Sistemas de ecuaciones

3

ACTIVIDADES

1. Página 60

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$5x+3y-z=-1$

Soluciones: 1) $x=2,\ y=-1,\ z=8$ 2) $x=-2,\ y=3,\ z=0$ 3) $x=1,\ y=3,\ z=15$

2. Página 60

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1\\ x+y=2\\ 2x+y+z=4\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} -z=-1\\ x+y=2\\ x+z=2\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} z=1\\ x+y=2\\ x+z=2\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} z=1\\ x+y=2\\ x=1\end{array}\right\}\rightarrow \left\{\begin{array}{l} z=1\\ y=1\\ x=1\end{array}\right.$$

Solución: $x=1,\ y=1,\ z=1$.

3. Página 61

a) Tiene infinitas soluciones. El sistema es compatible indeterminado.

b) No tiene solución. El sistema es incompatible.

c) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y=1\\ 2x-y=3\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} x=1\\ y=-1\end{array}\right\}\rightarrow$ Tiene solución única. El sistema es compatible determinado.

4. Página 61

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1\\ -y+2z=1\\ -x-y+2z=6\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y-z=1\\ -y+2z=1\\ -x=5\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y-z=1\\ -y+2z=1\\ y-z=6\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y-z=1\\ -y+2z=1\\ z=7\end{array}\right\}\rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-5\\ y=13\\ z=7\end{array}\right.$$

5. Página 62

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1\\ 2 & 3 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-y+z=1\\ 2x+3y-z=2\\ -x+2z=3\end{array}\right\}$$

6. Página 62

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y-2z=-1\\ x+3y-z=0\\ -4x+5y+z=3\end{array}\right\}\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ -4 & 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 3\end{pmatrix}$$

7. Página 63

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F'2=F2+F1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F'3=F3-F2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y-2z=1\\ y-z=1\end{array}\right\}\rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1\\ y=1+\lambda\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{F1\leftrightarrow F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=2F3-3F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -7 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-6F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x-2y+z=3 \\ y-z=1 \\ -z=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}\right.$$

8. Página 63

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F1\leftrightarrow F3 \\ F2\leftrightarrow F1 \\ F3\leftrightarrow F2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-2F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3+F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x+z=-4 \\ y+z=-5 \\ z=-3 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-2 \\ z=-3 \end{array}\right.$$

b) $$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F1\leftrightarrow F3 \\ F2\leftrightarrow F4 \\ F3\leftrightarrow F2 \\ F4\leftrightarrow F1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F'3=F3-3F1 \\ F'4=F4+F1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F'3=F3+8F2 \\ F'4=F4-F2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 14 & -30 & -34 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{F'4=7F4+F3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 14 & -30 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 22 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y-2z-t=0 \\ y+z-4t=-4 \\ 14z-30t=-34 \\ 2t=-22 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-19 \\ y=-22 \\ z=-26 \\ t=-11 \end{array}\right.$$

9. Página 64

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F'2=F2+F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sistema compatible indeterminado.

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{F'2=F2+F1} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Sistema compatible determinado.

10. Página 64

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F'1=-F3 \\ F'3=F1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F'2=F2-2F1 \\ F'3=F3+F1 \\ F'4=F4+F1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{F'3=F3+F2 \\ F'4=F4+F2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F'4=2F4+F2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -11 \end{array}\right)$$

Sistema compatible determinado.

11. Página 65

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m-1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F2\leftrightarrow F3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m-1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-2F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m-1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F'2=F2+2F3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m-1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F'1=F1-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & m & 2 & m-5 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F'1=F1+F3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & m-1 & 0 & m-3 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F2\leftrightarrow F3]{F1\leftrightarrow F3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & m-1 & 0 & m-3 \end{array}\right)$$

Si $m=1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $m \neq 1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & m-1 & 0 & m-3 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r} x-z=4 \\ -y-2z=2 \\ (m-1)y=m-3 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{5m-3}{2(m-1)} \\ y=\dfrac{m-3}{m-1} \\ z=\dfrac{5-3m}{2(m-1)} \end{array}\right.$$

12. Página 65

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 4 \\ m & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[F'2=F2-F3]{F'1=F1-F3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & m-3 & 0 & -1 \\ m-1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Si $m=3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -1 \\ m-1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $m=1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F'2=F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} 2y=1 \\ x+3y+z=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{7}{2}-z \end{array}\right\}$$

Si $m \neq 3, m \neq 1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & m-3 & 0 & -1 \\ m-1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r} (m-3)y=-1 \\ (m-1)x-2y=-1 \\ x+3y+z=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3-m} \\ y=\dfrac{1}{3-m} \\ z=\dfrac{11-5m}{3-m} \end{array}\right.$$

13. Página 66

a) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -2 & 2\\ 3 & 0 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 3 & 1\end{array}\right)$

En A^*, la tercera fila es la segunda fila menos la primera.

$|A|=0$ $\qquad \begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=3\neq 0\rightarrow$ Rango $(A)=2\rightarrow$ Rango $(A^*)=2$

Rango (A) = Rango (A^*) < N.º de incógnitas → Sistema compatible indeterminado.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -2 & 2\\ 3 & 0 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 3 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F'3=F3-2F1]{F'2=F2-3F1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -2 & 2\\ 0 & 3 & 7 & -3\\ 0 & 3 & 7 & -3\end{array}\right)\xrightarrow{F'3=F3-F2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -2 & 2\\ 0 & 3 & 7 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r}x-y-2z=2\\ 3y+7z=-3\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=1-\dfrac{z}{3}\\ y=-1-\dfrac{7z}{3}\end{array}\right\}$$

b) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & -2 & -7\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0 & 0\\ 1 & -2 & -7 & 0\end{array}\right)$

$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix}=-3\neq 0\rightarrow$ Rango $(A)=3$

$|A^*|=-28\rightarrow$ Rango $(A^*)=4$

Rango (A) ≠ Rango $(A^*)=4$ → Sistema incompatible.

14. Página 66

$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{cccc|c}2 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0\\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4\end{array}\right)$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\ 3 & -2 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=0$$

$\begin{vmatrix}-3 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=-4\neq 0\rightarrow$ Rango $(A)=3$

$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ -3 & 1 & -1 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 0 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -1 & 3\end{vmatrix}=0\rightarrow$ Rango $(A^*)=3$

Rango (A) = Rango (A^*) < N.º de incógnitas → Sistema compatible indeterminado.

15. Página 67

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

En A^*, la tercera fila es la suma de la segunda fila más la primera.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-4\neq 0\rightarrow \text{ Rango } (A)=3 \ \rightarrow \ \text{Rango } (A^*)=3$$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

16. Página 67

a) Respuesta abierta. Por ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 2x+2y-z=1 \\ -x-y+z=3 \\ x-y-z=3 \end{array}\right\}$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 2x+2y-z=1 \\ -x-y+z=3 \\ -2x-2y+2z=6 \end{array}\right\}$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 2x+2y-z=1 \\ -x-y+z=3 \\ -x-y+z=1 \end{array}\right\}$

17. Página 68

a) El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0\rightarrow \text{ Se puede aplicar la regla de Cramer.}$$

b) El número de ecuaciones no es el mismo que el número de incógnitas; por tanto, no se puede aplicar la regla de Cramer.

18. Página 68

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+y=0 \\ y+z=0 \end{array}\right\}$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=4 \\ x+y-z-t=0 \\ 2x+y-z=2 \\ y-z-t=3 \end{array}\right\}$$

19. Página 69

El número de ecuaciones el igual al número de incógnitas.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \to \text{ Se puede aplicar la regla de Cramer.}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7 \to x = \frac{|A_x|}{|A|} = 1$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \to y = \frac{|A_y|}{|A|} = 2$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -7 \to z = \frac{|A_z|}{|A|} = 1$$

20. Página 69

El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \to \text{ Se puede aplicar Cramer.}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 \\ -8 & -3 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -9 & 1 \\ 0 & -11 & 17 & -2 \\ 0 & -6 & 8 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -9 & 1 \\ -11 & 17 & -2 \\ -6 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & -8 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 20 & -3 & 5 \\ -1 & -8 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & -3 & 5 \\ -4 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & -11 & -2 \\ 0 & -2 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -1 & -11 & -2 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A_t| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & -8 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -3 & 20 \\ -1 & -3 & 1 & -8 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 20 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 42$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 0 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = -\frac{1}{3} \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{1}{3} \qquad t = \frac{|A_t|}{|A|} = \frac{14}{3}$$

21. Página 70

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 3z \\ x - y &= 1 - 4z \end{aligned}\right\}$$

$|A_x| = \begin{vmatrix} 3z & 2 \\ 1-4z & -1 \end{vmatrix} = 5z - 2 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 3z \\ 1 & 1-4z \end{vmatrix} = 3 - 15z$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{5z-2}{-5} = \dfrac{2-5z}{5} \qquad y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{3-15z}{-5} = \dfrac{15z-3}{5}$

La solución es: $x = \dfrac{2-5\lambda}{5},\ y = \dfrac{15\lambda-3}{5},\ z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= z \\ x - y &= 1 - z \end{aligned}\right\}$$

$|A_x| = \begin{vmatrix} z & 1 \\ 1-z & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & 1-z \end{vmatrix} = 1 - 2z$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{1}{2} \qquad y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{1-2z}{-2} = \dfrac{2z-1}{2}$

La solución es: $x = \dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{2\lambda-1}{2},\ z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

22. Página 70

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango } (A) < 4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -4 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F'4=2F4-3F1]{\substack{F'2=2F2+F1 \\ F'3=2F3-F1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F'3=F3-F2 \\ F'4=F4+F2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y&=4+3z-2t \\ -x-3y&=-z+2t \end{aligned}\right\}$$

$$|A_x|=\begin{vmatrix} 4+3z-2t & 1 \\ -z+2t & -3 \end{vmatrix}=-12-8z+4t \rightarrow x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{12+8z-4t}{5}$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix} 2 & 4+3z-2t \\ -1 & -z+2t \end{vmatrix}=4+z+2t \rightarrow y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{-4-z-2t}{5}$$

La solución es: $x=\dfrac{12+8\lambda-4\mu}{5}, y=\dfrac{-4-\lambda-2\mu}{5} z=\lambda, t=\mu$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

23. Página 71

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}=41 \rightarrow$ Rango (A) = 3 = N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Solución: $x=0, y=0, z=0$.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=0 \rightarrow$ Rango (A) < N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y&=2z \\ 2x+3y&=-2z \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=4\neq 0 \qquad \left.\begin{aligned} 2x+y&=2z \\ 2x+3y&=-2z \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x&=2z \\ y&=-2z \end{aligned}\right.$$

La solución es: $x=2\lambda, y=-2\lambda, z=\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

24. Página 71

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y-2z+t&=0 \\ 2x+3y+2z&=0 \\ x+3y+4z-t&=0 \\ x-2y+t&=0 \end{aligned}\right] \rightarrow \left\{\begin{aligned} x&=0 \\ y&=0 \\ z&=0 \\ t&=0 \end{aligned}\right.$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+t&=0 \\ 2x+4y+2z&=0 \\ x+2y+z&=0 \\ 2y+t&=0 \end{aligned}\right] \rightarrow \left\{\begin{aligned} x&=-\frac{1}{5}\lambda \quad z=\lambda \\ y&=-\frac{2}{5}\lambda \quad t=\frac{4}{5}\lambda \end{aligned}\right.$$

25. Página 72

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & m \end{vmatrix}=4-2m$$

Si $m\neq 2 \rightarrow |A|\neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A*) = 3 = N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m=2 \rightarrow |A|=0$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-2\neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = 2 $\qquad$ $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix}=2\neq 0 \rightarrow$ Rango (A*) = 3

Rango (A) ≠ Rango (A*) $\rightarrow$ Sistema incompatible.

26. Página 72

El sistema es homogéneo → Rango (A) = Rango (A*) → Sistema compatible.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -a & -3 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 7a + 63$$

Si $a \neq -9 \to |A| \neq 0 \to$ Rango (A) = 3 = N.º de incógnitas → Sistema compatible determinado.

Si $a = -9 \to |A| = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \to$ Rango (A) = 2 < N.º de incógnitas → Sistema compatible indeterminado.

27. Página 73

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & m \end{vmatrix} = -2m + 4$$

Si $m \neq 2 \to |A| \neq 0 \to$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2m & -2 & 2 \\ -4 & -2 & m \end{vmatrix} = -2m^2 + 6m - 4 = -2(1-m)(2-m)$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 2m & 2 \\ -3 & -4 & m \end{vmatrix} = -2(m^2 + m - 7)$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2m \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 22 - 10m$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-2(1-m)(2-m)}{4-2m} = -1 + m$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-2(m^2+m-7)}{4-2m} = \frac{m^2+m-7}{m-2}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{22-10m}{4-2m} = \frac{5m-11}{m-2}$$

Si $m = 2 \to |A| = 0$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \to$ Rango (A) = 2

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \to$ Rango (A*) = 3

Rango (A) ≠ Rango (A*) → Sistema incompatible.

28. Página 73

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -a & -3 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 7a + 63$$

Si $a \neq -9 \to |A| \neq 0 \to$ Rango (A) = 3 = N.º de incógnitas → Sistema compatible determinado.

Como el sistema es homogéneo: $x = 0, y = 0, z = 0$.

Si $a = -9 \to |A| = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \to$ Rango (A) = 2 < N.º de incógnitas → Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = -z \\ x + 9y = 3z \end{array}\right\}$.

$|A_x| = \begin{vmatrix} -z & -3 \\ 3z & 9 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad$ $|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -z \\ 1 & 3z \end{vmatrix} = 7z$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = 0$ $\qquad$ $y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{7z}{21} = \dfrac{z}{3}$

La solución es: $x = 0, y = \dfrac{\lambda}{3}, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

SABER HACER

29. Página 74

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Escribimos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 5a+2c = 5a+2b \\ 2a+5c = 7c \\ 5b+2c = 2a+5b \\ 2b+5c = 7c \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 2c = 2b \\ 2a = 2c \end{array}\right\} \to a = b = c$$

Luego $B = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

30. Página 74

$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\3 & 2 & 1\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0 \to$ No existe A^{-1}.

El sistema que tenemos es: $\left.\begin{array}{r}2x+y=1\\3x+2y+z=1\\x+y+z=0\end{array}\right\}$

Como sabemos que es un sistema compatible indeterminado, consideramos el sistema:

$\left.\begin{array}{l}2x+y=1\\3x+2y=1-z\end{array}\right\}\to\begin{cases}x=z+1\\y=-2z-1\end{cases}\to$ Soluciones: $x=\lambda+1, y=-2\lambda-1, z=\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

31. Página 75

Si llamamos:

x = N.º de billetes de 10 € $\quad$ y = N.º de billetes de 20 € $\quad$ z = N.º de billetes de 50 €

Obtenemos el sistema: $\left.\begin{array}{r}x+y+z=130\\10x+20y+50z=3000\\x-2z=0\end{array}\right\}$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 130\\10 & 20 & 50 & 3000\\1 & 0 & -2 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[F'2=F2-10F3]{F'1=F1-F3}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 3 & 130\\0 & 20 & 70 & 3000\\1 & 0 & -2 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{F'2=F2-20F1}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 3 & 130\\0 & 0 & 10 & 400\\1 & 0 & -2 & 0\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{F'2=F2:10}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 3 & 130\\0 & 0 & 1 & 40\\1 & 0 & -2 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[F'3=F3+2F2]{F'1=F1-3F2}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 0 & 10\\0 & 0 & 1 & 40\\1 & 0 & 0 & 80\end{array}\right)\to\begin{cases}x=80\\y=10\\z=40\end{cases}$$

32. Página 75

a) $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\1 & 1 & -1\\1 & 0 & -1\end{vmatrix}=0\to\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0\to$ Rango (A) = 2

Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < N.º de incógnitas $\to$ Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r}x+2y=1+z\\x=1+z\end{array}\right\}\to\begin{cases}x=1+z\\y=0\end{cases}$

Soluciones: $x=1+\lambda, y=0, z=\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

b) $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\1 & 1 & -1\\1 & -2 & -1\end{vmatrix}=6\to$ Rango (A) = 3

Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas $\to$ Sistema compatible determinado.

$|A_x|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\1 & 1 & -1\\1 & -2 & -1\end{vmatrix}=6\to x=\dfrac{|A_x|}{|A|}=\dfrac{6}{6}=1$ $\qquad$ $|A_y|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\1 & 1 & -1\\1 & 1 & -1\end{vmatrix}=0\to y=\dfrac{|A_y|}{|A|}=0$

$|A_z|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & -2 & 1\end{vmatrix}=0\to z=\dfrac{|A_z|}{|A|}=0$

Solución: $x=1, y=0, z=0$.

33. Página 76

$$\begin{vmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4 = (m+2)(m-2)$$

Si $m = 2 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow$ Rango (A) = 1

Rango (A) = Rango (A*) = 1 < N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$2x = 4 - 2y\} \rightarrow x = 2 - y\}$

Solución: $x = 2 - \lambda, y = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $m = -2 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow$ Rango (A) = 1

Pero $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \rightarrow$ Rango (A*) = 2

Rango (A) ≠ Rango (A*) $\rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $m \neq 2,\ m \neq -2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = 2

Rango (A) = Rango (A*) = 2 = N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2m & 2 \\ m+2 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - 2m - 4 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{2m^2 - 2m - 4}{m^2 - 4} = \frac{2m+2}{m+2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} m & 2m \\ 2 & m+2 \end{vmatrix} = m^2 - 2m \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{m^2 - 2m}{m^2 - 4} = \frac{m}{m+2}$$

34. Página 76

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1+2m \\ 0 & 2 & m^2 \end{vmatrix} = -2m^2 + 4m + 6 \rightarrow -2(m-3)(m+1)$$

Si $m = 3 \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A*) = 2 $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x - y = 1 - z \\ -x + 2y = 7 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 9 - 2z \\ y = 8 - z \end{array}\right.$

Soluciones: $x = 9 - 2\lambda, y = 8 - \lambda, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $m = -1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A*) = 2 $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x - y = 1 - z \\ -x + 2y = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - 2z \\ y = -z \end{array}\right.$

Soluciones: $x = 1 - 2\lambda, y = -\lambda, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $m \neq 3, m \neq -1 \rightarrow$ Rango (A*) = 3

Rango (A) ≠ Rango (A*) $\rightarrow$ Sistema incompatible.

35. Página 77

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & m-3 \\ -m & -1 & 4 & m-1 \\ m & 0 & 1 & 2m+1 \end{array}\right)$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} m & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & m-3 \\ -m & -1 & 4 & m-1 \\ m & 0 & 1 & 2m+1 \end{vmatrix} \xrightarrow[F'3=F3+F1]{F'2=F2+F1} \begin{vmatrix} m & 1 & -2 & 1 \\ m & 0 & -5 & m-2 \\ 0 & 0 & 2 & m \\ m & 0 & 1 & 2m+1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} m & -5 & m-2 \\ 0 & 2 & m \\ m & 1 & 2m+1 \end{vmatrix} = -6m+4m^2 = 2m(2m-3)$$

Si $m \neq 0,\ m \neq \dfrac{3}{2} \rightarrow$ Rango $(A^*) = 4$

Rango $(A) \neq$ Rango (A^*) $\rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $m = 0 \rightarrow |A^*| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

Rango $(A) \neq$ Rango (A^*) $\rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $m = \dfrac{3}{2} \rightarrow |A^*| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 4 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\dfrac{13}{2} \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 3$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 4 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 4 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 3$$

Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Consideramos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{3}{2}x + y - 2z = 1 \\ -y - 3z = -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2}x - y + 4z = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{13}{6} \\ y = -\frac{3}{4} \\ z = \frac{3}{4} \end{array}\right.$$

36. Página 77

$$A=\begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to |A|=\begin{vmatrix} m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=m^2-3m=m(m-3)$$

Si $m\neq 0, m\neq 3 \to$ Rango (A) = 3

Rango (A) = Rango (A*) = 3 = N.º de incógnitas $\to$ Sistema compatible determinado.

Al ser un sistema homogéneo, solución: $x=0, y=0, z=0$.

Si $m=0 \to A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to$ Rango (A) = 2

Rango (A) = Rango (A*) = 2 < N.º de incógnitas $\to$ Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2z=0 \\ x=y-z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} z=0 \\ x=y \end{array}\right\}$

Si $m=3 \to A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |A|=0 \to \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=9\neq 0 \to$ Rango (A) = 2

Rango (A) = Rango (A*) = 2 < N.º de incógnitas $\to$ Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{l} 3x=-2z \\ 3y=z \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{2z}{3} \\ y=\dfrac{z}{3} \end{array}\right.$

Solución: $x=-\dfrac{2\lambda}{3}, y=\dfrac{\lambda}{3}, z=\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

ACTIVIDADES FINALES

37. Página 78

a) $\left.\begin{array}{r} 3x-2y=5 \\ -5x+3y=-11 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=7 \\ y=8 \end{array}\right. \to$ Sistema compatible determinado.

b) $\left.\begin{array}{r} 6x-9y=15 \\ -8x+12y=-20 \end{array}\right\} \to 6x-9y=15 \to x=\dfrac{5+3y}{2} \to$ Sistema compatible indeterminado.

Solución: $x=\dfrac{5+3\lambda}{2}, y=\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

c) $\left.\begin{array}{r} -3x+9y=3 \\ 2x-6y=-1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -3x+9y=3 \\ 0=3 \end{array}\right\} \to$ Sistema incompatible.

d) $\left.\begin{array}{r} 2x-y-z=1 \\ 2y+z=0 \\ -x+3y-2z=7 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \\ z=-2 \end{array}\right. \to$ Sistema compatible determinado.

e) $\left.\begin{array}{r}3x+y-z=5\\-x+3y+2z=0\\x+7y+3z=5\end{array}\right\}\xrightarrow{F'3=F3-2F2}\left.\begin{array}{r}3x+y-z=5\\-x+3y+2z=0\\3x+y-z=5\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}3x+y=5+z\\-x+3y=-2z\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{z+3}{2}\\y=\dfrac{1-z}{2}\end{array}\right.$

Sistema compatible indeterminado.

Solución: $x=\dfrac{3+\lambda}{2}, y=\dfrac{1-\lambda}{2}, z=\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

f) $\left.\begin{array}{r}2x-y+3z=3\\-x+y-2z=4\\x+z=5\end{array}\right\}\xrightarrow[F'2=F2+F3]{F'1=F1-2F3}\left.\begin{array}{r}-y+z=-7\\+y-z=9\\x+z=5\end{array}\right\}\xrightarrow{F'2=F2+F1}\left\{\begin{array}{r}-y+z=-7\\0=2\\x+z=5\end{array}\right.\rightarrow$ Sistema incompatible.

38. Página 78

Respuesta abierta, por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r}2x-y=-4\\-x+3y=7\\x+2y=3\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-1\\y=2\end{array}\right.$$

39. Página 78

Respuesta abierta, por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r}x-y-z=3\\2x+2y-z=1\\-2x-3y+z=0\\x-2y-z=4\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\y=-1\\z=-1\end{array}\right.$$

40. Página 78

a) $\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&5&1\\4&7&13&-1\\2&3&-7&-3\end{array}\right)\xrightarrow[F'3=F3-F1]{F'2=F2-2F1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&5&1\\0&1&3&-3\\0&0&-12&-4\end{array}\right)\rightarrow\left.\begin{array}{r}2x+3y+5z=1\\y+3z=-3\\-12z=-4\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=17/3\\y=-4\\z=1/3\end{array}\right.$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\1&1&-1&1\\2&3&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[F'3=F3-2F1]{F'2=F2-F1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-1&-2&0\\0&-1&-1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{F'3=F3-F2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-1&-2&0\\0&0&1&-1\end{array}\right)\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y+z=1\\-y-2z=0\\z=-1\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-2\\y=2\\z=-1\end{array}\right.$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c}5&2&3&5\\-1&3&-2&12\\1&1&1&2\end{array}\right)\xrightarrow{F3\leftrightarrow F1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\-1&3&-2&12\\5&2&3&5\end{array}\right)\xrightarrow[F'3=F3-5F1]{F'2=F2+F1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&4&-1&14\\0&-3&-2&-5\end{array}\right)\xrightarrow{F'3=4F3+3F2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&4&-1&14\\0&0&-11&22\end{array}\right)$

$$\left.\begin{array}{r}x+y+z=2\\4y-z=14\\-11z=22\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\y=3\\z=-2\end{array}\right.$$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c}0&3&1&3\\3&4&0&11\\-2&0&2&-8\end{array}\right)\xrightarrow{F2\leftrightarrow F1}\left(\begin{array}{ccc|c}3&4&0&11\\0&3&1&3\\-2&0&2&-8\end{array}\right)\xrightarrow{F'3=3F3+2F1}\left(\begin{array}{ccc|c}3&4&0&11\\0&3&1&3\\0&8&6&-2\end{array}\right)\xrightarrow{F'3=3F3-8F2}\left(\begin{array}{ccc|c}3&4&0&11\\0&3&1&3\\0&0&10&-30\end{array}\right)$

$$\left.\begin{array}{r}3x+4y=11\\3y+z=3\\10z=-30\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\y=2\\z=-3\end{array}\right.$$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F'2=F3-F1]{F'2=F2-F1} \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-4F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -8 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y-z=-1 \\ y+3z=3 \\ -10z=-8 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{3}{5} \\ z=\dfrac{4}{5} \end{cases}$

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 12 \\ 3 & 0 & 2 & 7 \\ 5 & -6 & 4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3=F3+5F1]{F'2=F2+3F1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 9 & -1 & 43 \\ 0 & 9 & -1 & 65 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 9 & -1 & 43 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible.

g) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 19 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{F1 \Leftrightarrow F2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 19 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3=F3+3F1]{F'2=F2+3F1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 17 & 1 \\ 0 & 10 & 34 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-2F1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\left.\begin{array}{r} -x+2y+5z=-2 \\ 5y+17z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{12-9z}{5} \\ y=\dfrac{1-17z}{5} \end{cases}$

Solución: $x=\dfrac{12-9\lambda}{5}, y=\dfrac{1-17\lambda}{5}, z=\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

h) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -1 & -7 \\ -3 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & -3 & -8 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{-F3 \leftrightarrow F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & 12 \\ -3 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & -4 & -1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3=F3-2F1]{F'2=F2+3F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & 12 \\ 0 & 11 & 21 & 32 \\ 0 & -10 & -17 & -31 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=11F3+10F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & 12 \\ 0 & 11 & 21 & 32 \\ 0 & 0 & 23 & -21 \end{array}\right)$

$\left.\begin{array}{r} a+3b+8c=12 \\ 11b+21c=32 \\ 23c=-21 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{123}{23} \\ b=\dfrac{107}{23} \\ c=-\dfrac{21}{23} \end{cases}$

41. Página 78

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 9 \\ -4 & 2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{F'2=3F2+2F1} \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

b) $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F'2=F2+2F1} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 5 & -5 & 4 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3=F3-5F1]{F'2=F2-2F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-2F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

d) $\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & -8 \\ 6 & -3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F'2=2F2+3F1} \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -14 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible.

e) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F1 \leftrightarrow F2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F'2=2F2-3F1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3=2F3-5F1]{F'2=2F2-3F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -13 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible.

42. Página 78

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 6 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{F'2=F2+2F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y-2z=1 \\ 2z=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} z=\dfrac{-1}{2} \\ y=-2x \end{array}\right.$$

Las soluciones son de la forma $\left(a, -2a, -\dfrac{1}{2}\right)$.

43. Página 78

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+y=3 \\ y-2z=2 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F'2=F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-2F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5 \\ y=-2 \\ z=-2 \end{array}\right.$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+y=3 \\ 2x+2y+z=4 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3=F3-2F1]{F'2=F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ z=-2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3-y \\ z=-2 \end{array}\right.$$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+y=3 \\ -z=-4 \end{array}\right\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F'2=F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

44. Página 78

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-2y-z=1 \\ x-y+2z=1 \\ 3x-3y-4z=1 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3=2F3-3F1]{F'2=2F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3+F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-2y-z=1 \\ 5z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=y+\dfrac{3}{5} \\ z=\dfrac{1}{5} \end{array}\right.$$

45. Página 78

a) Respuesta abierta. Por ejemplo: $\left.\begin{array}{r} x-y+3z=9 \\ -2x+y+2z=9 \\ x-y+3z=2 \end{array}\right\}$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo: $\left.\begin{array}{r} x-y+3z=9 \\ -2x+y+2z=9 \\ -x+5z=18 \end{array}\right\}$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 9 \\ -2 & 1 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 5 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3=F3+F1]{F'2=F2+2F1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 8 & 27 \\ 0 & -1 & 8 & 27 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-F2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 8 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=9-3z \\ -y=27-8z \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5z-18 \\ y=8z-27 \end{array}\right.$$

Solución: $x=5\lambda-18, y=8\lambda-27, z=\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

46. Página 78

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix}=1-5m$$

Si $m=\frac{1}{5}\rightarrow |A|=0\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-5\neq 0\rightarrow$ Rango (A) = 2

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-9\rightarrow$ Rango (A*) = 3

Rango (A) ≠ Rango (A*) → Sistema indeterminado.

Si $m\neq\frac{1}{5}\rightarrow |A|\neq 0\rightarrow$ Rango (A) = 3

Rango (A) = Rango (A*) = 3 = N.º de incógnitas → Sistema compatible determinado.

47. Página 78

Tenemos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 3x-y+z=5 \\ -2x+3y+z=-8 \\ 4x+y+az=b \end{array}\right\}$

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix}=7a-21$$

Como queremos que sea compatible indeterminado: $|A|=0\rightarrow 7a-21=0\rightarrow a=3$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -8 \\ 4 & 1 & b \end{vmatrix}=7b-14$$

Para que sea indeterminado, necesitamos que Rango (A*) < 3 $\rightarrow 7b-14=0\rightarrow b=2$.

Solución: $a=3, b=2$.

48. Página 78

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned}3x-2y+z&=5\\2x-3y+z&=-4\\2x-3y+z&=1\end{aligned}\right\}$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned}3x-2y+z&=5\\2x-3y+z&=-4\\5x-5y+3z&=1\end{aligned}\right\}$$

49. Página 78

$$|A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & 0\end{vmatrix}=-cb\rightarrow|A|=-6\rightarrow-cb=-6\rightarrow cb=6$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+3b & 2a+4b\\ c & 2c\end{pmatrix}\qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c & b\\ 3a+4c & 3b\end{pmatrix}$$

Si $A\cdot B=B\cdot A\rightarrow\begin{pmatrix}a+3b & 2a+4b\\ c & 2c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c & b\\ 3a+4c & 3b\end{pmatrix}\rightarrow\left.\begin{aligned}a+3b&=a+2c\\2a+4b&=b\\c&=3a+4c\\2c&=3b\end{aligned}\right\}\rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{3b}{2}\\ b=\dfrac{2c}{3}\end{cases}$

Como sabemos que $cb=6$: $\left.\begin{aligned}a&=-\frac{3b}{2}\\b&=\frac{2c}{3}\\cb&=6\end{aligned}\right\}$ Si $c=+3$, $b=+2$ y $a=-3$. Si $c=-3$, $b=-2$ y $a=+3$.

Soluciones: $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -3 & 0\end{pmatrix}$ o $A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.

50. Página 78

a) $\left.\begin{aligned}2x+3y+5z&=3\\x+2y-z&=-1\end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned}-2x+2y+z&=2\\x-y+3z&=0\\2x-y&=1\end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned}a+4b&=-1\\2a+3b&=4\\a+5b&=2\\-6a+7b&=5\end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned}x+2y+z&=1\\2x-z&=2\\-2x+y+z&=3\\3x+2y&=4\end{aligned}\right\}$

51. Página 79

a) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p\\ q\\ r\\ s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 5\\ -1\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -3 & 0 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 8\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 0 & 3 & -9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -7\\ 5\\ -1\end{pmatrix}$

52. Página 79

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ -13 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 36 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 13 & 14 & 5 \\ -4 & 4 & 4 \\ 11 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 13 & 14 & 5 \\ -4 & 4 & 4 \\ 11 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ -13 \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 144 \\ 0 \\ -108 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

53. Página 79

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 6 & -5 \\ 4 & 9 & -10 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & -8 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 4 & 9 & -10 & -8 \end{array}\right)$

$|A| = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 9 & -8 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

b) $A=\begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 10 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right)$

$|A|=-14\neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

c) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -6 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 6 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0$ $\qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-5\neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = 2 $\qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 6 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix}=110\neq 0 \rightarrow$ Rango (A^*) = 3

Rango (A) ≠ Rango (A^*) $\rightarrow$ Sistema incompatible.

d) $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 7 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=12\neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = 2 $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 7 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 12 & 3 & 12 \\ 0 & 8 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}=0$

Rango (A^*) = 2

Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

54. Página 79

a) $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_x|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-3$ $\qquad |A_y|=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}=4$

$x=\dfrac{|A_x|}{|A|}=3$ $\qquad y=\dfrac{|A_y|}{|A|}=-4$

b) $|A|=\begin{vmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{vmatrix}=1\neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_a|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}=-1$ $\quad |A_b|=\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}=-5$ $\quad |A_c|=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -1\end{vmatrix}=7$

$a=\dfrac{|A_a|}{|A|}=-1$ $\quad b=\dfrac{|A_b|}{|A|}=-5$ $\quad c=\dfrac{|A_c|}{|A|}=7$

c) $|A|=\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 5\end{vmatrix}=7\neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_a|=\begin{vmatrix}6 & -3\\ -3 & 5\end{vmatrix}=21$ $\quad |A_b|=\begin{vmatrix}2 & 6\\ -1 & -3\end{vmatrix}=0$

$a=\dfrac{|A_a|}{|A|}=3$ $\quad b=\dfrac{|A_b|}{|A|}=0$

d) $|A|=\begin{vmatrix}3 & 5 & -2\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=26\neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_x|=\begin{vmatrix}33 & 5 & -2\\ 19 & 1 & 0\\ 10 & 2 & -3\end{vmatrix}=130$ $\quad |A_y|=\begin{vmatrix}3 & 33 & -2\\ 3 & 19 & 0\\ 1 & 10 & -3\end{vmatrix}=104$ $\quad |A_z|=\begin{vmatrix}3 & 5 & 33\\ 3 & 1 & 19\\ 1 & 2 & 10\end{vmatrix}=26$

$x=\dfrac{|A_x|}{|A|}=5$ $\quad y=\dfrac{|A_y|}{|A|}=4$ $\quad z=\dfrac{|A_z|}{|A|}=1$

55. Página 79

a) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -3 & 1 & -2\\ 2 & -3 & 1\end{vmatrix}=0$ $\quad \begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & 1\end{vmatrix}=7\neq 0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=6-z\\ -3x+y=-3+2z\end{array}\right\}$

$|A_x|=\begin{vmatrix}6-z & 2\\ -3+2z & 1\end{vmatrix}=12-5z$ $\quad |A_y|=\begin{vmatrix}1 & 6-z\\ -3 & -3+2z\end{vmatrix}=15-z$

$x=\dfrac{|A_x|}{|A|}=\dfrac{12-5z}{7}$ $\quad y=\dfrac{|A_y|}{|A|}=\dfrac{15-z}{7}$

La solución es: $x=\dfrac{12-5\lambda}{7}, y=\dfrac{15-\lambda}{7}, z=\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

b) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=2\neq 0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=4-t\\ x-y+z=1\\ y-z=1-t\end{array}\right\}$

$|A_x|=\begin{vmatrix}4-t & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1-t & 1 & -1\end{vmatrix}=4-2t \rightarrow x=\dfrac{|A_x|}{|A|}=2-t$ $\quad |A_y|=\begin{vmatrix}1 & 4-t & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1-t & -1\end{vmatrix}=3-t \rightarrow y=\dfrac{|A_y|}{|A|}=\dfrac{3-t}{2}$

$|A_z|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 4-t\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1-t\end{vmatrix}=1+t \rightarrow z=\dfrac{|A_z|}{|A|}=\dfrac{1+t}{2}$

La solución es: $x=2-\lambda, =\dfrac{3-\lambda}{2}, =\dfrac{1+\lambda}{2}, t=\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 11 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 11 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a - b = 0 \\ 11a - b = 3c \end{array}\right\}$

$|A_a| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3c & -1 \end{vmatrix} = 3c$ $\qquad$ $|A_b| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 11 & 3c \end{vmatrix} = 6c$

$a = \dfrac{|A_a|}{|A|} = \dfrac{c}{3}$ $\qquad$ $b = \dfrac{|A_b|}{|A|} = \dfrac{2c}{3}$

La solución es: $a = \dfrac{\lambda}{3}, b = \dfrac{2\lambda}{2}, c = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ -6 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3p - 3q = -11r \\ 4p = -7r \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} p = -\dfrac{7r}{4} \\ q = \dfrac{23r}{12} \end{array}\right.$

La solución es: $p = -\dfrac{7}{4}\lambda, q = \dfrac{23}{12}\lambda, = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

56. Página 79

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 3$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$|A_x| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12$ $\qquad$ $|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -12$ $\qquad$ $|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = -4$ $\qquad$ $y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = 4$ $\qquad$ $z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = -1$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x+y=3-2z \\ 2y=2-3z \end{array}\right\}$

$|A_x|=\begin{vmatrix} 3-2z & 1 \\ 2-3z & 2 \end{vmatrix}=4-z$ $\qquad |A_y|=\begin{vmatrix} 1 & 3-2z \\ 0 & 2-3z \end{vmatrix}=2-3z$

$x=\dfrac{|A_x|}{|A|}=\dfrac{4-z}{2}$ $\qquad y=\dfrac{|A_y|}{|A|}=\dfrac{2-3z}{2}$

La solución es: $x=\dfrac{4-\lambda}{2}, y=\dfrac{2-3\lambda}{2}, z=\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=0$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0\rightarrow$ Rango $(A)=2$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}=2\neq 0\rightarrow$ Rango $(A^*)=3$

Rango $(A)\neq$ Rango (A^*) $\rightarrow$ Sistema incompatible.

d) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}=0$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=5\neq 0\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=2<$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x-y=-t \\ x+2y=-1+z-4t \end{array}\right\}$

$|A_x|=\begin{vmatrix} -t & -1 \\ -1+z-4t & 2 \end{vmatrix}=-1+z-6t$ $\qquad |A_y|=\begin{vmatrix} 2 & -t \\ 1 & -1+z-4t \end{vmatrix}=-2+2z-7t$

$x=\dfrac{|A_x|}{|A|}=\dfrac{-1+z-6t}{5}$ $\qquad y=\dfrac{|A_y|}{|A|}=\dfrac{-2+2z-7t}{5}$

La solución es: $x=\dfrac{-1+\lambda-6\mu}{5}, y=\dfrac{-2+2\lambda-7\mu}{5}, z=\lambda, t=\mu$ con $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

57. Página 79

a) $A=\begin{pmatrix} 2m & -3 \\ -6 & m \end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{cc|c} 2m & -3 & -3 \\ -6 & m & m \end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix} 2m & -3 \\ -6 & m \end{vmatrix}=2m^2-18=2(m-3)(m+3)$

Si $m\neq 3,\ m\neq -3\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=2=$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m=3\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=1<$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Si $m=-3\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=1<$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

b) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -m\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & m\\ 1 & 1 & -m & m\\ 2 & 3 & 1 & m\end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -m\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=-m$

Si $m=0\to|A|=0$ $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0\to$ Rango (A) = 2

Rango (A) = Rango (A*) = 2 < N.º de incógnitas $\to$ Sistema compatible indeterminado.

Si $m\neq 0\to$ Rango (A) = Rango (A*) = 3 = N.º de incógnitas $\to$ Sistema compatible determinado.

c) $A=\begin{pmatrix}1 & m & -1\\ 2 & 1 & m\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & m & -1 & 2\\ 2 & 1 & m & 0\\ 1 & 1 & -1 & m^2\end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix}1 & m & -1\\ 2 & 1 & m\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=m^2+m-2=(m+2)(m-1)$

$\begin{vmatrix}m & -1 & 2\\ 1 & m & 0\\ 1 & -1 & m^2\end{vmatrix}=m^4+m^2-2m-2$

Si $m\neq -2, m\neq 1\to$ Rango (A) = Rango (A*) = 3 = N.º de incógnitas $\to$ Sistema compatible determinado.

Si $m=-2\to|A|=0$ $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0\to$ Rango (A) = 2

Rango (A) ≠ Rango (A*) = 3 $\to$ Sistema compatible indeterminado.

Si $m=1\to|A|=0$ $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0\to$ Rango (A) = 2

Rango (A) ≠ Rango (A*) = 3 $\to$ Sistema compatible indeterminado.

d) $A=\begin{pmatrix}m+3 & 2\\ 2 & m\end{pmatrix}$ $A^*=\left(\begin{array}{cc|c}m+3 & 2 & m+1\\ 2 & m & m\end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix}m+3 & 2\\ 2 & m\end{vmatrix}=m^2+3m-4=(m-1)(m+4)$

$\begin{vmatrix}2 & m+1\\ m & m\end{vmatrix}=m-m^2$ $\begin{vmatrix}m+3 & m+1\\ 2 & m\end{vmatrix}=m^2+m-2$

Si $m\neq 1, m\neq -4\to|A|\neq 0\to$ Rango (A) = Rango (A*) = 2 = N.º de incógnitas $\to$ Sistema compatible determinado.

Si $m=1\to$ Rango (A) = 1 $\to$ Rango (A) = Rango (A*) = 1 < N.º de incógnitas $\to$ Sistema compatible indeterminado.

Si $m=-4\to$ Rango (A) = 1 $\to$ Rango (A*) = 2 ≠ Rango (A) $\to$ Sistema incompatible.

e) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ m & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 3\\ m & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ m & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=m-1$

Si $m\neq 1\rightarrow |A|\neq 0\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 2 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado.

Si $m=1\rightarrow |A|=0$ $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2\neq 0\rightarrow$ Rango (A) = 2

$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0\rightarrow$ Rango (A^*) = Rango (A) = 2 < N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible indeterminado.

f) $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & m\\ -1 & m & 2\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 0 & m & 1\\ -1 & m & 2 & m\\ 2 & 0 & 2 & 1\end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix}3 & 0 & m\\ -1 & m & 2\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=6m-2m^2=2m(3-m)$

Si $m\neq 0, m\neq 3\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible indeterminado.

Si $m=0\rightarrow |A|=0$ $\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-6\neq 0\rightarrow$ Rango (A) = 2

$\begin{vmatrix}3 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=0\rightarrow$ Rango (A^*) = Rango (A) = 2 < N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible indeterminado.

Si $m=3\rightarrow |A|=0$ $\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-6\neq 0\rightarrow$ Rango (A) = 2

$\begin{vmatrix}3 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=3\rightarrow$ Rango (A^*) ≠ Rango (A) → Sistema incompatible.

58. Página 79

a) $A=\begin{pmatrix}m & 0 & m+1\\ 0 & m & 1\\ 0 & 1 & m\end{pmatrix}$ $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}m & 0 & m+1 & m\\ 0 & m & 1 & m\\ 0 & 1 & m & m\end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix}m & 0 & m+1\\ 0 & m & 1\\ 0 & 1 & m\end{vmatrix}=m^3-m=m(m^2-1)=m(m-1)(m+1)$

Si $m\neq 0, m\neq 1, m\neq -1\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado.

Si $m=0\rightarrow |A|=0$ $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0\rightarrow$ Rango (A) = 2

Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < N.º de incógnitas → Sistema compatible indeterminado.

Si $m=1\rightarrow|A|=0$ $\quad$ $\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0\rightarrow$ Rango $(A)=2$

$\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=0\rightarrow$ Rango (A^*) = Rango $(A)=2<$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$m=-1\rightarrow|A|=0$ $\quad$ $\begin{vmatrix}-1&0\\0&-1\end{vmatrix}=1\neq 0\rightarrow$ Rango $(A)=2$

$\begin{vmatrix}-1&0&-1\\0&-1&-1\\0&1&-1\end{vmatrix}=-2\rightarrow$ Rango $(A^*)\neq$ Rango (A) $\rightarrow$ Sistema incompatible.

b) $A=\begin{pmatrix}2&m&4\\m&2&6\\2&m&6\end{pmatrix}$ $\quad$ $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}2&m&4&2\\m&2&6&0\\2&m&6&m-1\end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix}2&m&4\\m&2&6\\2&m&6\end{vmatrix}=8-2m^2=-2(m-2)(m+2)$

Si $m\neq 2, m\neq -2\rightarrow|A|\neq 0\rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*)=3=$ N.º de incógnitas $\rightarrow$Sistema compatible determinado.

Si $m=2\rightarrow|A|=0$ $\quad$ $\begin{vmatrix}2&4\\2&6\end{vmatrix}=4\rightarrow$ Rango $(A)=2$

$\begin{vmatrix}2&4&2\\2&6&0\\2&6&1\end{vmatrix}=4\rightarrow$ Rango $(A^*)\neq$ Rango (A) $\rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $m=-2\rightarrow|A|=0$ $\quad$ $\begin{vmatrix}-2&4\\2&6\end{vmatrix}=-20\rightarrow$ Rango $(A)=2$

$\begin{vmatrix}2&4&2\\-2&6&0\\2&6&-3\end{vmatrix}=-108\rightarrow$ Rango $(A^*)\neq$ Rango (A) $\rightarrow$ Sistema incompatible.

59. Página 79

a) $A=\begin{pmatrix}1&-2\\4&-3\\2&1\end{pmatrix}$ $\quad$ $A^*=\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&4\\4&-3&a\\2&1&5\end{array}\right)$

$|A^*|=\begin{vmatrix}1&-2&4\\4&-3&a\\2&1&5\end{vmatrix}=65-5a$

Si $a\neq 13\rightarrow$ Rango $(A^*)=3\neq$ Rango (A) $\rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $a=13\rightarrow|A^*|=0$ $\quad$ $\begin{vmatrix}1&-2\\4&-3\end{vmatrix}=3\rightarrow$ Rango $(A^*)=2$

Rango (A) = Rango $(A^*)=2=$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

b) $A=\begin{pmatrix}-3 & a\\ 2 & 1\\ a & -2a\end{pmatrix}$ $A^*=\left(\begin{array}{cc|c}-3 & a & 1\\ 2 & 1 & 0\\ a & -2a & -1\end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix}-3 & a & 1\\ 2 & 1 & 0\\ a & -2a & -1\end{vmatrix}=3-3a$$

Si $a\neq 1\rightarrow$ Rango (A^*) = 3 ≠ Rango (A) → Sistema incompatible.

Si $a=1\rightarrow |A^*|=0$ $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0\rightarrow$ Rango (A^*) = 2

Rango (A) = Rango (A^*) = 2 = N.º de incógnitas → Sistema compatible determinado.

60. Página 79

a) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ 2 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}$ $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & -3 & 5\\ 2 & 2 & -1 & m\\ 1 & 1 & 1 & 6\\ 3 & 1 & -4 & m\end{array}\right)$

$$|A^*|=\begin{vmatrix}2 & -1 & -3 & 5\\ 2 & 2 & -1 & m\\ 1 & 1 & 1 & 6\\ 3 & 1 & -4 & m\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 6\\ 2 & 2 & -1 & m\\ 2 & -1 & -3 & 5\\ 3 & 1 & -4 & m\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 6\\ 0 & 0 & -3 & m-12\\ 0 & -3 & -5 & -7\\ 0 & -2 & -7 & m-18\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0 & -3 & m-12\\ -3 & -5 & -7\\ -2 & -7 & m-18\end{vmatrix}=12-2m$$

Si $m\neq 6\rightarrow |A^*|\neq 0\rightarrow$ Rango (A^*) ≠ Rango (A) → Sistema incompatible.

Si $m=6\rightarrow |A^*|=0$ $\begin{vmatrix}2 & -1 & -3\\ 2 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=9\rightarrow$ Rango (A^*) = 3

Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas → Sistema compatible determinado.

b) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & m\\ m & 1 & 1\\ m & m & 1\\ m & m & m\end{pmatrix}$ $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & m & m\\ m & 1 & 1 & m\\ m & m & 1 & 1\\ m & m & m & 1\end{array}\right)$

$$|A^*|=\begin{vmatrix}1 & 1 & m & m\\ m & 1 & 1 & m\\ m & m & 1 & 1\\ m & m & m & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & m & m\\ m & 1 & 1 & m\\ m & m & 1 & 1\\ 0 & 0 & m-1 & 0\end{vmatrix}=(1-m)\begin{vmatrix}1 & 1 & m\\ m & 1 & m\\ m & m & 1\end{vmatrix}=(1-m)(m^3-m^2-m+1)=(1-m)^3(m+1)$$

Si $m\neq 1, m\neq -1\rightarrow |A^*|\neq 0\rightarrow$ Rango (A^*) ≠ Rango (A) → Sistema incompatible.

Si $m=1\rightarrow |A^*|=0$ $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0\rightarrow$ Rango (A^*) = 1

Rango (A^*) = Rango (A) = 1 < N.º de incógnitas → Sistema compatible indeterminado.

Si $m=-1\rightarrow |A^*|=0$ $\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{vmatrix}=-4\rightarrow$ Rango (A^*) = 3

Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas → Sistema compatible determinado.

c) $A=\begin{pmatrix}1 & m+1 & m\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & m & 1\\ 1 & 1-m & -1\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & m+1 & m & m+1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & m & 1 & 0\\ 1 & 1-m & -1 & 1\end{array}\right)$

$$|A^*|=\begin{vmatrix}1 & m+1 & m & m+1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & m & 1 & 0\\ 1 & 1-m & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & m+1 & m & m+1\\ 0 & -m & -m & -m\\ 0 & m & 1 & 0\\ 0 & -2m & -1-m & -m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-m & -m & -m\\ m & 1 & 0\\ -2m & -1-m & -m\end{vmatrix}=0$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & m+1 & m\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & m & 1\end{vmatrix}=m^2-m=m(m-1)$$

Si $m\neq 0, m\neq 1\rightarrow |A|\neq 0\rightarrow$ Rango (A) = 3

Rango (A) = Rango (A*) = 3 = N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m=0\rightarrow |A|=0$ $\qquad \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\rightarrow$ Rango (A) = 2

$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=0$ $\qquad \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=0$

Rango (A*) = Rango (A) = 2 < N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Si $m=1\rightarrow |A|=0$ $\qquad \begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1\rightarrow$ Rango (A) = 2

$\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=1\rightarrow$ Rango (A*) = 3 Rango (A*) ≠ Rango (A) $\rightarrow$ Sistema incompatible.

61. Página 79

$A=\begin{pmatrix}a+1 & 1 & 1\\ 1 & a+1 & 1\\ 1 & 1 & a+1\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}a+1 & 1 & 1 & a(a+3)\\ 1 & a+1 & 1 & a^2(a+3)\\ 1 & 1 & a+1 & a^3(a+3)\end{array}\right)$

$$|A|=\begin{vmatrix}a+1 & 1 & 1\\ 1 & a+1 & 1\\ 1 & 1 & a+1\end{vmatrix}=(a+1)^3-2+3(a+1)=a^3+3a^2=a^2(a+3)$$

$$\begin{vmatrix}a+1 & 1 & a(a+3)\\ 1 & a+1 & a^2(a+3)\\ 1 & 1 & a^3(a+3)\end{vmatrix}=a(a+3)\begin{vmatrix}a+1 & 1 & 1\\ 1 & a+1 & a\\ 1 & 1 & a^2\end{vmatrix}=a^2(a+3)(a^3+2a^2-a-1)$$

Si $a\neq 0, a\neq -3\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado.

Si $a=0\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A*) = 1 ⟶ Sistema compatible indeterminado.

Si $a=-3\rightarrow A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{array}\right)$

Rango (A*) = Rango (A) = 2 < N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Luego no hay ningún valor de *a* para el que el sistema sea incompatible.

Los valores para los que es compatible indeterminado son 0 y –3.

62. Página 79

$$A=\begin{pmatrix}1 & a-1 & 1\\ 3 & a & a\end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & a-1 & 1 & 1\\ 3 & a & a & 3\end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix}1 & a-1\\ 3 & a\end{vmatrix}=3-2a$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & a\end{vmatrix}=a-3$$

Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < N.º de incógnitas para cualquier valor de *a.*

Sistema compatible indeterminado para cualquier valor de *a.*

63. Página 80

a) $A=\begin{pmatrix}2 & a & 1\\ 1 & a & 0\\ 0 & -1 & a\end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & a & 1 & 2\\ 1 & a & 0 & a\\ 0 & -1 & a & 0\end{array}\right)$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & a & 1\\ 1 & a & 0\\ 0 & -1 & a\end{vmatrix}=a^2-1=(a+1)(a-1)$$

Si $a\neq 1, a\neq -1\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $a=1\rightarrow |A|=0$

$$\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\rightarrow \text{ Rango } (A)=2$$

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0$$

Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Si $a=-1\rightarrow |A|=0$

$$\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1\rightarrow \text{ Rango } (A)=2$$

$$\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{vmatrix}=4\rightarrow \text{ Rango } (A^*)\neq \text{ Rango } (A)\rightarrow \text{ Sistema incompatible.}$$

b) Calculamos la solución para $a=1$.

Obtenemos el sistema: $\left.\begin{array}{r}2x+y=2-z\\ y=z\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1-z\\ y=z\end{array}\right.$

Las soluciones son: $x=1-\lambda, y=\lambda, z=\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

64. Página 80

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 0 \\ a+1 & 1 & -a & a \\ 1 & a+1 & 0 & 2a \end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \end{vmatrix}=a^3+2a^2+a=a(a^2+2a+1)=a(a+1)^2e$$

Si $a\neq 0, a\neq -1 \rightarrow |A|\neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado.

Si $a=-1 \rightarrow |A|=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2 \rightarrow \text{ Rango } (A)=2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=1 \rightarrow \text{ Rango } (A^*) \neq \text{ Rango } (A) \rightarrow \text{ Sistema incompatible.}$$

Si $a=0 \rightarrow |A|=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1 \rightarrow \text{ Rango } (A)=2$$

Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < N.º de incógnitas → Sistema compatible indeterminado.

Obtenemos el sistema: $\left.\begin{matrix} y=-z \\ x+y=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=-z \end{cases}$

Las soluciones son: $x=\lambda, y=-\lambda, z=\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

65. Página 80

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ m & 1 & -1 & m-2 \\ 3 & m & 1 & m-2 \end{array}\right)$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \end{vmatrix}=2m^2-8$$

$m\neq 2, m\neq -2 \rightarrow |A|\neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado.

Si $m=-2 \rightarrow |A|=0$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=3 \rightarrow$ Rango (A) = 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix}=32 \rightarrow \text{ Rango } (A^*) \neq \text{ Rango } (A) \rightarrow \text{ Sistema incompatible.}$$

Si $m=2 \rightarrow |A|=0$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1 \rightarrow$ Rango (A) = 2

Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < N.º de incógnitas → Sistema compatible indeterminado.

b) Si $m=2$, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=-2z \\ 2x+y=z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y=-2z \\ -y=5z \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=3z \\ y=-5z \end{array}\right.$$

Las soluciones son: $x=3\lambda, y=-5\lambda, z=\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $m=-1$, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z=0 \\ -x+y-z=-3 \\ 3x-y+z=-3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+2z=0 \\ 2y+z=-3 \\ -4y-5z=-3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+2z=0 \\ 2y+z=-3 \\ -3z=-9 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=-3 \\ y=-3 \\ z=3 \end{array}\right.$$

66. Página 80

a) Si $m=1$, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-z=3 \\ x-y+z=2 \\ x+y-z=1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ 3x-z=3 \\ x-y+z=2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ -3y+2z=0 \\ -2y+2z=1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ -3y+2z=0 \\ 2z=3 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=\frac{3}{2} \\ y=1 \\ z=\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

b) $A=\begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} m+2 & m-1 & -1 & 3 \\ m & -1 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 1 \end{array}\right)$

$$|A|=\begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix}=-m^2-m=-m(m+1)$$

Si $m\neq 0, m\neq -1 \to |A|\neq 0 \to$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas → Sistema compatible determinado.

Si $m=0 \to |A|=0$ $\qquad \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-2 \to$ Rango (A) = 2

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1 \to$ Rango (A^*) ≠ Rango (A) → Sistema incompatible.

Si $m=-1 \to |A|=0$ $\qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=2 \to$ Rango (A) = 2

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1 \to$ Rango (A^*) ≠ Rango (A) → Sistema incompatible.

67. Página 80

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & m+3\\ 1 & 1 & 4+m-m^2\\ 2 & 4 & 3m+6\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & m+3 & 3\\ 1 & 1 & 4+m-m^2 & 3\\ 2 & 4 & 3m+6 & 8\end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & m+3\\ 1 & 1 & 4+m-m^2\\ 2 & 4 & 3m+6\end{vmatrix}=-m$

Si $m\neq 0\rightarrow |A|\neq 0\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado.

Si $m=0\rightarrow |A|=0$ $\qquad \begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1\rightarrow$ Rango (A) = 2

$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 8\end{vmatrix}=-2\rightarrow$ Rango (A^*) ≠ Rango (A) → Sistema incompatible.

b) Si $m=-2$:

Obtenemos el sistema: $\left.\begin{aligned}x+2y+z&=3\\ x+y-2z&=3\\ 2x+4y&=8\end{aligned}\right\}\rightarrow \left.\begin{aligned}x+2y+z&=3\\ -y-3z&=0\\ -2z&=2\end{aligned}\right\}\rightarrow \begin{cases}x=-2\\ y=3\\ z=-1\end{cases}$

68. Página 80

$A=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}a & 1 & 1 & a^2\\ 1 & -1 & 0 & -a\\ 1 & a & 1 & a\end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & a & 1\end{vmatrix}=0$ $\qquad \begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1\neq 0\rightarrow$ Rango (A) = 2

$\begin{vmatrix}1 & 1 & a^2\\ -1 & 0 & -a\\ a & 1 & a\end{vmatrix}=-2a^2+2a=-2a(a-1)$

Si $a\neq 0, a\neq 1\rightarrow$ Rango (A^*) ≠ Rango (A) → Sistema incompatible.

Si $a=0\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{aligned}y+z&=0\\ -y&=-x\end{aligned}\right\}\rightarrow \begin{cases}x=y\\ z=-y\end{cases}$

Las soluciones son: $x=\lambda \quad y=\lambda \quad z=-\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$

Si $a=1\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{aligned}y+z&=1-x\\ -y&=-1-x\end{aligned}\right\}\rightarrow \begin{cases}y=1+x\\ z=-2x\end{cases}$

Las soluciones son: $x=\lambda, y=1+\lambda, z=-2\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

69. Página 80

$$A=\begin{pmatrix} m & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & 3 \end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & 3 & 0 \\ 2 & m & 2 & 2 \\ 2 & m & 3 & m-2 \end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & 3 \end{vmatrix}=m^2-4 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=2\neq 0 \qquad \begin{vmatrix} m & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & m-2 \end{vmatrix}=2m^2-16m+24$$

Si $m\neq\pm 2\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado.

$|A|=m^2-4$

$$|A_x|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ m-2 & m & 3 \end{vmatrix}=-3m^2+16m-20\rightarrow x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{-3m^2+16m-20}{m^2-4}=\frac{-3m+10}{m+2}$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix} m & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & m-2 & 3 \end{vmatrix}=-2m^2+16m-24\rightarrow y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{-2m^2+16m-24}{m^2-4}=\frac{-2m+12}{m+2}$$

$$|A_z|=\begin{vmatrix} m & 2 & 0 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & m-2 \end{vmatrix}=m^3-4m^2-4m+16\rightarrow z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{m^3-4m^2-4m+16}{m^2-4}=m-4$$

Si $m=-2\rightarrow$ Rango (A) ≠ Rango (A^*) → Sistema incompatible.

Si $m=2\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 2 → Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{l} 2x+2z=2-2y \\ 2x+3z=-2y \end{array}\right\}$

$$|A_x|=\begin{vmatrix} 2-2y & 2 \\ -2y & 3 \end{vmatrix}=6-2y\rightarrow x=\frac{|A_x|}{|A|}=3-2y \qquad |A_z|=\begin{vmatrix} 2 & 2-2y \\ 2 & -2y \end{vmatrix}=-4\rightarrow z=\frac{|A_z|}{|A|}=-2$$

Las soluciones son: $x=3-\lambda, y=\lambda, z=-2$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

70. Página 80

a) $$A=\begin{pmatrix} a+2 & 2 & a-3 \\ -a & a & a \\ 2a+1 & 1 & 2a+1 \end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} a+2 & 2 & a-3 & 1+a \\ -a & a & a & 2+a \\ 2a+1 & 1 & 2a+1 & a+6 \end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a+2 & 2 & a-3 \\ -a & a & a \\ 2a+1 & 1 & 2a+1 \end{vmatrix}=a(16a+10) \qquad \begin{vmatrix} 2 & a-3 & 1+a \\ a & a & 2+a \\ 1 & 2a+1 & a+6 \end{vmatrix}=a^3-2a^2+19a-10$$

Si $a\neq 0, a\neq -\frac{5}{8}\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado.

Si $a=0\rightarrow|A|=0$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=5\rightarrow$ Rango (A) = 2

Rango (A) ≠ Rango (A^*) = 3 → Sistema incompatible.

Si $a=-\frac{5}{8}\rightarrow|A|=0$

Rango (A) ≠ Rango (A^*) = 3 → Sistema incompatible.

b) Para $a=0$ el sistema no tiene solución.

Para $a=1$, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}3x+2y-2z=2\\-x+y+z=3\\3x+y+3z=7\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}-x+y+z=3\\3x+2y-2z=2\\3x+y+3z=7\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}-x+y+z=3\\5y+z=11\\4y+6z=16\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}-x+y+z=3\\5y+z=11\\26y=36\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{4}{13}\\y=\dfrac{25}{13}\\z=\dfrac{18}{13}\end{array}\right.$$

71. Página 80

a) $A=\begin{pmatrix}m&2&1\\1&-1&m\\2&0&3\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}m&2&1&m-1\\1&-1&m&-3\\2&0&3&-1\end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix}m&2&1\\1&-1&m\\2&0&3\end{vmatrix}=m-4$ $\qquad \begin{vmatrix}2&1&m-1\\-1&m&-3\\0&3&-1\end{vmatrix}=20-5m$

Si $m\neq 4\rightarrow |A|\neq 0\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado.

Si $m=4\rightarrow |A|=0$ $\qquad \begin{vmatrix}4&2\\1&-1\end{vmatrix}=-6\rightarrow$ Rango (A) = 2 = Rango (A^*) ⟶ Sistema compatible indeterminado.

b) Para $m=1$, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x+2y+z=0\\x-y+z=-3\\2x+3z=-1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y+z=0\\-3y=-3\\-4y+z=-1\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-5\\y=1\\z=3\end{array}\right.$$

Para $m=-4$, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}-4x+2y+z=-5\\x-y-4z=-3\\2x+3z=-1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x-y-4z=-3\\-4x+2y+z=-5\\2x+3z=-1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x-y-4z=-3\\-2y-15z=-17\\2y+11z=5\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x-y-4z=-3\\-2y-15z=-17\\-4z=-12\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-5\\y=-14\\z=3\end{array}\right.$$

72. Página 80

a) $A=\begin{pmatrix}3&a&-1\\a&-2&1\\2&1&0\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}3&a&-1&2\\a&-2&1&7\\2&1&0&0\end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix}3&a&-1\\a&-2&1\\2&1&0\end{vmatrix}=a-7$ $\qquad \begin{vmatrix}3&a&2\\a&-2&7\\2&1&0\end{vmatrix}=16a-13$

Si $a\neq 7\rightarrow |A|\neq 0\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado.

Si $a=7\rightarrow |A|=0$ Rango (A) ≠ Rango (A^*) = 3 → Sistema incompatible.

b) Para $a=7$ el sistema no tiene solución.

Para $a=-1$, consideramos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}3x-y-z=2\\-x-2y+z=7\\2x+y=0\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}2x+y=0\\3x-y-z=2\\-x-2y+z=7\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}2x+y=0\\-5y-2z=4\\-3y+2z=14\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}2x+y=0\\-5y-2z=4\\16y=58\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{9}{8}\\y=-\dfrac{9}{4}\\z=\dfrac{29}{8}\end{array}\right.$$

73. Página 80

a) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&k&k^2\\k&k^2&k^3\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&k&k^2&1\\k&k^2&k^3&k^4\end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&k&k^2\\k&k^2&k^3\end{vmatrix}=0$ $\qquad \begin{vmatrix}1&1\\1&k\end{vmatrix}=k-1$

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\k&k^2&1\\k^2&k^3&k^4\end{vmatrix}=k^2(k^4-k^3-k+1)=(k-1)^2k^2(k^2+k+1)$$

Si $k\neq 0, k\neq 1\to$ Rango (A) ≠ Rango $(A^*)=3$ $\to$ Sistema incompatible.

Si $k=0\to$ Rango (A) = Rango $(A^*)=2<$ N.º de incógnitas $\to$ Sistema compatible indeterminado.

Si $k=1\to$ Rango (A) = Rango $(A^*)=1<$ N.º de incógnitas $\to$ Sistema compatible indeterminado.

b) Para $k=2$ el sistema no tiene solución.

Para $k=1$ el sistema se reduce a la siguiente ecuación: $x=1-z-y$

Las soluciones son: $x=1-\lambda-\mu, y=\lambda, z=\mu$ con $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

74. Página 80

a) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&3&2\\3&m-1&1\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&m+1\\0&3&2&2m+3\\3&m-1&1&m\end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&3&2\\3&m-1&1\end{vmatrix}=2-2m$ $\qquad \begin{vmatrix}1&1&m+1\\3&2&2m+3\\m-1&1&m\end{vmatrix}=m-1$

$\begin{vmatrix}1&1\\0&3\end{vmatrix}=3$

Si $m\neq 1\to|A|\neq 0\to$ Rango (A) = Rango $(A^*)=3=$ N.º de incógnitas $\to$ Sistema compatible determinado.

Si $m=1\to|A|=0\to$ Rango (A) = Rango $(A^*)=2<$ N.º de incógnitas $\to$ Sistema compatible indeterminado.

b) Para $m=0$, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 3y+2z=3 \\ 3x-y+z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 3y+2z=3 \\ -4y-2z=-3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 3y+2z=3 \\ -y=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=0 \\ z=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Para $m=1$, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=2-z \\ 3y=5-2z \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1-z}{3} \\ y=\dfrac{5-2z}{3} \end{array}\right.$$

Las soluciones son: $x=\dfrac{1-\lambda}{3}, y=\dfrac{5-2\lambda}{3}, z=\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

c) Estudiamos si existe algún valor de m para el que $\left(-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$ sea solución:

$$\left.\begin{array}{r} -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=m+1 \\ 1=2m+3 \\ -\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}=m \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-1 \\ m=-1 \end{array}\right. \rightarrow \text{ Se cumple para } m=-1.$$

75. Página 80

a) $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -k^2 \\ k & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -k^2 & -k \\ k & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$$|A|=\begin{vmatrix} -2 & 3 & -k^2 \\ k & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=k^2-6k-7 \qquad \begin{vmatrix} 3 & -k^2 & -k \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=k^2-2k+9$$

Si $k\neq -1,\ k\neq 7 \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas → Sistema compatible determinado.

Si $k=-1,\ k=7 \rightarrow |A|=0 \rightarrow$ Rango (A) ≠ Rango (A^*) = 3 → Sistema incompatible.

b) Para $k=-1$ el sistema no tiene solución.

Para $k=0$, obtenemos el sistema: $\left.\begin{array}{r} -2x+3y=0 \\ y-z=-2 \\ x+2z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{9}{7} \\ y=-\dfrac{6}{7} \\ z=\dfrac{8}{7} \end{array}\right.$

Para $k=1$, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} -2x+3y-z=-1 \\ x+y-z=-2 \\ x+2z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y-z=-2 \\ -2x+3y-z=-1 \\ x+2z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y-z=-2 \\ 5y-3z=-5 \\ -y+3z=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y-z=-2 \\ 5y-3z=-5 \\ 4y=-2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{2}{3} \\ y=-\dfrac{1}{2} \\ z=\dfrac{5}{6} \end{array}\right.$$

76. Página 80

Estudiamos el sistema según el parámetro *a*.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -a & -a\\ 2 & 1 & a+1\\ -2 & a & -2\end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -a & -a & a-2\\ 2 & 1 & a+1 & a+1\\ -2 & a & -2 & 0\end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -a & -a\\ 2 & 1 & a+1\\ -2 & a & -2\end{vmatrix}=-2a^2-6a-4=-2(a+1)(a+2)$$

$$\begin{vmatrix}-a & -a & a-2\\ 1 & a+1 & a+1\\ a & -2 & 0\end{vmatrix}=-2a^3-2a^2-2a+4$$

Si $a\neq-1,\ a\neq-2\rightarrow|A|\neq0\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado.

Si $a=-1\rightarrow|A|=0\rightarrow$ Rango (A) ≠ Rango (A^*) = 3 $\rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $a=-2\rightarrow|A|=0\rightarrow$ Rango (A) ≠ Rango (A^*) = 3 $\rightarrow$ Sistema incompatible.

a) No existe ningún valor de *a* para el que el sistema tiene infinitas soluciones.

b) Para todos los valores distintos de –1 y –2.

c) $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{3}-a-\frac{a}{3}=a-2\\ \frac{1}{3}+1+\frac{a+1}{3}=a+1\\ -\frac{1}{3}+a-\frac{2}{3}=0\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}a=1\\ a=1\\ a=1\end{cases}\rightarrow$ Para $a=1$ obtenemos esa solución.

77. Página 80

Estudiamos el sistema.

$$A=\begin{pmatrix}m & 1 & m^2+1\\ 0 & m^2 & -2\\ m-m^2 & m^2+1 & m^2-1\end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}m & 1 & m^2+1 & m\\ 0 & m^2 & -2 & m\\ m-m^2 & m^2+1 & m^2-1 & m\end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix}m & 1 & m^2+1\\ 0 & m^2 & -2\\ m-m^2 & m^2+1 & m^2-1\end{vmatrix}=m^6+m^4+2m^2=m^2(m^4+m^2+2)$$

$$\begin{vmatrix}1 & m^2+1 & m\\ m^2 & -2 & m\\ m^2+1 & m^2-1 & m\end{vmatrix}=m^5+m^4+2m=m(m^4+m^2+2)$$

Si $m\neq0\rightarrow|A|\neq0\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado.

Si $m=0\rightarrow|A|=0\rightarrow$ $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-2$

Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

a) No existe ningún valor de *m* para el que el sistema sea incompatible.

b) Para $m \neq 0$:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} m & 1 & m^2+1 \\ m & m^2 & -2 \\ m & m^2+1 & m^2-1 \end{vmatrix} = m^5 + m^3 + 2m \to x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{1}{m}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} m & m & m^2+1 \\ 0 & m & -2 \\ m-m^2 & m & m^2-1 \end{vmatrix} = m^5 + 3m^3 - 2m^2 \to y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{m^3+3m-2}{m^4+m^2+2}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} m & 1 & m \\ 0 & m^2 & m \\ m-m^2 & m^2+1 & m \end{vmatrix} = m^3(m^2-m-1) \to z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{m(m^2-m-1)}{m^4+m^2+2}$$

Para $m = 0$, obtenemos el sistema: $\left.\begin{matrix} y+z=0 \\ -2z=0 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} y=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\}$

Las soluciones son: $x = \lambda, y = 0, z = 0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

78. Página 80

a) $A = \begin{pmatrix} k & 2 & k+2 \\ k & k-3 & 2k-3 \\ k-2 & k-3 & k-1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 2 & k+2 & k \\ k & k-3 & 2k-3 & 0 \\ k-2 & k-3 & k-1 & k \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 2 & k+2 \\ k & k-3 & 2k-3 \\ k-2 & k-3 & k-1 \end{vmatrix} = -k^3 + 9k^2 - 20k = -k(k-5)(k-4)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & k+2 & k \\ k-3 & 2k-3 & 0 \\ k-3 & k-1 & k \end{vmatrix} = -2k^3 + 10k^2 - 6k$$

Si $k \neq 0,\ k \neq 5,\ k \neq 4 \to$ Rango (A) = Rango (A*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado.

Si $k = 0 \to |A| = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -6 \to$ Rango (A) = 2

Rango (A) = Rango (A*) = 2 < N.º de incógnitas → Sistema compatible indeterminado.

Si $k = 5 \to |A| = 0 \to$ Rango (A) ≠ Rango (A*) = 3 → Sistema incompatible.

Si $k = 4 \to |A| = 0 \to$ Rango (A) ≠ Rango (A*) = 3 → Sistema incompatible.

b) Para $k = 0$, obtenemos el sistema: $\left.\begin{matrix} 2y = -2z \\ -2x-3y = z \end{matrix}\right\} \to \begin{cases} y = -x \\ z = x \end{cases}$

Las soluciones son: $x = \lambda, y = -\lambda, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Para $k = 3$, obtenemos el sistema: $\left.\begin{matrix} 3x+2y+5z=3 \\ 3x+3z=0 \\ x+2z=3 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} 3x+2y+5z=3 \\ 3x+3z=0 \\ 3z=9 \end{matrix}\right\} \to \begin{cases} x = -3 \\ y = -\dfrac{3}{2} \\ z = 3 \end{cases}$

79. Página 81

a) $A=\begin{pmatrix}2a & a & 0\\ a & a-1 & a+3\\ 2a & a & a+3\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}2a & a & 0 & a\\ a & a-1 & a+3 & a-1\\ 2a & a & a+3 & a\end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix}2a & a & 0\\ a & a-1 & a+3\\ 2a & a & a+3\end{vmatrix}=a(a^2+a-6)=a(a-2)(a+3)$ $\qquad \begin{vmatrix}a & 0 & a\\ a-1 & a+3 & a-1\\ a & a+3 & a\end{vmatrix}=0$

Si $a\neq 0, a\neq 2, a\neq -3\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado.

Si $a=0\rightarrow |A|=0$ $\qquad \begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-3$

Rango (A) = Rango (A*) = 2 < N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Si $a=2\rightarrow |A|=0$ $\qquad \begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-5$

Rango (A) = Rango (A*) = 2 < N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Si $a=-3\rightarrow |A|=0$ $\qquad \begin{vmatrix}-3 & -4\\ -6 & -3\end{vmatrix}=-15$

Rango (A) = Rango (A*) = 2 < N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

b) Para $a=0$, obtenemos el sistema: $\left.\begin{array}{r}-y+3z=-1\\ 3z=0\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}y=1\\ z=0\end{array}\right.$

Las soluciones son: $x=\lambda, y=1, z=0$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

Para $a=2$, obtenemos el sistema: $\left.\begin{array}{r}4x+2y=2\\ 4x+2y=2-5z\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}4x+2y=2\\ 0=-5z\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}y=1-2x\\ z=0\end{array}\right.$

Las soluciones son: $x=\lambda, y=1-2\lambda, z=0$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

Para $a=-3$, obtenemos el sistema: $\left.\begin{array}{r}-6x-3y=-3\\ -3x-4y=-4\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}-6x-3y=-3\\ -5y=-5\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\ y=1\end{array}\right.$

Las soluciones son: $x=0, y=1, z=\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

80. Página 81

a) $A=\begin{pmatrix}1 & a & a+1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & a & a-1\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & a & a+1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & a & a-1 & 0\end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix}1 & a & a+1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & a & a-1\end{vmatrix}=2a-2$

Si $a\neq 1\rightarrow |A|\neq 0\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado.

Si $a=1\rightarrow |A|=0$ $\qquad \begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2$

Rango (A) = Rango (A*) = 2 < N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

b) Para $a \neq 1$, como es un sistema homogéneo, la solución es $x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0$

Para $a = 1$ consideramos el sistema: $\left.\begin{matrix} x + y = -2z \\ x + y = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x = -y \\ z = 0 \end{matrix}\right.$

Las soluciones son $x = -\lambda, y = \lambda, z = 0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

81. Página 81

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & a \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & a & \frac{a}{2} \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & a \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 24 - 3a$ $\qquad \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -5 & a & \frac{a}{2} \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 100 - \frac{25a}{2}$

Si $a \neq 8 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado.

Si $a = 8 \rightarrow |A| = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -3$

Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

El sistema es compatible indeterminado para $a = 8$.

Para $a = 8$, obtenemos el sistema: $\left.\begin{matrix} x - 2y = 4 - 3z \\ x - 5y = 4 - 8z \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x - 2y = 4 - 3z \\ -3y = -5z \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x = 4 + \frac{y}{5} \\ z = \frac{3y}{5} \end{matrix}\right.$

b) Como queremos obtener la solución $x = y \rightarrow y = 4 + \frac{y}{5} \rightarrow 5y - 20 = y \rightarrow y = 5$

En este caso la solución es: $x = 5, y = 5, z = 3$.

82. Página 81

a) $A = \begin{pmatrix} m & 1 & m^2 \\ m+1 & 1 & (m+1)^2 \\ m-1 & 1 & (m-1)^2 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & m^2 & 1 \\ m+1 & 1 & (m+1)^2 & 1 \\ m-1 & 1 & (m-1)^2 & 1 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & m^2 \\ m+1 & 1 & (m+1)^2 \\ m-1 & 1 & (m-1)^2 \end{vmatrix} = -2$

Para cualquier valor de *m*, $|A| \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado. No hay ningún valor para el cual el sistema tenga infinitas soluciones.

b) $|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m^2 \\ 1 & 1 & (m+1)^2 \\ 1 & 1 & (m-1)^2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = 0$ $\qquad |A_y| = \begin{vmatrix} m & 1 & m^2 \\ m+1 & 1 & (m+1)^2 \\ m-1 & 1 & (m-1)^2 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = 1$

$|A_z| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = 0$

La solución es: $x = 0, y = 1, z = 0$.

83. Página 81

a) $A = \begin{pmatrix} k & 1 & k \\ 1 & 1 & k \\ 2 & k-1 & k \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 2 & k-1 & k & 0 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & k \\ 1 & 1 & k \\ 2 & k-1 & k \end{vmatrix} = -k^3 + 3k^2 - 2k = -k(k-2)(k-1)$$

Para $k \neq 0, k \neq 1, k \neq 2 \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado.

Para $k = 0,\ k = 1,\ k = 2 \rightarrow |A| = 0$

Rango (A) = Rango (A^*) < N.º de incógnitas → Sistema compatible indeterminado.

Obtenemos la solución trivial para $k \neq 0, k \neq 1, k \neq 2$.

b) Obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} kx+y+kz=0 \\ x+y+kz=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} kx+y+kz=0 \\ (1-k)x=0 \\ (1-k)z=0 \end{array}\right\} \rightarrow k=1$$

Se cumple para $k = 1$.

84. Página 81

$A = \begin{pmatrix} 2m & m^2+m-2 & 2 \\ m & 1 & 2 \\ -m & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2m & m^2+m-2 & 2 & 2 \\ m & 1 & 2 & 0 \\ -m & 1 & -1 & m \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2m & m^2+m-2 & 2 \\ m & 1 & 2 \\ -m & 1 & -1 \end{vmatrix} = -m^3 - m^2 = -m^2(m+1)$$

$$\begin{vmatrix} m^2+m-2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} = 2m^3 + 2m^2 - 6m - 6$$

Si $m \neq 0, m \neq -1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado.

Si $m = 0 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow$ Rango (A^*) ≠ Rango (A) → Sistema incompatible.

Si $m = -1 \rightarrow |A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < N.º de incógnitas → Sistema compatible indeterminado.

Para $m \neq 0$ y $m \neq -1$:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & m^2+m-2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2m^3+2m^2-6m-6 \to x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{2m^3+2m^2-6m-6}{-m^2(m+1)} = -\frac{2(m^2-3)}{m^2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2m & 2 & 2 \\ m & 0 & 2 \\ -m & m & -1 \end{vmatrix} = -2m^2-2m \to y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-2m^2-2m}{-m^2(m+1)} = \frac{2}{m}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 2m & m^2+m-2 & 2 \\ m & 1 & 0 \\ -m & 1 & m \end{vmatrix} = -m^4-m^3+4m^2+4m \to x = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-m^4-m^3+4m^2+4m}{-m^2(m+1)} = \frac{m^2-4}{m}$$

Para $m=-1$, obtenemos el sistema: $\left.\begin{array}{r} -x+y=-2z \\ x+y=-1+z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -x+y=-2z \\ 2y=-1-z \end{array}\right\} \to \begin{cases} x = \dfrac{-3z+1}{2} \\ y = \dfrac{-1-z}{2} \end{cases}$

Las soluciones son: $x = \dfrac{-3\lambda+1}{2}, y = \dfrac{-1-\lambda}{2}, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

85. Página 81

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k^2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & k^2 & 3 & 2k \\ 3 & 7 & 7 & k-3 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k^2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix} = k^2-1 = (k+1)(k-1)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ k^2 & 3 & 2k \\ 7 & 7 & k-3 \end{vmatrix} = -2k^3-k^2-5k-6$$

Si $k \neq 1, k \neq -1 \to |A| \neq 0 \to$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado.

Si $k=1 \to |A|=0 \to$ Rango (A^*) ≠ Rango (A) → Sistema incompatible.

Si $k=-1 \to |A|=0$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$

Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < N.º de incógnitas → Sistema compatible indeterminado.

b) Para $k=0$, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+2z=-1 \\ x+3z=0 \\ 3x+7y+7z=-3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+3y+2z=-1 \\ -3y+z=1 \\ -2y+z=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+3y+2z=-1 \\ -3y+z=1 \\ y=-1 \end{array}\right\} \to \begin{cases} x=6 \\ y=-1 \\ z=-2 \end{cases}$$

Para $k=-1$, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y=-1-2z \\ x+y=-2-3z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+3y=-1-2z \\ -2y=-1-z \end{array}\right\} \to \begin{cases} x = \dfrac{-5-7z}{2} \\ y = \dfrac{z+1}{2} \end{cases}$$

Las soluciones son: $x = \dfrac{-5-7\lambda}{2}, y = \dfrac{\lambda+1}{2}, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

86. Página 81

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ a & 1 & 3\\ a & 1 & -7\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1 & 2\\ a & 1 & 3 & 4\\ a & 1 & -7 & 4\end{array}\right)$

$$|A^*|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1 & 2\\ a & 1 & 3 & 4\\ a & 1 & -7 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 0 & 3\\ a-1 & 0 & 2 & 3\\ a-1 & 0 & -8 & 3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3 & 0 & 3\\ a-1 & 2 & 3\\ a-1 & -8 & 3\end{vmatrix}=30a-120$$

Si $a\neq 4\rightarrow |A^*|\neq 0\rightarrow$ Rango (A*) ≠ Rango (A) → Sistema incompatible.

Si $a=4\rightarrow |A^*|=0$ $\qquad \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 4 & 1 & 3\end{vmatrix}=-6$

Rango (A) = Rango (A*) = 3 = N.º de incógnitas → Sistema compatible determinado.

b) Para $a=4$ obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x+y+z=1\\ 2x-y-z=2\\ 4x+y-7z=4\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r}x+y+z=1\\ -3y-3z=0\\ -3y-11z=0\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r}x+y+z=1\\ -3y-3z=0\\ -8z=0\end{array}\right\}\rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=1\\ y=0\\ z=0\end{array}\right.$$

87. Página 81

a) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & k\\ 1 & 4 & k\\ 0 & 5k & 1\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & k & 0\\ 1 & 4 & k & 0\\ 0 & 5k & 1 & 0\end{array}\right)$

$|A^*|=0$ para cualquier valor de k.

$\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & k\\ 1 & 4 & k\end{vmatrix}=0$ $\qquad \begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & k\\ 0 & 5k & 1\end{vmatrix}=5-5k^2$

Si $k\neq 1$ y $k\neq -1\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado.

Si $k=\pm 1\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A*) = 2 < N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible indeterminado.

b) Si $k\neq 1$ y $k\neq -1\rightarrow$ Sistema homogéneo compatible determinado.

La solución es la trivial.

Para $k=1$, obtenemos el sistema: $\left.\begin{array}{r}x-y=0\\ 2x+3y=-z\end{array}\right\}\rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=y\\ z=-5y\end{array}\right.$

Las soluciones son: $x=\lambda, y=\lambda, z=-5\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

Para $k=-1$, obtenemos el sistema: $\left.\begin{array}{r}x-y=0\\ 2x+3y=z\end{array}\right\}\rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=y\\ z=5y\end{array}\right.$

Las soluciones son: $x=\lambda, y=\lambda, z=5\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

88. Página 81

a) $A=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ -3 & m & -1 \\ 5 & -1 & m \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 3 \\ -3 & m & -1 & -10 \\ 5 & -1 & m & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$$|A^*|=\begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 3 \\ -3 & m & -1 & -10 \\ 5 & -1 & m & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 3 \\ -3 & m & -1 & -10 \\ 5 & -1 & m & 13 \\ -m & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=m\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ m & -1 & -10 \\ -1 & m & 13 \end{vmatrix}=3m(m^2-m-2)=3m(m+1)(m-2)$$

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ -3 & m & -1 \\ 5 & -1 & m \end{vmatrix}=m^3-3m-2=(m+1)^2(m-2) \qquad \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ -3 & m & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=m^2+m=m(m+1)$$

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 5 & -1 & m \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-m^2-m=-m(m+1) \qquad \begin{vmatrix} -3 & m & -1 \\ 5 & -1 & m \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2m-2=-2(m+1)$$

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ -3 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=7m \qquad \begin{vmatrix} m & -1 & -10 \\ -1 & m & 13 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=3m^2-3m-6=3(m+1)(m-2)$$

Si $m\neq 0, m\neq -1, m\neq 2 \rightarrow |A^*|\neq 0 \rightarrow$ Rango (A^*) ≠ Rango (A) ⟶ Sistema incompatible.

Si $m=-1\rightarrow$ Rango (A^*) ≠ Rango (A) $\rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $m=2\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado.

Si $m=0\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas ⟶ Sistema compatible determinado.

b) Para $m=3$ el sistema no tiene solución.

89. Página 81

Sean *x*, *y*, *z* los precios de cada docena de huevos de categorías *XL, L* y *M*, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=4{,}9 \\ 2x+4z&=9{,}6 \\ 3y+3z&=9{,}3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+z&=4{,}9 \\ -2y+2z&=-0{,}2 \\ y+z&=3{,}1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+z&=4{,}9 \\ -2y+2z&=-0{,}2 \\ 4z&=6 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x&=1{,}8 \\ y&=1{,}6 \\ z&=1{,}5 \end{aligned}\right.$$

Así, la docena de huevos *XL* cuesta 1,80 €; la de categoría *L* 1,60 € y la de *M* 1,50 €.

90. Página 81

Sean *x, y, z* los precios por hora de trabajo del electricista, el fontanero y el albañil, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{aligned} x+2z&=78 \\ 2y+z&=85 \\ x+y+3z&=133 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+3z&=133 \\ 2y+z&=85 \\ x+2z&=78 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+3z&=133 \\ 2y+z&=85 \\ -y-z&=-55 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+3z&=133 \\ 2y+z&=85 \\ y&=30 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x&=28 \\ y&=30 \\ z&=25 \end{aligned}\right.$$

El electricista cobra 28 €, el fontanero, 30 € y el albañil, 25 €.

91. Página 81

Sean *x, y, z* los precios de las acciones de las empresas *A, B* y *C,* respectivamente.

Entonces: $\left.\begin{aligned}200x+150y+100z=3300\\50x+120y+240z=3750\end{aligned}\right\}$

$A=\begin{pmatrix}200 & 150 & 100\\50 & 120 & 240\end{pmatrix}$ $\quad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}200 & 150 & 100 & 3300\\50 & 120 & 240 & 3750\end{array}\right)$

$\begin{vmatrix}200 & 150\\50 & 120\end{vmatrix}=16500\neq 0$

Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < N.º de incógnitas → Sistema compatible indeterminado, es decir, el sistema tiene infinitas soluciones.

$$\left.\begin{aligned}200x+150y+100z=3300\\50x+120y+240z=3750\end{aligned}\right\}\rightarrow\left.\begin{aligned}4x+3y+2z=66\\5x+12y+24z=375\end{aligned}\right\}\rightarrow\left.\begin{aligned}4x+3y+2z=66\\33y+86z=1170\end{aligned}\right\}\rightarrow\left\{\begin{aligned}x=\frac{16z-111}{11}\\y=\frac{1170-86z}{33}\end{aligned}\right.$$

Las soluciones son de la forma: $x=\dfrac{16\lambda-111}{11}, y=\dfrac{1170-86\lambda}{33}, z=\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

Con los datos no es posible determinar los precios de las acciones.

Si las acciones tienen un precio entero, el valor de la acción de la empresa *C* solo puede ser de 9 €, así las acciones de la empresa *A* valen 3 € y las de *B*, 12 €.

92. Página 82

Sean *x, y, z* el número de alumnos matriculados con el primer monitor, el segundo y el tercero, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{aligned}x+y+z=352\\4z=x\\x-y=2z-2\end{aligned}\right\}\rightarrow\left.\begin{aligned}x+y+z=352\\-x+4z=0\\x-y-2z=-2\end{aligned}\right\}\rightarrow\left.\begin{aligned}x+y+z=352\\y+5z=352\\-2y-3z=-354\end{aligned}\right\}\rightarrow\left.\begin{aligned}x+y+z=352\\y+5z=352\\7z=350\end{aligned}\right\}\rightarrow\left\{\begin{aligned}x=200\\y=102\\z=50\end{aligned}\right.$$

Hay 200 alumnos matriculados con el primer monitor, 102 con el segundo y 50 con el tercero.

93. Página 82

Sean *x, y, z* el número de onzas que se han comido Daniel, Manuel y Montse, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{aligned}x+y+z=36\\2x+2y=z\\y+z=3x\end{aligned}\right\}\rightarrow\left.\begin{aligned}x+y+z=36\\2x+2y-z=0\\-3x+y+z=0\end{aligned}\right\}\rightarrow\left.\begin{aligned}x+y+z=36\\-3z=-72\\4y+4z=108\end{aligned}\right\}\rightarrow\left\{\begin{aligned}x=9\\y=3\\z=24\end{aligned}\right.$$

Daniel ha comido 9 onzas, Manuel 3 y Montse 24.

94. Página 82

Sean *x, y, z* el número de recipientes de medio litro, un litro y un litro y medio, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1100 \\ 0{,}5x+y+1{,}5z=1025 \\ x=2y \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=1100 \\ 0{,}5x+y+1{,}5z=1025 \\ x-2y=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=1100 \\ y+2z=950 \\ -3y-z=-1100 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=1100 \\ y+2z=950 \\ 5z=1750 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=500 \\ y=250 \\ z=350 \end{array}\right.$$

Se han utilizado 500 recipientes de medio litro, 250 de un litro y 350 de litro y medio.

95. Página 82

Sean *x, y, z* el número inicial de profesores catedráticos, titulares y asociados, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1000 \\ y-50=2(x+50)+z \\ y-100=x+100+z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=1000 \\ -2x+y-z=150 \\ -x+y-z=200 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=1000 \\ 3y+z=2150 \\ 2y=1200 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=50 \\ y=600 \\ z=350 \end{array}\right.$$

Hay 50 profesores catedráticos, 600 titulares y 350 asociados.

96. Página 82

Sean *x, y, z* el número de alumnos matriculados en ESO, en Bachillerato y en Ciclos Formativos, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1200 \\ y+2z=x+100 \\ 0{,}4x+0{,}3y+0{,}2z=0{,}3\cdot 1200+45 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=1200 \\ -x+y+2z=100 \\ 0{,}4x+0{,}3y+0{,}2z=405 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=1200 \\ -x+y+2z=100 \\ 4x+3y+2z=4050 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x+y+z=1200 \\ 2y+3z=1300 \\ -y-2z=-750 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=1200 \\ 2y+3z=1300 \\ -z=-200 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=650 \\ y=350 \\ z=200 \end{array}\right.$$

Hay 650 alumnos matriculados en ESO, 350 en Bachillerato y 200 en Ciclos Formativos.

97. Página 82

Sean *x, y, z* lo que ha invertido en la primera, segunda y tercera empresa, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=4000 \\ 0{,}07x+0{,}09y+0{,}1z=352 \\ z=2y \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=4000 \\ 7x+9y+10z=35200 \\ -2y+z=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=4000 \\ 2y+3z=7200 \\ -2y+z=0 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x+y+z=4000 \\ 2y+3z=7200 \\ 4z=7200 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=1300 \\ y=900 \\ z=1800 \end{array}\right.$$

Ha invertido 1 300 € en la primera empresa, 900 € en la segunda y 1 800 € en la tercera.

98. Página 82

Sean *x, y, z* la cantidad del cóctel 1, cóctel 2 y cóctel 3, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r}0,6x+0,65y+0,85z=0,65\\0,2x+0,2y+0,1z=0,1875\\0,2x+0,15y+0,05z=0,1625\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}60x+65y+85z=65\\20x+20y+10z=18,75\\20x+15y+5z=16,25\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}20x+15y+5z=16,25\\60x+65y+85z=65\\20x+20y+10z=18,75\end{array}\right\}\rightarrow$$

$$\rightarrow\left.\begin{array}{r}20x+15y+5z=16,25\\20y+70z=16.25\\5y+5z=2,5\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}20x+15y+5z=16,25\\20y+70z=16.25\\-50z=-6,25\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0,5\\y=0,375\\z=0,125\end{array}\right.$$

Para obtener el cóctel 4 hay que añadir el 50 % del cóctel 1, el 37,5 % del cóctel 2 y el 12,5 % del cóctel 3.

99. Página 82

Sean *x, y, z* el número de monedas de 10, 20 y 50 céntimos, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r}x+y+z=2600\\0,1x+0,2y+0,5z=870\\x+y=z\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+z=2600\\y+4z=6100\\-2z=-2600\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=400\\y=900\\z=1300\end{array}\right.$$

Pablo tiene 400 monedas de 10 céntimos, 900 monedas de 20 céntimos y 1 300 de 50 céntimos.

100. Página 82

Sean:

$x\rightarrow$ Número de páginas que lee Óscar

$y\rightarrow$ Número de páginas que lee Beatriz

$z\rightarrow$ Número de páginas que lee Ainhoa

$r\rightarrow$ Número de días que tarda Óscar en leer la novela.

$s\rightarrow$ Número de días que tarda Beatriz en leer la novela.

$t\rightarrow$ Número de días que tarda Ainhoa en leer la novela.

Entonces: $\left.\begin{array}{r}x=y+3\\y=z+9\end{array}\right\}\rightarrow x=z+12$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{r}r=s-1\\s=t-4\end{array}\right\}\rightarrow r=t-5$

Sabemos que $rx=sy=tz=$ N.º de páginas del libro

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r}rx=sy\\sy=tz\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}(t-5)(z+12)=(t-4)(z+9)\\(t-4)(z+9)=tz\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}\cancel{tz}+12t-5z-60=\cancel{tz}+9t-4z-36\\\cancel{tz}+9t-4z-36=\cancel{tz}\end{array}\right\}\rightarrow$$

$$\rightarrow\left.\begin{array}{r}3t-z=24\\9t-4z=36\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}z=3t-24\\9t-12t+96=36\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}z=36\\t=20\end{array}\right.$$

El libro tiene 20 · 36 = 720 páginas.

101. Página 82

Sean *x, y, z* el precio de una medalla de oro, una de plata y una de bronce, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r}50x+40y+30z=230\\90x+70y+60z=418\\40x+60y+100z=336\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}50x+40y+30z=230\\-10y+30z=20\\140y+380z=760\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}50x+40y+30z=230\\-10y+30z=20\\800z=1040\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=2{,}3\\y=1{,}9\\z=1{,}3\end{array}\right.$$

Una medalla de oro vale 2,30 €, una de plata, 1,90 € y una de bronce, 1,30 €.

102. Página 82

Sean *x, y, z* el número de hojas que reparten Alonso, Luisa y Alba, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r}y=0{,}2(x+y+z)\\z=x+100\\x+y=850\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}-0{,}2x+0{,}8y-0{,}2z=0\\-x+z=100\\x+y=850\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}-2x+8y-2z=0\\-x+z=100\\x+y=850\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}-2x+8y-2z=0\\z=100+x\\y=850-x\end{array}\right\}\rightarrow$$

$$\rightarrow\left.\begin{array}{r}x=550\\z=100+x\\y=850-x\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=550\\y=300\\z=650\end{array}\right.$$

Alonso reparte 550 hojas, Luisa 300 y Alba 650.

103. Página 83

Sea *x* el peso de un frigorífico y sea *y* el peso de una lavadora.

Entonces: $\left.\begin{array}{r}x+y=120\\3x+4y=1550-1250\\4x+5y=480\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y=120\\3x+4y=300\\4x+5y=480\end{array}\right\}$

$\begin{vmatrix}1&1\\3&4\end{vmatrix}=1\neq0\rightarrow$ Rango $(A)=2$

$\begin{vmatrix}1&1&120\\3&4&300\\4&5&480\end{vmatrix}=60\neq0\rightarrow$ Rango $(A^*)=3$

Rango (A) ≠ Rango $(A^*)\rightarrow$ Sistema incompatible.

El sistema no tiene solución; por tanto, los datos recogidos no pueden ser correctos.

104. Página 83

a) Sean *x, y, z* el número de hombres, mujeres y niños que han acudido a la excursión, respectivamente.

Entonces: $\left.\begin{array}{r}x+y+z=20\\x=y+1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+z=20\\x-y=1\end{array}\right\}$

Tenemos dos ecuaciones para tres incógnitas, luego no es posible averiguar cuántos hombres, mujeres y niños fueron con exactitud.

b) $\left.\begin{array}{r}x+y+z=20\\x=y+1\\x=z\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+z=20\\x-y=1\\x-z=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+z=20\\-2y-z=-19\\-y-2z=-20\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+z=20\\-2y-z=-19\\-3z=-21\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=7\\y=6\\z=7\end{array}\right.$

Fueron 7 hombres, 6 mujeres y 7 niños a la excursión.

105. Página 83

Sean *x, y, z* el número de discos de pop, *rock* y *jazz*, respectivamente.

Entonces: $\left.\begin{array}{r} x+y=z+30 \\ z+30=3x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=z+30 \\ 3x=z+30 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{z}{3}+10 \\ y=\dfrac{2z}{3}+20 \end{array}\right.$

En total tengo $x+y+z=\left(\dfrac{z}{3}+10\right)+\left(\dfrac{2z}{3}+20\right)+z=2z+30$ discos.

Como el total de discos no llega a 300, $2z+30<300 \rightarrow z<135$.

Tomamos los múltiplos de 15 menores que 135:

- Si $z=15 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=15 \\ y=30 \end{array}\right\} \rightarrow$ No es solución. Igual número de discos de *jazz* y pop.
- Si $z=30 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=20 \\ y=40 \end{array}\right\} \rightarrow$ No es solución. No son múltiplos de 15.
- Si $z=45 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=25 \\ y=50 \end{array}\right\} \rightarrow$ No es solución. No son múltiplos de 15.
- Si $z=60 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=30 \\ y=60 \end{array}\right\} \rightarrow$ No es solución. Igual número de discos de *jazz* y *rock*.
- Si $z=75 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=35 \\ y=70 \end{array}\right\} \rightarrow$ No es solución. No son múltiplos de 15.
- Si $z=90 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=40 \\ y=80 \end{array}\right\} \rightarrow$ No es solución. No son múltiplos de 15.
- Si $z=105 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=45 \\ y=90 \end{array}\right\} \rightarrow$ Es solución.
- Si $z=120 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=50 \\ y=100 \end{array}\right\} \rightarrow$ No es solución. No son múltiplos de 15.

Tengo 45 discos de pop, 90 de *rock* y 105 de *jazz*.

106. Página 83

a) Sean *x, y, z* el número de viajes que realizarán Raúl, Marco y Antonio, respectivamente.

Entonces: $\left.\begin{array}{l} x+y=30 \\ x+y=10+z \\ x+y=0{,}6(x+y+z) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ x+y-z=10 \\ 0{,}4x+0{,}4y-0{,}6z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ x+y-z=10 \\ 4x+4y-6z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ x+y-z=10 \\ 4x+4y-6z=0 \end{array}\right\}$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -6 \end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 30 \\ 1 & 1 & -1 & 10 \\ 4 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -6 \end{vmatrix}=0 \rightarrow$ Rango (A) < N.º de incógnitas

No se puede determinar el número de viajes que realizarán cada uno.

b) $\left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ x+y-z=10 \\ 3x=2y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ x+y-z=10 \\ 3x-2y=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ -z=-20 \\ -5y=-90 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=12 \\ y=18 \\ z=20 \end{array}\right.$

Raúl realizará 12 viajes, Marco 18 y Antonio 20.

107. Página 83

Sean *x, y, z* el peso de un anillo, una moneda y un pendiente, respectivamente.

Entonces: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=29 \\ 4x+3y+2z=89 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=29 \\ -y-2z=-27 \end{array}\right\}$

Si $x=11 \rightarrow \left.\begin{array}{r} y+z=18 \\ -y-2z=-27 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y+z=18 \\ -z=-9 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=9 \\ z=9 \end{array}\right.$

No es solución porque dos objetos pesan lo mismo.

Si $y=11 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z=18 \\ -2z=-16 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=10 \\ z=8 \end{array}\right.$

Es posible.

Si $z=11 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=18 \\ -y=-5 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=13 \\ y=5 \end{array}\right.$

No es solución porque la diferencia entre los pesos es superior a 3 g.

El objeto encontrado es una moneda.

108. Página 83

a) Sean *x, y, z* los precios de las tarifas «Ven al cine en tren», «Oro» y «Estándar», respectivamente.

Entonces: $\left.\begin{array}{r} x+2y+2z=22 \\ 3x+y+z=23{,}5 \end{array}\right\}$

Tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas, así que no podemos determinar el valor de las incógnitas.

b) El valor de *y* ha de ser un número natural par.

Si $y=2 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2z=18 \\ 3x+z=21{,}5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2z=18 \\ -5z=-32{,}5 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5 \\ z=6{,}5 \end{array}\right. \rightarrow$ Es solución.

Si $y=4 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2z=14 \\ 3x+z=19{,}5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2z=14 \\ -5z=-22{,}5 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5 \\ z=4{,}5 \end{array}\right.$

No es solución porque la tarifa «Estándar» es más barata que la tarifa «Ven al cine en tren».

$y=6 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2z=10 \\ 3x+z=17{,}5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2z=10 \\ -5z=-12{,}5 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5 \\ z=2{,}5 \end{array}\right.$

No es solución porque la tarifa «Estándar» es más barata que la tarifa «Ven al cine en tren».

Si continuamos vemos que según aumenta el valor de *y*, se reduce el de *z* y aumenta también el de *x*.

Por tanto, la solución es que la tarifa «Ven al cine en tren» cuesta 5 €, la «Oro» 2 € y la «Estándar» 6,50 €.

109. Página 83

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{\lambda+8}{7} \\ y=\dfrac{11\lambda+18}{7} \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 7x=z+8 \\ 7y=11z+18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 7x-z=8 \\ 7y-11z=18 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{\mu+10}{11} \\ y=\mu \\ z=\dfrac{7\mu-18}{11} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 11x=y+10 \\ 11z=7y-18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 11x-y=10 \\ 11z-7y=-18 \end{array}\right\}$$

Si formamos un sistema con las tres ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 7x-z=8 \\ 7y-11z=18 \\ 11x-y=10 \end{array}\right\}$$

Comprobamos que ambas soluciones son correctas, ya que el sistema es compatible indeterminado.

$$|A|=\begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -11 \\ 11 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0 \qquad |A^*|=\begin{vmatrix} 7 & 0 & 8 \\ 0 & 7 & 18 \\ 11 & -1 & 10 \end{vmatrix}=0$$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 84

$$\left.\begin{array}{r} 5Y+20T+6I=1292 \\ Y=18+I \\ T=0{,}15Y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 5Y+20T+6I=1292 \\ Y=18+I \\ T=2{,}7+0{,}15I \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 5(18+I)+20(2{,}7+0{,}15I)+6I=1292 \\ Y=18+I \\ T=2{,}7+0{,}15I \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} I=82 \\ Y=100 \\ T=15 \end{array}\right.$$

El resultado es correcto.

2. Página 84

Con dos ecuaciones tendríamos un sistema compatible indeterminado y, por tanto, infinitas soluciones.

Con cuatro ecuaciones puede obtenerse la solución si una de las ecuaciones es combinación lineal de las otras. Si no estamos en este caso tendríamos un sistema compatible indeterminado.

3. Página 84

Se puede hacer de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{r} 5Y+20T+6I=1292 \\ Y=18+I \\ T=0{,}15Y \\ T=2{,}7+0{,}15I \end{array}\right\}$$

Obtendríamos el mismo resultado.

4. Página 84

Si en 20 días hemos gastado 1 292 Mb.

$\dfrac{1292}{20}\cdot 30=1938<2024 \rightarrow$ Tendría suficiente para todo el mes.