Matrices

1

ACTIVIDADES

1. Página 10

La matriz consta de dos filas que corresponden a los alumnos y cuatro columnas con sus calificaciones. Así:

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 10 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Página 10

La matriz solución es $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Página 10

La matriz solución es $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Página 11

Como las dos matrices tienen la misma dimensión, los elementos de cada una tienen que ser iguales, es decir:

$$\begin{cases} a+1=3 \\ 2a+1=b+1 \\ 2=d-1 \\ c-2=2c \\ 3-a=1 \\ 6=b+2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \\ c=-2 \\ d=3 \end{cases}$$

Así pues, las dos matrices son $A=B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

5. Página 11

La matriz solución es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Página 12

La matriz solución es: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ Matriz triangular superior

7. Página 12

La respuesta es abierta, con la condición de que los elementos de la diagonal principal sumen 7 y el resto de elementos sea 0. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

8. Página 12

La respuesta es abierta, con la condición de que los elementos de la diagonal principal sean cero, y los demás no.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 11 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Página 12

La matriz solución es: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz triangular inferior

10. Página 13

La matriz solución es $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Página 13

Para la comprobación usaremos la notación $A = (a_{ij})$. Así pues: $A^t = (a_{ij})^t = (a_{ji})^t = (a_{ij}) = A$

La igualdad $(a_{ij})^t = (a_{ji})^t$ se verifica por la propiedad conmutativa de la suma.

Una matriz que cumpla estas condiciones puede ser, por ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

12. Página 14

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -8 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -10 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 7 & -16 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$$

13. Página 14

La matriz traspuesta de *A* es $A^t = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. Así pues:

$$A + A^t - I \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 11 \\ 11 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 11 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$$

14. Página 14

En primer lugar, calculamos $B + C$. Es decir:

$$B+C=\begin{pmatrix} a-2 & 9 & c+9 & 4 \\ 2 & 0 & a-3 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 & b \\ 1 & e & 7 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a-3 & 9 & c+9 & b+4 \\ 3 & e & a+4 & d+6 \end{pmatrix}$$

Al tener las mismas dimensiones, hay que igualar los elementos de la matriz A con la matriz anterior. Es decir:

$$\begin{cases} a=2a-3 \\ b=9 \\ 7=c+9 \\ 8+d=b+4 \\ a=3 \\ 9=e \\ c+9=a+4 \\ e+2=d+6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=9 \\ c=-2 \\ d=5 \\ e=9 \end{cases}$$

15. Página 15

a) $3A-B+2C=3\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$

b) $2C+B-3A=2\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

16. Página 15

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=-1+4+9=12$

b) $B\cdot A=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

c) $2A\cdot 3B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}=-6+24+54=72$

d) $(-2B)\cdot A=\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -4 & -8 & -12 \\ -6 & -12 & -18 \end{pmatrix}$

17. Página 16

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

b) $B\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 11 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

c) $A^t\cdot B$ no se puede realizar, ya que el número de columnas de A^t no coincide con el número de filas de B.

18. Página 16

$$A\cdot B\cdot C=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & 11 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 52 & -55 & -13 \\ 13 & -20 & 13 \end{pmatrix}$$

19. Página 17

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}2&3\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&4\\0&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&26\\-7&-4\end{pmatrix}$ $\qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}7&4\\0&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&21\\-6&0\end{pmatrix}$ → No son conmutables.

b) $A\cdot(B+C)=\begin{pmatrix}2&3\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}7&4\\0&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2&3\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10&5\\1&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23&34\\-10&-5\end{pmatrix}$

$A\cdot B+A\cdot C=\begin{pmatrix}2&3\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&4\\0&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&3\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&26\\-7&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9&8\\-3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23&34\\-10&-5\end{pmatrix}$

20. Página 17

Deberá comprar al proveedor que le salga más barato. Por ello, hay que calcular el coste total:

El coste comprando al proveedor *M* asciende a $(6{,}50 \quad 1{,}50)\cdot\begin{pmatrix}0{,}7&0{,}6&0{,}5\\0{,}3&0{,}4&0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}100\,000\\550\,000\\50\,000\end{pmatrix}=$ 3 175 000 €.

El coste comprando al proveedor *N* asciende a $(6{,}70 \quad 1{,}10)\cdot\begin{pmatrix}0{,}7&0{,}6&0{,}5\\0{,}3&0{,}4&0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}100\,000\\550\,000\\50\,000\end{pmatrix}=$ 3 150 000 €.

Por tanto, deberá comprar al proveedor *N*.

21. Página 18

El rango de la matriz A es 2, ya que no existen *a*, *b* y *c* tales que $F_2=a\cdot F_1$, $F_3=b\cdot F_1$ o $F_3=c\cdot F_2$ y, sin embargo, $F_3=F_1+F_2$.

El rango de la matriz B es 2, ya que no existen *a*, *b* y *c* tales que $F_2=a\cdot F_1$, $F_3=b\cdot F_1$ o $F_3=c\cdot F_2$ y sin embargo, $F_3=2F_1+F_2$.

22. Página 18

El rango de *A* es 2, ya que no existe *a* tal que $F_2=a\cdot F_1$.

El rango de *B* es 1, ya que $F_3=3\cdot F_1$ y $F_2=2\cdot F_1$.

El rango de $A\cdot B^t$ es 1, ya que $A\cdot B^t=\begin{pmatrix}3&-2\\1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&-4&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&14&21\\-7&-14&-21\end{pmatrix}$

y, además, $F_2=-F_1$.

23. Página 19

El rango de la matriz *A* es 2:

$$\begin{pmatrix}-1&2&1&3\\3&-1&4&-2\\1&3&6&4\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_1+F_3]{F_2=F_2+3F_1}\begin{pmatrix}-1&2&1&3\\0&5&7&7\\0&5&7&7\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3=F_2-F_3}\begin{pmatrix}-1&2&1&3\\0&5&7&7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

El rango de la matriz *B* es 3:

$$\begin{pmatrix}1&4&3\\-2&-1&0\\1&2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2+2F_1}\begin{pmatrix}1&4&3\\0&7&6\\0&-2&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3=7F_3+2F_2}\begin{pmatrix}1&4&3\\0&7&6\\0&0&-23\end{pmatrix}$$

24. Página 19

$$A^t \cdot B - C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -m+2 \end{pmatrix}$$

El rango está en función del parámetro *m*. Por el método de Gauss se tiene que $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -m+2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -m+1 \end{pmatrix}$.

Así pues, si $m=1$, entonces el rango de $A^t \cdot B - C^t$ es 1, y si $m \neq 1$, entonces el rango es 2.

25. Página 20

a) Buscamos una matriz *B* tal que $A \cdot B = I$ y $B \cdot A = I$. Si $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, tenemos que:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b & 3c+d \\ 2a+b & 2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \to \begin{cases} 3a+b=1 \\ 3c+d=0 \\ 2a+b=0 \\ 2c+d=1 \end{cases} \to \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-1 \\ d=3 \end{cases} \to B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar que: $B \cdot A = I \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\left(A^{-1}\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \to \left(A^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

26. Página 20

Para ver si una matriz es invertible, podemos calcular el rango de dicha matriz.

$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to$ Como el rango es 2, entonces la matriz es invertible.

27. Página 20

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & 2-2 \\ -6+6 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

28. Página 21

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para ver que hemos obtenido la inversa, basta con comprobar que $I = A \cdot A^{-1}$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \to B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Para ver que hemos obtenido la inversa, basta con comprobar que $I = B \cdot B^{-1}$:

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

29. Página 21

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{array}\right) \longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

30. Página 22

Despejando X en la ecuación, tenemos que $X = A^{-1} \cdot B$. Mediante el procedimiento de Gauss-Jordan:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Así pues:

$$X = A^{-1} \cdot B \to X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

31. Página 22

Despejando X en la ecuación, tenemos que $X = B \cdot A^{-1}$. Mediante el procedimiento de Gauss-Jordan:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Así pues:

$$X = B \cdot A^{-1} \to X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

32. Página 23

En primer lugar, despejamos X, es decir: $A^t \cdot X - B = 0 \to A^t \cdot X = B \to X = \left(A^t\right)^{-1} \cdot B$

En segundo lugar, calculamos $\left(A^t\right)^{-1}$:

$$\left(A^t\right)^{-1} \to \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, multiplicamos y obtenemos que:

$$X = \left(A^t\right)^{-1} \cdot B \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

33. Página 23

Despejamos *X*, es decir, $X\cdot A+A=2A^2 \rightarrow X\cdot A=2A^2-A \rightarrow X=\left(2A^2-A\right)\cdot A^{-1} \rightarrow X=2A-I$.

Así pues:

$$X=2A-I \rightarrow X=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & -2 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}$$

SABER HACER

34. Página 24

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad A-B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

Sumando las dos ecuaciones, se obtiene:

$$2A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix} \rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2}\\ 1 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

Despejando en la primera ecuación:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2}\\ 1 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{3}{2}\\ -1 & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

35. Página 24

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 10\\ 0 & -3 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 10\\ 0 & -3 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -14 & 30\\ 0 & -9 & 19\end{pmatrix} \qquad A^3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -14 & 30\\ 0 & -9 & 19\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 10\\ 0 & -3 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -34 & 70\\ 0 & -21 & 43\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -34 & 70\\ 0 & -21 & 43\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 10\\ 0 & -3 & 7\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \alpha=7,\ \beta=-6$$

36. Página 25

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad A^3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{101}=\begin{pmatrix}1 & 101 & 101\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

37. Página 25

$PM=(I-M)\cdot M=IM-M^2=M-M=0$

$MP=M\cdot(I-M)\ =MI-M^2=M-M=0$

Así, resulta: $PM=MP=0$.

38. Página 26

La matriz resultado es de dimensión 1×3, donde cada elemento representa lo que cuestan en total todos los productos en cada fábrica.

$$\begin{pmatrix} 25 & 30 & 60 & 75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 34 & 40 & 46 \\ 11 & 8 & 12 \\ 23 & 27 & 32 \\ 25 & 21 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4435 & 4435 & 5680 \end{pmatrix}$$

La primera y la segunda fábricas ofrecen el mismo precio por este pedido.

39. Página 26

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+1 & xy \\ yx & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x^2+1=2 \\ xy=-2 \\ y^2=4 \end{cases}$$

- Si $y = 2$, entonces $x = -1 \to A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
- Si $y = -2$, entonces $x = 1 \to A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

40. Página 27

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -8 & -7 \\ 3 & 2-a & 3 & 3+a \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=4F_3-3F_1]{F_2=2F_2+F_1} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & -18 & -13 \\ 0 & 11-4a & 18 & 9+4a \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_2+F_3} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & -18 & -13 \\ 0 & 4-4a & 0 & -4+4a \end{pmatrix}$$

- Si $a=1$, entonces Rango $(A) = 2$.
- Si $a \neq 1$, entonces Rango $(A) = 3$.

41. Página 27

Para que la matriz sea invertible, es necesario que su rango sea máximo (en este caso 3).

$$\begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & 0 & -k-1 \end{pmatrix}$$

Entonces, para los valores que anulan la diagonal principal (–1 y 2) la matriz *M* no tiene rango 3. Por tanto, estos son los valores para los que *M* no tiene inversa.

42. Página 27

$$\left.\begin{array}{l} 2X+Y=A^2 \to \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 12 & 31 \end{pmatrix} \\ X-Y=A^{-1} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Sumando las dos ecuaciones, obtenemos:

$$3X = \begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 14 & 30 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} 2/3 & 7 \\ 14/3 & 10 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$Y = \begin{pmatrix} 2/3 & 7 \\ 14/3 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/3 & 4 \\ 8/3 & 11 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES FINALES

43. Página 28

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 4 & 15 & 14 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

44. Página 28

La matriz solución es $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

45. Página 28

Al tener las mismas dimensiones, hay que igualar los elementos de la matriz *A* con los de la matriz *B*:

$$\begin{cases} 1=1 \\ 2=2 \\ x+3=y \\ 3=3 \\ x=2y-5 \\ -4=-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$$

46. Página 28

a) $A+B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

b) $A-B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A-2B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 8 & 4 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ -6 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

d) $2A+3B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ 12 & 6 & -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & -5 & 6 \\ 16 & 8 & -7 \end{pmatrix}$

47. Página 28

a) $(n\times m)\cdot(m\times p)\rightarrow(n\times p)$

b) $(m\times n)\cdot(n\times p)\rightarrow(m\times p)$

c) $(m\times p)\cdot(p\times n)\rightarrow(m\times n)$

d) $(p\times n)\cdot(n\times m)\rightarrow(p\times m)$

e) $(m\times p)\cdot(p\times n)+(m\times n)\rightarrow(m\times n)$

f) $(p\times m)\cdot(m\times n)-(p\times n)\rightarrow(p\times n)$

48. Página 28

a) 2×4 b) 3×6 c) 3×3 d) 6×3 e) 4×6 f) 4×2

49. Página 28

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ b) $B^t\cdot A=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 4 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ c) $A^2=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

50. Página 28

Para la comprobación usaremos la notación $A=(a_{ij})$. Así pues: $(A^t)^t=\left[(a_{ij})^t\right]^t=(a_{ji})^t=(a_{ij})=A$.

51. Página 28

Para la comprobación usaremos la notación $A=(a_{ij})$. Así pues: $A^t=(a_{ij})^t=(-a_{ji})^t=-(a_{ji})^t=-(a_{ij})=-A$.

La igualdad $(a_{ij})^t=(-a_{ji})^t$ se verifica porque $i-j=-(j-i)$.

52. Página 28

a) $AB=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -2 & 26\\ -3 & 4 & 11\end{pmatrix}$

b) No es posible.

c) $BC=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -16 & -19\\ -5 & 16 & 24\end{pmatrix}$

d) $CB^t=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 1\\ 5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28 & -22\\ 2 & 3\\ -15 & 8\end{pmatrix}$

53. Página 28

a) $A\cdot B\cdot C=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & -1\\ 0 & 3\\ 5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 3 & -4\\ 7 & -9 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & -1\\ 0 & 3\\ 5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-60 & 14\\ 76 & -34\end{pmatrix}$

b) $A\cdot C^t+B=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & 0 & 5\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -9 & -5\\ 23 & 3 & 15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -12 & -4\\ 24 & 3 & 16\end{pmatrix}$

c) $B^t\cdot A-C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8 & -1\\ 0 & 3\\ 5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 3 & 9\\ 2 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8 & -1\\ 0 & 3\\ 5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -4\\ 3 & 6\\ -3 & -2\end{pmatrix}$

d) $B\cdot C\cdot A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & -1\\ 0 & 3\\ 5 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & -11\\ 13 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-54 & -74\\ -16 & -40\end{pmatrix}$

e) $A^t\cdot C^t=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & 0 & 5\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 9 & -5\\ -25 & 3 & -15\end{pmatrix}$

f) $B^t\cdot C^t=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & 0 & 5\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 3 & 10\\ -24 & 0 & -15\\ 7 & 3 & 5\end{pmatrix}$

54. Página 28

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -3\end{pmatrix} \qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -3\end{pmatrix}$$

55. Página 28

Se quieren encontrar las matrices $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ tales que $A\cdot X=X\cdot A$.

$$A\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ c & d\end{pmatrix} \qquad X\cdot A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & a+b\\ c & c+d\end{pmatrix}$$

Igualando cada término, obtenemos que: $\begin{cases}a+c=a\\ b+d=a+b\\ c=c\\ c+d=d\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=\alpha\\ b=\lambda\\ c=0\\ d=\alpha\end{cases}\rightarrow X=\begin{pmatrix}\alpha & \lambda\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$

56. Página 28

Para que la matriz *B* conmute con la matriz *A* es necesario que dicha matriz sea cuadrada de dimensión 2.

$$B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

Como la matriz *B* tiene que ser triangular superior, entonces $c=0$. Así pues, $B=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b+3d\\ -a & -b+2d\end{pmatrix} \qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b & 3a+2b\\ -d & 2d\end{pmatrix}$$

Igualando cada término, se tiene que: $\begin{cases}a=a-b\\ -a=-d\\ b+3d=3a+2b\\ -b+2d=2d\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=\lambda\\ b=0\\ c=0\\ d=\lambda\end{cases}$ Como $a+d=2\rightarrow\lambda+\lambda=2\rightarrow\lambda=1$.

Por tanto, la matriz buscada es $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

57. Página 28

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 5 & 8\end{pmatrix} \qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 5 & 8\end{pmatrix}$

b) Sea $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. La matriz *X* tiene que verificar $A\cdot X=X\cdot A$. Entonces:

$$A\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a & 3b\\ -a+2c & -b+2d\end{pmatrix} \qquad X\cdot A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a-b & 2b\\ 3c-d & 2d\end{pmatrix}$$

Por tanto, igualando cada término, se tiene que:

$$\begin{cases}3a=3a-b\\ 3b=2b\\ -a+2c=3c-d\\ -b+2d=2d\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=\lambda\\ b=0\\ c=\alpha-\lambda\\ d=\alpha\end{cases}\rightarrow X=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ \alpha-\lambda & \alpha\end{pmatrix}$$

58. Página 28

Sea $P=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$:

$$P\cdot C=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xa-yb & xb+ay \\ -ya-xb & -yb+xa \end{pmatrix} \qquad C\cdot P=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax-by & ay+bx \\ -bx-ay & -by+ax \end{pmatrix}$$

Así pues, las matrices *C* y *P* son siempre conmutables.

59. Página 28

Sean $A\in M$ y $B\in M$:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ bc+ad & -bd+ac \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$$

Por otro lado:

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=a^2c^2+b^2d^2-2acbd+a^2d^2+b^2c^2+2adbc=$$
$$=a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)=a^2+b^2=1$$

60. Página 28

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^2+t\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 14 & 14 \end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} t & -t \\ 2t & 3t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}$$

Igualando los términos, se obtiene que $t=-3$.

61. Página 28

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix}=5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1+y^2 & x+yz \\ x+yz & x^2+z^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Igualando cada término, tenemos que:

$$\begin{cases} 1+y^2=5 \\ x+yz=0 \\ x^2+z^2=5 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} (x_1, y_1, z_1)=(2, 2, -1) \\ (x_2, y_2, z_2)=(-2, 2, 1) \\ (x_3, y_3, z_3)=(2, -2, 1) \\ (x_4, y_4, z_4)=(-2, -2, -1) \end{cases}$$

62. Página 28

Realizando las operaciones e igualando cada término, tenemos que:

$x^2+3=2-2x\rightarrow x^2+2x+1=0\rightarrow x=-1$

Como observación, el resto de ecuaciones no aporta información sobre la variable *x*.

Por consiguiente, si $x=-1$, se cumple la igualdad pedida.

63. Página 28

$$\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & 2 & -1 \\ 1 & 0 & x-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 2x & -5 \\ x & 2 & -1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} x^2-1 & 2x & 1-2x \\ x & 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 2x & -5 \\ x & 2 & -1 \end{pmatrix}\rightarrow x=3$$

Como observación, la solución $x=-3$ no es válida ya que no se verificaría para el tercer elemento de la primera fila.

64. Página 28

$$B\cdot\begin{pmatrix}\lambda & 0\\3 & 1\end{pmatrix}=B\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\9 & 3\end{pmatrix}\rightarrow B\cdot\begin{pmatrix}\lambda & 0\\3 & 1\end{pmatrix}-B\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\9 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow B\cdot\left[\begin{pmatrix}\lambda & 0\\3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0\\9 & 3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

Si $B=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda-3 & 0\\-6 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}(\lambda-3)a-6b=0\\-2b=0\\(\lambda-3)c-6d=0\\-2d=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(\lambda-3)a=0\\b=0\\(\lambda-3)c=0\\d=0\end{cases}\rightarrow\lambda=3$$

Así pues, $B=\begin{pmatrix}a & 0\\c & 0\end{pmatrix}$.

65. Página 29

Una matriz antisimétrica de orden 2 verifica que $A=\begin{pmatrix}0 & a\\-a & 0\end{pmatrix}$. Así:

$$A=\begin{pmatrix}0 & a\\-a & 0\end{pmatrix}\rightarrow A^2=\begin{pmatrix}-a^2 & 0\\0 & -a^2\end{pmatrix}\rightarrow A^4=\begin{pmatrix}a^4 & 0\\0 & a^4\end{pmatrix}$$

Por tanto: $a^4=16\rightarrow a=\pm\sqrt[4]{16}\rightarrow a=\pm2$

66. Página 29

No se puede asegurar. Por ejemplo, si tomamos las siguientes matrices, su producto no es conmutativo:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Para que conmute el producto es necesario y suficiente que la matriz *A* tenga su diagonal formada por el mismo número:

$$A=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\0 & a & 0\\0 & 0 & a\end{pmatrix}=a\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=a\cdot I$$

Así, el producto de esta matriz *A* con otra matriz *B* será conmutativo.

67. Página 29

Sea $B=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c & b+d\\2a+c & 2b+d\end{pmatrix}\qquad B\cdot A^t=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & 2a+b\\c+d & 2c+d\end{pmatrix}$$

Igualando cada término, se tiene que:

$$\begin{cases}a+c=a+b\\b+d=2a+b\\2a+c=c+d\\2b+d=2c+d\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=\alpha\\b=\lambda\\c=\lambda\\d=2\alpha\end{cases}\ \rightarrow\ B=\begin{pmatrix}\alpha & \lambda\\\lambda & 2\alpha\end{pmatrix}$$

68. Página 29

$$M^2-2M=3I\to\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a^2+b^2&2ab\\2ab&a^2+b^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2a&2b\\2b&2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$$

Así, igualando los términos correspondientes, se tiene que:

$$\begin{cases}a^2+b^2-2a=3\\2ab-2b=0\to 2b(a-1)=0\end{cases}$$

- Si $b=0\ \to\ a^2+b^2-2a=3\to a^2-2a-3=0\to a_1=3,\ a_2=-1$
- Si $a=1\ \to\ a^2+b^2-2a=3\to 1+b^2-2=3\to b_1=2,\ b_2=-2$

$$M=\left\{\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}\right\}$$

69. Página 29

$$X^2-4X+I=\begin{pmatrix}1&0\\0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}m^2&0\\0&4\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}m&0\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}m^2-4m+1&0\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-3\end{pmatrix}\to m^2-4m+1=1\to\begin{cases}m=0\\m=4\end{cases}$$

70. Página 29

$$A^2+B^2=\begin{pmatrix}8&8\\6&12\end{pmatrix}\ \to\ A^2+B^2=\left[\begin{pmatrix}1&x\\2&1\end{pmatrix}\right]^2+\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix}1+2x&2x\\4&2x+1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+2&2x+2\\6&2x+6\end{pmatrix}\to x=3.$$

71. Página 29

$$(A\cdot B)^t=\left[\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&-1\\3&-2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\right]^t=\left[\begin{pmatrix}-1&1&1\\6&8&-8\end{pmatrix}\right]^t=\begin{pmatrix}-1&6\\1&8\\1&-8\end{pmatrix}$$

$$B^t\cdot A^t=\left[\begin{pmatrix}2&1&-1\\3&-2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\right]^t\cdot\left[\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&-5\end{pmatrix}\right]^t=\begin{pmatrix}2&3&0\\1&-2&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\-1&0\\2&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&6\\1&8\\1&-8\end{pmatrix}$$

72. Página 29

$$(I+A)^3=mI+nA\to\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}17&29\\-10&-17\end{pmatrix}\right]^3=m\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}17&29\\-10&-17\end{pmatrix}$$

$$\to\left[\begin{pmatrix}18&29\\-10&-16\end{pmatrix}\right]^3=m\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}17&29\\-10&-17\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}32&58\\-20&-36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17n+m&29n\\-10n&-17n+m\end{pmatrix}$$

Igualando término a término, se tiene que $m=-2$ y $n=2$.

73. Página 29

$$A^2+\alpha\cdot A+\beta\cdot I=0\to\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}5+2\alpha+\beta&4+\alpha\\4+\alpha&5+2\alpha+\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\to\begin{cases}\alpha=-4\\\beta=3\end{cases}$$

74. Página 29

La matriz *B* debe tener dimensión 3×2 para que se pueda multiplicar con *A* y, además, para que tengamos como resultado una matriz 2×2.

Como la primera fila es $\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} -2+2e & 2f \\ 4+c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando términos, se tiene que:

$$\begin{cases} -2+2e=0 \\ 2f=2 \\ 4+c=3 \\ d=1 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} c=-1 \\ d=1 \\ e=1 \\ f=1 \end{cases}\rightarrow B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

75. Página 29

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, A y B no cumplen la propiedad conmutativa para el producto.

76. Página 29

Debido a que la matriz *A* es antisimétrica, tenemos que $A=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$.

Así:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -6 & -10 & -2 \\ 3 & -2 & -13 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} -(a^2+b^2) & -bc & ac \\ -bc & -(a^2+c^2) & -ab \\ ac & -ab & -(b^2+c^2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -6 & -10 & -2 \\ 3 & -2 & -13 \end{pmatrix}$$

Igualando cada término, se tiene que:

$$\begin{cases} -(a^2+b^2)=-5 \\ -bc=-6 \\ ac=3 \\ -(a^2+c^2)=-10 \\ -ab=-2 \\ -(b^2+c^2)=-13 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} (a,b,c)=(1,2,3) \\ (a,b,c)=(-1,-2,-3) \end{cases}$$

Por tanto: $A=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

77. Página 29

a) $(A+B)^2 = \left[\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^2 + B^2 + 2\cdot A\cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 8 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -8 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 12 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ -8 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\left.\begin{cases} (A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2 + A\cdot B + B\cdot A + B^2 \\ (A+B)^2 = A^2 + 2\cdot A\cdot B + B^2 \end{cases}\right\} \to A\cdot B = B\cdot A$

Para que se verifique la igualdad, las matrices deben cumplir la propiedad conmutativa de la multiplicación.

78. Página 29

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 5c+2d & 2c+5d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 2d+5b & 0 \\ 5c+2a & 5d+2b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando cada término, se tiene que:

$$\begin{cases} 5a+2c = 5a+2b \\ 2d+5b = 2a+5b \\ 5c+2a = 5c+2d \\ 5d+2b = 2c+5d \end{cases} \to \begin{cases} a = \lambda \\ b = \alpha \\ c = \alpha \\ d = \lambda \end{cases}$$

Las matrices que conmutan son de la forma $M = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Por otro lado:

$$a+d+1 = 5 \to \lambda+\lambda+1 = 5 \to 2\lambda = 4 \to \lambda = 2$$

La matriz que conmuta con la dada, cuyos elementos de la diagonal principal suman 5, y donde $a_{11} = -a_{12}$, está determinada por:

$$a+b = 0 \to 2+\alpha = 0 \to \alpha = -2 \;\to\; M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

79. Página 29

$$X^2 = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 & m+a & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} m^2 = 1 \to m = \pm 1 \\ m+a = 0 \to m = -a \\ a^2 = 1 \to a = \pm 1 \\ s^2 = 1 \to s = \pm 1 \end{cases}$$

Así:

$$X = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

80. Página 29

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2+2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2\cdot 2&1\end{pmatrix}\qquad A^3=\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\4+2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\6&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2\cdot 3&1\end{pmatrix}$$

$$A^n=\begin{pmatrix}1&0\\2(n-1)&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2n-2+2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2n&1\end{pmatrix}\qquad A^{41}=\begin{pmatrix}1&0\\2\cdot 41&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\82&1\end{pmatrix}$$

81. Página 29

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\qquad A^2=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\qquad A^3=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^n=\begin{pmatrix}1&-(n-1)\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-n\\0&1\end{pmatrix}$$

$$T_n=I+A+A^2+\dots+A^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix}1&-n\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n+1&-\dfrac{n(n+1)}{2}\\0&n+1\end{pmatrix}$$

82. Página 29

$$A^2=2A-I$$

$$A^3=(2A-I)A=2A^2-A=2(2A-I)-A=3A-2I$$

$$A^4=4A-3I$$

$$A^n=nA-(n-1)I$$

83. Página 29

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

b) $A^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\qquad A^3=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\4&4\end{pmatrix}\qquad A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}$

$B^2=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}\qquad B^3=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-4\\-4&4\end{pmatrix}\qquad B^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&-2^{n-1}\\-2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}$

84. Página 29

a) $A\cdot B=B\cdot A\rightarrow\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\a+c&b+d\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&b\\c+d&d\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}a=a+b\\b=b\\a+c=c+d\\b+d=d\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=\lambda\\b=0\\c=\alpha\\d=\lambda\end{cases}\rightarrow B=\begin{pmatrix}\lambda&0\\\alpha&\lambda\end{pmatrix}$$

b) $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\qquad A^3=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}\qquad A^n=\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}$

85. Página 29

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&0&0\\2&0&2\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&0&0\\2&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&4\\0&0&0\\4&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2&0&2^2\\0&0&0\\2^2&0&2^2\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}4&0&4\\0&0&0\\4&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&8\\0&0&0\\8&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^3&0&2^3\\0&0&0\\2^3&0&2^3\end{pmatrix}$$

$$A^5=\begin{pmatrix}8&0&8\\0&0&0\\8&0&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&0&16\\0&0&0\\16&0&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^4&0&2^4\\0&0&0\\2^4&0&2^4\end{pmatrix}$$

$$A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&0&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}$$

86. Página 29

a) $A\cdot M=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+3c&b+3d\\2c&2d\end{pmatrix}$ $\qquad M\cdot A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&3a+2b\\c&3c+2d\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}a+3c=a\\b+3d=3a+2b\\2c=c\\2d=3c+2d\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=\lambda\\b=3(\alpha-\lambda)\\c=0\\d=\alpha\end{cases}\rightarrow M=\begin{pmatrix}\lambda&3(\alpha-\lambda)\\0&\alpha\end{pmatrix}$$

b) $A^2=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&9\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&b_2\\0&2^2\end{pmatrix}$, donde $b_2=2\cdot 3+3=2\cdot b_1+3$

$A^3=\begin{pmatrix}1&9\\0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&21\\0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&b_3\\0&2^3\end{pmatrix}$, donde $b_3=2\cdot 9+3=2\cdot b_2+3$

$A^4=\begin{pmatrix}1&21\\0&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&45\\0&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&b_4\\0&2^4\end{pmatrix}$, donde $b_4=2\cdot 21+3=2\cdot b_3+3$

$A^n=\begin{pmatrix}1&b_n\\0&2^n\end{pmatrix}$, donde $b_n=2\cdot b_{n-1}+3$

Además de expresar A^n recurrentemente, se puede escribir de la siguiente forma:

$$A^n=\begin{pmatrix}1&3\sum_{i=1}^{n}2^{i-1}\\0&2^n\end{pmatrix}$$

87. Página 29

a) $M^2=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&2ab\\0&a^2\end{pmatrix}$ $\qquad M^3=\begin{pmatrix}a^2&2ab\\0&a^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^3&3a^2b\\0&a^3\end{pmatrix}$

$M^4=\begin{pmatrix}a^3&3a^2b\\0&a^3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^4&4a^3b\\0&a^4\end{pmatrix}$ $\qquad M^n=\begin{pmatrix}a^n&na^{n-1}b\\0&a^n\end{pmatrix}$

b) $M^{100}=\begin{pmatrix}a^{100}&100a^{99}b\\0&a^{100}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\rightarrow a=\pm 1$

- Si $a=1\longrightarrow b=\frac{1}{100}\longrightarrow M_1=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{100}\\0&1\end{pmatrix}$
- Si $a=-1\longrightarrow b=-\frac{1}{100}\longrightarrow M_2=\begin{pmatrix}-1&-\frac{1}{100}\\0&-1\end{pmatrix}$

88. Página 30

a) $A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m & m\\ m & -2m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}n & 0\\ 0 & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m+n & m\\ m & -2m+n\end{pmatrix}$$

Así, igualando los términos:

$$\begin{cases}2=m+n\\ -1=m\\ -1=m\\ 5=-2m+n\end{cases}\rightarrow\begin{cases}m=-1\\ n=3\end{cases}$$

b) $A^2=-A+3I\rightarrow A^5=\left(A^2\right)^2\cdot A=(-A+3I)(-A+3I)A=\left(A^2-3A-3A+9I\right)A=$
$=\left((-A+3I)-3A-3A+9I\right)A=(-7A+12I)A=-7A^2+12A=-7(-A+3I)+12A=19A-21I$

Por tanto:

$$A^5=19\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}-21\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 19\\ -38 & -2\end{pmatrix}$$

89. Página 30

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

b) $A^2=\begin{pmatrix}4 & 2\\ m & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2\\ m & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16+2m & 8-6\\ 4m-3m & 2m+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16+2m & 2\\ m & 2m+9\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ m & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16+2m & 2\\ m & 2m+9\end{pmatrix}$$

Así, igualando términos:

$$\begin{cases}4=16+2m\\ m=m\\ 2=2\\ -3=2m+9\end{cases}\rightarrow m=-6$$

c) $\left[\begin{pmatrix}1 & m\\ n & 0\end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix}1+mn & m\\ n & mn\end{pmatrix}\rightarrow mn=0$

Las matrices son del tipo $\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 0\end{pmatrix}$ o bien $\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

90. Página 30

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1n}b_{n1} & \dots & \dots & \dots\\ \dots & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\dots+a_{2n}b_{n2} & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{2n}+\dots+a_{nn}b_{nn}\end{pmatrix}$$

$B\cdot A=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+\dots+b_{1n}a_{n1} & \dots & \dots & \dots\\ \dots & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}+\dots+b_{2n}a_{n2} & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & b_{n1}a_{1n}+b_{n2}a_{2n}+\dots+b_{nn}a_{nn}\end{pmatrix}$$

El primer elemento de la diagonal de la matriz *BA* se compone de todos los primeros sumandos de los elementos de la diagonal de la matriz *AB*.

El segundo elemento de la diagonal de la matriz *BA* se compone de todos los segundos sumandos de los elementos de la diagonal de la matriz *AB*, y así sucesivamente.

b) $Tr(AB)=Tr\begin{pmatrix} 7 & 5\\ 5 & 15\end{pmatrix}=7+15=22$ $\qquad Tr(BA)=Tr\begin{pmatrix} a & 8\\ 2 & -1\end{pmatrix}=a-1$

$a-1=22\rightarrow a=23$

91. Página 30

a) $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 9\\ -1 & -1 & -3\end{pmatrix}$ $\qquad A^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 9\\ -1 & -1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

b) $B^2=\begin{pmatrix} 0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ab & 0\\ 0 & ab\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ Las matrices son del tipo $B=\begin{pmatrix} 0 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ o bien $B=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ b & 0\end{pmatrix}$.

92. Página 30

a) $\begin{pmatrix} 1 & -5\\ 2 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2=F_2-2F_1}\begin{pmatrix} 1 & -5\\ 0 & 11\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ El rango es 2.

b) $\begin{pmatrix} 9 & 6\\ 6 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2=3F_2-2F_1}\begin{pmatrix} 9 & 6\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ El rango es 1.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3=F_3-F_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3=F_3-F_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ El rango es 3.

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 2 & 4 & 0\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2=F_2-2F_3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -4\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{F_1=4F_1+F_2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ El rango es 2.

93. Página 30

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=F_2+2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ → El rango es 2.

b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=2F_3-F_1]{F_2=4F_2+F_1} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=7F_3+9F_2} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ → El rango es 2.

c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3+F_1]{F_2=F_2+3F_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3-F_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ → El rango es 2.

94. Página 30

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2=F_2+4F_1 \\ F_3=F_3+3F_1 \\ F_4=F_4+5F_1}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & -3 & -10 & -13 \\ 0 & -7 & -14 & -18 \\ 0 & -7 & -14 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4=F_4-F_3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & -3 & -10 & -13 \\ 0 & -7 & -14 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3=3F_3-7F_2} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & -3 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & 28 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{El rango es 3.}$$

95. Página 30

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ a & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3-aF_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1-3a & 3-a \end{pmatrix} \rightarrow 3-a=0 \rightarrow a=3$$

Si $a=3$, el rango de la matriz es 2.

96. Página 30

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_1-3F_3]{F_2=F_1+3F_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ 0 & 7 & m \\ 0 & -2 & m-18 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=7F_3+2F_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ 0 & 7 & m \\ 0 & 0 & 9m-126 \end{pmatrix}$$

$9m - 126 = 0 \rightarrow m = 14$

- Si $m = 14$, entonces Rango $(A) = 2$.
- Si $m \neq 14$, entonces Rango $(A) = 3$.

97. Página 30

$$\begin{pmatrix} a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \\ a & a+7 & a+8 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3=C_3-C_1]{C_2=C_2-C_1} \begin{pmatrix} a & 3 & 4 \\ a & 5 & 6 \\ a & 7 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2-F_1} \begin{pmatrix} a & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3-2F_2} \begin{pmatrix} a & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango } (M) = 2$$

Es decir, el rango de la matriz siempre es 2, independientemente del valor del parámetro a.

98. Página 30

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -\frac{1}{2} & -4\\ 4 & -2 & 1 & 8\\ 6 & -3 & \frac{3}{2} & m\end{pmatrix}$$

Las columnas 2 y 3 son linealmente dependientes con la columna 1:

$$C_2=-\frac{1}{2}C_1 \qquad C_3=\frac{1}{4}C_1$$

Si C_4, linealmente dependiente con C_1 $\rightarrow$ Rango = 1

En caso contrario $\rightarrow$ Rango = 2

Esto es:

- $m=12 \rightarrow C_4=2C_1 \rightarrow$ Todas las columnas son linealmente dependientes $\rightarrow$ Rango = 1
- $m\neq 12 \rightarrow$ La primera y la segunda columna son linealmente independientes $\rightarrow$ Rango = 2

99. Página 30

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad A^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1+2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad A^3=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1+2+3\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & n & \frac{(n+1)n}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Su rango es independiente de n y siempre es 3.

100. Página 30

a) Para que $A=\begin{pmatrix}d & a & a\\ b & d & 3\\ c-4 & c & d\end{pmatrix}$ sea antisimétrica, se debe cumplir que:

$$\left.\begin{array}{l}a=-b\\ a=-(c-4)\\ 3=-c\end{array}\right\}\rightarrow a=7, b=-7, c=-3, d=0 \text{. Así, } A=\begin{pmatrix}0 & 7 & 7\\ -7 & 0 & 3\\ -7 & -3 & 0\end{pmatrix}.$$

b) $A=\begin{pmatrix}d & 0 & 0\\ 0 & d & 3\\ -4 & 0 & d\end{pmatrix}\xrightarrow{4F_1+dF_3}\begin{pmatrix}d & 0 & 0\\ 0 & d & 3\\ 0 & 0 & d^2\end{pmatrix}$

- Si $d=0 \rightarrow$ Rango $(A)=1$
- Si $d\neq 0 \rightarrow$ Rango $(A)=3$

101. Página 30

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & a \\ 1 & 3 & -2 \\ a+2 & 0 & a \\ a & 0 & 2a \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & a+2 & a \\ 0 & a & 2a \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=3F_1-F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & -4 & 2+3a \\ 0 & a+2 & a \\ 0 & a & 2a \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4=(a+2)F_4-aF_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & -4 & 2+3a \\ 0 & a+2 & a \\ 0 & 0 & a^2+4a \end{pmatrix}$$

$a^2+4a=0 \rightarrow a_1=0, a_2=-4$. Así, distinguimos dos casos:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq -4$ $\longrightarrow$ Rango $(A) = 3$

- Si $a=0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Rango $(A) = 3$

- Si $a=-4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_2-2F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Rango $(A) = 3$

El rango de A es 3 independientemente del valor de a.

102. Página 31

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2+F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=F_1+5F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=\frac{F_2}{3}} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=4F_2-F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=F_3-F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{F_1=F_1-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{F_2=F_2-2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=2F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

103. Página 31

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=F_1+3F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=3F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=\frac{F_2}{4}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

b) $(A\cdot B)^{-1}$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}-6 & 4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 1\\ -6 & 4 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{F_2=6F_1+F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 1 & 6\end{array}\right)\xrightarrow{F_2=\frac{F_2}{4}}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2}\end{array}\right)$$

$$(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

Se cumple que $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$:

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

104. Página 31

a) $$\left(\begin{array}{cc|cc}-3 & -4 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2=2F_1+3F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}-3 & -4 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{F_1=F_1+4F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}-3 & 0 & 9 & 12\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{F_1=-\frac{1}{3}F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -3 & -4\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{array}\right)$$

b) $$\left(\begin{array}{cc|cc}-3 & 2 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2=3F_2-4F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}-3 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{F_1=F_1-2F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}-3 & 0 & 9 & -6\\ 0 & 1 & -4 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{F_1=-\frac{1}{3}F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -3 & 2\\ 0 & 1 & -4 & 3\end{array}\right)$$

Se puede comprobar que:

$$(A^{-1})^t=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 2 & 3\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -4 & 3\end{pmatrix}=(A^t)^{-1}$$

105. Página 31

a) $$\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{F_2=F_1+F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2=\frac{F_2}{2}}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}0 & 1 & 1 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1/2 & 1/2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{F_1=2F_1-F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$(A^{-1})^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=A$$

b) $$\left(\begin{array}{cc|cc}0 & -2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 3 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{F_2=-\frac{F_2}{2}}\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1/2 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{F_1=3F_2-F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -3/2 & -1\\ 0 & 1 & -1/2 & 0\end{array}\right)$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}-3/2 & -1\\ -1/2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3/2 & -1\\ -1/2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Estos resultados se cumplen para cualquier matriz invertible.

106. Página 31

$A^{-1} = 2I - A \rightarrow AA^{-1} = A(2I - A) = 2A - A^2 = I$

$$2\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2a \\ 2b & 2c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+ab & 2a+ac \\ 2b+cb & ab+c^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -ab & -ac \\ -cb & 2c-ab-c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow c = 0,\ b = -\frac{1}{a}$$

Por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -\frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

107. Página 31

Buscamos una matriz de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 2a+c \\ b & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ -b & -d \end{pmatrix}$$

Así, $M = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pero M no es invertible.

Por tanto, no son semejantes.

108. Página 31

a) $A^2 - 3I = 2A \rightarrow A^2 - 2A = 3I \rightarrow A(A-2I) = 3I \rightarrow A \cdot \left(\frac{1}{3}(A-2I)\right) = I \ \longrightarrow \ A^{-1} = \frac{1}{3}(A-2I)$

b) $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \ \longrightarrow \ \begin{pmatrix} x^2+y^2-3 & 2xy \\ 2xy & x^2+y^2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$

$2xy = 2y \rightarrow x = 1$ o bien $y = 0$

- Si $x = 1 \ \longrightarrow \ x^2 + y^2 - 3 = 2x \rightarrow 1 + y^2 - 3 = 2 \rightarrow y = \pm 2$. Entonces:

  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ o bien $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

- Si $y = 0 \ \longrightarrow \ x^2 + y^2 - 3 = 2x \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \ x = -1,\ x = 3$. Entonces:

  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ o bien $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

109. Página 31

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = BB^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \ \longrightarrow \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{14} & \frac{2}{7} \\ \frac{5}{14} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

110. Página 31

a) $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a-c & a \\ 2b-d & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & 2c+d \\ -a & -c \end{pmatrix} \to \begin{cases} 2a-c=2a+b \\ a=2c+d \\ 2b-d=-a \\ b=-c \end{cases} \to \begin{cases} a=-2\lambda+\alpha \\ b=\lambda \\ c=-\lambda \\ d=\alpha \end{cases}$

Las matrices que conmutan con A son de la forma $\begin{pmatrix} -2\lambda+\alpha & -\lambda \\ \lambda & \alpha \end{pmatrix}$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

$A^n = \begin{pmatrix} n+1 & n \\ -n & -(n-1) \end{pmatrix}$ $\qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1+1 & -1 \\ -(-1) & -(-1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

111. Página 31

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{cF_1-aF_2} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & cb-ad & c & -a \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=cF_1-aF_2} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & cb-ad & c & -a \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=\frac{F_2}{cb-ad}} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{c}{cb-ad} & \frac{-a}{cb-ad} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1=F_1-bF_2} \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1-\frac{bc}{cb-ad} & \frac{ab}{cb-ad} \\ 0 & 1 & \frac{c}{cb-ad} & \frac{-a}{cb-ad} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=\frac{F_1}{a}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{cb-ad-bc}{a(cb-ad)} & \frac{ab}{a(cb-ad)} \\ 0 & 1 & \frac{c}{cb-ad} & \frac{-a}{cb-ad} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-d}{cb-ad} & \frac{b}{cb-ad} \\ \frac{c}{cb-ad} & \frac{-a}{cb-ad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-cb} & \frac{-b}{ad-cb} \\ \frac{-c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-cb} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Para que sea invertible se debe cumplir que $cb-da \neq 0$.

112. Página 31

$A = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5^2 \end{pmatrix}$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1/5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5^3 \\ 0 & 1/5^3 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1/5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1/5^n & 0 \\ 0 & 0 & 1/5^n \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es par.} \\ \begin{pmatrix} 1/5^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5^n \\ 0 & 1/5^n & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

113. Página 31

$A^2+7A=I\to A(A+7I)=I \qquad A^{-1}=A+7I$

114. Página 31

a) $A^t=A^{-1}\to A^tA=I\to \begin{pmatrix}1&0&a\\0&\frac{1}{\sqrt2}&b\\0&\frac{1}{\sqrt2}&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\a&b&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+a^2&ab&ac\\ab&\frac12+b^2&\frac12+bc\\ca&\frac12+bc&\frac12+c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{cases}a=0\\b=\frac{1}{\sqrt2}\\c=-\frac{1}{\sqrt2}\end{cases}$ o $\begin{cases}a=0\\b=-\frac{1}{\sqrt2}\\c=\frac{1}{\sqrt2}\end{cases}$

b) Si $b=\frac{1}{\sqrt2}$ y $c=-\frac{1}{\sqrt2}$, entonces $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\0&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\to A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to A^4=\left(A^2\right)^2=I$.

Si $b=-\frac{1}{\sqrt2}$ y $c=\frac{1}{\sqrt2}$, entonces $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\0&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\to A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\to A^4=\left(A^2\right)^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

115. Página 31

a) $A^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=2I$

b) $A\cdot A=2I\to \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}\cdot A=A^{-1}2I\to\frac12 A=A^{-1}\to A^{-1}=A=\begin{pmatrix}\frac12&\frac12\\\frac12&-\frac12\end{pmatrix}$

c) $A^2=2I\to A^{12}=\left(A^2\right)^6=(2I)^6=2^6I \qquad A^{-1}=\frac12 A\to A^{-12}=\left(A^{-1}\right)^{12}=\left(\frac12 A\right)^{12}=\left(\frac{1}{2^2}A^2\right)^6=\left(\frac{1}{2^2}2I\right)^6=\frac{1}{2^6}I$

116. Página 31

a) $AX=B\ \longrightarrow\ X=A^{-1}AX=A^{-1}B$

b) $XA=B\ \longrightarrow\ X=XAA^{-1}=BA^{-1}$

c) $AX+B=C\ \longrightarrow\ AX=C-B\ \longrightarrow\ X=A^{-1}AX=A^{-1}(C-B)$

d) $AX+A=B\ \longrightarrow\ AX=B-A\ \longrightarrow\ X=A^{-1}AX=A^{-1}(B-A)=A^{-1}B-I$

e) $A^{-1}X=B\ \longrightarrow\ X=AA^{-1}X=AB$

f) $AXB=C\ \longrightarrow\ X=A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$

g) $A^tX=B\ \longrightarrow\ X=\left(A^t\right)^{-1}A^tX=\left(A^t\right)^{-1}B$

h) $AXA=A^2+I\ \longrightarrow\ X=A^{-1}AXAA^{-1}=A^{-1}\left(A^2+I\right)A^{-1}=\left(A^{-1}A^2+A^{-1}\right)A^{-1}=\left(A+A^{-1}\right)A^{-1}=I+\left(A^{-1}\right)^2$

117. Página 31

Si $X=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, se tiene que: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+3 & c-1 \\ b+2 & d-5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a+3=1 \\ b+2=2 \\ c-1=-1 \\ d-5=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=12 \end{cases} \rightarrow X=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$ $\rightarrow$ Es una matriz diagonal.

118. Página 31

Despejamos X, es decir, $A+X=2B \rightarrow X=2B-A$.

Entonces: $X=2B-A \rightarrow X=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

119. Página 31

$$2A-5X=B \rightarrow 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}-5\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}-5\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow 5\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 8/5 \\ 1/5 & 14/5 \end{pmatrix}$$

120. Página 32

Despejamos la matriz *X*.

$$A-A^2=A\cdot B-X \rightarrow -X=A-A^2-A\cdot B \rightarrow X=A^2-A+A\cdot B \rightarrow X=A\cdot(A-I+B)$$

Operamos la matriz para obtener la matriz pedida. En efecto:

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

121. Página 32

La matriz debe ser de orden 2×4 para que se puedan realizar el producto y la suma correspondientes.

Sea $X=\begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & -1 \\ 13 & -3 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

Así, $X=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & -1 \\ 13 & -3 & -10 & 4 \end{pmatrix}$.

122. Página 32

Sea $X=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & c+1 \\ b+1 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a=b+c \\ b+1=a+d \\ c+1=d+a \\ d=c+b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{3} \\ b=\dfrac{1}{3} \\ c=\dfrac{1}{3} \\ d=\dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow X=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

123. Página 32

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -a+2c \\ b & -b+2d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a-b & c-d \\ 2b & 2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a-b & -a+3c-d \\ 3b & -b+4d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a-b=0 \\ 3b=1 \\ -a+3c-d=-2 \\ -b+4d=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{6} \\ b=\dfrac{1}{3} \\ c=-\dfrac{1}{2} \\ d=\dfrac{1}{3} \end{cases} \rightarrow X=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

124. Página 32

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot D\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$D=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

125. Página 32

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \\ -20 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

126. Página 32

$$(X-I)B=A \rightarrow (X-I)BB^{-1}=AB^{-1} \rightarrow X-I=AB^{-1} \rightarrow X=AB^{-1}+I \rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & -4 \\ 10 & 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

127. Página 32

a) $AX - A^t = A \rightarrow AX = A + A^t \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}\left(A + A^t\right) \rightarrow X = I + A^{-1}A^t$

A debe tener inversa. Para ello, el rango de la matriz debe ser 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3+4F_1]{F_2=F_2+5F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 12 & 1+5m \\ 0 & 11 & 1+4m \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=12F_3-11F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 12 & 1+5m \\ 0 & 0 & 1-7m \end{pmatrix}$$

Si $1 - 7m = 0$, la matriz no tiene inversa. Es decir, para $m \neq \frac{1}{7}$ la ecuación sí tiene solución.

b) $$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & -11 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \\ -29 & 25 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \\ -29 & 25 & 8 \end{pmatrix}$$

128. Página 32

$X + XA = B^t \rightarrow X(I + A) = B^t \rightarrow X = B^t(I + A)^{-1}$

$$X \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

129. Página 32

a) $$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=-F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2-7F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

b) $AXA = A^2 + A \rightarrow X = A^{-1}(A^2 + A)A^{-1} = A^{-1}A(A + I)A^{-1} = (A + I)A^{-1} = I + A^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$I + A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

130. Página 32

$XB + A = B + A^2 \rightarrow XB = B + A^2 - A \rightarrow XBB^{-1} = \left(B + A^2 - A\right)B^{-1} \rightarrow X = I + \left(A^2 - A\right)B^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

131. Página 32

a) Sumando a la segunda ecuación la primera, resulta: $3X=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 3 & 3\end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

Despejando en la segunda ecuación, obtenemos *Y*. $X-\begin{pmatrix}1 & -4\\ 3 & 0\end{pmatrix}=Y \rightarrow Y=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -4\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

b) Restando a la primera ecuación la segunda, resulta: $2Y=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 4 & 8\end{pmatrix} \rightarrow Y=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

Despejando en la segunda ecuación, obtenemos *X*. $X=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}-Y=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 1 & -3\end{pmatrix}$

c) Sumando a la segunda ecuación dos veces la primera, resulta: $7X=\begin{pmatrix}14 & -7\\ 7 & 0\end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

Despejando en la primera ecuación, obtenemos *Y*. $3X+Y=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \rightarrow Y=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

d) Multiplicamos la primera ecuación por 3 y le restamos dos veces la segunda.

$$\left.\begin{array}{l}2X+3Y=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 0\end{pmatrix}\\ 3X-2Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & -2\end{pmatrix}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}6X+9Y=\begin{pmatrix}-3 & 15\\ 6 & 0\end{pmatrix}\\ 6X-4Y=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 8 & -4\end{pmatrix}\end{array}\right\} \rightarrow 13Y=\begin{pmatrix}-5 & 15\\ -2 & 4\end{pmatrix} \rightarrow Y=\begin{pmatrix}-\frac{5}{13} & \frac{15}{13}\\ -\frac{2}{13} & \frac{4}{13}\end{pmatrix}$$

Despejando en la primera ecuación, obtenemos *X*:

$$2X=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 0\end{pmatrix}-3Y=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 0\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}-\frac{5}{13} & \frac{15}{13}\\ -\frac{2}{13} & \frac{4}{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{13} & \frac{20}{13}\\ \frac{32}{13} & -\frac{12}{13}\end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix}\frac{1}{13} & \frac{10}{13}\\ \frac{16}{13} & -\frac{6}{13}\end{pmatrix}$$

132. Página 32

$$A^2-AB+BA-B^2=(A+B)A-(A+B)B=(A+B)(A-B)$$

$$(A+B)^{-1}(A+B)(A-B)=(A-B)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -2 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}A+B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\\ A-B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -2 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

Sumando las dos ecuaciones, resulta: $2A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos *B*.

$$B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

133. Página 32

Hay que resolver este sistema:

$$\left.\begin{aligned}2X+Y&=\begin{pmatrix}5&12&7\\4&2&7\end{pmatrix}\\3X+2Y&=\begin{pmatrix}11&25&0\\20&10&35\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 2 y le restamos la segunda para obtener *X*:

$$\left.\begin{aligned}4X+2Y&=\begin{pmatrix}10&24&14\\8&4&14\end{pmatrix}\\3X+2Y&=\begin{pmatrix}11&25&0\\20&10&35\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \to X=\begin{pmatrix}-1&-1&14\\-12&-6&-21\end{pmatrix}$$

Despejando en la primera ecuación, obtenemos *Y*:

$$Y=\begin{pmatrix}5&12&7\\4&2&7\end{pmatrix}-2X=\begin{pmatrix}5&12&7\\4&2&7\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1&-1&14\\-12&-6&-21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&14&-21\\28&14&49\end{pmatrix}$$

134. Página 32

Restando a la primera ecuación la segunda, resulta:

$$BY=C-Y \to BY+Y=C \to (B+I)Y=C \to Y=(B+I)^{-1}C$$

$$Y=\left(\begin{pmatrix}1&-4\\-2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)^{-1}\cdot\begin{pmatrix}6&7\\-2&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4\\-2&0\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}6&7\\-2&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&7\\-2&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{5}{2}\\-1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Despejando en la segunda ecuación, obtenemos *X*:

$$AX=Y \to X=A^{-1}AX=A^{-1}Y=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&\frac{5}{2}\\-1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\frac{5}{2}\\-1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}$$

135. Página 32

$$\left.\begin{aligned}2X+Y&=\begin{pmatrix}5&0&-5\\0&5&0\\-5&0&5\end{pmatrix}\\X-2Y&=\begin{pmatrix}10&10&10\\20&0&20\\0&30&0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\to\left.\begin{aligned}4X+2Y&=\begin{pmatrix}10&0&-10\\0&10&0\\-10&0&10\end{pmatrix}\\X-2Y&=\begin{pmatrix}10&10&10\\20&0&20\\0&30&0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\to 5X=\begin{pmatrix}20&10&0\\20&10&20\\-10&30&10\end{pmatrix}\to X=\begin{pmatrix}4&2&0\\4&2&4\\-2&6&2\end{pmatrix}$$

Despejando en la segunda ecuación, obtenemos *Y*:

$$2Y=\begin{pmatrix}4&2&0\\4&2&4\\-2&6&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10&10&10\\20&0&20\\0&30&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&-8&-10\\-16&2&-16\\-2&-24&2\end{pmatrix}\to Y=\begin{pmatrix}-3&-4&-5\\-8&1&-8\\-1&-12&1\end{pmatrix}$$

136. Página 32

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} \mu & 1 & 1 & 0 \\ -\mu & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} \mu & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=\frac{F_2}{3}} \left(\begin{array}{cc|cc} \mu & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=F_1-F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} \mu & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$

- Si $\mu=0 \longrightarrow$ No existe inversa de A.
- Si $\mu\neq 0 \xrightarrow{F_1=\frac{F_1}{\mu}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3\mu} & -\frac{1}{3\mu} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$

Así:

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -\mu & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3\mu} & -\frac{1}{3\mu} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \to \mu=-2$$

b) $\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -\mu & 2 \end{pmatrix}^t \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\longrightarrow X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{10}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$

137. Página 32

a) $M^2+3M = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} \alpha+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+1)^2+3\alpha+3 & 0 \\ 3+\alpha & -2 \end{pmatrix}$

$(\alpha+1)^2+3\alpha+3=0 \to (\alpha+1)[(\alpha+1)+3]=0 \to \alpha = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$

La matriz no es invertible cuando $\alpha=-1$ o cuando $\alpha=-4$.

b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$MX+M=2I \to MX=2I-M \to X=M^{-1}(2I-M)=2M^{-1}-I \longrightarrow X=2M^{-1}-I=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

138. Página 33

a) $A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ $\qquad A^3=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$A^n=\begin{cases}A^{3n}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ A^{3n+1}=A\\ A^{3n+2}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\end{cases}$$

b) $X\cdot\left(A^4+A^2-A\right)=\begin{pmatrix}4&3&2\\1&1&1\end{pmatrix}\rightarrow X\cdot\left(A+A^2-A\right)=X\cdot A^2=\begin{pmatrix}4&3&2\\1&1&1\end{pmatrix}$

$$X\cdot\underbrace{A^2\cdot A}_{I}=\begin{pmatrix}4&3&2\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot A\rightarrow X=\begin{pmatrix}4&3&2\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&3\\1&1&1\end{pmatrix}$$

139. Página 33

a) $\begin{pmatrix}4&2&2\\2&a&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=2F_3+F_1]{F_2=2F_2-F_1}\begin{pmatrix}4&2&2\\0&2a-2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

- Si $a=1$, entonces Rango $(A)=2$.
- Si $a\neq 1$, entonces Rango $(A)=3$.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-2&4&1&a\\2&-4&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{F'_3=F_2+F_3}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-2&4&1&a\\0&0&0&1+a\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2=F_2+2F_1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&8&7&a+8\\0&0&0&1+a\end{pmatrix}$$

- Si $a=-1$, entonces Rango $(B)=2$.
- Si $a\neq -1$, entonces Rango $(B)=3$.

b) $AX=B\rightarrow\begin{pmatrix}4&2&2\\2&0&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-2&4&1&0\\2&-4&-1&1\end{pmatrix}\rightarrow X=A^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-2&4&1&0\\2&-4&-1&1\end{pmatrix}$

$$X=\begin{pmatrix}-1/4&1/2&-1/2\\1/2&-1&0\\1/2&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-2&4&1&0\\2&-4&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9/4&7/2&1/4&-3/2\\5/2&-3&1/2&2\\5/2&-3&1/2&3\end{pmatrix}$$

140. Página 33

	Comida	Recibos
Septiembre	400 €	120 €
Octubre	500 €	180 €
Noviembre	350 €	250 €

$$A=\begin{pmatrix}400&120\\500&180\\350&250\end{pmatrix}$$

141. Página 33

Colocamos las líneas de autobuses *A*, *B* y *C* por columnas, y los días *Lunes*, *Martes* y *Miércoles* por filas:

$$M=\begin{pmatrix}5 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

142. Página 33

Matriz fila de costes por unidad: $A=(32\quad 46\quad 71)$ Matriz fila de ventas por unidad: $B=(53\quad 82\quad 140)$

Matriz fila de beneficios por unidad: $C=B-A=(21\quad 36\quad 69)$

Matriz columna de unidades vendidas: $D=\begin{pmatrix}2100\\ 1400\\ 900\end{pmatrix}$

Beneficio anual: $B\cdot D-A\cdot D=(B-A)\cdot D=C\cdot D=(21\quad 36\quad 69)\cdot\begin{pmatrix}2100\\ 1400\\ 900\end{pmatrix}=156\,600$

143. Página 33

a) Colocamos el tipo de habitación por filas (*Lujo, Doble, Individual*), y el hotel por columnas (*Edén, Paraíso, Spa*):

$$\begin{pmatrix}6 & 4 & 4\\ 30 & 50 & 50\\ 10 & 10 & 8\end{pmatrix}$$

En la segunda matriz colocamos, por filas, el tipo de habitación (*Lujo, Doble, Individual*), y en la columna, el dinero en euros.

$$\begin{pmatrix}120\\ 80\\ 50\end{pmatrix}$$

b) $(120\quad 80\quad 50)\begin{pmatrix}6 & 4 & 4\\ 30 & 50 & 50\\ 10 & 10 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overbrace{3620}^{Edén} & \overbrace{4980}^{Paraíso} & \overbrace{4880}^{Spa}\end{pmatrix}$

144. Página 33

$$\begin{pmatrix}2 & 7 & 4\\ 3 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overbrace{0{,}04}^{D} & \overbrace{0{,}96}^{\text{No D}}\\ 0{,}02 & 0{,}98\\ 0{,}01 & 0{,}99\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}26 & 12{,}74\\ 0{,}28 & 13{,}72\end{pmatrix}$$

El número de tornillos planos no defectuosos es 12 740, y el de tornillos de estrella no defectuosos es 13 720.

145. Página 33

Las columnas representan los productos X e Y, y las filas representan las empresas A, B y C.

Inicialmente, las empresas recibían: $M = \begin{pmatrix} 1000 & 1000 \\ 1000 & 1000 \\ 1000 & 1000 \end{pmatrix}$

Este mes las empresas han recibido: $N = \begin{pmatrix} 600 & 300 \\ 400 & 800 \\ 900 & 700 \end{pmatrix}$

Las disminuciones producidas son: $M - N = \begin{pmatrix} 1000 & 1000 \\ 1000 & 1000 \\ 1000 & 1000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 600 & 300 \\ 400 & 800 \\ 900 & 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 & 700 \\ 600 & 200 \\ 100 & 300 \end{pmatrix}$

Las disminuciones porcentuales son: $M - N = \begin{pmatrix} 40\% & 70\% \\ 60\% & 20\% \\ 10\% & 30\% \end{pmatrix}$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 34

Solo es necesaria una arista que una los dos vértices, porque la representación en forma de grafo es independiente de la forma real de la carretera.

2. Página 34

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ Es una matriz simétrica.

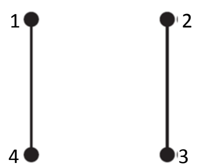
$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$ Es una matriz simétrica.

3. Página 34

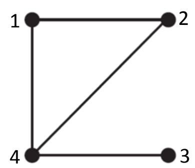
El número máximo de aristas es 4 porque, si se añadiese otra arista, el vértice pasaría por segunda vez por alguno de los vértices, y el camino no sería simple.

4. Página 34

a)



b)



5. Página 34

Calculamos la matriz de adyacencia y su potencia tercera:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$a_{24} = 4$ → Hay 4 caminos de longitud 3 aristas.