductores,

$$\vec{E} = 0$$

- $\vec{E}(R_5 < r)$

Como en R_5 se tiene un casquete conectado a tierra, para $r \geq R_5$ el campo se anulará.
Por lo cual $\sigma(r = R_5) = 0$.

b) La diferencia de potencial esta dada por la integral de camino del campo entre R_1 y R_4 :

$$\begin{aligned}\Delta V &= - \int_{R_1}^{R_4} \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= - \int_{R_1}^{R_2} E(R_1 < r < R_2) dr - \int_{R_2}^{R_3} E(R_2 < r < R_3) dr - \int_{R_3}^{R_4} E(R_3 < r < R_4) dr \\ &= - \int_{R_2}^{R_3} \frac{\rho_0 (r^2 - R_2^2)}{2r\epsilon_0} dr - \int_{R_3}^{R_4} \frac{\rho_0 (R_3^2 - R_2^2)}{2r\epsilon_0} dr \\ &= - \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left(\int_{R_2}^{R_3} r dr + \int_{R_2}^{R_3} \frac{R_2^2}{r} dr + \int_{R_3}^{R_4} \frac{R_3^2 - R_2^2}{r} dr \right) \\ &= - \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left(\frac{R_3^2 - R_2^2}{2} + R_2^2 \ln \left(\frac{R_3}{R_2} \right) + (R_3^2 - R_2^2) \ln \left(\frac{R_4}{R_3} \right) \right)\end{aligned}$$



Ecuación de Laplace/Poisson y Método de las Imágenes

I. Problemas Propuestos

Problema 5.1



Una lámina no conductora coincide con el plano xy . Las únicas cargas en el sistema están sobre la lámina. Se sabe que en el semiespacio $z > 0$ el potencial es $V(x, z) = V_0 e^{-kz} \cos kx$, donde V_0 y k son constantes.

- Verifique que este potencial satisface la ecuación de Laplace en el semiespacio $z > 0$.
- Encuentre la ecuación para las líneas de campo eléctrico
- Encuentre la distribución de carga sobre la lámina.

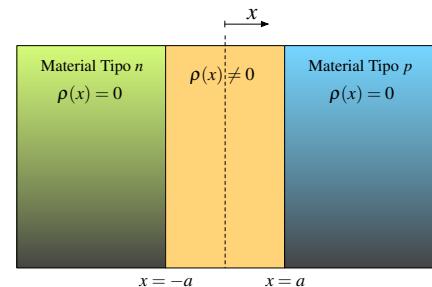
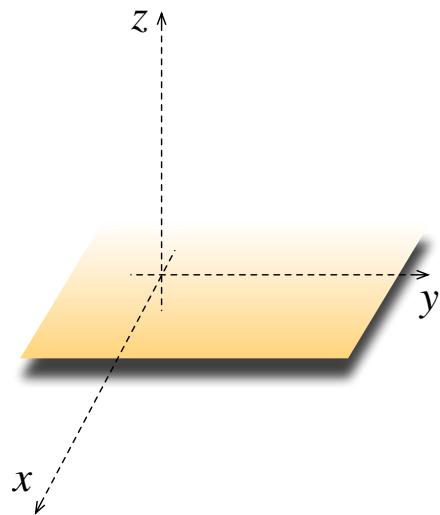
Problema 5.2



La parte medular de una memoria RAM y otros dispositivos semiconductores es la “juntura np ”, que puede modelarse con la distribución de carga bosquejada en la figura, en que la linea punteada representa el plano $x = 0$:

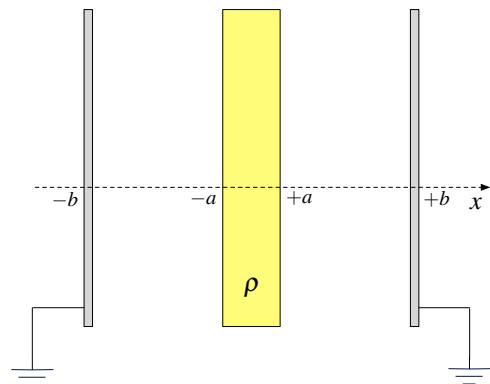
$$\rho(x) = \begin{cases} +\rho_0 & \text{si } -a < x < 0 \\ -\rho_0 & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{en el resto del espacio} \end{cases}$$

- Determine la diferencia de potencial entre el seno de la zona n y el de la zona p (es decir, entre un punto $x_1 < -a$ y otro $x_2 > a$).
- Si $a = 300 \text{ nm}$ y $\rho_0 = 1200 \text{ C/m}^3$, calcule numéricamente el valor de la diferencia de potencial (considere $\epsilon_0 \approx 9 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$).

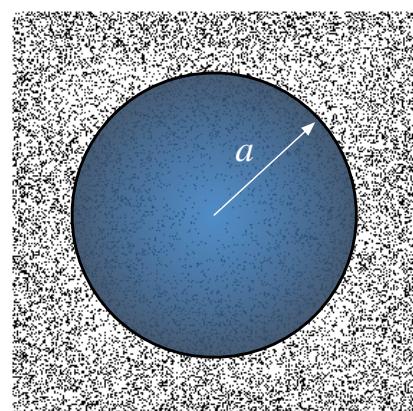


Problema 5.3  

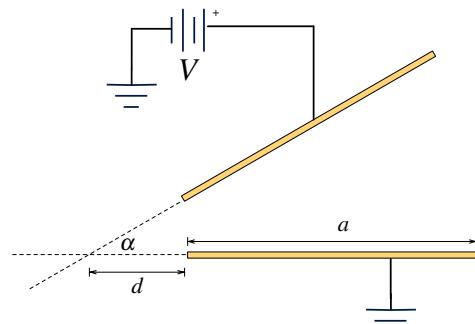
Considere la configuración mostrada en la Figura, la cual consiste en dos planos infinitos conectados a tierra ubicados en $x = -b$ y $x = b$, y bloque infinito con una densidad de carga volumétrica constante ρ que ocupa el espacio entre $x \in [-a, a]$. Usando la ecuación de Laplace y Poisson, determine el potencial eléctrico entre las dos placas.

**Problema 5.4**   

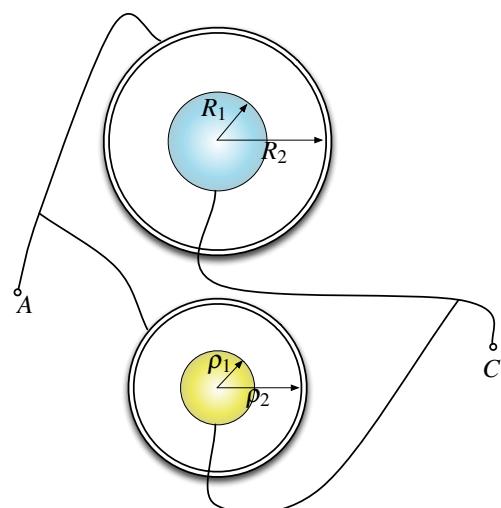
Considere una esfera maciza de radio a con carga desconocida, la cual se encuentra totalmente inmersa en un fluido que posee una densidad volumétrica de carga con simetría radial dada por $\rho(r) = -\varepsilon_0 k^2 \Phi(r)$ ($r > a$) donde k es una constante, ε_0 la permitividad del vacío y $\Phi(r)$ el potencial eléctrico. Experimentalmente se ha determinado que el potencial en el borde de la esfera es V_0 con respecto al infinito ($\Phi(\infty) = 0$) y la distribución volumétrica de carga dentro de la esfera es uniforme. Determine la densidad de carga $\rho(r)$ y el potencial eléctrico $\Phi(r)$ en todo el espacio.

**Problema 5.5**   

Considere dos placas conductoras cuadradas de lado a , las cuales forman un pequeño ángulo α . Las placas están a una distancia d del vértice como se ilustra la figura y se encuentran una diferencia de potencial V . Determine la capacidad del sistema.

**Problema 5.6**   

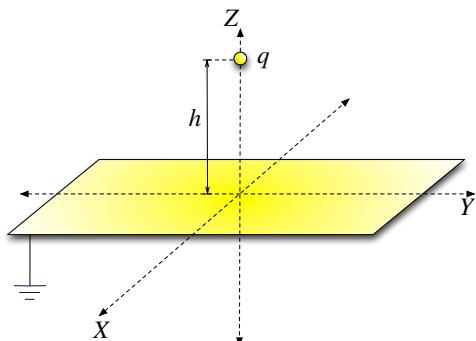
Considere dos condensadores formado por dos casquitos esféricos conductores concéntricos de radios R_1, R_2, ρ_1, ρ_2 respectivamente. Cada conductor en su polo sur tiene una pequeña perforación para conectar el casquete inferior (ver figura). Si apropiadamente se conecta cables a los casquitos exteriores y a los interiores, como se ilustra en la figura, encuentre usando la ecuación de Laplace la capacitancia del condensador entre los puntos A y C .



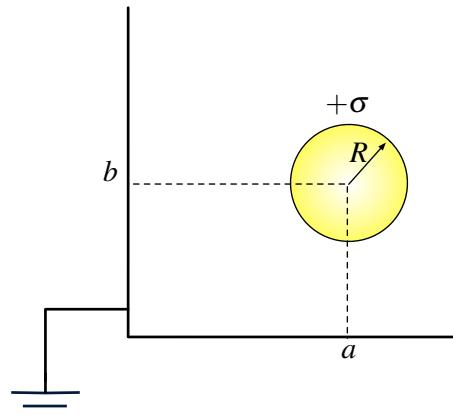
Problema 5.7

Considere un plano conductor $z = 0$, conectado a tierra y frente al cual se ha colocado una carga q en el punto $x = 0, y = 0, z = h$.

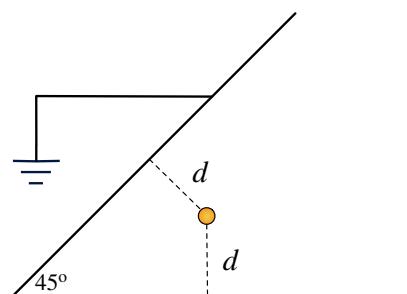
- Calcule la densidad de carga sobre el plano. Exprese su resultado en función de la distancia del origen a un punto cualquier sobre el plano.
- Calcule la carga encerrada en un disco de radio d dibujado sobre el plano conductor con centro en el origen. ¿Para qué valor de d la carga encerrada por el disco es $-\frac{q}{2}$?
- Calcule el trabajo que es necesario realizar para llevar una carga q desde $x = 0, y = 0, z = h$ hasta $x = 0, y = 0, z = 2h$, en presencia del plano conectado a tierra.

**Problema 5.8**

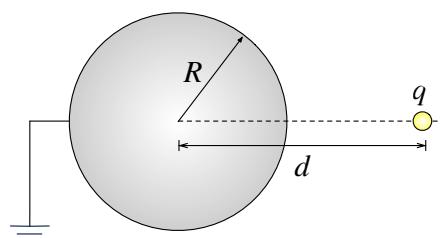
Considere un casquete esférico cargado de radio R y con una densidad de carga superficial σ . Si el centro del casquete esférico se sitúa a una distancia horizontal a y vertical b con respecto a un plano conductor infinito doblado en 90° . Encuentre la densidad de carga σ_x y σ_y sobre los ejes y bosqueje su forma aproximada.

**Problema 5.9**

Considere una carga puntual q , la cual es colocada en la bisectriz de dos conductores ideales planos que forman un ángulo de 45° grados (ver figura). Si la carga tiene una distancia d a los conductores, encuentre la forma del potencial electrostático entre los conductores.

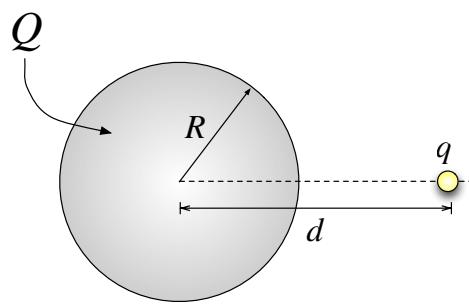
**Problema 5.10**

Una carga puntual q se ha puesto a una distancia d del centro de una esfera maciza metálica. Si la esfera se encuentra conectada a tierra, determine la densidad de carga sobre la esfera y la carga total inducida en ella.

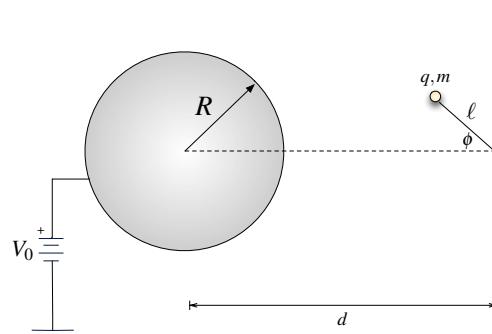


Problema 5.11 ★ ✓ ⓘ

Una carga puntual q se ha puesto a una distancia d del centro de una esfera maciza metálica. Si la esfera posee una carga neta Q , determine la fuerza que siente la carga q .

**Problema 5.12** ♦ ✓ ⓘ

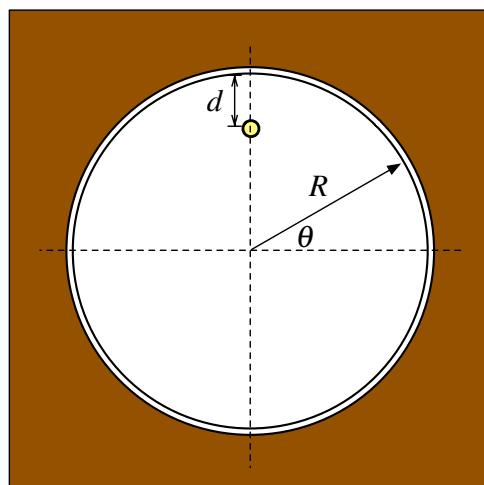
Considere una esfera metálica de radio R que se encuentra conectada a una fuente a potencial V_0 . Frente a ella se coloca un péndulo de largo ℓ atado a una muralla a distancia d del centro de la esfera. El péndulo lleva en su extremo una carga puntual q de masa m que forma un ángulo ϕ con respecto a la horizontal. Despreciando todos los efectos de la gravedad.



- Determine el módulo de la fuerza que siente la carga.
- Considere ahora que la fuente se apaga ($V_0 = 0$). Determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones del péndulo si es perturbado débilmente con respecto a la horizontal.

Problema 5.13 ★ ✓

En un túnel minero existe un cable que atraviesa toda su longitud, a una distancia d del techo del túnel. El túnel puede ser modelado como un cilindro infinito de radio R , de modo que el cable se mantiene siempre paralelo al eje imaginario del túnel. En cierto instante, el cable adquiere una densidad de carga lineal $+\lambda$ en toda su extensión.

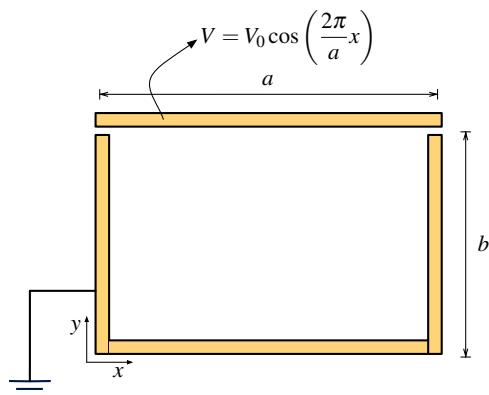


- Encontrar una expresión para el potencial $V(r, \theta)$ dentro del túnel, en términos de r y θ (coordenadas polares).
- Determinar la densidad de carga $\sigma(\theta)$ en la pared del túnel.
- ¿Cuál es la carga total por unidad de longitud inducida en la pared del túnel?
- ¿Cuál es la fuerza por unidad de largo que siente el cable?



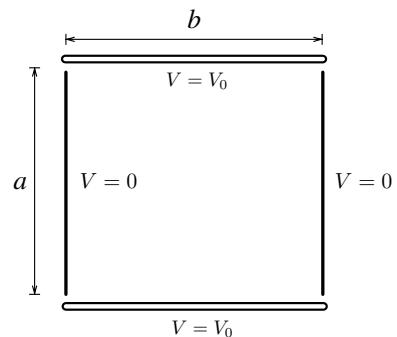
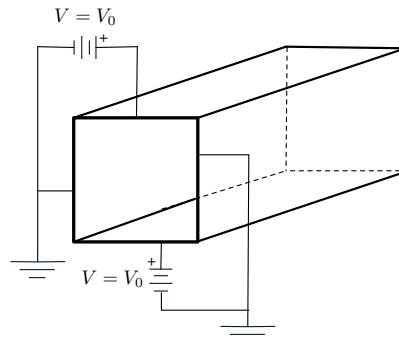
Problema 5.14   

Considere una guía de onda, la cual es una tubería metálica de sección rectangular de ancho a y alto b . Las placas inferior y laterales están conectadas a tierra, es decir, a potencial cero. La placa metálica superior tiene una tensión periódica de período $\frac{2\pi n}{a}$ (donde n es un número entero), $V(x, y = b) = V_0 \cos(\frac{2\pi n}{a}x)$, V_0 da cuenta de la intensidad de la tensión. Encuentre la tensión al interior, $V(x, y)$.

**Problema 5.15**  

Se tiene una guía rectangular infinita de lados a y b , compuesta por cuatro láminas planas conductoras. Dos de ellas se conectan a tierra, mientras que en las restantes existe un potencial constante de valor V_0 , tal como se indica en las Figuras.

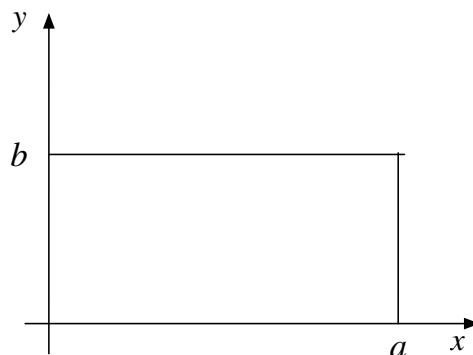
- ¿Cuáles son las condiciones de borde del problema?
- Calcule una expresión general para el potencial entre las placas usando el método de separación de variables. Muestre todos los casos posibles e indique el caso que cumplen las CB. Realice el cálculo considerando que cada lado actúa por si solo y finalmente superponga las soluciones encontradas.

**Problema 5.16**  

Usando el método de separación de variables, calcular el potencial $V(x, y)$ en el interior de un recinto plano como el indicado en la figura 1, con las siguientes condiciones de borde:

$$V(0, y) = 0; \quad V(x, 0) = 0;$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=a} = 0; \quad \left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{y=b} = -E_0$$



II. Soluciones

Solución 5.1 

- a) Se debe verificar que el potencial $V(x, z) = V_0 e^{-kz} \cos kx$, cumple la ecuación de Laplace. En efecto,

$$\begin{aligned}\nabla^2 V &= \frac{\partial^2 V(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, z)}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(-V_0 e^{-kz} k \sin kx) + \frac{\partial}{\partial z}(-V_0 k e^{-kz} \cos kx) \\ &= (-V_0 e^{-kz} k^2 \cos kx) + (V_0 k^2 e^{-kz} \cos kx) \\ &= 0\end{aligned}$$

- b) En primera instancia, el campo eléctrico para $z > 0$ es

$$\vec{E} = -\nabla V = V_0 e^{-kz} k \sin kx \cdot \hat{x} + V_0 k e^{-kz} \cos kx \cdot \hat{z}$$

Luego las líneas de campo están dadas por la solución de la siguiente EDO

$$\frac{dz}{dx} = \frac{E_z}{E_x} = \frac{\cos kx}{\sin kx} \implies z(x) = \frac{\ln(|\sin kx|)}{k} + C$$

con $C \in \mathbb{R}$.

- c) Dado que el plano es no conductor, las líneas de campo deben ser simétricas con respecto a él tanto para $z > 0$, como para $z < 0$. De este modo, el campo eléctrico generado por la densidad superficial de carga sobre el plano debe ser simétrico con respecto al plano xy . Luego, usando la condición de borde sobre la componente normal del campo eléctrico, es decir

$$E_{n1} - E_{n2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

donde $E_{1n} = -E_{2n} = V_0 k \cos kx$, se tiene que

$$\sigma = 2\epsilon_0 V_0 k \cos kx$$



Solución 5.4 

Consideremos inicialmente el caso $r > a$, por Poisson debe cumplirse que

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

adicionalmente como $\rho(r) = -\epsilon_0 k^2 \Phi(r)$ y hay simetría esférica, entonces la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = k^2 \Phi$$

Usando el cambio de variables a $\Phi(r) = r^{-1} \Psi(r)$, la ecuación se transforma en

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \left(-r^{-2} \Psi(r) + r^{-1} \frac{\partial \Psi(r)}{\partial r} \right) \right) = k^2 r^{-1} \Psi \implies \frac{\partial}{\partial r} \left(-\Psi(r) + r \frac{\partial \Psi(r)}{\partial r} \right) = k^2 r \Psi(r)$$

Volviendo a derivar nuevamente

$$-\frac{\partial \Psi(r)}{\partial r} + \frac{\partial \Psi(r)}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \Psi(r)}{\partial r^2} = k^2 r \Psi(r) \implies \frac{\partial^2 \Psi(r)}{\partial r^2} - k^2 \Psi(r) = 0$$

La última ecuación diferencial tiene por solución $\Psi(r) = Ae^{kr} + Be^{-kr}$, donde A y B son constantes por determinar. Devolviéndose con el cambio de variables

$$\Phi(r) = \frac{1}{r} (Ae^{kr} + Be^{-kr})$$

Por condiciones de borde $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$, es decir, debe cumplirse que $A = 0$ (el potencial no puede diverger en el infinito). Por otro lado $\Phi(a) = V_0$, luego $B = V_0 a e^{ka}$, por lo que el potencial y la densidad de carga para $r > a$ vale

$$\Phi(r) = \frac{V_0 a}{r} e^{k(a-r)} \implies \rho(r) = -k^2 \epsilon_0 \frac{V_0 a}{r} e^{k(a-r)}$$

Para $r < a$ existe una densidad de carga uniforme (o constante) la cual se denotará como ρ_0 (por determinar). El campo eléctrico dentro de una esfera de radio a , debe valer

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \implies E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi r^3 \rho_0}{3\epsilon_0} \implies \vec{E} = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \hat{r}$$

Dado que no existen densidades de carga superficiales en $r = a$, el campo eléctrico debe ser continuo en ese punto. De modo que se cumple que

$$\frac{\rho_0 a}{3\epsilon_0} = -\left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_0 a}{r} e^{k(a-r)} \right) \right|_{r=a} \implies \rho_0 = \frac{3\epsilon_0 V_0 (ka+1)}{a^2}$$

Finalmente, el potencial para $r < a$ estará dado por

$$\Phi(r) - V_0 = - \int_a^r \frac{V_0 (ka+1)r}{a^2} dr = -\frac{V_0 (ka+1)}{a^2} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) \implies \Phi(r) = V_0 - \frac{V_0 (ka+1)(r^2 - a^2)}{2a^2}$$



Solución 5.5 **Solución 1:**

Para encontrar la solución debe usarse la ecuación de Laplace. Se supone a priori que los efectos de borde del condensador son nulos porque el ángulo α es pequeño (entre más separadas estén las placas del condensador el campo eléctrico fuera del condensador deja de volverse despreciable).

Sea φ la función potencial entre las placas, en el espacio dentro del condensador se cumple la ecuación de Laplace $\nabla^2\varphi = 0$, donde $\varphi(\theta = 0) = 0$ y $\varphi(\theta = \alpha) = V$. Por geometría del problema, el potencial dentro de las placas debe ir aumentando desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \alpha$ con una dependencia única del ángulo (en coordenadas cilíndricas). Luego

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{d\theta^2} = 0 \implies \varphi(r) = A\theta + B$$

donde A y B son constantes por determinar. Usando las condiciones de borde, se obtiene que $A = \frac{V}{\alpha}$ y $B = 0$, por lo que

$$\varphi(r) = \frac{V}{\alpha}\theta$$

Por consiguiente, el campo eléctrico es

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{V}{\alpha r}\hat{\theta}$$

conocido el campo eléctrico dentro de las placas, puede despejarse el valor de la densidad de carga sobre la placa inferior como

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \Big|_{\text{borde}} \cdot \hat{n} = \epsilon_0 \vec{E}(\theta = 0) \cdot \hat{y} = -\frac{\epsilon_0 V}{\alpha x} \hat{y} \cdot \hat{y} = -\frac{\epsilon_0 V}{\alpha x}$$

La carga total de una placa del condensador es

$$Q = \iint \sigma dS = \int_0^a \int_d^{d+a} -\frac{\epsilon_0 V}{\alpha x} dx dy = -\frac{\epsilon_0 a V}{\alpha} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

Finalmente, la capacitancia es

$$C = \frac{|Q|}{V} = \frac{\epsilon_0 a}{\alpha} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

Solución 2:

El condensador de placas no paralelas puede descomponerse en pequeños condensadores de placas paralelas en paralelo (Figura 5.1). Cada uno de estos pequeños condensadores tiene un ancho infinitesimal dx , un espesor a y una separación de placas $x \tan \alpha$, de esta forma cada pequeño condensador tiene una capacidad

$$dC = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{\epsilon_0 a \cdot dx}{x \tan \alpha}$$

La capacitancia final del condensador de placas no paralelas va a ser la suma infinita de las capacidades de todos los pequeños condensadores. Finalmente, dado que α es pequeño $\tan \alpha \approx \alpha$, por lo



que se concluye que

$$C = \int dC = \int_d^{a+d} \frac{\epsilon_0 a \cdot dx}{x\alpha} = \frac{\epsilon_0 a}{\alpha} \ln \left(\frac{d+a}{d} \right)$$

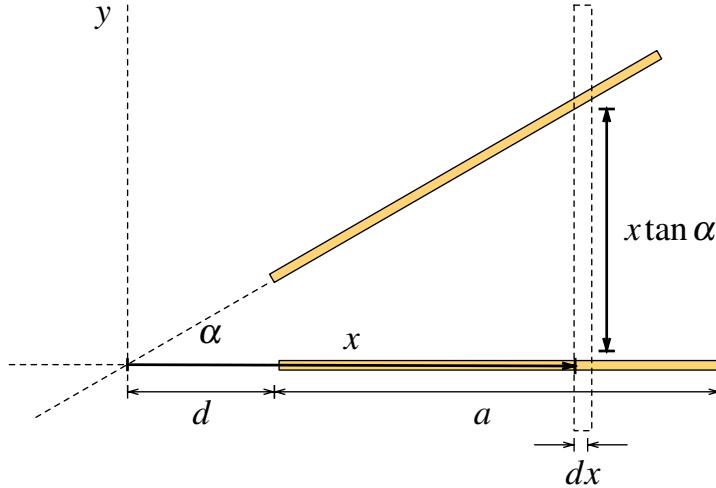


Figura 5.1: División Infinitesimal del Condensador.

Solución 5.6

En primera instancia se puede notar que ambos condensadores siguen la misma geometría esférica, por lo que bastaría calcular la capacitancia de uno y el resultado sería análogo para el otro. Además, dada las conexiones de los condensadores, el circuito puede ser modelado de forma que se indica en la Figura 5.2.

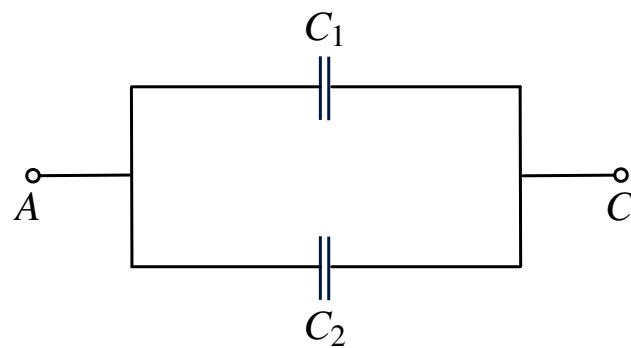
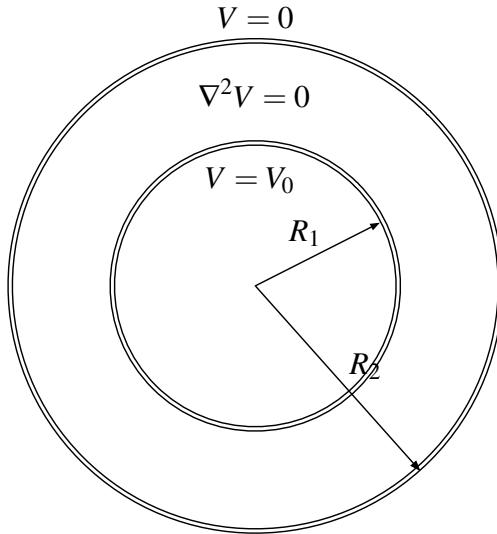


Figura 5.2: Modelo equivalente de los condensadores

Los condensadores C_1 (radios R_1 y R_2) y C_2 (radios ρ_1 y ρ_2) están en paralelo, por lo que capacitancia total entre entre A y C es $C_T = C_1 + C_2$.

La capacitancia de C_1 (y también la de C_2), al ser un condensador esférico, depende netamente de su geometría. Para determinar la capacitancia de un condensador de este tipo debe suponerse que una diferencia de potencial conocida entre las placas, sin perdida de generalidad se asume que el potencial en el casquete interior es V_0 y el exterior 0. Entre las placas se cumple la ecuación de Laplace (ya que



Figura 5.3: Capacitor Esférico C_1

no hay densidades volumétricas de carga), es decir

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \implies V(r) = -\frac{A}{r} + B$$

Aplicando las condiciones de borde se obtiene que

$$V(r) = \frac{V_0 R_1 R_2}{r(R_2 - R_1)} - \frac{V_0 R_1}{R_2 - R_1}$$

Luego, el campo eléctrico es

$$\vec{E} = -\nabla V = \frac{V_0 R_1 R_2}{r^2(R_2 - R_1)} \hat{r}$$

Por lo que la densidad superficial de carga sobre el conductor interior es

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \Big|_{\text{borde}} \cdot \hat{n} = \frac{\epsilon_0 V_0 R_2}{R_1(R_2 - R_1)}$$

Luego la capacitancia de C_1 es

$$C_1 = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{1}{V_0} \iint_{\text{Casquete}} \sigma dS = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Finalmente la capacitancia total está dada por

$$C_T = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} + \frac{4\pi\epsilon_0 \rho_1 \rho_2}{\rho_2 - \rho_1}$$

Solución 5.7

- a) La carga imagen de este problema debe ir a una distancia h bajo el plano, tal como indica la Figura 5.5. Conocida esa configuración, se puede calcular el campo que habría justo en la



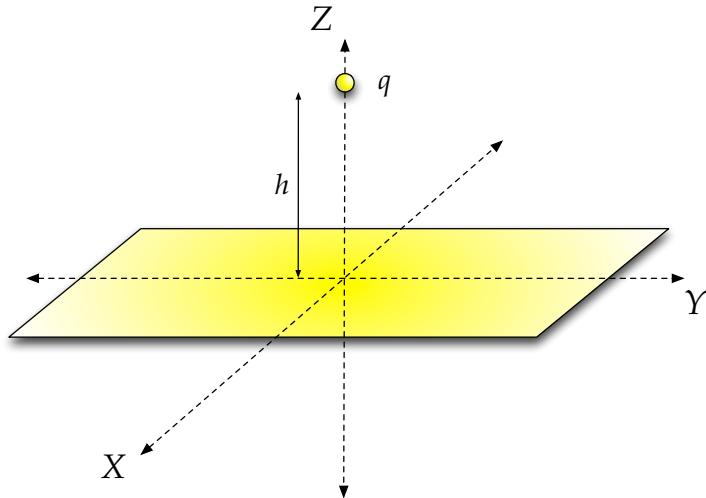


Figura 5.4: Configuración Original

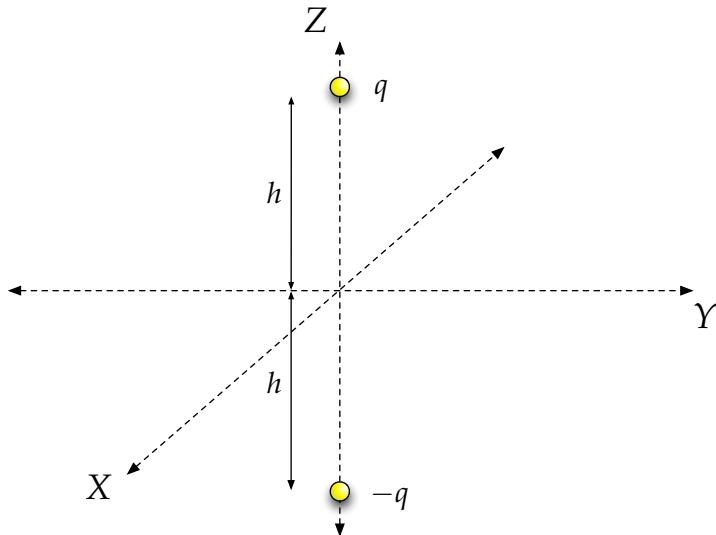


Figura 5.5: Configuración Equivalente con Carga Imagen

superficie del plano superponiendo el campo eléctrico producido por la carga más su carga imagen. Dado que la carga q se encuentra en la posición $(0, 0, h)$ y la carga imagen $-q$ en $(0, 0, -h)$ se concluye que el campo eléctrico en un punto sobre el plano xy estará dado por:

$$\vec{E}(x, y, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x\hat{x} + y\hat{y} + (z-h)\hat{z}}{(x^2 + y^2 + (z-h)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + (z+h)\hat{z}}{(x^2 + y^2 + (z+h)^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Entonces, usando el hecho que en el borde del conductor se tiene que $\vec{E}(z = 0^+) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z}$ se puede despejar el valor de σ :

$$\sigma(x, y) = \frac{-qh}{2\pi(x^2 + y^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- b) Conocido σ se integra en un círculo de radio d , para ello se usa el cambio de variables de



coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas con $r^2 = x^2 + y^2$ y $dxdy = rdrd\theta$

$$Q_{\text{disco}} = \int_0^{2\pi} \int_0^d \frac{-qh}{2\pi(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} rdrd\theta = \frac{qh}{\sqrt{d^2 + h^2}} - q$$

Luego si se desea $Q_{\text{disco}} = -\frac{q}{2}$ se iguala con la expresión anterior, dando por resultado:

$$\frac{qh}{\sqrt{d^2 + h^2}} - q = -\frac{q}{2} \implies d = h\sqrt{3}$$

- c) Para esta parte del problema se debe considerar que cuando la carga es movida una distancia hacia arriba en la dirección $+\hat{z}$ su carga imagen se mueve la misma distancia en la dirección $-\hat{z}$. Por consiguiente, si la carga se pusiese en la posición $\vec{r} = z\hat{z}$ su carga imagen se encontrará en $\vec{r}' = -z\hat{z}$, por lo que el campo eléctrico que sentirá la carga en ese punto será:

$$\vec{E}(z) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2z\hat{z}}{(2z)^3} = -\frac{q}{16\pi\epsilon_0 z^2} \hat{z}$$

Luego, la carga es movida por un agente externo desde $z = h$ a $z = 2h$ bajo la oposición del campo eléctrico variable ya calculado, lo que matemáticamente resulta como

$$\Delta V = V(2h) - V(h) = - \int_h^{2h} -\frac{q}{16\pi\epsilon_0 z^2} dz = \frac{q}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{2h} \right)$$

Finalmente como el trabajo está dado como $W = q\Delta V$:

$$W = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{2h} \right) = \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 h}$$

Solución 5.8

El problema nos presenta la siguiente configuración:

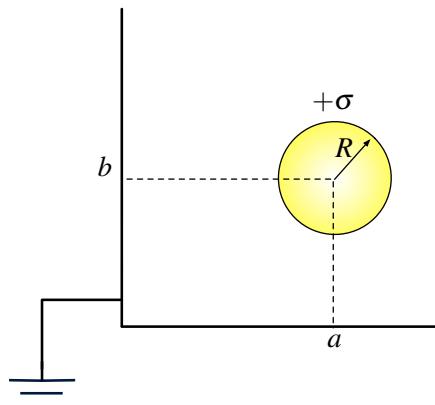


Figura 5.6: Plano rectangular frente a una esfera



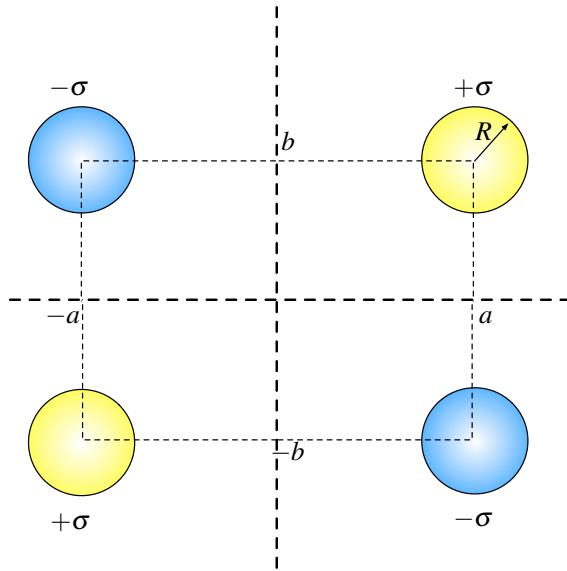


Figura 5.7: Configuración de las Imágenes

En primera instancia, y haciendo un análisis sólo en el plano xy , se tiene que $\nabla^2 V = 0$, $V(x, 0) = V(0, y) = 0$ para $x, y \geq 0$ y que $V(\|(x, y)\| \rightarrow \infty) = 0$. Ahora, el problema equivalente que sigue las mismas condiciones anteriores es mostrado en la Figura ??.

En ambos casos tanto el potencial eléctrico como el campo eléctrico, tendrán el mismo valor para los puntos que cumplan $x, y \geq 0$. La configuración de imágenes están dada por 3 esferas de radio R (una con carga $+σ$ y dos con carga $-σ$) ubicadas como se muestra en la Figura ???. Para un manto esférico de radio R y densidad $σ$ se puede determinar el campo eléctrico generado por ley de Gauss de la siguiente forma:

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \implies E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi R^2 \sigma}{\epsilon_0} \implies \vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Dado que todas las esferas están descentradas, la forma general para determinar el campo que generan será

$$\vec{E} = \frac{\sigma R^2 (\vec{r} - \vec{r}_i)}{\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3}$$

dónde \vec{r} es la posición donde se desea conocer el campo y \vec{r}_i es la posición donde se encuentra el centro de la esfera. Para el problema se tiene que $\vec{r}_1 = (a, b)$, $\vec{r}_2 = (-a, b)$, $\vec{r}_3 = (-a, -b)$ y $\vec{r}_4 = (a, -b)$, y que $\vec{r} = (x, y)$. Usando el principio de superposición se tiene que el valor del campo es

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y) &= \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^{i-1} (\vec{r} - \vec{r}_i)}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3} \\ \vec{E}(x, y) &= \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \left(\frac{(x-a, y-b)}{((x-a)^2 + (y-b)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(x+a, y-b)}{((x+a)^2 + (y-b)^2)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x+a, y+b)}{((x+a)^2 + (y+b)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(x-a, y+b)}{((x-a)^2 + (y+b)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned}$$



En particular en los ejes x e y se tiene que el campo eléctrico es, respectivamente:

$$\vec{E}(x, 0) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \left(\frac{(0, -2b)}{((x-a)^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(0, 2b)}{((x+a)^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$\vec{E}(0, y) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \left(\frac{(-2a, 0)}{(a^2 + (y-b)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(2a, 0)}{(a^2 + (y+b)^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Finalmente como en el borde de un conductor se cumple que $\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \Big|_{\text{borde}} \cdot \hat{n}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \sigma_x(x) &= \sigma R^2 \left(\frac{(0, -2b)}{((x-a)^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(0, 2b)}{((x+a)^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot (0, 1) \\ &= 2b\sigma R^2 \left(-\frac{1}{((x-a)^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{((x+a)^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y(y) &= \sigma R^2 \left(\frac{(-2a, 0)}{(a^2 + (y-b)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(2a, 0)}{(a^2 + (y+b)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot (1, 0) \\ &= 2a\sigma R^2 \left(-\frac{1}{(a^2 + (y-b)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(a^2 + (y+b)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned}$$

Las variaciones de densidad en los ejes se muestran a continuación (en ambos casos la funciones σ_x y σ_y son siempre negativas y tiene sus mínimos en los valores de a y b , respectivamente).

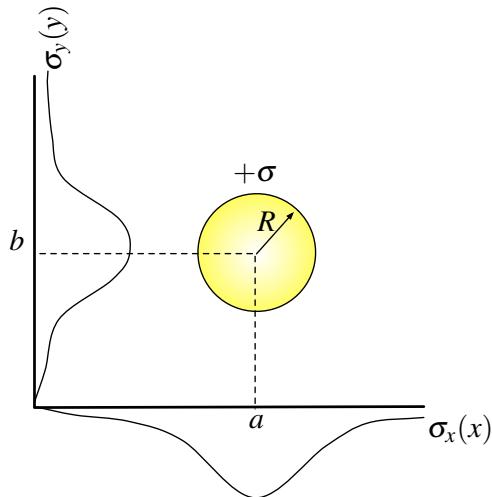


Figura 5.8: Variaciones de σ_x y σ_y en los ejes

Solución 5.10

En este caso se debe usar el método de las imágenes para reemplazar la esfera conductora. Se propone una carga q' a una distancia d' , del centro de la esfera como imagen (ver Figura 5.9).



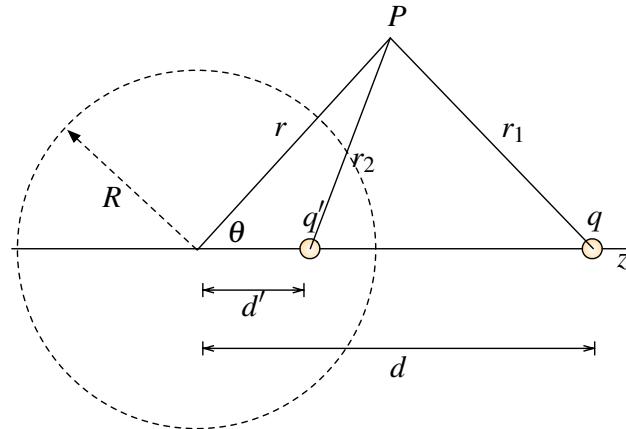


Figura 5.9: Configuración Carga Imagen Esfera conectada a tierra

Para encontrar en valor de la carga imagen y del potencial, se determina previamente cual es el valor del potencial que generan las dos cargas en el espacio:

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} \right)$$

Por teorema del seno $r_1 = \sqrt{r^2 + d^2 + 2rd \cos \theta}$ y $r_2 = \sqrt{r^2 + d'^2 + 2rd' \cos \theta}$, por lo tanto

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 + 2rd \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + d'^2 + 2rd' \cos \theta}} \right)$$

Ahora tiene que considerarse que $V(r = R, \theta) = 0$, ya que se supone que la esfera está conectada a tierra.

$$V(R, \theta) = 0 \implies \frac{\sqrt{R^2 + d^2 + 2Rd \cos \theta}}{\sqrt{R^2 + d'^2 + 2Rd' \cos \theta}} = -\frac{q}{q'} = \text{cte.}$$

De aquí se deduce que, dado que el valor de las cargas es fijo, el lado izquierdo de la ecuación no debe depender de θ ya que para cualquier ángulo el cuociente tiene un valor fijo. Se debe escoger un valor de d' de tal forma que la expresión de izquierda deje de depender de θ .

Reescribiendo

$$\frac{\sqrt{d(\frac{R^2}{d} + d + 2R \cos \theta)}}{\sqrt{d'(\frac{R^2}{d'} + d' + 2R \cos \theta)}} = \text{cte.}$$

Para que la expresión anterior deje de depender de θ (es decir, poder simplificar el factor dependiente de $\cos \theta$), se puede elegir $d' = d$ (no sirve ya que implica $q = -q'$) o $d' = \frac{R^2}{d}$. Por lo que se deduce que $q' = -\frac{R}{d}q$ que es la carga efectiva de la esfera. La densidad de carga $\sigma(\theta)$, puede ser determinada como

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \Big|_{\text{borde}} \cdot \hat{n} = -\epsilon_0 \nabla V \Big|_{r=R} \cdot \hat{r} = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

Finalmente la densidad de carga es

$$\sigma(\theta) = \frac{\left(R - \frac{R^2}{d} \right) q}{4\pi (R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}$$



Como último comentario, cabe mencionar que

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sigma(\theta) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -\frac{R}{d} q$$

Es decir, la carga total inducida en la esfera es igual a la de la carga imagen.

Nota: Existe más de un método para determinar el valor de las cargas imágenes en este tipo de problema. Otra posibilidad, es haber igualado la expresión del potencial para dos ángulos distintos (por ejemplo $V(R, \theta = 0) = V(R, \theta = \pi) = 0$) y despejar los valores q' y d' .

Solución 5.11

El problema puede ser analizado de la siguiente forma, suponga que la esfera estuvo inicialmente descargada y conectada de tierra. Habrá sobre la esfera una carga q' (imagen) distribuida en forma no homogénea sobre la superficie (debido a la presencia de q). Ahora, suponga que se desconecta la esfera y se pone una carga $Q - q'$ sobre el conductor (de modo que su carga total sea Q), la carga puesta se distribuye homogéneamente sobre la superficie del conductor debido a que las fuerzas electrostáticas presentes ya han sido anuladas gracias a la carga q' (visto de otra forma, esa carga es puesta sobre una superficie equipotencial, por que se repartirá en forma equilibrada sobre ella). Por lo tanto, el potencial debido a $Q - q'$ será el mismo que el debido a una carga puntual de ese valor puesta en el origen, por lo que la configuración de cargas imágenes es la que se propone en la Figura 5.10.

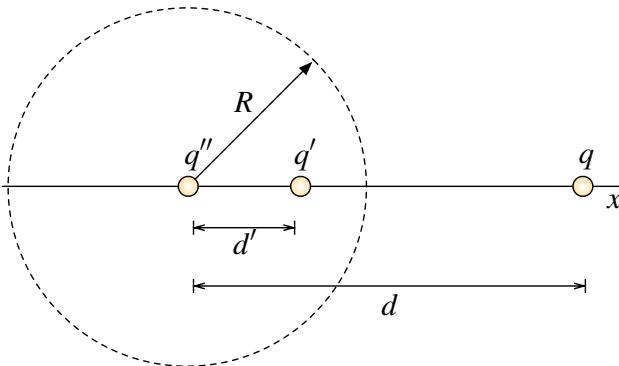


Figura 5.10: Configuración Esfera Conductora Cargada

En conclusión, la esfera de radio R y carga Q es reemplazada por dos cargas imágenes q' y q'' puestas en $x = d'$ y en $x = 0$, respectivamente. Los valores de cada uno de los términos anteriores son

$$q' = -\frac{qR}{d}, \quad q'' = Q + \frac{qR}{d}, \quad d' = \frac{R^2}{d}$$

Luego, por ley de Coulomb la fuerza sobre la carga q es

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q''}{d'^2} + \frac{q'}{(d - d')^2} \right) \hat{x}$$



Solución 5.12 

- a) Para resolver el problema debe colocarse dos cargas imágenes: una carga que anule el potencial en el borde y otra que lo suba al borde de la esfera, de modo que se cumpla $\nabla^2 V = 0$, $V(r = R) = V_0$, $V(r \rightarrow \infty) = 0$.

La primera carga imagen se coloca en la línea recta entre la carga y el centro de la esfera (el objetivo de esta carga es $V(r = R) = 0$). La distancia entre el centro de la esfera y la carga es

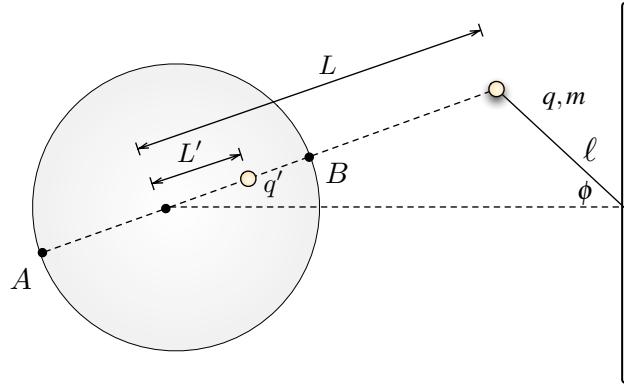


Figura 5.11: Configuración Carga Imagen Esfera Cargada

$L = \sqrt{d^2 + \ell^2 - 2d\ell \cos \phi}$. Sea q' el valor de la carga imagen y L' su distancia al centro. Se debe cumplir que:

$$V(A) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0(L' + R)} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0(L + R)} = 0$$

$$V(B) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0(R - L')} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0(L - R)} = 0$$

Resolviendo para q' y L' se obtiene:

$$q' = -\frac{R}{L}q \quad L' = \frac{R^2}{L}$$

La segunda carga imagen debe elevar el potencial en $r = R$ a V_0 , luego se debe cumplir:

$$V_{q''}(R) = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 R} = V_0 \implies q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$$

Con estas dos cargas q' y q'' se cumplen las condiciones de borde (solución única). Finalmente la fuerza es por Coulomb:

$$|F| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{qq'}{(L - L')^2} + \frac{qq''}{L^2} \right)$$

- b) Si $V_0 = 0 \implies q'' = 0$, luego $|F| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(L - L')^2}$. La fuerza se descompone en radial y tangencial al péndulo. Dado que nos piden pequeñas oscilaciones usamos la componente tangencial (o normal)

$$|F_\perp| = |F| \sin(\phi + \theta)$$

Usando el teorema del Seno se tiene:

$$\frac{\sin \phi}{L} = \frac{\sin \theta}{\ell} = \frac{\sin(\pi - (\phi + \theta))}{d} = \frac{\sin(\phi + \theta)}{d} \implies \sin(\phi + \theta) = \frac{d}{L} \sin \phi$$



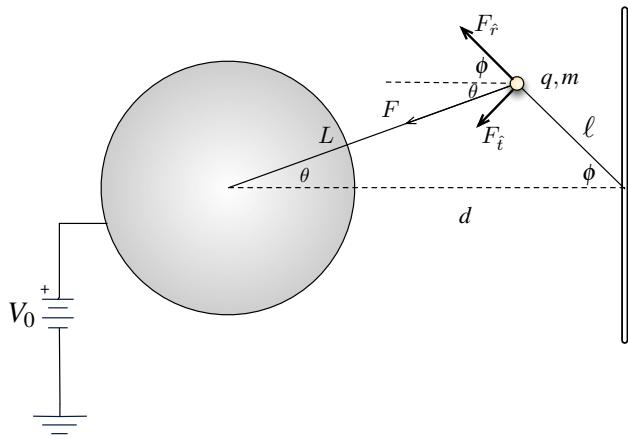


Figura 5.12: DCL al péndulo

Luego se tendrá:

$$\begin{aligned}|F_{\perp}| &= |F| \frac{d}{L} \sin \phi \\&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(L-L')^2} \frac{d}{L} \sin \phi\end{aligned}$$

Reemplazando $q' = -\frac{R}{L}q$ y $L' = \frac{R^2}{L}$

$$|F_{\perp}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q^2 R d}{\left(L - \frac{R^2}{L}\right)^2 L^2} \sin \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q^2 R d}{(L^2 - R^2)^2} \sin \phi$$

Ahora

$$m\ell\ddot{\phi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q^2 R d^2}{(L^2 - R^2)^2} \sin \phi \implies \ddot{\phi} + \frac{q^2 R d}{4\pi\epsilon_0 m \ell} \frac{\sin \phi}{(L^2 - R^2)^2} = 0$$

Si $\phi \approx 0$, $\sin \phi \approx \phi$ y $\cos \phi \approx 1$. Con la última aproximación se tiene para el valor de L : $L^2 = d^2 + l^2 - 2dl \cos \phi \approx d^2 + l^2 - 2dl = (d - l)^2$. Con lo que finalmente se concluye:

$$\ddot{\phi} + \underbrace{\frac{q^2 R d}{4\pi\epsilon_0 m \ell ((d - l)^2 - R^2)^2}}_{\omega^2} \phi = 0 \implies \omega = \frac{q}{(d - l)^2 - R^2} \sqrt{\frac{R d}{4\pi\epsilon_0 m \ell}}$$

Solución 5.14

En este caso se puede usar la ecuación de Laplace dentro de la guía de ondas ya que no existen densidades volumétricas de carga. Matemáticamente el problema puede ser planteado de la siguiente forma

$$\nabla^2 V(x, y) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Sujeto a las siguientes condiciones de frontera

$$V(x, 0) = V(0, y) = V(a, y) = 0$$



$$V(x, b) = A \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$$

para $0 \leq x \leq a$ y $0 \leq y \leq b$.

En este tipo de problemas se usa el método de separación de variables, es decir, se supone que el potencial es de la forma $V(x, y) = X(x)Y(y)$, lo cual implica que

$$\nabla^2 V = Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \implies \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

En este punto se puede notar que las variables están "separadas" (no hay dependencia entre ellas, el lado izquierdo de la igualdad depende sólo de x y el derecho sólo de y). Por lo tanto, ambos lados de la igualdad deben ser iguales a una misma constante, es decir

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k$$

Ahora se debe analizar por casos:

- $k = 0$ En este caso las soluciones son de la forma

$$X(x) = Ax + B$$

$$Y(y) = Cy + D$$

Usando las condiciones de borde

$$V(0, y) = B(Cy + D) = 0 \implies \underline{B = 0} \text{ o } \underline{C = D = 0}$$

En el primer caso $C = D = 0$, entonces $Y(y) = 0$ por lo que $V(x, y) = 0$. Dado que no se buscan soluciones no triviales de $V(x, y)$ ese caso no sirve. Luego $V(x, y) = Ax(Cy + D)$.

Usando la segunda condición de borde

$$V(x, 0) = ADx = 0 \implies \underline{A = 0} \text{ o } \underline{D = 0}$$

Nuevamente si $A = 0$ se obtiene $V(x, y) = 0$ por lo que $V(x, y) = ACxy$.

Aplicando la última condición de borde

$$V(a, y) = ACay = 0$$

De aquí es directo que A o C debe ser 0, por lo cual necesariamente se tendrá $V(x, y) = 0$. Finalmente se deduce que este caso no arroja soluciones.

- $k > 0$ Suponiendo que $k = \alpha^2$ se tiene que en este caso las soluciones son de la forma

$$X(x) = A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x$$

$$Y(y) = C \cos \alpha y + D \sin \alpha y$$

Usando las condiciones de borde y recordando que $\cosh 0 = 1$ y $\sinh 0 = 0$

$$V(0, y) = A(C \cos \alpha y + D \sin \alpha y) = 0 \implies \underline{A = 0} \text{ o } \underline{C = D = 0}$$



Nuevamente si $C = D = 0$, entonces $Y(y) = 0$ por lo que $V(x, y) = 0$. Luego

$$V(x, y) = B \sinh \alpha x (C \cos \alpha y + D \sin \alpha y)$$

Usando la segunda condición de borde

$$V(x, 0) = BC \sinh \alpha x = 0 \implies \underline{B = 0} \text{ o } \underline{C = 0}$$

Nuevamente si $B = 0$ se obtiene $V(x, y) = 0$ por lo que $V(x, y) = BD \sinh \alpha x \sin \alpha y$.

Aplicando la última condición de borde

$$V(a, y) = BD \sinh \alpha a \sin \alpha y = 0$$

Nuevamente se tiene que B o D deben ser 0, por lo cual necesariamente se tendrá $V(x, y) = 0$. Este caso tampoco arroja soluciones.

- $k < 0$ En el último caso, suponiendo que $k = -\alpha^2$ se tiene que las soluciones son de la forma

$$X(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

$$Y(y) = C \cosh \alpha y + D \sinh \alpha y$$

Aplicando que

$$V(0, y) = A(C \cosh \alpha y + D \sinh \alpha y) = 0 \implies \underline{A = 0} \text{ o } \underline{C = D = 0}$$

Al igual que los casos anteriores, el valor válido es $A = 0$, de modo que

$$V(x, y) = B \sin \alpha x (C \cosh \alpha y + D \sinh \alpha y)$$

Ahora aplicando que

$$V(x, 0) = BC \sin \alpha x = 0 \implies \underline{B = 0} \text{ o } \underline{C = 0}$$

Nuevamente el valor válido es $C = 0$, por lo que la forma general de la solución es

$$V(x, y) = BD \sin \alpha x \sinh \alpha y$$

Aplicando la condición de borde

$$V(a, y) = BD \sin \alpha a \sinh \alpha y = 0 \implies \alpha a = n\pi \implies \alpha = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Finalmente se deduce este caso si provoca soluciones y son una combinación lineal de la forma

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \sinh \left(\frac{n\pi}{a} y \right)$$

Para encontrar los términos K_n es necesario usar la última condición de borde

$$V(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \sinh \left(\frac{n\pi b}{a} \right) = V_0 \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right)$$



Ahora se usará el hecho que

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{a}{2} & \text{si } n = m \end{cases}$$

La expresión anterior debe multiplicarse a ambos lados por $\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$

$$V_0 \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$$

e integrando en 0 y a (y suponiendo que la integral entra sin problemas a la sumatoria)

$$\int_0^a V_0 \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \left[\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx \right] \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$$

La serie de la derecha tiene puros términos nulos excepto cuando $n = m$, por lo tanto

$$V_0 \int_0^a \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = K_m \cdot \frac{a}{2} \sinh\left(\frac{m\pi b}{a}\right)$$

Pero

$$\int_0^a \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = -\frac{am(\cos(\pi m) - 1)}{\pi(m^2 - 4)} \quad \forall n \neq 2$$

y para $n = 2$ se tiene:

$$\int_0^a \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) dx = -\frac{a}{4\pi} \cos^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \Big|_0^a = -\frac{a}{4\pi} (\cos^2(2\pi) - \cos^2(0)) = 0$$

Luego

$$K_n = -\frac{2V_0}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \frac{n(\cos(\pi n) - 1)}{\pi(n^2 - 4)} \quad \forall n \neq 2$$

Finalmente

$$V(x, y) = -\frac{2V_0}{\pi} \sum_{n=1, n \neq 2}^{\infty} \frac{n(\cos(\pi n) - 1)}{(n^2 - 4)} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}$$





6

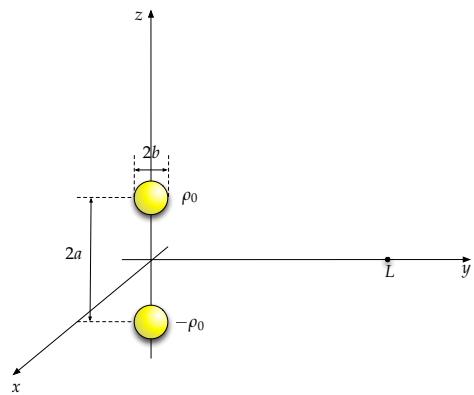
Dipolo Eléctrico

I. Problemas Propuestos

Problema 6.1

Considere dos esferas de radio b y densidades de carga ρ_0 y $-\rho_0$, las cuales están dispuestas en el eje z , a una distancia $2a$ entre ellas, según se muestra en la figura. Se pide:

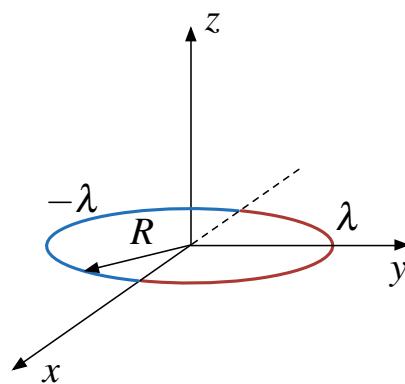
- Estimar el potencial en el punto $(0, L, 0)$, suponiendo $L \gg a, b$
- Si se ubica una carga q en la posición $(0, L, 0)$, estime la fuerza sobre la carga.
- Calcule el trabajo necesario para llevar la carga desde la posición $(0, L, 0)$ a $(L, 0, 0)$.



Problema 6.2

Considere un aro de radio R sobre el plano xy , el cual tiene una de sus mitades con una densidad lineal de carga uniforme λ ($y > 0$), y la otra con la densidad opuesta $-\lambda$ ($y < 0$), tal como se muestra en la Figura.

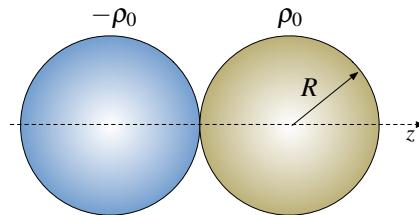
- Calcule el momento dipolar del aro y potencial electrostático en la aproximación del campo lejano. ¿Cuál es el valor del potencial en el plano xz ?
- Determine el valor del campo eléctrico en el plano xz usando la aproximación del campo lejano del punto anterior. ¿Es consistente este resultado con el valor obtenido para el potencial en dicho plano?.
- En general, o sea no necesariamente lejos del aro, ¿Cuál es el valor del potencial en el plano xz ?



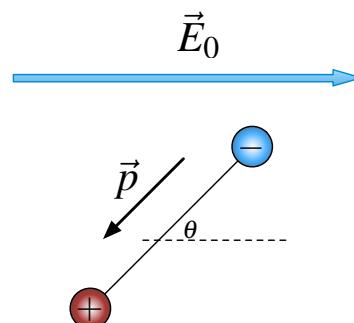
Problema 6.3   

Un dipolo está compuesto por dos cargas opuestas. Para modelar un dipolo considere dos esferas macizas de radios R , de densidad de carga constante respectivamente ρ_0 y $-\rho_0$, las cuales están conectadas en un punto (ver figura).

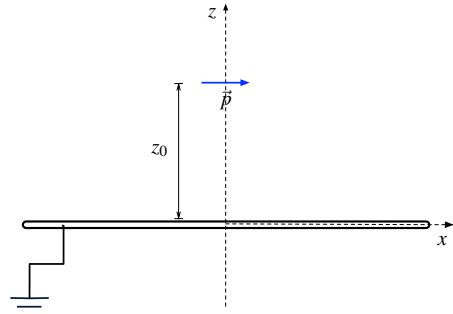
- Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio, use como origen el punto de contacto entre ambas esferas.
- Para distancias muy lejanas, ¿De que forma decae el campo eléctrico?

**Problema 6.4**  

Considere un dipolo eléctrico inmerso en un campo eléctrico constante \vec{E}_0 . El dipolo posee un momento dipolar \vec{p} y un momento de inercia I . Encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones del dipolo cuando es perturbado débilmente con respecto a su posición de equilibrio.

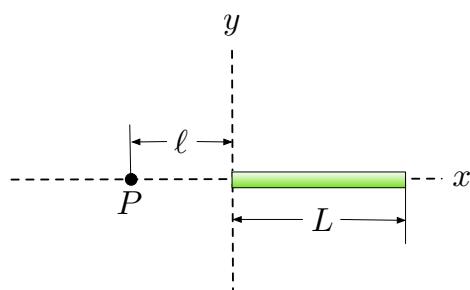
**Problema 6.5**   

Un dipolo de momento dipolar $\vec{p} = p\hat{x}$ está colocado a una distancia z_0 de un plano conductor infinito conectado a tierra tal como indica la Figura. Determinar el potencial eléctrico en cualquier punto (x, y, z) del espacio y la densidad superficial de carga inducida sobre un punto del plano conductor.

**Problema 6.6**   

Una barra de largo L yace a lo largo del eje x con el origen al lado izquierdo de ella. La barra tiene una densidad de carga no uniforme $\lambda(x) = \alpha x$, donde α es una constante positiva.

- Exprese la carga total Q de la barra en términos de α y L .
- Calcule el campo eléctrico en el punto P de la Figura tomando el límite $\ell \gg L$. ¿Cómo se comporta el campo eléctrico tomando ese límite?
- Calcule el potencial eléctrico en el punto P tomando el límite $\ell \gg L$. ¿Cómo se comporta el potencial eléctrico tomando ese límite?



II. Soluciones

Solución 6.3

- a) Es importante notar que el problema carece de simetría esférica (ie. no puede suponerse que el campo es de la forma $\vec{E} = E(r)\hat{r}$), por lo tanto es imposible determinar el campo eléctrico usando directamente ley de Gauss. Para abordar el problema es necesario primero analizar el campo eléctrico que genera una esfera por sí sola (independiente del problema actual), para ello se calculará el campo a una esfera de radio a y densidad de carga homogénea ρ .

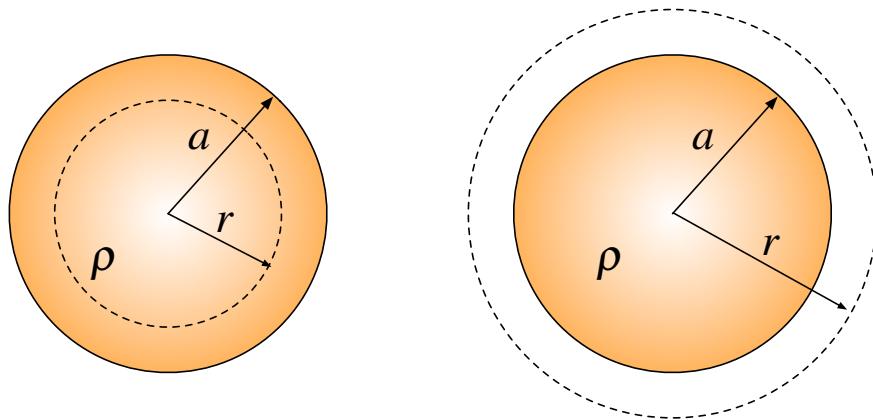


Figura 6.1: Casos de cálculo de campo eléctrico para $r < a$ y $r \geq a$

Por ley de Gauss $r < a$ (puntos dentro de la esfera):

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dV \implies E(r)4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \implies \vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}$$

y para $r \geq a$ (puntos fuera de la esfera)

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dV \implies E(r)4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho \implies \vec{E}(r) = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{\rho a^3 \vec{r}}{3\epsilon_0 |\vec{r}|^3}$$

En ambos resultados se ha dejado en función del vector posición \vec{r} medido desde el centro de la esfera, de modo que sea más fácil determinar el valor del campo eléctrico en un punto para un problema que se tenga más de un sistema de referencia. Volviendo al problema original, si se desea calcular el campo eléctrico en punto P arbitrario, existen 3 posibilidades en el espacio:

- Caso 1: Fuera de ambas esferas
- Caso 2: Dentro de la esfera positiva y fuera de la esfera negativa
- Caso 3: Dentro de la esfera negativa y fuera de la esfera positiva

Para cada uno de estos casos, cada esfera provoca un campo eléctrico en el punto P , por lo cual hay que usar el principio de superposición basándose en los resultados ya obtenidos para una esfera cualquiera.



- Caso 1

Fuera de ambas esferas se tiene la siguiente configuración que se muestra en la Figura 6.2. En este caso se tiene que el campo eléctrico en el punto P es:

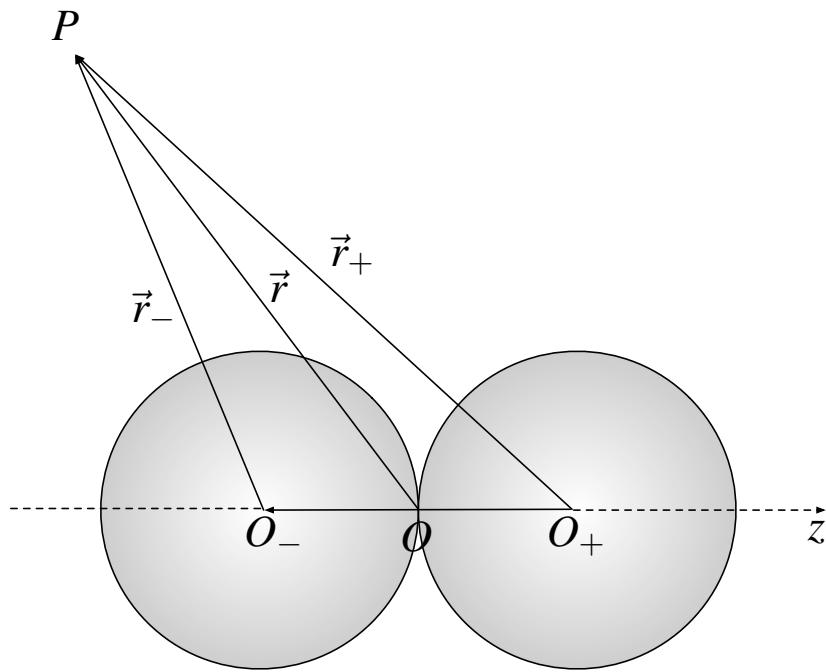


Figura 6.2: Campo Eléctrico para un punto fuera de ambas esferas

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho_0 R^3 \vec{r}_+}{3\epsilon_0 |\vec{r}_+|^3} - \frac{\rho_0 R^3 \vec{r}_-}{3\epsilon_0 |\vec{r}_-|^3}$$

Notando además que $\vec{r}_+ = \vec{r} - R\hat{z}$ y $\vec{r}_- = \vec{r} + R\hat{z}$ por lo que

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r} - R\hat{z}}{|\vec{r} - R\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r} + R\hat{z}}{|\vec{r} + R\hat{z}|^3} \right)$$

- Caso 2

De forma parecida al caso anterior se toma un punto dentro de la esfera positiva y fuera de la negativa, lo que resulta como

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho_0 \vec{r}_+}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_0 R^3 \vec{r}_-}{3\epsilon_0 |\vec{r}_-|^3}$$

Luego

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left((\vec{r} - R\hat{z}) - \frac{R^3}{|\vec{r} + R\hat{z}|^3} (\vec{r} + R\hat{z}) \right)$$

- Caso 3

Finalmente el último caso está dado por un punto dentro de la esfera negativa y fuera de la positiva, es decir

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho_0 R^3 \vec{r}_+}{3\epsilon_0 |\vec{r}_+|^3} - \frac{\rho_0 \vec{r}_-}{3\epsilon_0}$$

de modo que

$$\vec{E}(P) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(\frac{R^3}{|\vec{r} - R\hat{z}|^3} (\vec{r} + R\hat{z}) - (\vec{r} - R\hat{z}) \right)$$



- b) En este caso hay que hacer un análisis para distancias mucho más grandes de R . Para ello se debe hacer previamente una aproximación según Taylor de los términos que componen la expresión. Es decir,

$$\begin{aligned} |\vec{r} \pm R\hat{z}|^{-3} &= (|\vec{r}|^2 + R^2 \pm 2R\vec{r} \cdot \hat{z})^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{|\vec{r}|^3} \left(1 + \frac{R^2}{|\vec{r}|^2} \pm \frac{2R\vec{r} \cdot \hat{z}}{|\vec{r}|^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \\ &\approx \frac{1}{|\vec{r}|^3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R^2}{|\vec{r}|^2} \pm \frac{2R\vec{r} \cdot \hat{z}}{|\vec{r}|^2} \right) \right) \end{aligned}$$

Dado que se está estudiando el caso $|\vec{r}| \gg R$ se obtiene que el segundo término de la expresión puede ser ignorado ($R^2/|\vec{r}|^2 \rightarrow 0$). Por lo tanto

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \left[(\vec{r} - R\hat{z}) \left(\frac{1}{|\vec{r}|^3} + \frac{3R\vec{r} \cdot \hat{z}}{|\vec{r}|^5} \right) - (\vec{r} + R\hat{z}) \left(\frac{1}{|\vec{r}|^3} - \frac{3R\vec{r} \cdot \hat{z}}{|\vec{r}|^5} \right) \right]$$

Manejando algebraicamente la expresión y volviendo a hacer la aproximación anterior, se llega a

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \left(-\frac{2R\hat{z}}{|\vec{r}|^3} + \frac{6R(\vec{r} \cdot \hat{z})}{|\vec{r}|^5} \vec{r} \right) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \left(-\frac{2R\hat{z}}{|\vec{r}|^3} + \frac{6R(\hat{r} \cdot \hat{z})}{|\vec{r}|^3} \hat{r} \right)$$

Por lo que el campo eléctrico desciende como $1/r^3$ para distancias muy grandes con respecto al radio de las esferas.

Solución 6.5

Usando el método de las imágenes, se obtiene la configuración equivalente mostrada en la siguiente Figura 6.3

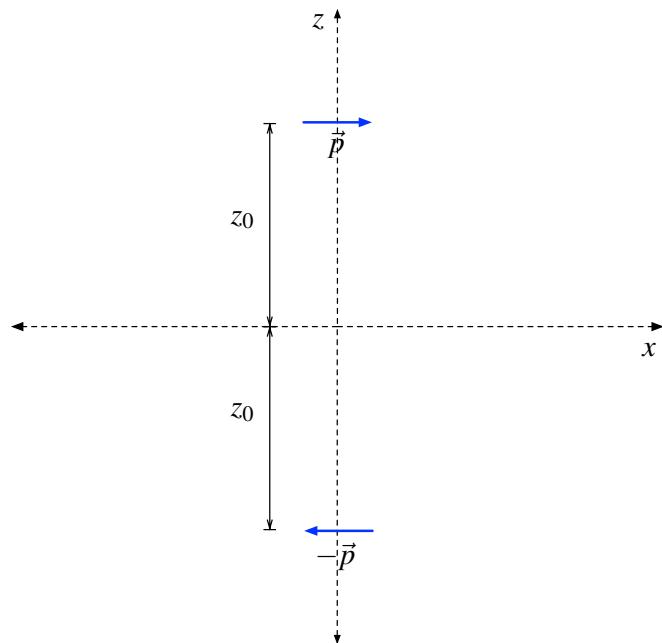


Figura 6.3: Configuración Equivalente con dipolo-imagen



El dipolo se refleja de modo que su imagen tiene un momento dipolar $-\vec{p}$ y se encuentra en $z = -z_0$. Luego el potencial en un punto $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ está dado por la superposición del potencial dipolo y su imagen, es decir

$$V(x, y, z) = \underbrace{\frac{p\hat{x} \cdot (x\hat{x} + y\hat{y} + (z - z_0)\hat{z})}{4\pi\epsilon_0|x\hat{x} + y\hat{y} + (z - z_0)\hat{z}|^3}}_{V_{dipolo}} + \underbrace{\frac{-p\hat{x} \cdot (x\hat{x} + y\hat{y} + (z + z_0)\hat{z})}{4\pi\epsilon_0|x\hat{x} + y\hat{y} + (z + z_0)\hat{z}|^3}}_{V_{imagen}}$$

$$V(x, y, z) = \frac{px}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + (z + z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Ahora, el campo eléctrico sobre el plano xy debe ser de la forma $\vec{E} = E(x, y)\hat{z}$ ya que éste debe ser siempre perpendicular a la superficie de un conductor, luego basta saber solamente la derivada según z de $V(x, y, z)$ para conocer el campo eléctrico que existe sobre un punto en el plano infinito.

$$\vec{E}_z = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} = \frac{3px}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{z - z_0}{(x^2 + y^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{z + z_0}{(x^2 + y^2 + (z + z_0)^2)^{\frac{5}{2}}} \right) \hat{z}$$

Finalmente, dado que el plano es conductor, se tiene que

$$\sigma(x, y) = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{z} \Big|_{z=0} = -\frac{3pz_0x}{2\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z_0^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Solución 6.6

- a) Para encontrar la carga total de la barra se debe integrar la densidad de carga dq , esta última se puede calcular de la definición de densidad lineal:

$$\lambda(x) = \frac{dq}{dx} = \alpha x \implies dq = \alpha x dx$$

Luego la carga total es:

$$Q = \int_0^L dq = \int_0^L \alpha x dx = \frac{\alpha L^2}{2}$$

- b) Para calcular el campo eléctrico se considera:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{barra}} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq$$

Donde $dq = \alpha x dx$ con $x \in (0, L)$, $\vec{r} = -\ell\hat{x}$ y $\vec{r}' = x\hat{x}$. Con lo anterior se calcula el campo en



el punto P :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \alpha x dx \frac{\hat{x}}{(\ell + x)^2} \\ &= \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{x \hat{x}}{(\ell + x)^2} \\ &= \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\ell}{x + \ell} + \ln(x + \ell) \right) \Big|_0^L \hat{x} \\ &= \frac{-\alpha}{4\pi\epsilon_0} \left(\ln \left(1 + \frac{L}{\ell} \right) - \frac{L}{L + \ell} \right) \hat{x}\end{aligned}$$

Para $\ell \gg L$, $\frac{L}{\ell} \ll 1$ por lo que al hacer una expansión de Taylor:

$$\begin{aligned}\ln \left(1 + \frac{L}{\ell} \right) &= \frac{L}{\ell} - \frac{L^2}{\ell^2} + \dots \\ \frac{L}{L + \ell} &= \frac{L}{\ell \left(1 + \frac{L}{\ell} \right)} = \frac{L}{\ell} - \frac{L^2}{\ell^2} + \dots\end{aligned}$$

Luego en el límite, el campo eléctrico está dado por:

$$\vec{E} = \frac{-\alpha}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{L}{\ell} - \frac{L^2}{\ell^2} - \frac{L}{\ell} + \frac{L^2}{\ell^2} \right) \hat{x} = \frac{-\alpha}{4\pi\epsilon_0} \frac{L^2}{2\ell^2} \hat{x}$$

Usando el resultado de la parte anterior:

$$\implies \vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \ell^2} \hat{x}$$

Es decir, el campo eléctrico se comporta como el generado por una carga puntual Q .

c) El potencial está dado por:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{barra}} \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Donde $dq = \alpha x dx$, $\vec{r} = -\ell \hat{x}$ y $\vec{r}' = x \hat{x}$. Luego

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\alpha x dx}{(x + L)} \\ &= \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} (x - \ell \ln(x + \ell)) \Big|_0^L \\ &= \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \left(L - \ell \ln \left(1 + \frac{L}{\ell} \right) \right)\end{aligned}$$

Usando la aproximación igual que en la parte anterior, en el límite el potencial será:

$$V = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \left(L - \ell \left(\frac{L}{\ell} - \frac{1}{2} \frac{L^2}{\ell^2} \right) \right) = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \frac{L^2}{2\ell}$$

Y usando el valor de Q

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \ell}$$

que corresponde al potencial generado por una carga puntual Q .





Parte II

Corriente Eléctrica

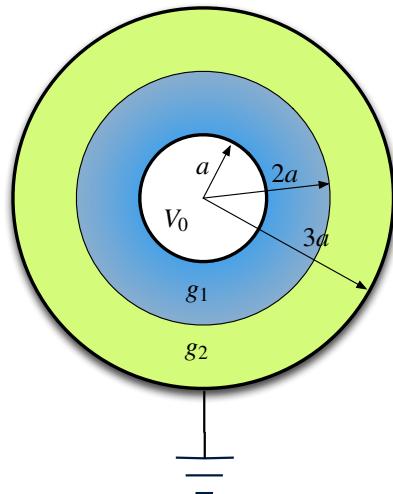
Medios Conductores y Ecuación de Continuidad

I. Problemas Propuestos

Problema 7.1

Considere dos esferas conductoras concéntricas de radios a y $3a$. La región entre $a < r < 2a$ es llenada con un material de conductividad g_1 y la región entre $2a < r < 3a$ tiene material de conductividad g_2 . Asuma que ambos materiales tienen una permitividad igual a ϵ_0 . La esfera interior se encuentra a un potencial $V = V_0$ y la exterior $V = 0$. Determine

- La resistencia del sistema.
- La densidad superficial de carga en $r = 2a$.



Problema 7.2

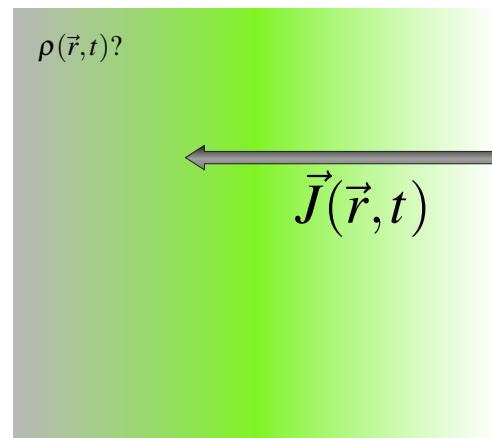
Una densidad de corriente, como función de la posición \vec{r} y tiempo t tiene la forma:

$$\vec{J} = C\vec{r}e^{-\alpha t||\vec{r}||^2}$$

Donde C y α son constantes. Mostrar que la ecuación de conservación de la carga se satisface con una densidad de carga ρ de la forma:

$$\rho = (f + tg)e^{-\alpha t||\vec{r}||^2}$$

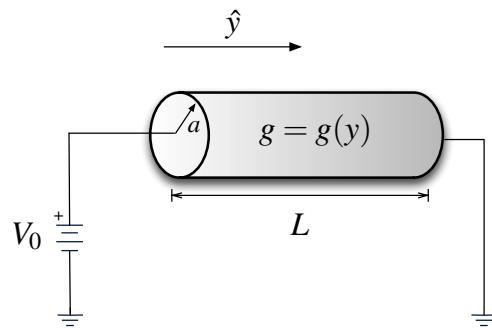
Donde f y g son funciones por determinar que dependen de la posición.



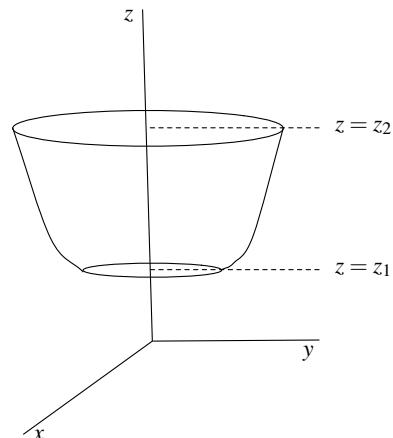
Problema 7.3  

Entre dos placas conductoras de radio a existe una barra conductora cilíndrica de radio a y longitud L , permitividad ϵ_0 y conductividad $g = g_0 (1 + \frac{y}{L})$. Se aplica un potencial V_0 entre las placas.

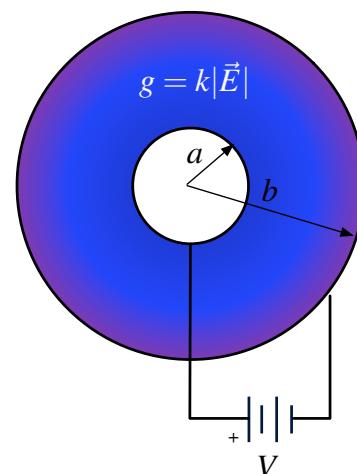
- Calcular la densidad de corriente \vec{J} y el campo eléctrico \vec{E} dentro del cilindro.
- Calcular la potencia disipada en un disco de espesor e cuyo centro está situado justo en la mitad del conductor.

**Problema 7.4**  

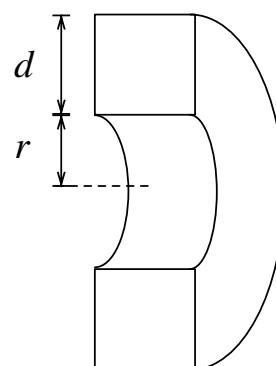
Un material de conductividad g tiene forma de paraboloides cortado transversalmente entre los planos $z = z_1$ y $z = z_2$. Si el paraboloides es de ecuación $x^2 + y^2 = kz$, determine la resistencia del material entre sus caras planas.

**Problema 7.5**   

Una esfera metálica de radio a está rodeada por un cascarón conductor esférico de radio interior b , donde $b > a$. El espacio entre la esfera y el cascarón está lleno de un material cuya conductividad eléctrica g varía la magnitud del campo eléctrico \vec{E} , con la ecuación $g = k|\vec{E}|$, donde k es una constante. Una diferencia de potencial constante V se mantiene entre la esfera y el cascarón conductor de radio b . Calcule la corriente eléctrica y la densidad volumétrica de carga entre la esfera y el cascarón. Exprese el resultado en función de los datos del problema.

**Problema 7.6**  

Un semianillo de sección transversal cuadrada está hecho de un material conductor uniforme de conductividad g . Encuentre la resistencia eléctrica del semianillo entre sus caras cuadradas. Utilice las dimensiones que se indican en la figura.



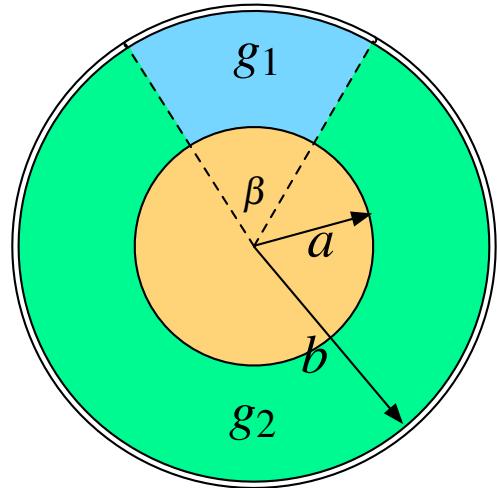
Problema 7.7  

Considere un condensador cilíndrico de radio interior a y radio exterior b y largo L . La superficie cilíndrica interna del condensador se encuentra a potencial V_0 mientras que la exterior se encuentra a un potencial nulo. El condensador tiene dentro de él dos materiales conductores de conductividad g_1 y g_2 . El material con conductividad g_1 subtienede un ángulo β en el condensador, mientras que el otro ocupa todo el volumen restante. Si el sistema ha alcanzado el régimen estacionario, determine

- La corriente eléctrica que circula por ambos medios.
- Determine la resistencia que opone cada medio al paso de la corriente. Demuestre que el valor de la resistencia total está dado por

$$R_T = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$$

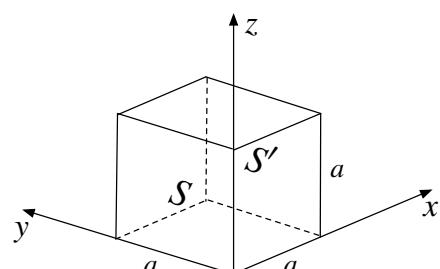
donde R_1 y R_2 es la resistencia del medio 1 y 2, respectivamente.

**Problema 7.8**   

Un bloque de material conductor en forma cubo de lado a tiene una conductividad no uniforme dada por $g(x) = \frac{g_0}{a}(x + a)$ y una permitividad ϵ_0 , donde g_0 es una constante. Asuma que la corriente fluye a lo largo del eje x desde la cara S hasta la cara opuesta S' .

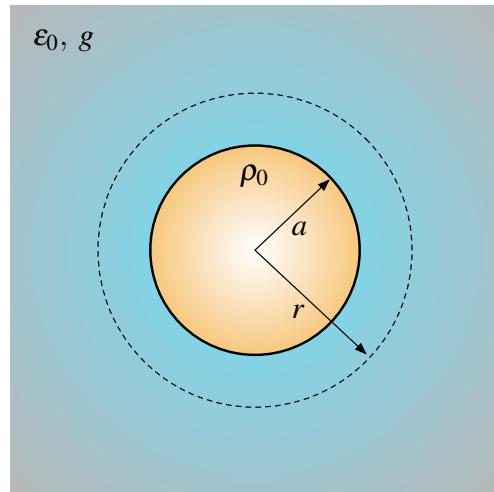
Suponga que potencial eléctrico V dependiente sólo de x , y que el valor del campo eléctrico en el borde es conocido $\vec{E}(x = 0, y, z) = E_0\hat{x}$.

- Considerando que se ha alcanzado el régimen estacionario, encuentre una ecuación diferencial de segundo orden que describa el comportamiento del potencial dentro del cubo. Use lo anterior para determinar la diferencial de potencial entre las caras S y S' .
- Determine la resistencia y la corriente total que circula entre S y S' . Encuentre en valor de la carga Q que se acumula en el cubo.



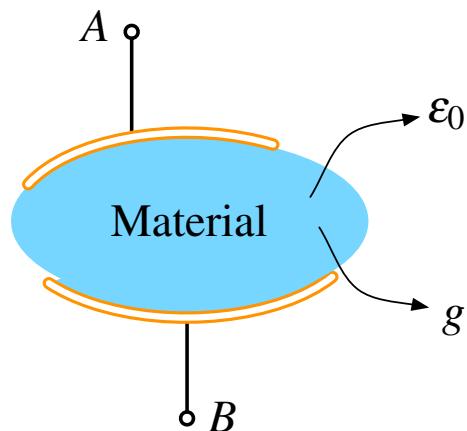
Problema 7.9  

Una esfera de radio a centrada en un punto P se encuentra inmersa en un medio de conductividad g y permitividad ϵ_0 . En el instante inicial, $t = 0$, en la esfera se sitúa una densidad de carga uniforme e igual a ρ_0 . Esta carga, debido a las fuerzas de repulsión electrostática, se dispersa. Calcular la densidad de corriente sobre la superficie esférica de radio r ($r > a$) y de centro P , en el instante $t = \frac{\epsilon_0}{g}$.

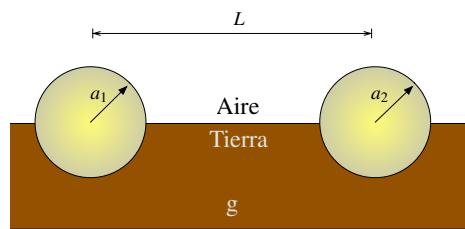
**Problema 7.10**  

Considere un condensador de forma arbitraria, el cual tiene dentro de él un medio de conductividad g y permitividad ϵ_0 . Sea R y C la resistencia y la capacitancia entre los terminales A y B , respectivamente. Demuestre que

$$RC = \frac{\epsilon_0}{g}$$

**Problema 7.11**  

Considere un circuito puesto a tierra consistente en dos esferas perfectamente conductoras, como es mostrado en la Figura. Los radios de las esferas son a_1 y a_2 y la distancia entre ellas es L , donde $L \gg a_1, a_2$. Una mitad de cada esfera está inmersa en tierra, la cual posee una conductividad g . Determine la resistencia total entre las esferas.



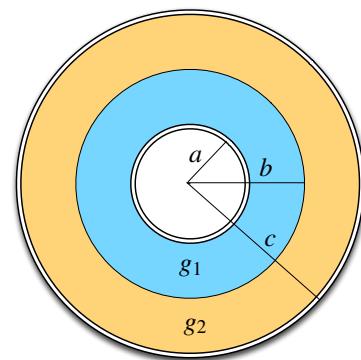
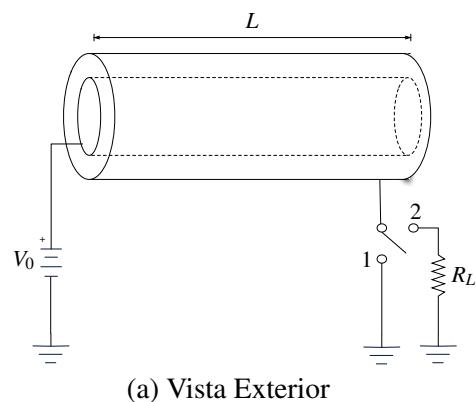
Problema 7.12   

Considere el circuito mostrado en la figura. El circuito consta de una fuente de voltaje V_0 , un condensador cilíndrico, un switch que puede cambiar entre las posiciones 1 y 2 y una resistencia R_L desconocida. El condensador cilíndrico tiene largo L y posee un radio interior a y un radio exterior c ($L \gg a, c$). En el interior del condensador hay dos medios materiales óhmicos de conductividad constante g_1 y g_2 y permitividad aproximadamente igual a ϵ_0 . Las posiciones respectivas de cada material al interior del condensador se muestran en la figura parte (b). Si el switch inicialmente se encuentra en la posición 1 y el sistema ya ha alcanzado el régimen estacionario, determine

- El vector densidad de corriente \vec{J} y el campo eléctrico \vec{E} dentro del condensador.
- La carga total de cada placa cilíndrica del condensador.
- La corriente que circula por el sistema.
- La resistencia del sistema.

Si el switch se cambia a la posición 2 y el sistema nuevamente ha alcanzado el régimen estacionario.

- Determine el valor de R_L tal que maximice la potencia disipada en dicha resistencia. ¿Cuál es el valor de esa potencia?. (Indicación: Recuerde la potencia disipada en una resistencia puede ser calculada como $P = V \cdot I$)



(b) Vista Interior



II. Soluciones

Solución 7.5 

Asumiendo que el sistema está en estado estacionario y la simetría radial se tiene que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 J_r)}{\partial r} = 0$$

Luego $\vec{J} = \frac{C}{r^2} \hat{r}$. Usando lo anterior, se procede a relacionar \vec{J} con \vec{E} , de modo que

$$\vec{J} = g\vec{E} = (kE)\vec{E} = kE^2 \hat{r}$$

Por lo tanto

$$kE^2 = \frac{C}{r^2} \implies E = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{C}{k}}$$

Ahora, para encontrar C se hace desde

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \implies V = \sqrt{\frac{C}{k}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \implies C = \frac{kV^2}{\ln^2(\frac{b}{a})}$$

Donde se deduce que

$$\vec{E} = \frac{V}{r \ln(\frac{b}{a})} \hat{r}$$

Ya teniendo el campo, es directo que la corriente encontrada se calcula como

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi kE^2 r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{kV^2}{r^2 \ln^2(\frac{b}{a})} r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = \frac{4\pi kV^2}{\ln^2(\frac{b}{a})}$$

La densidad de carga está dada por

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \frac{V}{r^2 \ln(\frac{b}{a})}$$

Solución 7.8 

- a) De la ecuación de continuidad y considerando que se ha alcanzado un régimen estacionario, se tiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$



Considerando la ley de Ohm y desarrollando la expresión:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (g(x) \cdot \vec{E}(x)) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(g(x) \cdot -\frac{\partial V}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + g(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{g_0}{a} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{g_0(x+a)}{a} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= 0 \\ \implies \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{x+a} \frac{\partial V}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

Nótese que se ha encontrado la ecuación diferencial pedida. Para resolverla se toma el cambio de variable $\mu = \frac{\partial V}{\partial x}$:

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{dx} + \frac{1}{x+a} \mu &= 0 \\ \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dx}{x+a} &\implies \ln \mu = -\ln(x+a) + C \\ \implies \mu &= \frac{C_1}{x+a} \\ \implies \frac{dV}{dx} &= \frac{C_1}{x+a} \\ \implies V(x) &= C_1 \ln(x+a) + C_2\end{aligned}$$

Para determinar la diferencia de potencial entre S y S' , se encuentra el valor de C_1 usando la condición de borde dada

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} = -\frac{C_1}{x+a} \hat{x} \\ \vec{E}(x=0) &= -\frac{C_1}{a} \hat{x} = E_0 \hat{x} \\ \implies C_1 &= -E_0 a \\ \implies \vec{E} &= \frac{E_0 a}{x+a} \hat{x}\end{aligned}$$

Finalmente, al reemplazar C_1 , $V(x) = -E_0 a \ln(x+a) + C_2$

$$\begin{aligned}\implies V(S) - V(S') &= -E_0 a \ln(a) + E_0 a \ln(2a) \\ \implies V(S) - V(S') &= E_0 a \ln(2)\end{aligned}$$

b) Considerando que $\vec{E} = \frac{E_0 a}{x+a} \hat{x}$ y $g(x) = \frac{g_0(x+a)}{a}$, se tiene que

$$\vec{J} = \frac{g_0(x+a)}{a} \cdot \frac{E_0 a}{(x+a)} \hat{x} = g_0 E_0 \hat{x}$$

Con esto es posible calcular corriente considerando que el flujo atraviesa un área cuadrada de lado a :

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^a \int_0^a g_0 E_0 dy dz = g_0 E_0 a^2$$



Además como $R = \frac{\Delta V}{I}$, usando el resultado recién obtenido para I y el de ΔV de la parte (a), se concluye:

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{E_0 a \ln(2)}{g_0 E_0 a^2} = \frac{\ln(2)}{g_0 a}$$

Finalmente, la carga encerrada se calcula usando Ley de Gauss:

$$\begin{aligned} \iint_{\text{cubo}} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} \implies \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} \\ -E_0 a^2 + \frac{E_0}{2} a^2 &= \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} \\ \implies Q_{\text{enc}} &= -\frac{\varepsilon_0 E_0 a^2}{2} \end{aligned}$$

Solución 7.12

- a) Aplicando la condición de solución estacionaria en la ecuación de conservación de carga, se tiene que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r J(r)) = 0 \implies r J(r) = A \implies \vec{J}(r) = \frac{A}{r} \hat{r}$$

De esta manera, debido a lo anterior, la geometría cilíndrica y la continuidad de \vec{J} (por condición de borde), se puede asumir una corriente $I = \text{cte}$ circulando por el sistema, con:

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iint \frac{A}{r} r d\phi dz = 2\pi L A \implies I = 2\pi L A = \text{cte.}$$

Por lo tanto, asumiendo una corriente I en el sistema, se tendrá:

$$\vec{J} = \frac{I}{\text{área}} \hat{r} = \frac{I}{2\pi r L} \hat{r} \implies \vec{E}_1 = \frac{I}{2\pi r L g_1} \hat{r}; \quad \vec{E}_2 = \frac{I}{2\pi r L g_2} \hat{r}$$

Donde \vec{E}_1 y \vec{E}_2 son los campos eléctricos en las zonas con conductividades g_1 y g_2 respectivamente. A partir de estos campos es posible calcular la diferencia de potencial V_0 entre los radios a y c :

$$V_0 = - \int_c^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_c^b \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} - \int_b^a \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} = \frac{I}{2\pi L} \left(\frac{\ln(c/b)}{g_2} + \frac{\ln(b/a)}{g_1} \right)$$

Y de lo anterior se despeja I :

$$I = \frac{2\pi L V_0}{\left(\frac{\ln(c/b)}{g_2} + \frac{\ln(b/a)}{g_1} \right)} = \frac{2\pi L V_0 g_1 g_2}{g_1 \ln(c/b) + g_2 \ln(b/a)}$$

Finalmente reemplazando el ahora conocido valor de I en las expresiones anteriores para \vec{J} , \vec{E}_1 , y \vec{E}_2 :

$$\vec{E}_1 = \frac{V_0 g_2}{r(g_1 \ln(c/b) + g_2 \ln(b/a))} \hat{r}$$



$$\vec{E}_2 = \frac{V_0 g_1}{r(g_1 \ln(c/b) + g_2 \ln(b/a))} \hat{r}$$

$$\vec{J} = \frac{V_0 g_1 g_2}{r(g_1 \ln(c/b) + g_2 \ln(b/a))} \hat{r}$$

b) Usando el hecho que $\sigma = \vec{E} \cdot \hat{n}$, se tiene que en la placa interior, donde el radio es $r = a$:

$$\sigma_a = \frac{E_1(a)}{\epsilon_0} \implies Q_a = 2\pi a L \sigma_a = \frac{2\pi L V_0 g_2}{(g_1 \ln(c/b) + g_2 \ln(b/a))}$$

De manera análoga en $r = c$:

$$\sigma_c = -\frac{E_2(c)}{\epsilon_0} \implies Q_c = 2\pi c L \sigma_c = -\frac{2\pi L V_0 g_1}{(g_1 \ln(c/b) + g_2 \ln(b/a))}$$

c) De los resultados anteriores:

$$I = \frac{2\pi L V_0}{\left(\frac{\ln(c/b)}{g_2} + \frac{\ln(b/a)}{g_1}\right)} = \frac{2\pi L V_0 g_1 g_2}{g_1 \ln(c/b) + g_2 \ln(b/a)}$$

d) La resistencia, se obtiene del cuociente:

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{1}{2\pi L} \left(\frac{\ln(c/b)}{g_2} + \frac{\ln(b/a)}{g_1} \right)$$

e) Aquí primero se debe observar que las resistencias R_L y R están en serie. Luego, sea V_1 el voltaje en la resistencia R_L , por LVK y LCK se tiene:

$$V_0 = I(R + R_L); \quad V_1 = IR_L$$

Eliminando I de estas dos ecuaciones resulta:

$$V_1 = \frac{R_L}{R + R_L} V_0$$

A este resultado genérico, de la caída de potencial en dos resistencias en serie con una fuente se le conoce como "Divisor de voltaje". Ahora se puede calcular la potencia disipada en la resistencia R_L :

$$P = V_1 I = \frac{V_1^2}{R_L} = \frac{R_L V_0^2}{(R_L + R)^2}$$

Ahora, para maximizar la potencia en función de R_L :

$$\frac{dP}{dR_L} = V_0^2 \left(\frac{1}{(R + R_L)^2} - \frac{2R_L}{(R + R_L)^3} \right) = 0 \implies R_L = R = \frac{1}{2\pi L} \left(\frac{\ln(c/b)}{g_2} + \frac{\ln(b/a)}{g_1} \right)$$

Es la resistencia R_L que maximiza la potencia disipada en ella. Y dicha potencia máxima vale:

$$P = \frac{V_0^2}{4R} = \frac{V_0^2 \pi L g_1 g_2}{2(g_1 \ln(c/b) + g_2 \ln(b/a))}$$





8

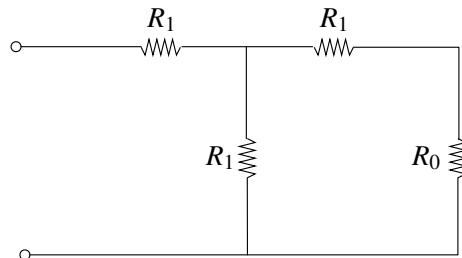
Circuitos Eléctricos

I. Problemas Propuestos

Problema 8.1



En el circuito de la figura, encuentre el valor de R_1 de manera que la resistencia equivalente entre las terminales (donde está abierto el circuito) sea igual a R_0 .

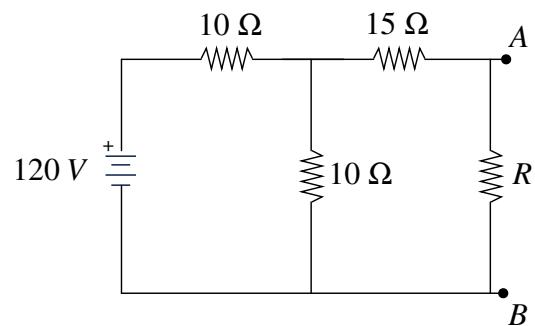


Problema 8.2



Una resistencia R se conecta entre los terminales A y B del circuito de la figura. Calcule el valor de la resistencia R de manera que:

- La potencia disipada en el circuito sea máxima. Determine el valor de esa potencia.
- La potencia disipada en la resistencia R sea máxima. Determine el valor de esa potencia.

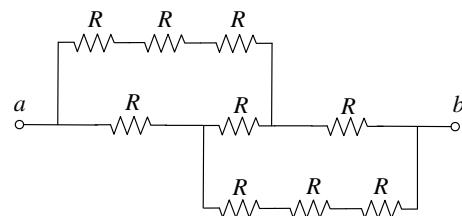


Problema 8.3



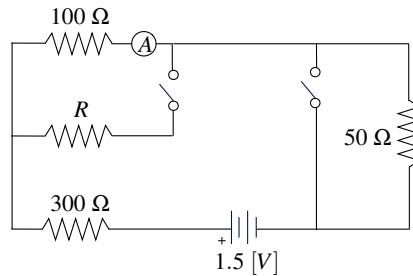
Nueve resistencias R de 10Ω están conectadas como se muestra en la figura y una diferencia de potencial 20 V . se aplica entre los puntos a y b .

- Calcule la resistencia equivalente de este circuito entre los puntos a y b .
- Calcule la corriente de cada una de las 9 resistencias.

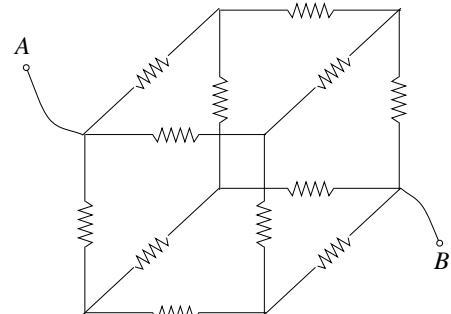


Problema 8.4  

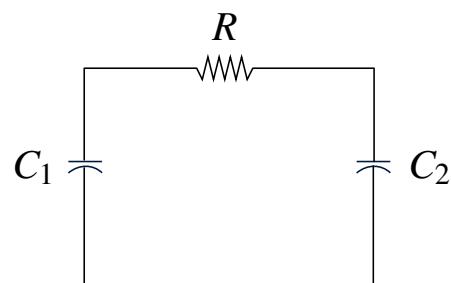
En el circuito de la figura, el amperímetro A registra una corriente I cuando los dos interruptores están abiertos o ambos cerrados. Hallar el valor de la resistencia R .

**Problema 8.5**  

Considere un cubo el cual posee en cada arista una resistencia R . Determine la resistencia equivalente entre dos vértices opuestos A y B .

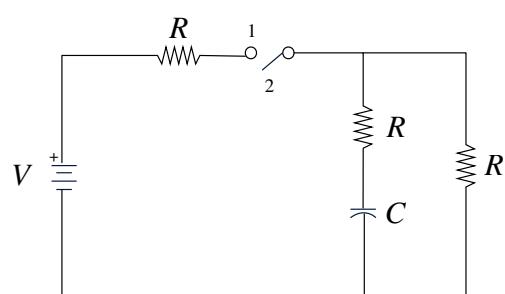
**Problema 8.6**  

Encuentre la pérdida de energía en forma de calor en el circuito de la figura. Demuestre que éste número no depende de la resistencia R , teniendo en cuenta que inicialmente el condensador de capacidad C_1 tiene carga Q_0 y que el segundo condensador se encuentra descargado.

**Problema 8.7**  

Considere el circuito de la figura. Antes de $t = 0$, el switch está en la posición 1 por un tiempo muy prolongado. En $t = 0$, el switch S es movido a la posición 2. Calcule:

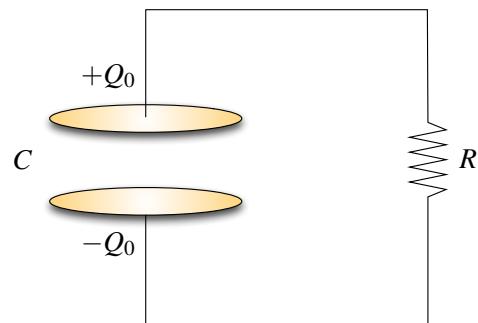
- La carga en el condensador en $t = 0$, $Q(0)$.
- La corriente en $t = 0$ después de que el switch es movido a la posición 2, $I(0)$.
- La corriente para $t > 0$, después de que el switch fue movido a la posición 2.
- La energía U almacenada en el condensador en $t = 0$.



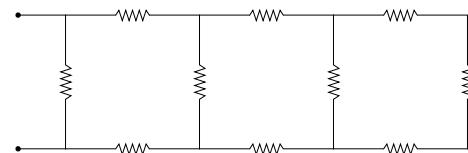
Problema 8.8  

Un condensador, de capacidad C , formado por placas circulares de radio b está cargado y con voltaje V_0 . La separación entre las dos placas paralelas es pequeña comparada con b . En $t = 0$ se cierra el switch y el condensador comienza a descargarse. Calcule, en función de V_0 , C , b , R , t :

- La carga $Q(t)$ en función del tiempo para la placa cargada positivamente del condensador.
- El campo eléctrico \vec{E} en el espacio entre las dos placas del condensador.

**Problema 8.9**   

En una red eléctrica hay n resistencias que cruzan desde la línea superior a la línea inferior, y hay $n - 1$ resistencias a lo largo de la línea superior e inferior. El número total de resistencias es $3n - 2$. Todas las resistencias son iguales y de valor R . Determine el valor de R_1 , R_2 , R_3 y R_∞ (R_i es la resistencia equivalente vista desde los terminales para el caso $n = i$). En la Figura se muestra el caso $n = 4$.



II. Soluciones

Solución 8.2

- a) Primero se debe calcular el valor de la resistencia R , tal que el valor de la potencia total disipada en el circuito se maximice. En este caso, se calcula la resistencia equivalente del circuito considerando un valor desconocido R . Luego

$$R_{\text{eq}} = 10 + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{15+R} \right)^{-1} = \frac{400+R}{25+R} \quad (\text{en } \Omega)$$

Entonces la potencia está dada por

$$P(R) = \frac{V^2}{R_{\text{eq}}} = 120^2 \cdot \frac{25+R}{400+20R} \quad (\text{en } [W])$$

Para maximizar, se deriva la expresión anterior con respecto a R

$$\frac{dP}{dR} = 120^2 \cdot \frac{400+20R - 20(25+R)}{(400+20R)^2} = -\frac{120^2 \cdot 100}{(400+20R)^2} < 0$$

Dado que la función potencia tiene derivada negativa, es siempre decreciente para $R \geq 0$, por lo que su máximo lo alcanza en su mínimo valor, o sea $R = 0 \Omega$. Por lo tanto la potencia disipada vale

$$P = 900 [W]$$

- b) Ahora hallar el valor de la resistencia R de modo que se máxime la potencia disipada en sí misma. En este caso es necesario plantear las leyes de Kirchoff:

$$\begin{aligned} 0 &= (15+R)I_R - 10(I - I_R) \\ 120 &= 10I + 10(I - I_R) \end{aligned}$$

Donde I es la corriente que sale de la fuente, e I_R es la corriente sobre la resistencia desconocida. Reordenando las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 10I &= (25+R)I_R \\ 120 &= 20I - 10I_R \end{aligned}$$

De estas dos ecuaciones se obtiene que:

$$I_R = \frac{60}{20+R} \implies P_R = RI_R^2 = R \left(\frac{60}{20+R} \right)^2$$

Luego:

$$\frac{dP}{dR} = 60^2 \left(\frac{(20+R)^2 - 2R(20+R)}{(20+R)^4} \right) = 0 \implies R = 20$$

Por lo tanto, el valor de la resistencia que maximiza la potencia disipada en ella es $R = 20 \Omega$ y dicha potencia vale:

$$P = 20 \left(\frac{60}{40} \right)^2 = 45 [W]$$



Solución 8.9 

En un principio hay que encontrar la recurrencia de la red de resistencias. Para el caso $n = 1$, siguiendo todos los datos del enunciado se tiene

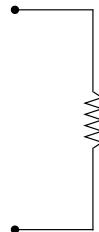


Figura 8.1: Red de Resistencias para $n = 1$

Donde evidentemente $R_1 = R$. Nuevamente cumpliendo los requisitos del enunciado R_2 es

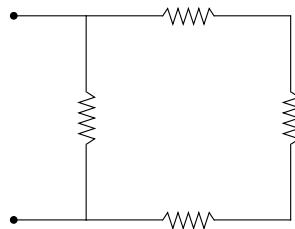


Figura 8.2: Red de Resistencias para $n = 2$

En este caso $R_2 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R+R+R} \right)^{-1} = \frac{3}{4}R$. Finalmente el caso R_3 estará dado por

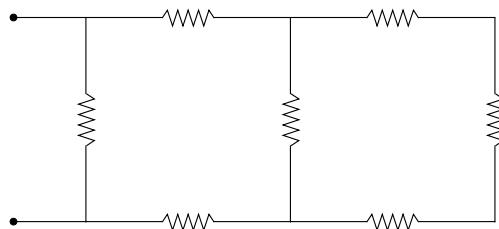


Figura 8.3: Red de Resistencias para $n = 3$

Donde $R_3 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R+R_2+R} \right)^{-1} = \frac{11}{15}R$. En este punto, es posible verificar que la recurrencia de resistencias está dada por

$$R_n = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R+R_{n-1}} \right)^{-1}$$

(Nota: Si se desea ser riguroso este resultado debería ser demostrado por inducción, sin embargo para no escapar de los contenidos del curso no se realizará la demostración) Ahora, se debe suponer la sucesión de redes de resistencias converge a un valor R_∞ , de modo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n-1} = R_\infty$$



Luego, para n suficientemente grande se cumple que

$$R_\infty = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R + R_\infty} \right)^{-1} \implies R_\infty^2 + 2RR_\infty - 2R^2 = 0 \implies R_\infty = (\sqrt{3} - 1)R$$



Parte III

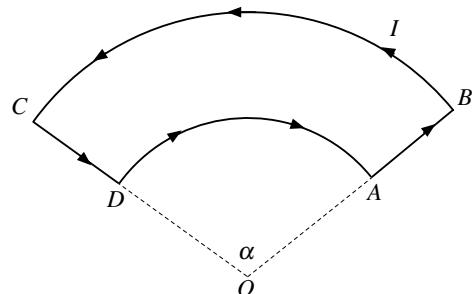
Magnetostática

Ley de Biot-Savart

I. Problemas Propuestos

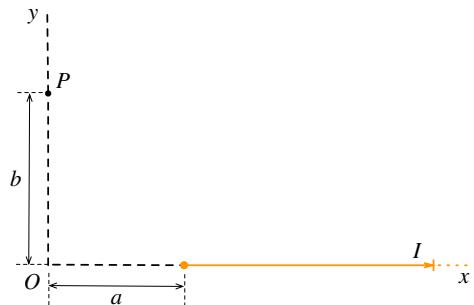
Problema 9.1

Considere el alambre $ABCDA$ que se muestra en la figura. Por él circula una corriente I en la dirección indicada. Si BC y DA son arcos de circunferencia subtendidos por un ángulo α de modo que $OA = OD = R$ y $OB = OC = 2R$. Calcule el campo magnético \vec{B} que produce en el centro O .



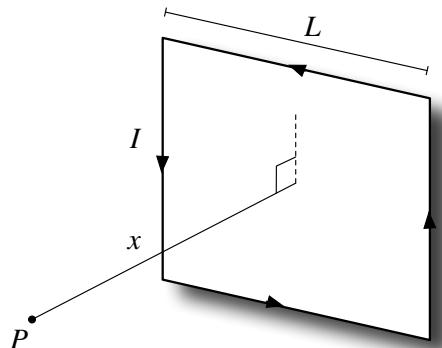
Problema 9.2

Por un conductor rectilíneo semi-infinito circula una corriente eléctrica de intensidad I en el sentido que se muestra en la figura. Calcule el campo magnético \vec{B} en el punto P .



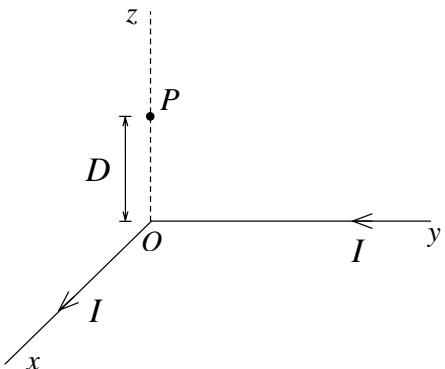
Problema 9.3

La figura muestra una espira cuadrada de lado L . Calcule el campo magnético \vec{B} en un punto P , que está a una distancia x del centro del cuadrado, a lo largo de su eje, si por él circula una corriente eléctrica de intensidad I en la dirección indicada.



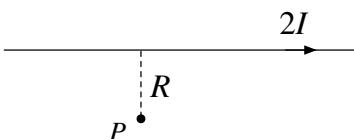
Problema 9.4

Un alambre en forma de L lleva corriente I . El alambre coincide con el eje x positivo y con el eje semipositivo y . Calcule el vector campo magnético en un punto P del eje z , ubicado en $z = D$.

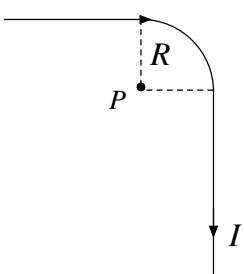
**Problema 9.5**

Susana, Rodrigo y Marcel, equipo docente de curso de electromagnetismo de una cierta universidad, tienen una discusión sobre el campo magnético generado por un alambre en un mismo punto P . Susana tiene un alambre infinito por el cual fluye una corriente $2I$, Rodrigo, al ver el alambre lo toma y lo dobla, formando un cuarto de circunferencia de radio R más otros dos tramos semi-infinitos (ver Figura). Rodrigo le asegura a Susana que si la corriente disminuye a la mitad, el campo magnético producido por esta nueva geometría tendrá una mayor magnitud en el punto P (por lo cual Susana se muestra muy en desacuerdo). Marcel, asombrado por la discusión de su cuerpo docente, les dice a ambos están equivocados ya que falta información suficiente para aseverar en cual de los dos casos el campo magnético es mayor. Ayude al cuerpo docente de este curso a determinar quién tiene la razón.

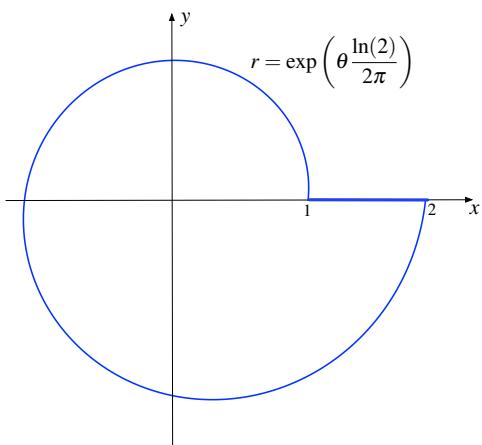
Susana:



Rodrigo:

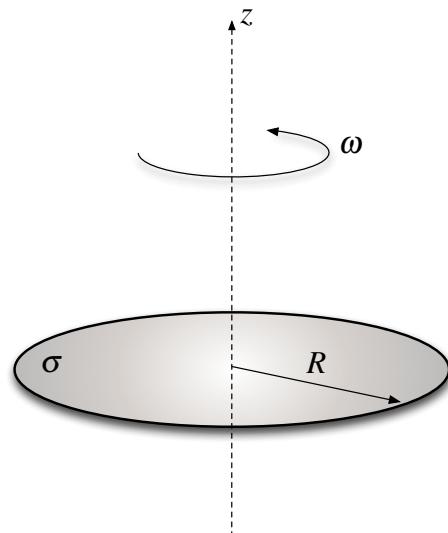
**Problema 9.6**

Consideré un alambre que ha sido doblado de la forma que se indica la figura, siguiendo la curva de la función $r(\theta) = e^{\theta \frac{\ln(2)}{2\pi}}$ en coordenadas cilíndricas. El alambre da una vuelta completa y es cerrado por otro trozo que va desde $x = 1$ hasta $x = 2$ sobre el eje x . Si por el alambre se hace circular una corriente I en sentido antihorario, determine el valor del campo magnético en el origen.



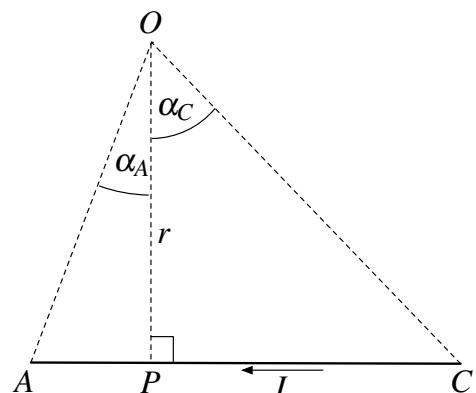
Problema 9.7   

Considere un disco de radio R que posee una densidad de carga superficial σ , uniformemente distribuida. Partiendo del reposo, el disco comienza a girar, hasta alcanzar una velocidad angular constante ω en torno a su eje de simetría. Encuentre una expresión para el campo magnético en $z = R$. (Propuesto: ¿Cuánto vale el campo magnético para cualquier punto en el eje?).

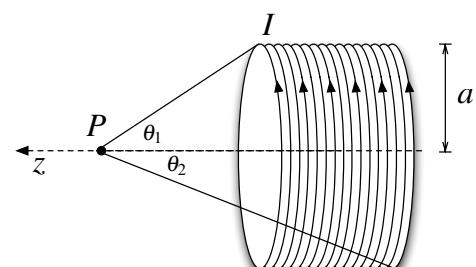
**Problema 9.8**   

Considere un segmento \overline{AC} recorrido por una corriente de intensidad I como se muestra en la Figura.

- Determine el valor del campo magnético en el punto O en función α_A , α_C y r
- Use el resultado calculado en a) para determinar el campo magnético producido por un polígono regular de n lados en su centro. Considere que el polígono es de lado a y es recorrido por una corriente I .
- (Propuesto) Demuestre que si $n \rightarrow \infty$, el campo magnético en el centro coincide con el de una espira circular de radio r .

**Problema 9.9**  

Encuentre el campo magnético en el punto P sobre el eje de una bobina cilíndrica de radio a con una densidad de n vueltas por unidad de largo que lleva una corriente I . Exprese su respuesta en términos de θ_1 y θ_2 (ver Figura).



II. Soluciones

Solución 9.4 

Para el calculo del campo magnético se usará la definición

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Primero se calculará la contribución de campo magnético que genera el cable que está sobre el semi-eje positivo x . Nótese que en este caso $\vec{r} = z\hat{z}$ y $\vec{r}' = x\hat{x}$ y $d\vec{l} = dx\hat{x}$. Luego

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\infty \frac{Idx\hat{x} \times (z\hat{z} - x\hat{x})}{|z\hat{z} - x\hat{x}|^3} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\infty \frac{zdx}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{y}\end{aligned}$$

Usando el cambio de variables $x = z \tan \theta \implies dx = z \sec^2 \theta d\theta$, por lo que si $x \rightarrow \infty$ se tiene que $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z^2 \sec^2 \theta d\theta}{(z^2 + z^2 \tan^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \hat{y} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi z} \hat{y} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi z} \hat{y}\end{aligned}$$

El otro aporte de campo magnético en ese punto está dado por la generación de campo magnético en el semi-eje y . El campo estará dado por

$$\begin{aligned}\vec{B}_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\infty^0 \frac{Idy\hat{y} \times (z\hat{z} - y\hat{y})}{|z\hat{z} - y\hat{y}|^3} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\infty \frac{zdy}{(z^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{x}\end{aligned}$$

La última integral es idéntica a la que ya se calculó en la parte anterior (sólo cambia la dirección). Finalmente el campo total es

$$\vec{B}(z = D) = \vec{B}_1(z = D) + \vec{B}_2(z = D) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi D}(\hat{x} + \hat{y})$$



Solución 9.5 

En este caso se elige el mismo sistema de referencia para ambos problemas, en este caso tomamos el origen en el punto P y con eje x creciente a la derecha e y creciente hacia arriba. Para encontrar los campos magnéticos se usará definición

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

- Caso Susana: $\vec{r} = 0, \vec{r}' = R\hat{y} + x\hat{x}, I d\vec{l} = 2Idx\hat{x}$ con $x \in (-\infty, \infty)$

$$\vec{B}_S(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2Idx\hat{x} \times (-R\hat{y} - x\hat{x})}{|-R\hat{y} - x\hat{x}|^3} = -\frac{\mu_0 IR\hat{z}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} dx = -\frac{\mu_0 IR\hat{z}}{2\pi} \cdot \frac{2}{R^2} = -\frac{\mu_0 I\hat{z}}{\pi R}$$

(la última integral puede resolverse con el cambio de variables $x = R \tan \theta$)

- Caso Rodrigo: En este caso hay que separar en tres caminos:

Recta semi-infinita sobre el eje x : $\vec{r} = 0, \vec{r}' = R\hat{y} + x\hat{x}, I d\vec{l} = Idx\hat{x}$ con $x \in (-\infty, 0)$

$$\vec{B}_1(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{Idx\hat{x} \times (-R\hat{y} - x\hat{x})}{|-R\hat{y} - x\hat{x}|^3} = -\frac{\mu_0 IR\hat{z}}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} dx = -\frac{\mu_0 IR\hat{z}}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^2} = -\frac{\mu_0 I\hat{z}}{4\pi R}$$

Trozo de cuarto de circunferencia: $\vec{r} = 0, \vec{r}' = R\hat{r}, I d\vec{l} = IRd\theta\hat{\theta}$ con $\theta \in (\frac{\pi}{2}, 0)$

$$\vec{B}_2(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{IRd\theta\hat{\theta} \times (0 - R\hat{r})}{|-R\hat{r}|^3} = \frac{\mu_0 I\hat{z}}{4\pi R} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 d\theta = -\frac{\mu_0 I\hat{z}}{8R}$$

Recta semi-infinita sobre el eje y : $\vec{r} = 0, \vec{r}' = R\hat{x} + y\hat{y}, I d\vec{l} = Idy\hat{y}$ con $y \in (0, \infty)$

$$\vec{B}_3(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{Idy\hat{y} \times (-R\hat{x} - y\hat{y})}{|-R\hat{x} - y\hat{y}|^3} = -\frac{\mu_0 IR\hat{z}}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{y}{(y^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} dy = -\frac{\mu_0 IR\hat{z}}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^2} = -\frac{\mu_0 I\hat{z}}{4\pi R}$$

(Idéntico al primer cálculo)

Por lo tanto el campo total es:

$$\vec{B}_R(P) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = -\frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4} \right) \hat{z}$$

Finalmente, debe notarse que

$$\frac{|\vec{B}_S|}{|\vec{B}_R|} = \frac{\frac{\mu_0 I}{\pi R}}{\frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4} \right)} = \frac{8}{4 + \pi} > 1 \implies |\vec{B}_S| > |\vec{B}_R|$$

Dado que todos los datos de la expresión son conocidos, Susana tiene la razón.



Solución 9.7 

Calculando el campo magnético por definición, se tiene que

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

aquí

$$I d\vec{l} = \frac{dq}{dt} d\vec{l} = dq \frac{d\vec{l}}{dt} = \sigma dS \cdot \vec{v} = \sigma r dr d\theta \cdot \vec{v}$$

Luego, dado que $\vec{r} = R\hat{z}$, $\vec{r}' = r\hat{r}$ y $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}' = \omega r \hat{\theta}$ se tiene que

$$\vec{B}(R\hat{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\sigma r dr d\theta \cdot \omega r \hat{\theta} \times (R\hat{z} - r\hat{r})}{(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\sigma R \omega r^2 dr d\theta}{(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{r} + \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\sigma \omega r^3 dr d\theta}{(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \right]$$

Por asuntos de simetría la primera integral es nula, por lo que el campo magnético es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R \frac{r^3 dr}{(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}$$

Usando el cambio de variables $\rho = R^2 + r^2 \implies d\rho = 2rdr$, por lo tanto

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4} \int_{R^2}^{2R^2} \frac{(\rho - R^2) d\rho}{\rho^{\frac{3}{2}}} \hat{z} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4} \hat{z} \left[\int_{R^2}^{2R^2} \frac{(\rho - R^2) d\rho}{\rho^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4} \hat{z} \left[\int_{R^2}^{2R^2} \rho^{-\frac{1}{2}} d\rho - R^2 \int_{R^2}^{2R^2} \rho^{-\frac{3}{2}} d\rho \right]$$

Resolviendo las dos integrales anteriores, resulta que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4} (3\sqrt{2} - 4) R \hat{z}$$

Solución 9.8 

a) Se fija un sistema de referencia de centro P para luego usar la definición de campo magnético.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \implies \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{r \tan \alpha_C}^{-r \tan \alpha_A} \frac{dx \hat{x} \times (r\hat{y} - x\hat{x})}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I r \hat{z}}{4\pi} \int_{r \tan \alpha_C}^{-r \tan \alpha_A} \frac{dx}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

De este modo, usando el cambio de variables $x = r \tan \theta \implies dx = r \sec^2 \theta d\theta$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi r} \int_{\alpha_C}^{-\alpha_A} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin(-\alpha_A) - \sin \alpha_C) \hat{z} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_A + \sin \alpha_C) \hat{z}$$

b) En el caso del polígono regular se pueden formar n triángulos isósceles, de forma que $\alpha_A = \alpha_C = \frac{\pi}{n}$ y además $r = \frac{a}{2 \tan \frac{\pi}{n}}$. El aporte de campo magnético en el centro del polígono es realizado por n segmentos como el calculado en la parte a), por lo que el resultado final es

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 n I}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \hat{z}$$



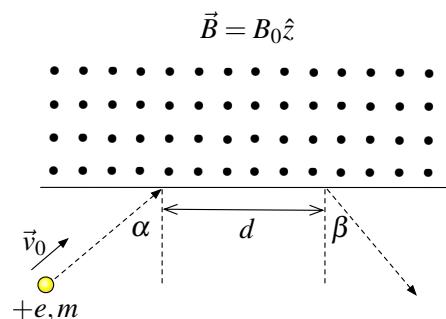
10

Fuerza de Lorentz

I. Problemas Propuestos

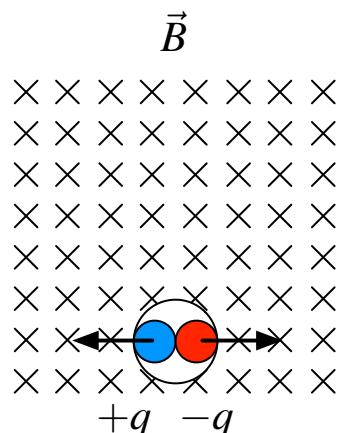
Problema 10.1

Un protón se dispara a una zona de campo magnético constante tal como se muestra en la figura. Si el protón de carga $+e$ y masa m incide con un ángulo α a la zona de campo, determine el valor de la distancia d que recorre y el ángulo β con el cual sale de la zona de campo (ver Figura).



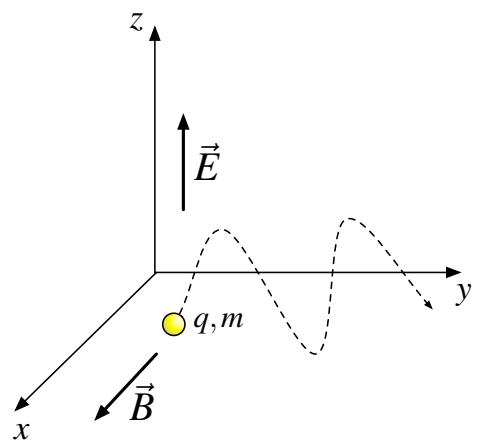
Problema 10.2

Una partícula neutra se encuentra sometida a campo magnético constante $B = B_0 \hat{z}$. En $t = 0$ la partícula se rompe (“decae”) en dos cargas $+q$ y $-q$ con igual masa m , las cuales salen disparadas con velocidades en direcciones contrarias. Determine el tiempo en ambas partículas vuelven a chocar (exprese su resultado en función de q , m y B e ignore la interacción coulombiana entre ellas).



Problema 10.3

Una partícula de masa m y carga q que está sometida a la influencia simultánea de un campo eléctrico oscilatorio en la dirección vertical $\vec{E} = E_0 \cos(\Omega t) \hat{z}$ y un campo magnético constante en la dirección horizontal $\vec{B} = B_0 \hat{x}$ como se ilustra en la figura. Si la partícula parte en el reposo,

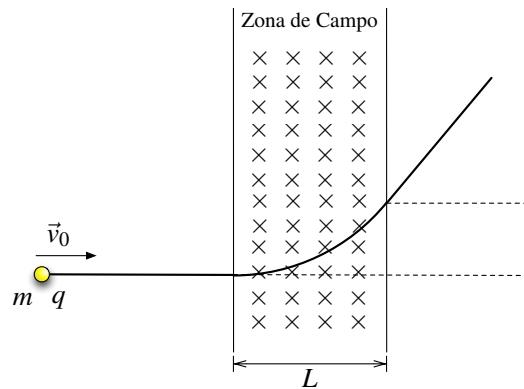


- Encuentre las componentes x , y y z de la aceleración de la partícula.
- Encuentre la velocidad en función del tiempo.
- Encuentre la trayectoria y discuta que ocurre cuando la frecuencia es $\Omega = \frac{qB}{m}$

Problema 10.4  

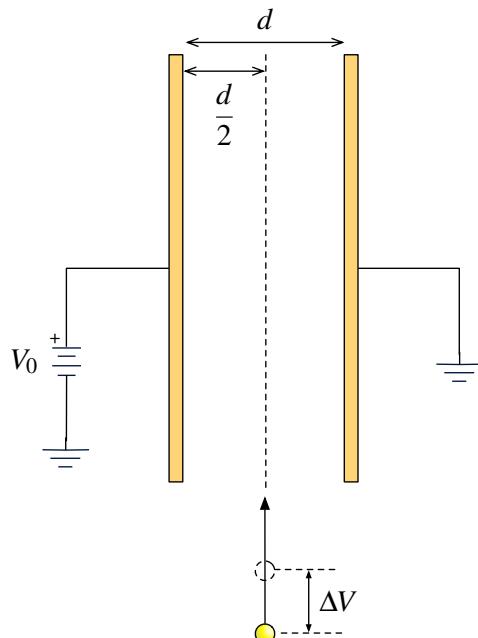
Una partícula de masa m , con carga $q > 0$, ingresa horizontalmente a una región de ancho L , donde existe un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$ como se indica en la figura.

- Calcule el valor crítico de la rapidez inicial $\vec{v}_0 = v_0\hat{z}$ de la partícula que le permite decidir si ella atraviesa la región, o se devuelve.
- Determine la trayectoria que realiza la partícula para los casos en que la rapidez inicial sea mayor o menor que el valor crítico encontrado anteriormente.
- Suponga ahora que $\vec{v}_0 = v_0\hat{x} + v_B\hat{z}$, determine la altura con que sale la carga de la zona de campo (considere distintos casos a partir del valor encontrado en la parte anterior).


Problema 10.5  

Un electrón de carga $-e$ y masa m se acelera a través de una diferencia de potencial de $\Delta V = 10^4$ [V] antes de entrar a una región limitada por dos placas paralelas que tienen una diferencia de potencial igual a $V_0 = 100$ [V], separadas por una distancia $d = 1$ [mm] y de largo $L = 1$ [m]. El electrón entra a esta región en un plano equidistante de las placas. Ignorando efectos de bordes:

- ¿Cuál es la velocidad del electrón al llegar a la región limitada por las dos placas?
- ¿Qué campo magnético \vec{B} se debe aplicar en la región limitada por las dos placas para que el electrón continúe con trayectoria rectilínea? Indique la dirección de dicho campo en la figura.
- Suponga que, una vez aplicado el campo calculado anteriormente, suponga que cuando el electrón ha recorrido una distancia $L/2$ se quita la fuente de $V_0 = 100$ [V]. ¿Alcanza a salir el electrón de las placas paralelas?

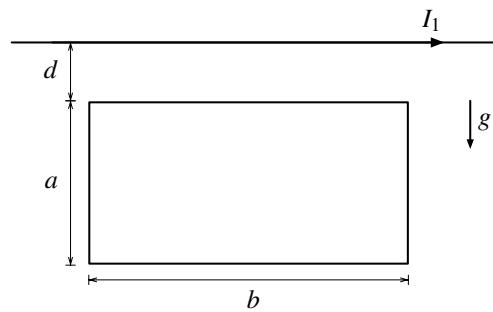


Indicación: tome $e/m = 18 \times 10^{10}$ [MKS]

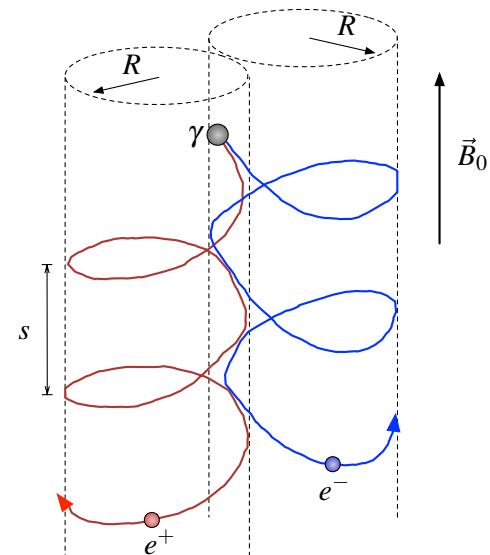


Problema 10.6 ♦ ✓

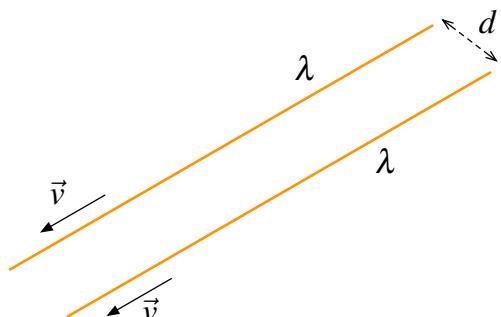
Suponga que el sistema que se ve en la figura se encuentra en un plano vertical, donde g es la aceleración de gravedad. A través del alambre rectilíneo infinito circular una corriente I_1 en la dirección indicada. La espira rectangular, de dimensiones a y b , está ubicada paralela al alambre, a una distancia d de él y posee una masa m . Encuentre la corriente I_2 que debe circular por la espira (indique el sentido de ella), para que permanezca en reposo en la posición señalada.

**Problema 10.7** ★ ✓ ⚡

En un espacio de campo magnético constante $\vec{B} = B_0 \hat{z}$, un fotón γ experimenta un decaimiento $\gamma \rightarrow e^- + e^+$ donde e^- representa al electrón y e^+ a un positrón. La carga del electrón es $-e < 0$ y la del positrón es $+e$; ambos tienen igual masa m . Como resultado del decaimiento, ambas partículas adquieren trayectorias espirales como se muestra en la figura. El radio de los mantes cilíndricos por los cuales transita cada partícula es R , y el paso axial en una vuelta es s . Determine la rapidez con la que se mueve cada partícula.

**Problema 10.8** ♦ ✓

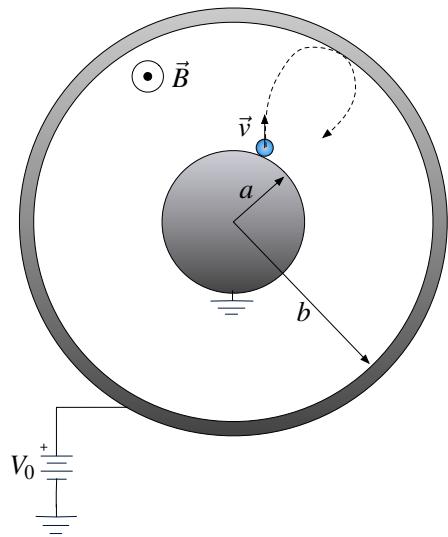
Se tienen dos cables rectilíneos infinitamente largos con densidad lineal de carga λ , separados por una distancia d , moviéndose a velocidad v constante. Encuentre el valor de v para que la atracción magnética se compense con la repulsión eléctrica. ¿Es razonable este resultado?.



Problema 10.9   

Considere dos cables coaxiales de radios a y b como muestra la figura, cuyo espacio interior se encuentra vacío. Los cables se encuentran separados a una diferencia de potencial V_0 y entre ellos existe un campo magnético homogéneo $\vec{B} = B\hat{z}$. Desde el cilindro interior se libera un electrón de carga $-e$ y masa m . El objetivo del problema es encontrar el valor máximo de B de modo que el electrón liberado no choque con el cilindro exterior (alcance a dar la vuelta perfectamente). Asuma que la velocidad del electrón tiene solamente componentes en el plano de la figura.

- Encuentre el momentum angular del electrón en función de carga e , el campo magnético B , y la distancia al eje del cilindro interior r y momentum angular inicial L_0 .
- Asumiendo que los electrones salen con una velocidad inicial $v_0 \approx 0$, encuentre la velocidad que tendrá en r_{\max} , es decir en $r = b$.
- Mediante conservación de energía, halle otra expresión para la velocidad recién calculada. A partir de este encuentre el valor que debería tener B , de modo que a los más el electrón volviese en $r = b$.



II. Soluciones

Solución 10.7

Las cargas moviéndose dentro de campos magnéticos se mueven siguiendo una circunferencia (velocidad dentro de un plano) o en una espiral (velocidad en tres dimensiones). Para hallar la rapidez del electrón, primero se impone la velocidad en coordenadas cilíndricas

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z}$$

debido a que $r = R \implies \dot{r} = 0$, Por otro lado, se tiene que

$$\vec{F} = m\vec{a} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

entonces como $B = B_0\hat{z}$, se tiene que

$$m(-R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{z}) = -eB_0R\dot{\theta}\hat{r}$$

de lo último se deduce que $R\ddot{\theta} = \ddot{z} = 0$ y además

$$\dot{\theta} = \frac{eB_0}{m}$$

Para terminar el problema está faltando el valor de \dot{z} , que puede ser determinado mediante el paso s que tiene la espiral (cada 2π radianes el electrón baja s metros) de la siguiente forma

$$\dot{z} = \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{s}{2\pi} \frac{eB_0}{m}$$

Finalmente la rapidez vale

$$|\vec{v}| = \sqrt{(R\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2} = \frac{eB_0}{m} \sqrt{R^2 + \left(\frac{s}{2\pi}\right)^2}$$

El resultado es el mismo para el positrón, con la única diferencia que como su carga es $+e$ el giro será en el sentido inverso al del electrón.

Solución 10.9

- a) Previamente se debe notar que la fuerza que afecta al electrón en cualquier punto es $\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E})$, donde $\vec{B} = B\hat{z}$, $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ y $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$, luego $\vec{F} = -e(-\dot{r}B\hat{\theta} + r\dot{\theta}B\hat{r} + E(r)\hat{r})$
Para encontrar el momentum angular, se usa el hecho que

$$\vec{r} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \implies \frac{d\vec{L}}{dt} = r\hat{r} \times (e\dot{r}B\hat{\theta} - e(r\dot{\theta}B + E(r))\hat{r}) = eBr \frac{dr}{dt} \hat{z}$$

Integrando a ambos con respecto al tiempo se obtiene que

$$\int_{L_0}^{L(r)} dL = eB \int_a^r r dr \implies L(r) = L_0 + eB \cdot \frac{r^2 - a^2}{2}$$



b) Por otro lado

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \implies |\vec{L}| = mr|\vec{v}| \implies L(r) = mrv$$

sumando al hecho que $v_0 \approx 0 \implies L_0 \approx 0$ se deduce que

$$mrv = eB \cdot \frac{r^2 - a^2}{2} \implies v(b) = eB \frac{(b^2 - a^2)}{2mb}$$

c) Por análisis energético

$$U_i + K_i = U_f + K_f \implies -eV(a) + \frac{1}{2}mv_0^2 = -eV(b) + \frac{1}{2}mv^2(b)$$

Dado que $V(b) - V(a) = V_0$ y $v_0 \approx 0$ se tiene

$$eV_0 = \frac{1}{2}mv^2(b) \implies v(b) = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$$

Finalmente se deduce que el valor de campo magnético crítico es B_c

$$eB_c \frac{(b^2 - a^2)}{2mb} = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}} \implies B_c = \frac{2mb}{e(b^2 - a^2)} \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$$



11

Ley de Ampère

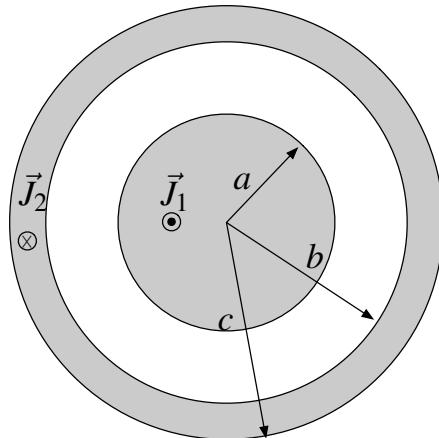
I. Problemas Propuestos

Problema 11.1



Un cable coaxial muy largo consiste en un cilindro sólido con un radio interior de radio a , rodeado por un cascarón cilíndrico conductor concéntrico de radio interno b y exterior c . El conductor interior tiene una densidad de corriente no uniforme $\vec{J}_1 = \alpha r \hat{z}$ donde α es una constante. El cilindro exterior tiene una densidad de corriente $\vec{J}_2 = -\beta \hat{z}$ donde β es una constante positiva. Los conductores llevan una igual y opuesta corriente de magnitud I_0 . Entre ambos conductores existe vacío.

- Encuentre los valores α y β en términos de a , b , c y I_0
- Determine el campo magnético en todo el espacio. Exprese sus resultados en términos de a , b , c y I_0
- Realice un gráfico $|\vec{B}|$ con respecto a la distancia desde el eje de simetría r .

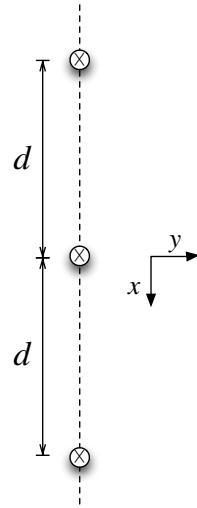


Problema 11.2



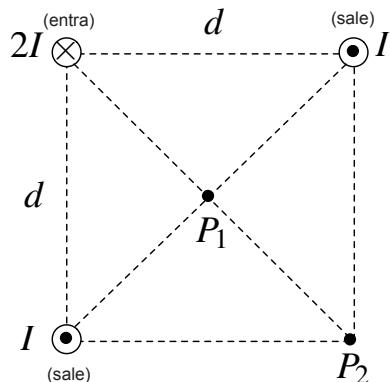
Considere 3 alambres rectos de sección transversal despreciable, infinitamente largos y separados en sí una distancia d . Cada alambre lleva una corriente I , en la misma dirección (perpendicular al plano de la hoja y hacia adentro).

- Encuentre la ubicación de los dos puntos donde el campo magnético total se anula.
- Suponga que el alambre central se desplaza rígidamente una pequeña distancia y ($y \ll d$) en dirección perpendicular a la línea a la línea sobre la que están dispuestos inicialmente los alambres, mientras los otros dos alambres permanecen fijos. Calcule aproximadamente la fuerza neta por unidad de largo que actúa sobre el alambre desplazado, al primer orden de y .



Problema 11.3   

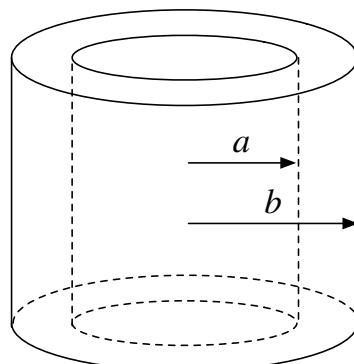
Tres alambres infinitos están ubicados, mutuamente paralelos están orientados perpendicularmente al plano de la hoja y ubicados en los vértices de un cuadrado de lado d . Uno de ellos lleva corriente $2I$ que entra al plano, mientras que los otros llevan corriente I que emerge del plano de la hoja. Calcule el vector campo magnético en los puntos P_1 y P_2 .

**Problema 11.4**  

Se tiene un conductor en la forma de una capa cilíndrica recta, infinita, de radio interior a y radio exterior b . Este conductor tiene una densidad de corriente que, expresada en coordenadas cilíndricas, es:

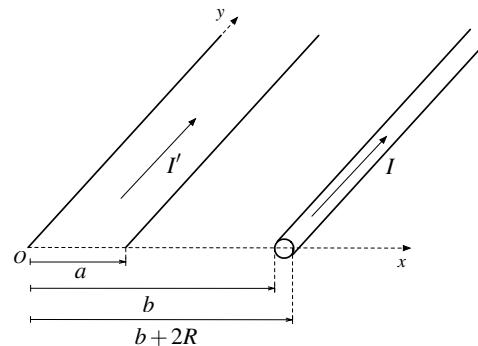
$$\vec{J}(a \leq r \leq b) = \frac{\alpha}{r} \hat{\theta} + \beta \hat{z}$$

Con α y β constantes conocidas. Obtenga el campo magnético en todas partes.

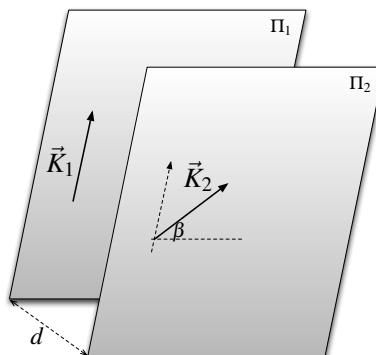
**Problema 11.5**  

Se tiene un conductor cilíndrico de radio R , muy largo, con corriente I y un conductor plano, también muy largo, con corriente superficial I' circulando por él. Ambos conductores son paralelos y el conductor plano y el eje de la corriente que circula por el cilindro son coplanares. Si el plano conductor tiene ancho a y el eje del cilindro se encuentra a una distancia b del origen, encuentre:

- El campo magnético sobre el eje x para $x > a$.
- La fuerza entre ambos conductores por unidad de largo.

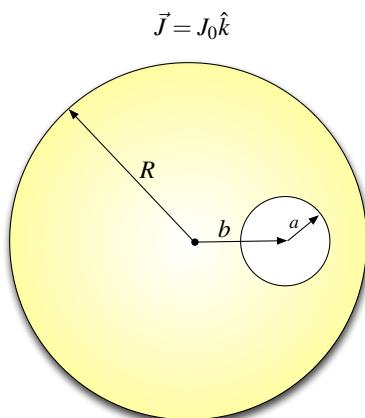
**Problema 11.6**   

Consideré dos planas metálicas infinitas paralelas Π_1 y Π_2 , separadas una distancia d . En sus respectivas placas fluyen corrientes en direcciones arbitrarias, las cuales tienen una ángulo β entre ellas como se ilustra en la Figura. Encuentre la densidad de fuerza por unidad de área e indique si la fuerza es repulsiva o atractiva a partir de los distintos valores de β .

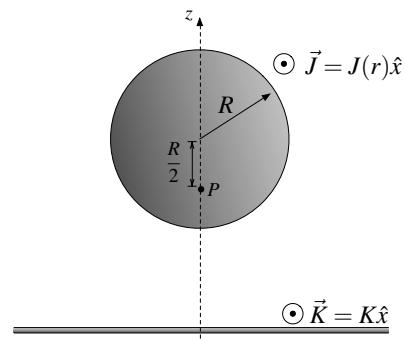


Problema 11.7 ★ ✓

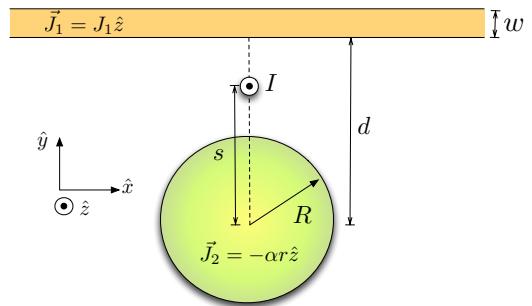
Un cable de cilíndrico de radio R lleva una densidad de corriente $\vec{J} = J_0 \hat{k}$. El cable tiene un hoyo cilíndrico de radio a paralelo al eje del cilindro a una distancia b de él. Muestre que el campo magnético dentro de la cavidad es uniforme, y encuentre su valor.

**Problema 11.8** ♦ ✓

Se tiene dos corrientes, ambas con igual sentido. Una de ellas es una corriente plana e infinita de densidad lineal K y otra es una corriente cilíndrica infinitamente larga cuya densidad es $J(r) = J_0 (1 - \frac{r}{R})$. Encuentre el valor de J_0 en función de K que hace que el campo magnético resultante en el punto P ubicado a una distancia $\frac{R}{2}$ del centro del cilindro sea nulo.

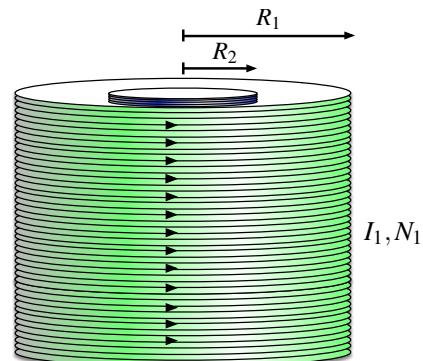
**Problema 11.9** ♦ ✓

Considere 3 distribuciones como se muestran en la figura. Un bloque de ancho w lleva un densidad volumétrica uniforme de corriente $\vec{J}_1 = J_1 \hat{z}$. Un cable infinito de radio R lleva una densidad de corriente no uniforme $\vec{J}_2 = -\alpha r \hat{z}$, donde r es la distancia desde el eje del cilindro y α una constante. El bloque se encuentra a una distancia d del cilindro. Si se coloca un alambre con corriente I a una distancia s del centro del cable ($s < d$), determine la fuerza por unidad de largo que siente el cable con corriente I .

**Problema 11.10** ♦ ✓

Considere dos bobinas muy largas de radios R_1 y R_2 , con N_1 y N_2 vueltas por unidad de largo, respectivamente. La bobina de radio R_2 se encuentra inserta dentro de la bobina de radio R_1 compartiendo su mismo eje. Si por la bobina exterior circula una corriente I_1 , determine:

- La corriente I_2 que circula por la bobina interior, sabiendo que el campo magnético para $r < R_2$ es nulo.
- Para la corriente encontrada en la parte anterior, encuentre la fuerza por unidad de área que siente la bobina interior.



II. Soluciones

Solución 11.1 

a) Usando la definición de corriente eléctrica a partir de la densidad de corriente, se obtiene que

$$I_0 = \iint \vec{J}_1 \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \alpha r \hat{z} \cdot r dr d\theta \hat{z} = \frac{2\pi\alpha a^3}{3} \implies \alpha = \frac{3I_0}{2\pi a^3}$$

$$-I_0 = \iint \vec{J}_2 \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_b^c -\beta \hat{z} \cdot r dr d\theta \hat{z} = -\beta \pi(c^2 - b^2) \implies \beta = \frac{I_0}{\pi(c^2 - b^2)}$$

b) Por otro lado, el campo magnético es por ley de Ampere

- $r < a$:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enl} \implies B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^r \alpha r \hat{z} \cdot r dr d\theta \hat{z} = \mu_0 \frac{2\pi}{3} \alpha r^3 \implies \vec{B} = \frac{\mu_0 \alpha r^2}{3} \hat{\theta} = \frac{\mu_0 I_0 r^2}{2\pi a^3} \hat{\theta}$$

- $a < r < b$:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enl} \implies B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^a \alpha r \hat{z} \cdot r dr d\theta \hat{z} = I_0 \implies \vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \hat{\theta}$$

- $b < r < c$:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enl} \implies B(r) \cdot 2\pi r = I_0 - \int_0^{2\pi} \int_b^r \beta \hat{z} \cdot r dr d\theta \hat{z} \implies \vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \hat{\theta}$$

- $r > c$:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enl} \implies B(r) \cdot 2\pi r = I_0 - I_0 = 0 \implies \vec{B} = 0$$

c) Un gráfico aproximado es el siguiente:

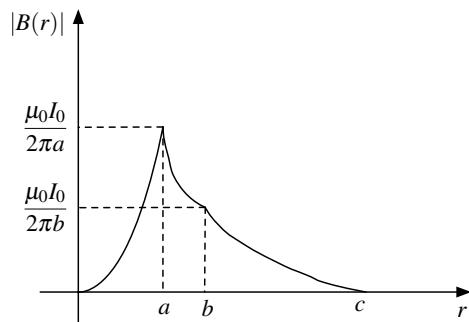


Figura 11.1: Gráfico



Solución 11.2  

- a) Para iniciar el problema se debe calcular el campo magnético que produce un cable que lleva corriente. Usando Ley de Ampère sobre un camino Γ (circunferencia de radio r recorrida en sentido anti-horario).

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \implies -B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I \implies \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(-\hat{\theta})$$

Se supondrá que el punto donde el campo magnético se anula es sobre el eje X . Sea “ x ” el valor medido desde el centro del sistema de referencia. Debido al superposición de los campos magnéticos, el campo en ese punto vale:

$$\vec{B}(x, 0) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+d)}(-\hat{z}) + \frac{\mu_0 I}{2\pi x}(-\hat{z}) + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)}\hat{z}$$

Es posible verificar que el valor del campo magnético sobre el eje x siempre va en el sentido \hat{z} ($\text{o } -\hat{z}$) y depende sólo de la distancia que separa el cable al punto donde se calcula el campo. Dado que se buscamos $\vec{B}(x, 0) = 0$, se obtiene que:

$$\frac{1}{x+d} + \frac{1}{x} - \frac{1}{d-x} = 0$$

donde resultan dos puntos simétricos ubicados en $x = \pm \frac{d}{\sqrt{3}}$

- b) Primero se calcula el campo magnético que genera el cable de la izquierda sobre el punto $(0, y)$. Recordando que es $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(-\hat{\theta})$ (precaución: la fórmula anterior está con respecto al origen, aquí la usaremos centrada en el punto $(-d, 0)$) se obtiene que:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{y^2+d^2}}(-(-\sin\alpha\hat{x} + \cos\alpha\hat{y}))$$

De igual forma, para el cable de la derecha se tiene que:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{y^2+d^2}}(-(-\sin(\pi-\alpha)\hat{x} + \cos(\pi-\alpha)\hat{y})) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{y^2+d^2}}(-(-\sin\alpha\hat{x} - \cos\alpha\hat{y}))$$

Sumando las expresiones anteriores, y notando que $\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{y^2+d^2}}$

$$\vec{B}(0, y) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I \sin\alpha}{\pi\sqrt{y^2+d^2}}\hat{x} = \frac{\mu_0 I y}{\pi(y^2+d^2)}\hat{x}$$

Por lo que la fuerza estará dada por:

$$d\vec{F} = Idl \times \vec{B}(0, y) = -Idz\hat{z} \times \frac{\mu_0 I y}{\pi(y^2+d^2)}\hat{x} = -\frac{\mu_0 I^2 dz}{\pi} \frac{y}{y^2+d^2}\hat{y}$$

Se pide la fuerza anterior linealizada (primer orden), por lo tanto reescribiendo la expresión como

$$d\vec{F} = -\frac{\mu_0 I^2 dz}{\pi} \frac{1}{d} \frac{\frac{y}{d}}{\left(\frac{y}{d}\right)^2 + 1} \hat{y}$$



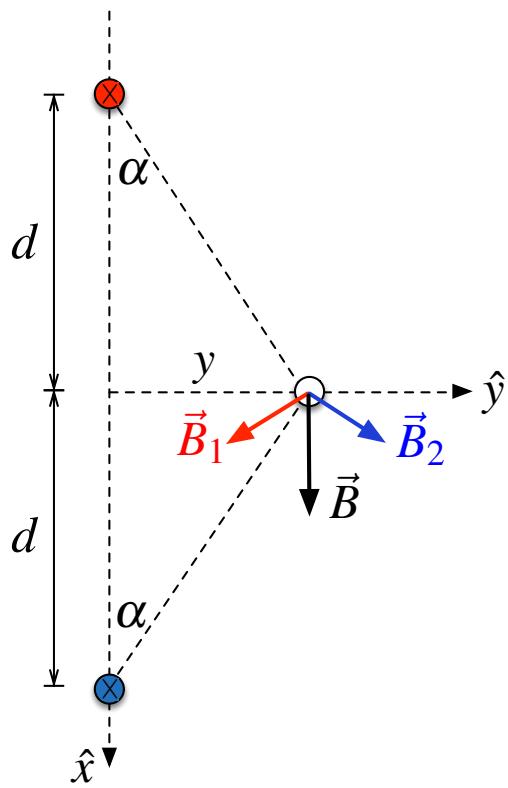


Figura 11.2: Campos Magnéticos aplicados al cable.

Como sabemos que $y \ll d$ tenemos que hacer una aproximación según Taylor de la función

$$f(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}$$

en un punto cercano a $\lambda = 0$, por lo tanto

$$f(\lambda) \approx f(0) + \left. \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} (\lambda - 0) = \lambda$$

Finalmente la aproximación es

$$d\vec{F} = -\frac{\mu_0 I^2 dz}{\pi} \frac{1}{d} \frac{\frac{y}{d}}{(\frac{y}{d})^2 + 1} \hat{y} \approx -\frac{\mu_0 I^2 dz}{\pi} \frac{y}{d^2} \hat{y}$$

Solución 11.3

Para calcular el campo en los lugares pedidos, primero se debe conocer el resultado genérico para el campo magnético producido por un alambre infinito con corriente I circulando en el sentido positivo de \hat{z} . Usando la Ley de Ampére en una superficie circular de radio r en el plano xy , y asumiendo por simetría $\vec{B} = B(r)\hat{\theta}$, entonces:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I = 2\pi r B \implies \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta}$$



Ahora volviendo al problema original, primero se calcula el campo en el punto P_1 , colocando al origen de los ejes cartesianos sobre P_1 , con \hat{x} horizontal hacia la derecha, e \hat{y} vertical hacia arriba:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{d}{\sqrt{2}}} \left(\frac{-\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{d}{\sqrt{2}}} \left(\frac{\hat{x} - \hat{y}}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\mu_0 I}{\pi \frac{d}{\sqrt{2}}} \left(\frac{-\hat{x} - \hat{y}}{\sqrt{2}} \right)$$

Por lo tanto:

$$\vec{B}(P_1) = -\frac{\mu_0 I}{\pi d} (\hat{x} + \hat{y})$$

Para el cálculo en el punto P_2 , se reubica el origen de los ejes en él, nuevamente con \hat{x} horizontal hacia la derecha, e \hat{y} vertical hacia arriba:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \hat{x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \hat{y} + \frac{\mu_0 I}{\pi d \sqrt{2}} \left(\frac{-\hat{x} - \hat{y}}{\sqrt{2}} \right) = 0 \implies \vec{B}(P_2) = 0$$

Solución 11.6

Se nos pide determinar la fuerza entre las placas que puede ser algo complejo de ver a primera vista. ¿Por qué siente fuerza una placa?, a priori se podría suponer que la fuerza que siente cada placa es la misma módulo, ya que es un par acción - reacción. Ahora, si se toma como referencia la placa Π_1 , la placa Π_2 sentirá una fuerza por dos motivos: la corriente que circula por \vec{K}_1 provoca un campo magnético en todo el espacio y en Π_2 existe una corriente circulando. **Estos dos elementos, “campos magnéticos” (por lo general externos) y “corrientes” (o cargas en movimiento) siempre provocan fuerza sobre las cargas.** Ahora para determinar la fuerza se debe usar la forma diferencial de la fuerza de Lorentz:

$$d\vec{F}_2 = dq\vec{v}_2 \times \vec{B}_1$$

Donde \vec{F}_2 es la fuerza que siente la placa Π_2 . En este caso el diferencial de carga $dq = \sigma_2 dS$, pero por otro lado $\vec{K}_2 = \sigma_2 \vec{v}_2$. Juntando las igualdades anteriores se puede reescribir la fuerza como

$$d\vec{F}_2 = \vec{K}_2 dS \times \vec{B}_1 \implies \frac{d\vec{F}_2}{dS} = \vec{K}_2 \times \vec{B}_1$$

El campo magnético \vec{B}_1 de una placa puede ser determinado por Ley de Ampère (Figura 11.3).

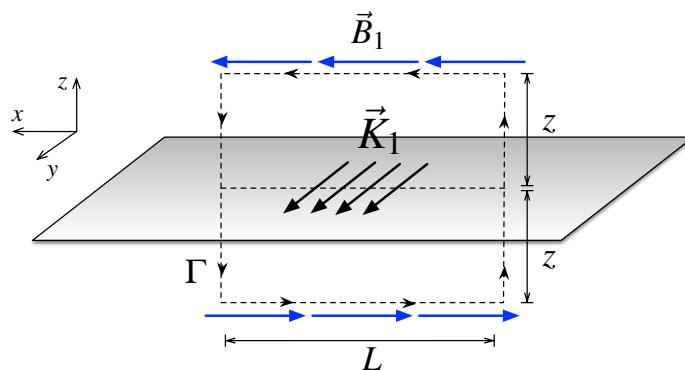


Figura 11.3: Corriente en el plano Π_1 y camino de Ampère.

La curva Γ es un rectángulo de ancho L y alto $2z$ como puede verse en la Figura 11.3. Además debe notarse que por simetría del problema necesariamente se tiene que $|\vec{B}_1(z)| = |\vec{B}_1(-z)|$. Dado que



el plano que lleva corriente es infinito, el campo magnético siempre apunta en la dirección \hat{x} (esto es debido a que las componentes verticales son siempre anuladas consecuencia de la simetría del plano). Usando la Ley de Ampère se obtiene que

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Por otro lado la integral de camino se puede descomponer de la siguiente forma

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^L B_1(z) \hat{x} \cdot dx \hat{x} + \int_{-z}^z B_1(z) \hat{x} \cdot dz \hat{z} + \int_L^0 -B_1(z) \hat{x} \cdot dx \hat{x} + \int_z^{-z} B_1(z) \hat{x} \cdot dz \hat{z}$$

De la expresión anterior se anulan las dos integrales verticales (el campo es ortogonal al camino). Por lo tanto

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_1(z) \cdot 2L$$

Por otra parte, si se tienen densidades de corriente superficiales, la corriente enlazada se puede determinar como (\hat{n} normal de la superficie donde fluye corriente)

$$I = \int_0^L (\vec{K}_1 \times \hat{n}) \cdot d\vec{l} = \int_0^L (K_1 \hat{y} \times \hat{z}) \cdot dx \hat{x} = K_1 L$$

Luego la ley de Ampere se transforma en

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \implies B_1(z) \cdot 2L = \mu_0 K_1 L \implies B_1(z) = \frac{\mu_0 K_1}{2}$$

Notar el hecho que el plano Π_2 está ubicado en $z = d$, por lo que el campo magnético que afecta al plano es

$$\vec{B}_1(z) = \frac{\mu_0 K_1}{2} \hat{x}$$

Ahora, descomponiendo $\vec{K}_2 = K_2 \cos \beta \hat{x} + K_2 \sin \beta \hat{y}$, se procede a calcular la fuerza por unidad de área que siente el plano Π_2 como

$$\frac{d\vec{F}_2}{dS} = K_2(\cos \beta \hat{x} + \sin \beta \hat{y}) \times \frac{\mu_0 K_1}{2} \hat{x} = -\frac{\mu_0 K_1 K_2 \sin \beta}{2} \hat{z}$$

Finalmente, si $\beta \in (0, \pi)$, la fuerza es atractiva (corrientes paralelas), si $\beta \in (\pi, 2\pi)$ la fuerza es repulsiva (corrientes antiparalelas), y para los ángulos $\beta = 0, \pi$ no existe fuerza al ser las corrientes ortogonales.



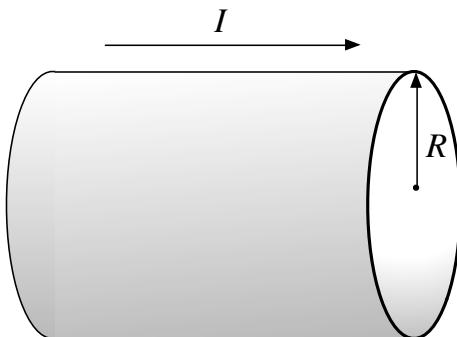
12

Potencial Vectorial y Momento Magnético

I. Problemas Propuestos

Problema 12.1

Considere un cilindro hueco infinito de radio R sobre el cual circula sobre su superficie una corriente homogéneamente distribuida I . Encuentre en todo el espacio el vector potencial magnético \vec{A} . Puede usar el hecho que $A(r = 0) = 0$.



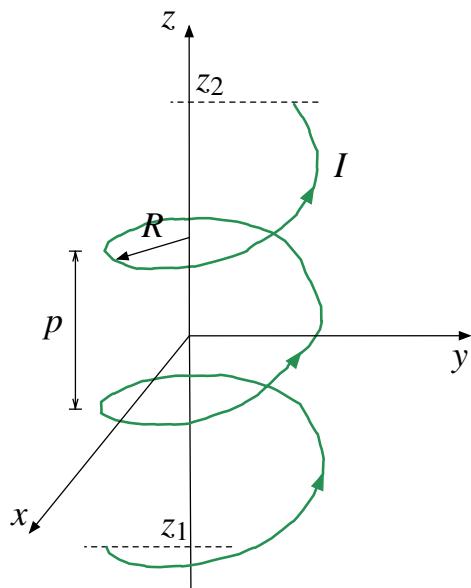
Problema 12.2

Considere un circuito en forma de hélice circular con su eje en z . Por la hélice circula una corriente I , y está compuesta por $2N$ vueltas completas y tiene un paso p . La ecuación paramétrica de la hélice es:

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = \frac{p}{2\pi} \theta \end{cases}$$

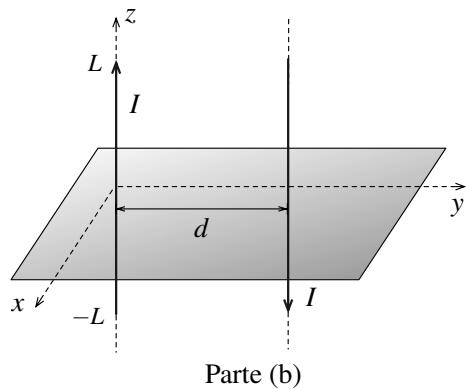
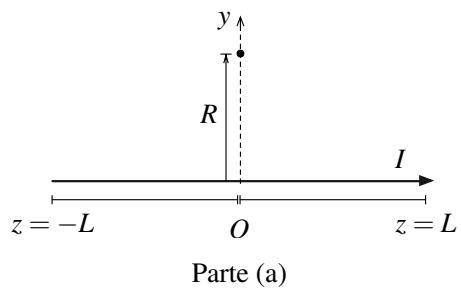
Las vueltas de la hélice están repartidas desde la cota $z_1 = -pN$ hasta la cota $z_2 = +pN$.

- Determine la componente axial del campo magnético y del potencial magnético en el origen, $B_z(0)$ y $A_z(0)$.
- Si la longitud del circuito helicoidal es $L = 2pN$, muestre que $B_z(0)$ puede ser escrita de la forma $B_z(0) = B_0 f(R, N, p)$ donde B_0 es el campo magnético creado con solenoide de longitud infinita.
- Encuentre el valor de $f(R, N, p)$ cuando $R \ll L$. ¿Qué relación debe haber entre R y L para que el $B_z(0)$ sea un 99 % del valor de B_0 ?



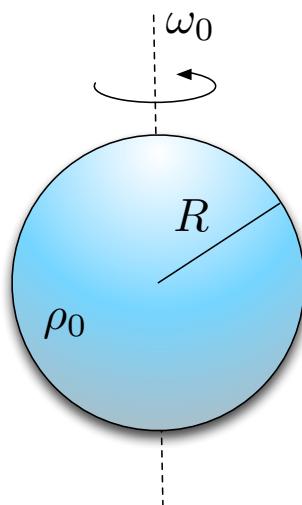
Problema 12.3  

- a) Considere un alambre de largo $2L$ sobre el eje z , donde fluye una corriente I desde $z = -L$ hasta $z = L$ como se muestra en la figura. Determine el potencial magnético vectorial sobre un punto en el eje y a distancia R del origen. Deduzca el valor del potencial magnético en el límite $L \gg R$.
- b) Se coloca un nuevo alambre de largo $2L$, paralelo al alambre de la parte anterior, por el cual circula un corriente I en el sentido inverso. El nuevo alambre se ubica a una distancia d del primero, perpendicular al plano xy (ver figura). Determine el potencial magnético vectorial para puntos sobre el plano xy , a una distancias mucho mayores que L .

**Problema 12.4**   

Considere una esfera de radio R , la cual está cargada uniformemente con una densidad de carga volumétrica ρ_0 constante. La esfera gira entorno a una de sus diámetros con una velocidad angular constante ω_0 , como se ilustra en la figura. Encuentre

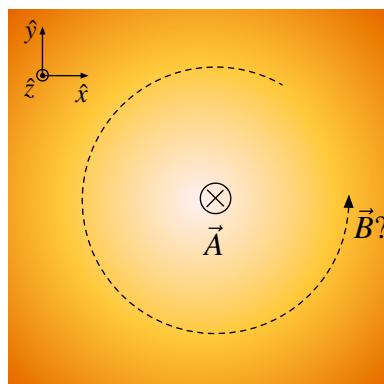
- a) El campo magnético \vec{B} y el potencial magnético vectorial \vec{A} en el centro de la esfera.
- b) El momento magnético de la esfera.

**Problema 12.5**  

Una densidad de corriente determinada por $\vec{J} = J_0 \hat{z}$, origina un potencial magnético vectorial

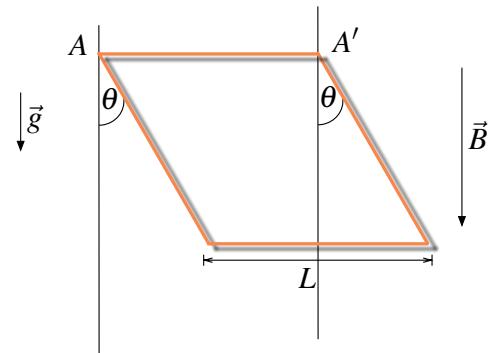
$$\vec{A} = -\hat{z} \frac{\mu_0 J_0}{4} (x^2 + y^2)$$

- a) Aplique la ecuación vectorial de Poisson para confirmar el enunciado anterior.
- b) Utilice la expresión de \vec{A} para determinar \vec{B} .
- c) Utilice la expresión para \vec{J} junto a la ley de Ampére y determine \vec{B} . Compare su respuesta con la obtenida en la parte anterior.

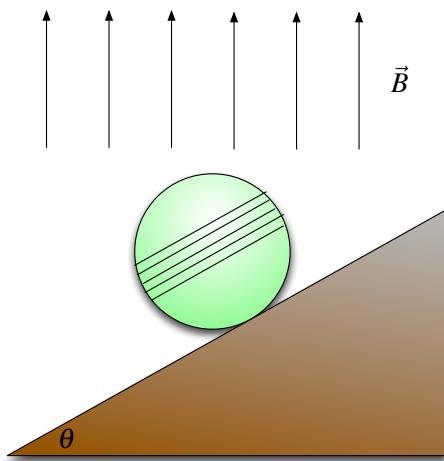


Problema 12.6  

Un circuito cuadrado rígido de lado L y masa M está pivoteado en torno a uno de sus ejes (AA') en presencia de un campo magnético \vec{B} uniforme, y el campo gravitatorio. El circuito lleva una corriente I que es capaz de mantenerlo en equilibrio en el ángulo θ . Encuentre el módulo y el sentido de dicha corriente.

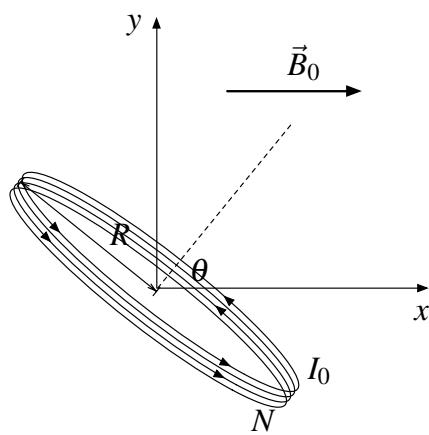
**Problema 12.7**  

Una esfera no conductora tiene masa m y radio R . Como se puede apreciar en la figura, una bobina muy compacta, de cinco vueltas se encuentra enrollada en la esfera; ésta se encuentra en un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal, de manera tal que la bobina es paralela a éste. Si un campo magnético \vec{B} apunta verticalmente en la región, ¿cuál es la corriente necesaria en la bobina, que permitirá a la esfera permanecer en equilibrio en el plano inclinado?. Muestre que el resultado es independiente de θ .

**Problema 12.8**  

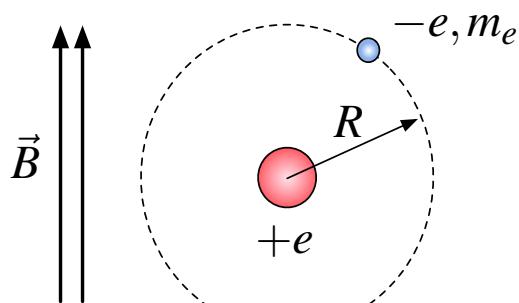
Considere una espira de radio R , N vueltas y masa M distribuida homogéneamente por la cual circula una corriente I_0 . Esta espira se coloca en un campo magnético constante de $\vec{B} = B_0\hat{x}$ orientado de tal manera que el torque sobre la espira es mínimo.

- Demostrar que si la bobina se gira un pequeño ángulo con respecto al eje x y es puesto en libertad, este comenzará a oscilar entorno la posición mínimo torque. Encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones que presentará la espira.
- Si la espira se suelta desde un ángulo $\theta_0 \approx 0$, determine la velocidad angular que tendrá la espira cuando pase por su posición de equilibrio.



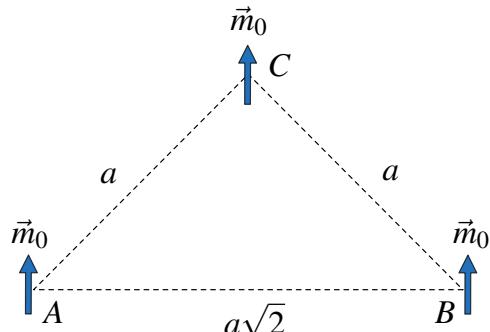
Problema 12.9   

Considere un electrón orbitando a un protón, que mantiene una trayectoria circunferencial de radio R debido a la interacción Coulombiana. Tomando la órbita de carga como un circuito de corriente eléctrica, calcule el torque resultante cuando el sistema está inmerso en un campo magnético \vec{B} , orientado perpendicularmente respecto al plano donde vive el protón y el electrón. La carga del electrón y del protón son conocidas, $-e$ y e respectivamente, al igual que la masa del electrón m_e .

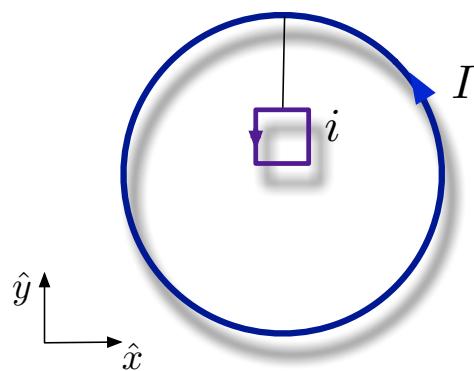
**Problema 12.10**  

Considere tres momentos magnéticos iguales \vec{m}_0 , ubicados en los vértices de un triángulo rectángulo ABC de lados a , a y $a\sqrt{2}$.

- Determine el trabajo necesario para invertir la posición del momento magnético ubicado en el vértice C .
- ¿Cuál es el torque que sienten los momentos magnéticos ubicados en A y C ?

**Problema 12.11**  

Un circuito cuadrado de lado a está suspendido en el centro de un enorme anillo fijo de radio R ($R \gg a$) por un hilo que ejerce un torque restaurador de magnitud $\tau = k\theta$, con θ el ángulo de torsión que forman los planos de ambos circuitos. Si por el circuito pequeño circula una corriente i y por el grande I , encuentre en forma aproximada el valor de la constante k de modo que $\theta = \frac{\pi}{2}$ sea posición de equilibrio.



II. Soluciones

Solución 12.1

En este caso se debe usar ley de Ampère para determinar el campo magnético que genera el cilindro. Para el caso $r < R$ se tiene que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = 0 \implies \vec{B} = 0$$

Para el caso $r \geq R$ se obtiene que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \implies \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta}$$

Ahora dado que $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$, integrando a ambos lados y aplicando Teorema de Stokes se obtiene que:

$$\iint_{\Omega} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \iint_{\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{S} \implies \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

donde Γ es el contorno cerrado de la superficie Ω . Suponiendo que $\vec{A} = A(r)\hat{z}$ (siempre $\vec{A} \parallel \vec{J}$) y que $A(r=0) = 0$ se obtiene que en el caso $r < R$:

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Omega_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} \implies (A(0) - A(r))L = 0 \implies \vec{A}(r) = 0$$

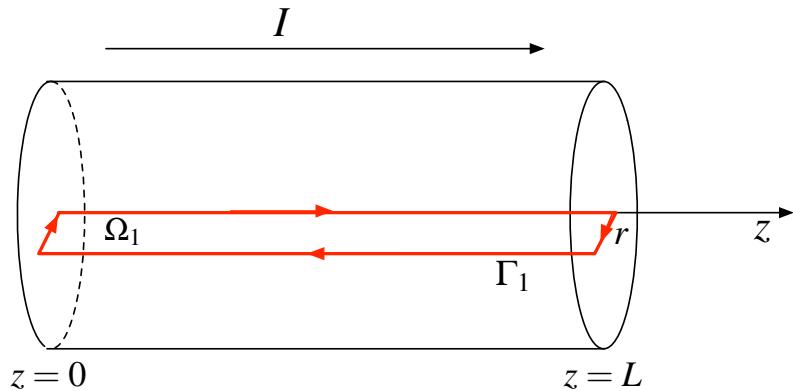


Figura 12.1: Superficie y camino de integración para $r < R$

En la Figura 12.1 se indica Γ_1 y Ω_1 donde se determinaron la integral de línea y superficie.

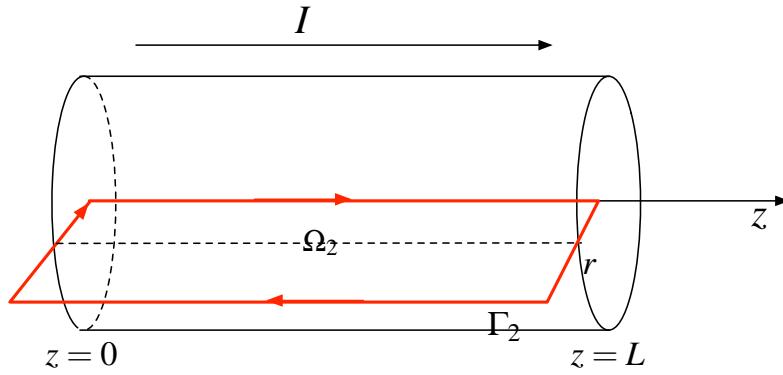
Análogamente para el caso $r \geq R$, se obtiene que

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Omega_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} \implies (A(0) - A(r))L = \int_0^L \int_0^r \vec{B} \cdot dr dz \hat{\theta} = \int_0^L \int_R^r \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta} \cdot dr dz \hat{\theta} = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

De esto, se determina que

$$\vec{A}(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \hat{z}$$



Figura 12.2: Superficie y camino de integración para $r \geq R$

Solución 12.2

- a) La parametrización de la hélice en coordenadas cilíndricas es $\vec{r}' = R\hat{r} + \frac{p\theta}{2\pi}\hat{z}$ con $\theta \in [-2\pi N, 2\pi N]$. Mientras que el $d\vec{l} = Rd\theta\hat{\theta} + dz\hat{z}$, dado que se pide el campo magnético en $\vec{r} = 0$, se llega a

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(Rd\theta\hat{\theta} + dz\hat{z}) \times (-R\hat{r} - \frac{p\theta}{2\pi}\hat{z})}{(R^2 + (\frac{p\theta}{2\pi})^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(R^2 d\theta\hat{z} - \frac{Rp\theta}{2\pi} d\theta\hat{r} - R dz\hat{\theta})}{(R^2 + (\frac{p\theta}{2\pi})^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

Dado que sólo interesa la componente axial

$$B_z(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-2\pi N}^{2\pi N} \frac{R^2 d\theta}{(R^2 + (\frac{p\theta}{2\pi})^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Usando el cambio de variables $u = \frac{p\theta}{2\pi R} \implies du = \frac{p}{2\pi R} d\theta$ se llega a

$$\begin{aligned}B_z(0) &= \frac{\mu_0 I}{2p} \int_{-\frac{pN}{R}}^{\frac{pN}{R}} \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2p} \left. \frac{u}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}} \right|_{-\frac{pN}{R}}^{\frac{pN}{R}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2p} \left(\frac{pN}{(R^2 + p^2 N^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{pN}{(R^2 + p^2 N^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I N}{(R^2 + p^2 N^2)^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

Por otro lado, como \vec{A} está dado por

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



para calcular A_z , habrá que considerar la componente en z de \vec{r} , luego:

$$A_z(0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-2\pi N}^{2\pi N} \frac{I(\frac{p}{2\pi})d\theta}{(R^2 + (\frac{p}{2\pi}\theta)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Usando el cambio de variables $u = \frac{p\theta}{2\pi R} \implies du = \frac{p}{2\pi R}d\theta$ se llega a

$$\begin{aligned} A_z(0) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\frac{pN}{R}}^{\frac{pN}{R}} \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln |(1+u^2)^{\frac{1}{2}} + u| \Big|_{-\frac{pN}{R}}^{\frac{pN}{R}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(\frac{(R^2 + (pN)^2)^{\frac{1}{2}} + pN}{(R^2 + (pN)^2)^{\frac{1}{2}} - pN} \right) \end{aligned}$$

- b) Primero que todo hay que notar que en el exterior de un solenoide el campo magnético es nulo ya que al darse un camino cualquiera la corriente encerrada siempre será nula, por lo que $B_{\text{ext}} = 0$. Por otro lado, si se tiene un solenoide infinito, se puede calcular el campo magnético mediante ley de Ampère considerando un camino cuadrado de largo L que encierre n espiras por unidad de largo por las cuales circula una corriente I_0 , por lo que:

$$\oint B \cdot d\vec{l} = \mu_0 n I_{\text{enlaz}} \implies B(z) \cdot L = \mu_0 n I \implies \vec{B} = n\mu_0 I \hat{z}$$

Este caso

$$n = \frac{\text{Número de Vueltas}}{\text{Largo}} = \frac{2N}{2Np} = \frac{1}{p}$$

Por lo tanto el B_0 es

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{p}$$

Si se considera el resultado calculado en (a) y se reordena de manera que pueda colocarse en función de B_0 se tiene:

$$\begin{aligned} B_z(0) &= \frac{\mu_0 IN}{(R^2 + p^2 N^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{p} \frac{Np}{(R^2 + p^2 N^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= B_0 \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{R}{Np}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

De la expresión anterior es fácil concluir que $B_z(0)$ puede escribirse como $B_z = B_0 f(R, N, p)$, donde $f(R, N, p)$ está dada por:

$$f(R, N, p) = \left(1 + \left(\frac{R}{Np}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$



c) Finalmente, cuando $R \ll L \implies \left(\frac{2R}{L}\right)^2 \ll 1$, y haciendo una aproximación de Taylor para f :

$$\begin{aligned} f(R, N, p) &= \left(1 + \left(\frac{R}{Np}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2R}{L}\right)^2 + \mathcal{O} \implies f(R, N, p) \approx 1 - 2 \left(\frac{L}{R}\right)^2 \end{aligned}$$

Luego es posible concluir que para $R \ll L$ el cuociente entre $B_z(0)$ y B_0 está dado por

$$\frac{B_z(0)}{B_0} = 1 - 2 \left(\frac{R}{L}\right)^2$$

Por ende para que el valor de $B_z(0)$ sea dicho cuociente sea un 99 % del valor de B_0 , el cuociente debe tomar el valor de 0,99 con lo que se concluye la relación entre R y L para que esto se cumpla:

$$\begin{aligned} \frac{B_z(0)}{B_0} &= 0,99 = 1 - 2 \left(\frac{R}{L}\right)^2 \\ 2 \left(\frac{R}{L}\right)^2 &= \frac{1}{100} \\ \implies \frac{R}{L} &= \frac{1}{10\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Solución 12.4

a) Primero se determina el campo magnético que genera la esfera, para ello se usa la ley de Biot-Savart

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{Esfera}} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') dV}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3}$$

En este caso, $\vec{r} = 0$, $\vec{r}' = r\hat{r}$ y $\vec{J} = \rho_0 \vec{v} = \rho_0 \omega r \sin \theta \hat{\phi}$. Manejando algebraicamente la expresión anterior

$$\vec{B}(0) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{\rho_0 \omega r \sin \theta \hat{\phi} \times r\hat{r}}{r^3} \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{\mu_0 \rho_0 \omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r \sin^2 \theta \cdot \hat{\theta} dr d\theta d\varphi$$

Pero $\hat{\theta} = \hat{x} \cos \theta \cos \varphi + \hat{y} \cos \theta \sin \varphi - \hat{z} \sin \theta$, por lo que las integrales en x e y se anulan debido a la integral en φ . Luego el campo sólo tiene componente en z y su valor es

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 \rho_0 \omega \hat{z}}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^R r dr$$

La única integral compleja es

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \int_0^\pi \sin \theta d\theta - \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -\cos \theta \Big|_0^\pi + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \Big|_0^\pi = \frac{4}{3}$$



Luego el campo vale

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \rho_0 \omega \hat{z}}{4\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{\mu_0 \rho_0 \omega R^2}{3} \hat{z}$$

Para el caso de potencial magnético se tiene que

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{Esfera}} \frac{\vec{J} dV}{||\vec{r} - \vec{r}'||}$$

Los vectores \vec{J} , \vec{r} y \vec{r}' son los mismos que la parte anterior. Entonces

$$\vec{A}(0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{\rho_0 \omega r \sin \theta \hat{\varphi}}{r} \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Pero dado que $\hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$, la integral en φ vuelve anular las dos coordenadas de modo que

$$\vec{A}(0) = \frac{\mu_0 \rho_0 \omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} (-\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi) d\varphi \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_0^R r^2 dr = 0$$

b) Para el caso del momento magnético, este esta dado por

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{J} dV$$

donde \vec{r}' y \vec{J} , ya fueron calculados previamente. Reemplazando

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{J} dV = -\frac{\rho_0 \omega}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^4 \sin^2 \theta \hat{\theta} dr d\theta d\varphi$$

Nuevamente al descomponer el vector $\hat{\theta}$ se anulan las componentes en x e y . Entonces

$$\vec{m} = \frac{\rho_0 \omega \hat{z}}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi \rho_0 \omega R^5}{15} \hat{z}$$

Solución 12.9

Se debe comenzar calculando el momento dipolar $\vec{m} = IA\hat{n}$, donde I es la corriente y A es el área. Para este caso la corriente está dada por:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{e}{T}$$

donde e es la carga del electrón, m_e la masa del electrón y T su periodo. Para encontrar el periodo se puede relacionar con su frecuencia mediante $T = \frac{2\pi}{\omega}$, con $\omega = \frac{v}{R}$. Luego falta encontrar v , para ello usamos la interacción coulombiana en el interior de los átomos y la expresión para fuerza centrípeta:

$$\begin{aligned} F_e = F_c &\implies \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{m_e v^2}{R} \\ &\implies v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R}} \end{aligned}$$



Con la última expresión es posible concluir que el periodo está dado por:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e R}}{e}$$

Conocido T , se puede concluir I :

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e^2}{2\pi R\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e R}}$$

Para terminar el cálculo, se considera que el área viene dada por una circunferencia, por lo que $A = \pi R^2$. Con esto se tiene que

$$\vec{m} = \frac{e^2 R}{2\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e R}} \hat{z}$$

Finalmente, el torque está dado por

$$|\vec{\tau}| = |\vec{m} \times \vec{B}| \sin 90^\circ = \frac{e^2 B}{2} \sqrt{\frac{R}{4\pi\epsilon_0 m}}$$



Parte IV

Campos Electromagnéticos Variantes en el Tiempo

13

Ley de Faraday-Lenz

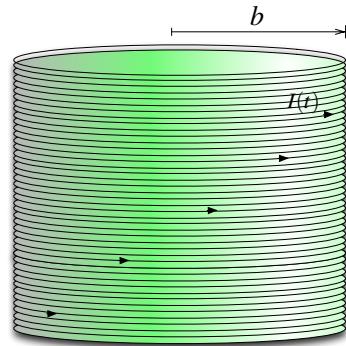
I. Problemas Propuestos

Problema 13.1



Una bobina muy larga de radio b tiene m vueltas por unidad de largo y lleva una corriente $I(t) = I_0 \sin \omega t$.

- Encuentre el campo magnético dentro de la bobina.
- Encuentre el campo eléctrico dentro de la bobina.
- Encuentre el campo eléctrico fuera de la bobina.



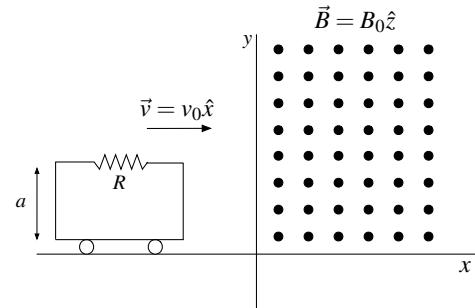
Problema 13.2



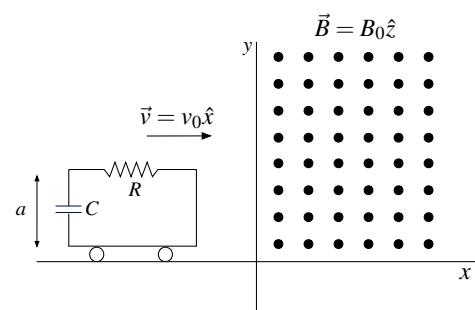
Un carrito de masa m que se desplaza con velocidad $v_0 \hat{x}$, hasta llegar a una región en que existe un campo magnético uniforme en $x = 0$.

- Si el carrito posee solamente una resistencia R (Figura a), encuentre la velocidad del carrito como función del tiempo.
- Si el carrito posee una resistencia R y un condensador C inicialmente descargado (Figura b), encuentre la velocidad del carrito como función del tiempo y la carga del condensador en el tiempo.

En ninguno de los dos casos, considere el campo magnético producido por la corriente en el circuito por ser mucho menor al campo externo constante y suponga que el carrito es muy largo por lo que no debe preocuparse de lo que ocurre una vez que entra entero al campo.



(a) Circuito Simple

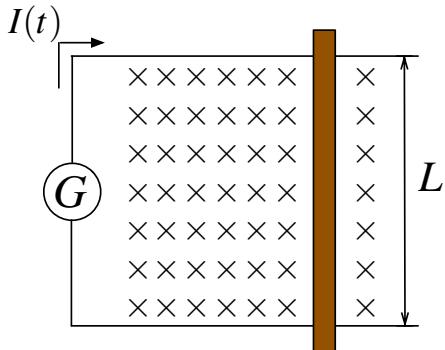


(b) Circuito RC

Problema 13.3   

Un generador de corriente G produce una corriente $I(t)$ en un circuito formado por un riel conductor sin roce, en forma de U y una barra conductora de masa m que atraviesa los rieles en dirección perpendicularmente. Un campo magnético constante y uniforme \vec{B} que apunta perpendicular al plano del circuito existe en todo el espacio. La corriente $I(t)$ que circula en el circuito varía en el tiempo de acuerdo con

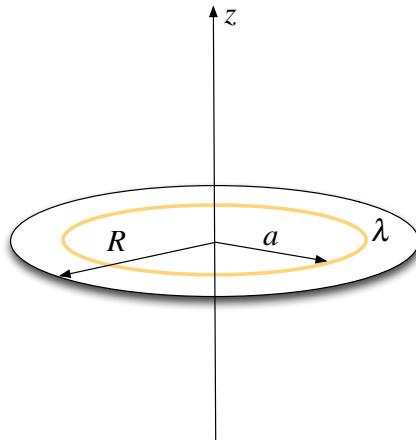
$$I(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ bt & 0 < t < T \\ 0 & T < t \end{cases}$$



Para $t \leq T$, determine la fuerza electromotriz inducida en el circuito y la velocidad de la barra en función del tiempo.

Problema 13.4  

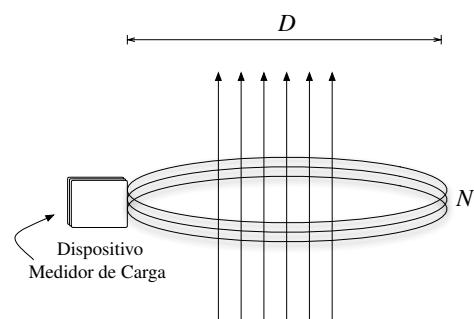
Un disco de material aislante de radio R tiene en su borde una carga uniformemente distribuida λ [C/m] y está suspendido horizontalmente de un hilo que coincide con su eje. Dentro de un círculo más pequeño de radio $a < R$ existe un campo magnético \vec{B} uniforme paralelo al eje. El disco está inicialmente en reposo. En $t = 0$ se desconecta la fuente del campo magnético, el que cae a cero después de un corto intervalo de tiempo. Si I es el momento de inercia del disco, encuentre:



- La velocidad angular final del disco
- ¿Depende ésta de la forma en que cae a cero el campo B ?

Problema 13.5  

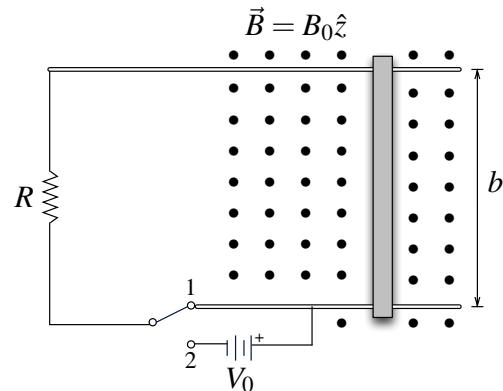
Una bobina circular plana de N vueltas tiene diámetro D y resistencia R . La bobina se orienta con su eje paralelo a un campo magnético B uniforme y los extremos de la bobina se conectan a un dispositivo capaz de medir la carga que pasa a través de él. Si la bobina se gira en 180° sobre un eje perpendicular al campo magnético el dispositivo mide una carga Q . Encuentre el valor de B en términos de N , D , R y Q .



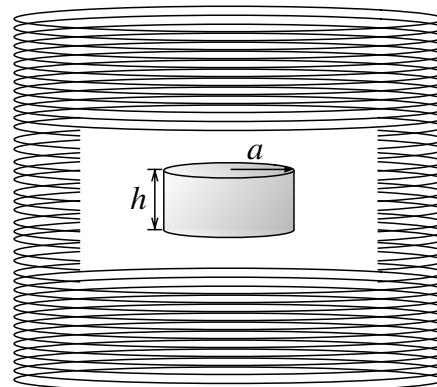
Problema 13.6

Una barra conductora de masa m desliza sin roce sobre dos rieles conductores paralelos separados una distancia b . El circuito posee un switch que puede cambiar entre dos posiciones. Si el switch se encuentra en la posición 1, los rieles quedan conectados únicamente mediante una resistencia R , mientras que si se mueve a la posición 2, los rieles quedan conectados por la misma resistencia R y una batería que provee un diferencial de potencial V_0 (ver Figura). Hay un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ uniforme perpendicular al plano de la Figura.

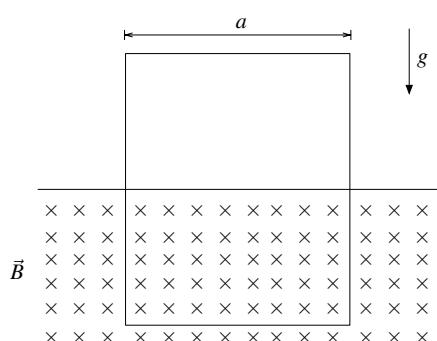
- Considere que inicialmente el switch se encuentra en la posición 1 y se le imparte una velocidad v_0 a la barra en $t = 0$. Determine la velocidad en función del tiempo de la barra y el desplazamiento máximo que alcanza la misma.
- Suponiendo que la barra alcanzó su máximo desplazamiento, el switch se cambia la posición 2 y se reinicia el tiempo. Determine nuevamente la velocidad de la barra en el tiempo.

**Problema 13.7**

Los hornos de inducción se usan para fundir metales. Ellos consisten en grandes contenedores donde caben hasta 30 toneladas, aislados térmicamente y rodeados de una gran bobina donde circula corriente. A modo de ejemplo, considere el siguiente modelo simplificado. Una barra conductora de radio a , largo h y conductividad g se coloca en la interior de una bobina que tiene n vueltas por unidad de longitud y que lleva una corriente alterna $I = I_0 \sin \omega t$ con ω la frecuencia angular. Calcule la potencia disipada en el cilindro. Desprecie efectos de borde. (Propuesto: ¿Cuál es el valor de la corriente que circula dentro del cilindro?).

**Problema 13.8**

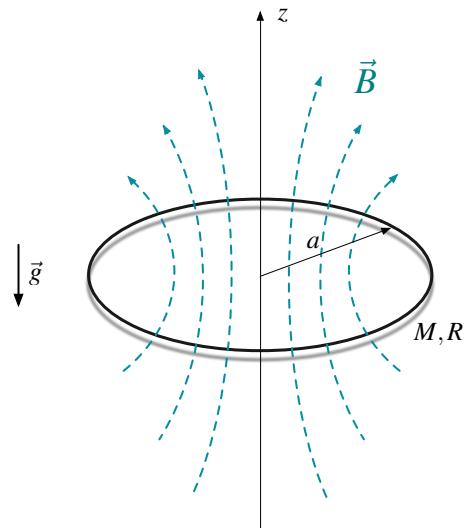
Una espira rectangular de resistencia R , ancho a , largo L (muy grande) y de masa m cae bajo efecto de la gravedad bajo un campo magnético \vec{B} perpendicular al plano de la espira y no nulo solo en la parte superior del plano. Asuma que una parte de la espira siempre está afuera de la región de campo magnético, determine la velocidad terminal y el sentido de la corriente inducida en la espira.



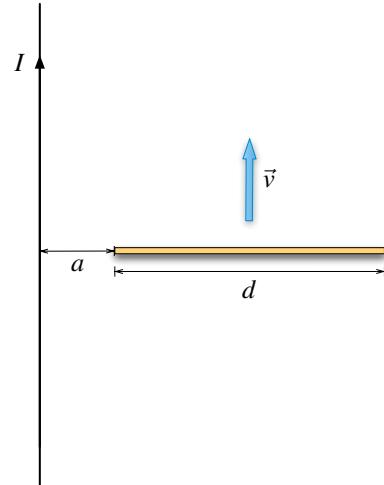
Problema 13.9  

Una espira circular de radio a , masa M y resistencia R se deja caer desde $z = 0$ con su eje de simetría vertical en una zona donde el campo magnético es axialmente simétrico alrededor del eje z y cuya componente vertical es $B_z = Cz$. El eje de la espira coincide con el eje de simetría del campo.

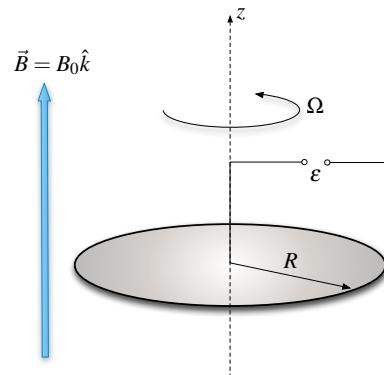
- ¿En qué dirección fluye la corriente en la espira mientras cae bajo la acción de la fuerza de gravedad?
- Encuentre la corriente en la espira en función de la velocidad. Desprecie las contribuciones al flujo provenientes de la corriente inducida.
- Determine las fuerzas que actúan sobre la espira provenientes axial y radial del campo magnético.
- Encuentre la velocidad de la espira después que ha caído un largo tiempo.


Problema 13.10  

Una barra metálica de largo d y espesor despreciable se mueve con rapidez v constante, de forma paralela a una corriente eléctrica de intensidad I . Si el extremo izquierdo de la barra está a una distancia a del cable con corriente, determine la diferencia de potencial entre los extremos de la barra. ¿Cuál es el valor de esa diferencia cuando $a \gg d$?


Problema 13.11   

El disco de Faraday consiste en un disco conductor de radio R que gira con velocidad angular $\Omega \hat{k}$ bajo la acción de un campo magnético constante $\vec{B} = B_0 \hat{k}$ (ver Figura). Calcule el módulo de la fuerza electromotriz (fem) inducida entre el centro y el borde del disco.



II. Soluciones

Solución 13.1 

- a) En primera instancia se debe usar el hecho que dentro de una bobina se tiene $\vec{B} = B(z)\hat{z}$ y se está trabajando en un régimen cuasiestacionario (se desprecia la corriente desplazamiento). Luego, usando Ley de Ampère para el camino Γ recorrido en sentido antihorario y suponiendo que la bobina tiene una largo L , se obtiene que

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlaz}} \implies B(z, t) \cdot L = \mu_0 m L I(t)$$

Lo que finalmente implica que

$$\vec{B} = \mu_0 m I_0 \sin(\omega t) \hat{z}$$

- b) Usando un camino circular de radio $r < b$, se tiene que por ley de Faraday-Lenz

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{S} \implies E(r, t) \cdot 2\pi r = -\pi r^2 \frac{\partial}{\partial t} B(t) \implies \vec{E}(r, t) = -\frac{r \mu_0 m I_0 \omega \cos(\omega t)}{2} \hat{\theta}$$

- c) Usando el mismo procedimiento anterior para un $r \geq b$

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{S} \implies E(r, t) \cdot 2\pi r = -\pi b^2 \frac{\partial}{\partial t} B(t) \implies \vec{E}(r, t) = -\frac{b^2 \mu_0 m I_0 \omega \cos(\omega t)}{2r} \hat{\theta}$$

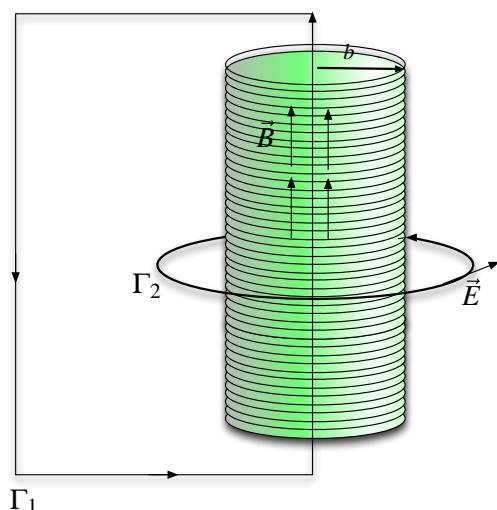


Figura 13.1: Senoloide



Solución 13.3 

La fuerza electromotriz inducida es

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^{x(t)} -B\hat{z} \cdot dx dy \hat{z}$$

de este modo se obtiene que

$$\epsilon = BL\dot{x}$$

Por otro lado, considerando que la fuente de corriente es capaz de mantener la corriente constante (en el sentido de la figura) y sin alteraciones durante cada período de tiempo (ie. se ignora la corriente adicional inducida en el circuito), se tiene que la velocidad de la barra está dada por

$$d\vec{F} = -I(t)dy\hat{y} \times -B\hat{z} = -BI(t)dy\hat{x} \implies \vec{F} = BI(t)L\hat{x}$$

Entonces

$$m\frac{dv}{dt} = BLI(t) \implies \int_0^{v(t)} dv = \frac{BL}{m} \int_0^t I(t)dt$$

Si $t < 0$

$$v(t) = 0$$

Si $0 < t \leq T$

$$v(t) = \frac{BL}{m} \int_0^t btdt = \frac{BLbt^2}{2m}$$

Por lo tanto se tiene que la fem inducida en el circuito es

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{B^2 L^2 b t^2}{2m} & 0 < t \leq T \end{cases}$$

Solución 13.6 

- a) La fuerza que mueve a la barra está determinada por el campo magnético $\vec{B} = B_0\hat{z}$ (saliendo de la hoja) y la corriente que circula por el circuito. La corriente dependerá de la FEM inducida de la siguiente forma:

$$I = \frac{\epsilon}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B_0 b \dot{x}}{R}$$

Luego la fuerza que siente la barra es

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B} = - \int_0^b \frac{B_0 b \dot{x}}{R} dy \hat{y} \times B_0 \hat{z} = -\frac{(B_0 b)^2 \dot{x}}{R} \hat{x}$$



Planteando la ecuación de movimiento de la barra se tiene que

$$m\ddot{x} = -\frac{(B_0b)^2 \dot{x}}{R} \implies m \frac{dv}{dt} = -\frac{(B_0b)^2 v}{R}$$

Resolviendo la ecuación diferencial

$$-\frac{mR}{(B_0b)^2} \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v} = \int_0^t dt \implies v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{(B_0b)^2}{mR} t\right)$$

La posición que se detiene la barra está determinada por (asumiendo que comienza en el origen)

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 \exp\left(-\frac{(B_0b)^2}{mR} t\right) \implies \int_0^{x(t)} dx = v_0 \int_0^t \exp\left(-\frac{(B_0b)^2}{mR} t\right) dt$$

de modo que

$$x(t) = \frac{v_0 m R}{(B_0 b)^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{(B_0 b)^2}{m R} t\right)\right)$$

Por lo que finalmente la barra en $t \rightarrow \infty$ se quedará en

$$x_{final} = \frac{v_0 m R}{(B_0 b)^2}$$

- b) En primera instancia, dado que hay una fuente de voltaje fija de valor V_0 , existe una corriente permanente

$$I_0 = \frac{V_0}{R}$$

Donde se ha considerado positivo el sentido de la corriente antihoraria. La corriente I_0 circula en la dirección positiva debido a la forma de como está conectada la fuente de voltaje. La fuerza que mueve a la barra está determinada por el campo magnético $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ (saliendo de la hoja) y las corrientes que circulan por el circuito (corriente inducida y fija). La corriente inducida dependerá de la fem inducida de la siguiente forma:

$$I_{ind} = \frac{\epsilon}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B_0 b \dot{x}}{R}$$

Luego la fuerza que siente la barra es

$$\vec{F} = \int (I_{ind} + I_0) d\vec{l} \times \vec{B} = \int_0^b \left(-\frac{B_0 b \dot{x}}{R} + \frac{\epsilon_0}{R} \right) dy \hat{y} \times B_0 \hat{z} = \left(-\frac{(B_0 b)^2 \dot{x}}{R} + \frac{V_0 B_0 b}{r} \right) \hat{x}$$

Planteando la ecuación de movimiento de la barra se tiene que

$$m\ddot{x} = -\frac{(B_0b)^2 \dot{x}}{R} + \frac{V_0 B_0 b}{R} \implies \frac{dv}{dt} + \frac{(B_0b)^2 v}{mR} = \frac{V_0 B_0 b}{mR}$$

Resolviendo la ecuación diferencial con factor integrante

$$\frac{dv}{dt} e^{\frac{(B_0b)^2 t}{mR}} + \frac{(B_0b)^2 v}{mR} e^{\frac{(B_0b)^2 t}{mR}} = \frac{V_0 B_0 b}{mR} e^{\frac{(B_0b)^2 t}{mR}} \implies \frac{d}{dt} \left(v(t) e^{\frac{(B_0b)^2 t}{mR}} \right) = \frac{V_0 B_0 b}{mR} e^{\frac{(B_0b)^2 t}{mR}}$$

Finalmente integrando a ambos lados (e imponiendo que la barra parte del reposo)

$$v(t) e^{\frac{(B_0b)^2 t}{mR}} = \int_0^t \frac{V_0 B_0 b}{mR} e^{\frac{(B_0b)^2 t}{mR}} dt \implies v(t) = \frac{V_0}{B_0 b} \left(1 - e^{-\frac{(B_0b)^2 t}{mR}} \right)$$



Solución 13.7 

Al igual que el Problema 13.1, se tiene que el campo magnético dentro la bobina es

$$\vec{B}(t) = \mu_0 n I_0 \sin \omega t \hat{z}$$

En este caso se aplica la ley de Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \iint_{\Omega} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\vec{S} = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$, usando

el teorema de Stokes con la última expresión

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Asumiendo que $\vec{E} = E(r, t)\hat{\theta}$ (el campo eléctrico rota en torno a los campos magnéticos variables en el tiempo) y que Ω es un círculo de radio r con normal \hat{z} , se tiene que

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow E(r, t) \cdot 2\pi r = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 n I_0 \sin \omega t \cdot \pi r^2) \Rightarrow \vec{E} = -\frac{r}{2} \mu_0 n I_0 \omega \cos \omega t \hat{\theta}$$

Considerando que se trata de un material ohmico, $\vec{J} = g\vec{E}$, luego

$$\vec{J} = -\frac{gr}{2} \mu_0 n I_0 \omega \cos \omega t \hat{\theta}$$

Finalmente, la potencia que disipa el cilindro es

$$P = \iiint_{\text{Cilindro}} \vec{E} \cdot \vec{J} dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a g \left(\frac{r}{2} \mu_0 n I_0 \omega \cos \omega t \right)^2 r dr d\theta dz = \frac{g\pi h (a^2 \mu_0 n I_0 \omega \cos \omega t)^2}{8}$$

Solución 13.11 

Dado que el disco esta girando con velocidad angular constante, todas sus cargas en su superficie sienten una fuerza magnética (carga libre con velocidad bajo un campo magnético). El material crea un campo eléctrico al interior de él, debido a que desea que todas sus cargas se queden en el mismo lugar y anule la fuerza magnética que se está produciendo. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\vec{F}_m}{q} \\ &= -\vec{v} \times \vec{B} \\ &= -(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{B} \\ &= -(\Omega \hat{k} \times r \hat{r}) \times B_0 \hat{k} \\ &= -B_0 \Omega r \hat{r} \end{aligned}$$

Finalmente

$$|\varepsilon| = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^R B_0 \Omega r dr = \frac{B_0 \Omega R^2}{2}$$

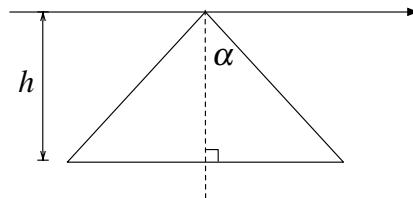


Inductancia y Energía Magnética

I. Problemas Propuestos

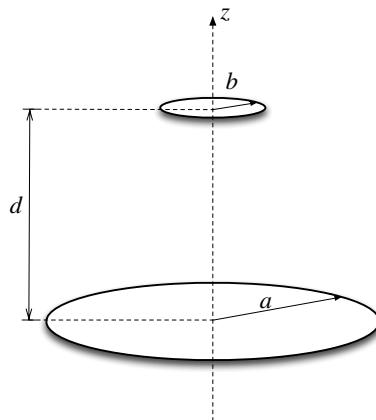
Problema 14.1  

Encuentre el coeficiente de inductancia mutua entre un alambre infinitamente largo y un triángulo isósceles de altura h dispuestos como se muestra en la Figura.



Problema 14.2   

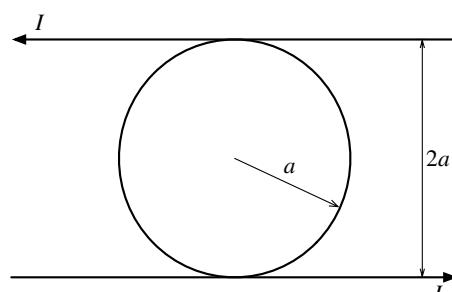
Considere dos espiras de radios a y b ($a \gg b$) dispuesta de forma que sus centros se ubican en el eje z separadas por una distancia d , como se muestra en la Figura. Encuentre el coeficiente de inducción mutua del sistema.



Problema 14.3   

Dos cables infinitos llevan una corriente I y están separados una distancia $2a$ como se muestra en la Figura. Un anillo circular conductor de radio a yace en el mismo plano entre entre los dos cables totalmente aislados de ellos. Encontrar el coeficiente de inductancia mutua entre los cables y el anillo circular. Puede ser útil

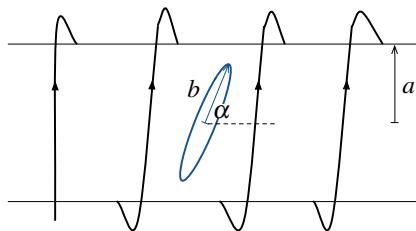
$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



Problema 14.4

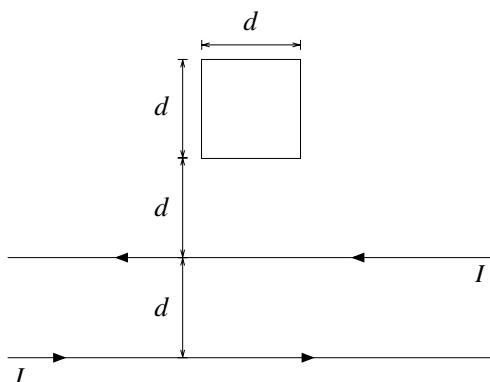
Considere una bobina muy larga de radio a y n vueltas por unidad de largo. Al interior de la bobina, existe un espira de radio b que forma un ángulo α con respecto al eje de la bobina.

- Determine la inductancia mutua entre la bobina y la espira.
- Si por la espira empieza a circular un corriente $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$, ¿cuál es la máxima diferencia de potencial en los terminales de la bobina?.

**Problema 14.5**

Dos alambres infinitos están separados una distancia d y llevan una corriente eléctrica I en direcciones opuestas (ver Figura). La corriente I incrementa a una tasa dI/dt suficientemente baja de tal manera que la ley de Ampere se cumple. Una espira cuadrada de lado d se encuentra dispuesta en el mismo plano de los alambres, tal como se muestra en la Figura.

- Calcule la inductancia mutua entre la espira y los alambres.
- Indique la dirección de la corriente inducida en la espira cuando dI/dt es positivo. Justifique su respuesta.
- Sabiendo que la resistencia de la espira es r , calcule la fuerza que actúa sobre la espira (magnitud y dirección).

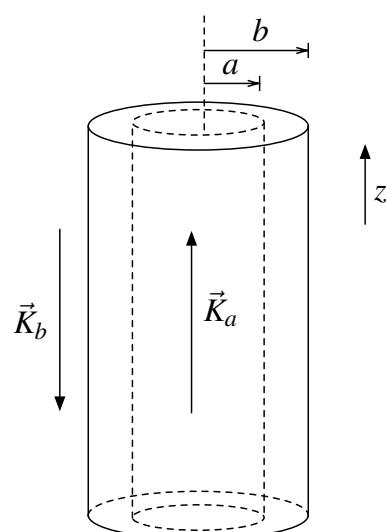
**Problema 14.6**

Un cable coaxial está formado por dos superficies cilíndricas infinitamente largas, por las cuales circula una misma corriente en sentidos contrarios. Si las densidades superficiales de corriente que circulan por las superficies cilíndricas de radios a y b son, respectivamente:

$$\vec{K}_a = \frac{I_0}{2\pi a} \hat{z} \quad \vec{K}_b = -\frac{I_0}{2\pi b} \hat{z}$$

Determine:

- La energía por unidad de largo.
- La autoinductancia por unidad de largo del cable coaxial.

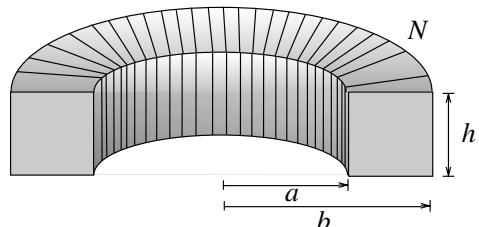


Problema 14.7

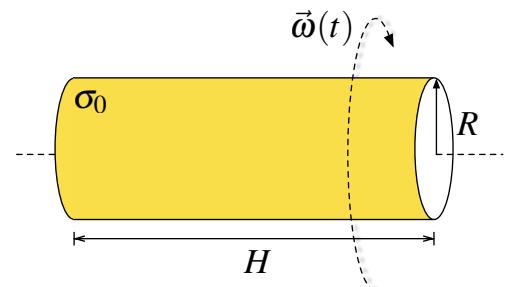
Considere toroide de sección transversal rectangular de N vueltas, de radio interior a y exterior b , y altura h .

- Determine la autoinductancia de este toroide.
- Demuestre que si $b - a \ll a$ entonces la autoinductancia del toroide puede ser aproximada como

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h(b-a)}{2\pi a}$$

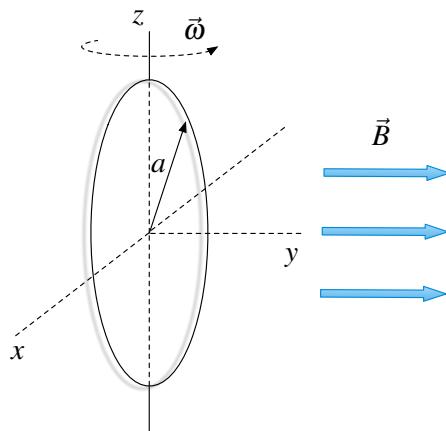
**Problema 14.8**

Un cilindro de radio R y largo $H \gg R$, posee una densidad de carga σ_0 con su eje coincidente al eje z . En $t = 0$ el cilindro comienza a rotar lentamente con velocidad angular $\vec{\omega}(t) = \alpha t \hat{z}$, donde α es una constante. Determine la energía eléctrica y magnética dentro del cilindro

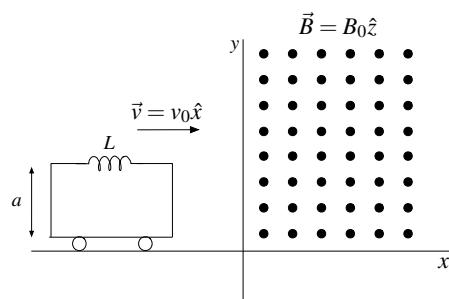
**Problema 14.9**

Considere inicialmente una espira circular de radio a que yace sobre el plano xz . En $t = 0$ la espira comienza a girar con una velocidad angular $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z}$. Si en el espacio existe un campo homogéneo y constante de valor $\vec{B} = B_0 \hat{y}$ determine:

- La fem inducida en el circuito.
- La corriente en función del tiempo que circula por la espira, si la espira posee una resistencia R y una autoinducción L .
- El torque que siente la espira, suponiendo que ésta ha estado rotando un tiempo muy largo.

**Problema 14.10**

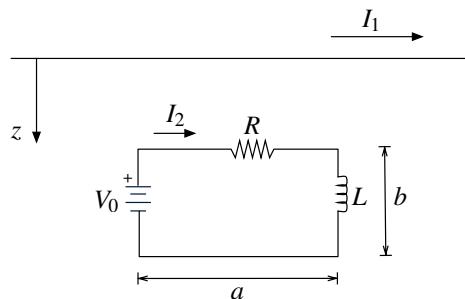
Un carrito de masa m que se desplaza con velocidad $v_0 \hat{x}$, hasta llegar a una región en que existe un campo magnético uniforme en $x = 0$. El carrito es perfectamente conductor (ie. resistencia nula) y posee una autoinductancia L . Determine la velocidad del carrito en el tiempo y la corriente que circula por éste. ¿Cuál debe ser la condición sobre el largo del carrito para que éste logre entrar completamente a la zona de campo?



Problema 14.11  

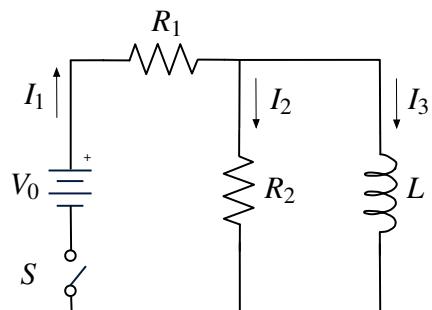
Un alambre recto e infinito lleva una corriente I_1 . Una espira rectangular de lados a y b es coplanar con el alambre y los lados a son paralelos a él. La espira se traslada en la dirección z con rapidez $v(z) = kz(z + b)$, donde k es una constante. Determine

- Calcular el flujo que enlaza la espira debido a I_1 y la fem inducida en ella.
- Escriba la ecuación diferencial que debe satisfacer la corriente $I_2(t)$ que circula por la espira. Suponiendo que ya calculó $I_2(t)$.
- Calcule la corriente $I_2(t)$ si en $t = 0$ la corriente $I_2(0) = V_0/R$

**Problema 14.12**  

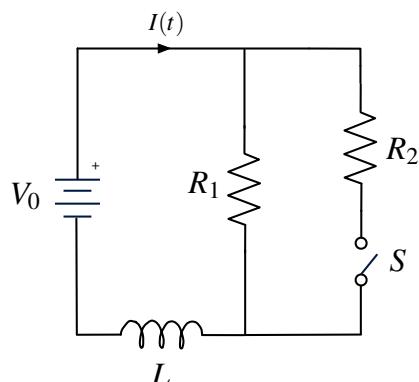
Considere que interruptor S del circuito mostrado en la Figura, ha estado abierto un tiempo muy largo. Determine las corrientes I_1 , I_2 e I_3 que se muestran en la figura, cuando:

- Instantáneamente una vez que el interruptor es cerrado.
- Un largo tiempo después que el interruptor es cerrado.

**Problema 14.13**   

En el circuito de la Figura se ha tenido conectada la batería por mucho tiempo (desde $t = -\infty$) con el interruptor S abierto. Luego en $t = 0$ el interruptor se cierra. Considere que $V_0 = 120 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 30\Omega$ y $L = 50 \text{ mH}$.

- Determine por inspección la corriente I en $t = 0$ ("justo" antes de cerrar S) y en $t = \infty$ ("mucho" después de haber cerrado S).
- Obtenga una expresión analítica para $I(t)$, entre $0 \leq t < \infty$. Grafique su resultado.

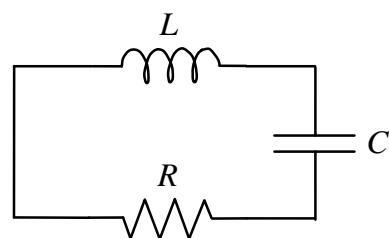


Problema 14.14  

Se debe determinar los valores de L y C en un circuito RLC en serie cuando se conoce R . Para ello se carga el condensador con una carga Q_0 y se cierra el circuito observándose que la corriente partiendo de cero, oscila con una frecuencia angular ω_0 y amplitud decreciente. Si al circuito se le reemplaza la resistencia R por otra de magnitud $2R$, éste queda justo en el límite cuando ya no oscila.

- Determine los valores de L y C .
- Escriba la función $Q(t)$ en función de t .

En ambos casos sus resultados deben quedar expresados a lo más en función de los datos R , Q_0 y ω_0 .



II. Soluciones

Solución 14.2

Dado que una espira es mucho más pequeña otra, se supondrá que el campo magnético que pasa a través de la espira de radio b es aproximadamente igual a $\vec{B}(z = d)$, donde \vec{B} es el campo magnético que genera la espira de radio a . Usando la definición de campo magnético

$$\begin{aligned}\vec{B}(z = d) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I_1 \cdot ad\theta \hat{\theta} \times (d\hat{z} - a\hat{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta \hat{\theta} \times (d\hat{z} - a\hat{r})}{|d\hat{z} - a\hat{r}|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 a}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{d \cdot d\theta \hat{r}}{(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^{2\pi} \frac{a \cdot d\theta \hat{z}}{(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ &= \frac{\mu_0 I_1 a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta \hat{z}}{(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 a^2}{2(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}\end{aligned}$$

Por lo tanto el flujo en la espira de radio b está dado por

$$\Phi_2 = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \pi b^2 \cdot \frac{\mu_0 I_1 a^2}{2(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Por lo que la inductancia mutua está dada por

$$M = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi (ab)^2}{2(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Solución 14.3

Sabiendo que el campo producido por un alambre infinito con corriente I vale $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta}$, entonces a una distancia r de uno de los dos cables se tiene que el campo magnético total es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \hat{z}}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2a - r} \right)$$

Donde \hat{z} es el vector unitario que entra a la hoja, perpendicular a ella. De esta manera, se calcula el flujo magnético, teniendo en cuenta que $r = a + x$ donde x es la coordenada vertical en la figura, e



y es la coordenada horizontal, con el origen ubicado al centro del anillo.

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int \int \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2a - r} \right) dy dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) dy dx$$

Luego:

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{-a}^a \left(\frac{2a}{a^2 - x^2} \right) (2a\sqrt{a^2 - x^2}) dx = \frac{2\mu_0 I a}{\pi} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2\mu_0 I a$$

Y recordando la relación de inducción mutua $\Phi = MI$, finalmente resulta:

$$M = 2\mu_0 a$$

Solución 14.4

- a) Para determinar la inducción mutua, se supone en primera instancia una corriente I_1 que pasa por la bobina y una corriente nula en la espira. Luego, es necesario determinar el flujo $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ que genera el campo magnético de la bobina sobre la espira. El campo magnético que genera la bobina dentro de ella es

$$\vec{B} = \mu_0 n I_1 \hat{z}$$

y la normal de la espira (dado que está rotada con respecto al eje de la bobina) es

$$\hat{n} = \cos \alpha \hat{y} + \sin \alpha \hat{z}$$

Por lo tanto el flujo es

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^b \mu_0 n I_1 \hat{z} \cdot r dr d\theta (\cos \alpha \hat{y} + \sin \alpha \hat{z}) = \mu_0 n I_1 \pi b^2 \sin \alpha$$

Luego la inducción mutua es

$$M = \frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{I_1} = \mu_0 n \pi b^2 \sin \alpha$$

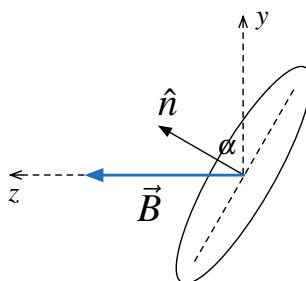


Figura 14.1: Representación normal espira y campo magnético.



- b) La fem inducida en la bobina estará dado por $\epsilon = -\frac{d\Phi_{2 \rightarrow 1}}{dt}$. Donde $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ es el flujo de la espira sobre la bobina. A priori, parece complicado determinar el valor del flujo $\Phi_{2 \rightarrow 1}$, sin embargo es posible utilizar el calculo anterior, ya que por simetría de la inductancia mutua

$$M = \frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{I_1} = \frac{\Phi_{2 \rightarrow 1}}{I_2} \implies \Phi_{2 \rightarrow 1} = MI_2$$

Utilizando el hecho que $I_2(t) = I_0 \sin \omega t$, se obtiene que

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_{2 \rightarrow 1}}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt} = -\mu_0 n \pi b^2 \sin \alpha \cdot I_0 \omega \cos \omega t$$

Finalmente, el máximo valor que alcanza la fem en la bobina (o equivalentemente, la diferencia de potencial en sus terminales) es en $t = \frac{\pi}{\omega}$

$$\Delta V_{\max} = \mu_0 n I_0 \omega \pi b^2 \sin \alpha$$

Solución 14.5

- a) El campo magnético que genera cualquier alambre con corriente I es

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 I \\ B(r) \cdot 2\pi r &= \mu_0 I \\ \vec{B}(r) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta} \end{aligned}$$

Extrapolando ese resultado al problema, y considerando que el sistema de referencia está ubicado con el alambre inferior $y = 0$

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \vec{B}_{\text{cable1}} + \vec{B}_{\text{cable2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{z} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(y-d)} (-\hat{z})$$

Luego

$$\begin{aligned} \iint \vec{B}_{\text{tot}} \cdot d\vec{S} &= \int_0^d \int_{2d}^{3d} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \hat{z} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-d} \right) \cdot dx dy \hat{z} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} d \left(\ln \left(\frac{3}{2} \right) - \ln(2) \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} d \ln \left(\frac{3}{4} \right) \end{aligned}$$

Finalmente como

$$M = \frac{|\Phi|}{I} = \frac{\mu_0 d}{2\pi} \ln \left(\frac{4}{3} \right)$$

- b) Usando la Ley de Lenz y los resultados de la parte anterior $\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d \ln \left(\frac{3}{4} \right) < 0$.

Luego

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\underbrace{\frac{\mu_0 I}{2\pi} d \left(\ln \left(\frac{3}{4} \right) \right)}_{<0} \underbrace{\frac{dI}{dt}}_{>0} > 0$$

Como $\varepsilon > 0$, la corriente va en el sentido positivo de la normal \hat{z} (antihorario).



c) Como la resistencia de espira es r , la corriente que cierbla por ella es

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{r} = -\frac{\mu_0 d}{2\pi r} \ln\left(\frac{3}{4}\right) \frac{dI}{dt}$$

La fuerza puede calcularse en los cuatro lados de la espira.

Para los lados verticales la fuerza es simétrica, igual en módulo pero en sentidos contrarios, por ende se anulan.

Por otro lado

$$dF_1 = I_1 d\vec{l} \times \vec{B}_{\text{tot}}(y=2d) = I_1 dx \hat{x} \times \left. \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-d} \right) \right|_{y=2d} \hat{z} = \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi} \left(\frac{1}{2d} - \frac{1}{d} \right) dx (-\hat{y})$$

Integrando en x entre 0 y d ,

$$\implies \vec{F}_1 = \frac{\mu_0 I I_1}{4\pi} \hat{y}$$

Análogamente para la sección horizontal del cable superior, usando $y=3d$

$$dF_3 = I_1 d\vec{l} \times \vec{B}_{\text{tot}}(y=3d) = \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi} \left(\frac{1}{3d} - \frac{1}{2d} \right) dx (-\hat{y})$$

$$\implies \vec{F}_3 = -\frac{\mu_0 I I_1}{12\pi} \hat{y}$$

Finalmente la fuerza está dada por la suma de $\vec{F}_1 + \vec{F}_3$

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \frac{\mu_0 I I_1}{6\pi} \hat{y} = -\frac{\mu_0 I}{6\pi} \frac{\mu_0 d}{2\pi r} \ln\left(\frac{3}{4}\right) \frac{dI}{dt} \hat{y}$$

Solución 14.6

Existen dos maneras de resolverlo, mediante la energía magnética o mediante el flujo magnético:

- i) Energía magnética: Primero que todo, se calcula el campo magnético en el espacio mediante Ley de Ampére en una superficie circular de radio r , perpendicular a los dos cascarones cilíndricos. De esta manera, para $a < r < b$:

$$\vec{B} = B(r) \hat{\theta} \implies \int \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 I$$

Luego, la corriente que atraviesa dicho camino es:

$$I = \int (\vec{K}_a \times \hat{n}) \cdot d\vec{l}$$

Donde $\hat{n} = \hat{r}$ es el vector normal a la superficie cilíndrica de radio a (superficie a través de la cuál circula la corriente enlazada), y $d\vec{l} = rd\theta \hat{\theta}$. Por lo tanto:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{I_0}{2\pi a} ad\theta = I_0 \implies \vec{B}(a < r < b) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \hat{\theta}$$



Además, se debe tener claro que $\vec{B}(r < a) = 0$ debido a que no hay corrientes enlazadas para $r < a$; y $\vec{B}(r > b) = 0$ debido a que la suma de corrientes enlazadas es nula para $r > b$.

Ahora, se calcula la energía magnética asociada a una altura h arbitraria en los cilindros:

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint |\vec{B}|^2 dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{\mu_0^2 I_0^2}{4\pi^2 r^2} r d\theta dr dz = \frac{\mu_0 I_0^2 h}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Así, se obtiene la energía por unidad de largo:

$$u_m = \frac{U_m}{h} = \frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Para calcular la autoinductancia por unidad de largo, se debe recordar que la energía magnética asociada a una autoinductancia es (recordar que en este caso $I = I_0$):

$$U_m = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{\mu_0 I_0^2 h}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Por lo tanto, la autoinductancia por unidad de largo vale:

$$l = \frac{L}{h} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

- ii) Flujo magnético: Usando los resultados anteriores del campo magnético, se calcula el flujo magnético a través de una superficie rectangular, perpendicular al campo \vec{B} , de lado $(b - a)$ y altura h :

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_a^b \int_0^h \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} dr dz = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Recordando que:

$$\Phi = LI_0 \Rightarrow L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow l = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Solución 14.8

Dado que la carga comienza a rotar, se genera una densidad superficial de corriente $\vec{K}(t) = \sigma_0 \omega(t) R \hat{\theta}$. Este problema es análogo al de una bobina con una corriente circulando por ella, por ende el campo magnético fuera del cilindro es nulo. A partir de eso se obtiene por ley de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow B \cdot H = \mu_0 K H \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \sigma_0 \alpha t R \hat{z}$$

El camino elegido es el mismo que se usa en bobina, un rectángulo de altura H . Luego, usando la ley de Faraday para un disco de radio $r < R$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow E(r, t) \cdot 2\pi r = -\frac{d}{dt} (\pi r^2 \cdot \mu_0 \sigma_0 \alpha t R) \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\mu_0 \sigma_0 \alpha R r}{2} \hat{\theta}$$



El campo eléctrico cambia debido a la inducción que provoca el campo magnético en el tiempo. Finalmente, la energía magnética es

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint |B|^2 dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R (\mu_0 \sigma_0 \alpha t R)^2 r dr d\theta dz = \frac{\mu_0 (\sigma_0 \alpha t R)^2 \cdot \pi R^2 H}{2}$$

y la energía eléctrica es

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint |\vec{E}|^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\frac{\mu_0 \sigma_0 \alpha R r}{2} \right)^2 r dr d\theta dz = \frac{\epsilon_0 (\mu_0 \sigma_0 \alpha R)^2}{4} \cdot \pi H \cdot \frac{R^4}{4}$$



Solución 14.13 

- a) Para $t = 0$, el interruptor S ha estado abierto mucho tiempo, por cual la corriente que circula en el circuito se vuelve constante (la inductancia en un tiempo muy extenso actúa como un cortocircuito, es decir, como un simple cable). Por ende la corriente está dada por

$$I(t=0) = \frac{V_0}{R_2} = 4 \text{ [A].}$$

Para el caso que $t \rightarrow \infty$, el interruptor se cierra y quedan las dos resistencias en paralelo. Al igual que el caso anterior se tiene la corriente es

$$I(t \rightarrow \infty) = V_0 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 8 \text{ [A].}$$

- b) Usando un Kirchoff de Voltajes, se obtiene

$$V_0 = IR + L \frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{V_0}{L}$$

Donde $R = (R_1^{-1} + R_2^{-1})^{-1} = 15 \Omega$. Usando factor integrante (ie. multiplicar a ambos lados $e^{\frac{R}{L}t}$)

$$\frac{dI}{dt} e^{\frac{R}{L}t} + \frac{R}{L} I e^{\frac{R}{L}t} = \frac{V_0}{L} e^{\frac{R}{L}t} \Rightarrow \frac{d}{dt}(I(t)e^{\frac{R}{L}t}) = \frac{V_0}{L} e^{\frac{R}{L}t} \Rightarrow I(t)e^{\frac{R}{L}t} - I(0) = \frac{V_0}{R}(e^{\frac{R}{L}t} - 1)$$

Reemplazando los valores de R e $I(0)$, se obtiene que

$$I(t) = \frac{V_0}{R_2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = 8 - 4e^{-300t}$$

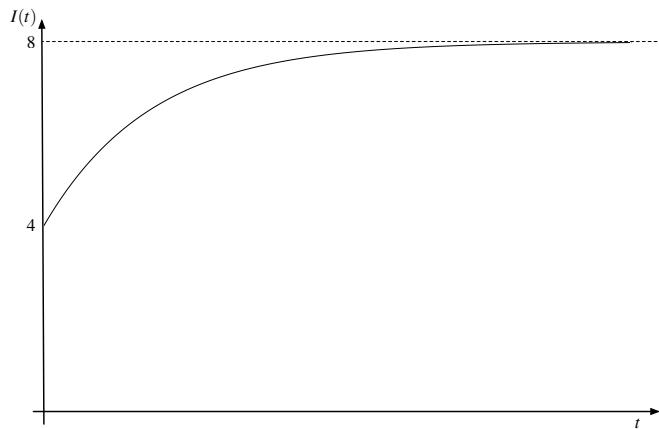


Figura 14.2: Gráfico de $I(t)$



15

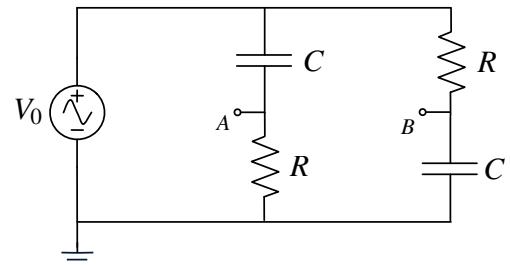
Corriente Alterna

I. Problemas Propuestos

Problema 15.1

Consideré el circuito de corriente alterna mostrado en la Figura. El circuito es alimentado con un generador de voltaje $V(t) = V_0 \cos \omega t$.

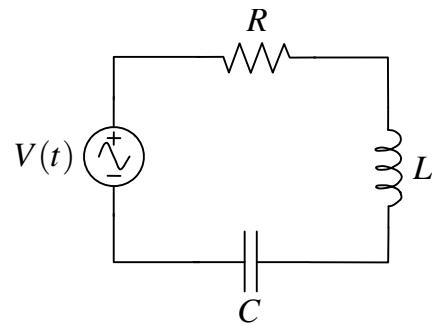
- Demuestre que el módulo de la diferencia de potencial entre los puntos A y B es independiente de la frecuencia ω del generador.
- Calcule la fase de esta diferencia de potencial con respecto al generador.
- Explique cualitativamente como cambiarían sus resultados si el generador tuviese una resistencia interna $R_{\text{int}} = R/10$.



Problema 15.2

Un circuito RLC serie tiene $R = 100 \Omega$, $L = 10 \text{ mH}$ y una frecuencia de resonancia de $\omega_0 = 3 \text{ kHz}$.

- ¿Cuál es el valor de C ?
- ¿Cuál es valor de la impedancia total cuando la frecuencia es de $\omega' = 5 \text{ kHz}$?
- ¿Cuál es la corriente de respuesta a un voltaje $V(t) = 200 \cos(10^4 \pi t)$?
- ¿Cuál es la potencia promedio consumida?
- ¿Cuál es el máximo voltaje en cada uno de los tres elementos de circuito? ¿Por qué estos números no suman 200 [V]?

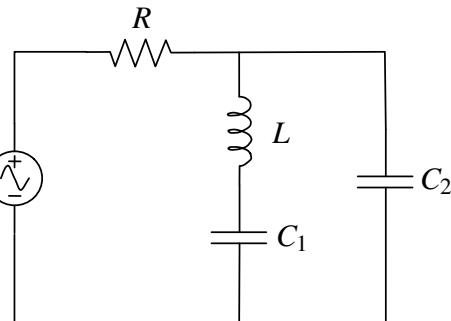


Problema 15.3   

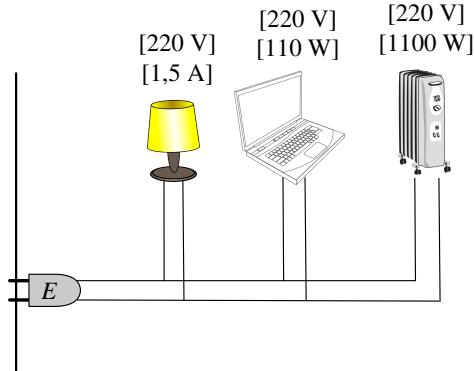
Considere el circuito eléctrico de la figura, que es alimentado por una fuente de voltaje alterno $V(t) = V_0 \cos \omega t$.

Determine:

- La impedancia equivalente de la configuración, especificando claramente su parte real e imaginaria.
- La frecuencia de resonancia ω_0 del circuito, tal que V_0 haga máxima la corriente que sale de la fuente.
- La corriente que circula por la resistencia R en función del tiempo (ie. escriba la corriente de la forma $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$, especificando claramente los valores de I_0 y ϕ).
- La potencia promedio entregada por la fuente.

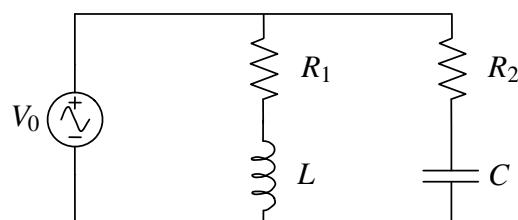
**Problema 15.4**  

En la figura se esquematiza la conexión de un computador personal, una lámpara de escritorio y una estufa eléctrica a un enchufe múltiple ("alargador") el cual es conectado al enchufe de 220 V en la muralla. Las especificaciones de cada artículo aparecen en la figura. El enchufe E conectado a la muralla tolera una corriente máxima de 7 A. Examine cuantitativamente la conexión y determine si el enchufe E es el adecuado.

**Problema 15.5**   

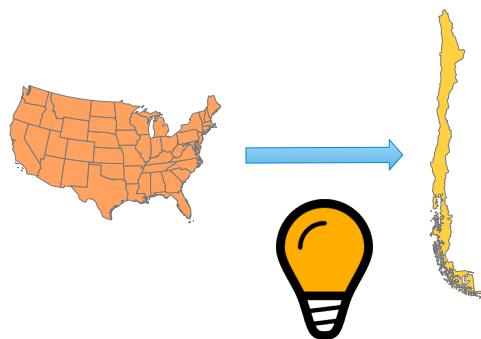
Un circuito tiene dos resistencias R_1 y R_2 , un condensador C y una inductancia L dispuestas de la forma que se indica en la Figura. El circuito es alimentado mediante una fuente de voltaje alterno de ecuación $V(t) = V_0 \sin \omega t$. Determine

- La impedancia equivalente del circuito y el módulo de la corriente en función del tiempo por cada rama del circuito.
- La frecuencia de resonancia del circuito, ¿Cuál es el valor de la corriente máxima que sale de la fuente? (exprese su resultado en función de la frecuencia de resonancia).



Problema 15.6  

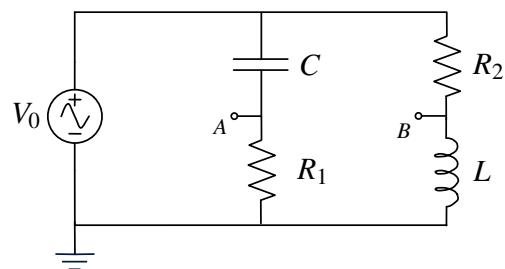
Los enchufes eléctricos chilenos proveen una fuente de voltaje alterno con $V_{\text{rms}} = 220 \text{ [V]}$ y una frecuencia $f = 50 \text{ [Hz]}$, por otro lado, los enchufes en Estados Unidos usan $V_{\text{rms}} = 120 \text{ [V]}$ y una frecuencia $f = 60 \text{ [Hz]}$. Si se trae una ampolleta de 60 [W] y 120 [V] de Estados Unidos a Chile, ¿Cuán grande debe ser una inductancia L , en henrys, que debe ser conectada en serie tal que la ampolleta opere normalmente, produciendo la misma cantidad de luz como si fuese conectada en Estados Unidos?. Explique brevemente por qué es ventajoso corregir la iluminación con una inductancia en vez de una resistencia.

**Problema 15.7**   

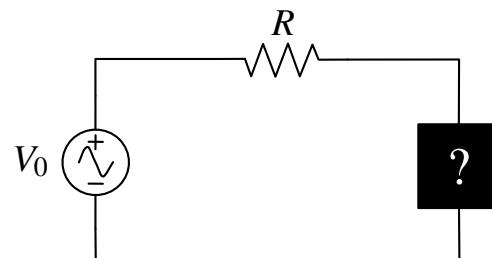
Para el circuito en la figura, muestre si

$$R_1 R_2 = \frac{L}{C}$$

entonces $V_A = V_B$ sin importar la frecuencia ω . Ambos potenciales están medidos de la tierra del circuito.

**Problema 15.8**  

El circuito de la figura tiene una fuente de voltaje alterno $V(t) = V_0 \cos \omega t$, conectada en serie con una resistencia $R = 1 \Omega$ y una “caja negra”, que puede contiene un condensador, un inductor, o ambos. Se mide la corriente que circula en el circuito con una frecuencia angular $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$ y se observa que la corriente adelanta al voltaje de la fuente en una fase de $\pi/4$ radianes. Si se repite el experimento con una frecuencia a $\omega_2 = 2 \text{ rad/s}$ se encuentra la corriente se atrasa exactamente $\pi/4$ radianes con respecto a la fuente.

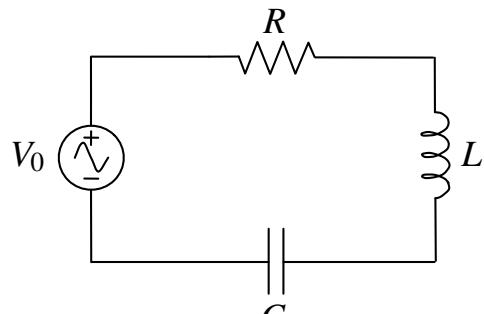


- ¿Qué hay dentro de la caja negra?.
- ¿Cuál/es es/son los valor/es de inductancia o/y capacitancia?.
- ¿Puede ser el circuito resonante?, en caso de serlo, ¿cuál es la frecuencia de resonancia?.

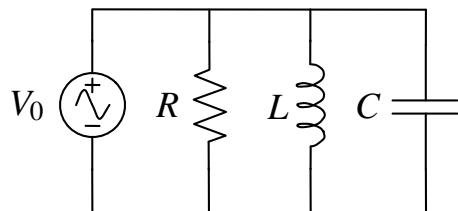


Problema 15.9  

- a) Un circuito RLC serie contiene una inductancia de 0.1 H . y una resistencia y capacitancia de valor desconocido. Cuando el circuito es conectado a una fuente AC $V(t) = 230 \sin 100\pi t$, la corriente que fluye por el circuito es $I(t) = 2.3 \sin 100\pi t$. Encuentre: los valores de la resistencia y la capacitancia, la diferencia de potencial en la inductancia y la potencia promedio total consumida.
- b) Un circuito resonante en paralelo consiste en un condensador $C = 32 \text{ pF}$ en paralelo con una inductancia $F = 18 \mu\text{H}$ y una resistencia $R = 60 \Omega$, respectivamente. Determine la frecuencia de resonancia del circuito y el módulo de la impedancia equivalente en función de la frecuencia ω del generador.
- c) Un generador entrega un voltaje constante con frecuencia variable de $V_{\text{rms}} = 100 \text{ [V]}$ (rms) a un circuito RLC serie que contiene $R = 5\Omega$, $L = 4 \text{ mH}$, y $C = 0.1 \mu\text{F}$. La frecuencia del generador se varía hasta que se obtiene el máximo valor de la corriente. Determine el valor de la corriente máxima, la frecuencia en la cual ocurre, y el voltaje entre la inductancia y el condensador.



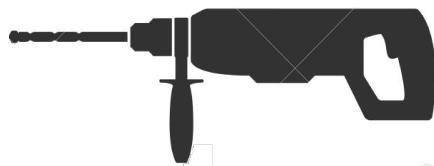
(a) RLC Serie



(b) RLC Paralelo

Problema 15.10  

Suponga usted que cuenta con dos herramientas que operan 110 V. Una de ellas es un taladro eléctrico cuyas especificaciones son (110 V - 2,6 A). La otra herramienta es una sierra eléctrica de especificaciones (110 V - 3 A). Para utilizar estas herramientas requiere un transformador que reduzca el voltaje de 220 V a 110 V. Estos aparatos se encuentran en el comercio y los hay de 50 W, 100 W, 800 W, 1000 W, 1500 W. Mientras mayor es la potencia tolerable por el transformador mayor es su precio. Determine el transformador más económico que permita la operación simultánea de ambas herramientas.



Problema 15.11 

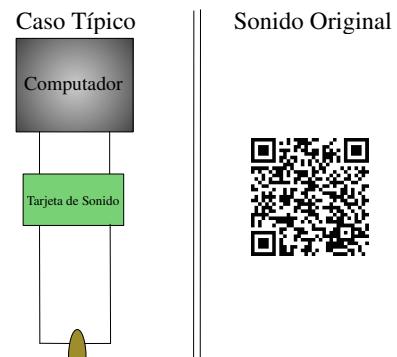
Los filtros de señales son comúnmente usados para atenuar algunas frecuencias presentes en las mismas. Consideré el ejemplo de la figura, donde se conecta una resistencia R y condensador C en los terminales de la tarjeta de sonido un computador. Por simplicidad, suponga que entre los puntos A y B hay un voltaje $V(t) = V_0 \cos(2\pi ft)$ (señal de entrada).

- a) Encuentre la relación $|V_{EF}|^2/|V_{AB}|^2$ para los dos casos mostrados en la figura (asuma la impedancia del micrófono es nula).

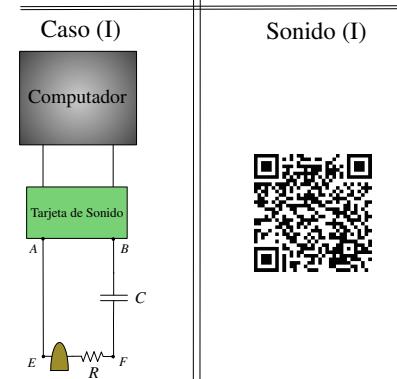
- b) Escuche los sonidos que se indican a continuación (también puede hacerlo escaneando el código QR de la figura):

- Sonido Original
- Sonido 1
- Sonido 2

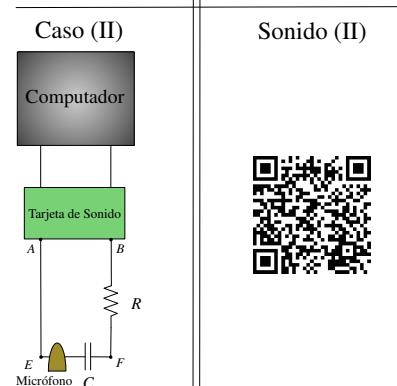
Usando los resultados de la parte (a) y habiendo escuchado los sonidos, determine a qué sonido de filtro corresponden los Casos (I) y (II). Recuerde que el oído humano escucha las altas frecuencias en forma aguda y las baja frecuencia en forma grave.



Sonido Original



Sonido (I)



Sonido (II)



II. Soluciones

Solución 15.3 

- a) La impedancia equivalente está dada por

$$\begin{aligned} Z &= R + \left(\frac{1}{jX_L - jX_{C1}} + \frac{1}{-jX_{C2}} \right)^{-1} \\ &= R + \left(\frac{-jX_{C2} + jX_L - jX_{C1}}{(X_L - X_{C1})X_{C2}} \right)^{-1} \\ &= R + j \frac{(X_L - X_{C1})X_{C2}}{X_{C2} + X_{C1} - X_L} \\ &= R + j \frac{\omega^2 LC_1 - 1}{\omega(C_1 + C_2 - \omega^2 LC_1 C_2)} \end{aligned}$$

- b) La frecuencia de resonancia es tal que la parte imaginaria de la impedancia se vuelve nula, es decir

$$X_L = X_{C1} \implies \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C_1} \implies \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}$$

Nótese el hecho que al elegir esta frecuencia, el módulo de la impedancia se vuelve mínimo, y en consecuencia, se maxima el módulo de la corriente que sale de la fuente.

- c) La corriente que circula por la resistencia es

$$I(t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{V_0 e^{j\omega t}}{Z} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{V_0 e^{j\omega t}}{|Z| e^{j\phi}} \right\} = \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \phi)$$

donde de la parte anterior se tiene que los valores de $|Z|$ y ϕ son

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega^2 LC_1 - 1}{\omega(C_1 + C_2 - \omega^2 LC_1 C_2)} \right)^2}$$

$$\phi = \arctan \left(\frac{\omega^2 LC_1 - 1}{R\omega(C_1 + C_2 - \omega^2 LC_1 C_2)} \right)$$

- d) Finalmente, la potencia media que entrega la fuente es

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{V_0^2}{2|Z|} \cos \phi \\ &= \frac{V_0^2}{2|Z|^2} \operatorname{Re}\{Z\} \\ &= \frac{V_0^2 R}{2R^2 + 2 \left(\frac{\omega^2 LC_1 - 1}{\omega(C_1 + C_2 - \omega^2 LC_1 C_2)} \right)^2} \end{aligned}$$



Solución 15.5 

a) La impedancia equivalente está dada por

$$Z_{eq} = \left(\frac{1}{R_1 + Z_L} + \frac{1}{R_2 + Z_C} \right)^{-1}$$

donde $Z_L = jX_L$ y $Z_C = -jX_C$, con $X_L = \omega L$ y $X_C = \frac{1}{\omega C}$. Luego

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= \left(\frac{1}{R_1 + jX_L} + \frac{1}{R_2 - jX_C} \right)^{-1} \\ &= \frac{(R_1 + jX_L)(R_2 - jX_C)}{(R_1 + R_2) + j(X_L - X_C)} \\ &= \frac{(R_1 R_2 + X_L X_C) + j(X_L R_2 - X_C R_1)}{(R_1 + R_2) + j(X_L - X_C)} \\ &= \frac{[(R_1 R_2 + X_L X_C) + j(X_L R_2 - X_C R_1)][(R_1 + R_2) + j(X_L - X_C)]}{(R_1 + R_2)^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &= \frac{(R_1 R_2 + X_L X_C)(R_1 + R_2) - (X_L R_2 - X_C R_1)(X_L - X_C)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &\quad + j \frac{(R_1 R_2 + X_L X_C)(X_L - X_C) + (X_L R_2 - X_C R_1)(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_L - X_C)^2} \end{aligned}$$

Los módulos de cada una de las corrientes vale

$$|I_1(t)| = \left| \frac{V_0 e^{j\omega t}}{R_1 + j\omega L} \right| = \frac{V_0}{\sqrt{R_1^2 + \omega^2 L^2}} \quad |I_2(t)| = \left| \frac{V_0 e^{j\omega t}}{R_1 - j\frac{1}{\omega C}} \right| = \frac{V_0}{\sqrt{R_1^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}}$$

Nótese que los módulos de las corrientes son constantes en el tiempo y sólo dependen de los parámetros fijos del circuito. El aporte temporal está dado netamente por la parte exponencial compleja de la corriente.

b) La frecuencia de resonancia puede ser calculada al hacer nula la parte imaginaria de la impedancia, de modo que

$$(R_1 R_2 + X_L X_C)(X_L - X_C) + (X_L R_2 - X_C R_1)(R_1 + R_2) = 0$$

Reemplazando los valores de X_L y X_C

$$\left(R_1 R_2 + \frac{L}{C} \right) \left(\frac{1}{\omega_0 C} - \omega_0 L \right) = \left(\omega_0 L R_2 - \frac{R_1}{\omega_0 C} \right) (R_1 + R_2)$$

donde puede despejarse el valor de ω_0 como

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{R_1^2 C - L}{R_2^2 C - L}}$$

El valor de la corriente para esa frecuencia vale

$$I = \frac{V}{Z_{eq}} \implies |I| = \frac{|V_0|}{|Z_{eq}|} = V_0 \cdot \frac{(R_1 + R_2)^2 + (\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C})^2}{(R_1 R_2 + \frac{L}{C})^2 + (\omega_0 L R_2 - \frac{R_1}{\omega_0 C})^2}$$



Solución 15.7 

Previamente, antes de resolver el problema, es bueno conocer el concepto de “Divisor de Voltaje” que es sumamente útil en problemas de corriente alterna.

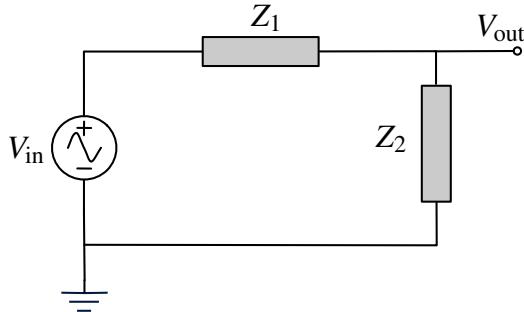


Figura 15.1: Divisor de Voltaje con Impedancias

En la Figura 15.1 es posible apreciar una malla de un circuito CA que posee dos impedancias en serie Z_1 y Z_2 . El divisor de voltaje permite obtener el voltaje en el punto V_{out} , que es justo antes de donde comienza la impedancia Z_2 . Nótese que V_{out} representa la caída de tensión al pasar la corriente por Z_1 . Para determinar el valor de V_{out} se debe considerar que $V_{\text{in}} = I \cdot (Z_1 + Z_2)$ y $V_{\text{out}} = I \cdot Z_2$, juntando ambas ecuaciones se llega a

$$V_{\text{out}} = V_{\text{in}} \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Volviendo al problema, usando notación fasorial para la fuente $V(t) = V_0 e^{j\omega t}$, se tiene que usando la fórmula del divisor de voltaje para la rama que contiene a C y R_1 :

$$V_A = V_0 e^{j\omega t} \cdot \frac{Z_{R1}}{Z_c + Z_{R1}} = V_0 e^{j\omega t} \cdot \frac{R_1}{R_1 - \frac{j}{\omega C}} = V_0 e^{j\omega t} \cdot \frac{1}{1 - \frac{j}{R_1 \omega C}}$$

De la misma manera, para la rama que contiene a R_2 y L :

$$V_B = V_0 e^{j\omega t} \cdot \frac{j\omega L}{R_2 + j\omega L} = V_0 e^{j\omega t} \cdot \frac{1}{1 - \frac{jR_2}{\omega L}}$$

Luego, usando el dato que $R_1 R_2 = \frac{L}{C}$ o equivalentemente $R_1 C = \frac{L}{R_2}$, se llega a que

$$V_A = V_0 e^{j\omega t} \cdot \frac{1}{1 - \frac{j}{\omega R_1 C}} = V_0 e^{j\omega t} \cdot \frac{1}{1 - \frac{jR_2}{\omega L}} = V_B$$

que era lo que se quería demostrar.



16

Leyes de Maxwell y Ondas Electromagnéticas

I. Problemas Propuestos

Problema 16.1



- Explique qué es una onda plana monocromática e identifique explícitamente la dirección de propagación, la velocidad de propagación, la frecuencia, y la longitud de onda.
- En el caso que la onda plana sea electromagnética, demuestre que los campos \vec{E} y \vec{B} son perpendiculares entre si y (ambos) perpendiculares a la dirección de propagación. Indicación: use las ecuaciones de Maxwell.

Problema 16.2



Considere una onda electromagnética que posee el siguiente campo eléctrico

$$\vec{E} = E_0 \cos[(10 \text{ m}^{-1}) \cdot x + (3 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}) \cdot t] \hat{z}$$

Encuentre:

- La longitud de onda λ y el periodo T .
- La dirección y el sentido de propagación.
- El campo magnético \vec{B} asociado a esta onda.
- El vector de Poynting \vec{S} .

Problema 16.3



Escriba una expresión para el campo eléctrico y magnético de una onda electromagnética plana, cuyo campo eléctrico está contenido en el plano xy y se propaga desde el origen hasta el punto $(0, 3, 3)$. La frecuencia angular de la onda es $\omega = 100\pi$ [rad/s] y la velocidad de la luz es c . La magnitud del campo eléctrico es E_0 . Encuentre la potencia promedio que transporta esta onda

Problema 16.4  

Al interior de una guía de ondas se transmite una onda electromagnética (solución de las ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas y corrientes $\rho = 0$ y $\vec{J} = 0$) tal que las únicas componentes del campo magnético son \vec{B} son B_x y B_z . Su expresión en función de las coordenadas x , z y del tiempo t es:

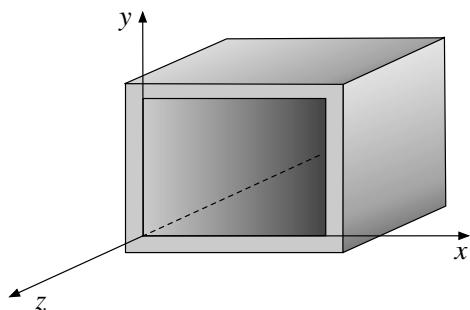
$$B_x = \frac{aB_0k}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t)$$

$$B_z = B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(kz - \omega t)$$

en donde a , B_0 , k y ω son constantes. La relación entre k y ω es

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}$$

Se sabe que el campo eléctrico \vec{E} sólo tiene componente E_y que es función solamente de las coordenadas x , z , t . Encuentre la expresión para este E_y .

**Problema 16.5**  

Considere una superposición de ondas viajando en el la dirección del eje z , donde

$$\vec{E} = \text{Re}\{\hat{x} \cdot E_1 e^{j(kz-\omega t)} + \hat{y} \cdot E_2 e^{j(kz-\omega t)}\}$$

$$\vec{B} = \text{Re}\left\{ \hat{y} \cdot \frac{E_1}{c} e^{j(kz-\omega t)} - \hat{x} \cdot \frac{E_2}{c} e^{j(kz-\omega t)} \right\}$$

donde E_1 y E_2 pueden ser complejos

$$E_1 = C_1 e^{j\phi_1}, \quad E_2 = C_2 e^{j\phi_2}$$

C_1 donde y C_2 son reales.

- Calcule el flujo promedio de energía $\langle S \rangle$.
- Suponga que $E_1 = C$ y $E_2 = jC$, es decir, $C_1 = C_2 = C$ y $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$. Determine la dirección de \vec{E} en función de t , en un punto de plano xy . Describa el resultado mediante palabras y dibujos.
- Para el mismo campo en la parte b, determine la dirección de \vec{E} en función de z , para el instante en $t = 0$. Describe el resultado en palabras y dibujos.



Problema 16.6 ★ ✓ ⓘ

Dos ondas electromagnéticas son emitidas desde dos diferentes fuentes, de modo que

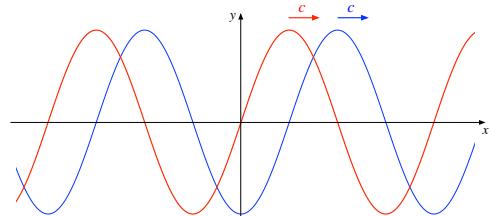
$$\vec{E}_1(x, t) = E_{10} \cos(kx - \omega t) \hat{y}$$

$$\vec{E}_2(x, t) = E_{20} \cos(kx - \omega t + \phi) \hat{y}$$

- Encuentre el vector de Poynting asociado a la onda electromagnética resultante.
- Encuentre la intensidad de la onda.
- Repita el cálculo si la dirección de propagación de la segunda onda electromagnética viaja en la dirección contraria a la primera

$$\vec{E}_1(x, t) = E_{10} \cos(kx - \omega t) \hat{y}$$

$$\vec{E}_2(x, t) = E_{20} \cos(kx + \omega t + \phi) \hat{y}$$

**Problema 16.7** ★ ✓

Una onda electromagnética plana propagándose en el vacío tiene un campo magnético dado por

$$\vec{B} = B_0 f(ax + bt) \hat{y} \quad f(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < u < 1 \\ 0 & \text{si } \sim \end{cases}$$

Donde a y b son constantes positivas.

- ¿Cuál debe ser la relación entre a y b para cumplir con las Ecuaciones de Maxwell?
- Determine el valor de $|\vec{E}|$ de esta onda electromagnética. ¿En qué dirección y sentido se propaga la onda?.
- Determine la magnitud y la dirección del flujo de energía llevada por la onda. Exprese su resultado en función de B_0 y constantes universales.
- Esta onda choca perfectamente sobre un plano conductor y es reflejada. ¿Cuál es la presión (fuerza por unidad de área) que ejerce la onda mientras impacta el plano?.



Problema 16.8  

Una onda plana linealmente polarizada se propaga a lo largo de la dirección $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{y})$. La polarización de la onda yace sobre el plano XY (ie, el campo eléctrico vive en el plano XY). Si el módulo de campo eléctrico es E_0 y la frecuencia de la onda es ω , encuentre

- Las funciones reales que representan \vec{E} y \vec{B} .
- El promedio temporal del vector de Poynting.

Problema 16.9  

En un buen conductor, cuando la frecuencia no es demasiado grande, una buena aproximación consiste en despreciar el término de la corriente desplazamiento. En tal caso la ecuación para \vec{E} es

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 g \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Considere el caso de una onda plana que ha penetrado a un medio (interfaz: plano XY) con conductividad g .

- Tomando $\vec{k} = (0, 0, k)$ demuestre de lo anterior que $k = (1 + j)\sqrt{\omega\mu_0 g/2}$. En lo que sigue se usará la notación $k_0 = \sqrt{\omega\mu_0 g/2}$
- Para el campo eléctrico de una onda plana en el medio conductor, luego de una incidencia normal, es $\vec{E} = E_0 e^{j(kz - \omega t)} \hat{x}$, (convencionalmente escoja E_0 real). Determine el valor de \vec{B} .
- Calcule el flujo temporal del vector de Poynting $\langle \vec{S} \rangle$



II. Soluciones

Solución 16.1

- a) Una onda plana es una onda tal que se propaga en una sola dirección en el espacio, o equivalente, su frentes de ondas son infinitos planos perpendiculares a la dirección de propagación. Un onda plana es monocromática debido a que posee una única frecuencia de propagación. La forma matemática para expresarla (solución de la ecuación de ondas) es

$$A(\vec{r}, t) = A e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

donde:

- La dirección de propagación está dada por el vector \vec{k} ,
- La velocidad de onda puede ser obtenida al reemplazar la expresión anterior en la ecuación de ondas, resultando $v = \frac{\omega}{|k|}$.
- La frecuencia angular está dada por $\omega = 2\pi f$, donde f es la frecuencia.
- La longitud de onda λ está dada a partir del módulo del número onda como $|k| = \frac{2\pi}{\lambda}$.

- b) Se debe considerar un campo eléctrico arbitrario como

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = (E_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y} + E_{0z} \hat{z}) e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Reescribiendo $\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$ se tiene que $\vec{E} = (E_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y} + E_{0z} \hat{z}) e^{j(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$. Tomando la divergencia de este campo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = j \underbrace{(k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z}) e^{j(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}}_{\vec{k} \cdot \vec{E}}$$

Por la primera ley de Maxwell, se sabe que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \implies \vec{E} \cdot \vec{k} = 0 \implies \vec{E} \perp \vec{k}$, de igual forma como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \implies \vec{B} \perp \vec{k}$. Por otro lado

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \underbrace{\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right)}_{j(k_y E_{0z} - k_z E_{0y}) e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}} \hat{x} + \underbrace{\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)}_{j(k_z E_{0x} - k_x E_{0z}) e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}} \hat{y} + \underbrace{\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)}_{j(k_x E_{0y} - k_y E_{0x}) e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}} \hat{z}$$

Por lo tanto

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = j \underbrace{[(k_y E_{0z} - k_z E_{0y}) \hat{x} + (k_z E_{0x} - k_x E_{0z}) \hat{y} + (k_x E_{0y} - k_y E_{0x}) \hat{z}]}_{\vec{k} \times \vec{E}_0} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = j \vec{k} \times \vec{E}$$

Suponiendo que el campo magnético también es de la forma $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ y aplicando la Ley de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \implies j \vec{k} \times \vec{E} = j \omega \vec{B} \implies \vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$$

Aplicando producto punto con \vec{E} a ambos lados

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \vec{E} \cdot \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} = \vec{k} \cdot \frac{\vec{E} \times \vec{E}}{\omega} = 0$$

Por lo que se deduce finalmente que $\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{k}$.



Solución 16.3 

- a) Se debe recordar que la forma general del campo eléctrico de una onda electromagnética es en este caso:

$$\vec{E} = E_0 \hat{n} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Donde $\vec{r} = (x, y, z)$ y $\vec{k} = k \hat{k}$ indica la dirección de propagación de la onda y \hat{n} , la polarización del campo eléctrico. En este caso la dirección de propagación de la onda es \hat{k} (unitario) y está determinado por

$$\hat{k} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 3^2}}(0, 3, 3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1) = \frac{\hat{y} + \hat{z}}{\sqrt{2}}$$

Por otro lado se sabe que el campo eléctrico está polarizado en el plano xy por lo que

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}(\alpha, \beta, 0)$$

Ahora usando el hecho que la dirección de propagación es siempre perpendicular a la polarización de la onda se cumple que

$$\hat{k} \cdot \hat{n} = 0 \implies (0, 1, 1) \cdot (\alpha, \beta, 0) = 0 \implies \beta = 0$$

Por ende

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2}}(\alpha, 0, 0) = (1, 0, 0) = \hat{x}$$

El campo eléctrico es entonces

$$\vec{E} = E_0 \hat{x} e^{j(\frac{k}{\sqrt{2}}(y+z) - \omega t)}$$

El valor de k se determina volviendo a la ecuación de onda

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \implies -\frac{k^2}{2} - \frac{k^2}{2} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \implies k = \frac{\omega}{c}$$

Finalmente el campo magnético \vec{B} puede ser determinado como

$$\vec{B} = \frac{\hat{k} \times \vec{E}}{c} = \frac{(\hat{y} + \hat{z}) \times E_0 \hat{x} e^{j(\frac{k}{\sqrt{2}}(y+z) - \omega t)}}{c\sqrt{2}} = \frac{E_0}{c\sqrt{2}} (\hat{y} - \hat{z}) e^{j(\frac{k}{\sqrt{2}}(y+z) - \omega t)}$$

En resumen como $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$:

$$\vec{E} = E_0 \hat{x} e^{j100\pi(\frac{y+z}{c\sqrt{2}} - t)} \quad \vec{B} = \frac{E_0}{c\sqrt{2}} (\hat{y} - \hat{z}) e^{j100\pi(\frac{y+z}{c\sqrt{2}} - t)}$$

- b) El vector de Poynting Promedio está dado por

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{E} \times \vec{B}^*| = \frac{1}{2\mu_0} \left| E_0 \hat{x} e^{j\omega(\frac{y+z}{c\sqrt{2}} - t)} \times \frac{E_0}{c\sqrt{2}} (\hat{y} - \hat{z}) e^{-j\omega(\frac{y+z}{c\sqrt{2}} - t)} \right| = \frac{E_0^2}{\mu_0 c \sqrt{2}} |(\hat{y} + \hat{z})| = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}$$



Solución 16.6 

- a) Para determinar el vector de Poynting es necesario determinar el valor del campo magnético \vec{B} . Luego para el campo \vec{E}_1 se tiene que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_1 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_{10} \cos(kx - \omega t) & 0 \end{vmatrix} = E_{10} k \sin(kx - \omega t) \hat{z}$$

y dado que por Maxwell

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = -k \sin(kx - \omega t) \hat{z} \implies \vec{B}_1(x, t) = E_{10} \frac{k}{\omega} \cos(kx - \omega t) \hat{z} = \frac{E_{10}}{c} \cos(kx - \omega t) \hat{z}$$

El cálculo es análogo para determinar \vec{B}_2 , por lo tanto por principio de superposición se tiene que

$$\vec{E} = [E_{10} \cos(kx - \omega t) + E_{20} \cos(kx - \omega t + \phi)] \hat{y}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} [E_{10} \cos(kx - \omega t) + E_{20} \cos(kx - \omega t + \phi)] \hat{z}$$

Donde finalmente el vector de Poynting vale

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{c\mu_0} [E_{10} \cos(kx - \omega t) + E_{20} \cos(kx - \omega t + \phi)]^2 \hat{x}$$

- b) La intensidad de la onda está dada por

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{c\mu_0} [E_{10} \cos(kx - \omega t) + E_{20} \cos(kx - \omega t + \phi)]^2 dt$$

Antes de comenzar a trabajar la expresión debe usarse el hecho que

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kx - \omega t + \phi) dt = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{c\mu_0 T} \left[E_{10}^2 \int_0^T \cos^2(kx - \omega t + \phi) dt + E_{20}^2 \int_0^T \cos^2(kx - \omega t) dt \right. \\ &\quad \left. + 2E_{10}E_{20} \int_0^T \cos(kx - \omega t + \phi) \cos(kx - \omega t) dt \right] \\ &= \frac{1}{c\mu_0} \left[\frac{E_{10}^2}{2} + \frac{E_{20}^2}{2} + \frac{2E_{10}E_{20}}{T} \int_0^T \cos(kx - \omega t + \phi) \cos(kx - \omega t) dt \right] \end{aligned}$$



Para la última integral se tiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} \int_0^T \cos(kx - \omega t + \phi) \cos(kx - \omega t) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T [\cos(kx - \omega t) \cos \phi - \sin(kx - \omega t) \sin \phi] \cos(kx - \omega t) dt \\
 &= \frac{\cos \phi}{T} \int_0^T \cos^2(kx - \omega t) dt + \frac{\sin \phi}{T} \int_0^T \cos(kx - \omega t) \sin(kx - \omega t) dt \\
 &= \frac{\cos \phi}{2} + \frac{\sin \phi}{2T} \int_0^T \sin(2(kx - \omega t)) dt \\
 &= \frac{\cos \phi}{2}
 \end{aligned}$$

Finalmente la intensidad vale

$$I = \frac{1}{c\mu_0} \left[\frac{E_{10}^2}{2} + \frac{E_{20}^2}{2} + E_{10}E_{20} \cos \phi \right]$$

- c) Repitiendo nuevamente los cálculos de parte anterior se tiene que el campo magnético asociado a \vec{E}_1 se mantiene, mientras tanto el campo asociado a \vec{E}_2 vale

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_{20} \cos(kx + \omega t + \phi) & 0 \end{vmatrix} = E_{20}k \sin(kx + \omega t) \hat{z}$$

Nuevamente por Maxwell,

$$\frac{\partial \vec{B}_2}{\partial t} = -E_{20}k \sin(kx + \omega t + \phi) \hat{z} \implies \vec{B}_2(x, t) = -\frac{E_{20}}{c} \cos(kx + \omega t + \phi) \hat{z}$$

donde se tiene que

$$\vec{E} = [E_{10} \cos(kx - \omega t) + E_{20} \cos(kx + \omega t + \phi)] \hat{y}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} [E_{10} \cos(kx - \omega t) - E_{20} \cos(kx + \omega t + \phi)] \hat{z}$$

lo que implica que en este caso

$$\vec{S} = \frac{1}{c\mu_0} [E_{10}^2 \cos^2(kx - \omega t) - E_{20}^2 \cos^2(kx + \omega t + \phi)] \hat{x}$$

Por lo que la intensidad de la onda vale

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{c\mu_0} [E_{10}^2 \cos^2(kx - \omega t) - E_{20}^2 \cos^2(kx + \omega t + \phi)] dt = \frac{1}{c\mu_0} \left[\frac{E_{10}^2}{2} - \frac{E_{20}^2}{2} \right]$$



Parte V

Campos Electromagnéticos en Medios Materiales

Campo Eléctrico en Medios Materiales

I. Problemas Propuestos

Problema 17.1



Considere una esfera conductora de radio R_1 , cargada con Q . La cual está rodeada de un manto dieléctrico de permitividad ϵ y radio R_2 (con respecto al centro de la esfera), el resto del espacio está vacío. Determine:

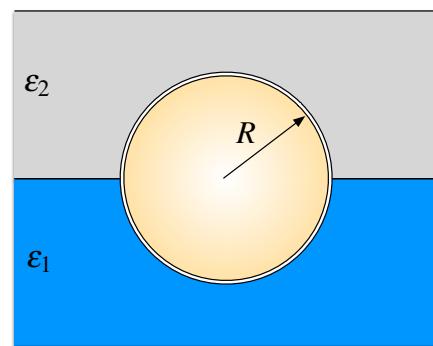
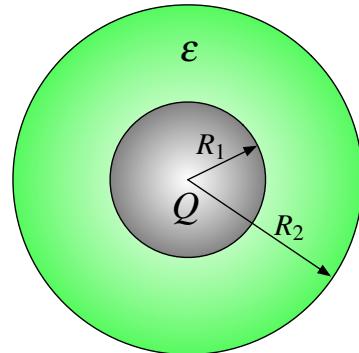
- El campo eléctrico en todo el espacio.
- Las densidades de carga libre e inducidas por la polarización en las interfaces (cambios de medio).
- La diferencia de potencial entre la esfera conductora e infinito. ¿Aumenta o disminuye esta tensión debido producto a la presencia del dieléctrico?

Problema 17.2



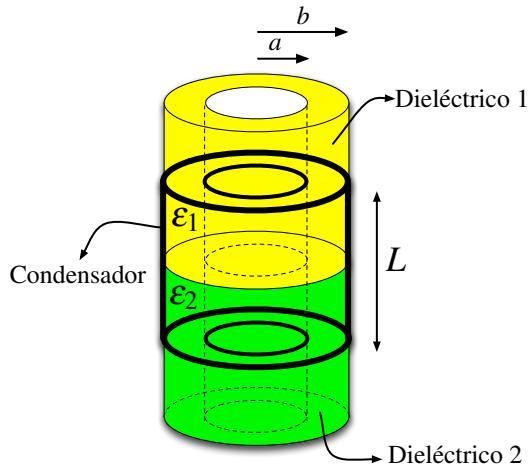
Una esfera conductora de radio R flota hasta la mitad en un medio dieléctrico de permitividad eléctrica ϵ_1 . La región sobre la esfera es un gas de permitividad eléctrica ϵ_2 . La esfera está cargada con una carga igual a Q .

- Calcule el campo eléctrico en todo el espacio.
- Calcule la densidad de carga libre superficial en la esfera conductora, y la densidad superficial de carga de polarización de ambos medios dieléctricos en la interfaz con la esfera.
- Si el medio en el cual flota la esfera es agua ($\epsilon_1 \approx 79\epsilon_0$) y el gas que hay sobre ella es aire ($\epsilon_2 \approx \epsilon_0$). Obtenga la relación (en módulo) entre la carga total de polarización en la interfaz con la esfera y la carga libre de la esfera, ¿qué signo tiene la carga neta sobre la esfera? .



Problema 17.3 ★ ✓ ⓘ

En un condensador cilíndrico de radios a y b y de largo L ($\gg a, b$) se han puesto dos dieléctricos tal como se muestra la Figura. Si el condensador posee carga $+Q$ y $-Q$ en sus superficies y los dielécticos poseen permitividades ϵ_1 y ϵ_2 ($\epsilon_1 < \epsilon_2$), calcule la fuerza necesaria que hay que aplicar al sistema para que el dieléctrico de permitividad ϵ_1 permanezca una distancia $\frac{1}{2}L$ dentro del condensador. Considere que ambos dielécticos son muy largos y se extienden más allá del largo del condensador.

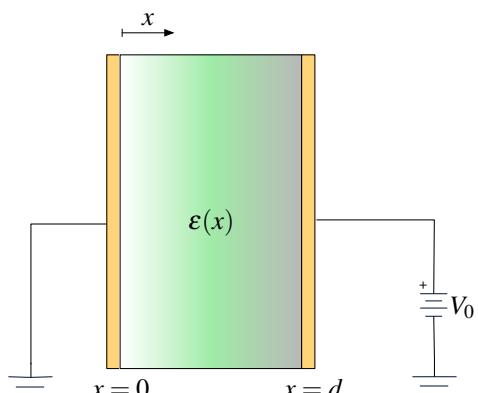
**Problema 17.4** ★ ✓ ⓘ

Se tiene dos placas conductoras paralelas muy grandes, separadas una distancia d . El espacio entre las placas está lleno con un material dieléctrico de permitividad $\epsilon(x)$, tal que $\epsilon(x = 0) = \epsilon_1$. Se encuentra que el potencial electrostático entre las placas satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2V}{dx^2} + k \frac{dV}{dx} = 0$$

donde k es una constante positiva.

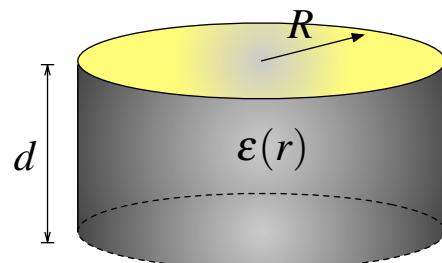
- El potencial electrostático $V(x)$ dentro de las placas.
- La permitividad $\epsilon(x)$.
- La densidad de carga libre que reside en la superficie conductora a potencial V_0 .

**Problema 17.5** ♦ ✓

El espacio entre dos disco discos paralelos conductores de radio R y separados una distancia $d \ll R$ es puesto un dieléctrico no uniforme, de modo que su permitividad varía linealmente en función de la distancia del centro de los discos

$$\epsilon(r) = \epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1) \frac{r}{R}$$

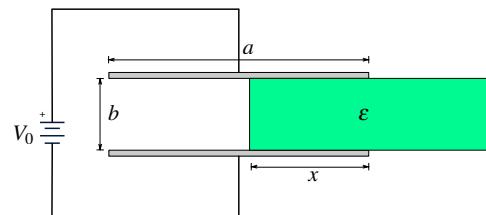
Calcule la capacitancia que forma este sistema.



Problema 17.6   

Un dispositivo de uso frecuente en muchos artefactos eléctricos de uso diario son los condensadores variables. Este tipo de condensador posee una geometría que es fácil de modificar mecánicamente, con lo cual se puede ajustar su capacidad a gusto. Existen muchos diseños de este tipo de dispositivos, un ejemplo simple e idealizado es el que se muestra en la Figura. El cual consiste en dos placas paralelas y cuadradas de largo a y separadas una distancia b . Entre medio de las cuales se introduce parcialmente un dieléctrico de permitividad ϵ , el cual penetra una distancia x de uno de los bordes del condensador. Suponga que dispone de una batería que da un voltaje V_0 , y desea almacenar una carga Q^* en el condensador. Para ajustarlo, calcule

- La capacidad del condensador para un x dado, despreciando los efectos de borde (i.e. $b \ll a, x$) .
- La penetración x del dieléctrico para el condensador tenga una carga Q^* (dado el voltaje de la batería V_0).
- ¿Cuál es la fuerza que siente el condensador en esa posición?.
- ¿Cuál es el rango de carga Q^* que puede ser almacenado en el condensador?.

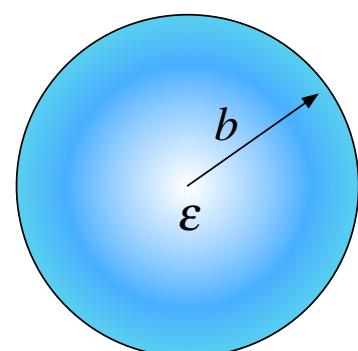
**Problema 17.7**   

Una esfera dieléctrica de radio b y permitividad de carga ϵ contiene en su interior una densidad de carga libre

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 r & 0 < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

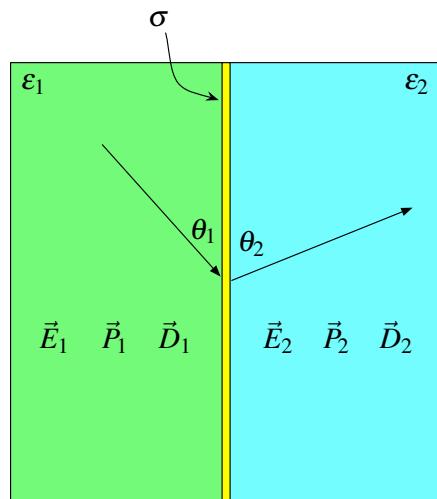
- Calcule las densidades de carga de polarización en volumen ρ_p y superficial σ_p en las zonas donde existan.
- Calcule la energía electrostática del sistema de cargas.

$$\rho(r)$$



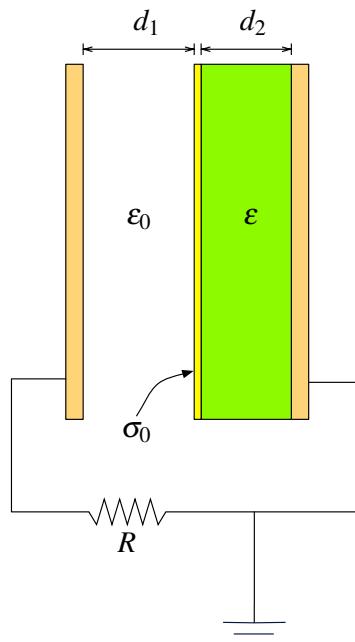
Problema 17.8  

Suponga una zona en el espacio separada por dos sectores: al izquierda un sector con permitividad ϵ_1 y a la derecha ϵ_2 . Un campo eléctrico \vec{E}_1 (con sus correspondientes vectores \vec{D}_1 y \vec{P}_1) incide sobre la zona de izquierda, emergiendo un campo \vec{E}_2 , a la derecha. Los ángulos de incidencia son los que se muestran en la figura. En la interfaz, hay una densidad de carga libre σ . Determine \vec{P}_2 en función de las permitividades eléctricas, el ángulo de incidencia θ_1 y la densidad de carga σ .

**Problema 17.9**  

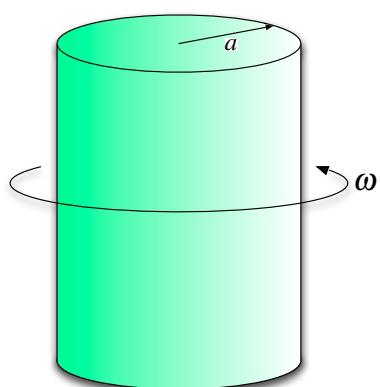
Un condensador de placas paralelas y área A tiene una lámina dieléctrica de espesor d_2 y permitividad eléctrica ϵ adosada a una de sus placas. Un espacio vacío de ancho d_1 separa al dieléctrico de la otra placa conductora. La superficie del dieléctrico en contacto con el vacío está cargada con una densidad superficial de carga libre uniforme σ_0 . Esta carga no puede moverse. Las placas están conectadas a través de una resistencia R , tal como se indica en la figura. Desprecie efectos de borde.

- Cuando ambas placas de condensador están en reposo, calcule la densidad de carga sobre cada conductora.
- Considere que la placa de izquierda se acerca al dieléctrico con una velocidad constante v_0 . Calcule la diferencia de potencial que genera entre los extremos de la resistencia en función de la distancia d_1 y el resto de los datos del problema.

**Problema 17.10**  

Un largo y sólido dieléctrico de forma cilíndrica de radio a es está permanentemente polarizado tal que su vector de polarización está dado por la expresión $\vec{P} = \frac{1}{2}P_0 r \hat{r}$.

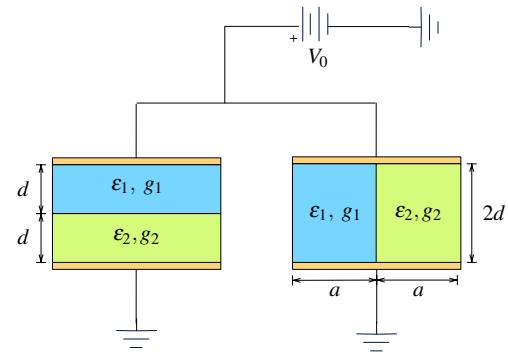
- Encuentre las densidades de cargas de polarización.
- El campo eléctrico en todo el espacio.
- Si el cilindro empieza a rotar con velocidad angular ω (con respecto a su eje) , determine el campo magnético en eje del cilindro.



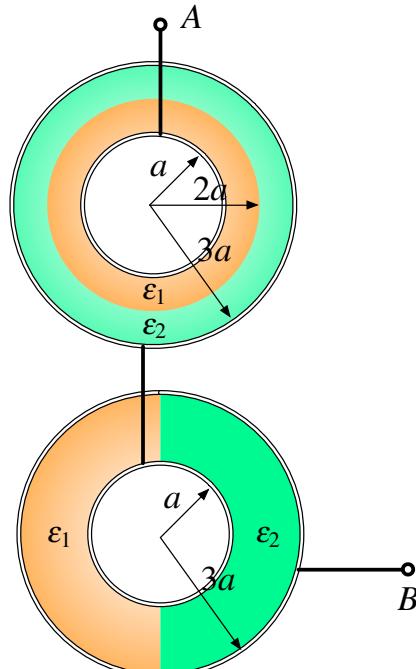
Problema 17.11   

Considere dos condensadores de placas cuadradas de lado $2a$ separadas una distancia $2d$. Dentro de cada condensador existen dos medios con constantes dieléctricas y conductividades, ϵ_1 , g_1 y ϵ_2 , g_2 . Los medios llenan la mitad del volumen de cada condensador, pero de una disposición distinta en cada uno (ver figura). Despreciando todos los efectos de borde:

- Para cada condensador determine el vector densidad de corriente \vec{J} , vector campo eléctrico \vec{E} y vector desplazamiento \vec{D} dentro de él.
- Para el condensador de la derecha, determine las densidades de polarización y carga libre donde correspondan.
- Determine la capacitancia equivalente que forman ambos condensadores.
- Determine la corriente que sale por la fuente y la resistencia equivalente del sistema.

**Problema 17.12**  

Dos condensadores cilíndricos de radio interior a y exterior $3a$, y largo L , han sido llenados con dos materiales dieléctricos ϵ_1 y ϵ_2 de distinta forma (ver figura). Si los condensadores son conectados de la forma que se indica en la figura, determine la capacidad equivalente entre los puntos A y B .



II. Soluciones

Solución 17.1

a) Dada la simetría esférica del problema, es posible usar ley de Gauss de la siguiente forma

- $r \leq R$

$$\iint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}} = 0 \implies \vec{D} = 0$$

Por lo tanto $\vec{E} = 0$ (es un conductor)

- $R_1 \leq r \leq R_2$

$$\iint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}} \implies D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q \implies \vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

Por lo tanto

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \hat{r}$$

- $r \geq R_2$

$$\iint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}} \implies D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q \implies \vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

Por lo tanto

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{D} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

- b) Las densidades de polarización están ubicadas en

$$\sigma_{pol}(R_1) = \vec{P}(R_1) \cdot (-\hat{r}) = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon} \frac{Q}{4\pi R_1^2} \hat{r} \cdot (-\hat{r}) = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon} \frac{Q}{4\pi R_1^2}$$

$$\sigma_{pol}(R_2) = \vec{P}(R_2) \cdot \hat{r} = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon} \frac{Q}{4\pi R_2^2} \hat{r} \cdot \hat{r} = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon} \frac{Q}{4\pi R_2^2}$$

Mientras que la densidad de carga libre es

$$\sigma_{libre}(R_1) = \vec{D}(R_1) \cdot \hat{r} = \frac{Q}{4\pi R_1^2} \hat{r} \cdot \hat{r} = \frac{Q}{4\pi R_1^2}$$

- c) La diferencia de potencial entre el infinito y la esfera es

$$V_1(R_1) = \int_{R_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R_2}$$

En ausencia de dieléctrico se tendría que la tensión V_2 es

$$V_2(R_1) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R_1} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R_2}$$

Nótese que el último término para ambos potenciales es igual, por lo que el término que indica cual es mayor es el primer término de la suma, ahora dado que $\epsilon > \epsilon_0$, se tiene que

$$\frac{1}{\epsilon_0} > \frac{1}{\epsilon} \implies \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) > \frac{Q}{4\pi \epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \implies V_2(R_1) > V_1(R_1)$$

El potencial en la esfera es mayor en ausencia del dieléctrico.



Solución 17.2 

- a) Para $r < R$ se tiene $\vec{E} = 0$ ya que es un conductor. Para $r > R$ es necesario usar ley de Gauss de la siguiente forma

$$\iint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{libre} \implies D_1(r) \cdot 2\pi r^2 + D_2(r) \cdot 2\pi r^2 = Q$$

Adicionalmente, dado que por simetría el campo eléctrico es completamente tangencial a la interfase de los medios, se tiene que $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}$. Luego $D_1(r) = \epsilon_1 E(r)$ y $D_2(r) = \epsilon_2 E(r)$, por lo que se puede despejar la expresión del campo eléctrico para $r > R$ como

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{2\pi r^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \hat{r}$$

- b) La densidad de carga libre dependerá del hemisferio de la esfera, de modo que para el hemisferio inferior

$$\sigma_{l1} = \vec{D}_1(r) \cdot \hat{n} \Big|_{r=R} = \frac{\epsilon_1 Q}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \hat{r} \cdot \hat{r}$$

y de la misma forma para el hemisferio superior

$$\sigma_{l2} = \vec{D}_2(r) \cdot \hat{n} \Big|_{r=R} = \frac{\epsilon_2 Q}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \hat{r} \cdot \hat{r}$$

En cuanto a las cargas de polarización, hay que calcular previamente el vector polarización en cada medio

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E} \implies \vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$$

De modo que

$$\vec{P}_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E} = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0) Q}{2\pi r^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \hat{r}$$

Entonces,

$$\sigma_{P1} = \vec{P}_1(r) \cdot \hat{n} \Big|_{r=R} = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0) Q}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \hat{r} \cdot (-\hat{r}) = -\frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0) Q}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

De forma análoga

$$\sigma_{P2} = -\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0) Q}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

Notar el hecho que la normal en el caso de la densidad de carga libre apunta desde el conductor al dieléctrico y en el caso de la densidad de carga de polarización apunta en el sentido inverso.

- c) La carga de polarización total está dada por

$$Q_P = 2\pi R^2 \sigma_{P1} + 2\pi R^2 \sigma_{P2} = -\frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\epsilon_0) Q}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \implies \left| \frac{Q_P}{Q} \right| = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \approx \frac{39}{40}$$

Luego la carga neta vale

$$Q_{neta} = Q + Q_P = \frac{Q}{40} > 0$$



Solución 17.3 P ✓

Para iniciar el problema se necesita saber la capacitancia de un condensador cilíndrico que posee un medio con constante ϵ_i en un interior, de radios a y b y de largo H . Para ello se usa la ley de Gauss para el espacio entre los cilindros ($a < r < b$).

$$\iint_{\Omega} \vec{D}(r) \cdot d\vec{S} = Q \implies D(r)2\pi r H = Q \implies \vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_i r H} \hat{r}$$

Luego

$$\Delta V = V(a) - V(b) = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\epsilon_i r H} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_i H} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Por lo que

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\epsilon_i H}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

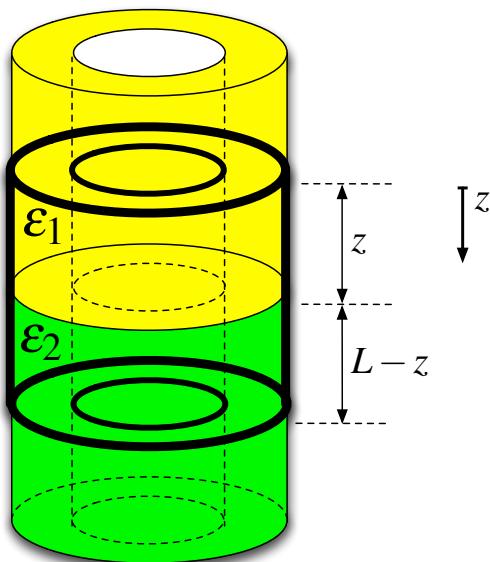


Figura 17.1: Dieléctricos dentro del Condensador Cilíndrico

Para lo que sigue del análisis se debe considerar la Figura 17.1. Se ha puesto el dieléctrico 1 una distancia z dentro del condensador. La capacitancia de este sistema es equivalente a la de dos condensadores en paralelo, luego la capacitancia total del sistema es igual a su suma, es decir:

$$C_T = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\epsilon_1 z}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{2\pi\epsilon_2(L-z)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}((\epsilon_1 - \epsilon_2)z + \epsilon_2 L)$$

Por lo tanto la energía de ese condensador está dada por

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_T(z)}$$



Luego, considerando que la carga es constante, la fuerza que ejerce el sistema es

$$\vec{F}_{sist} = -\nabla U = -\frac{1}{2}Q^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{C_T(z)} \right) \hat{z} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_T(z)^2} \frac{\partial C_T(z)}{\partial z} \hat{z}$$

Reduciendo la expresión a

$$\vec{F}_{sist} = \frac{1}{4\pi} Q^2 \ln \left(\frac{b}{a} \right) \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{((\epsilon_1 - \epsilon_2)z + \epsilon_2 L)^2} \hat{z}$$

Nótese lo siguiente, como $\epsilon_1 < \epsilon_2$ la fuerza que efectúa el sistema apunta en el sentido de negativo de z , por lo que el dieléctrico 2 intenta expulsar al dieléctrico 1 del condensador. En efecto, este resultado es consecuencia de que el sistema busque su mínima energía, la se obtiene con el condensador completamente lleno del dieléctrico con constante ϵ_2 . Por lo tanto, para poder introducir el dieléctrico 1 una distancia $z = \frac{1}{2}L$ dentro del condensador se debe aplicar una fuerza del mismo valor en el sentido contrario a la que se siente en ese punto, es decir, la fuerza buscada vale

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_{sist} \Big|_{z=\frac{1}{2}L} = \frac{Q^2}{\pi L^2} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2} \hat{z}$$

Solución 17.4

- a) Se debe encontrar el valor de $V(x)$, sabiendo que el potencial cumple la siguiente condición

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} + k \frac{dV(x)}{dx} = 0$$

Con $k > 0$ y $0 \leq x \leq d$. Para ello se asume que la solución de la EDO es $V(x) = Ae^{\alpha x} + B$ con A , B y α constantes no nulas por determinar. En efecto, reemplazando la solución en la ecuación anterior

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} + k \frac{dV(x)}{dx} = A\alpha^2 e^{\alpha x} + kA\alpha e^{\alpha x} = A\alpha e^{\alpha x}(\alpha + k) = 0$$

De la ecuación anterior se obtiene

$$\alpha = -k$$

Luego, la solución se transforma en $V(x) = Ae^{-kx} + B$ y las otras constantes pueden ser despejadas con las condiciones de borde

$$V(0) = 0 \implies A + B = 0 \implies A = -B$$

$$V(d) = V_0 \implies Ae^{-kd} + B = V_0$$

Despejando A y B de las ecuaciones anteriores

$$A = \frac{V_0}{e^{-kd} - 1}$$

$$B = -\frac{V_0}{e^{-kd} - 1}$$

Finalmente la solución es

$$V(x) = \frac{V_0(e^{-kx} - 1)}{e^{-kd} - 1}$$



- b) Dado que se conoce el potencial, es posible conocer el campo eléctrico dentro de las placas

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{d}{dx} \left(\frac{V_0(e^{-kx} - 1)}{e^{-kd} - 1} \right) \hat{x} = \frac{V_0 k e^{-kx}}{e^{-kd} - 1} \hat{x}$$

Asumiendo que el material es lineal, isótropo y no homogéneo se tiene que

$$\vec{D} = \epsilon(x) \vec{E} = \epsilon(x) \cdot \frac{V_0 k e^{-kx}}{e^{-kd} - 1} \hat{x}$$

Dada la ausencia de carga libre dentro de las placas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \implies \frac{d}{dx} (\epsilon(x) e^{-kx}) = 0 \implies \epsilon(x) e^{-kx} = C$$

Usando la condición de borde $\epsilon(x=0) = \epsilon_1 \implies C = \epsilon_1$ por lo tanto

$$\epsilon(x) = \epsilon_1 e^{kx}$$

- c) La densidad de carga libre en la placa a potencial V_0 dada por $\sigma_l = \vec{D} \cdot \hat{n} \Big|_{x=d}$, de modo que

$$\sigma_l = e^{kx} \cdot \frac{V_0 k e^{-kx}}{e^{-kd} - 1} \hat{x} \cdot (-\hat{x}) = -\frac{k V_0}{e^{-kd} - 1}$$

Solución 17.6

- a) La capacitancia de un condensador de placas paralelas es

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

donde ϵ es la permitividad del medio que lleva dentro el condensador, A es el área de las placas y d es la separación entre ellas. Si un dieléctrico se pone parcialmente una distancia x en el condensador, se forman dos condensadores en paralelo, de capacitancia

$$C_1 = \frac{\epsilon a x}{b}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 a (a-x)}{b}$$

Por lo que la capacitancia total (condensadores en paralelo) es

$$C_T = C_1 + C_2 = \frac{a}{d} (\epsilon x + (a-x)\epsilon_0)$$

- b) Por otro lado, se tiene que la definición capacitancia es

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Por lo que si el condensador está conectado a una batería de voltaje V_0 y tiene una carga Q^* se cumple que

$$C_T = \frac{a}{b} (\epsilon x + (a-x)\epsilon_0) = \frac{Q^*}{V_0} \implies x = \frac{1}{\epsilon - \epsilon_0} \left(\frac{Q^* b}{V_0 a} - \epsilon a \right)$$



- d) Dada la dependencia $Q = Q(x)$ se tiene que la carga varía en el rango $x \in [0, a]$, si se usa la parte anterior, se obtiene que

$$Q(x) = \frac{a}{d}((\epsilon - \epsilon_0)x - \epsilon_0 a)$$

lo cual es una función lineal, y como $\epsilon \geq \epsilon_0$ se tiene la función $Q(x)$ alcanza su mínimo en $x = 0$ y su máximo en $x = a$. Por lo que

$$Q(x=0) = \frac{\epsilon_0 a^2}{d} \leq Q(x) \leq \frac{\epsilon a^2}{d} = Q(x=a)$$

Nótese que físicamente esto significa que el condensador alcanza su mínima carga vacío y su máxima carga lleno de dieléctrico.

Solución 17.7

- a) Calcular las densidades de carga de polarización en el espacio. Para resolver este problema es necesario dividir en dos áreas, un radio menor y mayor al radio de esfera b .

- $r > b$ se tiene que hay vacío por lo tanto no existe el vector polarización.
- $r \leq b$, de acuerdo a la ley de Gauss

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \iiint \rho_0 r dV \\ D(r) \cdot 4\pi r^2 &= 4\pi\rho_0 \frac{r^4}{4} \\ \vec{D} &= \frac{\rho_0 r^2}{4} \hat{r} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon} \hat{r}$$

Utilizando $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$ se obtiene

$$\vec{P} = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)\rho_0 r^2}{4\epsilon} \hat{r}$$

Luego, la densidad de carga de superficial polarización es

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \vec{P} \cdot \hat{n}|_{r=b} \\ &= \frac{(\epsilon - \epsilon_0)\rho_0 b^2}{4\epsilon} \end{aligned}$$

y la densidad volumétrica polarización es

$$\begin{aligned} \rho_p &= -\nabla \cdot \vec{P} \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (P_r \cdot r^2) \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{(\epsilon - \epsilon_0)\rho_0 r^4}{4\epsilon} \right) \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{(\epsilon - \epsilon_0)\rho_0 r^3}{\epsilon} \\ &= \frac{-(\epsilon - \epsilon_0)\rho_0 r}{\epsilon} \end{aligned}$$



- b) Calcular la energía electrostática del sistema de cargas. Para esto es necesario encontrar \vec{D} y \vec{E} para un $r > b$.

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \iiint \rho_0 r dV \\ D(r) \cdot 4\pi r^2 &= 4\pi\rho_0 \frac{b^4}{4} \\ \vec{D} &= \frac{\rho_0 b^4}{4r^2} \hat{r}\end{aligned}$$

Entonces,

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 b^4}{4\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Ya con esto es posible encontrar la energía del sistema en todo el espacio

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2} \iint_{\text{Todo el Espacio}} \vec{D} \cdot \vec{E} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi D(r) \cdot E(r) r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi d\rho \\ &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^{2\pi} \int_0^\pi D(r) \cdot E(r) r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi d\rho + \frac{1}{2} \int_b^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi D(r) \cdot E(r) r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi d\rho \\ &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho_0 r^2}{4} \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon} r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi d\rho + \frac{1}{2} \int_b^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho_0 b^4}{4r^2} \frac{\rho_0 b^4}{4\epsilon_0 r^2} r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi d\rho \\ &= 2\pi \int_0^b \epsilon \left(\frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon} \right)^2 r^2 dr + 2\pi \int_b^\infty \epsilon_0 \left(\frac{\rho_0 b^4}{4\epsilon_0 r^2} \right) r^2 dr \\ &= 2\pi \left[\frac{\epsilon \rho_0^2}{16\epsilon^2} \int_0^b r^6 dr + \frac{\epsilon_0 \rho_0^2 b^8}{16\epsilon_0^2} \int_b^\infty \frac{r^2}{r^4} dr \right] \\ &= \frac{\pi \rho_0^2 b^7}{8} \left(\frac{1}{7\epsilon} + \frac{1}{\epsilon_0} \right)\end{aligned}$$

Solución 17.11

- a) Como sistema de referencia no daremos z creciente hacia abajo. Para el condensador de la izquierda:

$$J_{1n} = J_{2n} \implies \vec{J}_1 = \vec{J}_2 = \vec{J}$$

(vector densidad de corriente constante en ambos medios). Suponiendo estado estacionario dentro del condensador

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \implies \frac{dJ}{dz} = 0 \implies \vec{J} = A\hat{z}$$



donde A es una constante por determinar. Por lo tanto el campo eléctrico en cada medio está dado por

$$\vec{E}_1 = \frac{A}{g_1} \hat{z} , \quad \vec{E}_2 = \frac{A}{g_2} \hat{z}$$

La constante A puede ser determinada como

$$V(z=2d) - V(z=0) = -V_0 = - \int_0^d \frac{A}{g_1} dz - \int_d^{2d} \frac{A}{g_2} dz = -\frac{Ad}{g_1} - \frac{Ad}{g_2} \implies A = \frac{V_0 g_1 g_2}{d(g_1 + g_2)}$$

Por lo tanto

$$\vec{J} = \frac{V_0 g_1 g_2}{d(g_1 + g_2)} \hat{z}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{V_0 g_2}{d(g_1 + g_2)} \hat{z} , \quad \vec{E}_2 = \frac{V_0 g_1}{d(g_1 + g_2)} \hat{z}$$

$$\vec{D}_1 = \frac{\epsilon_1 V_0 g_2}{d(g_1 + g_2)} \hat{z} , \quad \vec{D}_2 = \frac{\epsilon_2 V_0 g_1}{d(g_1 + g_2)} \hat{z}$$

Para el condensador de la derecha:

$$E_{1t} = E_{2t} \implies \vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}$$

(campo eléctrico constante en ambos medios). Luego, dado que no hay densidades volumétricas de carga del condensador

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \implies \frac{dE}{dz} = 0 \implies \vec{E} = C \hat{z}$$

donde C es una constante por determinar. La constante C puede ser determinada como

$$V(z=2d) - V(z=0) = -V_0 = - \int_0^{2d} C dz \implies C = \frac{V_0}{2d}$$

Por lo tanto

$$\vec{E} = \frac{V_0}{2d} \hat{z}$$

$$\vec{J}_1 = \frac{g_1 V_0}{2d} \hat{z} , \quad \vec{J}_2 = \frac{g_2 V_0}{2d} \hat{z}$$

$$\vec{D}_1 = \frac{\epsilon_1 V_0}{2d} \hat{z} , \quad \vec{D}_2 = \frac{\epsilon_2 V_0}{2d} \hat{z}$$

b) Para el condensador de la derecha, se tienen las siguientes densidades polarización

$$\sigma_{P1}(z=0) = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{V_0}{2d} \hat{z} \cdot -\hat{z} = -(\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{V_0}{2d}$$

$$\sigma_{P1}(z=2d) = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{V_0}{2d} \hat{z} \cdot \hat{z} = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{V_0}{2d}$$

$$\sigma_{P2}(z=0) = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{V_0}{2d} \hat{z} \cdot -\hat{z} = -(\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{V_0}{2d}$$

$$\sigma_{P2}(z=2d) = \epsilon_2 \frac{V_0}{2d} \hat{z} \cdot \hat{z} = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{V_0}{2d}$$



Mientras que las de carga libre son

$$\sigma_{L1}(z = 0) = \epsilon_1 \frac{V_0}{2d} \hat{z} \cdot \hat{z} = \epsilon_1 \frac{V_0}{2d}$$

$$\sigma_{L1}(z = 2d) = \epsilon_1 \frac{V_0}{2d} \hat{z} \cdot -\hat{z} = \epsilon_1 \frac{V_0}{2d}$$

$$\sigma_{L2}(z = 0) = \epsilon_2 \frac{V_0}{2d} \hat{z} \cdot \hat{z} = \epsilon_2 \frac{V_0}{2d}$$

$$\sigma_{L2}(z = 2d) = \epsilon_2 \frac{V_0}{2d} \hat{z} \cdot -\hat{z} = -\epsilon_2 \frac{V_0}{2d}$$

No hay densidades volumétricas de ningún tipo dentro del condensador.

- c) En este caso hay que notar que el capacitor de la izquierda puede ser dividido en dos capacitores en serie, mientras que el capacitor de la derecha puede ser dividido en dos en paralelo. Usando el resultado conocido de la capacitancia de un condensador de placas paralelas $C = \frac{\epsilon A}{L}$, se tiene que:

$$C_T = \underbrace{\frac{1}{\frac{d}{\epsilon_1 4a^2} + \frac{d}{\epsilon_2 4a^2}}}_{\text{Capacitancia de la izquierda}} + \underbrace{\frac{\epsilon_1 2a^2}{2d} + \frac{\epsilon_2 2a^2}{2d}}_{\text{Capacitancia de la derecha}} = \frac{4a^2 \epsilon_1 \epsilon_2}{d(\epsilon_1 + \epsilon_2)} + \frac{\epsilon_1 a^2}{d} + \frac{\epsilon_2 a^2}{d}$$

- d) La corriente total que sale de la fuente puede ser determinada integrando los vector densidad de corriente que pasa por el condensador de la izquierda (\vec{J}) y los dos vectores densidad de corriente que pasan por el condensador de la derecha (\vec{J}_1 y \vec{J}_2). Por lo tanto:

$$I = \int_0^{2a} \int_0^{2a} \frac{V_0 g_1 g_2}{d(g_1 + g_2)} dx dy + \int_0^{2a} \int_0^a \frac{g_1 V_0}{2d} dx dy + \int_0^{2a} \int_a^{2a} \frac{g_2 V_0}{2d} dx dy = 4a^2 \frac{V_0 g_1 g_2}{d(g_1 + g_2)} + 2a^2 \frac{g_1 V_0}{2d} + 2a^2 \frac{g_2 V_0}{2d}$$

$$I = \frac{V_0 a^2 g_1 g_2}{d} \left(\frac{4}{g_1 + g_2} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_1} \right)$$

Por lo tanto la resistencia equivalente es

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{d}{a^2 g_1 g_2 \left(\frac{4}{g_1 + g_2} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_1} \right)}$$



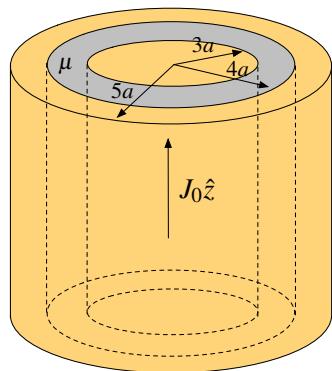
18

Campo Magnético en Medios Materiales

I. Problemas Propuestos

Problema 18.1

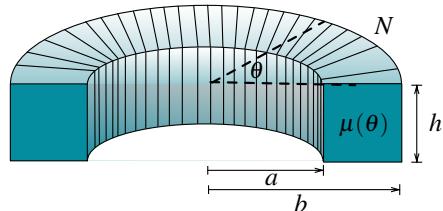
Se tiene un dispositivo de simetría cilíndrica que consta de un conductor cilíndrico macizo de radio $3a$ rodeado por un conductor cilíndrico hueco de radio interior $4a$ y radio exterior $5a$ por el cilindro central pasa una densidad de corriente uniforme $\vec{J} = J_0 \hat{z}$ y por el cilindro hueco exterior circula una intensidad de corriente de igual magnitud pero de signo opuesto. El medio entre ambos conductores tiene permeabilidad $\mu > \mu_0$. Calcule el campo magnético en todas partes.



Problema 18.2

Considere una bobina toroidal de sección rectangular de N espiras, por cada una de las cuales circula una corriente I . El radio interior de la bobina es a y el exterior es b y la altura es h . El núcleo de esta bobina es de un material inhomogéneo en tal forma que su permeabilidad magnética μ depende tan solo del ángulo polar θ y satisface

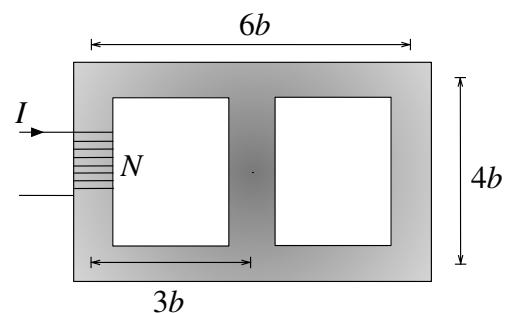
$$\frac{\mu_0}{\mu} = 1 + k \cos^2 \theta$$



Determine la intensidad magnética \vec{H} en el interior de la bobina.

Problema 18.3

Un material ferromagnético tiene la forma que se indica en la figura, donde la sección transversal es un cuadrado de lado de $a = 2$ cm. El resto de las dimensiones se muestran en la figura con $b = 2,5$ cm. El enrollado tiene $N = 500$ vueltas, la corriente que circula es $I = 0,3$ A y $\mu = 2500\mu_0$. Calcule el flujo neto en la rama central y en la rama del lado derecho. Desprecie cualquier pérdida de flujo fuera del material ferromagnético.

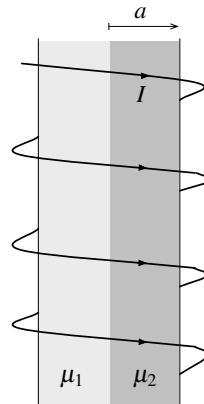


Problema 18.4   

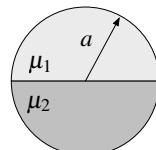
Un solenoide infinito de radio a que tiene m espiras por unidad de largo, lleva corriente I . La permeabilidad magnética del material al interior del solenoide es

$$\mu = \begin{cases} \mu_1 & \text{si } 0 < \theta \leq \pi \\ \mu_2 & \text{si } \pi < \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Encuentre el campo magnético, la intensidad magnética en todo el espacio, la magnetización de los materiales y las densidades de corriente.



Vista Frontal

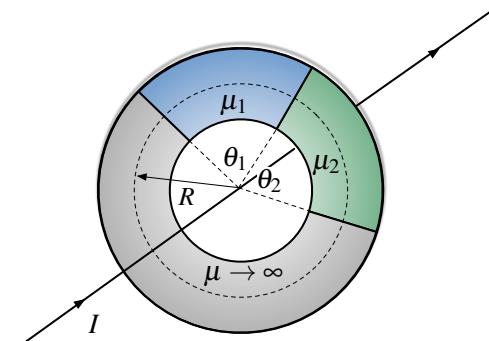


Corte Transversal

Problema 18.5  

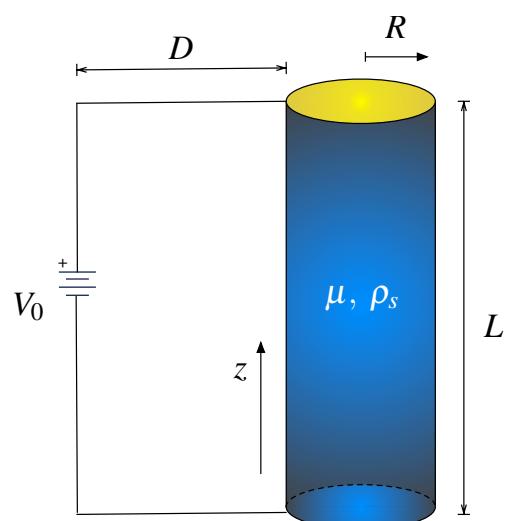
Considere un toroide de sección transversal circular A y de radio medio R como se muestra en la Figura. El toroide está compuesto por tres medios de permeabilidades μ , μ_1 y μ_2 (ver Figura). Un cable con corriente I atraviesa el toroide por su centro por eje perpendicular al toroide. Para efectos de cálculo, puede considerar que $\mu \rightarrow \infty$.

- Calcule \vec{H} y \vec{B} , para cada material si las permeabilidades de los materiales son lineales, uniformes e isotrópicas.
- Si las permeabilidades de los materiales son lineales uniformes e isotrópicas ¿existirían densidades de corriente de magnetización?. Si existieran, calcúlelas.
- ¿Cómo cambia (explique) \vec{H} , \vec{B} y las corrientes de magnetización si $\mu_1 = \alpha r$ o $\mu_1 = \alpha \theta$?

**Problema 18.6**  

El sistema de la Figura representa un conductor cilíndrico de resistividad $\rho = \rho_s$ el cual está sometido a una diferencia de potencial V_0 . Este conductor posee además características magnéticas, con una permeabilidad relativa $\mu(r) = \mu_0(1 - \frac{r}{R})$, tal como se muestra en la Figura. Suponiendo que la corriente se distribuye en forma homogénea al interior del conductor y que $D \gg L \gg R$, se pide

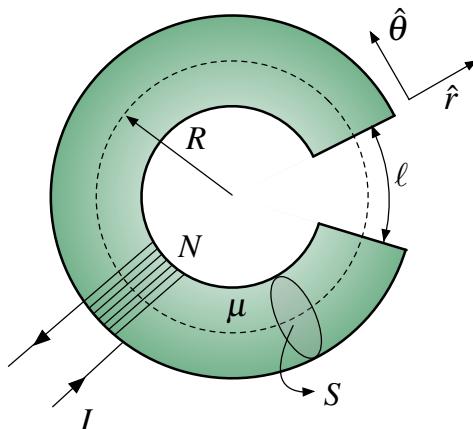
- Estimar campos \vec{H} y \vec{B} en el interior y exterior (pero en las cercanías) del conductor.
- Estimar la magnetización \vec{M} .
- Determinar las densidades de corrientes de magnetización y libre en el conductor.



Problema 18.7

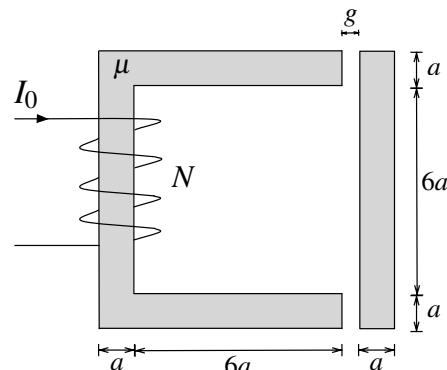
Considere N vueltas de un alambre conductor se han enrollado sobre un toroide de hierro dulce de sección transversal S y permeabilidad μ . El radio medio del toroide es R y posee un entrehierro de longitud ℓ como se muestra en la Figura. La corriente I que circula por el alambre es suficientemente grande de manera que la magnetización \vec{M} adopta su valor de saturación $\vec{M}_s = M_s \hat{\theta}$ en el hierro dulce.

- Encuentre los valores de \vec{H} y \vec{B} en todo el toroide.
- Cuando la corriente I se interrumpe, la magnitud de la magnetización decrece a su valor remanente $\vec{M}_r = M_r \hat{\theta}$ en el hierro dulce. Encuentre los valores de \vec{H} y \vec{B} en esta situación.

**Problema 18.8**

Considere un toroide de permeabilidad μ de sección cuadrada a^2 y de largo $8a$. El toroide cuenta con dos entrehierros de una longitud muy pequeña g tal como y se muestra en la Figura. En uno de sus extremos el toroide posee un enrollado de N vueltas, el cual está conectado a una fuente de corriente I_0 . Determine

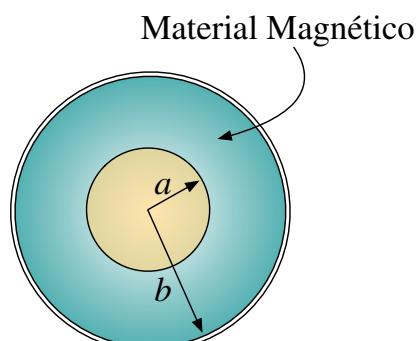
- El flujo magnético y la autoinductancia del sistema.
- Si el lado izquierdo con forma es U es fijo, la fuerza que siente el material de la derecha.

**Problema 18.9**

Considere una línea de transmisión coaxial llena de un material con permeabilidad magnética no lineal, con un conductor interno sólido de radio a y un conductor externo muy delgado, de radio interior b según se muestra en la figura. Se sabe que en el conductor interno circula una corriente I_0 hacia afuera de la hoja, y vuelve en dirección opuesta por el conductor externo. En ambos conductores la corriente se reparte en forma homogénea, y ambos se pueden suponer muy largos. Si la curva de magnetización del material se puede aproximar como

$$B = \frac{1,6H}{1000 + H}$$

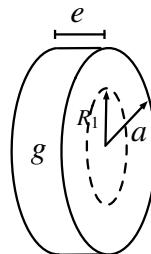
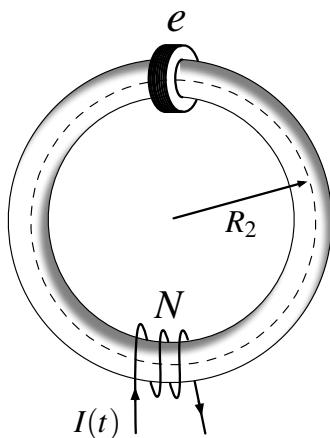
- Campo magnético en todo el espacio.
- Vector de magnetización en el medio material.



Problema 18.10 ★ ✓

Un circuito magnético es un toroide de material magnéticamente lineal de permeabilidad μ , de sección circular de radio R_1 , siendo el radio de la circunferencia media del toro R_2 ($R_2 \gg R_1$). El toroide tiene un entrehierro de longitud e , que está ocupado por un disco conductor de radio a ($a > R_1$) y espesor e colocado simétricamente en el entrehierro. La permeabilidad del disco es μ_0 y su conductividad g . El circuito magnético está alimentando por un arrollamiento de N espiras por las que circula una corriente $I(t) = kt$ donde k es una constante.

- Calcular \vec{B} y \vec{H} en las dos regiones del toroide.
- Encontrar la potencia disipada en el disco conductor.



Disco Conductor

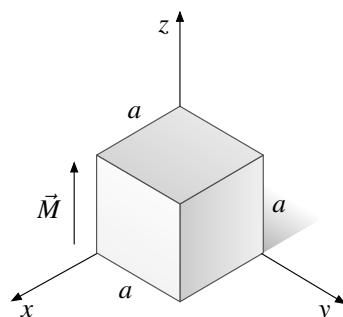
Problema 18.11 ♦ ✓

- Un cubo de lado a está hecho de un material ferromagnético el cual está permanentemente magnetizado, con una magnetización igual

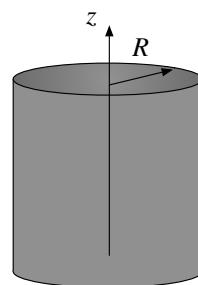
$$\vec{M} = \frac{M_0 x}{a} \hat{z}$$

Encuentre las densidades de corriente de magnetización presentes en el cubo.

- Se tiene un cilindro infinitamente largo, de radio R con su eje coincidente con el eje z y con una magnetización constante $\vec{M} = M_0 \hat{x}$ perpendicular a su eje. Determine las corrientes de magnetización (volumétricas y superficiales) y el campo magnético en el eje del cilindro.



(a)



(b)



II. Soluciones

Solución 18.3

Para resolver este problema se usará la técnica de reluctancias. En primera instancia, es necesario definir reluctancia como

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A}$$

donde l es el largo, μ la permeabilidad y A la sección transversal del medio por donde pasa un respectivo flujo. La idea de este método es emular un circuito simple con resistencias, en el cual la fuente de tensión es el equivalente al enrollado con corriente ($V \rightarrow NI$), las corrientes es equivalente al los flujos magnéticos ($I \rightarrow \Phi$) y las resistencias a las reluctancias ($R \rightarrow \mathcal{R}$).

Para aplicar este método, es necesario identificar las reluctancias en el circuito magnético, para ello se verifica en que ramales del circuito pasa el mismo flujo.

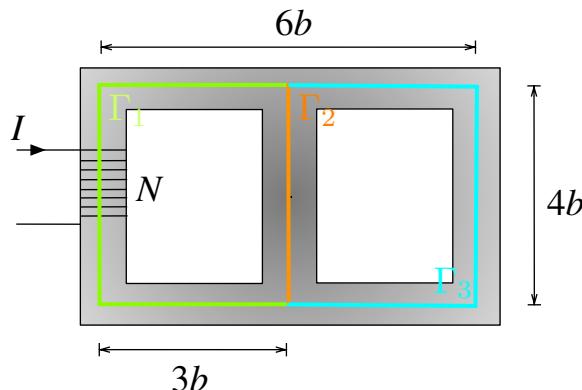


Figura 18.1: Determinación de Reluctancias.

En la Figura 18.1, es posible identificar los caminos por los cuales circula el mismo flujo. Cada uno de esos caminos Γ_1 , Γ_2 y Γ_3 tienen asociadas los siguientes valores de reluctancias:

$$\mathcal{R}_1 = \frac{10b}{\mu A} \quad \mathcal{R}_2 = \frac{4b}{\mu A} \quad \mathcal{R}_3 = \frac{10b}{\mu A}$$

Una vez determinado los valores de las reluctancias, se procede a plantear el circuito análogo.

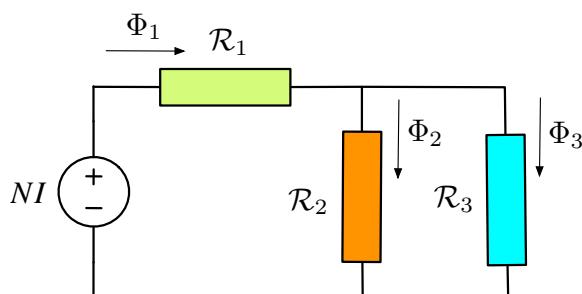


Figura 18.2: Circuito Equivalente.



Las incógnitas en este circuito son los flujos Φ_1 , Φ_2 y Φ_3 como es mostrado en la Figura 18.2. Planteando la ley de Kirchoff de Nodos se obtiene que

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$$

Mientras si se plantea la ley de Kirchoff de Voltajes

$$NI = \mathcal{R}_1\Phi_1 + \mathcal{R}_2\Phi_2$$

$$\mathcal{R}\Phi_2 = \mathcal{R}_3\Phi_3$$

Usando las tres ecuaciones anteriores es posible despejar los valores pedidos, de modo que

$$\Phi_2 = \frac{NI_0\mu A}{18b}$$

$$\Phi_3 = \frac{NI_0\mu A}{45b}$$

Solución 18.4

Dada la geometría del problema, el campo magnético provocado por el solenoide debe ser paralelo al eje del cilindro. Recuérdese en el solenoide ideal e infinitamente largo se hace el supuesto que el campo magnético es nulo fuera del mismo.

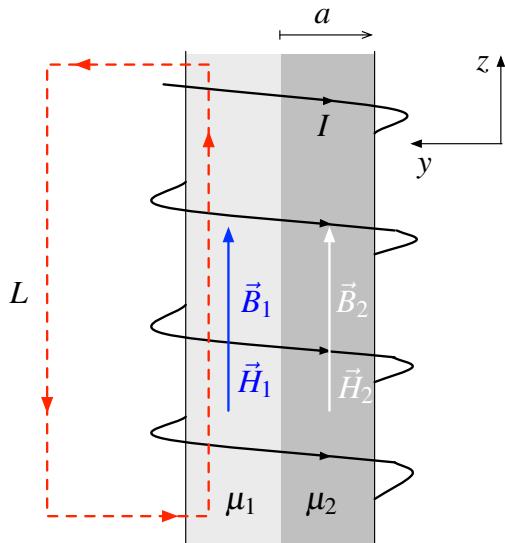


Figura 18.3: Cálculo de Campo Magnético Usando Ley de Ampere.

En la Figura 18.3 se muestra el rectángulo con el cual puede ser usada la Ley de Ampère de la siguiente forma

$$\oint \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = I_{\text{libre}} \implies H_1 \cdot L = mLI \implies \vec{H}_1 = mI\hat{z}$$



Análogamente, es posible hacer el mismo análisis para \vec{H}_2 , por lo que también se puede concluir

$$\vec{H}_2 = mI\hat{z}$$

El resultado anterior es coherente con la condición de borde $\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}_{\text{libre}}$ ya que en la interfase de los medios no hay corrientes libres circulando por ende $\vec{H}_1 = \vec{H}_2$. Por otro lado, los campos magnéticos están dados por

$$\vec{B}_1 = \mu_1 mI\hat{z} \quad \vec{B}_2 = \mu_2 mI\hat{z}$$

A partir de lo anterior, se procede a determinar las magnetizaciones de cada medio, las cuales cumplen $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, por lo tanto

$$\vec{M}_1 = \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right) mI\hat{z} \quad \vec{M}_2 = \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right) mI\hat{z}$$

Ahora, para encontrar las densidades de corrientes presentes se usan las definiciones $\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n}$ y $\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$. Hay que tener precaución debido a que los medios tienen más de una normal.

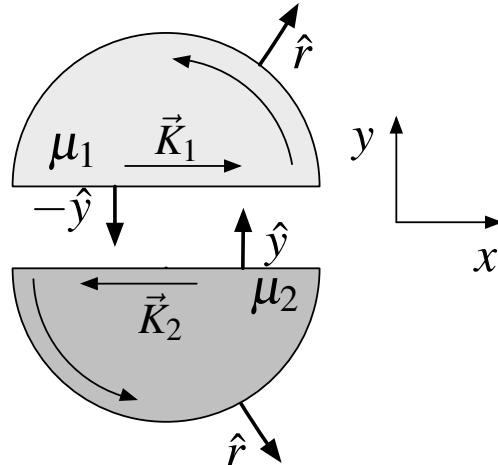


Figura 18.4: Cálculo de Corrientes de Magnetización.

Siguiendo la Figura 18.4, se pueden determinar las corrientes superficiales en la división son

$$\vec{K}_1 = \left[\left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right) mI\hat{z} \right] \times (-\hat{y}) = \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right) mI\hat{x}$$

$$\vec{K}_2 = \left[\left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right) mI\hat{z} \right] \times \hat{y} = - \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right) mI\hat{x}$$

Mientras que en los mantos se tiene que

$$\vec{K}_1 = \left[\left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right) mI\hat{z} \right] \times \hat{r} = \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right) mI\hat{\theta}$$

$$\vec{K}_2 = \left[\left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right) mI\hat{z} \right] \times \hat{r} = \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right) mI\hat{\theta}$$

Finalmente, dado que \vec{M} es constante $\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0$.



Solución 18.7 

- a) En primera instancia, debido al solenoide enrolado en el toroide, existe un campo magnético confinado dentro del material magnético y también en el entrehierro. A priori, se supone que existen los campos \vec{H}_1 y \vec{B}_1 en el hierro dulce y los campos \vec{H}_0 y \vec{B}_0 en el entrehierro. Adicionalmente, en este tipo de problema se suele suponer que el campo magnético es más bien homogéneo dentro del toroide, por lo cual es una buena aproximación es tomar el camino medio del mismo para calcular \vec{H} y \vec{B} en todos los puntos.

Entonces, usando Ley de Ampère al camino medio de radio R y usando el supuesto que $\vec{H}_1 = H_1 \hat{\theta}$ y $\vec{H}_0 = H_0 \hat{\theta}$ se obtiene que

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \implies H_1 \cdot (2\pi R - \ell) + H_0 \cdot \ell = NI$$

Dado que el hierro dulce alcanzó su máxima magnetización, se puede afirmar que

$$\vec{B}_1 = \mu_0(\vec{H}_1 + \vec{M}_s)$$

El paso clave del problema, es usar la siguiente condición de borde

$$(\vec{B}_0 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = 0 \implies B_{0n} - B_{1n} = 0 \implies B_{0n} = B_{1n}$$

Nótese que es posible aplicar esta condición ya que el campo magnético es perpendicular a las interfasas del problema (hierro-entrehierro y entrehierro-hierro), por ende \vec{B} debe ser continuo en esos puntos. Adicionalmente, como $\vec{H}_0 = \mu_0 \vec{B}_0$ se obtiene que

$$H_1(2\pi R - \ell) + H_1 d + M_s d = NI \implies \vec{H}_1 = \frac{NI - M_s \ell}{2\pi R} \hat{\theta}$$

En consecuencia,

$$\vec{H}_0 = \frac{NI - M_s \ell}{2\pi R} \hat{\theta} + \vec{M}_s \quad \vec{B}_1 = \vec{B}_0 = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{NI - M_s \ell}{2\pi R} \hat{\theta} + \vec{M}_s \right)$$

- b) Usando el resultado obtenido en la parte anterior, se tiene ahora que $I = 0$ y $\vec{M}_s \rightarrow \vec{M}_r$. Por lo que los valores de los campos son

$$\vec{H}_1 = -\frac{M_r \ell}{2\pi R} \hat{\theta}$$

$$\vec{H}_0 = \vec{M}_r - \frac{M_r \ell}{2\pi R} \hat{\theta}$$

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_0 = \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{M}_r - \frac{M_r \ell}{2\pi R} \hat{\theta} \right)$$



Parte VI

Respuestas

19

Respuestas

Capítulo 1

Problema	Respuestas
\mathcal{P} 1.1	a) $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(1-\sqrt{\alpha r})}{r^2} \hat{r}$ b) Si Γ es una circunferencia de radio R sobre el plano xy entonces $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ para ambos campos eléctricos (experimental y coulombiano). c) Para una esfera de R centrada en la carga, $\iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} (1 - \sqrt{\alpha R})$. Para el caso de un campo tradicional por Coulomb: $\iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$.
\mathcal{P} 1.2	$Q = \frac{e}{\sqrt{3}}$
\mathcal{P} 1.3	a) $\vec{E}(P) = 0$ b) $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2}\hat{x} + \hat{y} + \frac{1}{2}\hat{z}\right)$ c) $\vec{E}_{total} = \frac{q}{\pi\epsilon_0 a^2} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \hat{y}$
\mathcal{P} 1.4	$\vec{E}(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} (2\sqrt{3}\hat{x} - 2\hat{y}), V(0) = 0$
\mathcal{P} 1.5	$r = \frac{a}{\sqrt{2}}$
\mathcal{P} 1.6	$U = \frac{e^2 \ln(2)}{2\pi\epsilon_0 a}$

Capítulo 2

Problema Respuestas

(P) 2.1 $\vec{E}_{total} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{7}{\sqrt{5}} - 3 \right) \hat{z}$

(P) 2.2 $\cos \theta_{eq} = \frac{-qK + \sqrt{(qK)^2 + 4}}{2}$ con $K = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 lmg}$, $\theta(q \rightarrow \infty) = \frac{\pi}{2}$

(P) 2.3 $\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \left(k + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)}$

(P) 2.4 a) $V(C) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{\lambda}{4\epsilon_0}$ b) $\vec{E}(C) = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \right) \hat{y}$
c) $q = 2R\lambda$

(P) 2.5 a) $\vec{E} = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \left(\frac{z - \frac{L}{2}}{\left((z - \frac{L}{2})^2 + a^2 \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{z + \frac{L}{2}}{\left((z + \frac{L}{2})^2 + a^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{z}$
b) $V(O) - V(O') = \frac{\lambda a}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + a^2}} \right)$

(P) 2.6 a) $\vec{E}(A) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\hat{y} - \hat{x})$ b) $\vec{E}(B) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \hat{x}$

(P) 2.7 $\vec{E} = \frac{\lambda \hat{x}}{2\pi\epsilon_0 R} \left(\cos \frac{\pi}{8} - \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{8} \right)$

(P) 2.8 a) $\vec{E}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x-L} - \frac{1}{x} \right) \hat{x} & x > L \\ -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x-L} - \frac{1}{x} \right) \hat{x} & x < 0 \\ \infty & 0 \leq x \leq L \end{cases}$
b) $\vec{F} = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{(L+d)^2}{d(2L+d)} \right) \hat{x}$
c) $\ln \left(\frac{(L+d)^2}{d(2L+d)} \right) \approx \ln \left(1 + \frac{L^2}{d^2} \right) \approx \frac{L^2}{d^2}$ entonces $\vec{F} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{d^2} \hat{x}$

(P) 2.9 a) $\vec{E} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} \hat{z}$ b) $\vec{F} = \frac{\sigma \lambda}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + (d+a)^2} - \sqrt{R^2 + d^2}) \hat{z}$

(P) 2.10 $\vec{E}(0) = -\frac{\sigma}{3\epsilon_0} \hat{z}$

(P) 2.11 $V = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2})$

(P) 2.12 a) $\vec{E}(z) = -\frac{\sigma a^2(a-z)}{2\epsilon_0(a+z)}$ b) $W = -\frac{3Q\sigma_0 a}{4\epsilon_0}$



Problema	Respuestas
 2.13	$\vec{E} = \frac{\rho h}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha) \hat{z}$
 2.14	$\Delta \vec{g} = -\frac{6GM \cos^2 \alpha}{h^3(1 + \cos \alpha)} \hat{z}$
 2.15	<p>a) $\vec{E}(P_1) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left[L - (\sqrt{h^2 + R^2} - \sqrt{(L+h)^2 + R^2}) \right]$</p> <p>b) $\vec{E}(P_2) = \frac{\rho_0 R^2 L}{2\epsilon_0 h \sqrt{4h^2 + L^2}}$</p>
 2.16	<p>a) $\rho = -\frac{\epsilon_0 E_0}{a}$</p> <p>b) $\sigma_1 = \sigma_2 = \epsilon_0 E_0$</p>



Capítulo 3

	Problema	Respuestas
P	3.1	<p>a) $Q = \frac{8\pi\rho_0 R^3}{15}$</p> <p>b) $\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{15R^2\epsilon_0}(5R^2r - 3r^3)\hat{r} & r \leq R \\ \frac{2\rho_0 R^3}{15\epsilon_0 r^2}\hat{r} & r > R \end{cases}$</p> <p>c) $V(r) = \begin{cases} \frac{2\rho_0 R^2}{15\epsilon_0} - \frac{\rho_0(r^2 - R^2)}{15\epsilon_0 R^2} \frac{(7R^2 - 3r^2)}{4} & r \leq R \\ \frac{2\rho_0 R^3}{15\epsilon_0 r} & r > R \end{cases}$</p>
P	3.2	$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < R_1 \\ \frac{\rho_2(r^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 r}\hat{r} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \frac{\rho_2(R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 r}\hat{r} & R_2 \leq r \leq R_3 \\ \frac{\rho_2(R_2^2 - R_1^2) + \rho_4(r^2 - R_3^2)}{2\epsilon_0 r}\hat{r} & R_3 \leq r \leq R_4 \\ \frac{\rho_2(R_2^2 - R_1^2) + \rho_4(R_4^2 - R_3^2)}{2\epsilon_0 r}\hat{r} & r \geq R_4 \end{cases}$
P	3.4	<p>a) $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} + \frac{\rho D}{2\epsilon_0}\hat{z}$</p> <p>b) $\vec{E} = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} + \frac{\rho(D-2d)}{2\epsilon_0}\hat{z}$</p> <p>c) $\vec{E} = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} - \frac{\rho D}{2\epsilon_0}\hat{z}$</p>
P	3.5	$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{n\rho r}{3\epsilon_0}\hat{r} & 0 < r < a \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(r - (n+1)\frac{a^3}{r^2}\right)\hat{r} & a \leq r \leq b \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2}\left(b^3 - (n+1)a^3\right)\hat{r} & r \geq b \end{cases}$
P	3.6	$y(x) = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0 mv_x^2}x^2$ (trayectoria), $\tan \theta = \frac{q\sigma d}{m\epsilon_0 v_x^2}$ (ángulo).
P	3.7	$\vec{E} = \frac{\rho_0 \vec{d}}{3\epsilon_0}$
P	3.8	<p>a) $\vec{E} = -\frac{\rho x_0}{\epsilon_0}\hat{x}$</p> <p>b) $\sigma(\theta) = 2x_0\rho \cos \theta$</p>
P	3.9	<p>a) $\rho(r) = \frac{4E_0 r}{a^2}$</p> <p>b) $\vec{E}(r > a) = \frac{E_0 a^2}{\epsilon_0 r^2}\hat{r}, V(r > a) = \frac{E_0 a^2}{\epsilon_0 r}$</p> <p>c) $V(r \leq a) = \frac{E_0}{3\epsilon_0}\left(4a - \frac{r^3}{a^2}\right)$</p>
P	3.10	<p>a) $Q(r) = \begin{cases} \frac{2\pi h r^3}{3a} & r \leq R \\ \frac{2\pi h R^3}{3a} & r > R \end{cases}$</p> <p>b) $\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{3a\epsilon_0}\hat{r} & r \leq R \\ \frac{R^3}{3a\epsilon_0 r}\hat{r} & r > R \end{cases}$</p> <p>c) $V(r) = \begin{cases} -\frac{r^3}{9a\epsilon_0} & r \leq R \\ -\frac{R^3}{3a\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{3}\right] & r > R \end{cases}$</p>



Problema	Respuestas
P 3.11	<p>a) $\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} & r < R \\ \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{R\sigma}{\epsilon_0 r} \right) \hat{r} & r > R \end{cases}$ El campo eléctrico es discontinuo en $r = R$.</p> <p>b) $V(r) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) & r \leq R \\ \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{\lambda}{2\pi} + R\sigma \right) \ln\left(\frac{R}{r}\right) & r > R \end{cases}$ El potencial eléctrico es siempre continuo.</p>
P 3.12	<p>b) $\vec{E}(z) = \frac{\rho}{k\epsilon_0} (1 - e^{-kz}) \hat{z}$</p>
P 3.13	<p>a) $\vec{E}_T(h) = \frac{\lambda \sin(2\alpha)}{2\pi h \epsilon_0} \hat{x} + \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\lambda \cos(2\alpha)}{2\pi h \epsilon_0} \right) \hat{y}$</p> <p>b) $W = \frac{q\sigma h}{4\epsilon_0} + \frac{q\lambda \ln(2)}{2\pi \epsilon_0} \left(\frac{\sin 2\alpha}{\tan \alpha} - \cos 2\alpha \right)$</p>



Capítulo 4

Problema	Respuestas
(P) 4.1	a) $\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial z}\hat{z} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\epsilon_0 A}\hat{z}$ b) $W = -\frac{Q^2}{4C}$ c) $\Delta V = \frac{Q}{3C}$
(P) 4.2	a) $\sigma = -\frac{\lambda}{2\pi R}$ b) $\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}\hat{r} & r \leq R \\ 0\hat{r} & r > R \end{cases}$ c) $V(r) = \begin{cases} -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right) & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$
(P) 4.3	$b = \frac{3a}{4}$ entonces $U = \frac{27\pi\epsilon_0 E_0^2 a^3}{128}$
(P) 4.4	$q = \frac{QR_2}{R_1+R_2}$, $U_{min} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0(R_1+R_2)}$, $V_1(R_1) = V_2(R_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_1+R_2)}$
(P) 4.5	a) $q_{int} = -q$, $q_{ext} = q$, la densidad de carga interior es mayor en los puntos más cercanos a la carga. La densidad exterior es homogénea. b) No cambia. c) Toda la carga negativa $-q$ interior se acumula en el punto de contacto, luego al contacto, ambas se descargan y sólo queda la carga q positiva en la superficie exterior. d) La carga q' provoca que la densidad de carga en la esfera exterior cambie. La distribución de carga al interior se mantiene igual.
(P) 4.6	$V_B - V_A = 2V_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$
(P) 4.7	$U = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{5R_1} + \frac{1}{(R_2^3 - R_1^3)^{1/3}} \left[R_2^6 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - R_2^3(R_2^2 - R_1^2) + \frac{R_2^5 - R_1^5}{5} \right] \right\}$
(P) 4.8	a) $\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < a \\ \frac{V_0}{(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})r^2}\hat{r} & a \leq r < b \\ 0 & b \leq r < c \\ \frac{V_0}{(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})r^2}\hat{r}\hat{r} & r \geq c \end{cases}$ $V(r) = \begin{cases} V_0 & 0 < r < a \\ \frac{V_0(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})}{(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})r} & a \leq r < b \\ \frac{V_0}{(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})c} & b \leq r < c \\ \frac{V_0}{(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})r} & r \geq c \end{cases}$ $\sigma_a = \frac{\epsilon_0 V_0}{a^2(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})}$, $\sigma_b = -\frac{\epsilon_0 V_0}{b^2(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})}$ y $\sigma_c = \frac{\epsilon_0 V_0}{c^2(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})}$ b) $\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < a \\ \frac{V_0}{(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})r^2}\hat{r} & a \leq r < b \\ 0 & b \leq r < c \\ 0 & r \geq c \end{cases}$ $V(r) = \begin{cases} \frac{V_0}{(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) & 0 < r < a \\ \frac{V_0}{(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) & a \leq r < b \\ 0 & b \leq r < c \\ 0 & r \geq c \end{cases}$ $\sigma_a = \frac{\epsilon_0 V_0}{a^2(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})}$, $\sigma_b = -\frac{\epsilon_0 V_0}{b^2(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a})}$ y $\sigma_c = 0$
(P) 4.9	El potencial al interior de la burbuja es $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$, independiente si es o no esférica.
(P) 4.10	a) $Q_1^{\text{final}} = \frac{a}{a+b}(Q_1 + Q_2)$, $Q_2^{\text{final}} = \frac{b}{a+b}(Q_1 + Q_2)$, como $b > a$ entonces $Q_2^{\text{final}} > Q_1^{\text{final}}$ b) $C = \frac{1}{\frac{1}{d-b} - \frac{1}{d-a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$
(P) 4.11	$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_1 R_3 / R_2 R_4)}$



Problema	Respuestas
(P) 4.12	<p>a) $\sigma_a = 0, \sigma_b = \frac{Q}{2\pi b L}, \sigma_c = \frac{Q}{2\pi c L}, \sigma_d = 0$</p> <p>b) $V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{c}{b}\right) & r < b \\ \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{c}{r}\right) & b \leq r < c \\ 0 & r > c \end{cases}$</p> <p>c) $V(c) - V(b) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{c}{b}\right)$</p>
(P) 4.13	<p>a) $\lambda = \frac{Q}{L}$</p> <p>b) $\sigma_1 = \frac{-Q}{2\pi R_1 L}; \sigma_2 = \frac{Q}{2\pi R_2 L}$</p> <p>c) $\vec{E}(r < R_0) = \vec{E}(R_1 < r < R_2) = 0; \vec{E}(R_0 < r < R_1) = \frac{Q}{2\pi\rho L\epsilon_0} \hat{r} = \vec{E}(r > R_2)$</p> <p>d) $\sigma'_1 = \frac{-Q}{2\pi R_1 L}; \sigma'_2 = 0$</p> <p>e) $\vec{E}(r > R_2) = 0, \text{ en el resto de las zonas el campo permanece igual.}$</p> <p>f) $V = \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)$</p> <p>g) $C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)}$</p> <p>h) $U = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)$</p> <p>i) $C' = C$</p>
(P) 4.14	$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} (a^2 - r^2) & 0 < r < a \\ \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} & a \leq r < 2a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & r \geq 2a \end{cases}$
(P) 4.15	<p>a) $\vec{E}(z_0) = \begin{cases} \frac{\rho_0\delta}{\epsilon_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right) \right] \hat{z} & z_0 > a \\ -\frac{\rho_0\delta}{\epsilon_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right) \right] \hat{z} & z_0 < -a \end{cases}$</p> <p>b) $\vec{E}(z_0) = \begin{cases} \frac{\rho_0\delta}{\epsilon_0} \hat{z} & z_0 > a \\ -\frac{\rho_0\delta}{\epsilon_0} \hat{z} & z_0 < -a \end{cases}$</p> <p>c) $V(z) = \begin{cases} V_0 & -a \leq z \leq a \\ V_0 - \frac{\rho_0\delta}{\epsilon_0} (z - a) & z > a \\ V_0 + \frac{\rho_0\delta}{\epsilon_0} (z + a) & z < -a \end{cases}$</p>
(P) 4.16	<p>a) $\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & r < R_2 \\ \frac{\rho_0(r^2 - R_2^2)}{2r\epsilon_0} \hat{r} & R_2 \leq r \leq R_3 \\ \frac{\rho_0(R_3^2 - R_2^2)}{2r\epsilon_0} \hat{r} & R_3 \leq r \leq R_4 \\ 0 & r > R_4 \end{cases}$</p> <p>$\sigma(r = R_1) = 0, \sigma(r = R_4) = -\frac{\rho_0(R_3^2 - R_2^2)}{2R_4}, \sigma(r = R_5) = 0$</p> <p>b) $V(R_4) - V(R_1) = -\frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left(\frac{R_3^2 - R_2^2}{2} + R_2^2 \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) + (R_3^2 - R_2^2) \ln\left(\frac{R_4}{R_3}\right) \right)$</p>



Capítulo 5

		Problema	Respuestas
(P)	5.1	b) $z(x) = \frac{\ln(\sin kx)}{k} + C$ con $C \in \mathbb{R}$. c) $\sigma = 2\epsilon_0 V_0 k \cos kx$	
(P)	5.2	a) $\Delta V = \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon_0}$ b) $\Delta V = 12$ [V].	
(P)	5.3	$V(x) = \begin{cases} \frac{\rho a}{\epsilon_0}(x+b) & -b < x < -a \\ -\frac{\rho}{2\epsilon_0}(x^2 + a(2b-a)) & -a < x < a \\ -\frac{\rho a}{\epsilon_0}(x-b) & a < x \end{cases}$	
(P)	5.4	$\rho(r) = \begin{cases} \frac{3\epsilon_0 V_0 (ka+1)}{a^2} & r \leq a \\ -k^2 \frac{V_0 a}{\epsilon_0 r} e^{k(a-r)} & r > a \end{cases}$ $\Phi(r) = \begin{cases} V_0 - \frac{V_0 (ka+1)(r^2 - a^2)}{2a^2} & r \leq a \\ \frac{V_0 a}{r} e^{k(a-r)} & r > a \end{cases}$	
(P)	5.5	$C = \frac{\epsilon_0 a}{d} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$	
(P)	5.6	$C_T = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} + \frac{4\pi\epsilon_0 \rho_1 \rho_2}{\rho_2 - \rho_1}$	
(P)	5.7	a) $\sigma(x, y) = \frac{-qh}{2\pi(x^2 + y^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$ b) $Q_{\text{disco}} = \frac{qh}{\sqrt{d^2 + h^2}} - q$, $d = h\sqrt{3}$ c) $W = \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 h}$	
(P)	5.8	$\sigma_x(x) = 2b\sigma R^2 \left(-\frac{1}{((x-a)^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{((x+a)^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$ $\sigma_y(y) = 2a\sigma R^2 \left(-\frac{1}{(a^2 + (y-b)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(a^2 + (y+b)^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$	
(P)	5.9	$V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^8 \frac{(-1)^{i-1}}{\ (x, y, z) - \vec{r}_i\ }$, donde: $\vec{r}_1 = (d \cot(\frac{\pi}{8}), d, 0)$, $\vec{r}_2 = (d, d \cot(\frac{\pi}{8}), 0)$, $\vec{r}_3 = (-d, d \cot(\frac{\pi}{8}), 0)$, $\vec{r}_4 = (-d \cot(\frac{\pi}{8}), d, 0)$, $\vec{r}_5 = (-d \cot(\frac{\pi}{8}), -d, 0)$, $\vec{r}_6 = (-d, -d \cot(\frac{\pi}{8}), 0)$, $\vec{r}_7 = (d, -d \cot(\frac{\pi}{8}), 0)$, $\vec{r}_8 = (d \cot(\frac{\pi}{8}), -d, 0)$ y $x \geq y > 0$.	
(P)	5.10	$\sigma(\theta) = \frac{\left(R - \frac{R^2}{d}\right)q}{4\pi(R^2 + d^2 - 2Rd \cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$, $q_{\text{ind}} = -\frac{R}{d}q$	
(P)	5.11	$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q''}{d^2} + \frac{q'}{(d-d')^2} \right) \hat{x}$ donde $q' = -\frac{qR}{d}$, $q'' = Q + \frac{qR}{d}$, $d' = \frac{R^2}{d}$	
(P)	5.12	a) $ F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{qq'}{(L-L')^2} + \frac{qq''}{L^2} \right)$, $L = \sqrt{d^2 + \ell^2 - 2d\ell \cos\phi}$ y $L' = \frac{R^2}{L}$ b) $\omega = \frac{q}{(d-\ell)^2 - R^2} \sqrt{\frac{Rd}{4\pi\epsilon_0 m\ell}}$	



Problema	Respuestas
	a) $V(r, \theta) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r^2 + h^2 - 2rh \sin \theta}{r^2 + (R-d)^2 - 2r(R-d) \sin \theta} \right)$ donde $h = \frac{R^2}{R-d}$
5.13	b) $\sigma(\theta) = -\frac{\lambda(d^2(2R-d))}{2\pi R(R^2+d^2-2dR \sin \theta)}$ c) $\lambda_{\text{inducido}} = -\lambda$ d) $\vec{F} = -\frac{\lambda^2(R-d)}{2\pi\epsilon_0 d^2} \hat{y}$
5.14	$V(x, y) = -\frac{2V_0}{\pi} \sum_{n=1, n \neq 2}^{\infty} \frac{n(\cos(\pi n)-1)}{(n^2-4)} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}$
5.15	$V(x, y) = \frac{V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+(-1)^{n+1})}{n \operatorname{senh}(n\pi b/a)} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi(a-x)}{a}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi(b-y)}{a}\right) \right)$
5.16	$V(x, y) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8aE_0}{(2n+1)^2 \pi^2 \cosh(\alpha b)} \sin(\alpha x) \sinh(\alpha y), \alpha = \frac{\pi(2n+1)}{2a}$



Capítulo 6

		Problema	Respuestas
	6.1	<p>a) $V_{dip}(0, L, 0) = 0$ b) $\vec{F} = \frac{2qa\rho_0 b^3}{3\epsilon_0 L^3} \hat{z}$ c) $W = 0$</p>	
	6.2	<p>a) $\vec{p} = 4\lambda R^2 \hat{y}$, $V_{dip}(x, 0, z) = 0$ b) $\vec{E}_{dip}(x, 0, z) = \frac{\lambda R^2}{\pi\epsilon_0(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{y}$ c) $V(x, 0, z) = 0$</p>	
	6.3	<p>a) $\vec{r} = (x, y, z)$ Fuera de las dos esferas: $\vec{E} = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}-R\hat{z}}{ \vec{r}-R\hat{z} ^3} - \frac{\vec{r}+R\hat{z}}{ \vec{r}+R\hat{z} ^3} \right)$ Dentro de la esfera positiva: $\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left((\vec{r}-R\hat{z}) - \frac{R^3}{ \vec{r}+R\hat{z} ^3} (\vec{r}+R\hat{z}) \right)$ Dentro de la esfera negativa: $\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(\frac{R^3}{ \vec{r}-R\hat{z} ^3} (\vec{r}+R\hat{z}) - (\vec{r}+R\hat{z}) \right)$. b) El campo eléctrico decae como $1/r^3$.</p>	
	6.4	$\omega = \sqrt{\frac{pE_0}{I}}$	
	6.5	$V(x, y, z) = \frac{px}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(x^2+y^2+(z-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(x^2+y^2+(z+z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \right),$ $\sigma(x, y) = -\frac{3pz_0x}{2\pi\epsilon_0(x^2+y^2+z_0^2)^{\frac{5}{2}}}$	
	6.6	<p>a) $Q = \frac{\alpha L^2}{2}$ b) $\vec{E}(P) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\ell^2} \hat{x}$ Campo eléctrico producido por una carga puntual de carga Q c) $V(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\ell}$ Potencial eléctrico producido por una carga puntual de carga Q.</p>	



Capítulo 7

Problema	Respuestas
(P) 7.1	<p>a) $R = \frac{g_1 + 3g_2}{24\pi a g_1 g_2}$</p> <p>b) $\sigma = \frac{3V_0\epsilon_0}{2a} \frac{(g_1 - g_2)}{(g_1 + 3g_2)}$</p>
(P) 7.2	$f(r) = -\frac{C}{\alpha r^2}, g(r) = 2C.$
(P) 7.3	<p>a) $\vec{J} = \frac{V_0 g_0}{L \ln 2} \hat{y}, \vec{E} = \frac{V_0}{L(1 + \frac{g}{L}) \ln 2} \hat{y}$</p> <p>b) $P = \pi a^2 \frac{V_0^2 g_0}{L \ln^2 2} \ln \left(1 + \frac{2e}{3L}\right)$</p>
(P) 7.4	$R = \frac{\ln(z_2/z_1)}{g\pi k}$
(P) 7.5	$I = \frac{4\pi k V^2}{\ln(\frac{b}{a})^2}, \rho = \frac{V}{r^2 \ln(\frac{b}{a})}$
(P) 7.6	$R = \frac{\pi}{gd \ln(1 + \frac{d}{r})}$
(P) 7.7	<p>a) $I = \frac{LV_0}{\ln(a/b)} (\beta g_1 + (2\pi - \beta)g_2)$</p> <p>b) $R_1 = \frac{\ln(a/b)}{L\beta g_1}$ $R_2 = \frac{\ln(a/b)}{L(2\pi - \beta)g_2}$ $R_T = \frac{\ln(a/b)}{L(\beta g_1 + (2\pi - \beta)g_2)}$</p>
(P) 7.8	<p>a) $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{x+a} \frac{\partial V}{\partial x} = 0, V(S) - V(S') = E_0 a \ln(2)$</p> <p>b) $R = \frac{\ln(2)}{g_0 a}, Q = -\frac{\varepsilon_0 E_0 a^2}{2}$</p>
(P) 7.9	$\vec{J}(r = a, t = \frac{\epsilon_0}{g}) = \frac{g}{\epsilon_0} e^{-1} \frac{a^3}{3r^2} \hat{r}$
(P) 7.11	$R = \frac{1}{2\pi g} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{2}{L} \right)$
(P) 7.12	<p>a) $\vec{J} = \frac{V_0 g_1 g_2}{r(g_1 \ln(c/b) + g_2 \ln(b/a))} \hat{r},$ $\vec{E} = \begin{cases} \frac{V_0 g_2}{r(g_1 \ln(c/b) + g_2 \ln(b/a))} \hat{r} & a < r < b \\ \frac{V_0 g_1}{r(g_1 \ln(c/b) + g_2 \ln(b/a))} \hat{r} & b < r < c \end{cases}$</p> <p>b) $\sigma(r = a) = \frac{2\pi L V_0 g_2}{(g_1 \ln(c/b) + g_2 \ln(b/a))}, \sigma(r = c) = -\frac{2\pi L V_0 g_1}{(g_1 \ln(c/b) + g_2 \ln(b/a))}$</p> <p>c) $I = \frac{2\pi L V_0 g_1 g_2}{g_1 \ln(c/b) + g_2 \ln(b/a)}$</p> <p>d) $R = \frac{1}{2\pi L} \left(\frac{\ln(c/b)}{g_2} + \frac{\ln(b/a)}{g_1} \right)$</p> <p>e) $R_L = \frac{1}{2\pi L} \left(\frac{\ln(c/b)}{g_2} + \frac{\ln(b/a)}{g_1} \right), P = \frac{V_0^2 \pi L g_1 g_2}{2(g_1 \ln(c/b) + g_2 \ln(b/a))}$</p>



Capítulo 8

Problema	Respuestas
 8.1	$R_1 = \frac{R_0}{\sqrt{3}}$
 8.2	<p>a) $R = 0 \Omega$, $P = 900 [W]$</p> <p>b) $R = 20 \Omega$, $P = 45 [W]$</p>
 8.3	<p>a) $R_{eq} = \frac{5}{3}R$</p> <p>b) Las corrientes son $i_1 = \frac{2V_0}{5R}$, $i_2 = \frac{V_0}{5R}$, $i_3 = \frac{V_0}{5R}$</p> <p>(Nota: Las corrientes son simétricas, i_1 es la corriente por la resistencia a la izquierda R, i_2 es la corriente que pasa por las tres resistencias en serie e i_3 es la corriente que pasa por la resistencia central de la figura).</p>
 8.4	$R = 600\Omega$
 8.5	$R_T = \frac{5}{6}R$
 8.6	$ \Delta U = \frac{Q_0 C_2}{2C_1(C_1 + C_2)}$
 8.7	<p>a) $Q(0) = \frac{CV}{2}$</p> <p>b) $I(0) = \frac{V}{4R}$</p> <p>c) $I(t) = \frac{V}{4R}e^{-t/2RC}$</p> <p>d) $U(0) = \frac{CV^2}{8}$</p>
 8.8	<p>a) $Q(t) = V_0 C e^{-\frac{t}{RC}}$</p> <p>b) $\vec{E} = \frac{-V_0 C e^{-\frac{t}{RC}}}{\pi b^2 \epsilon_0} \hat{z}$ donde \hat{z} apunta desde la placa cargada positiva a la negativa.</p>
 8.9	$R_1 = R$, $R_2 = \frac{3}{4}R$, $R_3 = \frac{11}{15}R$, $R_\infty = (\sqrt{3} - 1)R$.



Capítulo 9

Problema	Respuestas
 9.1	$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I \alpha}{8\pi R} \hat{k}$ donde \hat{k} está saliendo de la hoja de papel.
 9.2	$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \left[1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right] \hat{z}$
 9.3	$\vec{B} = \frac{\mu_0 I L^2}{2\pi \left(\frac{L^2}{4} + x^2 \right) \sqrt{\frac{L^2}{2} + x^2}} \hat{x}$
 9.4	$\vec{B}(z = D) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi D} (\hat{x} + \hat{y})$
 9.5	Susana tiene la razón.
 9.6	$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4 \ln 2} \hat{z}$
 9.7	$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4} (3\sqrt{2} - 4) R \hat{z}$ Propuesto: $\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[\frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2 z \right] \hat{z}$
 9.8	a) $\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_A + \sin \alpha_C) \hat{z}$ (\hat{z} entrando a la hoja de papel). b) $\vec{B} = -\frac{\mu_0 n I}{\pi a} \tan \left(\frac{\pi}{n} \right) \sin \left(\frac{\pi}{n} \right) \hat{z}$
 9.9	$\vec{B}(P) = \frac{n I \hat{z}}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$



Capítulo 10

Problema	Respuestas
 10.1	$\beta = \alpha, d = 2 \frac{mv_0}{eB} \cos \theta$
 10.2	$t = \frac{\pi m}{qB}$
	<p>a) $\ddot{x}(t) = 0,$ $\dot{y}(t) = \frac{qB_0 \dot{z}}{m},$ $\ddot{z}(t) = \frac{q}{m}(E_0 \cos(\Omega t) - B_0 \dot{y})$</p> <p>b) $\dot{x}(t) = 0,$ $\dot{y}(t) = \frac{q^2 B_0 E_0}{m^2(\frac{qB_0}{m} - \Omega^2)} (\cos(\Omega t) - \cos \frac{qB_0}{m} t),$ $\dot{z}(t) = \frac{qB_0}{m(\frac{qB_0}{m} - \Omega^2)} (\frac{qB_0}{m} \sin(\frac{qB_0}{m} t) - \Omega \sin(\Omega t))$</p> <p>c) $x(t) = 0,$ $y(t) = \frac{q^2 E_0 B_0}{m^2(\frac{qB_0}{m} - \Omega^2)} (\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} - \frac{m}{qB_0} \sin \frac{qB_0}{m} t),$ $z(t) = \frac{q^2 E_0}{m(\frac{qB_0}{m} - \Omega^2)} (\cos(\Omega t) - \cos \frac{qB_0}{m} t)$</p> <p>Si $\Omega = qB_0/m$ la partícula entra en resonancia y la amplitud de su movimiento se vuelve infinita.</p>
 10.3	<p>a) $v_{critico} = \frac{qLB}{m}$</p> <p>b) Si la velocidad es mayor que ese $v_{critico}$, la carga escapa de la zona de campo, sino la carga se devuelve siguiendo una trayectoria de semicircunferencia.</p> <p>c) $h = \begin{cases} \frac{\pi m}{qB} v_B & v_0 < v_{critico} \\ \frac{m}{qB} v_B \arcsin \frac{qLB}{v_0 m} & v_0 > v_{critico} \end{cases}$</p>
 10.4	<p>a) $v = 6 \cdot 10^7 \text{ [m/s].}$</p> <p>b) $B = \frac{1}{600} \text{ [T]. El campo magnético debe apuntar hacia dentro de la hoja.}$</p> <p>c) El electrón choca con una de las placas.</p>
 10.6	$I_2 = \frac{2mgd(a+d)}{\mu_0 I_1 ab}$, la corriente I_2 debe tener sentido horario.
 10.7	$ \vec{v} = \frac{eB_0}{m} \sqrt{R^2 + \left(\frac{s}{2\pi}\right)^2}$
 10.8	La velocidad debe ser igual a $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$ (velocidad de la luz). El resultado no es válido ya que para velocidad de esa magnitud no es posible usar la física tradicional.
 10.9	<p>a) $L(r) = L_0 + eB \cdot \frac{r^2 - a^2}{2}$</p> <p>b) $v(b) = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$</p> <p>c) $B_c = \frac{2mb}{e(b^2 - a^2)} \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$</p>



Capítulo 11

Problema	Respuestas
(P) 11.1	<p>a) $\alpha = \frac{3I_0}{2\pi a^3}$, $\beta = \frac{I_0}{\pi(c^2 - b^2)}$</p> <p>b) $\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I_0 r^2}{2\pi a^3} \hat{\theta} & r < a \\ \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \hat{\theta} & a < r < b \\ \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \hat{\theta} & b < r < c \\ 0 & r > c \end{cases}$</p>
(P) 11.2	<p>a) $x \pm \frac{d}{\sqrt{3}}$</p> <p>b) $\frac{d\vec{F}}{dz} \approx -\frac{\mu_0 I^2}{\pi} \frac{y}{d^2} \hat{y}$</p>
(P) 11.3	$\vec{B}(P_1) = -\frac{\mu_0 I}{\pi d}(\hat{x} + \hat{y})$, $\vec{B}(P_2) = 0$. (\hat{x} creciendo hacia la derecha e \hat{y} hacia arriba)
(P) 11.4	$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 \alpha \ln(\frac{b}{a}) \hat{z}}{r} & r < a \\ \frac{\mu_0 \beta (r^2 - a^2)}{2r} \hat{\theta} + \frac{\mu_0 \alpha \ln(\frac{b}{r}) \hat{z}}{r} & a < r < b \\ \frac{\mu_0 \beta (b^2 - a^2)}{2r} \hat{\theta} & r > b \end{cases}$
(P) 11.5	<p>a) $\vec{B} = \begin{cases} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi(b-x)} - \frac{\mu_0 I'}{2\pi a} \ln\left(\frac{x}{x-a}\right) \right) \hat{k} & a < x \leq b-R \\ \left(\frac{\mu_0 I(x-b)}{2\pi R^2} - \frac{\mu_0 I'}{2\pi a} \ln\left(\frac{x}{x-a}\right) \right) \hat{k} & b-R < x \leq b \\ -\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi(b-x)} - \frac{\mu_0 I'}{2\pi a} \ln\left(\frac{x}{x-a}\right) \right) \hat{k} & b < x \leq b+R \\ -\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi(x-b)} - \frac{\mu_0 I'}{2\pi a} \ln\left(\frac{x}{x-a}\right) \right) \hat{k} & x > b+R \end{cases}$</p> <p>b) $\frac{d\vec{F}}{dy} = -\frac{\mu_0 II'}{2\pi a} \ln\left(\frac{b}{b-a}\right) \hat{x}$</p>
(P) 11.6	$\frac{d\vec{F}_2}{dS} = \frac{\mu_0 K_1 K_2 \sin \beta}{2} \hat{z}$ donde \hat{z} apunta desde plano Π_1 al Π_2 . Si $\beta \in (0, \pi)$, la fuerza es atractiva, si $\beta \in (\pi, 2\pi)$ la fuerza es repulsiva, y para $\beta = 0, \pi$ no existe fuerza.
(P) 11.7	$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 J_0}{2} \hat{k} \times \vec{b}$, el vector \vec{b} es que parte del centro del cilindro hasta el centro de la circunferencia de radio a .
(P) 11.8	$J = \frac{3K}{R}$
(P) 11.9	$\frac{d\vec{F}}{dl} = \mu_0 I \left(\frac{\alpha R^3}{3s} + \frac{J_1 w}{2} \right) \hat{y}$
(P) 11.10	<p>a) $I_2 = -\frac{N_1}{N_2} I_1$</p> <p>b) $\frac{d\vec{F}}{dS} = -\mu_0 (N_1 I_1)^2 \hat{r}$</p>



Capítulo 12

Problema	Respuestas
----------	------------

(P) 12.1 $\vec{A}(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \hat{z} & r \geq R \end{cases}$

a) $B_z(0) = \frac{\mu_0 I N}{(R^2 + p^2 N^2)^{\frac{1}{2}}}, A_z(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln\left(\frac{(R^2 + (pN)^2)^{\frac{1}{2}} + pN}{(R^2 + (pN)^2)^{\frac{1}{2}} - pN}\right)$

(P) 12.2 **b)** $f(R, N, p) = \left(1 + \left(\frac{R}{Np}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

c) $\frac{R}{L} = \frac{1}{10\sqrt{2}}$

(P) 12.3 **a)** $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \ln\left[\frac{L}{R} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2}}\right)\right] \hat{z}$ si $L \gg R$ entonces $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \ln\left(\frac{2L}{R}\right) \hat{z}$

b) $\vec{A} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} I \ln\left[\frac{x^2 + (d-y)^2}{x^2 + y^2}\right] \hat{z}$

(P) 12.4 **a)** $\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 \rho_0 \omega R^2}{3} \hat{z} \quad \vec{A}(0) = 0$

b) $\vec{m} = \frac{4\pi \rho_0 \omega R^5}{15} \hat{z}$

(P) 12.5 $\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 r}{2} \hat{\theta}$

(P) 12.6 $\tau = \frac{Mg \tan \theta}{2LB}$ y la dirección es horaria según la figura.

(P) 12.7 $I = \frac{Mg}{5\pi BR}$

(P) 12.8 **a)** $\omega_0 = \sqrt{\frac{NI_0\pi}{MR}}$

b) $\omega(\theta = 0) = \omega_0 \theta_0$

(P) 12.9 $|\vec{\tau}| = \frac{e^2 B}{2} \sqrt{\frac{R}{4\pi \epsilon_0 m}}$

(P) 12.10 **a)** $W = \frac{\mu_0 m_0^2}{2\pi a^3},$

b) En A: $\vec{\tau} = \frac{3\mu_0 m_0^2}{8\pi a^3} \hat{k}$, En C: $\vec{\tau} = 0$. \hat{k} sale de la hoja de papel.

(P) 12.11 $k = \frac{\mu_0 I a^2}{\pi R}$



Capítulo 13

Problema	Respuestas
\mathcal{P} 13.1	a) $\vec{B} = \mu_0 m I_0 \sin(\omega t) \hat{z}$ b) $\vec{E}(r, t) = -\frac{r \mu_0 m I_0 \omega \cos(\omega t)}{2} \hat{\theta}$ c) $\vec{E}(r, t) = -\frac{b^2 \mu_0 m I_0 \omega \cos(\omega t)}{2r} \hat{\theta}$
\mathcal{P} 13.2	a) $v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{(aB)^2}{mR}t\right)$ b) $v(t) = v_0 \left[1 - \frac{B^2 a^2 \tau}{mR} (1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))\right], Q(t) = \frac{Ba v_0 \tau}{R} (1 - \exp(-\frac{t}{\tau})),$ donde $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} + \frac{B^2 a^2}{mR}$
\mathcal{P} 13.3	$v(t) = \frac{BLbt^2}{2m}$ y $\epsilon(t) = \frac{B^2 L^2 bt^2}{2m}$ si $t \in [0, T].$
\mathcal{P} 13.4	a) $\omega_f = \frac{\lambda R \pi a^2 B}{I}$ b) Es independiente de $B(t)$, solamente importa el valor inicial y final.
\mathcal{P} 13.5	$B = \frac{2QR}{\pi N D^2}$
\mathcal{P} 13.6	a) $v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{(B_0 b)^2}{mR}t\right) x_{\max} = \frac{v_0 m R}{(B_0 b)^2}$ b) $v(t) = \frac{V_0}{B_0 b} \left(1 - e^{-\frac{(B_0 b)^2}{mR}t}\right)$
\mathcal{P} 13.7	$P = \frac{g \pi h (a^2 \mu_0 I_0 \omega \cos \omega t)^2}{8},$ Prop. $I = -\frac{g h a^2}{4} \mu_0 n I_0 \omega \cos \omega t$
\mathcal{P} 13.8	$v_T = \frac{m R g}{B^2 a^2}$, el sentido de la corriente en la figura es antihorario.
\mathcal{P} 13.9	a) Antihorario (considerando normal positiva $+\hat{z}$) b) $I = -\frac{C \pi a^2}{R} \dot{z}$ c) $\vec{F}_r = 0, \vec{F}_z = \pi a^2 C I \hat{z}$ d) $v_T = \frac{mgR}{(C \pi a^2)^2}$
\mathcal{P} 13.10	$ \Delta V = \frac{\mu_0 v I}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{d}{a}\right),$ si $a \gg d$ entonces $ \Delta V \approx \frac{\mu_0 v I d}{2\pi a}$
\mathcal{P} 13.11	$ \varepsilon = \frac{B_0 \Omega R^2}{2}$



Capítulo 14

Problema	Respuestas
 14.1	$M = \frac{\mu_0 h \tan \alpha}{\pi}$
 14.2	$M = \frac{\mu_0 \pi (ab)^2}{2(d^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$
 14.3	$M = 2\mu_0 a$
 14.4	<p>a) $M = \mu_0 n \pi b^2 \sin \alpha$</p> <p>b) $\Delta V_{max} = \mu_0 n \pi b^2 \omega I_0 \sin \alpha$</p>
 14.5	<p>a) $M = \frac{ \Phi }{I} = \frac{\mu_0 d \ln(4/3)}{2\pi}$</p> <p>b) Antihorario en la figura.</p> <p>c) $\vec{F}_{\text{tot}} = -\frac{\mu_0 I}{6\pi} \frac{\mu_0 d}{2\pi r} \ln\left(\frac{3}{4}\right) \frac{dI}{dt} \hat{y}$</p>
 14.6	<p>a) $u_m = \frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$</p> <p>b) $l = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$</p>
 14.7	a) $L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$
 14.8	$U_m = \frac{\mu_0 (\sigma_0 \alpha t)^2 R^4 \pi H}{2} \quad U_e = \frac{\epsilon_0 (\mu_0 \alpha)^2 R^6 H \pi}{16}$
 14.9	<p>a) $\epsilon = -\pi a^2 B_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)$</p> <p>b) $I(t) = \frac{\omega \pi a^2 B_0}{R^2 + \omega_0^2 L^2} (R \sin \omega_0 t - \omega_0 L (\cos \omega_0 t - e^{-\frac{R}{L}t}))$</p> <p>c) $\tau(t) = \frac{\omega \pi^2 a^4 B_0^2}{R^2 + \omega_0^2 L^2} (R \sin \omega_0 t - \omega_0 L \cos \omega_0 t) \sin \omega_0 t$</p>
 14.10	$v(t) = v_0 \cos \frac{aB}{\sqrt{mL}} t, \quad i(t) = -\frac{mv_0}{\sqrt{mL}} \sin \frac{aB}{\sqrt{mL}} t$. El largo del carrito debe ser menor a $\frac{v_0 \sqrt{mL}}{aB}$ para que logre entrar.
 14.11	<p>a) $\Phi = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} a \ln \frac{z+b}{z}, \quad \epsilon = \frac{\mu_0 k a b I_1}{2\pi}$</p> <p>b) $V_0 + \epsilon = I_2 R + L \frac{dI_2}{dt}$</p> <p>c) $I_2(t) = \frac{V_0}{R} + \frac{\epsilon}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$</p>
 14.12	<p>a) $I_3 = 0$ (la corriente no puede aumentar en forma abrupta en una inductancia), $I_1 = I_2 = \frac{V_0}{R_1 + R_2}$</p> <p>b) $I_1 = I_3 = \frac{V_0}{R_1}, \quad I_2 = 0$ (la inductancia actúa como un cortocircuito en un tiempo muy largo).</p>



Problema	Respuestas
(P) 14.13	a) $I(0) = 4 \text{ A. e } I(\infty) = 8 \text{ A.}$ b) $I(t) = 8 - 4e^{-300t} \text{ A.}$
(P) 14.14	a) $L = \frac{\sqrt{3}R}{2\omega_0}, C = \frac{2\omega_0 R}{\sqrt{3}}$ b) $Q(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega't + \phi)$ con $\gamma = \frac{R}{2L}, \omega' = \sqrt{-(\frac{R}{2L})^2 + (\frac{1}{LC})^2}, A = \frac{Q_0}{\cos \phi}$ y $\tan \phi = -\frac{\gamma}{\omega'}$



Capítulo 15

	Problema	Respuestas
(P)	15.1	<p>b) $\phi = 2 \arctan \frac{1}{\omega RC}$</p> <p>c) Cambian los dos resultados anteriores, ya que ocurre una división de voltaje previa que cambia el módulo y el desfase de la diferencia de potencial.</p>
(P)	15.2	<p>a) $C = 281n[F]$</p> <p>b) $R = (225)e^{j1,11}\Omega$</p> <p>c) $I(t) = 0,89 \cos(10000\pi t - 1,11) [A]$</p> <p>d) $\langle P \rangle = 39,6 [W]$</p> <p>e) $I_{max} = 0,89 [A]$, $V_{max}^R = 89 [V]$, $V_{max}^L = 89\pi [V]$, $V_{max}^C = 100,7 [V]$</p>
(P)	15.3	<p>a) $Z = R + j \frac{\omega^2 LC_1 - 1}{\omega(C_1 + C_2 - \omega^2 LC_1 C_2)}$</p> <p>b) $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}$</p> <p>c) $I(t) = \frac{V_0}{ Z } \cos(\omega t - \phi)$ donde $Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega^2 LC_1 - 1}{\omega(C_1 + C_2 - \omega^2 LC_1 C_2)}\right)^2}$ $\phi = \arctan\left(\frac{\omega^2 LC_1 - 1}{R\omega(C_1 + C_2 - \omega^2 LC_1 C_2)}\right)$</p> <p>d) $\langle P \rangle = \frac{V_0^2 R}{2R^2 + 2\left(\frac{\omega^2 LC_1 - 1}{\omega(C_1 + C_2 - \omega^2 LC_1 C_2)}\right)^2}$</p>
(P)	15.4	$I_{max} = 7\sqrt{2} > 7 [A]$. El enchufe no es capaz de trabajar con esa corriente.
(P)	15.5	<p>a) $Z_{eq} = \left(\frac{1}{R_1+jX_L} + \frac{1}{R_2-jX_C}\right)^{-1}$, donde $X_L = \omega L$ y $X_C = \frac{1}{\omega C}$, $I_1(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R_1^2 + \omega^2 L^2}}$</p> <p>b) $I_2(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R_2^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}}$</p> <p>c) $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{R_1^2 C - L}{R_2^2 C - L}}$ y $I = V_0 \cdot \frac{(R_1 + R_2)^2 + (\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C})^2}{(R_1 R_2 + \frac{L}{C})^2 + (\omega_0 L R_2 - \frac{1}{\omega_0 C} R_1)^2}$</p>
(P)	15.6	$R_{ampolla} = 240\Omega$, $L = \sqrt{\frac{\frac{V_{rms-chile}^2 R_{ampolla} - P \cdot R_{ampolla}^2}{P \cdot (2\pi f_{chile})^2}}{P \cdot (2\pi f_{chile})^2}} = 1,2[H]$ (una inductancia muy grande!). Es mejor un inductor ya que no consume potencia.
(P)	15.7	<p>a) Contiene un inductor y un condensador.</p> <p>b) $C = 0,5 F$ y $L = 1H$.</p> <p>c) Sí, y la frecuencia es $\omega_0 = \sqrt{2} \text{ rad/s}$.</p>
(P)	15.8	<p>a) $R = 100\Omega$, $C \approx 10^{-5} F$, $\Delta V(t) = 23\pi \sin(100\pi t + \frac{\pi}{2})$, $P = 72,25 W$.</p> <p>b) $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Z = \frac{R \cdot \frac{L}{C}}{\sqrt{(\frac{L}{C})^2 + R^2(\omega^2 L^2 - \frac{1}{\omega^2 C^2})}}$</p> <p>c) $I_{max} = \frac{V_{rms}\sqrt{2}}{R}$, esto ocurre en resonancia con $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ y $\Delta V_{LC}(\omega = \omega_0) = 0$.</p>
(P)	15.9	La potencia consumida es de 616 W, por lo que bastaría un transformador de 800 W.
(P)	15.10	<p>a) Caso (I): $\frac{ V_{EF} ^2}{ V_{AB} ^2} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$, Caso (II): $\frac{ V_{EF} ^2}{ V_{AB} ^2} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$</p> <p>b) El Sonido (I) viene del filtro pasa alto (Caso I) y el Sonido (II) viene del filtro pasa bajos (Caso II).</p>



Capítulo 16

Problema	Respuestas
P 16.2	<p>a) $\lambda = \frac{\pi}{5}$ m y $T = \frac{2\pi}{3} \cdot 10^{-9}$ s.</p> <p>b) La onda se propaga en $-\hat{x}$.</p> <p>c) $\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos[(10 \text{ m}^{-1}) \cdot x + (3 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}) \cdot t] \hat{y}$</p> <p>d) $\vec{S} = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2[(10 \text{ m}^{-1}) \cdot x + (3 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}) \cdot t] \hat{x}$</p>
P 16.3	<p>a) $\vec{E} = E_0 \hat{x} e^{j100\pi(\frac{y+z}{c\sqrt{2}}-t)}$</p> <p>b) $\vec{B} = \frac{E_0}{c\sqrt{2}} (\hat{y} - \hat{z}) e^{j100\pi(\frac{y+z}{c\sqrt{2}}-t)}$</p> <p>c) $\langle \vec{S} \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}$</p>
P 16.4	$\vec{E} = -\frac{aB_0\omega}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t) \hat{y}$
P 16.5	<p>a) $\langle S \rangle = \frac{1}{c\mu_0} (C_1^2 + C_2^2) \hat{z}$</p> <p>b) $\vec{E}(z = 0, t) = C(\hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t)$. El campo eléctrico rota en plano xy pasado un periodo.</p> <p>c) $\vec{E}(z, t = 0) = C(\hat{x} \cos kz + \hat{y} \sin kz)$. El campo eléctrico rota a medida que se avanza de una longitud de onda a otra.</p>
P 16.6	<p>a) $\vec{S} = \frac{1}{c\mu_0} [E_{10} \cos(kx - \omega t) + E_{20} \cos(kx - \omega t + \phi)]^2 \hat{x}$</p> <p>b) $I = \frac{1}{c\mu_0} \left[\frac{E_{10}^2}{2} + \frac{E_{20}^2}{2} + E_{10}E_{20} \cos \phi \right]$</p> <p>c) $I = \frac{1}{c\mu_0} \left[\frac{E_{10}^2}{2} - \frac{E_{20}^2}{2} \right]$</p>
P 16.7	<p>a) $b = ac$</p> <p>b) $E = cB_0$, la onda se propaga en la dirección $-\hat{x}$</p> <p>c) $\langle \vec{S} \rangle = -\frac{cB_0^2}{\mu_0} \hat{x}$</p> <p>d) $P = \frac{B_0^2}{\mu_0}$</p>
P 16.8	<p>a) $\vec{E} = E_0 \frac{\hat{x} - \hat{y}}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\omega}{c\sqrt{2}}(x + y) - \omega t\right)$</p> <p>b) $\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \hat{z} \cos\left(\frac{\omega}{c\sqrt{2}}(x + y) - \omega t\right)$</p> <p>c) $\langle \vec{S} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$</p>
P 16.9	<p>b) $\vec{B} = \frac{E_0 k_0}{\omega} \sqrt{2} e^{-k_0 z} e^{j(k_0 z - \omega t + \frac{\pi}{4})}$</p> <p>c) $\langle \vec{S} \rangle = \frac{E_0^2 k_0}{2\mu_0 \omega} e^{-2k_0 z}$</p>



Capítulo 17

Problema Respuestas

- (P) 17.1**
- a) $\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & r > R_2 \end{cases}$
- b) $\sigma_{pol}(R_1) = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon} \frac{Q}{4\pi R_1^2}, \sigma_{pol}(R_2) = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon} \frac{Q}{4\pi R_2^2}, \sigma_{libre}(R_1) = \frac{Q}{4\pi R_1^2}$
- c) $V_1(R_1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2},$ el potencial en la esfera es mayor en ausencia del dieléctrico.

- (P) 17.2**
- a) $\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{Q}{2\pi r^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \hat{r} & r > R \end{cases}$
- b) $\sigma_{l1} = \frac{\epsilon_1 Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)R^2}, \sigma_{l2} = \frac{\epsilon_2 Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)R^2}, \sigma_{P1} = -\frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)Q}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)}, \sigma_{P2} = -\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)Q}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$
- c) $\left| \frac{Q_P}{Q} \right| = \frac{39}{40}, Q_{neta} = \frac{Q}{40}$

- (P) 17.3** $\vec{F}_{ext} = \frac{Q^2}{\pi L^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2} \hat{z}$

- (P) 17.4**
- a) $V(x) = \frac{V_0(e^{-kx} - 1)}{e^{-kd} - 1}$
- b) $\epsilon(x) = \epsilon_1 e^{kx}$
- c) $\sigma_l = -\frac{kV_0}{e^{-kd} - 1}$

- (P) 17.5** $C = \frac{\pi R^2}{3d} (\epsilon_1 + 2\epsilon_2)$

- (P) 17.6**
- a) $C_T = \frac{a}{d} (\epsilon x + (a - x)\epsilon_0)$
- b) $x = \frac{1}{\epsilon - \epsilon_0} \left(\frac{Q^* b}{V_0 a} - \epsilon a \right)$
- c) $\vec{F} = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)aV_0^2}{2d} \hat{x},$ donde x crece de derecha a izquierda.
- d) $\frac{\epsilon_0 a^2}{d} \leq Q(x) \leq \frac{\epsilon a^2}{d}$

- (P) 17.7**
- a) $\sigma_p(r = b) = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)\rho_0 b^2}{4\epsilon}, \rho_p(r < b) = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)\rho_0 r}{\epsilon}$
- b) $U = \frac{\pi \rho_0^2 b^7}{8} \left(\frac{1}{7\epsilon} + \frac{1}{\epsilon_0} \right)$

- (P) 17.8** $\vec{P}_2 = (\epsilon_2 - \epsilon_0)((\frac{\sigma}{\epsilon_2} - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_1 \sin \theta_1) \hat{x} + E_1 \cos \theta_1 \hat{y})$

- (P) 17.9**
- a) $\sigma_1 = -\frac{\sigma_0 d_2 \epsilon_0}{d_2 \epsilon_0 + d_1 \epsilon}, \sigma_2 = -\frac{\sigma_0 d_1 \epsilon}{d_1 \epsilon + d_2 \epsilon}$
- b) $\Delta V = \frac{A \epsilon \epsilon_0 \sigma_0 R v_0 t}{(d_2 \epsilon_0 + (d_1 - v_0 t) \epsilon)^2}$



Problema	Respuestas
(P) 17.10	<p>a) $\rho_p = P_0, \sigma_p = -\frac{P_0 a}{2}$</p> <p>b) $\vec{E} = \begin{cases} \frac{P_0 r}{2\epsilon_0} \hat{r} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$</p> <p>c) $\vec{B}(z) = 0$</p>
(P) 17.11	<p>a) Condensador izquierda: $\vec{J} = \frac{V_0 g_1 g_2}{d(g_1+g_2)} \hat{z}, \vec{E}_1 = \frac{V_0 g_2}{d(g_1+g_2)} \hat{z}, \vec{E}_2 = \frac{V_0 g_1}{d(g_1+g_2)} \hat{z}, \vec{D}_1 = \frac{\epsilon_1 V_0 g_2}{d(g_1+g_2)} \hat{z}, \vec{D}_2 = \frac{\epsilon_2 V_0 g_1}{d(g_1+g_2)} \hat{z}$ Condensador derecha: $\vec{E} = \frac{V_0}{2d} \hat{z}, \vec{J}_1 = \frac{g_1 V_0}{2d} \hat{z}, \vec{J}_2 = \frac{g_2 V_0}{2d} \hat{z}, \vec{D}_1 = \frac{\epsilon_1 V_0}{2d} \hat{z}, \vec{D}_2 = \frac{\epsilon_2 V_0}{2d} \hat{z}$</p> <p>b) Densidades superficiales de polarización: $\sigma_{P1}(z=0) = -(\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{V_0}{2d}, \sigma_{P1}(z=2d) = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{V_0}{2d}, \sigma_{P2}(z=0) = -(\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{V_0}{2d}, \sigma_{P2}(z=2d) = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{V_0}{2d}$ Densidades superficiales de carga libre: $\sigma_{L1}(z=0) = \epsilon_1 \frac{V_0}{2d}, \sigma_{L1}(z=2d) = \epsilon_1 \frac{V_0}{2d}, \sigma_{L2}(z=0) = \epsilon_2 \frac{V_0}{2d}, \sigma_{L2}(z=2d) = -\epsilon_2 \frac{V_0}{2d}$ No existen densidades volumétricas de carga de ningún tipo.</p> <p>c) $C_T = \frac{4a^2 \epsilon_1 \epsilon_2}{d(\epsilon_1 + \epsilon_2)} + \frac{\epsilon_1 a^2}{d} + \frac{\epsilon_2 a^2}{d}$</p> <p>d) $R = \frac{d}{a^2 g_1 g_2 \left(\frac{4}{g_1 + g_2} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_1} \right)}$</p>
(P) 17.12	$C = \frac{\pi L}{\frac{\ln(2)}{2\epsilon_1} + \frac{\ln(3)-\ln(2)}{2\epsilon_2} + \frac{\ln(3)}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}$



Capítulo 18

Problema	Respuestas
(P) 18.1	$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 r J_0}{2} \hat{\theta} & r < 3a \\ \frac{9\mu a^2 J_0}{2r} \hat{\theta} & 3a < r < 4a \\ \frac{\mu_0 J_0}{2r} (25a^2 - r^2) \hat{\theta} & 4a < r < 5a \\ 0 & r > 5a \end{cases}$
(P) 18.2	$\vec{H} = \frac{1+k^2 \cos^2 \theta}{2+k} \frac{NI}{\pi r} \hat{\theta}$
(P) 18.3	$\Phi_{\text{central}} = \frac{NI_0 \mu A}{18b} \text{ y } \Phi_{\text{derecho}} = \frac{NI_0 \mu A}{45b}$
(P) 18.4	$\vec{H} = mI \hat{z}, \vec{B} = \begin{cases} \mu_1 mI \hat{z} & \text{si } 0 < \theta \leq \pi \\ \mu_2 mI \hat{z} & \text{si } \pi < \theta \leq 2\pi \end{cases}, \vec{M} = \begin{cases} \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1\right) mI \hat{z} & \text{si } 0 < \theta \leq \pi \\ \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1\right) mI \hat{z} & \text{si } \pi < \theta \leq 2\pi \end{cases}$
(P) 18.5	<p>a) $\vec{B} = \frac{\mu_1 \mu_2 I}{R(\theta_1 \mu_2 + \theta_2 \mu_1)} \hat{\theta}, \vec{H}_1 = \frac{\mu_2 I}{R(\theta_1 \mu_2 + \theta_2 \mu_1)} \hat{\theta}, \vec{H}_2 = \frac{\mu_1 I}{R(\theta_1 \mu_2 + \theta_2 \mu_1)} \hat{\theta}, \vec{H}_3 = 0$</p> <p>b) $\vec{K}_1 = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0} \frac{\mu_2 I}{R(\theta_1 \mu_2 + \theta_2 \mu_1)}, \vec{K}_2 = \frac{\mu_2 - \mu_0}{\mu_0} \frac{\mu_1 I}{R(\theta_1 \mu_2 + \theta_2 \mu_1)}, \vec{J} = 0$</p>
(P) 18.6	<p>a) $\vec{H} = \begin{cases} -\frac{r V_0}{2\rho_s L} \hat{\theta} & r < R \\ -\frac{V_0 R^2}{2\rho_s L r} \hat{\theta} & r > R \end{cases}, \vec{B} = \begin{cases} -\left(1 - \frac{r}{R}\right) \frac{r V_0}{2\rho_s L} \hat{\theta} & r < R \\ -\frac{\mu_0 V_0 R^2}{2\rho_s L r} \hat{\theta} & r > R \end{cases}$</p> <p>b) $\vec{M}(r < R) = \frac{r^2 V_0}{2\rho_s R L} \hat{\theta}, \vec{M}(r > R) = 0$</p> <p>c) $\vec{J}_{\text{libre}} = -\frac{V_0}{\rho_s L} \hat{z}, \vec{J}_M = -\frac{3r V_0}{2\rho_s L R} \hat{z}, \vec{K}_M = -\frac{R^2 V_0}{2\rho_s R L} \hat{z}$</p>
(P) 18.7	<p>a) $\vec{H}_1 = \frac{NI - M_s \ell}{2\pi R} \hat{\theta}, \vec{H}_0 = \frac{NI - M_s \ell}{2\pi R} \hat{\theta} + \vec{M}_s, \vec{B}_1 = \vec{B}_0 = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{NI - M_s \ell}{2\pi R} \hat{\theta} + \vec{M}_s \right)$</p> <p>b) $\vec{H}_1 = -\frac{M_r \ell}{2\pi R} \hat{\theta}, \vec{H}_0 = \vec{M}_r - \frac{M_r \ell}{2\pi R} \hat{\theta}, \vec{B}_1 = \vec{B}_0 = \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{M}_r - \frac{M_r \ell}{2\pi R} \hat{\theta} \right)$</p>
(P) 18.8	<p>a) $\Phi = \frac{NI_0 \mu \mu_0 a^2}{32a\mu_0 + 2g\mu}, L = \frac{N^2 \mu \mu_0 a^2}{32a\mu_0 + 2g\mu}$</p> <p>b) $\vec{F} = \frac{N^2 I_0^2 \mu^2 \mu_0 a^2}{(32a\mu_0 + 2g\mu)^2}$ la fuerza es atractiva.</p>
(P) 18.9	<p>a) $\vec{B} = \frac{1.6 I_0}{2000\pi r + I_0} \hat{\theta}, \vec{H} = \frac{I_0}{2\pi r} \hat{\theta}$</p> <p>b) $\vec{M} = \left(\frac{1.6 I_0}{\mu_0(2000\pi r + I_0)} - \frac{I_0}{2\pi r} \right) \hat{\theta}$</p>
(P) 18.10	<p>a) $\vec{H}_1 = \frac{NI}{2\pi R_2 + (\frac{\mu}{\mu_0} - 1)e}, \vec{H}_2 = \frac{\frac{\mu}{\mu_0} NI}{2\pi R_2 + (\frac{\mu}{\mu_0} - 1)e}, B = \frac{\mu NI}{2\pi R_2 + (\frac{\mu}{\mu_0} - 1)e}$</p> <p>b) $P = \frac{g\pi e}{2} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right) \left[\frac{R_1^2}{4} + R_1^4 \ln \frac{a}{R_1} \right]$</p>
(P) 18.11	<p>a) $\vec{K}_1 = \frac{M_0 x}{a} \hat{x}, \vec{K}_2 = -\frac{M_0 x}{a} \hat{x}, \vec{K}_3 = M_0 \hat{x}$. En las otras caras no hay densidades superficiales. $\vec{J} = -\frac{M_0}{a} \hat{y}$</p> <p>b) $\vec{J} = 0, \vec{K} = M_0 \hat{z} \sin \theta, \vec{B} = \frac{\mu_0 M_0}{2R} \hat{x}$</p>



Bibliografía

- [1] BARGER, V., AND OLSSON, M. G. *Classical electricity and magnetism: a contemporary perspective*. Allyn & Bacon, 1987.
- [2] CORDERO, P. *Electromagnetismo*. Editorial Universitaria, 2015.
- [3] DOURMASHKIN, P., LIAO, S.-B., AND WINSTON BELCHER, J. *Introduction to electricity and magnetism*. Pearson, 2013.
- [4] GRIFFITHS, D. J., AND COLLEGE, R. *Introduction to electrodynamics*, vol. 3. Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 1999.
- [5] LIM, Y.-K. *Problems and solutions on quantum mechanics*, vol. 6. World Scientific, 1998.
- [6] NAYFEH, M. H., AND BRUSSEL, M. K. *Electricity and magnetism*. Courier Dover Publications, 2015.
- [7] NÚÑEZ CUBERO, F., LÓPEZ PÉREZ, E., ET AL. *100 problemas de electromagnetismo*. Alianza Editorial, 1997.
- [8] POLLACK, G. L., AND STUMP, D. R. *Electromagnetism*. Addison-Wesley, 2002.
- [9] PURCELL, E. M. *Electricidad y magnetismo*, vol. 2. Reverté, 1988.
- [10] RODRÍGUEZ, V. L. *Problemas resueltos de Electromagnetismo*. Editorial Universitaria Ramon Areces, 2003.
- [11] SERWAY, R. A., JEWETT, J. W., PEDROZA, M. D. C. R., AND LÓPEZ, E. F. *Física para ciencias e ingeniería*, 7 ed., vol. 2. Cengage Learning Editores, 2015.