Ángulos y distancias

6

ACTIVIDADES

1. Página 138

a) Hallamos el vector director de cada recta y calculamos el producto escalar y los módulos de dichos vectores.

$$r:\left.\begin{array}{r}x+y-2=0\\2x+z+3=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=t\\y=2-t\\z=-3-2t\end{array}\right\}\rightarrow\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}\rightarrow\vec{u}=(1,-1,-2)$$

$$s:(2+\lambda,-\lambda,8+\lambda)\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=2+\lambda\\y=-\lambda\\z=8+\lambda\end{array}\right\}\rightarrow\frac{x-2}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-8}{1}\rightarrow\vec{v}=(1,-1,1)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(1,-1,-2)\cdot(1,-1,1)=1+1-2=0$$

$$|\vec{u}|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}\qquad |\vec{v}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre dos rectas.

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{0}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}=0\rightarrow\alpha=\arccos(0)=90°$$

Calculamos el punto de corte de ambas rectas.

$$\left.\begin{array}{l}t=2+\lambda\\2-t=-\lambda\\-3-2t=8+\lambda\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}t=-3\\\lambda=-5\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-3\\y=5\\z=3\end{array}\right.\rightarrow P(-3,5,3)$$

b) $$r:\left.\begin{array}{l}x=1+t\\y=t-2\\z=2+2t\end{array}\right\}\rightarrow\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{2}\rightarrow\vec{u}=(1,1,2)$$

$$s:x=-y-3=z\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=\lambda\\y=-\lambda-3\\z=\lambda\end{array}\right\}\rightarrow\frac{x}{1}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z}{1}\rightarrow\vec{v}=(1,-1,1)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(1,1,2)\cdot(1,-1,1)=1-1+2=2$$

$$|\vec{u}|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}\qquad |\vec{v}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre dos rectas.

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2}{3\sqrt{2}}\rightarrow\alpha=\arccos\left(\frac{2}{3\sqrt{2}}\right)=61{,}87°$$

Calculamos el punto de corte de ambas rectas.

$$\left.\begin{array}{l}1+t=\lambda\\t-2=-\lambda-3\\2+2t=\lambda\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}t=-1\\\lambda=0\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\y=-3\\z=0\end{array}\right.\rightarrow P(0,-3,0)$$

2. Página 138

a) Hallamos el vector director de la recta y el vector normal al plano.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = z \rightarrow \vec{u} = (2,3,1)$$

$$\pi: 4x + 6y + 2z - 9 = 0 \rightarrow \vec{n} = (4,6,2)$$

Calculamos el producto escalar y los módulos de dichos vectores.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (2,3,1) \cdot (4,6,2) = 8 + 18 + 2 = 28$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14} \qquad |\vec{n}| = \sqrt{16+36+4} = \sqrt{56}$$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre plano y recta.

$$cos(90-\alpha) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{28}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{56}} = \frac{28}{\sqrt{784}} = 1 \rightarrow \alpha = 90° - arc\,cos\left(\frac{28}{\sqrt{784}}\right) = 90° - 0° = 90°$$

b) $$r: \left.\begin{array}{l} x+y+z+1=0 \\ -2x+y-3z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3}t \\ y = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}t \\ z = t \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u} = (-4,1,3)$$

$$\pi: x - y + 5z + 7 = 0 \rightarrow \vec{n} = (1,-1,5)$$

Calculamos el producto escalar y los módulos de dichos vectores.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (-4,1,3) \cdot (1,-1,5) = -4 - 1 + 15 = 10$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26} \qquad |\vec{n}| = \sqrt{1+1+25} = \sqrt{27}$$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre plano y recta.

$$cos(90-\alpha) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{10}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{27}} = \frac{10}{\sqrt{702}} \rightarrow \alpha = 90° - arc\,cos\left(\frac{10}{\sqrt{702}}\right) = 90° - 67{,}83° = 22{,}17°$$

3. Página 139

a) Hallamos los vectores normales a ambos planos.

$$\pi_1: 2x + y - 3z + 2 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (2,1,-3)$$

$$\pi_2: -x + 5y + z - 7 = 0 \rightarrow \vec{n}_2 = (-1,5,1)$$

Calculamos el producto escalar y los módulos de dichos vectores.

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (2,1,-3) \cdot (-1,5,1) = -2 + 5 - 3 = 0$$

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14} \qquad |\vec{n}_2| = \sqrt{1+25+1} = \sqrt{27}$$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre dos planos.

$$cos\,\alpha = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{0}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{27}} = 0 \rightarrow \alpha = arc\,cos(0) = 90°$$

b) $\pi_1: 4x+y-3=0 \rightarrow \vec{n}_1=(4,1,0)$

$\pi_2: -3x+2y-3z+8=0 \rightarrow \vec{n}_2=(-3,2,-3)$

Calculamos el producto escalar y los módulos de dichos vectores.

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2=(4,1,0)\cdot(-3,2,-3)=-12+2=-10$

$|\vec{n}_1|=\sqrt{16+1+0}=\sqrt{17}$ $\qquad |\vec{n}_2|=\sqrt{9+4+9}=\sqrt{22}$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre dos rectas.

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{10}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{22}}=\frac{10}{\sqrt{374}} \rightarrow \alpha=\arccos\left(\frac{10}{\sqrt{374}}\right)=58{,}86°$$

c) $\pi_1: \begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ y-1 & 2 & -3 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \pi_1: 2x-2y-4z+2=0 \rightarrow \vec{n}_1=(2,-2,-4)$

$\pi_2: 3x-y-z+5=0 \rightarrow \vec{n}_2=(3,-1,-1)$

Calculamos el producto escalar y los módulos de dichos vectores.

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2=(2,-2,-4)\cdot(3,-1,-1)=6+2+4=12$

$|\vec{n}_1|=\sqrt{4+4+16}=\sqrt{24}$ $\qquad |\vec{n}_2|=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre dos rectas.

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{12}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{11}}=\frac{12}{\sqrt{264}} \rightarrow \alpha=\arccos\left(\frac{12}{\sqrt{264}}\right)=42{,}39°$$

4. Página 139

a) Estudiamos la posición relativa de ambos planos.

$M=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & D \\ -2 & 3 & -1 & D \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \rightarrow \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2 \rightarrow$ Los planos son secantes sea cual sea el valor de D.

b) Hallamos los vectores normales a ambos planos.

$\pi_1: -x+y-3z+D=0 \rightarrow \vec{n}_1=(-1,1,-3)$

$\pi_2: -2x+3y-z+D=0 \rightarrow \vec{n}_2=(-2,3,-1)$

Calculamos el producto escalar y los módulos de dichos vectores.

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2=(-1,1,-3)\cdot(-2,3,-1)=2+3+3=8$

$|\vec{n}_1|=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11}$ $\qquad |\vec{n}_2|=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre dos rectas.

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{8}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{14}}=\frac{8}{\sqrt{154}} \rightarrow \alpha=\arccos\left(\frac{8}{\sqrt{154}}\right)=49{,}86°$$

El ángulo no depende del parámetro D.

c) La recta intersección se obtiene resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}-x+y-3z+D=0\\-2x+3y-z+D=0\end{array}\right\}\rightarrow r:\left.\begin{array}{l}x=-8t+2D\\y=-5t+D\\z=t\end{array}\right\}$$

Utilizamos el dato $A(0,-2,2)\in r$.

$$r:\left.\begin{array}{l}x=-8t+2D\\y=-5t+D\\z=t\end{array}\right\}\xrightarrow{A(0,-2,2)}\left.\begin{array}{l}0=-8t+2D\\-2=-5t+D\\2=t\end{array}\right\}\rightarrow D=8\rightarrow r:\left.\begin{array}{l}x=-8t+16\\y=-5t+8\\z=t\end{array}\right\}$$

5. Página 140

a) Primero. Hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto P .

$$r:\frac{x+3}{2}=\frac{y+4}{-1}=z\rightarrow\vec{u}=(2,-1,1)$$

$$\vec{n}=\vec{u}=(2,-1,1)\rightarrow\pi:2x-y+z+D=0$$

$$\pi:2x-y+z+D=0\xrightarrow{P(6,-1,-3)}12+1-3+D=0\rightarrow D=-10\rightarrow\pi:2x-y+z-10=0$$

Segundo. Calculamos el punto de corte entre la recta y el plano que hemos hallado, y ese será la proyección ortogonal.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{-1}=z\\2x-y+z-10=0\end{array}\right\}\rightarrow Q(1,-6,2)$$

b) Primero. Hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto P .

$$r:\left.\begin{array}{l}x+y+z-2=0\\-x+2y-4z-1=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=1-2t\\y=1+t\\z=t\end{array}\right\}\rightarrow\vec{u}=(-2,1,1)$$

$$\vec{n}=\vec{u}=(-2,1,1)\rightarrow\pi:-2x+y+z+D=0$$

$$\pi:-2x+y+z+D=0\xrightarrow{P(2,-5,-4)}-4-5-4+D=0\rightarrow D=13\rightarrow\pi:-2x+y+z+13=0$$

Segundo. Calculamos el punto de corte entre la recta y el plano que hemos hallado, y ese será la proyección ortogonal.

$$\left.\begin{array}{l}x+y+z-2=0\\-x+2y-4z-1=0\\-2x+y+z+13=0\end{array}\right\}\rightarrow Q(5,-1,-2)$$

6. Página 140

a) Primero. Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P .

$$\pi:2x+y-z-1=0\rightarrow\vec{n}=(2,1,-1)\qquad r:\begin{cases}P(-3,1,0)\\\vec{u}=\vec{n}=(2,1,-1)\end{cases}\rightarrow\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$$

Segundo. Calculamos el punto de corte entre el plano y la recta que hemos hallado, y ese punto será la proyección ortogonal.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-1}\\2x+y-z-1=0\end{array}\right\}\rightarrow Q(-1,2,-1)$$

b) $\pi: 3x-2y+z-2=0 \rightarrow \vec{n}=(3,-2,1)$

$$r:\begin{cases} P(0,-2,5) \\ \vec{u}=\vec{n}=(3,-2,1) \end{cases} \rightarrow \frac{x}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-5}{1}$$

Calculamos el punto de corte entre el plano y la recta que hemos hallado.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-5}{1} \\ 3x-2y+z-2=0 \end{array}\right\} \rightarrow Q\left(-\frac{3}{2},-1,\frac{9}{2}\right)$$

c) $\pi: 4x-y-24=0 \rightarrow \vec{n}=(4,-1,0)$

$$r:\begin{cases} P(2,1,-1) \\ \vec{u}=\vec{n}=(4,-1,0) \end{cases} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2+4t \\ y=1-t \\ z=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-1} \\ z=-1 \end{array}\right\}$$

Calculamos el punto de corte entre el plano y la recta que hemos hallado.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-1} \\ z=-1 \\ 4x-y-24=0 \end{array}\right\} \rightarrow Q(6,0,-1)$$

7. Página 141

a) Primero. Hallamos el vector director de la recta, el vector normal al plano y un punto de la recta.

$$r: \frac{x-1}{3}=y=\frac{z}{2} \rightarrow \begin{cases} P(1,0,0) \\ \vec{u}=(3,1,2) \end{cases}$$

$$\pi: x-y-z-1=0 \rightarrow \vec{n}=(1,-1,-1)$$

Segundo. Calculamos el plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular a π.

$$\pi':\begin{cases} P(1,0,0) \\ \vec{u}=(3,1,2) \\ \vec{n}=(1,-1,-1) \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = x+5y-4z-1 \rightarrow \pi': x+5y-4z-1=0$$

Tercero. Calculamos el corte de los dos planos π y π', que es la recta s buscada.

$$\left.\begin{array}{l} x-y-z-1=0 \\ x+5y-4z-1=0 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x=1+\dfrac{3}{2}\lambda \\ y=\dfrac{1}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}$$

La recta ortogonal es la recta que teníamos porque dicha recta r está contenida en π.

b)

$$r: \left.\begin{array}{l} x=-2+t \\ y=t \\ z=3 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} P(-2,0,3) \\ \vec{u}=(1,1,0) \end{cases}$$

$$\pi: 2x-y+3z-1=0 \rightarrow \vec{n}=(2,-1,3)$$

Segundo. Calculamos el plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular a π.

$$\pi':\begin{cases}P(-2,0,3)\\ \vec{u}=(1,1,0)\\ \vec{n}=(2,-1,3)\end{cases}\qquad \begin{vmatrix}x+2 & y & z-3\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=3x-3y-3z+15\rightarrow \pi': x-y-z+5=0$$

Tercero. Calculamos el corte de los dos planos π y π', que es la recta s buscada.

$$\left.\begin{array}{l}2x-y+3z-1=0\\ x-y-z+5=0\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}x=6-4\lambda\\ y=11-5\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right\}\rightarrow \frac{x-6}{-4}=\frac{y-11}{-5}=z\rightarrow s:\left.\begin{array}{l}x-6+4z=0\\ y-11+5z=0\end{array}\right\}$$

8. Página 141

a) Estudiamos la posición relativa de recta y plano.

$$r:\left.\begin{array}{l}y-2=0\\ x-z-1=0\end{array}\right\}\qquad \pi: x-2y+az-3=0$$

$$M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}\qquad M^*=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & -2\\ 1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & -2 & a & -3\end{pmatrix}$$

Son paralelos cuando $2=\text{Rango}(M)\neq\text{Rango}(M^*)=3$.

$\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & a\end{vmatrix}=-a-1$. Para $a=-1\rightarrow \text{Rango}(M)=2$

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=4\neq 0\rightarrow \text{Rango}(M^*)=3$$

b) Primero. Hallamos el vector director de la recta, el vector normal al plano y un punto de la recta.

$$r:\left.\begin{array}{l}y=2\\ x-z=1\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}x=1+t\\ y=2\\ z=t\end{array}\right\}\rightarrow \begin{cases}P(1,2,0)\\ \vec{u}=(1,0,1)\end{cases}$$

$$\pi: x-2y-z-3=0\rightarrow \vec{n}=(1,-2,-1)$$

Segundo. Calculamos el plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular a π.

$$\pi':\begin{cases}P(1,2,0)\\ \vec{u}=(1,0,1)\\ \vec{n}=(1,-2,-1)\end{cases}\qquad \begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=2x+2y-2z-6\rightarrow \pi': x+y-z-3=0$$

Tercero. Calculamos el corte de los dos planos π y π', que es la recta s buscada.

$$\left.\begin{array}{l}x-2y-z-3=0\\ x+y-z-3=0\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}x=3+\lambda\\ y=0\\ z=\lambda\end{array}\right\}\rightarrow s:\left.\begin{array}{l}x-z-3=0\\ y=0\end{array}\right\}$$

9. Página 142

a) Sea $A'(a_1,a_2,a_3)$ el punto buscado, el punto medio del segmento $\overline{AA'}$ es B.

$$(2,2,-2)=\left(\frac{1+a_1}{2},\frac{-2+a_2}{2},\frac{-1+a_3}{2}\right)\to\begin{cases}a_1=3\\a_2=6\\a_3=-3\end{cases}\to A'(3,6,-3)$$

b) $\left(-1,\frac{1}{2},0\right)=\left(\frac{3+a_1}{2},\frac{0+a_2}{2},\frac{-2+a_3}{2}\right)\to A'(-5,1,2)$

10. Página 142

a) Primero. Hallamos la proyección ortogonal del punto sobre la recta.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=(2,-1,1)\\P(6,-1,-3)\end{array}\right\}\to\pi:2x-y+z-10=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x+3}{2}=\frac{y+4}{-1}=z\\2x-y+z-10=0\end{array}\right\}\to Q(1,-6,2)$$

Segundo. Calculamos el simétrico del punto respecto de la proyección.

$$(1,-6,2)=\left(\frac{6+p_1}{2},\frac{-1+p_2}{2},\frac{-3+p_3}{2}\right)\to P'(-4,-11,7)$$

b) Primero. Hallamos la proyección ortogonal del punto sobre la recta.

$$r:\left.\begin{array}{l}x+y+z-2=0\\-x+2y-4z-1=0\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}x=1-2t\\y=1+t\\z=t\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{l}\vec{n}=(-2,1,1)\\P(2,-5,-4)\end{array}\right\}\to\pi:-2x+y+z+13=0$$

$$\left.\begin{array}{l}x+y+z-2=0\\-x+2y-4z-1=0\\-2x+y+z+13=0\end{array}\right\}\to Q(5,-1,-2)$$

Segundo. Calculamos el simétrico del punto respecto de la proyección.

$$(5,-1,-2)=\left(\frac{2+p_1}{2},\frac{-5+p_2}{2},\frac{-4+p_3}{2}\right)\to P'(8,3,0)$$

11. Página 143

a) Primero. Calculamos la proyección ortogonal del punto sobre el plano.

$$\pi:2x+y-z-1=0\to\vec{n}=(2,1,-1)$$

$$r:\begin{cases}P(-3,1,0)\\\vec{u}=\vec{n}=(2,1,-1)\end{cases}\to\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}\\2x+y-z-1=0\end{array}\right\}\to Q(-1,2,-1)$$

Segundo. Calculamos el simétrico del punto respecto a la proyección.

$$(-1,2,-1)=\left(\frac{-3+p_1}{2},\frac{1+p_2}{2},\frac{0+p_3}{2}\right)\to P'(1,3,-2)$$

b) Primero. Calculamos la proyección ortogonal del punto sobre el plano.

$\pi: 3x-2y+z-2=0 \rightarrow \vec{n}=(3,-2,1)$ $\qquad r: \begin{cases} P(0,-2,5) \\ \vec{u}=\vec{n}=(3,-2,1) \end{cases} \rightarrow \frac{x}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-5}{1}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-5}{1} \\ 3x-2y+z-2=0 \end{array}\right\} \rightarrow Q\left(-\frac{3}{2},-1,\frac{9}{2}\right)$$

Segundo. Calculamos el simétrico del punto respecto a la proyección.

$$\left(-\frac{3}{2},-1,\frac{9}{2}\right)=\left(\frac{0+p_1}{2},\frac{-2+p_2}{2},\frac{5+p_3}{2}\right) \rightarrow P'(-3,0,4)$$

12. Página 143

a) Calculamos el punto medio de $\overline{AB}$ y el vector $\overrightarrow{AB}$.

$\left(\frac{0+2}{2},\frac{-1-3}{2},\frac{-3+1}{2}\right) \rightarrow Q(1,-2,-1)$ $\qquad \overrightarrow{AB}=(2,-2,4)$

El plano buscado pasa por Q y tiene vector normal $\overrightarrow{AB}$.

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(2,-2,4) \rightarrow \pi: 2x-2y+4z+D=0$$

$$\pi: 2x-2y+4z+D=0 \xrightarrow{Q(1,-2,-1)} 2+4-4+D=0 \rightarrow D=-2 \rightarrow \pi: x-y+2z-1=0$$

b) $\left(\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{2},\frac{-\frac{8}{5}+\frac{3}{5}}{2},\frac{-1+5}{2}\right) \rightarrow Q\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2\right)$

$$\overrightarrow{AB}=\left(-2,\frac{11}{5},6\right)$$

El plano buscado pasa por Q y tiene vector normal $\overrightarrow{AB}$.

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}=\left(-2,\frac{11}{5},6\right) \rightarrow \pi: -2x+\frac{11}{5}y+6z+D=0$$

$$\pi: -2x+\frac{11}{5}y+6z+D=0 \xrightarrow{Q\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2\right)} -1-\frac{11}{10}+12+D=0 \rightarrow D=-\frac{99}{10} \rightarrow \pi: -20x+22y+60z-99=0$$

13. Página 144

$$d(A,B)=|\overrightarrow{AB}|=|(2,-2,3)|=\sqrt{4+4+9}=\sqrt{17}\text{ u}$$

14. Página 144

Sea P el punto que buscamos y que es de la forma $P(p,p,p+1)$.

$$d(A,P)=|(p-1,p-4,p+3)|=5=\sqrt{(p-1)^2+(p-4)^2+(p+3)^2}=\sqrt{3p^2-4p+26}$$

$$25=3p^2-4p+26 \rightarrow 3p^2-4p+1=0 \rightarrow p_1=1; p_2=\frac{1}{3}$$

Para $p_1=1 \rightarrow P_1(1,1,2)$ $\qquad$ Para $p_2=\frac{1}{3} \rightarrow P_1\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$

15. Página 144

$$d(P,\pi)=\frac{|A\cdot p_1+B\cdot p_2+C\cdot p_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2\cdot 0-1-2\cdot(-3)+4|}{\sqrt{4+1+4}}=3$$

16. Página 144

$$d(P,\pi)=\frac{|A\cdot p_1+B\cdot p_2+C\cdot p_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|-1+6-4+D|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|1+D|}{3}$$

Imponemos que la distancia sea 4.

$$\frac{|1+D|}{3}=4\rightarrow|1+D|=12$$

Opción a) $1+D=-12\rightarrow D=-13$

Opción b) $1+D=12\rightarrow D=11$

Existen dos valores de D que cumplen la condición.

17. Página 145

Determinamos la posición relativa de los planos a partir de sus vectores normales: $2\vec{n}_1=\vec{n}_2\rightarrow$ Los planos son paralelos.

Hallamos un punto de uno de los planos y calculamos la distancia de dicho punto al otro plano.

$$\left.\begin{matrix}x=1\\ y=1\\ 2x+2y+z+1=0\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}x=1\\ y=1\\ z=-5\end{matrix}\right\}\rightarrow P(1,1,-5)$$

$$d(P,\pi)=\frac{|A\cdot p_1+B\cdot p_2+C\cdot p_3+D|}{\sqrt{16+16+4}}=\frac{|4+4-10+7|}{\sqrt{36}}=\frac{5}{6}\text{ u}$$

18. Página 145

Determinamos la posición relativa de los planos a partir de sus vectores normales: $-2\vec{n}_1=\vec{n}_2\rightarrow$ Los planos son paralelos.

Hallamos un punto de π_1 y calculamos la distancia de dicho punto al π_2.

$$\left.\begin{matrix}x=1\\ y=1\\ -x+2y+2z-1=0\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}x=1\\ y=1\\ z=0\end{matrix}\right\}\rightarrow P(1,1,0)$$

$$d(P,\pi)=\frac{|2\cdot 1-4\cdot 1-4\cdot 0+D|}{\sqrt{4+16+16}}=\frac{|-2+D|}{6}$$

Imponemos que la distancia sea 3.

$$\frac{|-2+D|}{6}=3\rightarrow|-2+D|=18$$

Opción a) $-2+D=-18\rightarrow D=-16$

Opción b) $-2+D=18\rightarrow D=20$

Existen dos posibles valores de D que cumplen la condición.

19. Página 145

Estudiamos la posición relativa de la recta r y el plano π.

$$r: x = \frac{y-2}{2} = \frac{1-z}{3} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - y + 2 = 0 \\ 3x + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \qquad \pi: 5x - ay + z + 4 = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -a & 1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & -a & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Recta y plano son paralelos cuando $2 = \text{Rango}(M) \neq \text{Rango}(M^*) = 3$.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -a & 1 \end{vmatrix} = 2a - 2 \text{. Para } a = 1 \rightarrow \text{Rango}(M) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(M^*) = 3$$

Hallamos un punto P de la recta y calculamos de la distancia de dicho punto a $\pi: 5x - y + z + 4 = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{y-2}{2} \\ x = \dfrac{1-z}{3} \\ x = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 4 \\ z = -2 \end{array}\right\} \rightarrow P(1,4,-2)$$

$$d(P,\pi) = \frac{|5\cdot 1 - 1\cdot 4 + 1\cdot(-2) + 4|}{\sqrt{25+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{27}}\ \text{u}$$

20. Página 146

a) Primero. Hallamos el vector director y un punto de la recta.

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A(3,-2,1) \\ \vec{u} = (1,2,-2) \end{array}\right.$$

Segundo. Calculamos el vector determinado por el punto P y el punto A de la recta.

$$\overrightarrow{AP} = (1,2,-3) - (3,-2,1) = (-2,4,-4)$$

Tercero. Calculamos el producto vectorial de ambos vectores.

$$\vec{u} \times \overline{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 8\vec{j} + 8\vec{k} = (0,8,8)$$

Cuarto. Calculamos los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{u} \times \overline{AP}$ y sustituimos en la fórmula de la distancia.

$$|\vec{u}| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$|\vec{u} \times \overline{AP}| = \sqrt{0+64+64} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$d(P,r) = \frac{|\vec{u} \times \overline{AP}|}{|\vec{u}|} = \frac{8\sqrt{2}}{3} = 3{,}77\text{u}$$

b) Hallamos el vector director, un punto de la recta A y el vector $\overrightarrow{AP}$.

$$r: 2x = y-5 = 1-z \rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-1}{-1} \rightarrow \begin{cases} A(0,5,1) \\ \vec{u} = \left(\frac{1}{2},1,-1\right) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AP} = (3,0,-1)-(0,5,1) = (3,-5,-2)$$

Calculamos el producto vectorial de ambos vectores y sus módulos.

$$\vec{u} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -7\vec{i} - 2\vec{j} - \frac{11}{2}\vec{k} = \left(-7,-2,-\frac{11}{2}\right)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\frac{1}{4}+1+1} = \frac{3}{2}$$

$$|\vec{u} \times \overrightarrow{AP}| = \sqrt{49+1+\frac{121}{4}} = \frac{3\sqrt{37}}{2}$$

Aplicamos la fórmula de la distancia entre punto y recta.

$$d(P,r) = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}|} = \frac{\frac{3\sqrt{37}}{2}}{\frac{3}{2}} = \sqrt{37}\,\text{u}$$

c) Hallamos el vector director, un punto de la recta A y el vector $\overrightarrow{AP}$.

$$\text{eje } OX: \left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} A(0,0,0) \\ \vec{u} = (1,0,0) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AP} = (-1,0,2)-(0,0,0) = (-1,0,2)$$

Calculamos el producto vectorial de ambos vectores y sus módulos.

$$\vec{u} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{j} = (0,-2,0)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1+0+0} = 1$$

$$|\vec{u} \times \overrightarrow{AP}| = \sqrt{0+4+0} = 2$$

Aplicamos la fórmula de la distancia entre punto y recta.

$$d(P,r) = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}|} = \frac{2}{1} = 2\text{u}$$

21. Página 146

Hallamos el vector director, un punto de la recta A y el vector $\overrightarrow{AP}$.

$$r: \left.\begin{aligned} x-2z &= 1 \\ y &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{x-1}{2} &= \frac{z}{1} \\ y &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} A(1,3,0) \\ \vec{u} = (2,0,1) \end{cases}$$

$\overrightarrow{AP} = (2,1,m) - (1,3,0) = (1,-2,m)$

Calculamos el producto vectorial de ambos vectores y sus módulos.

$$\vec{u} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & m \end{vmatrix} = 2\vec{i} + (1-2m)\vec{j} - 4\vec{k} = (2, 1-2m, -4)$$

$|\vec{u}| = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5}$ $\qquad$ $|\vec{u} \times \overrightarrow{AP}| = \sqrt{4+(1-2m)^2+16} = \sqrt{21-4m+4m^2}$

Imponemos la condición de distancia en la fórmula correspondiente y despejamos m.

$$d(P,r) = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{21-4m+4m^2}}{\sqrt{5}} = 3 \rightarrow \sqrt{21-4m+4m^2} = 3\sqrt{5} \rightarrow 4m^2 - 4m - 24 = 0$$

$4m^2 - 4m - 24 = 0 \rightarrow m^2 - m - 6 = 0 \rightarrow \{\{m=-2\};\{m=3\}\}$ son los valores de m que cumplen la condición.

22. Página 147

Estudiamos la posición relativa entre ambas rectas.

$$r: \left.\begin{matrix} x-3y=1 \\ z=2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{1} \\ z=2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} P(1,0,2) \\ \vec{u} = (3,1,0) \end{cases}$$

$$s: \left.\begin{matrix} 3x+y-z-11=0 \\ x+y-5=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x=\lambda \\ y=5-\lambda \\ z=-6+2\lambda \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} Q(0,5,-6) \\ \vec{v} = (1,-1,2) \end{cases}$$

$\overrightarrow{PQ} = (-1,5,-8)$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(M) = 2 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -8 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}(M^*) = 2$$

$\text{Rango}(M) = \text{Rango}(M^*) = 2 \rightarrow$ Las rectas son secantes $\rightarrow d(r,s) = 0$.

23. Página 147

Estudiamos la posición relativa entre ambas rectas.

$$s: \frac{1-5x}{7} = -y = \frac{z+3}{-1} \rightarrow \left.\begin{matrix} 5x-7y-1=0 \\ y-z-3=0 \end{matrix}\right\}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -7 \\ 5 & -7 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & -7 & 0 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(M) = 3 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -7 \\ 5 & -7 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}(M^*) = \text{Rango}(M)$$

$\text{Rango}(M) = \text{Rango}(M^*) = 3 \rightarrow$ Las rectas son secantes $\rightarrow d(r,s) = 0$.

24. Página 148

Estudiamos la posición relativa entre ambas rectas.

$$r: \left.\begin{array}{l} x+y=3 \\ x-z=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=t \\ y=3-t \\ z=1+t \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} P(0,3,1) \\ \vec{u}=(1,-1,1) \end{cases} \qquad s: \frac{x+2}{3}=y=\frac{z}{2} \rightarrow \begin{cases} Q(-2,0,0) \\ \vec{v}=(3,1,2) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PQ}=(-2,-3,-1)$$

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=4\neq 0 \rightarrow \text{Rango}(M)=2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \rightarrow \text{Rango}(M^*)=3$$

$2=\text{Rango}(M)\neq\text{Rango}(M^*)=3 \rightarrow$ Las rectas se cruzan.

Calculamos la distancia entre ellas.

Primero. Determinamos los vectores directores y un punto de cada recta.

$$r: \begin{cases} P(0,3,1) \\ \vec{u}=(1,-1,1) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(-2,0,0) \\ \vec{v}=(3,1,2) \end{cases}$$

Segundo. Calculamos un vector determinado por un punto de cada recta.

$$\overrightarrow{PQ}=(-2,-3,-1)$$

Tercero. Determinamos el producto mixto de los vectores directores y el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-3\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}=(-3,1,4)$$

$$\left[\overrightarrow{PQ},\vec{u},\vec{v}\right]=(-2,-3,-1)\cdot(-3,1,4)=6-3-4=-1$$

Cuarto. Sustituimos los valores obtenidos en la fórmula de la distancia.

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{1}{\sqrt{9+1+16}}=\frac{1}{\sqrt{26}}=0{,}2\text{ u}$$

25. Página 148

a) Las rectas no son coplanarias cuando se cruzan en el espacio.

$$r:(m+2t,-t,-2+t) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=m+2t \\ y=-t \\ z=-2+t \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} P(m,0,-2) \\ \vec{u}=(2,-1,1) \end{cases}$$

$$s: \left.\begin{array}{l} 2x-3y+4z-1=0 \\ x+z-2=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2-\lambda \\ y=1+\frac{2}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} Q(2,1,0) \\ \vec{v}=\left(-1,\frac{2}{3},1\right)=(-3,2,3) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PQ}=(2-m,1,2)$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2-m & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Las rectas se cruzan cuando $2 = \text{Rango}(M) \neq \text{Rango}(M^*) = 3$.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(M) = 2$$

$$\text{Rango}(M^*) = 3 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2-m & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5m - 17 \neq 0 \rightarrow m \neq \frac{17}{5}$$

Las rectas se cruzan cuando $m \neq \frac{17}{5}$.

b) Primero. Determinamos los vectores directores, un punto de cada recta y un vector determinado por un punto de cada recta.

$$r: \begin{cases} P(1,0,-2) \\ \vec{u} = (2,-1,1) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(2,1,0) \\ \vec{v} = (-3,2,3) \end{cases} \qquad \overrightarrow{PQ} = (1,1,2)$$

Segundo. Determinamos el producto mixto de los vectores directores y el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 9\vec{j} + \vec{k} = (-5,-9,1)$$

$$[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}] = (1,1,2) \cdot (-5,-9,1) = -5 - 9 + 2 = -12$$

Tercero. Sustituimos los valores obtenidos en la fórmula de la distancia.

$$d(r,s) = \frac{\left|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]\right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{12}{\sqrt{25+81+1}} = \frac{12}{\sqrt{107}} = 1{,}16\text{u}$$

26. Página 149

Calculamos el radio de la esfera, que será la distancia del centro al punto.

$$\overrightarrow{AC} = (2,-2,-1) \qquad r = d(A,C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

La ecuación de la esfera es:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3^2 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z + 5 = 0$$

27. Página 149

Si la ecuación corresponde a una esfera. Sea $C(a,b,c)$ el centro y $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$ la ecuación general de la esfera, se tiene que cumplir que:

$$\left.\begin{array}{l} -2a = A \\ -2b = B \\ -2c = C \\ a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = D \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -2a = -4 \\ -2b = 10 \\ -2c = -2 \\ a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 26 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = 1 \\ 4 + 25 + 1 - r^2 = 26 \rightarrow r^2 = 4 \end{cases}$$

La esfera tiene centro $C(2,-5,1)$ y radio $r = 2$.

SABER HACER

28. Página 150

Hallamos el vector director de la recta y el vector normal al plano.

$$r:\left.\begin{array}{l}2x-3y=-1\\x+y-z=2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t\\y=t\\z=-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}t\end{array}\right\}\rightarrow\vec{u}=\left(\frac{3}{2},1,\frac{5}{2}\right)=(3,2,5)$$

$$\pi: ax-y+z=5\rightarrow\vec{n}=(a,-1,1)$$

Calculamos el producto vectorial de los vectores hallados y sus módulos.

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=(3,2,5)\cdot(a,-1,1)=3a+3$$

$$|\vec{u}|=|(3,2,5)|=\sqrt{9+4+25}=\sqrt{38}$$

$$|\vec{n}|=\sqrt{a^2+1+1}=\sqrt{a^2+2}$$

$$|\vec{u}\cdot\vec{n}|=|3a+3|$$

Aplicamos la fórmula para que el ángulo sea de $30°$ y despejamos a.

$$\left.\begin{array}{l}cos(90°-\alpha)=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{|3a+3|}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{a^2+2}}\\cos(90°-30°)=cos(60°)=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\rightarrow\frac{|3a+3|}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{a^2+2}}=\frac{1}{2}\rightarrow a^2-36a+20=0\rightarrow a=18\pm4\sqrt{19}$$

Los valores de a que son solución del problema son $a=18+4\sqrt{19}$ y $a=18-4\sqrt{19}$.

29. Página 150

Primero. Calculamos la proyección ortogonal del punto sobre la recta.

$$r:\left.\begin{array}{l}x-y+1=0\\x-2z-2=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=2+2t\\y=3+2t\\z=t\end{array}\right\}\rightarrow\vec{u}=(2,2,1)$$

$$\pi:\left.\begin{cases}\vec{n}=\vec{u}=(2,2,1)\rightarrow 2x+2y+z+D=0\\P(-1,0,2)\xrightarrow{2x+2y+z+D=0}2\cdot(-1)+2\cdot0+2+D=0\rightarrow D=0\end{cases}\right\}\rightarrow\pi: 2x+2y+z=0$$

Intersección entre plano y recta.

$$\left.\begin{array}{l}x-y+1=0\\x-2z-2=0\\2x+2y+z=0\end{array}\right\}\rightarrow Q\left(-\frac{2}{9},\frac{7}{9},-\frac{10}{9}\right)$$

Segundo. Hallamos el vector de extremos el punto que hemos calculado y el punto dado en el problema.

$$\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{7}{9},\frac{7}{9},-\frac{28}{9}\right)$$

Tercero. La recta que buscamos tiene como vector director $\overrightarrow{PQ}$ y pasa por P.

$$s:\left.\begin{cases}P(-1,0,2)\\\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{7}{9},\frac{7}{9},-\frac{28}{9}\right)\end{cases}\right\}\rightarrow s:(-1,0,2)+\lambda\left(\frac{7}{9},\frac{7}{9},-\frac{28}{9}\right)$$

30. Página 150

Primero. Calculamos la proyección ortogonal del punto sobre la recta.

$$r:\left.\begin{matrix}2x-y=0\\ x-2z+1=0\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}x=t\\ y=2t\\ z=\dfrac{t+1}{2}\end{matrix}\right\}\rightarrow\vec{u}=\left(1,2,\frac{1}{2}\right)$$

$$\pi:\left\{\begin{matrix}\vec{n}=\vec{u}=\left(1,2,\frac{1}{2}\right)\rightarrow x+2y+\frac{z}{2}+D=0\\ P(2,-2,1)\xrightarrow{x+2y+\frac{z}{2}+D=0}2+2\cdot(-2)+\frac{1}{2}+D=0\rightarrow D=\frac{3}{2}\end{matrix}\right\}\rightarrow\pi:x+2y+\frac{z}{2}+\frac{3}{2}=0\rightarrow\pi:2x+4y+z+3=0$$

Intersección entre plano y recta.

$$\left.\begin{matrix}2x-y=0\\ x-2z+1=0\\ 2x+4y+z+3=0\end{matrix}\right\}\rightarrow Q\left(\frac{-1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

Segundo. Hallamos el vector de extremos el punto que hemos calculado y el punto dado en el problema.

$$\overrightarrow{PQ}=\left(-\frac{7}{3},\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

Tercero. El plano que buscamos tiene como vector normal $\overrightarrow{PQ}$ y pasa por P.

$$\pi':\left\{\begin{matrix}\vec{n}=\overrightarrow{PQ}=\left(-\frac{7}{3},\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)\rightarrow-\frac{7}{3}x+\frac{4}{3}y-\frac{2}{3}z+D=0\\ P(2,-2,1)\xrightarrow{-\frac{7}{3}x+\frac{4}{3}y-\frac{2}{3}z+D=0}-\frac{7}{3}\cdot 2+\frac{4}{3}\cdot(-2)-\frac{2}{3}\cdot 1+D=0\rightarrow D=8\end{matrix}\right\}\rightarrow\pi':-7x+4y-2z+24=0$$

31. Página 151

Primero. Tomamos dos puntos de la recta y calculamos sus simétricos respecto del plano.

Dos puntos son: $P(0,3,1)\in r$ $\quad Q(-1,2,0)\in r$

Hallamos las ecuaciones de dos rectas perpendiculares al plano, una que pase por cada uno de los dos puntos.

$$s:\left\{\begin{matrix}\vec{u}=\vec{n}=(1,0,-1)\\ P(0,3,1)\end{matrix}\right.\rightarrow s:(0,3,1)+\lambda(1,0,-1) \qquad t:\left\{\begin{matrix}\vec{v}=\vec{n}=(1,0,-1)\\ Q(-1,2,0)\end{matrix}\right.\rightarrow t:(-1,2,0)+\beta(1,0,-1)$$

Calculamos la intersección entre las rectas obtenidas y el plano.

$$\left.\begin{matrix}x=\dfrac{z-1}{-1}\\ y=3\\ x-z+2=0\end{matrix}\right\}\rightarrow P'\left(-\frac{1}{2},3,\frac{3}{2}\right) \qquad \left.\begin{matrix}x+1=\dfrac{z}{-1}\\ y=2\\ x-z+2=0\end{matrix}\right\}\rightarrow Q'\left(-\frac{3}{2},2,\frac{1}{2}\right)$$

Segundo. Calculamos el simétrico de cada punto respecto a su proyección.

$$P':\left(-\frac{1}{2},3,\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{a}{2},\frac{b+3}{2},\frac{c+1}{2}\right)\rightarrow P''(-1,3,2) \qquad Q':\left(-\frac{3}{2},2,\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{a-1}{2},\frac{b+2}{2},\frac{c}{2}\right)\rightarrow Q''(-2,2,1)$$

Tercero. La recta buscada pasa por los dos puntos calculados.

$$q:\left\{\begin{matrix}P''(-1,3,2)\\ \overrightarrow{P''Q''}=(-1,-1,-1)\end{matrix}\right.\rightarrow q:(-1,3,2)+\mu(-1,-1,-1)$$

32. Página 151

Primero. Se calcula el punto simétrico del punto cuyas coordenadas conocemos respecto del plano.

Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pase por el punto $P(2,1,0)$.

$$r:\begin{cases}\vec{u}=\vec{n}=(2,-3,1)\\ P(2,1,0)\end{cases} \rightarrow r:(2,1,0)+\lambda(2,-3,1)\rightarrow \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z}{1}$$

Calculamos la intersección entre la recta obtenida y el plano.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-3}\\ \frac{x-2}{2}=z\\ 2x-3y+z-2=0\end{array}\right\}\rightarrow P'\left(\frac{15}{7},\frac{11}{14},\frac{1}{14}\right) \qquad \left(\frac{15}{7},\frac{11}{14},\frac{1}{14}\right)=\left(\frac{a+2}{2},\frac{b+1}{2},\frac{c}{2}\right)\rightarrow P''\left(\frac{16}{7},\frac{4}{7},\frac{1}{7}\right)$$

Segundo. El punto calculado y el que nos da el enunciado deben tener las mismas coordenadas.

$$\left(\frac{16}{7},\frac{4}{7},\frac{1}{7}\right)=\left(a,b,\frac{1}{7}\right)\rightarrow a=\frac{16}{7};b=\frac{4}{7}$$

33. Página 152

Primero. Calculamos el simétrico de B respecto de $\pi_2:z=0$ (plano OXY).

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=(0,0,1)\\ B(0,1,-1)\end{array}\right\}\rightarrow r:(0,1,-1)+\lambda(0,0,1)$$

Calculamos la intersección entre r y $\pi_2:z=0$.

$$\pi_2:z=0\xrightarrow{\left.\begin{smallmatrix}x=0\\ y=1\\ z=-1+\lambda\end{smallmatrix}\right\}}-1+\lambda=0\rightarrow\lambda=1\rightarrow Q(0,1,0)$$

Calculamos el simétrico de B.

$$(0,1,0)=\left(\frac{0+a}{2},\frac{1+b}{2},\frac{-1+c}{2}\right)\rightarrow B'(0,1,1)$$

Segundo. La recta que buscamos tiene como vector director el producto vectorial de los vectores normales de los dos planos y pasa por el punto B'.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}=\vec{n}_{\pi_1}\times\vec{n}_{\pi_2}=(0,1,-1)\cdot(0,0,1)=(1,0,0)\\ B'(0,1,1)\end{array}\right\}\rightarrow s:(0,1,1)+\lambda(1,0,0)$$

34. Página 152

Primero. Calculamos el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos dados.

$$M\left(\frac{-3+2}{2},\frac{0+1}{2},\frac{-1+1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$$

Segundo. El plano que buscamos tiene como vector normal el vector de extremos los puntos dados y pasa por M.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\overrightarrow{PQ}=(5,1,2)\rightarrow 5x+y+2z+D=0\\ M\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)\xrightarrow{5x+y+2z+D=0}-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}+D=0\rightarrow D=2\end{array}\right\}\rightarrow\pi:5x+y+2z+2=0$$

35. Página 152

Primero. Tomamos un punto genérico de la recta y calculamos el módulo del vector normal del plano.

$P(0,1+\lambda,1)\in r$ con $\lambda\in\mathbb{R}$

$\vec{n}=(1,-2,0)\to|\vec{n}|=\sqrt{1+4+0}=\sqrt{5}$

Segundo. Hallamos la distancia del punto al plano.

$$d(P,\pi)=\frac{|0-2-2\lambda-2|}{\sqrt{5}}=\frac{|-2\lambda-4|}{\sqrt{5}}$$

Tercero. Imponemos la condición de distancia y resolvemos la ecuación resultante.

$$\sqrt{5}=\frac{|-2\lambda-4|}{\sqrt{5}}\to 5=|-2\lambda-4|$$

Caso 1: $-2\lambda-4=5\to\lambda=-\frac{9}{2}\to P_1\left(0,-\frac{7}{2},1\right)$

Caso 2: $-2\lambda-4=-5\to\lambda=\frac{1}{2}\to P_2\left(0,\frac{3}{2},1\right)$

36. Página 153

Primero. Calculamos el vector director y un punto de cada recta.

$r: x=-y=z-1\to\begin{cases}P(0,0,1)\\ \vec{u}=(1,-1,1)\end{cases}$ $\qquad s: x-2=y=z-m\to\begin{cases}Q(2,0,m)\\ \vec{v}=(1,1,1)\end{cases}$

Segundo. Aplicamos la fórmula de la distancia entre las dos rectas.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-2\vec{i}+2\vec{k}=(-2,0,2)\to|\vec{u}\times\vec{v}|=2\sqrt{2}$$

$$\left[\left|\overrightarrow{PQ}\right|,\vec{u},\vec{v}\right]=(2,0,m-1)\cdot(-2,0,2)=2m-6$$

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\left|\overrightarrow{PQ}\right|,\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{|2m-6|}{2\sqrt{2}}$$

Tercero. Imponemos la condición para la distancia y resolvemos.

$$\sqrt{2}=\frac{|2m-6|}{2\sqrt{2}}\to 4=|2m-6|$$

Caso 1: $2m-6=4\to m=5$

Caso 2: $2m-6=-4\to m=1$

Existen dos rectas cuya distancia a la recta r es $\sqrt{2}\to\begin{cases}m=5\to s: x-2=y=z-1\\ m=1\to s': x-2=y=z-5\end{cases}$.

37. Página 153

Primero. Escribimos la recta en forma paramétrica.

$$r:\left.\begin{array}{l} x=t-1 \\ y=t \\ z=-t \end{array}\right\} \rightarrow$$ Un punto genérico de la recta será de la forma $C(t-1,t,-t)$.

Segundo. Calculamos la distancia de los puntos P y Q al punto C.

$$d(C,P)=\sqrt{(-2-t)^2+(0-t)^2+(-1+t)^2}=\sqrt{3t^2+2t+5}$$

$$d(C,Q)=\sqrt{(3-t)^2+(1-t)^2+(1+t)^2}=\sqrt{3t^2-6t+11}$$

Tercero. Imponemos la condición de que ambas distancias sean iguales y resolvemos la ecuación.

$$d(C,P)=d(C,Q)\rightarrow\sqrt{3t^2+2t+5}=\sqrt{3t^2-6t+11}\rightarrow 3t^2+2t+5=3t^2-6t+11\rightarrow t=\frac{3}{4}$$

El punto buscado es $C\left(-\frac{1}{4},\frac{3}{4},-\frac{3}{4}\right)$.

ACTIVIDADES FINALES

38. Página 154

Calculamos el producto escalar y los módulos de los vectores directores.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2,1,-2)\cdot(2,-2,-1)=4-2+2=4$$

$$|\vec{u}|=\sqrt{4+1+4}=3 \qquad |\vec{v}|=\sqrt{4+4+1}=3$$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre dos rectas.

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{4}{3\cdot 3}\rightarrow\alpha=\arccos\left(\frac{4}{9}\right)=63,61°$$

39. Página 154

a) Hallamos el vector director de cada recta y calculamos el producto escalar y los módulos de dichos vectores.

$$r:\left.\begin{array}{l} x=1-\lambda \\ y=4-\lambda \\ z=2+2\lambda \end{array}\right\}\rightarrow\vec{u}=(-1,-1,2)\rightarrow|\vec{u}|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$$

$$s:\frac{x+2}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{2}\rightarrow\vec{v}=(3,-4,2)\rightarrow|\vec{v}|=\sqrt{9+16+4}=\sqrt{29}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1,-1,2)\cdot(3,-4,2)=-3+4+4=5$$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre dos rectas.

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{5}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{29}}\rightarrow\alpha=\arccos\left(\frac{5}{\sqrt{174}}\right)=67,73°$$

b) $\vec{u}=(6,-4,2)\rightarrow|\vec{u}|=\sqrt{36+16+4}=\sqrt{56}$

$\vec{v}=(-3,2,-1)\rightarrow|\vec{v}|=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(6,-4,2)\cdot(-3,2,-1)=-18-8-2=-28$

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{28}{\sqrt{56}\cdot\sqrt{14}}\rightarrow\alpha=\arccos(1)=0°$$

c) $\vec{u}=(-1,-4,14)\rightarrow|\vec{u}|=\sqrt{1+16+196}=\sqrt{213}$

$$s:\left.\begin{matrix}x-2y+z=6\\-x+4z=0\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}x=4t\\y=-3+\frac{5}{2}t\\z=t\end{matrix}\right\}\rightarrow\vec{v}=(8,5,2)\rightarrow|\vec{v}|=\sqrt{64+25+4}=\sqrt{93}$$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1,-4,14)\cdot(8,5,2)=-8-20+28=0$

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{0}{\sqrt{213}\cdot\sqrt{93}}\rightarrow\alpha=\arccos(0)=90°$$

d) $\vec{u}=(2,2,-1)\rightarrow|\vec{u}|=\sqrt{4+4+1}=3$

$$r:\left.\begin{matrix}2x-y+3z=0\\3x-2y+4z=5\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}x=-5-2t\\y=-10-t\\z=t\end{matrix}\right\}\rightarrow\vec{v}=(-2,-1,1)\rightarrow|\vec{v}|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-2,-1,1)\cdot(2,2,-1)=-4-2-1=-7$

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{7}{3\sqrt{6}}\rightarrow\alpha=\arccos\left(\frac{7}{3\sqrt{6}}\right)=17{,}71°$$

40. Página 154

Calculamos el producto escalar y los módulos de los vectores directores.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(0,1,1)\cdot(a,1,0)=1$

$|\vec{u}|=\sqrt{0+1+1}=\sqrt{2}$ $\quad\quad$ $|\vec{v}|=\sqrt{a^2+1+0}=\sqrt{a^2+1}$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre dos rectas.

$$\left.\begin{matrix}\cos(60°)=\frac{1}{2}\\\cos(\alpha)=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+1}}\end{matrix}\right\}\rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+1}}\rightarrow2\cdot\left(a^2+1\right)=4\rightarrow a^2=1\rightarrow a=\pm1$$

41. Página 154

Si $\vec{u}\cdot\vec{v}>0\rightarrow\cos\left(\widehat{\vec{u}\vec{v}}\right)>0\rightarrow\widehat{\vec{u}\vec{v}}$ es agudo.

Si $\vec{u}\cdot\vec{v}<0\rightarrow\cos\left(\widehat{\vec{u}\vec{v}}\right)<0\rightarrow\widehat{\vec{u}\vec{v}}$ es obtuso.

Si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\rightarrow\cos\left(\widehat{\vec{u}\vec{v}}\right)=0\rightarrow\widehat{\vec{u}\vec{v}}$ es recto.

42. Página 154

Calculamos el producto escalar y los módulos de los vectores directores.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(k,3,5)\cdot(2,-4,-2)=2k-12-10$$

Formarán un ángulo obtuso cuando $2k-22<0\rightarrow k<11$.

43. Página 154

$|\overrightarrow{AB}|=|(5,-7,1)|=5\sqrt{3}$ $\quad|\overrightarrow{AC}|=|(8,-6,4)|=2\sqrt{29}$ $\quad|\overrightarrow{BC}|=|(3,1,3)|=\sqrt{19}$

El lado mayor es $\overline{AC}$ y además $|\overrightarrow{AC}|^2=116>|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=19+75$.

Por tanto, el triángulo es obtusángulo.

44. Página 154

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\rightarrow 36=9+2\vec{a}\cdot\vec{b}+64\rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{37}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{37}{2}\\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos(\alpha)=3\cdot 8\cdot cos(\alpha)\end{array}\right\}-\frac{37}{2}=24\cdot cos(\alpha)\rightarrow\alpha=arc\,cos\left(-\frac{37}{48}\right)=140{,}43°$$

45. Página 154

Hallamos el vector director de la recta y el vector normal al plano.

$r:\dfrac{x}{2}=y=z\rightarrow\vec{u}=(2,1,1)$ $\qquad\pi:2x-y-z=0\rightarrow\vec{n}=(2,-1,-1)$

Calculamos el producto escalar y los módulos de dichos vectores.

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=(2,1,1)\cdot(2,-1,-1)=4-1-1=2$$

$|\vec{u}|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$ $\qquad|\vec{n}|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre plano y recta.

$$cos(90-\alpha)=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{1}{3}\rightarrow\alpha=90°-arc\,cos\left(\frac{1}{3}\right)=90°-70{,}53°=19{,}47°$$

46. Página 154

a) Hallamos el vector director de la recta y el vector normal al plano, sus módulos y su producto escalar.

$$\vec{u}=(1,2,-1)\rightarrow|\vec{u}|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$$

$$\pi:x-2y+3z=8\rightarrow\vec{n}=(1,-2,3)\rightarrow|\vec{n}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=(1,2,-1)\cdot(1,-2,3)=1-4-3=-6$$

$$cos(90-\alpha)=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}\rightarrow\alpha=90°-arc\,cos\left(\frac{3}{\sqrt{21}}\right)=90°-49{,}11°=40{,}89°$$

b) $\vec{u}=(2,2,-4)\rightarrow|\vec{u}|=\sqrt{4+4+16}=2\sqrt{6}$

$\pi: x-3y-z=6\rightarrow\vec{n}=(1,-3,-1)\rightarrow|\vec{n}|=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$

$\vec{u}\cdot\vec{n}=(2,2,-4)\cdot(1,-3,-1)=2-6+4=0$

$$cos(90-\alpha)=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{0}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{11}}\rightarrow\alpha=90°-arc\,cos(0)=90°-90°=0°$$

c) $r:\left.\begin{matrix}x+2y-3z=8\\-2x+y+z=4\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}x=\lambda\\y=4+\lambda\\z=\lambda\end{matrix}\right\}\rightarrow\vec{u}=(1,1,1)\rightarrow|\vec{u}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

$\pi: 2x+2y+2z=-3\rightarrow\vec{n}=(2,2,2)\rightarrow|\vec{n}|=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$

$\vec{u}\cdot\vec{n}=(1,1,1)\cdot(2,2,2)=2+2+2=6$

$$cos(90-\alpha)=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{6}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}\rightarrow\alpha=90°-arc\,cos(1)=90°-0°=90°$$

47. Página 154

Hallamos el vector director de la recta y el vector normal al plano, y sus módulos.

$r: x=\frac{y}{m}=-z\rightarrow\vec{u}=(1,m,-1)\rightarrow|\vec{u}|=\sqrt{1+m^2+1}=\sqrt{m^2+2}$

$\pi: x-z=0\rightarrow\vec{n}=(1,0,-1)\rightarrow|\vec{n}|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$

Calculamos el producto escalar y los módulos de dichos vectores.

$\vec{u}\cdot\vec{n}=(1,m,-1)\cdot(1,0,-1)=1+0+1=2$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre plano y recta.

$$\left.\begin{matrix}cos(90-\alpha)=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{m^2+2}}\\cos(90-30)=cos(60)=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\rightarrow\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{m^2+2}}=\frac{1}{2}\rightarrow16=2\cdot(m^2+2)\rightarrow m=\pm\sqrt{6}$$

48. Página 154

Hallamos la recta intersección de los planos.

$\left.\begin{matrix}y+2z=0\\3y+z=0\end{matrix}\right\}\rightarrow\left\{\begin{matrix}y=0\\z=0\end{matrix}\right.$. Los planos se cortan en el eje OX, entonces ambos planos contienen dicho eje.

Hallamos los vectores normales a ambos planos, el producto escalar de ambos y los módulos de dichos vectores.

$\pi_1: y+2z=0\rightarrow n_1=(0,1,2)\rightarrow|\vec{n}_1|=\sqrt{0+1+4}=\sqrt{5}$ $\qquad$ $\pi_2: 3y+z=0\rightarrow n_2=(0,3,1)\rightarrow|\vec{n}_2|=\sqrt{0+9+1}=\sqrt{10}$

$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=(0,1,2)\cdot(0,3,1)=0+3+2=5$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre dos planos: $cos\,\alpha=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\rightarrow\alpha=arc\,cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=45°$

49. Página 154

a) Hallamos los vectores normales a ambos planos, el producto escalar de ambos y los módulos de dichos vectores.

$$\alpha: 2x - y + 3z = -9 \rightarrow n_1 = (2,-1,3) \rightarrow |\vec{n}_1| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$$\beta: 2x - 2y - 2z = 19 \rightarrow n_2 = (2,-2,-2) \rightarrow |\vec{n}_2| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (2,-1,3)\cdot(2,-2,-2) = 4+2-6 = 0$$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre dos planos.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{0}{\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{3}} = 0 \rightarrow \alpha = \arccos(0) = 90°$$

b) $\alpha: -x + 5y + 3z = -1 \rightarrow n_1 = (-1,5,3) \rightarrow |\vec{n}_1| = \sqrt{1+25+9} = \sqrt{35}$

$$\beta: 3x + 5y + 7z = 9 \rightarrow n_2 = (3,5,7) \rightarrow |\vec{n}_2| = \sqrt{9+25+49} = \sqrt{83}$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (-1,5,3)\cdot(3,5,7) = -3+25+21 = 43$$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre dos planos.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{43}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{83}} \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{43}{\sqrt{2905}}\right) = 37{,}08°$$

c) $\alpha: -4x + 12y - 28z = -13 \rightarrow n_1 = (-4,12,-28) \rightarrow |\vec{n}_1| = \sqrt{16+144+784} = \sqrt{944}$

$$\beta: \left.\begin{array}{l} x = -2+t+3s \\ y = 2-2t+s \\ z = 1-t \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x - 3y + 7z + 1 = 0 \rightarrow n_2 = (1,-3,7) \rightarrow |\vec{n}_2| = \sqrt{1+9+49} = \sqrt{59}$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (-4,12,-28)\cdot(1,-3,7) = -4-36-196 = 236$$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre dos planos.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{236}{\sqrt{944}\cdot\sqrt{59}} \rightarrow \alpha = \arccos(1) = 0°$$

50. Página 154

Estudiamos la posición relativa entre ambas rectas.

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{4} = 3 - z \rightarrow r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-1} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -1+2\lambda \\ y = 1+4\lambda \\ z = 3-\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} P(-1,1,3) \\ \vec{u} = (2,4,-1) \end{array}\right.$$

$$s: \left.\begin{array}{l} x + 3y = 2 \\ 2y + z = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2-3t \\ y = t \\ z = 5-2t \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} Q(2,0,5) \\ \vec{v} = (-3,1,-2) \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{PQ} = (3,-1,2)$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(M) = 2$ $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}(M^*) = 2$

$\text{Rango}(M) = \text{Rango}(M^*) = 2 \rightarrow$ Las rectas son secantes.

Calculamos el punto de intersección.

$$\left.\begin{array}{l} 2-3t=-1+2\lambda \\ t=1+4\lambda \\ 5-2t=3-\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} t=1 \\ \lambda=0 \end{cases} \rightarrow R(-1,1,3)$$

Hallamos el ángulo que forman.

$\vec{u} = (2,4,-1) \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$ $\vec{v} = (-3,1,-2) \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (2,4,-1)\cdot(-3,1,-2) = -6+4+2 = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{0}{\sqrt{21}\sqrt{14}} = 0 \rightarrow \alpha = \arccos(0) = 90°$$

51. Página 154

Estudiamos la posición relativa entre ambas rectas.

$$r:(2-\lambda,3+\lambda,1+\lambda) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=2-\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=1+\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} P(2,3,1) \\ \vec{u}=(-1,1,1) \end{cases}$$

$$s:\left.\begin{array}{l} x+y-5=0 \\ x-z+1=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=t \\ y=5-t \\ z=1+t \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} Q(0,5,1) \\ \vec{v}=(1,-1,1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PQ} = (-2,2,0)$$

$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $M^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(M) = 2$ $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}(M^*) = 2$

$\text{Rango}(M) = \text{Rango}(M^*) = 2 \rightarrow$ Las rectas son secantes.

Calculamos el punto de intersección.

$$\left.\begin{array}{l} t=2-\lambda \\ 5-t=3+\lambda \\ 1+t=1+\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} t=1 \\ \lambda=1 \end{cases} \rightarrow R(1,4,2)$$

Hallamos el ángulo que forman.

$\vec{u} = (-1,1,1) \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ $\vec{v} = (1,-1,1) \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (-1,1,1)\cdot(1,-1,1) = -1-1+1 = -1$$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 70{,}53°$$

52. Página 154

Estudiamos la posición relativa entre ambas rectas.

$$r:\left.\begin{array}{l}x+y+z+3=0\\x-y-z-1=0\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}x=-1\\y=-2-t\\z=t\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l}P(-1,-2,0)\\\vec{u}=(0,-1,1)\end{array}\right.$$

$$s:(-1+2\lambda,-1+\lambda,m-2\lambda)\to\left.\begin{array}{l}x=-1+2\lambda\\y=-1+\lambda\\z=m-2\lambda\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l}Q(-1,-1,m)\\\vec{v}=(2,1,-2)\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{PQ}=(0,1,m)$$

$$M=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&1&-2\end{pmatrix}\qquad M^*=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&1&-2\\0&1&m\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}0&-1\\2&1\end{vmatrix}=2\neq0\to\text{Rango}(M)=2$$

Queremos $\text{Rango}(M^*)=2\to\begin{vmatrix}0&-1&1\\2&1&-2\\0&1&m\end{vmatrix}=2m+2=0\to m=-1$.

Para $m=-1\to\text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2\to$ Las rectas son secantes.

Calculamos el punto de intersección.

$$\left.\begin{array}{l}-1+2\lambda=-1\\-1+\lambda=-2-t\\-1-2\lambda=t\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l}t=-1\\\lambda=0\end{array}\right.\to R(-1,-1,-1)$$

Hallamos el ángulo que forman.

$$\vec{u}=(0,-1,1)\to|\vec{u}|=\sqrt{0+1+1}=\sqrt{2}$$

$$\vec{v}=(2,1,-2)\to|\vec{v}|=\sqrt{4+1+4}=3$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(0,-1,1)\cdot(2,1,-2)=0-1-2=-3$$

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\to\alpha=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=45^\circ$$

53. Página 154

a) Estudiamos la posición relativa entre ambas rectas.

$$r:\left.\begin{array}{l}x=-2+t\\y=4-t\\z=m-2t\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l}P(-2,4,m)\\\vec{u}=(1,-1,-2)\end{array}\right.\qquad s:x=y=z\to\left.\begin{array}{l}x=\lambda\\y=\lambda\\z=\lambda\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l}Q(0,0,0)\\\vec{v}=(1,1,1)\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{PQ}=(2,-4,-m)$$

$$M=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad M^*=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\1&1&1\\2&-4&-m\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(M) = 2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -m \end{vmatrix} = -2m + 14 = 0 \rightarrow m = 7 \rightarrow \begin{cases} m = 7 \rightarrow \text{Rango}(M^*) = 2 \\ m \neq 7 \rightarrow \text{Rango}(M^*) = 3 \end{cases}$$

Para $m = 7 \rightarrow \text{Rango}(M) = \text{Rango}(M^*) = 2 \rightarrow$ Las rectas son secantes.

Para $m \neq 7 \rightarrow 2 = \text{Rango}(M) \neq \text{Rango}(M^*) = 3 \rightarrow$ Las rectas se cruzan en el espacio.

b) Calculamos el punto de intersección.

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = -2 + t \\ \lambda = 4 - t \\ \lambda = 7 - 2t \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ \lambda = 1 \end{cases} \rightarrow R(1,1,1)$$

Hallamos el ángulo que forman.

$$\vec{u} = (1,-1,-2) \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \qquad \vec{v} = (1,1,1) \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1,-1,-2) \cdot (1,1,1) = 1 - 1 - 2 = -2$$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{2}{3\sqrt{2}}\right) = 61{,}87^\circ$$

54. Página 154

a) Estudiamos la posición relativa.

$$r: \frac{x}{3} = \frac{2y}{5} = -z \rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x - 6y = 0 \\ x + 3z = 0 \end{array}\right\}$$

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -54 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(M) = \text{Rango}(M^*) = 3 \rightarrow \text{La recta y el plano son secantes.}$$

b) Hallamos el ángulo que forman.

$$r: \frac{x}{3} = \frac{2y}{5} = -z \rightarrow \vec{u} = \left(3, \frac{5}{2}, -1\right) = (6,5,-2)$$

$$\pi: x + 2y - z - 9 = 0 \rightarrow \vec{n} = (1,2,-1)$$

Calculamos el producto escalar y los módulos de dichos vectores.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (6,5,-2) \cdot (1,2,-1) = 6 + 10 + 2 = 18 \qquad |\vec{u}| = \sqrt{36 + 25 + 4} = \sqrt{65} \qquad |\vec{n}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre plano y recta.

$$\cos(90 - \alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{18}{\sqrt{65} \cdot \sqrt{6}} = \frac{18}{\sqrt{390}} \rightarrow \alpha = 90^\circ - \arccos\left(\frac{18}{\sqrt{390}}\right) = 90^\circ - 24{,}29^\circ = 65{,}71^\circ$$

55. Página 154

a) $A(1,-1,0)\in r$ si al sustituir las coordenadas en las ecuaciones, se cumplen las igualdades.

$$r:\left.\begin{array}{l}x-2y+z-3=0\\-3x+y-z+4=0\end{array}\right\}\xrightarrow{A(1,-1,0)\in r}\left.\begin{array}{l}1-2\cdot(-1)+0-3=1+2-3=0\\-3\cdot 1+(-1)-0+4=-3-1+4=0\end{array}\right\}\to A\in r$$

b) $A(1,-1,0)\in\pi\to ax+y-2z-1=0\xrightarrow{A(1,-1,0)}a+(-1)-2\cdot 0-1=0\to a=2\to\pi:2x+y-2z-1=0$

Hallamos el ángulo que forman.

$$r:\left.\begin{array}{l}x-2y+z-3=0\\-3x+y-z+4=0\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}x=1-\frac{1}{5}t\\y=-1+\frac{2}{5}t\\z=t\end{array}\right\}\to\vec{u}=\left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5},1\right)=(-1,2,5)$$

$$\pi:2x+y-2z-1=0\to\vec{n}=(2,1,-2)$$

Calculamos el producto escalar y los módulos de dichos vectores.

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=(-1,2,5)\cdot(2,1,-2)=-2+2-10=-10\qquad|\vec{u}|=\sqrt{1+4+25}=\sqrt{30}\qquad|\vec{n}|=\sqrt{4+1+4}=3$$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre plano y recta.

$$cos(90-\alpha)=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{10}{\sqrt{30}\cdot 3}=\frac{10}{3\sqrt{30}}\to\alpha=90^\circ-arc\,cos\left(\frac{10}{3\sqrt{30}}\right)=90^\circ-52,51^\circ=37,49^\circ$$

56. Página 155

a) Estudiamos la posición relativa.

$$r:\left(1+2\lambda,\frac{\lambda}{2},a-3\lambda\right)\to\frac{x-1}{2}=2y=\frac{z-a}{-3}\to\left.\begin{array}{l}x-4y-1=0\\-3x-2z+3+2a=0\end{array}\right\}$$

$$M=\begin{pmatrix}1&-4&0\\-3&0&-2\\1&2&a\end{pmatrix}$$

$$M^*=\begin{pmatrix}1&-4&0&-1\\-3&0&-2&3+2a\\1&2&a&-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&-4\\-3&0\end{vmatrix}=12\neq 0\quad\begin{vmatrix}1&-4&0\\-3&0&-2\\1&2&a\end{vmatrix}=-12a+12\to\begin{cases}a=1\to\text{Rango}(M)=2\\a\neq 1\to\text{Rango}(M)=3\end{cases}$$

Para $a\neq 1\to\text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3\to$ La recta y el plano son secantes.

Para $a=1\to M^*=\begin{pmatrix}1&-4&0&-1\\-3&0&-2&5\\1&2&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{F_1=-2F_3-F_2}\text{Rango}(M^*)=\text{Rango}(M)=2$

La recta está contenida en el plano.

b) Hallamos el ángulo que forman.

$r:\left(1+2\lambda,\dfrac{\lambda}{2},-3\lambda\right)\rightarrow \vec{u}=\left(2,\dfrac{1}{2},-3\right)=(4,1,-6)$ $\qquad \pi: x+2y-2=0\rightarrow \vec{n}=(1,2,0)$

Calculamos el producto escalar y los módulos de dichos vectores.

$\vec{u}\cdot\vec{n}=(4,1,-6)\cdot(1,2,0)=4+2=6 \qquad |\vec{u}|=\sqrt{16+1+36}=\sqrt{53} \qquad |\vec{n}|=\sqrt{1+4+0}=\sqrt{5}$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre plano y recta.

$$cos(90-\alpha)=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{6}{\sqrt{53}\cdot\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{265}}\rightarrow\alpha=90°-arc\,cos\left(\frac{6}{\sqrt{265}}\right)=90°-68{,}37°=21{,}63°$$

c) El plano que buscamos tiene como vectores directores el vector normal al plano y el vector director de la recta, y pasa por cualquier punto de la recta.

$$\pi':\begin{cases}P(1,0,1)\\ \vec{u}=(4,1,-6)\\ \vec{n}=(1,2,1)\end{cases}\rightarrow\begin{vmatrix}x-1 & y & z-1\\ 4 & 1 & -6\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=13x-10y+7z-20=0\rightarrow\pi':13x-10y+7z-20=0$$

57. Página 155

a) $r:\dfrac{x}{3}=y=\dfrac{z}{-1}\rightarrow\left.\begin{matrix}x-3y=0\\ x+3z=0\end{matrix}\right\}\xrightarrow{P(2,0,0)}\begin{cases}2-3\cdot 0=2\neq 0\\ 2-3\cdot 0=2\neq 0\end{cases}\rightarrow P\notin r$ porque no se cumplen las igualdades.

$\pi: x+y-z-5=0\xrightarrow{P(2,0,0)}2+0+0-5=-3\neq 0\rightarrow P\notin\pi$ porque no se cumple la igualdad.

b) Estudiamos la posición relativa.

$$r:\frac{x}{3}=y=\frac{z}{-1}\rightarrow\left.\begin{matrix}x-3y=0\\ x+3z=0\end{matrix}\right\}$$

$$M=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -5\end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix}1 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-15\neq 0\rightarrow \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3\rightarrow$ La recta y el plano son secantes.

Hallamos el punto de corte entre recta y plano.

$$\left.\begin{matrix}x-3y=0\\ x+3z=0\\ x+y-z-5=0\end{matrix}\right\}\rightarrow Q(3,1,-1)$$

Hallamos el ángulo que forman.

$r:\dfrac{x}{3}=y=\dfrac{z}{-1}\rightarrow\vec{u}=(3,1,-1) \qquad \pi: x+y-z-5=0\rightarrow\vec{n}=(1,1,-1)$

Calculamos el producto escalar y los módulos de dichos vectores.

$\vec{u}\cdot\vec{n}=(3,1,-1)\cdot(1,1,-1)=3+1+1=5 \qquad |\vec{u}|=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11} \qquad |\vec{n}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre plano y recta.

$$cos(90-\alpha)=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{5}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{33}}\rightarrow\alpha=90°-arc\,cos\frac{5}{\sqrt{33}}=90°-29{,}49°=60{,}5°$$

c) El plano que contiene a la recta r y al punto P, tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector que va de un punto de la recta al punto P, y pasa por P.

$$r: \frac{x}{3} = y = \frac{z}{-1} \to R(0,0,0)$$

$$\pi': \begin{cases} P(2,0,0) \\ \vec{u} = (3,1,-1) \\ \overrightarrow{PQ} = (-2,0,0) \end{cases} \to \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2y + 2z = 0 \to \pi': x + z = 0$$

Calculamos el ángulo entre π y π'.

$$\pi: x + y - z - 5 = 0 \to \vec{n} = (1,1,-1)$$

$$\pi': x + z = 0 \to \vec{n}' = (1,0,1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = (1,1,-1) \cdot (1,0,1) = 1 - 1 = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} = 0 \to \alpha = \arccos(0) = 90°$$

58. Página 155

Estudiamos la posición relativa de los tres planos.

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ -2 & a & 5 \\ 4 & -1 & a \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ -2 & a & 5 & 1 \\ 4 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$

Los planos se cortan dos a dos cuando $2 = \text{Rango}(M) \neq \text{Rango}(M^*) = 3$ y no hay dos planos paralelos.

$$\text{Rango}(M) = 2 \to \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ -2 & a & 5 \\ 4 & -1 & a \end{vmatrix} = a^3 - a + 24 = 0 \to a = -3 \to \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \to \text{Rango}(M^*) = 3$$

El único valor que cumple esto es $a = -3$.

$$\pi_1: -3x + y + 2z + 1 = 0 \to \vec{n}_1 = (-3,1,2) \to |\vec{n}_1| = \sqrt{14}$$

$$\pi_2: -2x - 3y + 5z + 1 = 0 \to \vec{n}_2 = (-2,-3,5) \to |\vec{n}_2| = \sqrt{38}$$

$$\pi_3: 4x - y - 3z - 2 = 0 \to \vec{n}_3 = (4,-1,-3) \to |\vec{n}_3| = \sqrt{26}$$

Calculamos el ángulo entre π_1 y π_2.

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (-3,1,2) \cdot (-2,-3,5) = 13 \qquad \cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{13}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{38}} = \frac{13}{2\sqrt{133}} \to \alpha = \arccos\left(\frac{13}{2\sqrt{133}}\right) = 55{,}69°$$

Calculamos el ángulo entre π_1 y π_3.

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = (-3,1,2) \cdot (4,-1,-3) = -19 \qquad \cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_3|} = \frac{19}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{26}} = \frac{19}{2\sqrt{91}} \to \alpha = \arccos\left(\frac{19}{2\sqrt{91}}\right) = 5{,}21°$$

Calculamos el ángulo entre π_2 y π_3.

$$\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = (-2,-3,5) \cdot (4,-1,-3) = -20 \quad \cos\alpha = \frac{|\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3|}{|\vec{n}_2| \cdot |\vec{n}_3|} = \frac{20}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{26}} = \frac{10}{\sqrt{247}} \to \alpha = \arccos\left(\frac{10}{\sqrt{247}}\right) = 50{,}48°$$

59. Página 155

a) Primero. Hallamos la ecuación del plano perpendicular al eje que pasa por el punto P.

$$OX:\left.\begin{array}{l}y=0\\z=0\end{array}\right\}\to\vec{u}=(1,0,0)$$

$$\vec{n}=\vec{u}=(1,0,0)\to\pi:x+D=0 \qquad \pi:x+D=0\xrightarrow{P(3,1,5)}3+D=0\to D=-3\to\pi:x-3=0$$

Segundo. Calculamos el punto de corte entre la recta y el plano que hemos hallado, y ese será la proyección ortogonal.

$$\left.\begin{array}{l}y=0\\z=0\\x-3=0\end{array}\right\}\to Q(3,0,0)$$

b) $OY:\left.\begin{array}{l}x=0\\z=0\end{array}\right\}\to\vec{u}=(0,1,0)$

$$\vec{n}=\vec{u}=(0,1,0)\to\pi:y+D=0 \qquad \pi:y+D=0\xrightarrow{P(3,1,5)}1+D=0\to D=-1\to\pi:y-1=0$$

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\y-1=0\\z=0\end{array}\right\}\to Q(0,1,0)$$

c) $OZ:\left.\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right\}\to\vec{u}=(0,0,1)$

$$\vec{n}=\vec{u}=(0,0,1)\to\pi:z+D=0 \qquad \pi:z+D=0\xrightarrow{P(3,1,5)}5+D=0\to D=-5\to\pi:y-5=0$$

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\y=0\\z-5=0\end{array}\right\}\to Q(0,0,5)$$

La proyección ortogonal de un punto sobre uno de los ejes es un punto que tiene la coordenada correspondiente al eje igual a la del punto dado, y resto de coordenadas nulas.

60. Página 155

a) Primero. Hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto P.

$$r:(\lambda,-\lambda,3+\lambda)\to\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{1}\to\left.\begin{array}{l}x+y=0\\x-z+3=0\end{array}\right\}\to\vec{u}=(1,-1,1)$$

$$\vec{n}=\vec{u}=(1,-1,1)\to\pi:x-y+z+D=0$$

$$\pi:x-y+z+D=0\xrightarrow{P(2,2,0)}2-2+0+D=0\to D=0\to\pi:x-y+z=0$$

Segundo. Calculamos el punto de corte entre la recta y el plano que hemos hallado, y ese será la proyección ortogonal.

$$\left.\begin{array}{l}x+y=0\\x-z+3=0\\x-y+z=0\end{array}\right\}\to Q(-1,1,2)$$

b) $r:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-3}{2}=-z\rightarrow\left.\begin{array}{l}2x-3y+7=0\\x+3z-1=0\end{array}\right\}\rightarrow\vec{u}=(3,2,-1)$

$\vec{n}=\vec{u}=(3,2,-1)\rightarrow\pi:3x+2y-z+D=0$

$\pi:3x+2y-z+D=0\xrightarrow{P(-1,3,1)}-3+6-1+D=0\rightarrow D=-2\rightarrow\pi:3x+2y-z-2=0$

$\left.\begin{array}{l}2x-3y+7=0\\x+3z-1=0\\3x+2y-z-2=0\end{array}\right\}\rightarrow Q\left(-\dfrac{1}{2},2,\dfrac{1}{2}\right)$

c) $r:\left.\begin{array}{l}2x-y=6\\x+z=-1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=-1-t\\y=-8-2t\\z=t\end{array}\right\}\rightarrow\vec{u}=(-1,-2,1)$

$\vec{n}=\vec{u}=(-1,-2,1)\rightarrow\pi:-x-2y+z+D=0$

$\pi:-x-2y+z+D=0\xrightarrow{P\left(0,\frac{1}{2},0\right)}0-1+0+D=0\rightarrow D=1\rightarrow\pi:x+2y-z-1=0$

$\left.\begin{array}{l}2x-y=6\\x+z=-1\\x+2y-z-1=0\end{array}\right\}\rightarrow Q(2,-2,-3)$

d) $r:\left.\begin{array}{l}x=10-3t\\y=2t\\z=-5\end{array}\right\}\rightarrow\vec{u}=(-3,2,0)$

$\vec{n}=\vec{u}=(-3,2,0)\rightarrow\pi:-3x+2y+D=0$

$\pi:-3x+2y+D=0\xrightarrow{P(-3,0,1)}9+0+D=0\rightarrow D=-9\rightarrow\pi:3x-2y-9=0$

$\left.\begin{array}{l}2x+3y-20=0\\z=-5\\3x-2y-9=0\end{array}\right\}\rightarrow Q\left(\dfrac{67}{13},\dfrac{42}{13},-5\right)$

61. Página 155

a) Primero. Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

$\pi:x+y+z-3=0\rightarrow\vec{n}=(1,1,1)$

$r:\left\{\begin{array}{l}P(3,3,1)\\\vec{u}=\vec{n}=(1,1,1)\end{array}\right.\rightarrow\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{1}$

Segundo. Calculamos la proyección ortogonal como el punto de corte entre el plano y la recta que hemos hallado.

$\left.\begin{array}{l}x-3=y-3=z-1\\x+y+z-3=0\end{array}\right\}\rightarrow Q\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{5}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$

b) $\pi:-3x+2y-4z-25=0\rightarrow\vec{n}=(-3,2,-4)$

$r:\left\{\begin{array}{l}P\left(1,-\dfrac{1}{2},0\right)\\\vec{u}=\vec{n}=(-3,2,-4)\end{array}\right.\rightarrow\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{2y+1}{4}=\dfrac{z}{-4}$ $\qquad\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{2y+1}{4}=\dfrac{z}{-4}\\-3x+2y-4z-25=0\end{array}\right\}\rightarrow Q\left(-2,\dfrac{3}{2},-4\right)$

c) $\pi: \left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\beta \\ z=3\beta-11-2\lambda \end{array}\right\} \to \begin{vmatrix} x & y & z+11 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \to \pi: 2x-3y+z+11=0 \to \vec{n}=(2,-3,1)$

$r: \begin{cases} P(2,0,-1) \\ \vec{u}=\vec{n}=(2,-3,1) \end{cases} \to \frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{1}$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l} \frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{1} \\ 2x-3y+z+11=0 \end{array}\right\} \to Q(0,3,-2)$

62. Página 155

a) Primero. Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

$OXY \equiv \pi: z=0 \to \vec{n}=(0,0,1)$

$r: \begin{cases} P(-1,4,-3) \\ \vec{u}=\vec{n}=(0,0,1) \end{cases} \to \left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=4 \\ z=-3+t \end{array}\right\}$

Segundo. Calculamos la proyección ortogonal como el punto de corte entre el plano y la recta que hemos hallado.

$\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=4 \\ z=-3+t \\ z=0 \end{array}\right\} \to Q(-1,4,0)$

b) $OXZ \equiv \pi: y=0 \to \vec{n}=(0,1,0)$

$r: \begin{cases} P(-1,4,-3) \\ \vec{u}=\vec{n}=(0,1,0) \end{cases} \to \left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=4+t \\ z=-3 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=4+t \\ z=-3 \\ y=0 \end{array}\right\} \to Q(-1,0,-3)$

c) $OYZ \equiv \pi: x=0 \to \vec{n}=(1,0,0)$

$r: \begin{cases} P(-1,4,-3) \\ \vec{u}=\vec{n}=(1,0,0) \end{cases} \to \left.\begin{array}{l} x=-1+t \\ y=4 \\ z=-3 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x=-1+t \\ y=4 \\ z=-3 \\ x=0 \end{array}\right\} \to Q(0,4,-3)$

La proyección ortogonal de un punto sobre uno de los planos coordenados es un punto con las coordenadas correspondientes al plano, iguales a la del punto dado, y la tercera coordenada nula.

63. Página 155

La proyección ortogonal debe estar contenida en el plano. Comprobamos si los puntos dados lo están.

$$\pi: x+y-z-3=0 \xrightarrow{A(-1,4,0)} -1+4-3=0$$

$$\pi: x+y-z-3=0 \xrightarrow{B(0,-1,2)} 0-1-2-3=-6\neq 0 \to B$$ no puede ser la proyección ortogonal.

$$\pi: x+y-z-3=0 \xrightarrow{C(2,1,0)} 2+1-0-3=0$$

El vector que une el punto y su proyección ortogonal debe ser perpendicular al plano, y por tanto, paralelo a su vector normal.

$$\pi: x+y-z-3=0 \to \vec{n}=(1,1,-1)$$

$$\overrightarrow{AP}=(1,0,1)-(-1,4,0)=(2,-4,1) \to \overrightarrow{AP}\neq \lambda\vec{n}$$

$$\overrightarrow{CP}=(1,0,1)-(2,1,0)=(-1,-1,1) \to \overrightarrow{CP}=(-1)\vec{n}$$

El punto que es proyección ortogonal de P sobre π es $C(2,1,0)$.

64. Página 155

a) Primero. Hallamos el vector director de la recta, el vector normal al plano y un punto de la recta.

$$r:(2\lambda-1,-1+\lambda,5-\lambda) \to \begin{cases} P(-1,-1,5) \\ \vec{u}=(2,1,-1) \end{cases}$$

$$\pi: -x+2y-3z+1=0 \to \vec{n}=(-1,2,-3)$$

Segundo. Calculamos el plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular a π.

$$\pi': \begin{cases} P(-1,-1,5) \\ \vec{u}=(2,1,-1) \\ \vec{n}=(-1,2,-3) \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -x+7y+5z-19 \to \pi': x-7y-5z+19=0$$

Tercero. Calculamos el corte de los dos planos π y π', que es la recta s buscada.

$$\left.\begin{matrix} -x+2y-3z+1=0 \\ x-7y-5z+19=0 \end{matrix}\right\} \to s: \left.\begin{matrix} x=9-\frac{31}{5}\lambda \\ y=4-\frac{8}{5}\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\}$$

b) $r: \dfrac{x}{-3}=y-2=\dfrac{3-z}{3} \to \dfrac{x}{-3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-3} \to \begin{cases} P(0,2,3) \\ \vec{u}=(-3,1,-3) \end{cases}$

$$\pi: x-3y-2z+5=0 \to \vec{n}=(1,-3,-2)$$

$$\pi': \begin{cases} P(0,2,3) \\ \vec{u}=(-3,1,-3) \\ \vec{n}=(1,-3,-2) \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x & y-2 & z-3 \\ -3 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -11x-9y+8z-6 \to \pi': -11x-9y+8z-6=0$$

$$\left.\begin{matrix} x-3y-2z+5=0 \\ -11x-9y+8z-6=0 \end{matrix}\right\} \to s: \left.\begin{matrix} x=-\frac{3}{2}+\lambda \\ y=\frac{7}{6}-\frac{1}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\}$$

c) $r:\left.\begin{matrix}-x+3y-1=0\\ 2y-z+4=0\end{matrix}\right\}\rightarrow \left.\begin{matrix}x=-1+3t\\ y=t\\ z=4+2t\end{matrix}\right\}\rightarrow \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{2}\rightarrow \begin{cases}P(-1,0,4)\\ \vec{u}=(3,1,2)\end{cases}$

$\pi: -2x+y-z+4=0\rightarrow \vec{n}=(-2,1,-1)$

$\pi':\begin{cases}P(-1,0,4)\\ \vec{u}=(3,1,2)\\ \vec{n}=(-2,1,-1)\end{cases}\qquad \begin{vmatrix}x+1 & y & z-4\\ 3 & 1 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-3x-y+5z-23\rightarrow \pi': -3x-y+5z-23=0$

$\left.\begin{matrix}-2x+y-z+4=0\\ -3x-y+5z-23=0\end{matrix}\right\}\rightarrow s: \left.\begin{matrix}x=-\dfrac{19}{5}+\dfrac{4}{5}\lambda\\ y=-\dfrac{58}{5}+\dfrac{13}{5}\lambda\\ z=\lambda\end{matrix}\right\}$

d) $r: \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+3}{2}=z\rightarrow \begin{cases}P(1,-3,0)\\ \vec{u}=(-2,2,1)\end{cases}$

$\pi: 4x-4y-2z-7=0\rightarrow \vec{n}=(4,-4,-2)$

$\pi':\begin{cases}P(1,-3,0)\\ \vec{u}=(-2,2,1)\\ \vec{n}=(4,-4,-2)\end{cases}\qquad \begin{vmatrix}x-1 & y+3 & z\\ -2 & 2 & 1\\ 4 & -4 & -2\end{vmatrix}=0$

La recta y el plano son perpendiculares y, por tanto, la proyección ortogonal de la recta sobre el plano será un punto: el punto de intersección entre ambos.

$\left.\begin{matrix}\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+3}{2}=z\\ 4x-4y-2z-7=0\end{matrix}\right\}\rightarrow Q\left(0,-2,\dfrac{1}{2}\right)$

65. Página 155

a) Primero. Hallamos el vector director de la recta, el vector normal al plano y un punto de la recta.

$r: (1-\lambda,\lambda,-2\lambda)\rightarrow \begin{cases}P(1,0,0)\\ \vec{u}=(-1,1,-2)\end{cases}$

$OXY\equiv \pi: z=0\rightarrow \vec{n}=(0,0,1)$

Segundo. Calculamos el plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular a π.

$\pi':\begin{cases}P(1,0,0)\\ \vec{u}=(-1,1,-2)\\ \vec{n}=(0,0,1)\end{cases}\qquad \begin{vmatrix}x-1 & y & z\\ -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=x+y-1\rightarrow \pi': x+y-1=0$

Tercero. Calculamos el corte de los dos planos π y π', que es la recta s buscada.

$\left.\begin{matrix}z=0\\ x+y-1=0\end{matrix}\right\}\rightarrow s: \left.\begin{matrix}x=1-\lambda\\ y=\lambda\\ z=0\end{matrix}\right\}$

b) $r:(1-\lambda,\lambda,-2\lambda)\rightarrow\begin{cases}P(1,0,0)\\ \vec{u}=(-1,1,-2)\end{cases}$

$OXZ\equiv\pi:y=0\rightarrow\vec{n}=(0,1,0)$

$$\pi':\begin{cases}P(1,0,0)\\ \vec{u}=(-1,1,-2)\\ \vec{n}=(0,1,0)\end{cases}\qquad\begin{vmatrix}x-1 & y & z\\ -1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=2x-z-2\rightarrow\pi':2x-z-2=0$$

$$\left.\begin{array}{l}y=0\\ 2x-z-2=0\end{array}\right\}\rightarrow s:\left.\begin{array}{l}x=1+\frac{1}{2}\lambda\\ y=0\\ z=\lambda\end{array}\right\}$$

c) $r:(1-\lambda,\lambda,-2\lambda)\rightarrow\begin{cases}P(1,0,0)\\ \vec{u}=(-1,1,-2)\end{cases}$

$OYZ\equiv\pi:x=0\rightarrow\vec{n}=(1,0,0)$

$$\pi':\begin{cases}P(1,0,0)\\ \vec{u}=(-1,1,-2)\\ \vec{n}=(1,0,0)\end{cases}\qquad\begin{vmatrix}x-1 & y & z\\ -1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-2y-z\rightarrow\pi':-2y-z=0$$

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\ -2y-z=0\end{array}\right\}\rightarrow s:\left.\begin{array}{l}x=0\\ y=-\frac{1}{2}\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right\}$$

66. Página 155

Primero. Hallamos el vector director de la recta, el vector normal al plano y un punto de la recta.

Eje OX: $OX\equiv r:\left.\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=0\\ z=0\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}P(0,0,0)\\ \vec{u}=(1,0,0)\end{cases}$

$\pi:x-y-z+9=0\rightarrow\vec{n}=(1,-1,-1)$

Segundo. Calculamos el plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular a π.

$$\pi':\begin{cases}P(0,0,0)\\ \vec{u}=(1,0,0)\\ \vec{n}=(1,-1,-1)\end{cases}\qquad\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=y-z\rightarrow\pi':y-z=0$$

Tercero. Calculamos el corte de los dos planos π y π', que es la recta s buscada.

$$\left.\begin{array}{l}y-z=0\\ x-y-z+9=0\end{array}\right\}\rightarrow s:\left.\begin{array}{l}x=-9+2\lambda\\ y=\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right\}$$

Eje OY : $OY \equiv r: \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=\lambda \\ z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} P(0,0,0) \\ \vec{u}=(0,1,0) \end{cases}$

$$\pi': \begin{cases} P(0,0,0) \\ \vec{u}=(0,1,0) \\ \vec{n}=(1,-1,-1) \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -x-z \rightarrow \pi': x+z=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x+z=0 \\ x-y-z+9=0 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x=-\lambda \\ y=9-2\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}$$

Eje OZ : $OZ \equiv r: \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} P(0,0,0) \\ \vec{u}=(0,0,1) \end{cases}$

$$\pi': \begin{cases} P(0,0,0) \\ \vec{u}=(0,0,1) \\ \vec{n}=(1,-1,-1) \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = x+y \rightarrow \pi': x+y=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ x-y-z+9=0 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x=-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\lambda \\ y=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}$$

67. Página 155

a) Primero. Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

$$\pi: x-y+2z+1=0 \rightarrow \vec{n}=(1,-1,2)$$

$$t: \begin{cases} P(2,1,-5) \\ \vec{u}=\vec{n}=(1,-1,2) \end{cases} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-5+2\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{2} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y-3=0 \\ 2x-z-9=0 \end{array}\right\}$$

Segundo. Calculamos la proyección ortogonal como el punto de corte entre el plano y la recta que hemos hallado.

$$\left.\begin{array}{l} x+y-3=0 \\ 2x-z-9=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{array}\right\} \rightarrow Q\left(\frac{10}{3},-\frac{1}{3},-\frac{7}{3}\right)$$

b) Primero. Hallamos el vector director de la recta y un punto de la recta.

$$r: \frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1} \rightarrow \begin{cases} R(3,-1,0) \\ \vec{u}=(2,3,1) \end{cases}$$

Segundo. Calculamos el plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular a π.

$$\pi': \begin{cases} P(3,-1,0) \\ \vec{u}=(2,3,1) \\ \vec{n}=(1,-1,2) \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7x-3y-5z-24 \rightarrow \pi': 7x-3y-5z-24=0$$

Tercero. Calculamos el corte de los dos planos π y π', que es la recta s buscada.

$$\left.\begin{array}{l} x-y+2z+1=0 \\ 7x-3y-5z-24=0 \end{array}\right\} \to s: \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{27}{4}+\dfrac{11}{4}t \\ y=\dfrac{31}{4}+\dfrac{19}{4}t \\ z=t \end{array}\right\}$$

68. Página 155

a) Primero. Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

$$\pi: x+y-4z+7=0 \to \vec{n}=(1,1,-4)$$

$$t: \begin{cases} P(3,-2,1) \\ \vec{u}=\vec{n}=(1,1,-4) \end{cases} \to \left.\begin{array}{l} x=3+\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=1-4\lambda \end{array}\right\} \to \frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{-4} \to \left.\begin{array}{l} x-y-5=0 \\ -4x-z+13=0 \end{array}\right\}$$

Segundo. Calculamos la proyección ortogonal como el punto de corte entre el plano y la recta que hemos hallado.

$$\left.\begin{array}{l} x-y-5=0 \\ -4x-z+13=0 \\ x+y-4z+7=0 \end{array}\right\} \to Q\left(\frac{25}{9},-\frac{20}{9},\frac{17}{9}\right)$$

b) Primero. Hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto P.

$$r: \left.\begin{array}{l} x=2 \\ z=3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=t \\ z=3 \end{array}\right\} \to \begin{cases} R(2,0,3) \\ \vec{u}=(0,1,0) \end{cases} \qquad \vec{n}=\vec{u}=(0,1,0) \to \pi': y+D=0$$

$$\pi': y+D=0 \xrightarrow{P(3,-2,1)} -2+D=0 \to D=2 \to \pi': y+2=0$$

Segundo. Calculamos el punto de corte entre la recta y el plano que hemos hallado, y ese será la proyección ortogonal.

$$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ z=3 \\ y+2=0 \end{array}\right\} \to M(2,-2,3)$$

c) Primero. Calculamos el plano π'' que contiene a la recta r y es perpendicular a π.

$$\pi'': \begin{cases} R(2,0,3) \\ \vec{u}=(0,1,0) \\ \vec{n}=(1,1,-4) \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x-2 & y & z-3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -4x-z+11 \to \pi'': 4x+z-11=0$$

Segundo. Calculamos el corte de los dos planos π y π'', que es la recta s buscada.

$$\left.\begin{array}{l} x+y-4z+7=0 \\ 4x+z-11=0 \end{array}\right\} \to s: \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{11}{4}-\dfrac{1}{4}t \\ y=-\dfrac{39}{4}+\dfrac{17}{4}t \\ z=t \end{array}\right\}$$

69. Página 156

a) Primero. Hallamos la proyección ortogonal del punto sobre el eje.

$$OX \equiv r: \left.\begin{matrix} y=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x=\lambda \\ y=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \vec{u}=(1,0,0)$$

$$\left.\begin{matrix} \vec{n}=(1,0,0) \\ P(-2,3,1) \end{matrix}\right\} \rightarrow \pi: x+2=0$$

$$\left.\begin{matrix} y=0 \\ z=0 \\ x+2=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow Q(-2,0,0)$$

Segundo. Calculamos el simétrico del punto respecto de la proyección.

$$(-2,0,0)=\left(\frac{-2+p_1}{2},\frac{3+p_2}{2},\frac{1+p_3}{2}\right) \rightarrow P'(-2,-3,-1)$$

b) $$OY \equiv r: \left.\begin{matrix} x=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x=0 \\ y=\lambda \\ z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \vec{u}=(0,1,0)$$

$$\left.\begin{matrix} \vec{n}=(0,1,0) \\ P(-2,3,1) \end{matrix}\right\} \rightarrow \pi: y-3=0$$

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ z=0 \\ y-3=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow Q(0,3,0)$$

$$(0,3,0)=\left(\frac{-2+p_1}{2},\frac{3+p_2}{2},\frac{1+p_3}{2}\right) \rightarrow P'(2,3,-1)$$

c) $$OZ \equiv r: \left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{matrix}\right\} \rightarrow \vec{u}=(0,0,1)$$

$$\left.\begin{matrix} \vec{n}=(0,0,1) \\ P(-2,3,1) \end{matrix}\right\} \rightarrow \pi: z-1=0$$

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z-1=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow Q(0,0,1)$$

$$(0,0,1)=\left(\frac{-2+p_1}{2},\frac{3+p_2}{2},\frac{1+p_3}{2}\right) \rightarrow P'(2,-3,1)$$

El punto simétrico de un punto respecto de los ejes de coordenadas es un punto con la coordenada correspondiente al eje igual a la del punto dado, y las otras dos, cambiadas de signo respecto al punto original.

70. Página 156

a) Primero. Hallamos la proyección ortogonal del punto sobre la recta.

$$r:(-2\lambda,-1+\lambda,2)\to \left.\begin{array}{r} x=-2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=2 \end{array}\right\}\to \left.\begin{array}{c} \dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+1}{1} \\ z=2 \end{array}\right\}\to \left\{\begin{array}{l} P(0,-1,2) \\ \vec{u}=(-2,1,0) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{n}=(-2,1,0)\to \pi:-2x+y+D=0 \\ P(-1,2,3)\xrightarrow{-2x+y+D=0} 2+2+D=0\to D=-4 \end{array}\right\}\to \pi:-2x+y-4=0$$

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+1}{1} \\ z=2 \\ -2x+y-4=0 \end{array}\right\}\to Q(-2,0,2)$$

Segundo. Calculamos el simétrico del punto respecto de la proyección.

$$(-2,0,2)=\left(\frac{-1+p_1}{2},\frac{2+p_2}{2},\frac{3+p_3}{2}\right)\to P'(-3,-2,1)$$

b) Hallamos la proyección ortogonal del punto sobre la recta.

$$r:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-3}=z-6\to \left.\begin{array}{c} \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-3} \\ \dfrac{x+2}{2}=z-6 \end{array}\right\}\to \left\{\begin{array}{l} P(-2,1,6) \\ \vec{u}=(2,-3,1) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{n}=(2,-3,1)\to \pi:2x-3y+z+D=0 \\ P(0,-2,0)\xrightarrow{2x-3y+z+D=0} 0+6+0+D=0\to D=-6 \end{array}\right\}\to \pi:2x-3y+z-6=0$$

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-3} \\ \dfrac{x+2}{2}=z-6 \\ 2x-3y+z-6=0 \end{array}\right\}\to Q\left(-1,-\frac{1}{2},\frac{13}{2}\right)$$

Calculamos el simétrico del punto respecto de la proyección.

$$\left(-1,-\frac{1}{2},\frac{13}{2}\right)=\left(\frac{0+p_1}{2},\frac{-2+p_2}{2},\frac{0+p_3}{2}\right)\to P'(-2,1,13)$$

c) Hallamos la proyección ortogonal del punto sobre la recta.

$$r:\left.\begin{array}{r} x-2y=8 \\ -2x+y+z=1 \end{array}\right\}\to \left.\begin{array}{r} x=-\dfrac{10}{3}+\dfrac{2}{3}\lambda \\ y=-\dfrac{17}{3}+\dfrac{1}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}\to \left\{\begin{array}{l} P\left(-\dfrac{10}{3},-\dfrac{17}{3},0\right) \\ \vec{u}=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},1\right)=(2,1,3) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{n}=(2,1,3)\to \pi:2x+y+3z+D=0 \\ P(-1,2,13)\xrightarrow{2x+y+3z+D=0} -2+2+39+D=0\to D=-39 \end{array}\right\}\to \pi:2x+y+3z-39=0$$

$$\left.\begin{array}{r} x-2y=8 \\ -2x+y+z=1 \\ 2x+y+3z-39=0 \end{array}\right\}\to Q(4,-2,11)$$

Calculamos el simétrico: $(4,-2,11)=\left(\dfrac{-1+p_1}{2},\dfrac{2+p_2}{2},\dfrac{13+p_3}{2}\right)\to P'(9,-6,9)$

d) Hallamos la proyección ortogonal del punto sobre la recta.

$$r:(1-2\lambda,3+2\lambda,-1-\lambda)\rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1-2\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=-1-\lambda \end{array}\right\}\rightarrow \frac{x-1}{-2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{-1}\rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{x-1}{-2}=\frac{y-3}{2} \\ \frac{x-1}{-2}=\frac{z+1}{-1} \end{array}\right\}\rightarrow \left\{\begin{array}{l} P(1,3,-1) \\ \vec{u}=(-2,2,-1) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=(-2,2,-1)\rightarrow \pi:-2x+2y-z+D=0 \\ P\left(2,2,\frac{1}{2}\right)\xrightarrow{-2x+2y-z+D=0}-4+4-\frac{1}{2}+D=0\rightarrow D=\frac{1}{2} \end{array}\right\}\rightarrow \pi:-4x+4y-2z+1=0$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x-1}{-2}=\frac{y-3}{2} \\ \frac{x-1}{-2}=\frac{z+1}{-1} \\ -4x+4y-2z+1=0 \end{array}\right\}\rightarrow Q\left(\frac{20}{9},\frac{16}{9},-\frac{7}{18}\right)$$

Calculamos el simétrico del punto respecto de la proyección.

$$\left(\frac{20}{9},\frac{16}{9},-\frac{7}{18}\right)=\left(\frac{2+p_1}{2},\frac{2+p_2}{2},\frac{\frac{1}{2}+p_3}{2}\right)\rightarrow P'\left(\frac{22}{9},\frac{14}{9},-\frac{23}{18}\right)$$

71. Página 156

a) Primero. Calculamos la proyección ortogonal del punto sobre el plano.

$$OXY\equiv \pi: z=0\rightarrow \vec{n}=(0,0,1)$$

$$r:\left\{\begin{array}{l} P(2,-1,0) \\ \vec{u}=\vec{n}=(0,0,1) \end{array}\right.\rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \\ z=\lambda \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \\ z=0 \end{array}\right\}\rightarrow Q(2,-1,0)$$

Segundo. Calculamos el simétrico del punto respecto a la proyección.

$$(2,-1,0)=\left(\frac{2+p_1}{2},\frac{-1+p_2}{2},\frac{0+p_3}{2}\right)\rightarrow P'(2,-1,0)$$

b) $OXZ\equiv \pi: y=0\rightarrow \vec{n}=(0,1,0)$

$$r:\left\{\begin{array}{l} P(2,-1,0) \\ \vec{u}=\vec{n}=(0,1,0) \end{array}\right.\rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=-1+\lambda \\ z=0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right\}\rightarrow Q(2,0,0)$$

$$(2,0,0)=\left(\frac{2+p_1}{2},\frac{-1+p_2}{2},\frac{0+p_3}{2}\right)\rightarrow P'(2,1,0)$$

c) $OYZ \equiv \pi : x = 0 \rightarrow \vec{n} = (1,0,0)$

$$r : \begin{cases} P(2,-1,0) \\ \vec{u} = \vec{n} = (1,0,0) \end{cases} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2+\lambda \\ y = -1 \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = -1 \\ z = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow Q(0,-1,0)$$

$$(0,-1,0) = \left(\frac{2+p_1}{2}, \frac{-1+p_2}{2}, \frac{0+p_3}{2}\right) \rightarrow P'(-2,-1,0)$$

El punto simétrico de un punto respecto de los planos coordenados es un punto con las coordenadas correspondientes al plano iguales a las del punto dado, y la otra, cambiada de signo respecto al punto original.

72. Página 156

Primero. Hallamos la proyección ortogonal del punto sobre la recta.

$$r : x+1 = y-2 = \frac{z-3}{4} \rightarrow \begin{cases} P(-1,2,3) \\ \vec{u} = (1,1,4) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = (1,1,4) \rightarrow \pi : x+y+4z+D = 0 \\ P(1,2,1) \xrightarrow{x+y+4z+D=0} 1+2+4+D = 0 \rightarrow D = -7 \end{array}\right\} \rightarrow \pi : x+y+4z-7 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x+1 = y-2 \\ x+1 = \dfrac{z-3}{4} \\ x+y+4z-7 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow Q\left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

Segundo. Calculamos el simétrico del punto respecto de la proyección.

$$\left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right) = \left(\frac{1+p_1}{2}, \frac{2+p_2}{2}, \frac{1+p_3}{2}\right) \rightarrow P'\left(-\frac{11}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

73. Página 156

a) Primero. Calculamos la proyección ortogonal del punto sobre el plano.

$$\pi : 2x-y-5z-12 = 0 \rightarrow \vec{n} = (2,-1,-5)$$

$$r : \begin{cases} P(1,0,1) \\ \vec{u} = \vec{n} = (2,-1,-5) \end{cases} \rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-5}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{-5} \\ 2x-y-5z-12 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow Q\left(2, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

Segundo. Calculamos el simétrico del punto respecto a la proyección.

$$\left(2, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1+p_1}{2}, \frac{0+p_2}{2}, \frac{1+p_3}{2}\right) \rightarrow P'(3,-1,-4)$$

b) Primero. Calculamos la proyección ortogonal del punto sobre el plano.

$$\pi: 3x+2y-38=0 \rightarrow \vec{n}=(3,2,0)$$

$$r:\begin{cases} P(-1,1,0) \\ \vec{u}=\vec{n}=(3,2,0) \end{cases} \rightarrow \left.\begin{matrix} \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2} \\ z=0 \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2} \\ z=0 \\ 3x+2y-38=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow Q(8,7,0)$$

Segundo. Calculamos el simétrico del punto respecto a la proyección.

$$(8,7,0)=\left(\frac{-1+p_1}{2},\frac{1+p_2}{2},\frac{0+p_3}{2}\right) \rightarrow P'(17,13,0)$$

c) Primero. Calculamos la proyección ortogonal del punto sobre el plano.

$$\pi: -2y+5z-23=0 \rightarrow \vec{n}=(0,-2,5)$$

$$r:\begin{cases} P\left(0,\dfrac{1}{2},-1\right) \\ \vec{u}=\vec{n}=(0,-2,5) \end{cases} \rightarrow \left.\begin{matrix} x=0 \\ \dfrac{y-(1/2)}{-2}=\dfrac{z+1}{5} \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ \dfrac{y-(1/2)}{-2}=\dfrac{z+1}{5} \\ -2y+5z-23=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow Q\left(0,-\frac{3}{2},4\right)$$

Segundo. Calculamos el simétrico del punto respecto a la proyección.

$$\left(0,-\frac{3}{2},4\right)=\left(\frac{0+p_1}{2},\frac{(1/2)+p_2}{2},\frac{-1+p_3}{2}\right) \rightarrow P'\left(0,-\frac{7}{2},9\right)$$

74. Página 156

a) Primero. Tomamos dos puntos de la recta y calculamos sus simétricos respecto del plano.

$$r:\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-1} \rightarrow \left.\begin{matrix} x=2t \\ y=3t \\ z=-t \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Dos puntos son: } P(0,0,0)\in r \text{ y } Q(2,3,-1)\in r$$

Hallamos las ecuaciones de dos rectas perpendiculares al plano, una que pase por cada uno de los dos puntos.

$$OXY \equiv \pi: z=0 \rightarrow \vec{n}=(0,0,1)$$

$$s:\begin{cases} \vec{u}=\vec{n}=(0,0,1) \\ P(0,0,0) \end{cases} \rightarrow s:(0,0,0)+\lambda(0,0,1) \qquad t:\begin{cases} \vec{v}=\vec{n}=(0,0,1) \\ Q(2,3,-1) \end{cases} \rightarrow t:(2,3,-1)+\beta(0,0,1)$$

Calculamos la intersección entre las rectas obtenidas y el plano.

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z=t \\ z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow P'(0,0,0) \qquad \left.\begin{matrix} x=2 \\ y=3 \\ z=-1+t \\ z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow Q'(2,3,0)$$

Segundo. Calculamos el simétrico de cada punto respecto a su proyección.

$P':(0,0,0)=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)\rightarrow P''(0,0,0) \quad Q':(2,3,0)=\left(\frac{2+a}{2},\frac{3+b}{2},\frac{-1+c}{2}\right)\rightarrow Q''(2,3,1)$

Tercero. La recta buscada pasa por los dos puntos calculados.

$q:\begin{cases} P''(0,0,0) \\ \overrightarrow{P''Q''}=(2,3,1) \end{cases} \rightarrow q:(0,0,0)+\mu(2,3,1)$

b) Primero. Tomamos dos puntos de la recta: $P(0,0,0)\in r$ y $Q(2,3,-1)\in r$

Hallamos dos rectas perpendiculares al plano, que pasen por cada uno de los dos puntos.

$OXZ\equiv\pi: y=0\rightarrow \vec{n}=(0,1,0)$

$s:\begin{cases} \vec{u}=\vec{n}=(0,1,0) \\ P(0,0,0) \end{cases} \rightarrow s:(0,0,0)+\lambda(0,1,0) \quad t:\begin{cases} \vec{v}=\vec{n}=(0,1,0) \\ Q(2,3,-1) \end{cases} \rightarrow t:(2,3,-1)+\beta(0,1,0)$

Calculamos la intersección entre las rectas obtenidas y el plano.

$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=t \\ z=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \rightarrow P'(0,0,0) \qquad \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=3+t \\ z=-1 \\ y=0 \end{array}\right\} \rightarrow Q'(2,0,-1)$

Segundo. Calculamos el simétrico de cada punto respecto a su proyección.

$P':(0,0,0)=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)\rightarrow P''(0,0,0) \qquad Q':(2,0,-1)=\left(\frac{2+a}{2},\frac{3+b}{2},\frac{-1+c}{2}\right)\rightarrow Q''(2,-3,-1)$

Tercero. La recta buscada pasa por los dos puntos calculados.

$q:\begin{cases} P''(0,0,0) \\ \overrightarrow{P''Q''}=(2,-3,-1) \end{cases} \rightarrow q:(0,0,0)+\mu(2,-3,-1)$

c) Primero. Tomamos dos puntos de la recta y calculamos sus simétricos respecto del plano.

$P(0,0,0)\in r$ y $Q(2,3,-1)\in r$

Hallamos dos rectas perpendiculares al plano, una que pase por cada uno de los dos puntos.

$OYZ=\pi: x=0\rightarrow \vec{n}=(1,0,0)$

$s:\begin{cases} \vec{u}=\vec{n}=(1,0,0) \\ P(0,0,0) \end{cases} \rightarrow s:(0,0,0)+\lambda(1,0,0) \quad t:\begin{cases} \vec{v}=\vec{n}=(1,0,0) \\ Q(2,3,-1) \end{cases} \rightarrow t:(2,3,-1)+\beta(1,0,0)$

Calculamos la intersección entre las rectas obtenidas y el plano.

$\left.\begin{array}{l} x=t \\ y=0 \\ z=0 \\ x=0 \end{array}\right\} \rightarrow P'(0,0,0) \qquad \left.\begin{array}{l} x=2+t \\ y=3 \\ z=-1 \\ x=0 \end{array}\right\} \rightarrow Q'(0,3,-1)$

Segundo. Calculamos el simétrico de cada punto respecto a su proyección.

$P':(0,0,0)=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)\rightarrow P''(0,0,0) \qquad Q':(0,3,-1)=\left(\frac{2+a}{2},\frac{3+b}{2},\frac{-1+c}{2}\right)\rightarrow Q''(-2,3,-1)$

Tercero. La recta buscada pasa por los dos puntos calculados.

$q:\begin{cases} P''(0,0,0) \\ \overrightarrow{P''Q''}=(-2,3,-1) \end{cases} \rightarrow q:(0,0,0)+\mu(-2,3,-1)$

75. Página 156

a) Primero. Tomamos dos puntos de la recta y calculamos sus simétricos respecto del plano.

$r:(2\lambda,-1+\lambda,5-\lambda)\to$ Dos puntos son: $P(0,-1,5)\in r$ y $Q(2,0,4)\in r$.

Hallamos las ecuaciones de dos rectas perpendiculares al plano, una que pase por cada uno de los dos puntos.

$$s:\begin{cases}\vec{u}=\vec{n}=(-1,2,-3)\\ P(0,-1,5)\end{cases}\to\left.\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-5}{-3}\right\}\to s:(0,-1,5)+\lambda(-1,2,-3)$$

$$t:\begin{cases}\vec{v}=\vec{n}=(-1,2,-3)\\ Q(2,0,4)\end{cases}\to\left.\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{-3}\right\}\to t:(2,0,4)+\beta(-1,2,-3)$$

Calculamos la intersección entre las rectas obtenidas y el plano.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{2}\\ \dfrac{x}{-1}=\dfrac{z-5}{-3}\\ -x+2y-3z+1=0\end{array}\right\}\to P'\left(-\frac{8}{7},\frac{9}{7},\frac{11}{7}\right)\qquad \left.\begin{array}{l}\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{2}\\ \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{z-4}{-3}\\ -x+2y-3z+1=0\end{array}\right\}\to Q'\left(\frac{15}{14},\frac{13}{7},\frac{17}{14}\right)$$

Segundo. Calculamos el simétrico de cada punto respecto a su proyección.

$$P':\left(-\frac{8}{7},\frac{9}{7},\frac{11}{7}\right)=\left(\frac{a}{2},\frac{-1+b}{2},\frac{5+c}{2}\right)\to P''\left(-\frac{16}{7},\frac{25}{7},-\frac{13}{7}\right)$$

$$Q':\left(\frac{15}{14},\frac{13}{7},\frac{17}{14}\right)=\left(\frac{2+a}{2},\frac{0+b}{2},\frac{4+c}{2}\right)\to Q''\left(\frac{1}{7},\frac{26}{7},-\frac{11}{7}\right)$$

Tercero. La recta buscada pasa por los dos puntos calculados.

$$q:\begin{cases}P''\left(-\dfrac{16}{7},\dfrac{25}{7},-\dfrac{13}{7}\right)\\ \overrightarrow{P''Q''}=\left(\dfrac{17}{7},\dfrac{1}{7},\dfrac{2}{7}\right)=(17,1,2)\end{cases}\to q:\left(-\frac{16}{7},\frac{25}{7},-\frac{13}{7}\right)+\mu(17,1,2)$$

b) Primero. Tomamos dos puntos de la recta y calculamos sus simétricos respecto del plano.

$r:\dfrac{x}{-3}=y-2=\dfrac{3-z}{3}\to\dfrac{x}{3}=y-2=\dfrac{z-3}{-3}\to$ Dos puntos son: $P(-3,3,0)\in r$ y $Q(3,1,6)\in r$

Hallamos las ecuaciones de dos rectas perpendiculares al plano, una que pase por cada uno de los dos puntos.

$$s:\begin{cases}\vec{u}=\vec{n}=(1,-3,-2)\\ P(-3,3,0)\end{cases}\to\left.\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z}{-2}\right\}\to s:(-3,3,0)+\lambda(1,-3,-2)$$

$$t:\begin{cases}\vec{v}=\vec{n}=(1,-3,-2)\\ Q(3,1,6)\end{cases}\to\left.\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-6}{-2}\right\}\to t:(3,1,6)+\beta(1,-3,-2)$$

Calculamos la intersección entre las rectas obtenidas y el plano.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{-3}\\ \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{z}{-2}\\ x-3y-2z+5=0\end{array}\right\}\to P'\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2},-1\right)\qquad \left.\begin{array}{l}\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{-3}\\ \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{z-6}{-2}\\ x-3y-2z+5=0\end{array}\right\}\to Q'\left(\frac{7}{2},-\frac{1}{2},5\right)$$

Segundo. Calculamos el simétrico de cada punto respecto a su proyección.

$$P':\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2},-1\right)=\left(\frac{-3+a}{2},\frac{3+b}{2},\frac{c}{2}\right)\to P''(-2,0,-2)$$

$$Q':\left(\frac{7}{2},-\frac{1}{2},5\right)=\left(\frac{3+a}{2},\frac{1+b}{2},\frac{6+c}{2}\right)\to Q''(4,-2,4)$$

Tercero. La recta buscada pasa por los dos puntos calculados.

$$q:\begin{cases}P''(-2,0,-2)\\ \overrightarrow{P''Q''}=(6,-2,6)\end{cases}\to q:(-2,0,-2)+\mu(6,-2,6)$$

c) Primero. Tomamos dos puntos de la recta y calculamos sus simétricos respecto del plano.

$$r:\left.\begin{matrix}-x+3y-1=0\\ 2y-z+4=0\end{matrix}\right\}\to\left.\begin{matrix}x=-1+3t\\ y=t\\ z=4+2t\end{matrix}\right\}\to \text{Dos puntos son: } P(-1,0,4)\in r \text{ y } Q(2,1,6)\in r$$

Hallamos las ecuaciones de dos rectas perpendiculares al plano, una que pase por cada uno de los dos puntos.

$$s:\left.\begin{cases}\vec{u}=\vec{n}=(-2,1,-1)\\ P(-1,0,4)\end{cases}\to\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{-1}\right\}\to s:(-1,0,4)+\lambda(-2,1,-1)$$

$$t:\left.\begin{cases}\vec{v}=\vec{n}=(-2,1,-1)\\ Q(2,1,6)\end{cases}\to\frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-1}\right\}\to t:(2,1,6)+\beta(-2,1,-1)$$

Calculamos la intersección entre las rectas obtenidas y el plano.

$$\left.\begin{matrix}\frac{x+1}{-2}=y\\ \frac{x+1}{-2}=\frac{z-4}{-1}\\ -2x+y-z+4=0\end{matrix}\right\}\to P'\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{13}{3}\right)\qquad \left.\begin{matrix}\frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{1}\\ \frac{x-2}{-2}=\frac{z-6}{-1}\\ -2x+y-z+4=0\end{matrix}\right\}\to Q'\left(\frac{1}{3},\frac{11}{6},\frac{31}{6}\right)$$

Segundo. Calculamos el simétrico de cada punto respecto a su proyección.

$$P':\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{13}{3}\right)=\left(\frac{-1+a}{2},\frac{0+b}{2},\frac{4+c}{2}\right)\to P''\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{14}{3}\right)$$

$$Q':\left(\frac{1}{3},\frac{11}{6},\frac{31}{6}\right)=\left(\frac{2+a}{2},\frac{1+b}{2},\frac{6+c}{2}\right)\to Q''\left(-\frac{4}{3},\frac{8}{3},\frac{13}{3}\right)$$

Tercero. La recta buscada pasa por los dos puntos calculados.

$$q:\begin{cases}P''\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{14}{3}\right)\\ \overrightarrow{P''Q''}=\left(-\frac{5}{3},\frac{10}{3},-\frac{1}{3}\right)=(-5,10,-1)\end{cases}\to q:\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{14}{3}\right)+\mu(-5,10,-1)$$

d) Primero. Tomamos dos puntos de la recta y calculamos sus simétricos respecto del plano.

$$r:\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{2}=z\to\left.\begin{matrix}x=1-2t\\ y=-3+2t\\ z=t\end{matrix}\right\}\to \text{Dos puntos son: } P(1,-3,0)\in r \text{ y } Q(-1,-1,1)\in r\,.$$

Hallamos las ecuaciones de dos rectas perpendiculares al plano, una que pase por cada uno de los dos puntos.

$$s:\begin{cases}\vec{u}=\vec{n}=(4,-4,-2)\\ P(1,-3,0)\end{cases}\rightarrow \left.\frac{x-1}{4}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z}{-2}\right\}\rightarrow s:(1,-3,0)+\lambda(4,-4,-2)$$

$$t:\begin{cases}\vec{v}=\vec{n}=(4,-4,-2)\\ Q(-1,-1,1)\end{cases}\rightarrow \left.\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-1}{-2}\right\}\rightarrow t:(-1,-1,1)+\beta(4,-4,-2)$$

Calculamos la intersección entre las rectas obtenidas y el plano.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x-1}{4}=\frac{y+3}{-4}\\ \frac{x-1}{4}=\frac{z}{-2}\\ 4x-4y-2z-7=0\end{array}\right\}\rightarrow P'\left(0,-2,\frac{1}{2}\right) \qquad \left.\begin{array}{l}\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{-4}\\ \frac{x+1}{4}=\frac{z-1}{-2}\\ 4x-4y-2z-7=0\end{array}\right\}\rightarrow Q'\left(0,-2,\frac{1}{2}\right)$$

Segundo. Calculamos el simétrico de cada punto respecto a su proyección.

$$P':\left(0,-2,\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1+a}{2},\frac{-3+b}{2},\frac{0+c}{2}\right)\rightarrow P''(-1,-1,1)$$

$$Q':\left(0,-2,\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{-1+a}{2},\frac{-1+b}{2},\frac{1+c}{2}\right)\rightarrow Q''(1,-3,0)$$

Tercero. La recta buscada pasa por los dos puntos calculados.

$$q:\begin{cases}P''(-1,-1,1)\\ \overrightarrow{P''Q''}=(2,-2,-1)\end{cases}\rightarrow q:(-1,-1,1)+\mu(2,-2,-1)$$

76. Página 156

Eje $OX\equiv r:\left.\begin{array}{r}x=t\\ y=0\\ z=0\end{array}\right\}\rightarrow(t,0,0)$

Primero. Tomamos dos puntos de la recta y calculamos sus simétricos respecto del plano.

Dos puntos son: $P(0,0,0)\in r$ y $Q(1,0,0)\in r$

Hallamos las ecuaciones de dos rectas perpendiculares al plano, una que pase por cada uno de los dos puntos.

$$s:\begin{cases}\vec{u}=\vec{n}=(-1,1,1)\\ P(0,0,0)\end{cases}\rightarrow \left.\begin{array}{r}x=-\lambda\\ y=\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r}x=-y\\ y=z\end{array}\right\}\rightarrow s:(0,0,0)+\lambda(-1,1,1)$$

$$t:\begin{cases}\vec{v}=\vec{n}=(-1,1,1)\\ Q(1,0,0)\end{cases}\rightarrow \left.\begin{array}{r}x=1-\beta\\ y=\beta\\ z=\beta\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r}x=1-y\\ y=z\end{array}\right\}\rightarrow t:(1,0,0)+\beta(-1,1,1)$$

Calculamos la intersección entre las rectas obtenidas y el plano.

$$\left.\begin{array}{l}x=-y\\ y=z\\ -x+y+z-2=0\end{array}\right\}\rightarrow P'\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) \qquad \left.\begin{array}{l}x=1-y\\ y=z\\ -x+y+z-2=0\end{array}\right\}\rightarrow Q'(0,1,1)$$

Segundo. Calculamos el simétrico de cada punto respecto a su proyección.

$$P': \left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{0+a}{2},\frac{0+b}{2},\frac{0+c}{2}\right)\rightarrow P''\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$$

$$Q': (0,1,1)=\left(\frac{1+a}{2},\frac{0+b}{2},\frac{0+c}{2}\right)\rightarrow Q''(-1,2,2)$$

Tercero. La recta buscada pasa por los dos puntos calculados.

$$q: \begin{cases} P''\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right) \\ \overrightarrow{P''Q''}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=(1,2,2) \end{cases} \rightarrow q: \left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)+\mu(1,2,2)$$

Eje $OY \equiv r: \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=t \\ z=0 \end{array}\right\} \rightarrow (0,t,0) \rightarrow$ Dos puntos del eje son: $P(0,0,0)\in r$ y $Q(0,1,0)\in r$

Hallamos las ecuaciones de dos rectas perpendiculares al plano, una que pase por cada uno de los dos puntos.

$$s: \begin{cases} \vec{u}=\vec{n}=(-1,1,1) \\ P(0,0,0) \end{cases} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-y \\ y=z \end{array}\right\} \rightarrow s: (0,0,0)+\lambda(-1,1,1)$$

$$t: \begin{cases} \vec{v}=\vec{n}=(-1,1,1) \\ Q(0,1,0) \end{cases} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-\beta \\ y=1+\beta \\ z=\beta \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-z \\ y=1+z \end{array}\right\} \rightarrow t: (0,1,0)+\beta(-1,1,1)$$

Calculamos la intersección entre las rectas obtenidas y el plano.

$$\left.\begin{array}{l} x=-y \\ y=z \\ -x+y+z-2=0 \end{array}\right\} \rightarrow P'\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) \qquad \left.\begin{array}{l} x=-z \\ y=1+z \\ -x+y+z-2=0 \end{array}\right\} \rightarrow Q'\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$$

Segundo. Calculamos el simétrico de cada punto respecto a su proyección.

$$P': \left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{0+a}{2},\frac{0+b}{2},\frac{0+c}{2}\right)\rightarrow P''\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$$

$$Q': \left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{0+a}{2},\frac{1+b}{2},\frac{0+c}{2}\right)\rightarrow Q''\left(-\frac{2}{3},\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$$

Tercero. La recta buscada pasa por los dos puntos calculados.

$$q: \begin{cases} P''\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right) \\ \overrightarrow{P''Q''}=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)=(2,1,-2) \end{cases} \rightarrow q: \left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)+\mu(2,1,-2)$$

Eje $OZ \equiv r: \left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{matrix}\right\} \to (0,0,t) \to$ Dos puntos son: $P(0,0,0) \in r$ y $Q(0,0,1) \in r$

Hallamos las ecuaciones de dos rectas perpendiculares al plano, una que pase por cada uno de los dos puntos.

$$s: \begin{cases} \vec{u} = \vec{n} = (-1,1,1) \\ P(0,0,0) \end{cases} \to \left.\begin{matrix} x=-\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} x=-y \\ y=z \end{matrix}\right\} \to s: (0,0,0)+\lambda(-1,1,1)$$

$$t: \begin{cases} \vec{v} = \vec{n} = (-1,1,1) \\ Q(0,0,1) \end{cases} \to \left.\begin{matrix} x=-\beta \\ y=\beta \\ z=1+\beta \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} y=-x \\ y=1+y \end{matrix}\right\} \to t: (0,0,1)+\beta(-1,1,1)$$

Calculamos la intersección entre las rectas obtenidas y el plano.

$$\left.\begin{matrix} x=-y \\ y=z \\ -x+y+z-2=0 \end{matrix}\right\} \to P'\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) \qquad \left.\begin{matrix} y=-x \\ z=1+y \\ -x+y+z-2=0 \end{matrix}\right\} \to Q'\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$$

Segundo. Calculamos el simétrico de cada punto respecto a su proyección.

$$P': \left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{0+a}{2},\frac{0+b}{2},\frac{0+c}{2}\right) \to P''\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$$

$$Q': \left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{0+a}{2},\frac{0+b}{2},\frac{1+c}{2}\right) \to Q''\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$$

Tercero. La recta buscada pasa por los dos puntos calculados.

$$q: \begin{cases} P''\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right) \\ \overrightarrow{P''Q''} = \left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) = (2,-2,1) \end{cases} \to q: \left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right) + \mu(2,-2,1)$$

77. Página 156

Hallamos el plano que pasa por el punto medio M del segmento PA y cuyo vector normal es $\overrightarrow{PA}$.

$$\overrightarrow{PA} = (-1,-1,a-3) \to \pi: -x-y-(a-3)z+D=0$$

$$M\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{3+a}{2}\right) \to \pi: -x-y+(a-3)z-\frac{a^2-5}{2}=0$$

$$a=2 \to \pi': -x-y-z+\frac{1}{2}=0 \to \pi': 2x+2y+2z-1=0$$

78. Página 156

Hallamos la proyección ortogonal Q del punto P sobre el plano π.

Hallamos la recta perpendicular a π que pasa por P.

$$\left.\begin{matrix} \vec{P}(0,-2,0) \\ \vec{n} = (1,3,1) \end{matrix}\right\} \to r: \left.\begin{matrix} x=\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\}$$

Calculamos la intersección entre la recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=\lambda \\ x+3y+z=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \\ \lambda=1 \end{array}\right\} \rightarrow Q(1,1,1)$$

Calculamos las coordenadas de $P'(a,b,c)$.

$$(1,1,1)=\left(\frac{0+a}{2},\frac{-2+b}{2},\frac{0+c}{2}\right)\rightarrow P'(2,4,2)$$

La ecuación que buscamos es:

$$s:\begin{cases} P'(2,4,2) \\ \vec{u}=(1,-1,0) \end{cases} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{-1} \\ z=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y-6=0 \\ z-2=0 \end{array}\right\}$$

79. Página 156

a) $d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=|(2,2,1)|=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3u$

b) $d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=|(3,-1,-2)|=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}u$

80. Página 156

Calculamos la longitud de sus lados.

$$d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=|(1,-7,5)|=\sqrt{1+49+25}=5\sqrt{3}\,u$$

$$d(A,C)=\left|\overrightarrow{AC}\right|=|(-4,-8,12)|=\sqrt{16+64+144}=4\sqrt{14}\,u$$

$$d(B,C)=\left|\overrightarrow{BC}\right|=|(-5,-1,7)|=\sqrt{25+1+49}=5\sqrt{3}\,u$$

El triángulo tiene dos lados iguales y uno desigual, entonces es isósceles.

81. Página 156

$$d(P,Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=|(3,5,-2)|=\sqrt{38}\,\text{u}$$

$$d(Q,R)=\left|\overrightarrow{QR}\right|=|(6,10,-4)|=2\sqrt{38}\,\text{u}$$

$$d(P,R)=\left|\overrightarrow{PR}\right|=|(9,15,-6)|=3\sqrt{38}\,\text{u}$$

Como $d(P,Q)+d(Q,R)=d(P,R)\rightarrow$ Los tres puntos están alineados.

82. Página 156

a) Plano $OXY\equiv\pi: z=0\rightarrow\vec{n}=(0,0,1)\rightarrow\left|\vec{n}\right|=1$

$$d(P,\pi)=\frac{|A\cdot p_1+B\cdot p_2+C\cdot p_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|0+0+0|}{1}=0$$

b) Plano $OXZ \equiv \pi: y = 0 \to \vec{n} = (0,1,0) \to |\vec{n}| = 1$

$$d(P,\pi) = \frac{|A\cdot p_1 + B\cdot p_2 + C\cdot p_3 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|0+0+0|}{1} = 0$$

c) Plano $OYZ \equiv \pi: x = 0 \to \vec{n} = (1,0,0) \to |\vec{n}| = 1$

$$d(P,\pi) = \frac{|A\cdot p_1 + B\cdot p_2 + C\cdot p_3 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|0+0+0|}{1} = 0$$

Como el origen de coordenadas está contenido en los planos coordenados, la distancia es cero en los tres casos.

83. Página 156

a) $\pi: -x + 2y + 2z + 1 = 0 \to \vec{n} = (-1,2,2) \to |\vec{n}| = 3$

$$d(P,\pi) = \frac{|A\cdot p_1 + B\cdot p_2 + C\cdot p_3 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|(-1)\cdot(-3) + 2\cdot 5 + 2\cdot(-4) + 1|}{3} = 2 \text{ u}$$

b) $\pi: 2x - 2y - z + 1 = 0 \to \vec{n} = (2,-2,1) \to |\vec{n}| = 3$

$$d(P,\pi) = \frac{|A\cdot p_1 + B\cdot p_2 + C\cdot p_3 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{\left|2\cdot 0 - 2\cdot\frac{1}{2} - 1\cdot(-3) + 1\right|}{3} = 1 \text{ u}$$

c) $\pi: 3x - 4y + 6 = 0 \to \vec{n} = (3,-4,0) \to |\vec{n}| = 5$

$$d(P,\pi) = \frac{|A\cdot p_1 + B\cdot p_2 + C\cdot p_3 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{\left|3\cdot 7 - 4\cdot(-6) + \frac{3}{5}\cdot 0 + 6\right|}{5} = \frac{51}{5} = 10{,}2 \text{ u}$$

84. Página 156

$$r: \left.\begin{matrix} x - z = 2 \\ y + 2z = 3 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{matrix}\right\}$$

Sea $P(a,b,c) \in r \to \left.\begin{matrix} a = 2 + \lambda \\ b = 3 - 2\lambda \\ c = \lambda \end{matrix}\right\}$.

Aplicamos la condición de la distancia.

$\pi: x - y - 2z + 5 = 0 \to \vec{n} = (1,-1,-2) \to |\vec{n}| = \sqrt{6}$

$$\left.\begin{matrix} d(P,\pi) = \dfrac{|A\cdot p_1 + B\cdot p_2 + C\cdot p_3 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \dfrac{|1\cdot(2+\lambda) - 1\cdot(3-2\lambda) - 2\cdot\lambda + 5|}{\sqrt{6}} \\ d(P,\pi) = \sqrt{6} \end{matrix}\right\} \to \frac{|1\cdot(2+\lambda) - 1\cdot(3-2\lambda) - 2\cdot\lambda + 5|}{\sqrt{6}} = |\lambda + 4| = \sqrt{6}$$

Resolvemos la ecuación:

$$|\lambda + 4| = 6 \to \begin{matrix} \lambda + 4 = 6 \to \lambda = 2 \to P(4,-1,2) \\ \lambda + 4 = -6 \to \lambda = -8 \to P(-6,19,-8) \end{matrix}$$

85. Página 156

$$d(P,\pi)=\frac{|8\cdot 2-4\cdot 4+12-5|}{\sqrt{8^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{7}{9}$$

$$d(Q,\pi)=\frac{|8\cdot 0-4\cdot(-1)+1-5|}{\sqrt{8^2+(-4)^2+1^2}}=0$$

$$d(R,\pi)=\frac{|8\cdot 1-4\cdot 3+2-5|}{\sqrt{8^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{7}{9}$$

El punto *Q* pertenece al plano y los puntos *P* y *R* equidistan de él.

86. Página 156

a) Calculamos la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto *A*.

$$\pi: x-y-z-3=0 \rightarrow \vec{n}=(1,-1,-1)$$

$$r:\begin{cases} A(0,-1,1) \\ \vec{n}=(1,-1,-1)\end{cases} \rightarrow (0,-1,1)+\lambda(1,-1,-1)=0 \rightarrow \frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+1}{-1} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{y+1}{-1} \\ x=-z+1 \end{array}\right\}$$

Calculamos el punto de intersección del plano y la recta calculada y obtenemos el punto buscado.

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{y+1}{-1} \\ x=-z+1 \\ x-y-z-3=0 \end{array}\right\} \rightarrow Q(1,-2,0)$$

Calculamos la distancia de *A* al plano π.

$$d(A,\pi)=\frac{|1\cdot 0-1\cdot(-1)-1\cdot 1-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}u$$

b) Calculamos la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto *A*.

$$\pi: 3x+5y-2z+7=0 \rightarrow \vec{n}=(3,5,-2)$$

$$r:\begin{cases} A(-2,1,-4) \\ \vec{n}=(3,5,-2)\end{cases} \rightarrow (-2,1,-4)+\lambda(3,5,-2) \rightarrow \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+4}{-2} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{5} \\ \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{z+4}{-2} \end{array}\right\}$$

Calculamos el punto de intersección del plano y la recta calculada y obtenemos el punto buscado.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{5} \\ \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{z+4}{-2} \\ 3x+5y-2z+7=0 \end{array}\right\} \rightarrow Q\left(-\frac{59}{19},-\frac{16}{19},-\frac{62}{19}\right)$$

Calculamos la distancia de *A* al plano π.

$$d(A,\pi)=\frac{|3\cdot(-2)+5\cdot 5-2\cdot(-4)+7|}{\sqrt{3^2+5^2+(-2)^2}}=\frac{34}{\sqrt{38}}u$$

87. Página 156

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1+2\lambda \\ y = -1+3\lambda \\ z = -2+2\lambda \end{array}\right\}$$

Los puntos de la recta son de la forma $P(1+2\lambda, -1+3\lambda, -2+2\lambda)$.

Imponemos la condición de la distancia de P a los planos.

$$d(P, \pi_1) = \frac{|3\cdot(1+2\lambda)+4\cdot(-1+3\lambda)+0\cdot(-2+2\lambda)-1|}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}} = \frac{|18\lambda-2|}{5}$$

$$d(P, \pi_2) = \frac{|4\cdot(1+2\lambda)+0\cdot(-1+3\lambda)-3\cdot(-2+2\lambda)-1|}{\sqrt{4^2+0^2+3^2}} = \frac{|9+2\lambda|}{5}$$

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \rightarrow |18\lambda-2| = |9+2\lambda|$$

Opción $1 \rightarrow 18\lambda - 2 = 9 + 2\lambda \rightarrow \lambda = \frac{11}{16} \rightarrow P_1\left(\frac{19}{8}, \frac{17}{16}, -\frac{5}{8}\right)$

Opción $2 \rightarrow 18\lambda - 2 = -9 - 2\lambda \rightarrow \lambda = -\frac{7}{20} \rightarrow P_2\left(\frac{3}{10}, -\frac{41}{20}, -\frac{27}{10}\right)$

88. Página 156

$$r: \left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ x-z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

Los puntos de la recta son de la forma $P(\lambda, -\lambda, \lambda)$.

Imponemos la condición de distancia de P al plano π_1.

$$\left.\begin{array}{l} d(P, \pi) = \dfrac{|2\cdot\lambda - 1\cdot(-\lambda) + 2\cdot\lambda + 1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \dfrac{|5\lambda+1|}{3} \\ d(P, \pi) = \dfrac{1}{3}u \end{array}\right\} \rightarrow \frac{|5\lambda+1|}{3} = \frac{1}{3} \rightarrow |5\lambda+1| = 1$$

Opción $1 \rightarrow 5\lambda + 1 = 1 \rightarrow \lambda = 0 \rightarrow P_1(0,0,0)$

Opción $2 \rightarrow 5\lambda + 1 = -1 \rightarrow \lambda = -\frac{2}{5} \rightarrow P_1\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

89. Página 157

a) Escribimos los planos en forma implícita.

$$\pi: \begin{vmatrix} x+4 & y-1 & z-2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -6x + 8y - 4z - 24 = 0 \qquad \pi': \begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z+4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -6x + 8y - 4z - 16 = 0$$

$\vec{n}_1 = \vec{n}_2 \rightarrow$ Los planos son paralelos.

Tomando $P(4, 3, -4) \in \pi'$.

$$d(\pi, \pi') = d(\pi, P) = \frac{|-6\cdot 4 + 8\cdot 3 - 4\cdot(-4) - 24|}{\sqrt{36+64+16}} = \frac{8}{\sqrt{116}} = \frac{4\sqrt{29}}{29}\ \text{u}$$

b) Escribimos los planos en forma implícita.

$$\pi:\begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2x-3y+z-1=0$$

$$\pi':\begin{vmatrix} x-5 & y+1 & z-8 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8x-8y-8z+16=0 \rightarrow \pi': x-y-z+2=0$$

Los planos son secantes $\rightarrow d(\pi,\pi')=0$ u

c) Los planos son secantes $\rightarrow d(\pi,\pi')=0$ u

90. Página 157

Los planos paralelos a π son de la forma $\pi': 5x-y+7z+D=0$.

Tomando $\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow 5\cdot 1-1\cdot 1+7z+D=0 \rightarrow z=\dfrac{-D-4}{7} \rightarrow P\left(1,1,-\dfrac{D+4}{7}\right)\in \pi'$

Imponemos la condición de distancia.

$$\left.\begin{matrix} d(\pi,\pi')=d(\pi,P)=\dfrac{\left|5\cdot 1-1\cdot 1+7\cdot\left(-\dfrac{D+4}{7}\right)+1\right|}{\sqrt{25+1+49}}=\dfrac{|4-D-4+1|}{\sqrt{75}}=\dfrac{|-D+1|}{5\sqrt{3}}u \\ d(\pi,\pi')=\sqrt{3}\text{ u} \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{|-D+1|}{5\sqrt{3}}=\sqrt{3} \rightarrow |-D+1|=15$$

Caso $1 \rightarrow -D+1=15 \rightarrow D=-14 \rightarrow \pi': 5x-y+7z-14=0$

Caso $2 \rightarrow -D+1=-15 \rightarrow D=16 \rightarrow \pi': 5x-y+7z+16=0$

91. Página 157

Los planos paralelos a π son de la forma $\pi': x+2y+3z+D=0$.

Imponemos la condición de la distancia de O al plano π'.

$$\left.\begin{matrix} d(O,\pi')=\dfrac{|1\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 0+D|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\dfrac{|D|}{\sqrt{14}} \\ d(O,\pi')=\sqrt{14}\text{ u} \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{|D|}{\sqrt{14}}=\sqrt{14} \rightarrow |D|=14 \rightarrow D=\pm 14$$

92. Página 157

Los planos son paralelos. La longitud de la arista será igual a la distancia entre ambos planos.

Sea $P(0,0,1)\in \pi_1$.

$$d(\pi_1,\pi_2)=d(P,\pi_2)=\frac{|2\cdot 0-2\cdot 0+1\cdot 1-5|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{4}{3}\text{ u}$$

93. Página 157

a) Determinamos su posición relativa.

$$\left.\begin{array}{l} r: OX \to r: \left.\begin{array}{r} x=\lambda \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \to \begin{cases} P(0,0,0) \\ \vec{u}=(1,0,0) \end{cases} \\ \pi: y+z-3=0 \to \vec{n}=(0,1,1) \end{array}\right\} \to \vec{u}\cdot\vec{n}=0$$

$\pi: y+z-3=0 \xrightarrow{P(0,0,0)} -3\neq 0 \to P\notin\pi \to$ Recta y plano son paralelos.

Tomando $P(0,0,0)\in r \to d(\pi,r)=d(\pi,P)=\dfrac{|0\cdot 0-1\cdot 0+1\cdot 0-3|}{\sqrt{0+1+1}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ u .

b) Determinamos su posición relativa.

$$\left.\begin{array}{l} r: OY \to r: \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=\lambda \\ z=0 \end{array}\right\} \to \begin{cases} P(0,0,0) \\ \vec{u}=(0,1,0) \end{cases} \\ \pi: 2x+z+5=0 \to \vec{n}=(2,0,1) \end{array}\right\} \to \vec{u}\cdot\vec{n}=0$$

$\pi: 2x+z+5=0 \xrightarrow{P(0,0,0)} 5\neq 0 \to P\notin\pi \to$ Recta y plano son paralelos.

Tomando $P(0,0,0)\in r \to d(\pi,r)=d(\pi,P)=\dfrac{|2\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 0+5|}{\sqrt{2^2+0+1^2}}=\sqrt{5}$ u .

c) Determinamos su posición relativa.

$$\left.\begin{array}{l} r: OZ \to r: \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{array}\right\} \to \begin{cases} P(0,0,0) \\ \vec{u}=(0,0,1) \end{cases} \\ \pi: -3x+4y-2=0 \to \vec{n}=(-3,4,0) \end{array}\right\} \to \vec{u}\cdot\vec{n}=0$$

$\pi: -3x+4y-2=0 \xrightarrow{P(0,0,0)} -2\neq 0 \to P\notin\pi \to$ Recta y plano son paralelos.

Tomando $P(0,0,0)\in r \to d(\pi,r)=d(\pi,P)=\dfrac{|-3\cdot 0+4\cdot 0+0\cdot 0-2|}{\sqrt{(-3)^2+4^2+0}}=\dfrac{2}{5}$ u .

94. Página 157

Determinamos su posición relativa.

$$\left.\begin{array}{l} r: \begin{cases} A(-1,1,1) \\ \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-2,1,-6) \end{cases} \\ \pi: 2x-2y-z+3=0 \to \vec{n}=(2,-2,-1) \end{array}\right\} \to \vec{u}\cdot\vec{n}=-4-2+6=0$$

$\pi: 2x-2y-z+3=0 \xrightarrow{A(-1,1,1)} -2-2-1+3=-2\neq 0 \to A\notin\pi \to$ Recta y plano son paralelos.

Tomando $A(-1,1,1)\in r \to d(\pi,r)=d(\pi,P)=\dfrac{|2\cdot(-1)-2\cdot 1-1\cdot 1+3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{3}$ u .

95. Página 157

a) Determinamos su posición relativa.

$$\left.\begin{array}{l} r:\left.\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ -x+y+3z=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1+\frac{7}{3}t \\ y=1-\frac{2}{3}t \\ z=t \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} P(-1,1,0) \\ \vec{u}=(7,-2,3) \end{cases} \\ \pi: x+2y-z+6=0 \rightarrow \vec{n}=(1,2,-1) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{n}=7-4-3=0$$

$$\pi: x+2y-z+6=0 \xrightarrow{P(-1,1,0)} -1+2-0+6=7\neq 0 \rightarrow P\notin\pi \rightarrow$$ Recta y plano son paralelos.

Tomando $P(-1,1,0)\in r \rightarrow d(\pi,r)=d(\pi,P)=\frac{|1\cdot(-1)+2\cdot 1-1\cdot 0+6|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{7\sqrt{6}}{6}$ u .

b) Determinamos su posición relativa.

$$\left.\begin{array}{l} r:\frac{x-3}{2}=\frac{2y-1}{6}=\frac{z}{-4} \rightarrow \frac{x-3}{2}=\frac{y-(1/2)}{3}=\frac{z}{-4} \rightarrow \begin{cases} P\left(3,\frac{1}{2},0\right) \\ \vec{u}=(2,3,-4) \end{cases} \\ \pi: x-2y-z+3=0 \rightarrow \vec{n}=(1,-2,-1) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{n}=2-6+4=0$$

$$x-2y-z+3=0 \xrightarrow{P\left(3,\frac{1}{2},0\right)} 3-1-0+3=5\neq 0 \rightarrow P\notin\pi \rightarrow$$ Recta y plano son paralelos.

Tomando $P\left(3,\frac{1}{2},0\right)\in r \rightarrow d(\pi,r)=d(\pi,P)=\frac{\left|1\cdot 3-2\cdot\frac{1}{2}-1\cdot 0+3\right|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{5\sqrt{6}}{6}$ u .

c) Determinamos su posición relativa.

$$\left.\begin{array}{l} r:\left.\begin{array}{l} x=3+t \\ y=-5+2t \\ z=-1+4t \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} P(3,-5,-1) \\ \vec{u}=(1,2,4) \end{cases} \\ \pi: 2x-3y+z-7=0 \rightarrow \vec{n}=(2,-3,1) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{n}=2-6+4=0$$

$$2x-3y+z-7=0 \xrightarrow{P(3,-5,-1)} 6+15-1-7=13\neq 0 \rightarrow P\notin\pi \rightarrow$$ Recta y plano son paralelos.

Tomando $P(3,-5,-1)\in r \rightarrow d(\pi,r)=d(\pi,P)=\frac{|2\cdot 3-3\cdot(-5)+1\cdot(-1)-7|}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{13}{\sqrt{14}}$ u

96. Página 157

El plano pedido: $\pi:\begin{cases} A(2,-3,5) \\ \vec{u}=(1,-2,1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{AB}=(-6,4,-4) \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-5 \\ 1 & -2 & 1 \\ -6 & 4 & -4 \end{vmatrix}=4x-2y-8z+26 \rightarrow \pi: 2x-y-4z+13=0$

Determinamos la posición relativa entre *r* y el plano *π*.

$$\left.\begin{array}{l} r: x=\frac{y}{-2}=z-1 \rightarrow \begin{cases} P(0,0,1) \\ \vec{u}=(1,-2,1) \end{cases} \\ \pi: 2x-y-4z+13=0 \rightarrow \vec{n}=(2,-1,-4) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{n}=2+2-4=0$$

$$\pi: 2x-y-4z+13=0 \xrightarrow{P(0,0,1)} 0-0-4+13=9\neq 0 \rightarrow P\notin\pi \rightarrow$$ Recta y plano son paralelos.

Tomando $P(0,0,1)\in r \rightarrow d(\pi,r)=d(\pi,P)=\frac{|2\cdot 0-1\cdot 0-4\cdot 1+13|}{\sqrt{4+1+16}}=\frac{9}{\sqrt{21}}$ u

97. Página 157

El plano está definido por:

$$\pi:\begin{cases}P_1(-3,0,0)\\ \vec{u}=\overrightarrow{P_1P_2}=(4,-1,-1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{P_1P_3}=(2,0,-1)\end{cases}\rightarrow\begin{vmatrix}x+3 & y & z\\ 4 & -1 & -1\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=x+2y+2z+3\rightarrow\pi: x+2y+2z+3=0$$

$$\left.\begin{array}{l}d(A,\pi)=\dfrac{|\lambda+2\cdot1+2\cdot(-2-\lambda)+3|}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{|1-\lambda|}{3}u\\ d(A,\pi)=1\text{ u}\end{array}\right\}\rightarrow\frac{|1-\lambda|}{3}=1\rightarrow|1-\lambda|=3$$

Caso $1\rightarrow 1-\lambda=3\rightarrow\lambda=-2\rightarrow A_1(-2,1,0)$

Caso $2\rightarrow 1-\lambda=-3\rightarrow\lambda=4\rightarrow A_1(4,1,-6)$

98. Página 157

$$r: x=y=\frac{z-2}{2}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x=t\\ y=t\\ z=2+2t\end{array}\right\}\rightarrow \text{Los puntos de la recta son de la forma } P(t,t,2+2t).$$

La recta *s* que pasa por *P* y *A* tiene como vector director a $\overrightarrow{AP}=(t+2,t-2,2t+1)$.

Si queremos que sea paralela al plano, se debe cumplir $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AP}=(t+2,t-2,2t+1)\\ \vec{n}=(2,1,-1)\end{array}\right\}\rightarrow\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=(2,1,-1)\cdot(t+2,t-2,2t+1)=t+1$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0\rightarrow t+1=0\rightarrow t=-1$$

La recta es $s:\begin{cases}A(-2,2,1)\\ \overrightarrow{AP}=(1,-3,-1)\end{cases}\rightarrow s:(-2,2,1)+\lambda(1,-3,-1)$

$$d(s,\pi)=d(A,\pi)=\frac{|2\cdot(-2)+1\cdot2-1\cdot1+6|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{\sqrt{6}}{2}\text{ u}$$

99. Página 157

$$r:\frac{x-3}{-4}=-y=z-1\rightarrow\begin{cases}P(3,0,1)\\ \vec{u}=(-4,-1,1)\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}d(r,\pi)=d(P,\pi)=\dfrac{|1\cdot3-2\cdot0+2\cdot1+D|}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{|5+D|}{3}\\ d(r,\pi)=2\text{ u}\end{array}\right\}\rightarrow\frac{|5+D|}{3}=2\rightarrow|5+D|=6$$

Caso $1\rightarrow 5+D=6\rightarrow D=1$

Caso $2\rightarrow 5+D=-6\rightarrow D=-11$

100. Página 157

$$r: \begin{matrix} x=3 \\ y+z=1 \end{matrix}\Bigg\} \rightarrow \begin{matrix} x=3 \\ y=t \\ z=1-t \end{matrix}\Bigg\} \rightarrow \begin{cases} P(3,0,1) \\ \vec{u}=(0,1,-1) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} d(r,\pi)=d(P,\pi)\dfrac{|3\cdot 3+1\cdot 0+1\cdot 1+D|}{\sqrt{9+1+1}}=\dfrac{|10+D|}{\sqrt{11}} \\ d(r,\pi)=2\sqrt{11}\text{ u} \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{|10+D|}{\sqrt{11}}=2\sqrt{11} \rightarrow |10+D|=22$$

Caso $1 \rightarrow 10+D=22 \rightarrow D=12$

Caso $2 \rightarrow 10+D=-22 \rightarrow D=-32$

101. Página 157

EJE *OX*

Primero. Hallamos el vector director y un punto de la recta.

$$\text{Eje } OX: \begin{matrix} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{matrix}\Bigg\} \rightarrow \begin{cases} A(0,0,0) \\ \vec{u}=(1,0,0) \end{cases}$$

Segundo. Calculamos el vector determinado por el punto *P* y el punto *A* de la recta.

$$\overrightarrow{AP}=(2,-1,3)-(0,0,0)=(2,-1,3)$$

Tercero. Calculamos el producto vectorial de ambos vectores.

$$\vec{u}\times\overrightarrow{AP}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-3\vec{j}-\vec{k}=(0,-3,-1)$$

Cuarto. Calculamos los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{u}\times\overrightarrow{AP}$ y sustituimos en la fórmula de la distancia.

$$|\vec{u}|=\sqrt{1+0+0}=1$$

$$|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}|=\sqrt{0+9+1}=\sqrt{10}$$

$$d(P,r)=\frac{|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{10}}{1}=\sqrt{10}\text{ u}$$

EJE *OY*

Primero. Hallamos el vector director y un punto de la recta.

$$\text{Eje } OY: \begin{matrix} x=0 \\ y=t \\ z=0 \end{matrix}\Bigg\} \rightarrow \begin{cases} A(0,0,0) \\ \vec{u}=(0,1,0) \end{cases}$$

Segundo. Calculamos el vector determinado por el punto *P* y el punto *A* de la recta.

$$\overrightarrow{AP}=(2,-1,3)-(0,0,0)=(2,-1,3)$$

Tercero. Calculamos el producto vectorial de ambos vectores.

$$\vec{u}\times\overrightarrow{AP}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=3\vec{i}-2\vec{k}=(3,0,-2)$$

Cuarto. Calculamos los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{u}\times\overrightarrow{AP}$, y sustituimos en la fórmula de la distancia.

$$|\vec{u}|=\sqrt{0+1+0}=1$$

$$|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}|=\sqrt{9+0+4}=\sqrt{13}$$

$$d(P,r)=\frac{|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{13}}{1}=\sqrt{13}\text{ u}$$

EJE *OZ*

Primero. Hallamos el vector director y un punto de la recta.

$$OZ:\left.\begin{array}{r}x=0\\ y=0\\ z=t\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}A(0,0,0)\\ \vec{u}=(0,0,1)\end{cases}$$

Segundo. Calculamos el vector determinado por el punto *P* y el punto *A* de la recta.

$$\overrightarrow{AP}=(2,-1,3)-(0,0,0)=(2,-1,3)$$

Tercero. Calculamos el producto vectorial de ambos vectores.

$$\vec{u}\times\overrightarrow{AP}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=\vec{i}+2\vec{j}=(1,2,0)$$

Cuarto. Calculamos los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{u}\times\overrightarrow{AP}$, y sustituimos en la fórmula de la distancia.

$$|\vec{u}|=\sqrt{0+1+0}=1\ |\vec{u}|=\sqrt{0+0+1}=1 \qquad |\vec{u}\times\overrightarrow{AP}|=\sqrt{1+4+0}=\sqrt{5}$$

$$d(P,r)=\frac{|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{5}}{1}=\sqrt{5}\text{ u}$$

102. Página 157

a) Primero. Hallamos el vector director y un punto de la recta.

$$r:(\lambda,-\lambda,3+\lambda)\rightarrow\begin{cases}A(0,0,3)\\ \vec{u}=(1,-1,1)\end{cases}$$

Segundo. Calculamos el vector determinado por el punto *P* y el punto *A* de la recta.

$$\overrightarrow{AP}=(2,2,0)-(0,0,3)=(2,2,-3)$$

Tercero. Calculamos el producto vectorial de ambos vectores.

$$\vec{u}\times\overrightarrow{AP}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}+5\vec{j}+4\vec{k}=(1,5,4)$$

Cuarto. Calculamos los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{u}\times\overrightarrow{AP}$, y sustituimos en la fórmula de la distancia.

$$|\vec{u}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3} \qquad |\vec{u}\times\overrightarrow{AP}|=\sqrt{1+25+16}=\sqrt{42}$$

$$d(P,r)=\frac{|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{3}}=\sqrt{14}\text{ u}$$

b) Primero. Hallamos el vector director y un punto de la recta.

$$r:\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{2}=-z\rightarrow\begin{cases}A(1,3,0)\\ \vec{u}=(3,2,-1)\end{cases}$$

Segundo. Calculamos el vector determinado por el punto *P* y el punto *A* de la recta.

$$\overrightarrow{AP}=(-1,3,1)-(1,3,0)=(-2,0,1)$$

Tercero. Calculamos el producto vectorial de ambos vectores.

$$\vec{u}\times\overrightarrow{AP}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}=(2,-1,4)$$

Cuarto. Calculamos los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{u}\times\overrightarrow{AP}$, y sustituimos en la fórmula de la distancia.

$$|\vec{u}|=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$$

$$|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}|=\sqrt{4+1+16}=\sqrt{21}$$

$$d(P,r)=\frac{|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\text{ u}$$

c) Primero. Hallamos el vector director y un punto de la recta.

$$r:\begin{rcases}2x-y=6\\ x+z=-1\end{rcases}\rightarrow\begin{rcases}x=t\\ y=-6+2t\\ z=-1-t\end{rcases}\rightarrow\begin{cases}A(0,-6,-1)\\ \vec{u}=(1,2,-1)\end{cases}$$

Segundo. Calculamos el vector determinado por el punto *P* y el punto *A* de la recta.

$$\overrightarrow{AP}=\left(0,\frac{1}{2},0\right)-(0,-6,-1)=\left(0,\frac{13}{2},1\right)$$

Tercero. Calculamos el producto vectorial de ambos vectores.

$$\vec{u}\times\overrightarrow{AP}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 13/2 & 1\end{vmatrix}=\frac{17}{2}\vec{i}-\vec{j}+\frac{13}{2}\vec{k}=\left(\frac{17}{2},-1,\frac{13}{2}\right)$$

Cuarto. Calculamos los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{u}\times\overrightarrow{AP}$, y sustituimos en la fórmula de la distancia.

$$|\vec{u}|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$$

$$|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}|=\sqrt{\frac{289}{4}+1+\frac{169}{4}}=\frac{\sqrt{462}}{2}$$

$$d(P,r)=\frac{|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}|}=\frac{\frac{\sqrt{462}}{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{77}}{2}\text{ u}$$

d) Primero. Hallamos el vector director y un punto de la recta.

$$r:\begin{rcases}x=10-3t\\ y=2t\\ z=-5\end{rcases}\rightarrow\begin{cases}A(10,0,-5)\\ \vec{u}=(-3,2,0)\end{cases}$$

Segundo. Calculamos el vector determinado por el punto *P* y el punto *A* de la recta.

$\overrightarrow{AP}=(-3,0,1)-(10,0,-5)=(-13,0,6)$

Tercero. Calculamos el producto vectorial de ambos vectores.

$$\vec{u}\times\overrightarrow{AP}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 2 & 0\\ -13 & 0 & 6\end{vmatrix}=12\vec{i}+18\vec{j}+26\vec{k}=(12,18,26)$$

Cuarto. Calculamos los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{u}\times\overrightarrow{AP}$, y sustituimos en la fórmula de la distancia.

$$|\vec{u}|=\sqrt{9+4+0}=\sqrt{13}$$

$$|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}|=\sqrt{144+324+676}=\sqrt{1144}=2\sqrt{286}$$

$$d(P,r)=\frac{|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}|}=\frac{2\sqrt{286}}{\sqrt{13}}=2\sqrt{22}\text{ u}$$

103. Página 157

Primero. Hallamos el vector director y un punto de la recta.

$$r:\left.\begin{matrix}x+y+2z=4\\ 2x-y+z=2\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}x=2-t\\ y=2-t\\ z=t\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{cases}A(2,2,0)\\ \vec{u}=(-1,-1,1)\end{cases}$$

Segundo. Calculamos el vector determinado por el punto *P* y el punto *A* de la recta.

$\overrightarrow{AO}=(0,0,0)-(2,2,0)=(-2,-2,0)$

Tercero. Calculamos el producto vectorial de ambos vectores.

$$\vec{u}\times\overrightarrow{AO}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{vmatrix}=-2\vec{i}+2\vec{j}=(-2,2,0)$$

Cuarto. Calculamos los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{u}\times\overrightarrow{AO}$, y sustituimos en la fórmula de la distancia.

$$|\vec{u}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

$$|\vec{u}\times\overrightarrow{AO}|=\sqrt{4+4+0}=2\sqrt{2}$$

$$d(P,r)=\frac{|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}|}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\text{ u}$$

104. Página 157

Queremos calcular la distancia del punto *B* a la recta que pasa por los puntos $A(3,-1,-2)$ y $C(5,3,4)$.

Primero. Hallamos el vector director y un punto de la recta.

$$r:\begin{cases}A(3,-1,-2)\\ \vec{u}=\overrightarrow{AC}=(2,4,6)\end{cases}$$

Segundo. Calculamos el vector determinado por el punto *B* y el punto *A* de la recta.

$\overrightarrow{AB}=(4,2,1)-(3,-1,-2)=(1,3,3)$

Tercero. Calculamos el producto vectorial de ambos vectores.

$$\vec{u}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 3 & 3\end{vmatrix}=-6\vec{i}+2\vec{k}=(-6,0,2)$$

Cuarto. Calculamos los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{u}\times\overrightarrow{AO}$, y sustituimos en la fórmula de la distancia.

$$|\vec{u}|=\sqrt{4+16+36}=\sqrt{56}=2\sqrt{14} \qquad |\vec{u}\times\overrightarrow{AO}|=\sqrt{36+0+4}=2\sqrt{10}$$

$$d(B,r)=\frac{|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}|}=\frac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{35}}{7}\ \text{u}$$

105. Página 157

a) Hallamos la ecuación del plano que determinan *A*, *B* y *C*, e imponemos que *D* pertenezca al plano.

$$\pi':\begin{cases}A(2,-1,0)\\ \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1,2,1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(-2,2,2)\end{cases}\rightarrow\begin{vmatrix}x-2 & y+1 & z\\ 1 & 2 & 1\\ -2 & 2 & 2\end{vmatrix}=2x-4y+6z-8\rightarrow\pi':x-2y+3z-4=0$$

$$D(5,4,m)\xrightarrow{\pi':x-2y+3z-4=0}5-8+3m-4=0\rightarrow m=\frac{7}{3}$$

b) El ángulo que forman los planos es el mismo que forman sus vectores normales.

$$\left.\begin{array}{l}\pi:2x+2y-z+1=0\rightarrow\vec{n}=(2,2,-1)\\ \pi':x-2y+3z-4=0\rightarrow\vec{n}'=(1,-2,3)\end{array}\right\}\rightarrow\vec{n}\cdot\vec{n}'=|\vec{n}|\cdot|\vec{n}'|\cdot cos(\alpha)\rightarrow$$

$$\rightarrow\alpha=arc\,cos\left(\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}'|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}'|}\right)=arc\,cos\left(\frac{5}{3\cdot\sqrt{14}}\right)=63{,}55^{\circ}$$

c) Los planos paralelos a π son de la forma $\pi'':2x+2y-z+D=0$.

Tomando $\left.\begin{array}{l}x=1\\ y=-1\end{array}\right\}\rightarrow 2\cdot1+2\cdot(-1)-z+D=0\rightarrow z=D\rightarrow P(1,-1,D)\in\pi''$

Imponemos la condición de distancia.

$$\left.\begin{array}{l}d(\pi,\pi'')=d(\pi,P)\dfrac{|2\cdot1+2\cdot(-1)-1\cdot D+1|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{|-D+1|}{3}=\dfrac{|-D+1|}{3}u\\ d(\pi,\pi'')=2\text{ u}\end{array}\right\}\rightarrow\frac{|-D+1|}{3}=2\rightarrow|-D+1|=6$$

Caso $1\rightarrow -D+1=6\rightarrow D=-5\rightarrow\pi'':2x+2y-z-5=0$

Caso $2\rightarrow -D+1=-6\rightarrow D=7\rightarrow\pi'':2x+2y-z+7=0$

d) Calculamos la recta *s* perpendicular al plano π que pasa por *Q*.

$$\pi:2x+2y-z+1=0\rightarrow\vec{n}=(2,2,-1)$$

$$s:\begin{cases}Q(-1,2,0)\\ \vec{u}=\vec{n}=(2,2,-1)\end{cases}\rightarrow s:(-1,2,0)+\lambda(2,2,-1)\rightarrow\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x-y+3=0\\ x+2z+1=0\end{array}\right\}$$

El punto de intersección entre la recta encontrada y el plano π, será el punto buscado.

$$\left.\begin{array}{l}x-y+3=0\\ x+2z+1=0\\ 2x+2y-z+1=0\end{array}\right\}\rightarrow Q\left(-\frac{5}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$$

106. Página 158

a) Estudiamos la posición relativa entre ambas rectas.

$$r: x=y=z \to \begin{cases} P(0,0,0) \\ \vec{u}=(1,1,1) \end{cases} \qquad s: x=y-1=z+2 \to \begin{cases} Q(0,1,-2) \\ \vec{v}=(1,1,1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{PQ}=(0,1,-2)$$

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \to \text{Rango}(M)=1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0 \to \text{Rango}(M^*)=2$$

$1=\text{Rango}(M)\neq\text{Rango}(M^*)=2 \to$ Las rectas son paralelas.

Calculamos la distancia entre ellas: $d(r,s)=d(P,s)$ con $P\in r$.

$$d(r,s)=d(P,s)=\frac{|\vec{v}\times\overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|}=\frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{|(-3,2,1)|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{9+4+1}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{42}}{3}u$$

b) Estudiamos la posición relativa entre ambas rectas.

$$r: \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=2z \to \begin{cases} P(-2,1,0) \\ \vec{u}=\left(3,2,\frac{1}{2}\right)\sim(6,4,1) \end{cases} \qquad s:(x,y,z)=(1,3,0)+t(-6,-4,-2) \to \begin{cases} Q(1,3,0) \\ \vec{v}=(-6,-4,-2) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PQ}=(3,2,0)$$

$$M=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ -6 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}=-8+4=-4\neq 0 \to \text{Rango}(M)=2$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ -6 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0 \to \text{Rango}(M^*)=2$$

$\text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2 \to$ Las rectas son secantes $\to d(r,s)=0$.

c) Estudiamos la posición relativa entre ambas rectas.

$$r: \begin{matrix} 2x-y+3z-3=0 \\ x+3y+5z-1=0 \end{matrix}\Bigg\} \to \left.\begin{matrix} x=\frac{10}{7}-2t \\ y=-\frac{1}{7}-t \\ z=t \end{matrix}\right\} \to \begin{cases} P\left(\frac{10}{7},-\frac{1}{7},0\right) \\ \vec{u}=(-2,-1,1) \end{cases} \qquad s: \frac{x-5}{2}=y=-z \to \begin{cases} Q(5,0,0) \\ \vec{v}=(2,1,-1) \end{cases}$$

$$M=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \text{Rango}(M)=1 \qquad M^*=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 25/7 & 1/7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1/7 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{7} \neq 0 \quad \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 25/7 & 1/7 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}(M^*) = 2$$

$1 = \text{Rango}(M) \neq \text{Rango}(M^*) = 2 \rightarrow$ Las rectas son paralelas.

Calculamos la distancia entre ellas: $d(r, s) = d(P, s)$ con $P \in r$.

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{25}{7}, \frac{1}{7}, 0\right)$$

$$d(r,s) = d(P,s) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{v}|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 25/7 & 1/7 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{\left|\left(\frac{1}{7}, -\frac{25}{7}, -\frac{23}{7}\right)\right|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{\frac{1+625+529}{49}}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{770}}{14} \text{ u}$$

107. Página 158

$$L_1: \left.\begin{array}{l} x = 1+t \\ y = 3+3t \\ z = 3+t \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} P(1,3,3) \\ \vec{u} = (1,3,1) \end{cases} \qquad L_2: \left.\begin{array}{l} 3x - y + 4 = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -4+t \\ y = -8+3t \\ z = t \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} Q(-4,-8,0) \\ \vec{v} = (1,3,1) \end{cases}$$

Las rectas tienen el mismo vector director y, por tanto, son paralelas.

El plano determinado por L_1 y L_2 viene determinado por:

$$\pi: \begin{cases} P(1,3,3) \\ \vec{u} = (1,3,1) \\ \overrightarrow{PQ} = (-5,-11,-3) \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -5 & -11 & -3 \end{vmatrix} = 2x - 2y + 4z - 8 \rightarrow \pi: x - y + 2z - 4 = 0$$

Los planos paralelos a π serán de la forma $\pi': x - y + 2z + D = 0$. Así:

$$\left.\begin{array}{l} d(\pi,\pi') = d(P,\pi') \dfrac{|1-3+6+D|}{\sqrt{1+1+4}} = \dfrac{|4+D|}{\sqrt{6}} u \\ d(\pi,\pi') = \sqrt{6} \text{ u} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{|4+D|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \rightarrow |4+D| = 6$$

Caso $1 \rightarrow 4 + D = 6 \rightarrow D = 2 \rightarrow \pi_1: x - y + 2z + 2 = 0$

Caso $2 \rightarrow 4 + D = -6 \rightarrow D = -10 \rightarrow \pi_2: x - y + 2z - 10 = 0$

108. Página 158

a) $$r: \left.\begin{array}{l} x = 2-\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} P_r(2,0,0) \\ \vec{v}_r = (-1,3,1) \end{cases} \qquad s: \frac{x-1}{3} = y - 3 = \frac{z+1}{2} \rightarrow \begin{cases} P_s(1,3,-1) \\ \vec{v}_s = (3,1,2) \end{cases}$$

Método 1.

$$\pi: \left.\begin{array}{l} P_r(2,0,0) \\ \vec{v}_r = (-1,3,1) \\ \vec{v}_s = (3,1,2) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5x + 5y - 10z - 10 \rightarrow \pi: x + y - 2z - 2 = 0$$

$$d(P_s,r) = d(P_s,\pi) = \frac{|1\cdot 1 + 1\cdot 3 - 2\cdot(-1) - 2|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} = 1{,}63 \text{ u}$$

Método 2.

Determinamos el plano que contiene a la recta r y es perpendicular a s. Para definir un plano necesitamos dos vectores y un punto. Tomamos un punto de la recta r y su vector director para asegurarnos de que dicha recta esté contenida en el plano, y como segundo vector tomamos $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$, que es perpendicular a ambas rectas y, por tanto, a s.

$$\vec{v}_r\times\vec{v}_s=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=(5,5,-10)$$

$$\pi:\left.\begin{array}{l}P_r(2,0,0)\\ \vec{v}_r=(-1,3,1)\\ \vec{v}_r\times\vec{v}_s=(5,5,-10)\end{array}\right\}\rightarrow\begin{vmatrix}x-2 & y & z\\ -1 & 3 & 1\\ 5 & 5 & -10\end{vmatrix}=-35x-5y-20z+70\rightarrow\pi:7x+y+4z-14=0$$

Determinamos el punto de intersección del plano con la recta que no está contenida en él.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{3}=y-3\\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{z+1}{2}\\ 7x+y+4z-14=0\end{array}\right\}\rightarrow R\left(\frac{9}{5},\frac{49}{15},-\frac{7}{15}\right)$$

La recta secante perpendicular común tiene como vector director $\vec{n}$ y pasa por el punto que hemos calculado.

$$t:\begin{cases}\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=(5,5,-10)\\ R\left(\frac{9}{5},\frac{49}{15},-\frac{7}{15}\right)\end{cases}\rightarrow t:(x,y,z)=\left(\frac{9}{5},\frac{49}{15},-\frac{7}{15}\right)+\delta(5,5,-10)$$

La distancia entre ambas rectas será igual a la distancia entre sus puntos de corte con la recta perpendicular común.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{9}{5}+5\delta=2-\lambda\\ \dfrac{49}{15}+5\delta=3\lambda\\ -\dfrac{7}{15}-10\delta=\lambda\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}\lambda=\dfrac{13}{15}\\ \delta=-\dfrac{2}{15}\end{array}\right\}\rightarrow A\left(\frac{17}{15},\frac{13}{5},\frac{13}{15}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{9}{5}+5\delta=1+3\beta\\ \dfrac{49}{15}+5\delta=3+\beta\\ -\dfrac{7}{15}-10\delta=-1+2\beta\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}\lambda=\dfrac{4}{15}\\ \delta=0\end{array}\right\}\rightarrow B\left(\frac{9}{5},\frac{49}{15},-\frac{7}{15}\right)$$

$$d(r,s)=d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\left(\frac{10}{15},\frac{10}{15},-\frac{20}{15}\right)\right|=\sqrt{\left(\frac{10}{15}\right)^2+\left(\frac{10}{15}\right)^2+\left(-\frac{20}{15}\right)^2}=\frac{\sqrt{600}}{15}=\frac{2\sqrt{6}}{3}=1{,}63\text{ u}$$

Método 3.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_r\times\vec{v}_s=(5,5,-10)\\ \overrightarrow{P_rP_s}=(-1,3,-1)\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}\left|\vec{v}_r\times\vec{v}_s\right|=\sqrt{25+25+100}=5\sqrt{6}\\ \left[\overrightarrow{P_rP_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]=(-1,3,-1)\cdot(5,5,-10)=-5+15+10=20\end{cases}$$

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]\right|}{\left|\vec{v}_r\times\vec{v}_s\right|}=\frac{20}{5\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}=1{,}63\text{ u}$$

b) $r:\left.\begin{matrix}2x-y+2z=3\\ x+2y+2z=0\end{matrix}\right\}\rightarrow \left.\begin{matrix}x=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}\lambda\\ y=-\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\lambda\\ z=\lambda\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{cases}P_r\left(\frac{6}{5},-\frac{3}{5},0\right)\\ \vec{v}_r=(-6,-2,5)\end{cases}$ $\qquad s:x=y=z\rightarrow\begin{cases}P_s(0,0,0)\\ \vec{v}_s=(1,1,1)\end{cases}$

Método 1.

$$\left.\begin{matrix}P_r\left(\frac{6}{5},-\frac{3}{5},0\right)\\ \pi:\vec{v}_r=(-6,-2,5)\\ \vec{v}_s=(1,1,1)\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{vmatrix}x-6/5 & y+3/5 & z\\ -6 & -2 & 5\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-7x+11y-4z+15\rightarrow\pi:7x-11y+4z-15=0$$

$$d(P_s,r)=d(P_s,\pi)=\frac{|7\cdot 0-11\cdot 0+4\cdot 0-15|}{\sqrt{7^2+(-11)^2+4^2}}=\frac{15}{\sqrt{186}}=\frac{5\sqrt{186}}{62}=1{,}1\text{ u}$$

Método 2.

Determinamos el plano que contiene a la recta r y es perpendicular a s. Para definir un plano necesitamos dos vectores y un punto. Tomamos un punto de la recta r y su vector director para asegurarnos de que dicha recta esté contenida en el plano, y como segundo vector tomamos $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$, que es perpendicular a ambas rectas y, por tanto, a s.

$$\vec{v}_r\times\vec{v}_s=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -6 & -2 & 5\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(-7,11,-4)$$

$$\left.\begin{matrix}P_r\left(\frac{6}{5},-\frac{3}{5},0\right)\\ \pi:\vec{v}_r=(-6,-2,5)\\ \vec{v}_r\times\vec{v}_s=(-7,11,-4)\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{vmatrix}x-\frac{6}{5} & y+\frac{3}{5} & z\\ -6 & -2 & 5\\ -7 & 11 & -4\end{vmatrix}=-47x-59y-80z+21\rightarrow\pi:47x+59y+80z-21=0$$

Determinamos el punto de intersección del plano con la recta que no está contenida en él.

$$\left.\begin{matrix}x=y\\ x=z\\ 47x+59y+80z-21=0\end{matrix}\right\}\rightarrow R\left(\frac{7}{62},\frac{7}{62},\frac{7}{62}\right)$$

La recta secante perpendicular común tiene como vector director $\vec{n}$ y pasa por el punto que hemos calculado.

$$t:\begin{cases}\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=(-7,11,-4)\\ R\left(\frac{7}{62},\frac{7}{62},\frac{7}{62}\right)\end{cases}\rightarrow t:(x,y,z)=\left(\frac{7}{62},\frac{7}{62},\frac{7}{62}\right)+\delta(-7,11,-4)$$

La distancia entre ambas rectas será igual a la distancia entre sus puntos de corte con la recta perpendicular común.

$$\left.\begin{matrix}\frac{7}{62}-7\delta=\frac{6}{5}-6\lambda\\ \frac{7}{62}+11\delta=-\frac{3}{5}-2\lambda\\ \frac{7}{62}-4\delta=5\lambda\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}\lambda=\frac{27}{310}\\ \delta=-\frac{5}{62}\end{matrix}\right\}\rightarrow A\left(\frac{21}{31},-\frac{24}{31},\frac{27}{62}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{9}{5}+5\delta=\beta\\ \frac{49}{15}+5\delta=\beta\\ -\frac{7}{15}-10\delta=\beta\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}\beta=\frac{7}{62}\\ \delta=0\end{array}\right\}\to B\left(\frac{7}{62},\frac{7}{62},\frac{7}{62}\right)$$

$$d(r,s)=d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\left(-\frac{35}{62},\frac{55}{62},-\frac{20}{62}\right)\right|=\sqrt{\left(-\frac{35}{62}\right)^2+\left(\frac{55}{62}\right)^2+\left(-\frac{20}{62}\right)^2}=\frac{\sqrt{4650}}{62}=\frac{5\sqrt{186}}{62}=1{,}1\text{ u}$$

Método 3.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_r\times\vec{v}_s=(-7,11,-4)\\ \overrightarrow{P_rP_s}=\left(-\frac{6}{5},\frac{3}{5},0\right)\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l}\left|\vec{v}_r\times\vec{v}_s\right|=\sqrt{49+121+16}=\sqrt{186}\\ \left[\overrightarrow{P_rP_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]=\left(-\frac{6}{5},\frac{3}{5},0\right)\cdot(-7,11,-4)=15\end{array}\right.$$

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]\right|}{\left|\vec{v}_r\times\vec{v}_s\right|}=\frac{15}{\sqrt{186}}=\frac{5\sqrt{186}}{62}=1{,}1\text{ u}$$

c) $r:\left.\begin{array}{l}-x+2z=2\\ y=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}x=-2+2\lambda\\ y=\frac{1}{2}\\ z=\lambda\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l}P_r\left(-2,\frac{1}{2},0\right)\\ \vec{v}_r=(2,0,1)\end{array}\right.$ $\qquad s:\left.\begin{array}{l}x-3=y\\ z=1\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}x=\beta\\ y=-3+\beta\\ z=1\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l}P_s(0,-3,1)\\ \vec{v}_s=(1,1,0)\end{array}\right.$

Método 1.

$$\left.\begin{array}{l}P_r\left(-2,\frac{1}{2},0\right)\\ \pi:\vec{v}_r=(2,0,1)\\ \vec{v}_s=(1,1,0)\end{array}\right\}\to\begin{vmatrix}x+2 & y-1/2 & z\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-x+y+2z-\frac{5}{2}\to\pi:-2x+2y+4z-5=0$$

$$d(P_s,r)=d(P_s,\pi)=\frac{|-2\cdot 0+2\cdot(-3)+4\cdot 1-5|}{\sqrt{(-2)^2+2^2+4^2}}=\frac{7}{2\sqrt{6}}=1{,}43\text{ u}$$

Método 2.

Determinamos el plano que contiene a la recta r y es perpendicular a s. Para definir un plano necesitamos dos vectores y un punto. Tomamos un punto de la recta r y su vector director para asegurarnos de que dicha recta esté contenida en el plano, y como segundo vector tomamos $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$, que es perpendicular a ambas rectas y, por tanto, a s.

$$\vec{v}_r\times\vec{v}_s=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=(-1,1,2)$$

$$\left.\begin{array}{l}P_r\left(-2,\frac{1}{2},0\right)\\ \pi:\vec{v}_r=(2,0,1)\\ \vec{v}_r\times\vec{v}_s=(-1,1,2)\end{array}\right\}\to\begin{vmatrix}x+2 & y-\frac{1}{2} & z\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=-x-5y+2z+\frac{1}{2}\to\pi:2x+10y-4z-1=0$$

Determinamos el punto de intersección del plano con la recta que no está contenida en él.

$$\left.\begin{array}{l}x-3=y\\ z=1\\ 2x+10y-4z-1=0\end{array}\right\}\to R\left(\frac{35}{12},-\frac{1}{12},1\right)$$

La recta secante perpendicular común tiene como vector director $\vec{n}$ y pasa por el punto que hemos calculado.

$$t:\begin{cases}\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=(-1,1,2)\\ R\left(\dfrac{35}{12},-\dfrac{1}{12},1\right)\end{cases}\rightarrow t:(x,y,z)=\left(\dfrac{35}{12},-\dfrac{1}{12},1\right)+\delta(-1,1,2)$$

La distancia entre ambas rectas será igual a la distancia entre sus puntos de corte con la recta perpendicular común.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{35}{12}-\delta=-2+2\lambda\\ -\dfrac{1}{12}+\delta=\dfrac{1}{2}\\ 1+2\delta=\lambda\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}\lambda=\dfrac{13}{6}\\ \delta=\dfrac{7}{12}\end{array}\right\}\rightarrow A\left(\dfrac{7}{3},\dfrac{1}{2},\dfrac{13}{6}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{35}{12}-\delta=\beta\\ -\dfrac{1}{12}+\delta=-3+\beta\\ 1+2\delta=1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}\beta=\dfrac{35}{12}\\ \delta=0\end{array}\right\}\rightarrow B\left(\dfrac{35}{12},-\dfrac{1}{12},1\right)$$

$$d(r,s)=d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\left(\dfrac{7}{12},-\dfrac{7}{12},-\dfrac{7}{6}\right)\right|=\sqrt{2\left(\dfrac{7}{12}\right)^2+\left(-\dfrac{7}{6}\right)^2}=1{,}43\text{ u}$$

Método 3.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_r\times\vec{v}_s=(-1,1,2)\\ \overrightarrow{P_rP_s}=\left(2,-\dfrac{7}{2},1\right)\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}\left|\vec{v}_r\times\vec{v}_s\right|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}\\ \left[\overrightarrow{P_rP_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]=\left(2,-\dfrac{7}{2},1\right)\cdot(-1,1,2)=-\dfrac{7}{2}\end{cases}$$

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]\right|}{\left|\vec{v}_r\times\vec{v}_s\right|}=\frac{7/2}{\sqrt{6}}=1{,}43\text{ u}$$

109. Página 158

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PA}=(x,y,z)\\ \overrightarrow{QA}=(x,y-1,z-2)\end{array}\right\}\rightarrow\left|\overrightarrow{PA}\right|=\left|\overrightarrow{QA}\right|.$$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2+(z-2)^2}\rightarrow 2y+4z=5$$

La condición que deben cumplir las coordenadas del punto $A(x,y,z)$ es $2y+4z=5$.

El conjunto de todos los puntos que cumplen esa condición es el plano $\pi: 2y+4z=5$.

110. Página 158

a) $d(O,\pi)=\dfrac{|1\cdot 0+3\cdot 0+1\cdot 0-4|}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{11}}=\dfrac{4\sqrt{11}}{11}\text{u}$

b) La recta perpendicular al plano π que pasa por el origen de coordenadas es:

$$r:\begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{u}=\vec{n}=(1,3,1) \end{cases} \rightarrow (x,y,z)=(0,0,0)+\lambda(1,3,1) \rightarrow x=\frac{y}{3}=z \rightarrow r: \left.\begin{matrix} x=z \\ 3x-y=0 \end{matrix}\right\}$$

El punto de corte entre dicha recta y el plano π es la proyección ortogonal del punto sobre el plano.

$$\left.\begin{matrix} x=z \\ 3x-y=0 \\ x+3y+z=4 \end{matrix}\right\} \rightarrow Q\left(\frac{4}{11},\frac{12}{11},\frac{4}{11}\right)$$

Calculamos el punto simétrico de $O(0,0,0)$ respecto del plano.

$$\left(\frac{4}{11},\frac{12}{11},\frac{4}{11}\right)=\left(\frac{a+0}{2},\frac{b+0}{2},\frac{c+0}{2}\right) \rightarrow O'\left(\frac{8}{11},\frac{24}{11},\frac{8}{11}\right)$$

c) Para calcular el ángulo que forman dos planos, calculamos el ángulo que forman sus vectores normales.

$\pi: x+3y+z-4=0 \rightarrow \vec{n}_1(1,3,1)$ $\qquad$ $\pi': x=0 \rightarrow \vec{n}_2(1,0,0)$

$$\left.\begin{matrix} \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=(1,3,1)\cdot(1,0,0)=1+0+0=1 \\ |\vec{n}_1|=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11} \\ |\vec{n}_2|=\sqrt{1+0+0}=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \alpha = arc\cos\left(\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}\right)=arc\cos\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)=72,45°$$

d) Calculamos las rectas de corte del plano con los planos coordenados.

Corte con el plano $OXY: \left.\begin{matrix} z=0 \\ x+3y+z-4=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow r_{OXY}: \left.\begin{matrix} x=4-3\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{matrix}\right\}$

Corte con el plano $OXZ: \left.\begin{matrix} y=0 \\ x+3y+z-4=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow r_{OXZ}: \left.\begin{matrix} x=4-\beta \\ y=0 \\ z=\beta \end{matrix}\right\}$

Corte con el plano $OYZ: \left.\begin{matrix} x=0 \\ x+3y+z-4=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow r_{OYZ}: \left.\begin{matrix} x=0 \\ y=\frac{4-\gamma}{3} \\ z=\gamma \end{matrix}\right\}$

El tetraedro tiene por vértices el origen de coordenadas y los puntos de corte de cada par de las rectas calculadas.

Punto $A \rightarrow \left.\begin{matrix} 4-\beta=4-3\lambda \\ 0=\lambda \\ \beta=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda=0 \\ \beta=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow A(4,0,0)$

Punto $B \rightarrow \left.\begin{matrix} 4-3\lambda=0 \\ \lambda=\frac{4-\gamma}{3} \\ 0=\gamma \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda=\frac{4}{3} \\ \gamma=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow B\left(0,\frac{4}{3},0\right)$

Punto $C \rightarrow \left.\begin{matrix} 4-\beta=0 \\ 0=4-\gamma \\ \beta=\gamma \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} \beta=4 \\ \gamma=4 \end{matrix}\right\} \rightarrow C(0,0,4)$

$$\text{Volumen del tetraedro}=\frac{\left|[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]\right|}{6}=\frac{\left\|\begin{matrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}\right\|}{6}=\frac{\frac{64}{3}}{6}=\frac{32}{9}=3,56\ \text{u}^3$$

111. Página 158

a) Consideramos que $P(x,y,z)$ es un punto del espacio que pertenece al lugar geométrico.

$$d(A,P)=|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}$$

$$d(B,P)=|\overrightarrow{BP}|=\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2+(z-5)^2}$$

Igualamos ambas distancias.

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2+(z-5)^2}$$

$$(x+3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=(x-1)^2+(y-3)^2+(z-5)^2 \rightarrow 8x+4y+8z-24=0$$

El lugar de los puntos que equidistan de los puntos es el plano de ecuación $\pi: 2x+y+2z-6=0$.

b) Consideramos que $P(x,y,z)$ es un punto del espacio que pertenece al lugar geométrico.

$$d(A,P)=|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2}$$

$$d(B,P)=|\overrightarrow{BP}|=\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2}$$

Igualamos ambas distancias.

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2}$$

$$(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2 \rightarrow 8x-12y-2z+7=0$$

El lugar de los puntos que equidistan de los puntos es el plano de ecuación $\pi: 8x-12y-2z+7=0$.

112. Página 158

a) Consideramos que $P(x,y,z)$ es un punto del espacio que pertenece al lugar geométrico.

$$d(\pi_1,P)=\frac{|1\cdot x+2\cdot y-2\cdot z+3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|x+2y-2z+3|}{3} \qquad d(\pi_2,P)=\frac{|2\cdot x-1\cdot y+2\cdot z-7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{|2x-y+2z-7|}{3}$$

Igualamos ambas distancias.

$$\frac{|x+2y-2z+3|}{3}=\frac{|2x-y+2z-7|}{3} \rightarrow |x+2y-2z+3|=|2x-y+2z-7|$$

Caso 1 $\rightarrow x+2y-2z+3=2x-y+2z-7 \rightarrow x-3y+4z-10=0$

Caso 2 $\rightarrow x+2y-2z+3=-2x+y-2z+7 \rightarrow 3x+y-4=0$

El lugar de los puntos que equidistan de los planos son los dos planos que tienen estas ecuaciones.

b) Consideramos que $P(x,y,z)$ es un punto del espacio que pertenece al lugar geométrico.

$$d(\pi_1,P)=\frac{|3\cdot x+0\cdot y+4\cdot z+9|}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}}=\frac{|3x+4z+9|}{5} \qquad d(\pi_2,P)=\frac{|4\cdot x-3\cdot y+0\cdot z+6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2+0^2}}=\frac{|4x-3y+6|}{5}$$

Igualamos ambas distancias.

$$\frac{|3x+4z+9|}{5}=\frac{|4x-3y+6|}{5} \rightarrow |3x+4z+9|=|4x-3y+6|$$

Caso 1 $\rightarrow 3x+4z+9=4x-3y+6 \rightarrow x-3y-4z-3=0$

Caso 2 $\rightarrow 3x+4z+9=-4x+3y-6 \rightarrow 7x-3y+4z+15=0$

El lugar de los puntos que equidistan de los planos son los dos planos que tienen estas ecuaciones.

113. Página 158

Llamamos $P(x,y,z)$ a un punto genérico y calculamos el volumen del tetraedro generado por los vectores $\overrightarrow{AB}=(2,4,-4)$, $\overrightarrow{AC}=(3,-3,3)$ y $\overrightarrow{AP}=(x-3,y-5,z+1)$ del espacio que pertenece al lugar geométrico.

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP}\right]=\begin{vmatrix}2 & 4 & -4\\ 3 & -3 & 3\\ x-3 & y-5 & z+1\end{vmatrix}=-18y-18z+72$$

$$\text{Volumen del tetraedro}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP}\right]\right|}{6}=\frac{|-18y-18z+72|}{6}=15\rightarrow|-18y-18z+72|=90$$

Caso $1\rightarrow -18y-18z+72=90\rightarrow y+z+1=0$

Caso $2\rightarrow -18y-18z+72=-90\rightarrow y+z-9=0$

El lugar de los puntos que cumplen la condición son los planos.

114. Página 158

Un punto genérico de la recta es $P(-1+2\lambda,-3\lambda,2+2\lambda)$.

Buscamos los puntos de la recta que equidistan de los planos.

$$\frac{|-1+2\lambda-3\lambda-2-2\lambda+1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{|-1+2\lambda+3\lambda+2+2\lambda+2|}{\sqrt{1+1+1}}$$

$$|-3\lambda-2|=|7\lambda+3|\rightarrow\begin{cases}-3\lambda-2=7\lambda+3\\ -3\lambda-2=-7\lambda-3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\lambda=-\dfrac{1}{2}\\ \lambda=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

Los puntos que equidistan de los dos planos son $P_1\left(-2,\frac{3}{2},1\right)$ y $P_2\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right)$.

115. Página 158

a) $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=4^2\rightarrow x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z-2=0$

b) $(x-4)^2+(y+1)^2+z^2=\left(\sqrt{2}\right)^2\rightarrow x^2+y^2+z^2-8x+2y+15=0$

116. Página 158

a) Calculamos el radio de la esfera, que será la distancia del centro al punto.

$\overrightarrow{AC}=(-3,-1,1)$ $\qquad r=d(A,C)=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}$

La ecuación de la esfera es:

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=11\rightarrow x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+3=0$

b) Calculamos el radio de la esfera, que será la distancia del centro al punto.

$\overrightarrow{AC}=(-3,0,-4)$ $\qquad r=d(A,C)=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{9+0+16}=5$

La ecuación de la esfera es:

$x^2+(y+1)^2+(z-1)^2=5^2\rightarrow x^2+y^2+z^2+2y-2z-23=0$

117. Página 158

La ecuación de una esfera es de la forma:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

Como pasa por los puntos *A*, *B*, *C* y *D*:

$$\left.\begin{array}{l}(-a)^2+(-b)^2+(-c)^2=r^2\\(1-a)^2+(-b)^2+(-c)^2=r^2\\(-a)^2+(1-b)^2+(-c)^2=r^2\\(-a)^2+(-b)^2+(1-c)^2=r^2\end{array}\right\}\to\left.\begin{cases}a^2+b^2+c^2=r^2\\a^2+b^2+c^2=r^2+2a-1\\a^2+b^2+c^2=r^2+2b-1\\a^2+b^2+c^2=r^2+2c-1\end{cases}\right\}\to\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=\dfrac{1}{2}\\c=\dfrac{1}{2}\\r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

La ecuación de la esfera es: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$.

118. Página 158

a) El plano que buscamos pasa por $A(2,3,2)$ y tiene por vector normal al vector $\overrightarrow{AC}$.

$$\vec{n}=\overrightarrow{AC}=(-3,-1,1)\to\pi:-3x-y+z+D=0$$

$\pi:-3x-y+z+D=0\xrightarrow{A(2,3,2)}-6-3+2+D=0\to D=7\to\pi:3x+y-z-7=0$ es el plano buscado.

b) El plano que buscamos pasa por $A(3,-1,5)$ y tiene por vector normal al vector $\overrightarrow{AC}$.

$$\vec{n}=\overrightarrow{AC}=(-3,0,-4)\to\pi:-3x-4z+D=0$$

$\pi:-3x-4z+D=0\xrightarrow{A(3,-1,5)}-9-20+D=0\to D=29\to\pi:3x+4z-29=0$ es el plano buscado.

119. Página 158

a) Si la ecuación corresponde a una esfera. Sean $C(a,b,c)$ el centro y $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ la ecuación general de la esfera, se tiene que cumplir que:

$$\left.\begin{array}{l}-2a=A\\-2b=B\\-2c=C\\a^2+b^2+c^2-r^2=D\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}-2a=-4\\-2b=2\\-2c=-2\\a^2+b^2+c^2-r^2=2\end{array}\right\}\to\begin{cases}a=2\\b=-1\\c=1\\4+1+1-r^2=2\to r^2=4\end{cases}$$

La esfera tiene centro $C(2,-1,1)$ y radio $r=2$.

b)

$$\left.\begin{array}{l}-2a=A\\-2b=B\\-2c=C\\a^2+b^2+c^2-r^2=D\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}-2a=0\\-2b=-4\\-2c=6\\a^2+b^2+c^2-r^2=11\end{array}\right\}\to\begin{cases}a=0\\b=2\\c=-3\\0+4+9-r^2=11\to r^2=2\end{cases}$$

La esfera tiene centro $C(0,2,-3)$ y radio $r=\sqrt{2}$.

120. Página 158

a) Calculamos el radio como la distancia del centro de la circunferencia al plano tangente.

$$d(C,\pi)=\frac{|1\cdot 2-1\cdot(-1)+1\cdot 3|}{\sqrt{1+1+1}}=2\sqrt{3}\text{ u}$$

La ecuación de la esfera es:

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2\rightarrow x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+2=0$$

El punto de tangencia coincide con la proyección de *C* sobre el plano.

La recta perpendicular al plano π que pasa por el centro de la circunferencia es:

$$r:\begin{cases}O(2,-1,3)\\ \vec{u}=\vec{n}=(1,-1,1)\end{cases}\rightarrow(x,y,z)=(2,-1,3)+\lambda(1,-1,1)\rightarrow\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{1}$$

El punto de corte entre dicha recta y el plano π es la proyección ortogonal del punto sobre el plano.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}\\ \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{z-3}{1}\\ x-y+z=0\end{array}\right\}\rightarrow Q(0,1,1)$$

b) Calculamos el radio como la distancia del centro de la circunferencia al plano tangente.

$$d(C,\pi)=\frac{|4\cdot(-3)-3\cdot 1+0\cdot 0+5|}{\sqrt{16+9+0}}=\frac{10}{5}=2\text{ u}$$

La ecuación de la esfera es:

$$(x+3)^2+(y-1)^2+z^2=2^2\rightarrow x^2+y^2+z^2+6x-2y+6=0$$

El punto de tangencia coincide con la proyección de *C* sobre el plano.

La recta perpendicular al plano π que pasa por el centro de la circunferencia es:

$$r:\begin{cases}O(-3,1,0)\\ \vec{u}=\vec{n}=(4,-3,0)\end{cases}\rightarrow(x,y,z)=(-3,1,0)+\lambda(4,-3,0)\rightarrow\begin{array}{c}\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-1}{-3}\\ z=0\end{array}$$

El punto de corte entre dicha recta y el plano π es la proyección ortogonal del punto sobre el plano.

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-1}{-3}\\ z=0\\ 4x-3y+5=0\end{array}\right\}\rightarrow Q\left(-\frac{7}{5},-\frac{1}{5},0\right)$$

121. Página 158

El centro de la esfera está en la recta *s* perpendicular al plano que pasa por el punto *P*.

$$\pi: x-y+2z-4=0\rightarrow\vec{n}=(1,-1,2)$$

$$s:\begin{cases}P(3,1,1)\\ \vec{u}=\vec{n}=(1,-1,2)\end{cases}\rightarrow s:(3,1,1)+t(1,-1,2)\rightarrow\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y-4=0\\ 2x-z-5=0\end{array}\right\}$$

Por tanto, el centro de la esfera estará en el punto de corte de ambas rectas.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=4 \\ z-x=1 \\ x+y-4=0 \\ 2x-z-5=0 \end{array}\right\} \rightarrow C(6,-2,7)$$

Calculamos el radio como la distancia del centro de la circunferencia al punto tangente.

$$d(P,C)=\left|\overrightarrow{PC}\right|=|(3,-3,6)|=\sqrt{9+9+36}=3\sqrt{6}\ \text{u}$$

La ecuación de la esfera es:

$$(x-6)^2+(y+2)^2+(z-7)^2=\left(3\sqrt{6}\right)^2 \rightarrow x^2+y^2+z^2-12x+4y-14z+35=0$$

122. Página 159

Si la ecuación corresponde a una esfera, se tiene que cumplir que:

$$\left.\begin{array}{l} -2a=0 \\ -2b=-2 \\ -2c=0 \\ a^2+b^2+c^2-r^2=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ b=1 \\ c=0 \\ 0+1+0-r^2=2 \rightarrow r^2=-1 \end{array}\right.$$

Como $r^2=-1$ no tiene solución, esta ecuación no corresponde a una esfera.

123. Página 159

El plano que buscamos pasa por $A(-2,1,3)$ y tiene por vector normal al vector $\overrightarrow{AC}$.

$$\vec{n}=\overrightarrow{AC}=(3,1,-4) \rightarrow \pi: 3x+y-4z+D=0$$

$\pi: 3x+y-4z+D=0 \xrightarrow{A(-2,1,3)} -6+1-12+D=0 \rightarrow D=17 \rightarrow \pi: 3x+y-4z+17=0$ es el plano buscado.

124. Página 159

a)

$$r: \left.\begin{array}{l} x+2y-z-3=0 \\ x-y-3z+6=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-3+\frac{7}{3}\lambda \\ y=3-\frac{2}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} P(-3,3,0) \\ \vec{u}=(7,-2,3) \end{array}\right.$$

$$s: \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+a}{3} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} Q(2,1,-a) \\ \vec{v}=(2,-2,3) \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{PQ}=(5,-2,-a)$$

$$M=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & -a \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-10\neq 0 \rightarrow \text{Rango}(M)=2$$

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & -a \end{vmatrix} = 10a+30 \rightarrow \begin{cases} a=-3 \rightarrow \text{Rango}(M^*)=2 \\ a\neq -3 \rightarrow \text{Rango}(M^*)=3 \end{cases}$$

Para $a=-3 \rightarrow \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2 \rightarrow$ Las rectas son secantes.

Para $a\neq -3 \rightarrow 2=\text{Rango}(M)\neq \text{Rango}(M^*)=3 \rightarrow$ Las rectas se cruzan.

b)

$$r: \begin{rcases} x+2y-z-3=0 \\ x-y-3z+6=0 \end{rcases} \rightarrow \begin{cases} P(-3,3,0) \\ \vec{u}=(7,-2,3) \end{cases}$$

$$s: \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{3} \rightarrow \begin{cases} Q(2,1,-1) \\ \vec{v}=(2,-2,3) \end{cases}$$

Determinamos el plano que contiene a la recta r y es perpendicular a s. Para definir un plano necesitamos dos vectores y un punto. Tomamos un punto de la recta r y su vector director para asegurarnos de que dicha recta esté contenida en el plano, y como segundo vector tomamos $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$, que es perpendicular a ambas rectas y, por tanto, a s.

$$\pi: \begin{cases} P(-3,3,0) \\ \vec{u}=(7,-2,3) \\ \vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=(0,-15,-10) \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x+3 & y-3 & z \\ 7 & -2 & 3 \\ 0 & -15 & -10 \end{vmatrix} = 65x+70y-105z-15=0 \rightarrow \pi: 13x+14y-21z-3=0$$

Determinamos el punto de intersección del plano con la recta que no está contenida en él.

$$\begin{rcases} \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-2} \\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{z+1}{3} \\ 13x+14y-21z-3=0 \end{rcases} \rightarrow R\left(\frac{246}{65},-\frac{51}{65},\frac{109}{65}\right)$$

La recta buscada tiene como vector director $\vec{n}$ y pasa por el punto que hemos calculado.

$$t: \begin{cases} \vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=(0,-15,-10) \\ R\left(\dfrac{246}{65},-\dfrac{51}{65},\dfrac{109}{65}\right) \end{cases} \rightarrow t:(x,y,z)=\left(\frac{246}{65},-\frac{51}{65},\frac{109}{65}\right)+\delta(0,-15,-10)$$

c) La distancia entre ambas rectas será igual a la distancia entre sus puntos de corte con la recta perpendicular común.

$$\begin{rcases} \dfrac{246}{65}=-3+\dfrac{7}{3}\lambda \\ -\dfrac{51}{65}-15\delta=3-\dfrac{2}{3}\lambda \\ \dfrac{109}{65}-10\delta=\lambda \end{rcases} \rightarrow \begin{rcases} \lambda=\dfrac{189}{65} \\ \delta=-\dfrac{8}{65} \end{rcases} \rightarrow A\left(\frac{246}{65},\frac{69}{65},\frac{189}{65}\right)$$

$$\begin{rcases} \dfrac{246}{65}=2+2\beta \\ -\dfrac{51}{65}-15\delta=1-2\beta \\ \dfrac{109}{65}-10\delta=-1+3\beta \end{rcases} \rightarrow \begin{rcases} \beta=\dfrac{58}{65} \\ \delta=0 \end{rcases} \rightarrow B\left(\frac{246}{65},-\frac{51}{65},\frac{109}{65}\right)$$

$$d(r,s)=d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\left(0,-\frac{120}{65},-\frac{80}{65}\right)\right|=\sqrt{0+\left(-\frac{120}{65}\right)^2+\left(-\frac{80}{65}\right)^2}=\frac{8\sqrt{13}}{13}=2{,}22\text{ u}$$

125. Página 159

a) La trayectoria es la recta perpendicular al plano que pasa por *P*.

$$r:\begin{cases}P(1,2,1)\\ \vec{u}=\vec{n}=(1,1,3)\end{cases}\rightarrow \left.\begin{array}{r}x=1+t\\ y=2+t\\ z=1+3t\end{array}\right\}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l}x=1+t\\ y=2+t\\ z=1+3t\\ x+y+3z=0\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{11}\\ y=\dfrac{16}{11}\\ z=-\dfrac{7}{11}\\ t=-\dfrac{6}{11}\end{cases}\rightarrow Q\left(\dfrac{5}{11},\dfrac{16}{11},-\dfrac{7}{11}\right)$$

c) $d(P,Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|\left(-\dfrac{6}{11},-\dfrac{6}{11},-\dfrac{18}{11}\right)\right|=\dfrac{6\sqrt{11}}{11}$

126. Página 159

$R(a,b,c)\in\pi\rightarrow a+b+c=2$

$d(P,Q)=d(P,R)=d(Q,R)$

$$\sqrt{(-2)^2+2^2+0^2}=\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2}=\sqrt{(a+1)^2+(b-4)^2+(c-3)^2}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}8=(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2\\ 8=(a+1)^2+(b-4)^2+(c-3)^2\end{cases}$$

Tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}a+b+c=2\\ (a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2=8\\ (a+1)^2+(b-4)^2+(c-3)^2=8\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}a_1=-1,b_1=2,c_1=1\\ a_2=-\dfrac{5}{3},b_2=\dfrac{4}{3},c_2=\dfrac{7}{3}\end{cases}$$

Obtenemos dos soluciones: $R_1(-1,2,1)$ y $R_2\left(-\dfrac{5}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{7}{3}\right)$

Calculamos el área:

Base $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Como los ángulos de un triángulo equilátero miden 60°.

$$\text{Altura}=\sqrt{8}\cdot sen(60^\circ)=\sqrt{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$$

$$\text{Área}=\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{2}=2\sqrt{3}$$

127. Página 159

a) Si los tres puntos están alineados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen que ser proporcionales.

$$\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{AC}\rightarrow(2-\lambda,-\lambda-2,-\lambda)=k(0,-2,2)\rightarrow\left.\begin{array}{r}2-\lambda=0\\ -\lambda-2=-2k\\ -\lambda=2k\end{array}\right\}\rightarrow \text{El sistema no tiene solución.}$$

Los puntos no pueden estar alineados.

b) Calculamos la longitud de los lados.

$$\overrightarrow{AB} = |(2-\lambda, -\lambda-2, -\lambda)| = \sqrt{(2-\lambda)^2 + (-\lambda-2)^2 + (-\lambda)^2} = \sqrt{3\lambda^2+8}$$

$$\overrightarrow{AC} = |(0,-2,2)| = \sqrt{0^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} \qquad \overrightarrow{BC} = |(\lambda-2, \lambda, \lambda+2)| = \sqrt{(\lambda-2)^2+(\lambda)^2+(\lambda+2)^2} = \sqrt{3\lambda^2+8}$$

Como $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| \forall\lambda \in \mathbb{R}$, el triángulo es siempre isósceles.

c) Buscamos el plano que pasa por $A(0,2,0)$ y con vectores directores $\overrightarrow{AB} = (2,-2,0)$ y $\overrightarrow{AC} = (0,-2,2)$:

$$\pi: \begin{cases} A(0,2,0) \\ \overrightarrow{AB} = (2,-2,0) \\ \overrightarrow{AC} = (0,-2,2) \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4x-4y-4z+8=0 \rightarrow \pi: x+y+z-2=0$$

$$d(0,\pi)\frac{|-2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ u}$$

128. Página 159

Determinamos los puntos de corte:

$$A: \left.\begin{matrix} x=y \\ x=z \\ 5x-4y+7z+1=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow A\left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right)$$

$$B: \left.\begin{matrix} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z}{2} \\ 5x-4y+7z+1=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow B\left(0, -\frac{3}{2}, -1\right)$$

$$C: \left.\begin{matrix} \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} \\ \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{z}{3} \\ 5x-4y+7z+1=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow C\left(\frac{23}{8}, -\frac{3}{4}, -\frac{21}{8}\right)$$

Tomamos como base del triángulo *ABC* la distancia del punto *A* al punto *C*, y como altura la distancia del punto *B* a la recta *r* que pasa por *A* y *C*.

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{|\overrightarrow{AC}| \cdot d(B,r)}{2} = \frac{|\overrightarrow{AC}| \cdot \dfrac{\left\|\left[\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right]\right\|}{|\overrightarrow{AC}|}}{2} = \frac{\left\|\left[\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right]\right\|}{2}$$

$$\overrightarrow{AC} = \left(3, -\frac{5}{8}, -\frac{5}{2}\right)$$

$$\left\|\left[\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right]\right\| = \left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -5/8 & -5/2 \\ 1/8 & -11/8 & -7/8 \end{vmatrix}\right\| = \left|\left(-\frac{185}{64}, \frac{37}{16}, -\frac{259}{64}\right)\right| = \sqrt{\left(-\frac{185}{64}\right)^2 + \left(\frac{37}{16}\right)^2 + \left(-\frac{259}{64}\right)^2} = 5{,}48 \text{ u}$$

$$\text{Área} = \frac{\left\|\left[\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right]\right\|}{2} = \frac{5{,}48}{2} = 2{,}74 \text{ u}^2$$

129. Página 159

a) Hallamos la proyección ortogonal del punto sobre la recta.

$$r:\left.\begin{matrix} x+y+2z+1=0 \\ x-y+3=0 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} x=-2-t \\ y=1-t \\ z=t \end{matrix}\right\} \to \begin{cases} A(-2,1,0) \\ \vec{u}=(-1,-1,1) \end{cases}$$

Hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta.

$$\pi:\begin{cases} \vec{n}=(-1,-1,1) \to -x-y+z+D=0 \\ P(1,2,3) \xrightarrow{-x-y+z+D=0} -1-2+3+D=0 \to D=0 \end{cases} \to \pi: x+y-z=0$$

Calculamos el punto de intersección entre este plano y la recta.

$$\left.\begin{matrix} x+y+2z+1=0 \\ x-y+3=0 \\ x+y-z=0 \end{matrix}\right\} \to M\left(-\frac{5}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

Calculamos el simétrico del punto respecto de la proyección.

$$\left(-\frac{5}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1+a}{2},\frac{2+b}{2},\frac{3+c}{2}\right) \to P'\left(-\frac{13}{3},\frac{2}{3},-\frac{11}{3}\right)$$

b) El punto R es de la forma: $R(-2-t,\ 1-t,\ t)$.

Los lados PQ y QR tienen que formar un ángulo de 90º.

$$\overrightarrow{PQ}=(-2,-2,-2) \to \left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{QR}=(-1-t,1-t,-1+t) \to \left|\overrightarrow{QR}\right|=\sqrt{(-1-t)^2+(1-t)^2+(-1+t)^2}=\sqrt{3t^2-2t+3}$$

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -2 \\ -1-t & 1-t & -1+t \end{vmatrix}=(4-4t,4t,-4) \to \left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}\right|=\sqrt{(4-4t)^2+16t^2+16}=4\sqrt{2(t^2-t+1)}$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}\right|=\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{QR}\right|\cdot sen(90°) \to \left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{QR}\right|=\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}\right|$$

$$2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3t^2-2t+3}=4\sqrt{2t^2-2t+2} \to 9t^2-6t+9=8t^2-8t+8 \to t^2+2t+1=0 \to t=-1$$

El punto buscado es $R(-1,2,-1)$.

Sabiendo que el triángulo es rectángulo en Q, calculamos el área.

$$\overrightarrow{QR}=(0,2,-2) \to \left|\overrightarrow{QR}\right|=\sqrt{0+4+4}=2\sqrt{2}$$

$$\text{Área}=\frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{QR}\right|}{2}=\frac{2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{6}=4{,}9\,u^2$$

130. Página 159

Primero. Calculamos la proyección de P sobre π_1.

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por el punto y es perpendicular al plano.

$$r:\begin{cases} P(1,-2,3) \\ \vec{u}=\vec{n}=(1,-2,0) \end{cases} \to r: \left.\begin{matrix} \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2} \\ z=3 \end{matrix}\right\}$$

Calculamos el punto de corte del plano y la recta hallada.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}\\ z=3\\ x-2y=1\end{array}\right\}\rightarrow Q\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5},3\right)$$

Segundo. Calculamos la proyección de P sobre π_2.

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por el punto y es perpendicular al plano.

$$s:\begin{cases}P(1,-2,3)\\ \vec{v}=\vec{n}=(1,0,2)\end{cases}\rightarrow s:\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{z-3}{2}\\ y=-2\end{array}\right\}$$

Calculamos el punto de corte del plano y la recta hallada.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{z-3}{2}\\ y=-2\\ x+2z=2\end{array}\right\}\rightarrow R(0,-2,1)$$

Tercero. Calculamos el área de triángulo PQR.

Tomamos como base del triángulo PQR la distancia del punto P al punto Q, y como altura la distancia del punto R a la recta r' que pasa por P y Q.

$$\text{Área }=\frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot d(R,r')}{2}=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|}}{2}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right]\right|}{2}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\left(-\frac{4}{5},\frac{8}{5},0\right)\rightarrow\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2+0^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}=1{,}78\text{ u}$$

$$\left|\left[\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right]\right|=\left\|\begin{array}{ccc}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ -4/5&8/5&0\\ -1&0&-2\end{array}\right\|=\left|\left(-\frac{16}{5},-\frac{8}{5},\frac{8}{5}\right)\right|=\sqrt{\left(-\frac{16}{5}\right)^2+\left(-\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2}=\frac{8\sqrt{6}}{5}=3{,}92\text{ u}$$

$$\text{Área }=\frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right]\right|}{2}=\frac{3{,}92}{2}=1{,}96\text{ u}^2$$

131. Página 159

$$r:\begin{cases}P(1,1,1)\\ \vec{v}(3,4,0)\end{cases}\rightarrow r:\left.\begin{array}{l}x=1+3t\\ y=1+4t\\ z=1\end{array}\right\}$$

Los puntos de la recta son de la forma $R(1+3t,1+4t,1)$.

Tomamos como base del triángulo APR la distancia del punto A al punto P, y como altura la distancia del punto R a la recta s que pasa por A y P.

$$\text{Área }=\frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot d(R,s)}{2}=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{PR}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AP}\right|}}{2}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{PR}\right]\right|}{2}$$

$\overrightarrow{AP}=(-11,2,0)$

$$\left\|\left[\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{PR}\right]\right\|=\left\|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-11&2&0\\3t&4t&0\end{vmatrix}\right\|=|(0,0,-50t)|=\sqrt{0^2+0^2+(-50t)^2}=50t$$

$$\text{Área }=\frac{\left\|\left[\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{PR}\right]\right\|}{2}=\frac{50t}{2}$$

Como el área tiene que ser $50\text{u}^2\rightarrow\frac{50t}{2}=50\rightarrow t=2\rightarrow R(7,9,1)$ es el punto buscado.

132. Página 159

a) Los lados AB y AC tienen que formar un ángulo de 90º.

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot sen(90°)\rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|\rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|^2$$

$$\overrightarrow{AB}=(1,2m-2,m+2)\rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1^2+(2m-2)^2+(m+2)^2}=\sqrt{5m^2-4m+9}\rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=5m^2-4m+9$$

$$\overrightarrow{AC}=(m,1,5)\rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{m^2+1^2+5^2}=\sqrt{m^2+26}\rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=m^2+26$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2m-2&m+2\\m&1&5\end{vmatrix}=\left(9m-12,m^2+2m-5,-2m^2+2m+1\right)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(9m-12)^2+\left(m^2+2m-5\right)^2+\left(-2m^2+2m+1\right)^2}$$

$$\left(5m^2-4m+9\right)\cdot\left(m^2+26\right)=(9m-12)^2+\left(m^2+2m-5\right)^2+\left(-2m^2+2m+1\right)^2\rightarrow m^2+2m+1=0\rightarrow m=-1$$

b) $\overrightarrow{AB}=(1,2m-2,m+2)\xrightarrow{m=0}\overrightarrow{AB}=(1,-2,2)$ $\qquad\overrightarrow{AC}=(m,1,5)\xrightarrow{m=0}\overrightarrow{AC}=(0,1,5)$

$\overrightarrow{AD}=(\lambda,3,\lambda)-(1,3,-2)=(\lambda-1,0,\lambda+2)$

$$\text{Volumen del tetraedro}=\frac{\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right\|}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right\|}{6}=\frac{\begin{vmatrix}1&-2&2\\0&1&5\\\lambda-1&0&\lambda+2\end{vmatrix}}{6}=\frac{|-11\lambda+14|}{6}=\frac{1}{2}\rightarrow|-11\lambda+14|=3$$

Caso 1 $\rightarrow -11\lambda+14=3\rightarrow\lambda=1\rightarrow D_1(1,3,1)$

Caso 2 $\rightarrow -11\lambda+14=-3\rightarrow\lambda=\frac{17}{11}\rightarrow D_2\left(\frac{17}{11},3,\frac{17}{11}\right)$

Existen dos puntos que cumplen la condición.

133. Página 159

a)

$$\pi:\begin{cases}\vec{n}=\overrightarrow{PQ}=(-12,-24,-16)\to\pi:-12x-24y-16z+D=0\\ M\left(\dfrac{8-4}{2},\dfrac{13-11}{2},\dfrac{8-8}{2}\right)=(2,1,0)\xrightarrow{-12x-24y-16z+D=0}-24-24-0+D=0\to D=48\end{cases}$$

El plano buscado es $\pi:3x+6y+4z-12=0$.

b) Determinamos la recta perpendicular al plano que pasa por $O(0,0,0)$.

$$r:\begin{cases}O(0,0,0)\\ \vec{u}=\vec{n}=(3,6,4)\end{cases}\to\frac{x}{3}=\frac{y}{6}=\frac{z}{4}\to\left.\begin{matrix}2x-y=0\\4x-3z=0\end{matrix}\right\}$$

Calculamos la intersección de la recta hallada y el plano.

$$\left.\begin{matrix}2x-y=0\\4x-3z=0\\3x+6y+4z-12=0\end{matrix}\right\}\to Q\left(\frac{36}{61},\frac{72}{61},\frac{48}{61}\right)$$

c) Hallamos el corte del plano con los ejes.

$$\text{Eje } OX\to\left.\begin{matrix}y=0\\z=0\\3x+6y+4z-12=0\end{matrix}\right\}\to A(4,0,0)$$

$$\text{Eje } OY\to\left.\begin{matrix}x=0\\z=0\\3x+6y+4z-12=0\end{matrix}\right\}\to B(0,2,0)$$

$$\text{Eje } OZ\to\left.\begin{matrix}x=0\\y=0\\3x+6y+4z-12=0\end{matrix}\right\}\to C(0,0,3)$$

$$\text{Volumen del tetraedro}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right|}{6}=\frac{\begin{vmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{vmatrix}}{6}=\frac{24}{6}=4\text{ u}^3$$

134. Página 159

$$r:\left.\begin{matrix}2x-y-2z+3=0\\x-y+4=0\end{matrix}\right\}\to\left.\begin{matrix}x=1+2t\\y=5+2t\\z=t\end{matrix}\right\}$$

Calculamos *Q* como intersección de r y $OXY: z=0$.

$$\left.\begin{matrix}2x-y-2z+3=0\\x-y+4=0\\z=0\end{matrix}\right\}\to Q(1,5,0)$$

El punto *R* es de la forma $R(1+2t,5+2t,t)$.

Los lados PQ y PR tienen que formar un ángulo de 90º.

$$\overrightarrow{PQ}=(0,4,-3)\to\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{0+16+9}=5$$

$$\overrightarrow{PR}=(2t,4+2t,-3+t)\to\left|\overrightarrow{PR}\right|=\sqrt{(2t)^2+(4+2t)^2+(-3+t)^2}=\sqrt{9t^2+10t+25}$$

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 4 & -3\\ 2t & 4+2t & -3+t\end{vmatrix}=(10t,-6t,-8t)\rightarrow\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|=\sqrt{(10t)^2+(-6t)^2+(-8t)^2}=\sqrt{200\cdot t^2}$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|=\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PR}\right|\cdot sen(90°)\rightarrow\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PR}\right|=\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|$$

$$5\sqrt{9t^2+10t+25}=\sqrt{200\cdot t^2}\rightarrow 25\left(9t^2+10+25\right)=200t^2\rightarrow 25t^2+250t+625=0\rightarrow t=-5$$

Un punto que cumple las condiciones pedidas es $R(-9,-5,-5)$.

Sabiendo que el triángulo es rectángulo en P, calculamos el área.

$$\left|\overrightarrow{PR}\right|=\sqrt{9t^2+10t+25}=\sqrt{9(-5)^2+10(-5)+25}=10\sqrt{2}\text{ u}$$

$$\text{Área }=\frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PR}\right|}{2}=\frac{5\cdot 10\sqrt{2}}{2}=35{,}36\text{ u}^2$$

135. Página 159

$$r: x-1=\frac{y+2}{3}=3-z\rightarrow\left.\begin{matrix}x-1=\dfrac{y+2}{3}\\ x-1=3-z\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}3x-y-5=0\\ x+z-4=0\end{matrix}\right\}$$

Calculamos A y B.

$$\left.\begin{matrix}3x-y-5=0\\ x+z-4=0\\ x-y+z+1=0\end{matrix}\right\}\rightarrow A\left(\frac{10}{3},5,\frac{2}{3}\right)$$

$$\left.\begin{matrix}3x-y-5=0\\ x+z-4=0\\ z=2\end{matrix}\right\}\rightarrow B(2,1,2)$$

Calculamos C.

La recta perpendicular al plano π_1 que pasa por B es:

$$s:\begin{cases}B(2,1,2)\\ \vec{u}=\vec{n}=(1,-1,1)\end{cases}\rightarrow(x,y,z)=(2,1,2)+\lambda(1,-1,1)\rightarrow x-2=\frac{y-1}{-1}=z-2\rightarrow s:\left.\begin{matrix}x=z\\ x+y-3=0\end{matrix}\right\}$$

El punto de corte entre dicha recta y el plano π_1 es el punto C.

$$\left.\begin{matrix}x=z\\ x+y-3=0\\ x-y+z+1=0\end{matrix}\right\}\rightarrow C\left(\frac{2}{3},\frac{7}{3},\frac{2}{3}\right)$$

Calculamos el área del triángulo: tomamos como base del triángulo ABC la distancia del punto A al punto B, y como altura la distancia del punto C a la recta t que pasa por A y B.

$$\text{Área }=\frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot d(C,t)}{2}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}}{2}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA}\right]\right|}{2}$$

$$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{-4}{3},-4,\frac{4}{3}\right)\to\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(\frac{-4}{3}\right)^2+4^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{11}}{3}\text{u}$$

$$\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{8}{3},-\frac{8}{3},0\right)$$

$$\left|\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA}\right]\right|=\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4/3 & -4 & 4/3\\ -8/3 & -8/3 & 0\end{matrix}\right\|=\left|\left(\frac{32}{9},-\frac{32}{9},-\frac{64}{9}\right)\right|=\sqrt{\left(\frac{32}{9}\right)^2+\left(-\frac{32}{9}\right)^2+\left(-\frac{64}{9}\right)^2}=\frac{32\sqrt{6}}{9}\text{u}$$

$$\text{Área }=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA}\right]\right|}{2}=\frac{\frac{32\sqrt{6}}{9}}{2}=\frac{16\sqrt{6}}{9}=4{,}35\text{u}^2$$

136. Página 159

El plano π' que buscamos es paralelo a $\pi\to\pi':3x-y+z+D=0$.

$$d(P,\pi')=d(Q,\pi')=\frac{|3\cdot2-1\cdot1+1\cdot3+D|}{\sqrt{9+1+1}}=\frac{|3\cdot0-1\cdot3+1\cdot(-1)+D|}{\sqrt{9+1+1}}\to|8+D|=|-4+D|\to D=-2$$

El plano es $\pi':3x-y+z-2=0$.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 160

Respuesta abierta.

Para calcular la inclinación de la moto, tomamos como referencia dos planos: uno correspondería al suelo y el otro a la moto. Si establecemos como inclinación nula la situación donde la moto está completamente recta y como inclinación de $90°$ cuando la moto está tirada en el suelo, podemos utilizar la teoría de ángulos en el espacio para calcular en cada caso la situación de la moto.

2. Página 160

Si realmente fueran dos planos, podríamos decir que el ángulo que puede tomar la moto es de $[0°,90°)$, pero en la realidad hay otros factores que influyen en la inclinación de la moto, como el volumen y el peso del piloto, el hecho de que la moto realmente no es un plano y tiene volumen, etc.

3. Página 160

En ese caso, la moto está completamente recta. Es decir, tiene una inclinación de $0°$ según nuestras referencias.

4. Página 160

Aplicamos el ángulo de inclinación en cada caso.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=arc\,cos(0{,}94)=19{,}94°\\ \beta=arc\,cos(0{,}86)=30{,}68°\end{array}\right\}\to\text{ El segundo piloto se ha inclinado más.}$$