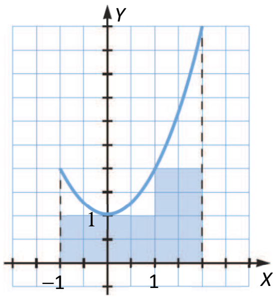
Integrales definidas

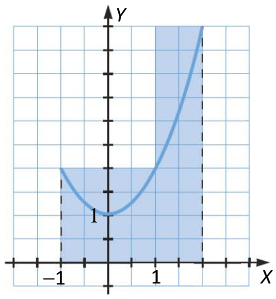
12

ACTIVIDADES

1. Página 294

Tomamos la partición $P=\{a=x_0, x_1, x_2, b=x_3\}=\{-1, 0, 1, 2\}$.



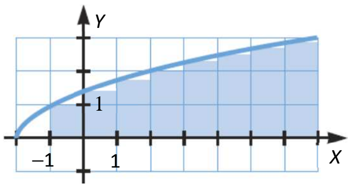


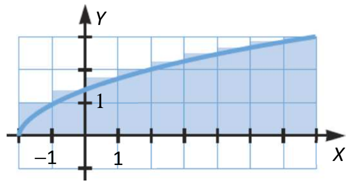
$s=\sum_{i=1}^{3} m_i(x_i-x_{i-1})=1+1+2=4$

$S=\sum_{i=1}^{3} M_i\left(x_{i+1}-x_i\right)=2+2+5=9$

2. Página 294

Tomamos la partición $P=\{a=x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, b=x_{10}\}=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

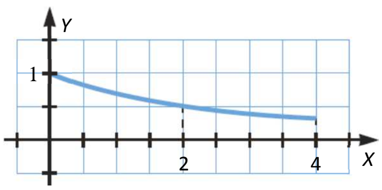


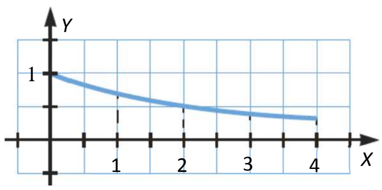


$s=\sum_{i=1}^{3} m_i(x_i-x_{i-1})=0+1+1{,}4+1{,}7+2+2{,}2+2{,}4+2{,}6+2{,}8=16{,}1$

$S=\sum_{i=1}^{3} M_i(x_i-x_{i-1})=1+1{,}4+1{,}7+2+2{,}2+2{,}4+2{,}6+2{,}8+3=19{,}1$

3. Página 295

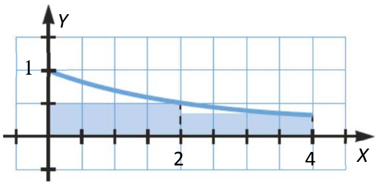


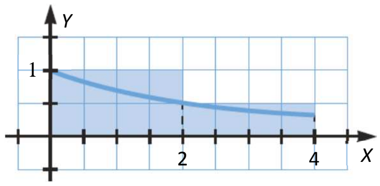


a) Tomamos las particiones $P_1=\{a=x_0, x_1, b=x_2\}=\{0, 2, 4\}$ y $P_2=\{a=x_0, x_1, x_2, x_3, b=x_4\}=\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

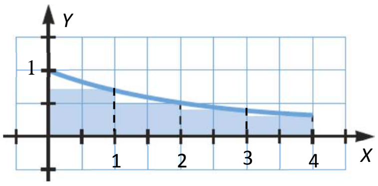
P_2 es más fina que P_1.

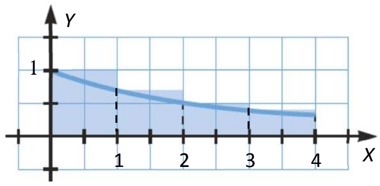
b)





$s_1 = \sum_{i=1}^{2} m_i(x_i - x_{i-1}) = 1 + 0{,}6 = 1{,}6$ $\qquad$ $S_1 = \sum_{i=1}^{2} M_i(x_i - x_{i-1}) = 2 + 1 = 3$





$s_2 = \sum_{i=1}^{4} m_i(x_i - x_{i-1}) = 0{,}6 + 0{,}5 + 0{,}4 + 0{,}3 = 1{,}8$ $\qquad$ $S_2 = \sum_{i=1}^{4} M_i(x_i - x_{i-1}) = 1 + 0{,}6 + 0{,}5 + 0{,}4 = 2{,}5$

4. Página 295

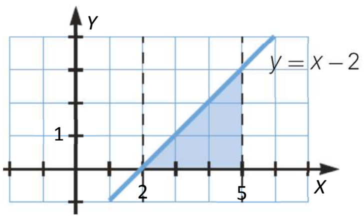
$$\text{Área} = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

Tomamos la partición $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. La función es $f(x) = x - 1$.

$s = \sum_{i=1}^{4} m_i(x_i - x_{i-1}) = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$ $\qquad$ $S = \sum_{i=1}^{4} M_i(x_i - x_{i-1}) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

5. Página 296

a) Representamos el área que tenemos que calcular.



$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

b) Tomamos una sucesión de particiones: $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\} = \left\{2, \frac{3}{n} + 2, \frac{2 \cdot 3}{n} + 2, \dots, \frac{(n-1) \cdot 3}{n} + 2, \frac{3n}{n} + 2 = 5\right\}$

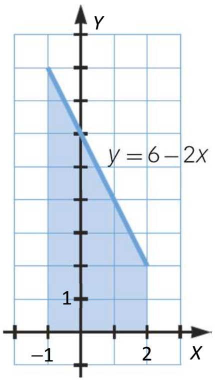
La altura de los rectángulos en cada intervalo es:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{3i-3}{n}\left(\frac{3i}{n} + 2 - \frac{3(i-1)}{n} - 2\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{3i-3}{n} \cdot \frac{3}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(9i - 9) = \frac{9(n-1)}{2n}$$

$m_i = f(x_{i-1}) = x_{i-1} - 2 = \dfrac{3(i-1)}{n} + 2 - 2 = \dfrac{3i-3}{n}$ $\qquad$ $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n+9}{2n}\right) = \frac{9}{2} = 4{,}5$

6. Página 296

a) Representamos el área que tenemos que calcular.



$$\text{Área} = \frac{3 \cdot 6}{2} + 3 \cdot 2 = 9 + 6 = 15$$

b) Tomamos una sucesión de particiones: $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\} = \left\{-1, \frac{3}{n} - 1, \frac{2 \cdot 3}{n} - 1, \ldots, \frac{3n}{n} - 1 = 2\right\}$

La altura de los rectángulos en cada intervalo es:

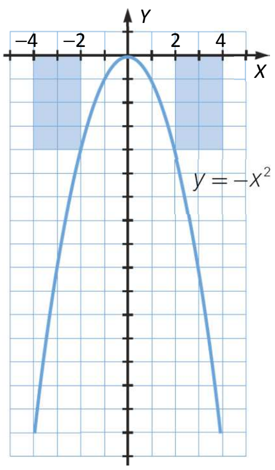
$$m_i = f(x_i) = 6 - 2x_i = 6 - 2\left(\frac{3i}{n} - 1\right) = 6 + 2 - 2 \cdot \frac{3i}{n} = 8 - \frac{6i}{n} = \frac{8n - 6i}{n}$$

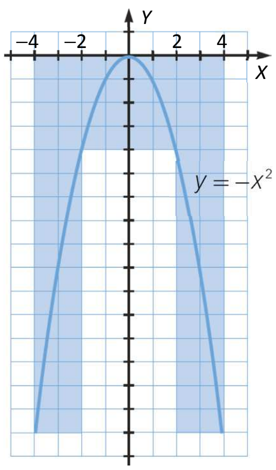
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{8n - 6i}{n}\left(\frac{3i}{n} - 1 - \frac{3(i-1)}{n} + 1\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{8n - 6i}{n} \cdot \frac{3}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (24n - 18i) = \frac{3(5n - 3)}{n}$$

$$\int_2^5 f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{15n - 9}{n}\right) = 15$$

7. Página 297

a) Tomamos la partición $P = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$. La función es $f(x) = -x^2$.





$$s = \sum_{i=1}^{4} m_i (x_i - x_{i-1}) = -32 - 8 - 8 - 32 = -80$$

$$S = \sum_{i=1}^{4} M_i (x_i - x_{i-1}) = -8 - 0 - 0 - 8 = -16$$

Ambas tienen signo negativo.

b) Las sumas inferior y superior tomadas en positivo representan una aproximación por defecto y exceso respectivamente del área en ese intervalo.

c) Se puede aproximar el área restando a la aproximación por exceso (sumas superiores) la aproximación por defecto (sumas inferiores).

$$\text{Área} = \frac{\left|\frac{S}{2}\right| + \left|\frac{s}{2}\right|}{2} = \frac{40+8}{2} = 24$$

8. Página 297

a) Tomamos la sucesión de particiones: $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\} = \left\{0, \frac{3}{n}, \frac{2\cdot 3}{n}, \dots, \frac{3n}{n} = 3\right\}$

La altura de los rectángulos en cada intervalo es:

$$M_i = f(x_i) = 2x_i + 3 = 2\cdot\frac{3i}{n} + 3 = \frac{6i+3n}{n}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{6i+3n}{n}\left(\frac{3i}{n} - \frac{3(i-1)}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{6i+3n}{n}\cdot\frac{3}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(18i+9n) = \frac{9(2n+1)}{n}$$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{18n+9}{n}\right) = 18$$

b) Tomamos la sucesión de particiones: $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\} = \left\{-1, \frac{2}{n} - 1, \frac{2\cdot 2}{n} - 1, \dots, \frac{2n}{n} - 1 = 1\right\}$

La altura de los rectángulos en cada intervalo es: $m_i = f(x_i) = 6 - 3x_i = 6 - 3\cdot\frac{2i-n}{n} = \frac{9n-6i}{n}$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{9n-6i}{n}\left(\frac{2i}{n} - 1 - \frac{2(i-1)}{n} + 1\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{9n-6i}{n}\cdot\frac{2}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(18n-12i) = \frac{6(2n-1)}{n}$$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{12n-6}{n}\right) = 12$$

9. Página 297

Como x y x^2 son funciones continuas en el intervalo $(1, 5)$ y $x \le x^2$, en dicho intervalo se tiene:

$$\int_1^5 x\,dx \le \int_1^5 x^2\,dx$$

10. Página 298

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(4 - \left(\frac{2i}{n}\right)^2\right)\cdot\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8}{n} - \frac{8i^2}{n^3}\right) = 8 - \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

Calculamos $\sum_{i=1}^{n} i^2$:

Para $n = 1 \to \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1$ Para $n = 2 \to \sum_{i=1}^{n} i^2 = 5$

Para $n = 3 \to \sum_{i=1}^{n} i^2 = 14$ Para $n = 4 \to \sum_{i=1}^{n} i^2 = 30$

Para $n = 5 \to \sum_{i=1}^{n} i^2 = 55$ Para $n = 6 \to \sum_{i=1}^{n} i^2 = 91$

Calcular $\sum_{i=1}^{n} i^2$ equivale a encontrar el término general, a_n, de la sucesión $\{1, 5, 14, 30, 55, 91, \ldots\}$.

$5-1=4 \qquad 14-5=9 \qquad 30-14=16 \qquad 55-30=25 \qquad 91-55=36 \ \ldots$

Como la diferencia entre términos consecutivos no es constante, no es una progresión aritmética (polinomio de grado 1).

Continuamos haciendo diferencias sucesivas hasta ver que la diferencia de términos es constante.

$9-4=5 \qquad 16-9=7 \qquad 25-16=9 \qquad 36-25=11$ Entonces no es polinomio de grado 2.

$7-5=2 \quad 9-7=2 \quad 11-9=2 \quad \ldots$ Entonces es polinomio de grado 3.

El término general será de la forma: an^3+bn^2+cn+d. Sustituyendo para los distintos valores de *n* obtenemos un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c+d=1 \\ 8a+4b+2c+d=5 \\ 27a+9b+3c+d=14 \\ 64a+16b+4c+d=30 \end{array}\right\} \rightarrow a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{6}, d=0$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n=\frac{2n^3+3n^2+n}{6} \qquad S_n=8-\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2=8-\frac{8}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$\int_0^2 (4-x^2)\,dx=\lim_{n\to\infty}\left(8-\frac{8}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right)=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

$$\int_0^2 (4-x^2)\,dx=f(c)\cdot 2\rightarrow\frac{16}{3}=f(c)\cdot 2\rightarrow f(c)=\frac{8}{3}\rightarrow 4-c^2=\frac{8}{3}\rightarrow c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

El área entre la función y el eje *X* es igual al área de un rectángulo de base 2 y altura $f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{8}{3}$.

11. Página 298

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}-\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i-\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$\int_0^1 (x-x^2)\,dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 (x-x^2)\,dx=f(c)\cdot 1\rightarrow\frac{1}{6}=f(c)\rightarrow c-c^2=\frac{1}{6}\rightarrow\left\{\begin{array}{l} c=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\rightarrow c\in[0,1] \\ c=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\rightarrow c\in[0,1] \end{array}\right.$$

Así para $c=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$ y $c=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}$, $\int_0^1 (x-x^2)\,dx=f(c)\cdot 1=\frac{1}{6}$.

12. Página 299

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{x_i}{n}\right)^2-4\right)\cdot\frac{x}{n}=\left(\frac{x^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right)-4x=\frac{x^3}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6}-4x$$

$$\int_0^x (t^2-4)\,dt=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^3}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6}-4x\right)=\frac{x^3}{3}-4x$$

13. Página 299

Por ser continua la función, aplicando el teorema fundamental del cálculo integral, la derivada es: $A'(x)=4x^2$.

14. Página 300

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(-x^2-2)dx=\frac{-x^3}{3}-2x+k$$

$$[F(x)]_4^7=F(7)-F(4)=\frac{-7^3}{3}-2\cdot 7+k-\left(\frac{-4^3}{3}-2\cdot 4+k\right)=-99$$

15. Página 300

$$\left[\frac{e^x}{ax-1}\right]_0^1=e+1\rightarrow\frac{e}{a-1}-\frac{1}{-1}=e+1\rightarrow a=2$$

16. Página 301

a) $\int_{-2}^{2}(2x^3-4x+3)\,dx=\left[\frac{x^4}{2}-2x^2+3x\right]_{-2}^{2}=6+6=12$

b) $\int_0^e\frac{-3x}{x^2+1}\,dx=\left[\frac{-3}{2}\ln|x^2+1|\right]_0^e=\frac{-3}{2}\ln|e^2+1|-0=\frac{-3}{2}\ln|e^2+1|$

17. Página 301

a) $\int_0^{\pi}(2sen\,x-4x)\,dx=\left[-2cos\,x-2x^2\right]_0^{\pi}=(2-2\pi^2)-(-2)=4-2\pi^2$

b) $\int_1^4\frac{x-2}{x^2}\,dx=\left[\ln|x|+\frac{2}{x}\right]_1^4=\ln 4+\frac{1}{2}-2=\ln 4-\frac{3}{2}$

18. Página 302

a) $\text{Área}=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{2\cdot 4}{2}=4$

b) Tomamos la sucesión de particiones: $P=\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}=\left\{0, \frac{2\cdot 1}{n}, \frac{2\cdot 2}{n}, \ldots, \frac{2n}{n}=2\right\}$

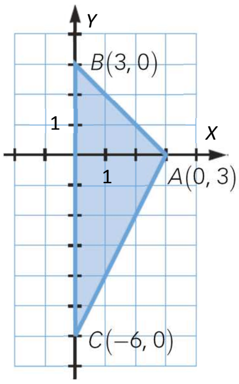
La altura de los rectángulos en cada intervalo es: $m_i=f(x_i)=-2x_i+4=-2\cdot\frac{2i}{n}+4=\frac{-4i+4n}{n}$

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\frac{-4i+4n}{n}\left(\frac{2i}{n}-\frac{2(i-1)}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{-4i+4n}{n}\cdot\frac{2}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(-8i+8n)=\frac{4(n-1)}{n}$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4(n-1)}{n}\right)=4$$

c) $\int_0^2(-2x+4)\,dx=\left[-x^2+4x\right]_0^2=(-2^2+4\cdot 2)-0=4$

19. Página 302



a) $\text{Área} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{3 \cdot 9}{2} = \dfrac{27}{2} = 13{,}5$

b) $\text{Área} = \int_0^3 (3-x)\,dx - \int_0^3 (2x-6)\,dx = \left[3x - \dfrac{x^2}{2}\right]_0^3 - \left[x^2-6x\right]_0^3 = 9 - \dfrac{9}{2} - 9 + 18 = \dfrac{27}{2} = 13{,}5$

20. Página 303

a) $\text{Área} = \int_{-1}^2 (4-x^2)\,dx - \int_2^3 (4-x^2)\,dx = \left[4x - \dfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^2 - \left[4x - \dfrac{x^3}{3}\right]_2^3 = 9 - \left(-\dfrac{7}{3}\right) = \dfrac{27}{3} + \dfrac{7}{3} = \dfrac{34}{3}$

b) $\text{Área} = -\int_{-1}^3 (x^2-2x-8)\,dx = -\left[\dfrac{x^3}{3} - x^2 - 8x\right]_{-1}^3 = -\left(9-9-24+\dfrac{1}{3}+1-8\right) = \dfrac{92}{3} = 30{,}\widehat{6}$

21. Página 303

a) $\text{Área} = \int_{-2}^0 (3x^2-5x)\,dx - \int_0^1 (3x^2-5x)\,dx = \left[x^3 - \dfrac{5}{2}x^2\right]_{-2}^0 - \left[x^3 - \dfrac{5}{2}x^2\right]_0^1 = 8+10-1+\dfrac{5}{2} = \dfrac{39}{2}$

b) $\text{Área} = -\int_{-2}^{-1} (2x^3+x^2-x)\,dx + \int_{-1}^0 (2x^3+x^2-x)\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} (2x^3+x^2-x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x^3+x^2-x)\,dx$

$\int_{-2}^{-1} (2x^3+x^2-x)\,dx = \left[\dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{-1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} - \left(8 - \dfrac{8}{3} - 2\right) = -\dfrac{1}{3} - 8 + \dfrac{8}{3} + 2 = -\dfrac{11}{3}$

$\int_{-1}^0 (2x^3+x^2-x)\,dx = \left[\dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0 = -\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{3}$

$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x^3+x^2-x)\,dx = \left[\dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{24} - \dfrac{1}{8} = -\dfrac{5}{96}$

$\int_{\frac{1}{2}}^1 (2x^3+x^2-x)\,dx = \left[\dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{32} - \dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{37}{96}$

$\text{Área} = \dfrac{11}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{96} + \dfrac{37}{96} = \dfrac{71}{16}$

22. Página 304

Calculamos los puntos de corte de las funciones:

$f(x) - g(x) = 0 \rightarrow 5x + 3x^2 - x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$

$\text{Área} = \left|\int_{-3}^1 (2x^2+4x-6)\,dx\right| = \left|\left[\dfrac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x\right]_{-3}^1\right| = \left|\dfrac{2}{3} + 2 - 6 + 18 - 18 - 18\right| = \dfrac{64}{3}$

23. Página 304

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$f(x)-g(x)=0 \rightarrow (6x-x^2)-(x^2-2x)=0 \rightarrow -2x^2+8x=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

$$\text{Área}=\left|\int_0^4 (8x-2x^2)\,dx\right|=\left|\left[4x^2-\frac{2x^3}{3}\right]_0^4\right|=\frac{64}{3}$$

24. Página 305

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$f(x)-g(x)=0 \rightarrow (x^3-x)-3x=0 \rightarrow x^3-4x=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\text{Área}=\left|\int_{-2}^0 (x^3-4x)\,dx\right|+\left|\int_0^2 (x^3-4x)\,dx\right|=\left|\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^0\right|+\left|\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_0^2\right|=|-4+8|+|4-8|=4+4=8$$

25. Página 305

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$f(x)-g(x)=0 \rightarrow (x^3-2x)-(-x^2)=0 \rightarrow x^3+x^2-2x=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\text{Área}=\left|\int_{-2}^0 (x^3+x^2-2x)\,dx\right|+\left|\int_0^1 (x^3+x^2-2x)\,dx\right|=\left|\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^0\right|+\left|\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^1\right|=\frac{8}{3}+\left|\frac{-5}{12}\right|=\frac{37}{12}$$

SABER HACER

26. Página 306

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx=\begin{cases} -\ln x & \text{si } \frac{1}{e}\le x<1 \\ \ln x & \text{si } 1\le x\le e \end{cases}$$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx=-\int_{\frac{1}{e}}^{1} |\ln x|\,dx+\int_1^e |\ln x|\,dx=-[x\ln x-x]_{\frac{1}{e}}^{1}+[x\ln x-x]_1^e=1-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=2-\frac{2}{e}$$

27. Página 306

El denominador de la función se anula para $x=0$ y $x=1$; por tanto, es continua en el intervalo de integración.

$$\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx=\left[\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}\right]_{-2}^{-1}=\frac{1}{6}+\ln 3-2\ln 2$$

28. Página 307

La función es continua en el intervalo de integración. Aplicamos la fórmula de integración por partes con:

$u = x^2 + 1 \rightarrow du = 2x \qquad dv = sen\ x\ dx \rightarrow v = -cos\ x$

$$\int (x^2+1) sen\ x\ dx = -(x^2+1) cos\ x + 2\int x cos\ x\ dx = -(x^2+1) cos\ x + 2x sen\ x - 2\int sen\ x\ dx$$

Aplicamos la fórmula de integración por partes con:

$u = x \rightarrow du = dx \qquad dv = cos\ x\ dx \rightarrow v = sen\ x$

$$-(x^2+1)\ cos\ x + 2\int x\ cos\ x\ dx = -(x^2+1)\ cos\ x + 2x\ sen\ x - 2\int sen\ x\ dx =$$

$$= -(x^2+1)\ cos\ x + 2x\ sen\ x + 2\ cos\ x + k = 2x\ sen\ x + (1-x^2)\ cos\ x + k$$

$$\int_0^{\pi} (x^2+1) sen\ x\ dx = \left[2x\ sen\ x + (1-x^2) cos\ x\right]_0^{\pi} = 0 + (1-\pi^2)(-1) - 0 - 1 = \pi^2 - 2$$

29. Página 307

a) La función es continua en el intervalo de integración. Hacemos el cambio de variable $t = \sqrt{x} \rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

$$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}\left(1-x^2\right)} dx = \left[arc\ tg\ \sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln|\sqrt{x}+1| - \frac{1}{2}\ln|\sqrt{x}-1|\right]_4^9 = arc\ tg\ 3 + \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}\ln 2 - arc\ tg\ 2 - \frac{1}{2}\ln 3 =$$

$$= arc\ tg\ 3 - arc\ tg\ 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{2}{3} = -0,06083$$

b) La función es continua en el intervalo de integración. Hacemos el cambio de variable $t = cos\ x \rightarrow dt = -sen\ x\ dx$.

$$\int tg^3 x\ dx = \int \frac{sen^3 x}{cos^3 x} dx = -\int \frac{sen^2 x}{cos^3 x}\cdot(-sen\ x)\ dx = -\int \frac{\left(1-cos^2 x\right)}{cos^3 x}\cdot(-sen\ x)\ dx = -\int \frac{1-t^2}{t^3} dt =$$

$$= -\left(\int \frac{1}{t^3} dt - \int \frac{1}{t} dt\right) = \frac{1}{2t^2} + \ln|t| = \frac{1}{2\ cos^2 x} + \ln|cos\ x|$$

$$\int_0^{\pi/4} tg^3 x\ dx = \left[\frac{1}{2\ cos^2 x} + \ln|cos\ x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = 0,15343$$

30. Página 308

Calculamos los puntos de corte con el eje de abscisas:

$4x + 12 = 0 \rightarrow x = -3$

Calculamos los puntos de corte en el intervalo de integración:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-2}^{-1} (4x+12)\ dx\right| + \left|\int_{-1}^{1} \left(x^2-4x+3\right) dx\right| + \left|\int_{1}^{3} \left(x^2-4x+3\right) dx\right| + \left|\int_{3}^{4} \left(x^2-4x+3\right) dx\right| =$$

$$= \left|\left[2x^2+12x\right]_{-2}^{-1}\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_{-1}^{1}\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_{1}^{3}\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_{3}^{4}\right| = 6 + \frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{46}{3}$$

31. Página 308

Calculamos los puntos de corte con el eje de abscisas:

$$\frac{x^2}{x^4-1}=0 \rightarrow x=0$$

No hay puntos de corte con el eje X en el intervalo de integración.

$$\int \frac{x^2}{x^4-1}\,dx=\int \frac{-\frac{1}{4}}{x+1}\,dx+\int \frac{\frac{1}{4}}{x-1}\,dx+\int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1}\,dx=-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\text{arc tg } x=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln|x-1|-\ln|x+1|\right)+\frac{\text{arc tg } x}{2}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{\text{arc tg } x}{2}$$

$$\left|\int_4^c \frac{x^2}{x^4-1}\,dx\right|=\left|\left[\frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1}+\frac{\text{arc tg } x}{2}\right]_4^c\right|=\left|\frac{1}{4}\ln\frac{c-1}{c+1}+\frac{\text{arc tg } c}{2}-\frac{1}{4}\ln\frac{3}{5}-\frac{\text{arc tg } 4}{2}\right|$$

$$\text{Área}=\lim_{c\to+\infty}\left|\frac{1}{4}\ln\frac{c-1}{c+1}+\frac{\text{arc tg } c}{2}-\frac{1}{4}\ln\frac{3}{5}-\frac{\text{arc tg } 4}{2}\right|=\left|\frac{1}{4}\ln 1+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\ln\frac{3}{5}-\frac{\text{arc tg } 4}{2}\right|=\left|\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\ln\frac{3}{5}-\frac{\text{arc tg } 4}{2}\right|=0{,}2502$$

32. Página 308

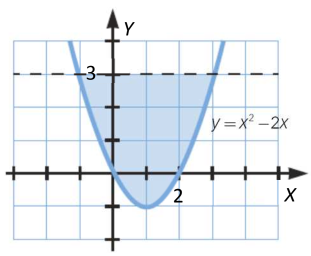
Calculamos los puntos de corte de la función con el eje X.

$$x^3-9x=0\rightarrow\begin{cases}x=-3\\x=0\\x=3\end{cases}$$

$$\int (x^3-9x)\,dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2$$

$$\text{Área}=\left|\int_{-3}^{0}\left(x^3-9x\right)dx\right|+\left|\int_{0}^{3}\left(x^3-9x\right)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2\right]_{-3}^{0}\right|+\left|\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2\right]_{0}^{3}\right|=\frac{81}{4}+\frac{81}{4}=\frac{81}{2}=40{,}5$$

33. Página 309



Calculamos los puntos de corte de la función con el eje X.

$$x^2-2x=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$$

Hallamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$x^2-2x=3\rightarrow\begin{cases}x=-1\\x=3\end{cases}$$

$$\text{Área}_1=\left|\int_{-1}^{3}(3-x^2+2x)\,dx\right|=\left|\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{3}\right|=\frac{32}{3}$$

$$\text{Área}_2=\left|\int_{0}^{2}(x^2-2x)\,dx\right|=\left|\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{0}^{2}\right|=\frac{4}{3}$$

$$\text{Área}=\text{Área}_1-\text{Área}_2=\frac{32}{3}-\frac{4}{3}=12$$

34. Página 309

$$f(x)=\frac{|x|}{2}=\begin{cases}-\dfrac{x}{2} & \text{si } x<0\\ \dfrac{x}{2} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

Si $x<0$, $-\frac{x}{2}=\frac{1}{1+x^2}\rightarrow x=-1$

Si $x\geq 0$, $\frac{x}{2}=\frac{1}{1+x^2}\rightarrow x=1$

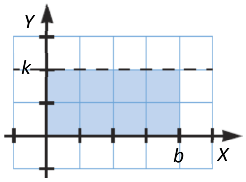
$$\text{Área}=\left|\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{x}{2}\right)dx\right|+\left|\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{x}{2}\right)dx\right|=\left|\left[arc\ tg\ x+\frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[arc\ tg\ x-\frac{1}{4}x^2\right]_{0}^{1}\right|=$$

$$=\left|arc\ tg\ 0-arc\ tg\ (-1)-\frac{1}{4}\right|+\left|arc\ tg\ 1-\frac{1}{4}-arc\ tg\ 0\right|=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$$

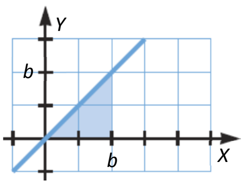
ACTIVIDADES FINALES

35. Página 310

a) Es el área de un rectángulo de base b y altura k $\rightarrow$ Área $=b\cdot k$.



b) Es el área de un triángulo de base b y altura b $\rightarrow$ Área $=\frac{b\cdot b}{2}$.



36. Página 310

Vamos a calcular $\sum_{i=1}^{n} i^2$:

Para $n=1\rightarrow\sum_{i=1}^{n} i^2=1$ Para $n=2\rightarrow\sum_{i=1}^{n} i^2=5$ Para $n=3\rightarrow\sum_{i=1}^{n} i^2=14$

Para $n=4\rightarrow\sum_{i=1}^{n} i^2=30$ Para $n=5\rightarrow\sum_{i=1}^{n} i^2=55$ Para $n=6\rightarrow\sum_{i=1}^{n} i^2=91$

Calcular $\sum_{i=1}^{n} i^2$ equivale a encontrar el término general, a_n, de la sucesión $\{1, 5, 14, 30, 55, 91, ...\}$.

$5-1=4$ $14-5=9$ $30-14=16$ $55-30=25$ $91-55=36$ ...

Como la diferencia entre términos consecutivos no es constante, no es una progresión aritmética (polinomio de grado 1).

Continuamos haciendo diferencias sucesivas hasta ver que la diferencia de términos es constante.

$9-4=5$	$16-9=7$	$25-16=9$	$36-25=11$	No es un polinomio de grado 2.
$7-5=2$ $9-7=2$	$11-9=2$	…		Es un polinomio de grado 3.

El término general será de la forma an^3+bn^2+cn+d . Sustituyendo para los distintos valores de *n* obtenemos un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c+d=1 \\ 8a+4b+2c+d=5 \\ 27a+9b+3c+d=14 \\ 64a+16b+4c+d=30 \end{array}\right\} \rightarrow a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{6}, d=0$$

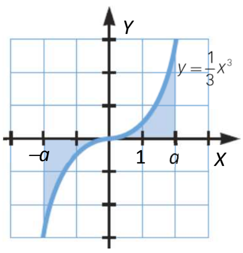
$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\int_0^b x^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\left(b^3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\right)=\frac{b^3}{3}$$

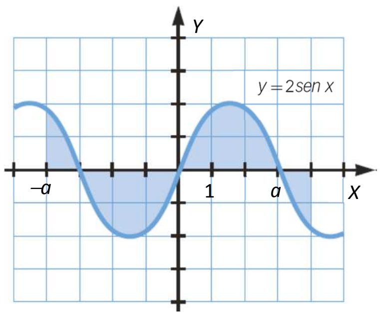
$\int_0^b x^2\,dx$ es el área bajo la curva $y=x^2$ entre los valores del eje de abscisas $x=0$ y $x=b$.

37. Página 310

a)



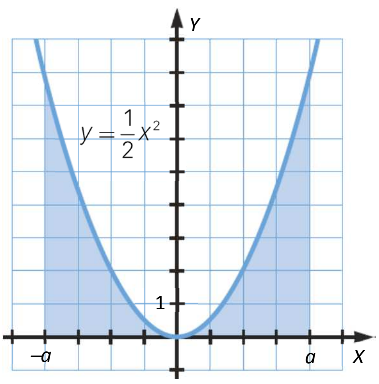
b)



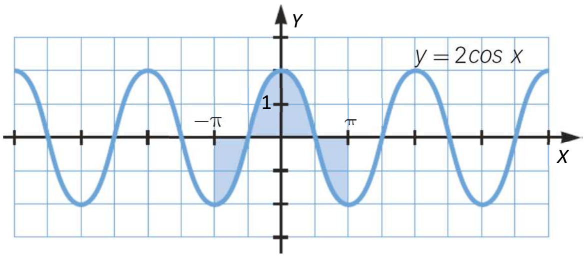
En ambos casos son funciones impares, por lo que el área de la región correspondiente al intervalo [0, *a*] es igual que la del intervalo [–*a*, 0] pero de signo contrario. La integral definida en un intervalo centrado en cero es nula.

38. Página 310

a) La integral de esta función no puede ser nula en ningún intervalo. Es una función par que toma siempre valores positivos.



b) La integral de esta función sí puede ser nula, pero no en todos los intervalos centrados en cero.



Vemos que, en el intervalo $(-\pi, \pi)$, la integral se anula porque el área comprendida entre la parte positiva de la función y el eje de abscisas es igual a la región comprendida entre este eje y la parte negativa. Así, tenemos que la integral es nula en todos los intervalos de la forma $(-k\pi, k\pi)$, con $k \in \mathbb{N}$.

39. Página 310

a) Geométricamente es el área de dos triángulos con misma base y altura.

$$\text{Área} = 2 \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} = 16 \qquad \int_{-4}^{4} f(x)\,dx = \int_{-4}^{0} (-x)\,dx + \int_{0}^{4} x\,dx = \frac{16}{2} + \frac{16}{2} = 16$$

b) Geométricamente es el área de un trapecio de bases 6 y 2, y altura 2.

$$\text{Área} = \frac{6+2}{2} \cdot 2 = 8 \qquad \int_{-2}^{4} g(x)\,dx = \int_{-2}^{0} (x+2)\,dx + \int_{0}^{2} 2\,dx + \int_{2}^{4} (4-x)\,dx = 2+4+2 = 8$$

c) Geométricamente es la diferencia del área de dos triángulos.

$$\text{Área} = \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{3 \cdot 3}{2} = -\frac{5}{2} \qquad \int_{-2}^{3} h(x)\,dx = \int_{-2}^{3} (x-1)\,dx = \int_{-2}^{1} (x-1)\,dx + \int_{1}^{3} (x-1)\,dx = \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{3 \cdot 3}{2} = -\frac{5}{2}$$

40. Página 310

Buscamos la expresión algebraica de la función: $f(x) = \begin{cases} 6x+6 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 6 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ -2x+8 & \text{si } 1 < x \le 4 \end{cases}$

Calculamos la integral.

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (6x+6)\,dx + \int_{0}^{1} 6\,dx + \int_{1}^{4} (-2x+8)\,dx = \left[3x^2+6x\right]_{-1}^{0} + \left[6x\right]_{0}^{1} + \left[-x^2+8x\right]_{1}^{4} = 3+6+9 = 18$$

41. Página 310

a) $$\int_{0}^{4} (2+x)\,dx = \int_{0}^{4} 2\,dx + \int_{0}^{4} x\,dx = 2\int_{0}^{4} dx + \int_{0}^{4} x\,dx = \left[2x\right]_{0}^{4} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{4} = 8+8 = 16$$

b) $$\int_{-3}^{2} x^2\,dx = \int_{-3}^{0} x^2\,dx + \int_{0}^{2} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2} = 9 + \frac{8}{3} = \frac{35}{3}$$

c) $$\int_{0}^{2} (x^2-3x+5)\,dx = \int_{0}^{2} x^2\,dx - 3\int_{0}^{2} x\,dx + 5\int_{0}^{2} dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2} - 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} + 5\left[x\right]_{0}^{2} = \frac{8}{3} - 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = \frac{20}{3}$$

42. Página 310

$$\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} (-2x)\,dx + \int_{0}^{4} 3x\,dx = \left[-x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{4} = 4+24 = 28$$

43. Página 310

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1}(-2x+5)\,dx + \int_{1}^{3}(x^2+2)\,dx = \left[-x^2+5x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_{1}^{3} = -1+5+1+5+9+6-\frac{1}{3}-2 = \frac{68}{3}$$

44. Página 310

Como $\frac{1}{1+x^4} \geq \frac{1}{2}$, y $f(x)=\frac{1}{1+x^4}$ y $g(x)=\frac{1}{2}$ son continuas en el intervalo $[-1, 1]$, entonces:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^4}dx \geq \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dx = \left[\frac{1}{2}x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

45. Página 310

a) $\int_{0}^{4}(3x-2)\,dx = \left[\frac{3}{2}x^2-2x\right]_{0}^{4} = 24-8 = 16$

b) El área comprendida entre la función, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=4$ es la misma que el área del rectángulo de base 4 unidades y altura $f(c)=4$.

c) $f(c)=4 \rightarrow c=2$

46. Página 310

a) Veamos si la función es continua en ese intervalo: $x^2-1=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

El denominador de la función se anula en $x=-1$ y $x=1$, por lo que la función es continua en el intervalo [2, 3]. Por tanto, se puede aplicar el teorema del valor medio del cálculo integral.

b) $\int_{2}^{3}\frac{2x}{x^2-1}dx = \left[\ln\left|x^2-1\right|\right]_{2}^{3} = \ln 8 - \ln 3 = \ln\frac{8}{3}$

$\ln\frac{8}{3} = f(c)\cdot 1 \rightarrow \ln\frac{8}{3} = \frac{2c}{c^2-1} \rightarrow \begin{cases} c=-0{,}408 \\ c=2{,}449 \end{cases} \rightarrow c=2{,}449$ pertenece al intervalo [2, 3].

47. Página 310

a) Tenemos que calcular el valor de *a* para el que la función sea continua.

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x)=-x+a & \text{si } x\leq -1 \\ f_2(x)=x^2+2 & \text{si } x>-1 \end{cases}$$

$f_1(-1)=f_2(-1) \rightarrow 1+a=1+2 \rightarrow a=2$

b) $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} f_1(x)\,dx + \int_{-1}^{0} f_2(x)\,dx = \int_{-2}^{-1}(-x+2)\,dx + \int_{-1}^{0}(x^2+2)\,dx =$

$= \left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}-2+2+4+\frac{1}{3}+2 = \frac{35}{6}$

$\frac{35}{6} = f(c)\cdot 2 \rightarrow f(c)=\frac{35}{12} \rightarrow c=\pm\sqrt{\frac{11}{12}} \rightarrow c=\sqrt{\frac{11}{12}}$

48. Página 310

$$\int_{-5}^{0}\sqrt{1-3x}\,dx=-\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{2}{3}(1-3x)^{\frac{3}{2}}\right]_{-5}^{0}=-\frac{2}{9}\cdot\left(1-16^{\frac{3}{2}}\right)=-\frac{2}{9}\cdot(1-64)=\frac{2\cdot 63}{9}=14$$

$$14=f(c)\cdot 5\rightarrow f(c)=\frac{14}{5}\rightarrow c=-\frac{57}{25}$$

El área comprendida entre la función, el eje de abscisas y las rectas $x=-5$ y $x=0$ es la misma que el área del rectángulo de base 5 y altura $f(c)=\frac{14}{5}$.

49. Página 310

$$\int_{-1}^{2}f(x)\,dx=\left[x\cdot e^{x}\right]_{-1}^{2}=2e^{2}+e^{-1}=2e^{2}+\frac{1}{e}$$

$$2e^{2}+\frac{1}{e}=f(c)\cdot 3\rightarrow f(c)=\frac{2}{3}e^{2}+\frac{1}{3e}$$

El área comprendida entre la función, el eje de abscisas y las rectas $x=-1$ y $x=2$ es la misma que el área del rectángulo de base 3 y altura $f(c)=\frac{2}{3}e^{2}+\frac{1}{3e}$.

50. Página 310

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}(a+b\cos x)\,dx=\left[ax+b\,\mathrm{sen}\,x\right]_{-\pi}^{\pi}=2a\pi$$

$$2a\pi=f(c)\cdot 2\pi\rightarrow f(c)=a$$

Si $b=0\rightarrow$ Se cumple para todos los puntos del intervalo $(-\pi,\pi)$.

Si $b\neq 0\rightarrow \cos c=0\rightarrow\begin{cases}c=-\dfrac{\pi}{2}\\ c=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

51. Página 310

La función $f(t)=\ln(t^{2}+3)$ es continua en el intervalo dado. Entonces podemos aplicar el teorema:

$$F'(x)=f(x)=\ln(x^{2}+3)\ \forall x\in[0,+\infty]$$

52. Página 311

La función $f(t)=\frac{1}{1+t^{2}}$ es siempre continua. Entonces podemos aplicar el teorema:

$$F'(x)=f(x^{2})\cdot 2x=\frac{2x}{1+x^{4}}\ \forall x\in\mathbb{R}$$

53. Página 311

La función $f(t)=3\,tg^{2}t$ es continua. Entonces podemos aplicar el teorema:

$$F'(x)=f(x)=3\,tg^{2}x\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

54. Página 311

La función $f(t)=4t^2-1$ es continua. Entonces podemos aplicar el teorema fundamental de cálculo integral:

$F'(x)=f(1-x^2)\cdot(-2x)=(4(x^4-2x^2+1)-1)\cdot(-2x)=-8x^5+16x^3-6x \ \forall x\in\mathbb{R}$

$$-8x^5+16x^3-6x=0\rightarrow x(-8x^4+16x^2-6)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\-8x^4+16x^2-6=0\end{cases}$$

$$-8x^4+16x^2-6=0\rightarrow x^2=\frac{-16\pm\sqrt{16^2-4\cdot8\cdot6}}{-16}\rightarrow\begin{cases}x^2=\dfrac{1}{2}\rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}\\[2mm] x^2=\dfrac{3}{2}\rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}\end{cases}$$

Así, la función derivada se anula en los puntos: $\left\{-\sqrt{\frac{3}{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$.

55. Página 311

La función $f(t)=t^2-1$ es continua. Entonces podemos aplicar el teorema fundamental de cálculo integral:

$F'(x)=f(x^2-1)\cdot(2x)=(x^4-2x^2)\cdot(2x)=2x^5-4x^3 \ \forall x\in\mathbb{R}$

$$2x^5-4x^3=0\rightarrow x^3(2x^2-4)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\2x^2-4=0\rightarrow x=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

La función derivada se anula en los puntos: $\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$. Estudiamos el signo de la derivada en estos puntos.

$F'(x)<0 \ \forall x<-\sqrt{2}\rightarrow$ $F(x)$ decrece en el intervalo $(-\infty,-\sqrt{2})$.

$F'(x)>0 \ \forall -\sqrt{2}<x<0\rightarrow$ $F(x)$ crece en el intervalo $(-\sqrt{2},0)$.

$F'(x)<0 \ \forall 0<x<\sqrt{2}\rightarrow$ $F(x)$ decrece en el intervalo $(0,\sqrt{2})$.

$F'(x)>0 \ \forall x>\sqrt{2}\rightarrow$ $F(x)$ crece en el intervalo $(\sqrt{2},+\infty)$.

Por tanto, la función presenta mínimos relativos en $x=-\sqrt{2}$ y en $x=\sqrt{2}$, y un máximo relativo en $x=0$.

56. Página 311

La función $f(t)=t\cdot\cos t$ es continua. Entonces podemos aplicar el teorema fundamental de cálculo integral:

$F'(x)=f(x)=x\cdot\cos x \ \ \forall x\in\mathbb{R}$

$x\cdot\cos x=0\rightarrow\cos x=0\rightarrow x=\frac{\pi}{2}$

La función derivada se anula en $x=\frac{\pi}{2}$. Estudiamos el signo de la derivada en estos puntos.

$F'(x)>0 \quad \forall x<\frac{\pi}{2}\rightarrow$ $F(x)$ crece en el intervalo $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

$F'(x)<0 \quad \forall x>\frac{\pi}{2}\rightarrow$ $F(x)$ decrece en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

La función presenta un máximo relativo en $x=\frac{\pi}{2}$.

57. Página 311

La función $f(t)=e^{-t^2}$ es continua. Entonces podemos aplicar el teorema fundamental de cálculo integral:

$F'(x)=f(x+2)=e^{-(x+2)^2}$

$F''(x)=-2(x+2)e^{-(x+2)^2}=0\rightarrow x=-2$ $\quad F''(x)>0 \quad \forall x<-2$ $\quad F''(x)<0 \quad \forall x>-2$

La función presenta un punto de inflexión en $x=-2$.

58. Página 311

La función $f(t)=sen\,t^2$ es continua. Entonces podemos aplicar el teorema fundamental de cálculo integral:

$F'(x)=f(x)=sen\,x^2$

La función $f(x)$ determina la pendiente de la recta tangente a la función $F(x)$. Por tanto, la pendiente de $F(x)$ en $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ será $f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=sen\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

59. Página 311

$f(x)$ es continua en $[0, 2]$ y $F(x)=\frac{1}{3}arc\,tg\,\frac{x}{3}$ una primitiva de $f(x)$. Así, podemos aplicar la regla de Barrow:

$$\int_0^2 \frac{1}{9+x^2}dx=\left[\frac{1}{3}arc\,tg\,\frac{x}{3}\right]_0^2=\frac{1}{3}arc\,tg\,\frac{2}{3}$$

Geométricamente es el área de la región limitada por la curva, el eje *X* y las rectas $x=0$ y $x=2$.

60. Página 311

$f(x)$ es continua en $[0,5;\,1]$. Podemos aplicar la regla de Barrow siempre que exista una primitiva de la función. Realizamos el cambio de variable:

$t=e^x\rightarrow dt=e^x\,dx$ $\quad x\in[0,5;\,1]\rightarrow t\in\left[\sqrt{e},\,e\right]$

$$\int_{0,5}^1 \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx=\int_{\sqrt{e}}^e \frac{1}{t^2-1}dt=\int_{\sqrt{e}}^e \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}+\frac{-1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{2}[\ln|t+1|-\ln|t+1|]_{\sqrt{e}}^e=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln|e-1|-\ln|e+1|-\ln|\sqrt{e}-1|+\ln|\sqrt{e}+1|\right)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(e-1)\left(\sqrt{e}+1\right)}{(e+1)\left(\sqrt{e}-1\right)}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{e}+1\right)^2}{(e+1)}\right|$$

61. Página 311

a) $\int_1^5 (2+4x^3)\,dx=\left[2x+x^4\right]_1^5=635-3=632$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sen\,2x\,dx=\left[-\frac{1}{2}cos\,2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=0-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

c) $\int_1^9 (\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})\,dx=\left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^9=\left(\frac{27}{4}\sqrt[3]{9}+18\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right)=\frac{27}{4}\sqrt[3]{9}+\frac{199}{12}$

d) $\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx=\left[e^{x^2}\right]_0^1=e-1$

e) $\int_0^1 (2e^x-4x^2)\,dx=\left[2e^x-\frac{4}{3}x^3\right]_0^1=2e-\frac{4}{3}-2=2e-\frac{10}{3}$

f) $\int_{-1}^{1}|x-2|\,dx=\int_{-1}^{1}(2-x)\,dx=\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)=4$

g) $\int_{1}^{4}\frac{3}{\sqrt{x}}\,dx=\left[6\sqrt{x}\right]_1^4=(12-6)=6$

h) $\int_{0}^{\pi}cos^2x\,dx=\left[\frac{x}{2}+\frac{sen\,2x}{4}\right]_0^{\pi}=\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{2}$

i) $\int_{1}^{e}\ln x^2\,dx=\left[-2x+x\ln x^2\right]_1^e=(-2e+2e+2)=2$

j) $\int_{0}^{2}3xe^x\,dx=\left[3xe^x-3e^x\right]_0^2=3e^2+3$

62. Página 311

a) $\int_{2}^{3}\left(2^x+\sqrt{2x}\right)dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{2}{3}\sqrt{2x^3}\right]_2^3=\left[\frac{2^3}{\ln 2}+\frac{2}{3}\sqrt{2\cdot 3^3}\right]-\left[\frac{2^2}{\ln 2}+\frac{2}{3}\sqrt{2\cdot 2^3}\right]=\frac{4}{\ln 2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)$

b) $\int_{2}^{4}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\ln|x|+\frac{1}{x}\right]_2^4=\left(\ln 4+\frac{1}{4}\right)-\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)=\ln 2-\frac{1}{4}$

c) $\int_{-4}^{3}|x^2-4|\,dx=\int_{-4}^{-2}(x^2-4)\,dx+\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx+\int_{2}^{3}(x^2-4)\,dx=$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{-4}^{-2}+\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^3=\frac{32}{3}+\frac{32}{3}+\frac{7}{3}=\frac{71}{3}$$

d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\,sen\,2x\,dx=\left[\frac{sen\,2x}{4}-\frac{x\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$

e) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}tg\,x\,dx=\left[-\ln|cos\,x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\ln\left|cos\,\frac{\pi}{4}\right|+\ln|cos\,0|=-\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$

f) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx=\left[\frac{1}{2}arc\,sen\,x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}arc\,sen\,\frac{1}{4}-0\right)=\frac{1}{2}arc\,sen\,\frac{1}{4}$

63. Página 311

a) $\int_{1}^{3}\frac{3}{x+2}\,dx=\left[3\ln|x+2|\right]_1^3=3\ln 5-3\ln 3=3\ln\frac{5}{3}$

b) $\int_{0}^{3}\frac{2x}{x^2+1}\,dx=\left[\ln|x^2+1|\right]_0^3=\ln 10-\ln 1=\ln 10$

c) $\int_{2}^{5}\frac{x+3}{x-1}\,dx=\int_{2}^{5}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)dx=\left[x+4\ln|x-1|\right]_2^5=5+4\ln 4-2-4\ln 1=3+4\ln 4$

d) $\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2+1}\,dx=\left[arc\,tg\,x\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$

e) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+2}\,dx=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}arc\,tg\,\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{\sqrt{2}}arc\,tg\,\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}arc\,tg\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\,arc\,tg\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\int_{1}^{3}\frac{1}{x(x+1)}\,dx=\int_{1}^{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\left[\ln|x|-\ln|x+1|\right]_1^3=\ln 3-\ln 4-\ln 1+\ln 2=\ln\frac{3}{2}$

64. Página 311

a) Realizamos el siguiente cambio de variable:

$t = x^2 + 1 \rightarrow dt = 2x\ dx \qquad x \in [0, 1] \rightarrow t \in [1, 2]$

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\ dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{t}\ dt = \frac{1}{3}\left[\sqrt{t^3}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)$$

b) Aplicamos la fórmula de integración por partes con:

$u = cos\ x \rightarrow du = -sen\ x\ dx \qquad dv = e^x\ dx \rightarrow v = e^x$

$$\int_0^\pi e^x cos\ x\ dx = \left[e^x cos\ x\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^x sen\ x\ dx = \left[e^x cos\ x\right]_0^\pi + \left[e^x sen\ x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x cos\ x\ dx$$

Volvemos aplicar la fórmula de integración por partes con:

$u = sen\ x \rightarrow du = cos\ x\ dx \qquad dv = e^x\ dx \rightarrow v = e^x$

$$\left[e^x cos\ x\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^x sen\ x\ dx = \left[e^x cos\ x\right]_0^\pi + \left[e^x sen\ x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x cos\ x\ dx$$

$$\int_0^\pi e^x cos\ x\ dx = \frac{\left[e^x cos\ x\right]_0^\pi + \left[e^x sen\ x\right]_0^\pi}{2} = \frac{-e^\pi - e^\pi}{2} = -e^\pi$$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{x^2+1}\ dx = [3\,arc\ tg\ x]_0^1 = 3(arc\ tg\ 1 - arc\ tg\ 0) = \frac{3\pi}{4}$

d) $\displaystyle\int_0^\pi 3\,sen\ x\,cos\ x\ dx = \frac{3}{2}\int_0^\pi sen\ 2x\ dx = -\frac{3}{4}[cos\ 2x]_0^\pi = -\frac{3}{4}(1-1) = 0$

65. Página 311

a) $\displaystyle\int_0^7 (x+1)^{\frac{1}{3}}\ dx = \left[\frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}}\right]_0^7 = \frac{3}{4}(16-1) = \frac{45}{4}$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-cos^2 x}{cos^2 x}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{cos^2 x}-1\right) dx = [tg\ x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$

c) Aplicamos la fórmula de integración por partes con:

$u = \ln\left(x^2+1\right) \rightarrow du = \dfrac{2x}{x^2+1}\,dx \qquad dv = 1\,dx \rightarrow v = x$

$$\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx = \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\ dx = \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1\left(2-\frac{2}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - [2x]_0^1 + [2\,arc\ tg\ x]_0^1 = \ln 2 - 2 + 2\,arc\ tg\ 1 - 2\,arc\ tg\ 0 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

d) Realizamos el siguiente cambio de variable:

$t = tg\ x \rightarrow dt = (1+tg^2 x)\ dx \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow t \in [0, 1]$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(tg^3 x + tg^5 x\right) dx = \int_0^1 \frac{t^3(1+t^2)}{1+t^2}\ dt = \int_0^1 t^3\ dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

e) Realizamos el siguiente cambio de variable:

$t = 7 + x^2 \rightarrow dt = 2x\ dx \qquad x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \rightarrow t \in [9,9]$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(x\cdot\sqrt{7+x^2}\right) dx = \frac{1}{2}\int_9^9 \sqrt{t}\ dt = 0$$

f) $\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{\sqrt{e}} - \frac{1}{4}\left[x^2\right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{e}{4} - \frac{1}{4}(e-1) = \frac{1}{4}$

g) Realizamos el siguiente cambio de variable:

$x = 3\,sen\,t \to dx = 3\cos t\,dt \qquad x \in \left[0, \frac{3}{2}\right] \to t \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{9-x^2}\,dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\sqrt{9-9\,sen^2 t}\cdot\cos t\right)dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\sqrt{1-sen^2 t}\cdot\cos t\right)dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\,dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)\,dt = \left[\frac{9}{2}x + \frac{9}{4}sen\,2t\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{9\pi}{12} + \frac{9}{4}sen\,\frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{8}$$

h) $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{sen^2 x\cdot\cos^2 x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{\frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{8}{1-(\cos 2x)^2}\,dx = 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2}{(sen\,2x)^2}\,dx =$$

$$= 4\left[cotg\,2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 4\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{8}{\sqrt{3}} = -\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

66. Página 311

a) $\int_0^b (x+x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^b = \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3}$

$$\int_0^b (x+x^2)\,dx = 0 \to \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} = 0 \to \frac{b^2}{6}(3+2b) = 0 \to \begin{cases} b = 0 \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

b) Si $b \le -1$:

$$\int_b^0 |x^2-1|\,dx = \int_b^{-1}(x^2-1)\,dx + \int_{-1}^0 (1-x^2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_b^{-1} + \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{4}{3} - \frac{b^3}{3} + b$$

$$\int_b^0 |x^2-1|\,dx = \frac{22}{3} \to \frac{4}{3} - \frac{b^3}{3} + b = \frac{22}{3} \to b^3 - 3b + 18 = 0 \to b = -3$$

Si $-1 < b \le 0$:

$$\int_b^0 |x^2-1|\,dx = \int_b^0 (1-x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_b^0 = \frac{b^3}{3} - b$$

$\int_b^0 |x^2-1|\,dx = \frac{22}{3} \to \frac{b^3}{3} - b = \frac{22}{3} \to b^3 - 3b - 22 = 0 \to$ No tiene solución en el intervalo $(-1, 0]$.

c) $\int_{-2}^2 (4+bx)\,dx = \left[\frac{bx^2}{2} + 4x\right]_{-2}^2 = 2b + 8 - 2b + 8 = 16 \ne 2 \to$ No hay ningún valor de *b* que lo cumpla.

d) $\int_0^3 (b+x^2)\,dx = \left[bx + \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 3b + 9$

$$\int_0^3 (b+x^2)\,dx = 12 \to 3b + 9 = 12 \to b = 1$$

67. Página 311

Como ambas funciones son continuas, tenemos que:

$$\int_1^3 g(x)\,dx = \int_1^2 g(x)\,dx + \int_2^3 g(x)\,dx$$

Hallamos el valor de cada uno de los sumandos.

$$\int_1^2 2f(x)\,dx = 3 \rightarrow 2\int_1^2 f(x)\,dx = 3 \rightarrow \int_1^2 f(x)\,dx = \frac{3}{2}$$

$$\int_2^3 f(x)\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx - \int_1^2 f(x)\,dx = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow \int_2^3 f(x)\,dx = \frac{3}{2}$$

$$\int_1^2 [f(x)+g(x)]\,dx = 3 \rightarrow \int_1^2 f(x)\,dx + \int_1^2 g(x)\,dx = 3 \rightarrow \frac{3}{2} + \int_1^2 g(x)\,dx = 3 \rightarrow \int_1^2 g(x)\,dx = \frac{3}{2}$$

$$3\int_2^3 [f(x)-g(x)]\,dx = 3 \rightarrow 3\int_2^3 f(x)\,dx - 3\int_2^3 g(x)\,dx = 3 \rightarrow \int_2^3 f(x)\,dx - \int_2^3 g(x)\,dx = 1 \rightarrow \int_2^3 g(x)\,dx = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_1^3 g(x)\,dx = \int_1^2 g(x)\,dx + \int_2^3 g(x)\,dx = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

68. Página 312

Realizamos el siguiente cambio de variable:

$$t = 1 + x^2 \rightarrow dt = 2x\,dx \qquad x \in \left[0, \sqrt{3}\right] \rightarrow t \in [1, 4]$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{t-1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{t}{\sqrt{t}}\,dt - \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{t}\,dt - \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{3}\left[\sqrt{t^3}\right]_1^4 - \left[\sqrt{t}\right]_1^4 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 2 + 1 = \frac{4}{3}$$

69. Página 312

a) $$\int_0^2 \left(e^x + 3e^{-x}\right)dx = \left[e^x - 3e^{-x}\right]_0^2 = e^2 - 3e^{-2} - 1 + 3 = \frac{e^4 + 2e^2 - 3}{e^2}$$

b) Aplicamos la fórmula de integración por partes con:

$$u = \ln x^2 \rightarrow du = \frac{2}{x}\,dx \qquad dv = 1\,dx \rightarrow v = x$$

$$\int_1^e 3\ln x^2\,dx = 3\left[x\ln x^2\right]_1^e - 3\int_1^e \frac{2x}{x}\,dx = 3\left[x\ln x^2\right]_1^e - 6[x]_1^e = 6e - 6e + 6 = 6$$

c) Realizamos el siguiente cambio de variable:

$$t = \sqrt{x} \rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}x\,dx \qquad x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow t \in \left[\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+tg^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left(1+tg^2 t\right)dt = 2\int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left(\sec^2 t\right)dt = 2[tg\,t]_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = 2\,tg\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) - 2\,tg\left(\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right)$$

d) $$\int_0^2 \frac{1}{3x^2+4}\,dx = \int_0^2 \frac{\frac{1}{3}}{x^2+\frac{4}{3}}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}\left(x^2+\frac{4}{3}\right)}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{\frac{3}{4}x^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^2 \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[arc\ tg\ \frac{\sqrt{3}}{2}x\right]_0^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}arc\ tg\ \sqrt{3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$

e) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx = [arc\ tg\ (x+2)]_{-2}^{-1} = arc\ tg\ 1 - arc\ tg\ 0 = \frac{\pi}{4}$

f) Realizamos el siguiente cambio de variable:

$t = 1+x^2 \to dt = 2x\,dx$ $\qquad x \in [0, \sqrt{3}] \to t \in [1, 4]$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_1^4 \frac{t-1}{\sqrt{t}}\,dt = \int_1^4 \frac{t}{\sqrt{t}}\,dt - 2\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \int_1^4 \sqrt{t}\,dt - 2\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{3}\left[\sqrt{t^3}\right]_1^4 - 2\left[\sqrt{t}\right]_1^4 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} - 4 + 2 = \frac{8}{3}$$

70. Página 312

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (2x+1)\,dx + \int_0^2 2^x\,dx + \int_2^3 \frac{-4x}{x-4}\,dx = [x^2+x]_{-1}^{0} + \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^2 + 4\int_2^3 \left(\frac{4}{x-4} - 1\right) dx =$$

$$= -2 + \frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} + 4[4\ln|x-4| - x]_2^3 = -2 + \frac{3}{\ln 2} - 12 - 16\ln 2 + 8 = \frac{3}{\ln 2} - 16\ln 2 - 6e$$

71. Página 312

Si $f(x)$ es continua $\to \sqrt{a\cdot 8} = \frac{8^2-32}{8-4} \to a = 8$.

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^8 \sqrt{8x}\,dx + \int_8^{10} \frac{x^2-32}{x-4}\,dx = \left[\frac{\sqrt{(8x)^3}}{12}\right]_0^8 + \left[\frac{x^2}{2} + 4x - 16\ln|x-4|\right]_8^{10} =$$

$$= \frac{128}{3} + 50 + 40 - 16\ln 6 - 32 - 32 + 16\ln 4 = \frac{206}{3} - 16\ln\frac{3}{2}$$

72. Página 312

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} (x^2 + 2a\cos x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (ax^2+b)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2a\ sen\ x\right]_0^{\pi} + \left[\frac{ax^3}{3} + bx\right]_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= \frac{\pi^3}{3} + \frac{8a\pi^3}{3} - \frac{a\pi^3}{3} + 2b\pi - b\pi = \frac{\pi^3(7a+1)}{3} + b\pi$$

73. Página 312

Aplicamos la fórmula de integración por partes con:

$u = x \to du = dx$ $\qquad dv = e^x\,dx \to v = e^x$

$$\int_0^a xe^x\,dx = [xe^x]_0^a - \int_0^a e^x\,dx = [xe^x]_0^a - [e^x]_0^a = ae^a - e^a + 1 = e^a(a-1) + 1$$

$$e^a(a-1) + 1 = 1 \to e^a(a-1) = 0 \to a = 1$$

74. Página 312

a) $\int_0^3 (3x^2+2x+a)\,dx = [x^3+x^2+ax]_0^3 = 27 + 9 + 3a = 12 \to a = -8$

b) $\int_2^6 \frac{a}{x}\,dx = [a\ln|x|]_2^6 = a\ln 6 - a\ln 2 = a\ln 3 \to a\ln 3 = 1 - \ln 3 \to a = \frac{1}{\ln 3} - 1$

75. Página 312

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{1+e^x}\right]_0^a = -\frac{1}{1+e^a} + \frac{1}{1+1} = -\frac{1}{1+e^a} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \rightarrow -\frac{1}{1+e^a} = -\frac{1}{4} \rightarrow e^a = 3 \rightarrow a = \ln 3$$

76. Página 312

Si la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 3$ es –12 $\rightarrow f'(3) = -12$.

$f'(x) = 2ax \rightarrow f'(3) = 6a \rightarrow -12 = 6a \rightarrow a = -2$

Luego la función es: $f(x) = -2x^2 + b$

$$6 = \int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^6 (-2x^2 + b)\,dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + bx\right]_0^6 = -144 + 6b \rightarrow b = 25 \rightarrow f(x) = -2x^2 + 25$$

77. Página 312

$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $\qquad$ $p''(x) = 6ax + 2b$

Pasa por el punto $(0, 1) \rightarrow p(0) = 1 \rightarrow d = 1$.

El punto $(0, 1)$ es un punto de inflexión $\rightarrow p''(0) = 0 \rightarrow 2b = 0 \rightarrow b = 0$.

Tiene un máximo en $x = 1 \rightarrow p'(1) = 0 \rightarrow 3a + c = 0$.

$$\frac{5}{4} = \int_0^1 p(x)\,dx = \int_0^1 (ax^3 + cx + 1)\,dx = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{cx^2}{2} + x\right]_0^1 = \frac{a}{4} + \frac{c}{2} + 1 \rightarrow a + 2c = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} 3a + c = 0 \\ a + 2c = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{c=-3a} a - 6a = 1 \rightarrow a = -\frac{1}{5} \rightarrow c = \frac{3}{5}$$

Luego, el polinomio es: $p(x) = \frac{-1}{5}x^3 + \frac{3}{5}x + 1$

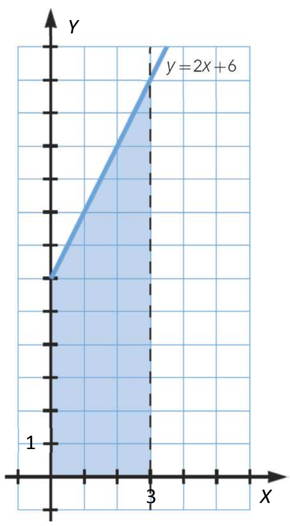
78. Página 312

Calculamos los puntos de intersección:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x + 6 \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y = 6 \qquad \left.\begin{array}{l} y = 2x + 6 \\ x = 3 \end{array}\right\} \rightarrow y = 12$$

$$\int_0^3 (2x + 6)\,dx = \left[x^2 + 6x\right]_0^3 = 9 + 18 = 27$$

$$\text{Área} = \frac{(12 + 6) \cdot 3}{2} = 27$$



79. Página 312

a) $-x^2+4=0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$ $\quad$ $\text{Área}=\left|\int_{-2}^{2}(-x^2+4)\,dx\right|=\left|\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2}\right|=\left|-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}+8\right|=\frac{32}{3}$

b) $x^3-4x=0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{cases}$ $\quad$ $\text{Área}=\left|\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{2}(x^3-4x)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{0}^{2}\right|=4+4=8$

c) $-x^3+9x=0 \rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=0 \\ x=3 \end{cases}$

$$\text{Área}=\left|\int_{-3}^{0}(-x^3+9x)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{3}(-x^3+9x)\,dx\right|=\left|\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{9x^2}{2}\right]_{-3}^{0}\right|+\left|\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{9x^2}{2}\right]_{0}^{3}\right|=\frac{81}{4}+\frac{81}{4}=\frac{81}{2}$$

d) $x^2-9=0 \rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=3 \end{cases}$ $\quad$ $\text{Área}=\left|\int_{-3}^{3}(x^2-9)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}-9x\right]_{-3}^{3}\right|=|9-27+9-27|=36$

e) $x^3-x^2=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$ $\quad$ $\text{Área}=\left|\int_{0}^{1}(x^3-x^2)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}\right|=\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{12}$

f) $-x^3+x^2+2x=0 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \\ x=2 \end{cases}$

$$\text{Área}=\left|\int_{-1}^{0}(-x^3+x^2+2x)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x)\,dx\right|=\left|\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{2}\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right|+\left|-4+\frac{8}{3}+4\right|=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

80. Página 312

$f(x)=0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$

$$\text{Área}=\left|\int_{-3}^{-2}\left[(x-2)^2(x+2)\right]dx\right|+\left|\int_{-2}^{2}\left[(x-2)^2(x+2)\right]dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-2x^2+8x\right]_{-3}^{-2}\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-2x^2+8x\right]_{-2}^{2}\right|=$$

$$=\left|-\frac{44}{3}+\frac{15}{4}\right|+\left|\frac{20}{3}+\frac{44}{3}\right|=\frac{131}{12}+\frac{64}{3}=\frac{387}{12}=\frac{129}{4}$$

81. Página 312

$f(x)=0 \rightarrow x=3$ $\quad$ $\text{Área}=\left|\int_{3}^{4}\sqrt{x-3}\,dx\right|=\left|\left[\frac{2}{3}\sqrt{(x-3)^3}\right]_{3}^{4}\right|=\left|\frac{2}{3}-0\right|=\frac{2}{3}$

82. Página 312

$f(x)=0 \rightarrow x=2$ $\quad$ $f(x)=2 \rightarrow x=0$

$$\text{Área}=\left|\int_{0}^{2}\left(\sqrt{4-2x}-2\right)dx\right|=\left|\left[-\frac{1}{3}\sqrt{(4-2x)^3}-2x\right]_{0}^{2}\right|=\left|-4+\frac{8}{3}\right|=\frac{4}{3}$$

83. Página 312

$$f(x)=0 \to x=\frac{2\pi}{3}e$$

$$\text{Área}=\left|\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)dx\right|+\left|\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{2}x+\operatorname{sen} x\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}\right|+\left|\left[\frac{1}{2}x+\operatorname{sen} x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\right|=\left|\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right|+\left|\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$$

84. Página 312

$\ln x=0 \to x=1$

$$\text{Área}=\left|\int_1^e \ln x\,dx\right|=\left|[x(\ln x-1)]_1^e\right|=|0+1|=1$$

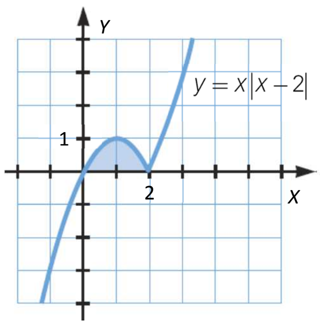
85. Página 312

La función no corta el eje X en el intervalo $[0, 2]$, luego el área en dicho intervalo es el valor de la integral.

$$\text{Área}=\left|\int_0^2 \ln(1+x^2)\,dx\right|=\left[x\ln(1+x^2)\right]_0^2-\left|\int_0^2\frac{2x^2}{1+x^2}dx\right|=\left[x\ln(1+x^2)-2x+\operatorname{arc\,tg} x\right]_0^2=2\ln 5-4+\operatorname{arc\,tg} 2$$

86. Página 312

a)



b) $\left.\begin{array}{l} y=0 \\ y=x|x-2| \end{array}\right\} \to x|x-2|=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

Escribimos la función definida a trozos: $f(x)=x|x-2|=\begin{cases} -x^2+2x & \text{si } x\le 2 \\ x^2-2x & \text{si } x>2 \end{cases}$

$$\text{Área}=\int_0^2\left(-x^2+2x\right)dx=\left[\frac{-x^3}{3}+x^2\right]_0^2=-\frac{8}{3}+4=\frac{4}{3}$$

87. Página 312

$$\begin{cases} 2x+1=0 \to x=-\frac{1}{2} \\ x+5=0 \to x=-5 \end{cases}$$

Escribimos la función a trozos: $f(x)=\begin{cases} -3x-6 & \text{si } -5\le x<-\frac{1}{2} \\ x-4 & \text{si } x\ge -\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\text{Área}=\left|\int_{-5}^{-\frac{1}{2}}(-3x-6)\,dx\right|+\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(x-4)\,dx\right|=\left|\left[-\frac{3}{2}x^2-6x\right]_{-5}^{-\frac{1}{2}}\right|+\left|\left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}\right|=\left|\frac{21}{8}+\frac{15}{2}\right|+\left|0-\frac{17}{8}\right|=\frac{98}{8}$$

88. Página 312

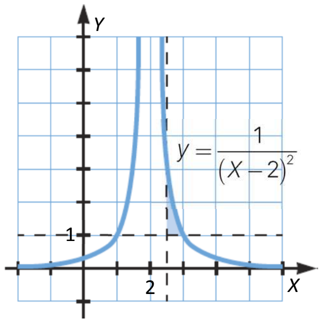
$x^2-4=0 \rightarrow x=2\in[-1,3]$

Escribimos la función a trozos: $f(x)=\begin{cases}4-x^2 & \text{si } -1\le x<2\\ x^2-4 & \text{si } x\ge 2\end{cases}$

$$\text{Área}=\left|\int_{-1}^{2}(4-x^2)\,dx\right|+\left|\int_{2}^{3}(x^2-4)\,dx\right|=\left|\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}\right|+\left|\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_{2}^{3}\right|=\left|\frac{16}{3}+\frac{11}{3}\right|+\left|-3+\frac{16}{3}\right|=\frac{27}{3}+\frac{7}{3}=\frac{34}{3}$$

89. Página 313

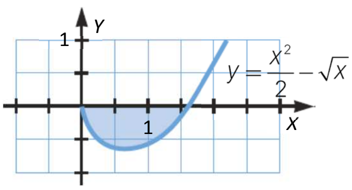
$f(x)\ne 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ $\qquad$ $f(x)=1\rightarrow\begin{cases}x=1\\x=3\end{cases}$



$$\text{Área}=\left|\int_{\frac{5}{2}}^{3}\left(\frac{1}{(x-2)^2}-1\right)dx\right|=\left|\left[\frac{-1}{x-2}-x\right]_{\frac{5}{2}}^{3}\right|=\left|-1-3+2+\frac{5}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

90. Página 313

a)



b) $f(x)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=\sqrt[3]{4}\end{cases}$ $\qquad$ $\text{Área}=\left|\int_{0}^{\sqrt[3]{4}}\left(\frac{x^2}{2}-\sqrt{x}\right)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_{0}^{\sqrt[3]{4}}\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{4}{3}-0\right|=\frac{2}{3}$

91. Página 313

a) • Asíntotas verticales:

- $x^3-4x^2+4x=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$

  La función presenta dos asíntotas verticales en $x=0$ y en $x=2$.

- Asíntotas horizontales:

  $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x^3-4x^2+4x}=0$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x^3-4x^2+4x}=0$

  La función presenta una asíntota horizontal en $y=0$.

- Monotonía:

$$f'(x) = -\frac{2(x^2+3x-2)}{x^2(x-2)^3} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{3}{2} \end{cases}$$

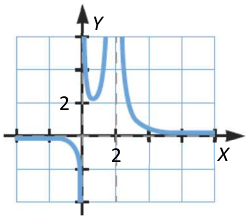
$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}\right) \rightarrow$ La función crece.

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}, 0\right) \rightarrow$ La función decrece.

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{3}{2}\right) \rightarrow$ La función decrece.

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \left(\frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{3}{2}, 2\right) \rightarrow$ La función crece.

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (2, +\infty) \rightarrow$ La función decrece.



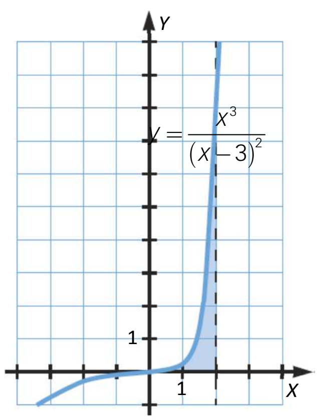
b) $\text{Área} = \left| \int_3^4 \frac{x+2}{x^3-4x^2+4x}\,dx \right| = \left| \frac{1}{2}\int_3^4 \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int_3^4 \frac{1}{x-2}\,dx + 2\int_3^4 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx \right| =$

$$= \left| \frac{1}{2}[\ln|x|]_3^4 - \frac{1}{2}[\ln|x-2|]_3^4 - 2\left[\frac{1}{x-2}\right]_3^4 \right| = \left| \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 3) - \frac{1}{2}\ln 2 - 2\left(\frac{1}{2} - 1\right) \right| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right) + 1$$

92. Página 313

$$\text{Área} = \left| \int_0^2 \frac{x^3}{(x-3)^2}\,dx \right| = \left| \int_0^2 x\,dx + \int_0^2 6\,dx + \int_0^2 \frac{27}{x-3}\,dx + \int_0^2 \frac{27}{(x-3)^2}\,dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + [6x]_0^2 + 27[\ln|x-3|]_0^2 - 27\left[\frac{1}{x-3}\right]_0^2 \right| = |2 + 12 - 27\ln 3 + 27 - 9| = 32 - 27\ln 3$$



93. Página 313

- Asíntotas verticales:

  $x^2+4\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

  La función no tiene asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales:

  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-12}{x^2+4}=1 \qquad\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-12}{x^2+4}=1$

  Entonces la función presenta una asíntota horizontal en $y=1$.

- Monotonía:

  $f'(x)=\dfrac{32x}{\left(x^4+4\right)^2}=0\Leftrightarrow x=0$

  $f'(x)<0 \quad \forall x\in(-\infty,0)\to$ La función decrece. $f'(x)>0 \quad \forall x\in(0,+\infty)\to$ La función crece.

- Puntos de corte:

  $f(x)=0\to\begin{cases}x=2\sqrt{3}\\ x=-2\sqrt{3}\end{cases}$

- Área:

  $\text{Área}=\left|\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\dfrac{x^2-12}{x^2+4}\,dx\right|=\left|\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(1-\dfrac{16}{x^2+4}\right)dx\right|=\left|\left[x-8\,arc\ tg\ \dfrac{x}{2}\right]_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\right|=$

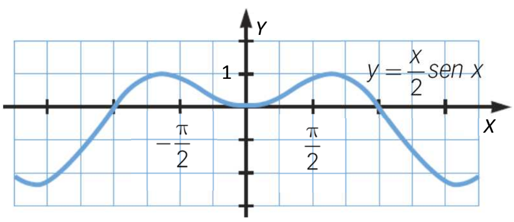
  $=\left|2\sqrt{3}-8\,arc\ tg\ \sqrt{3}+2\sqrt{3}+8\,arc\ tg\left(-\sqrt{3}\right)\right|=\left|4\sqrt{3}-\dfrac{8\pi}{3}-\dfrac{8\pi}{3}\right|=4\sqrt{3}-\dfrac{16\pi}{3}$

94. Página 313

a) $f'(x)=\dfrac{1}{2}(sen\ x+x\cos x)=0\to x=0$

$f'(x)<0 \quad \forall x\in(-2{,}02;\,0)\cup(2{,}02;\,\pi)\to$ La función decrece.

$f'(x)>0 \quad \forall x\in(-\pi;\,2{,}02)\cup(0;\,2{,}02)\to$ La función crece.



b) $\text{Área}=\left|\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{x}{2}sen\ x\,dx\right|=\left|\left[-\dfrac{1}{2}x\cos x+\dfrac{1}{2}sen\ x\right]_{-\pi}^{\pi}\right|=\left|\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right|=\pi$

95. Página 313

$\text{Área}=\left|\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx\right|=\left|\left[\dfrac{arc\ sen\ x}{2}+\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\right]_0^1\right|=\dfrac{\pi}{4} \qquad\qquad \text{Área}=\dfrac{1}{4}\pi r^2=\dfrac{\pi}{4}$

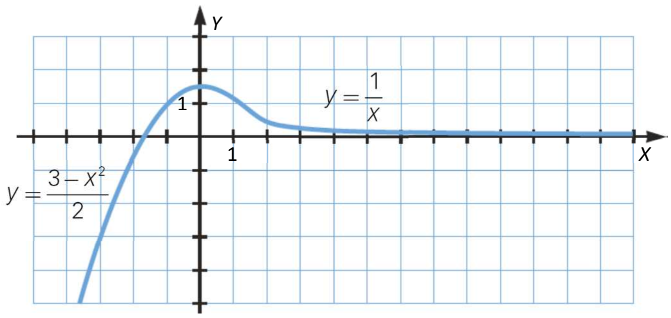
96. Página 313

$$f(x)=0\rightarrow\sqrt{9-x^2}=0\rightarrow\begin{cases}x=-3\\x=3\end{cases}$$

$$\text{Área}=\left|\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx\right|=\left|\frac{1}{2}\left[9\,arc\,sen\left(\frac{x}{3}\right)+x\sqrt{9-x^2}\right]_0^3\right|=\frac{9\pi}{4}$$

97. Página 313

a)



b) $f(x)=0\rightarrow x=-\sqrt{3}$

$$\text{Área}=\left|\int_{-\sqrt{3}}^1\frac{3-x^2}{2}\,dx\right|+\left|\int_1^2\frac{1}{x}\,dx\right|=\left|\left[\frac{3}{2}x-\frac{x^3}{6}\right]_{-\sqrt{3}}^1\right|+\left|[\ln x]_1^2\right|=\left|\frac{3}{2}-\frac{1}{6}+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|+\ln 2=\frac{4}{3}+\sqrt{3}+\ln 2$$

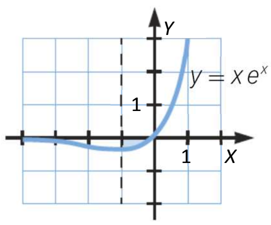
98. Página 313

Calculamos el mínimo relativo de $y=xe^x$.

$y'=(x+1)e^x\rightarrow 0=(x+1)e^x\rightarrow x=-1.$

Alcanza el mínimo relativo en $x=-1$.

$$\text{Área}=\left|\int_{-1}^0 xe^x\,dx\right|=\left|[(x-1)e^x]_{-1}^0\right|=\left|-1-\frac{-2}{e}\right|=1-\frac{2}{e}$$



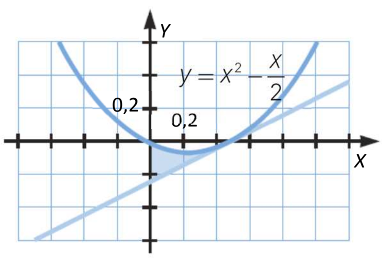
99. Página 313

Calculamos la recta tangente:

$$f'(x)=2x-\frac{1}{2}\rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

$$y=\frac{1}{2}x+n\rightarrow 0=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+n\rightarrow n=-\frac{1}{4}\rightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$$



$$\text{Área}=\left|\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}-x^2+\frac{x}{2}\right)dx\right|=\left|\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{4}-x^2\right)dx\right|=\left|\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}\right|=\left|-\frac{1}{24}\right|=\frac{1}{24}$$

100. Página 313

Calculamos la recta tangente:

$f'(x)=\frac{1}{x+1}\rightarrow f'(0)=1$ $f(0)=0$ $y=x+n\rightarrow 0=n\rightarrow y=x$

$$\text{Área}=\left|\int_0^2 (x-\ln(x+1))\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^2}{2}-(x+1)\ln(x+1)+x\right]_0^2\right|=|2-3\ln 3+2|=4-3\ln 3$$

101. Página 313

$f(2)=1\rightarrow 8a+4b+2c+d=1$ $f(0)=0\rightarrow d=0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c\rightarrow f'(2)=12a+4b+c=0$ $f''(x)=6ax+2b\rightarrow f''(2)=12a+2b=0$

Entonces: $a=\frac{1}{8}$, $b=-\frac{3}{4}$, $c=\frac{3}{2}$ y $d=0$.

Por lo tanto, $y=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x$. Segmento: $y=\frac{1}{2}x$

$$\text{Área}=\left|\int_0^2\left(\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x\right)dx\right|=\left|\int_0^2\left(\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2+x\right)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{32}x^4-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2\right|=\left|\frac{1}{2}-2+2\right|=\frac{1}{2}$$

102. Página 313

Calculamos la recta tangente:

$f'(x)=3x^2-4x\rightarrow f'(-1)=7$ $f(-1)=-3$ $y=7x+n\rightarrow -3=-7+n\rightarrow n=4\rightarrow y=7x+4$

Hallamos los puntos de corte:

$$x^3-2x^2=7x+4\rightarrow x^3-2x^2-7x-4=0\rightarrow\begin{cases}x=-1\\x=4\end{cases}$$

$$\text{Área}=\left|\int_{-1}^4\left(7x+4-x^3+2x^2\right)dx\right|=\left|\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}+4x\right]_{-1}^4\right|=\left|-64+\frac{128}{3}+56+16+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{7}{2}+4\right|=\frac{625}{12}$$

103. Página 313

Calculamos la recta tangente:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{e}{e^x-e}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{xe-e^x}{xe^x-e^x-ex+e}\right)$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital dos veces para resolver el límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{e-e^x}{xe^x-e}\right)=-\lim_{x\to 1}\left(\frac{e^x-e}{xe^x-e}\right)=-\lim_{x\to 1}\left(\frac{e^x}{e^x+xe^x}\right)=-\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1+x}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$a=-\frac{1}{2}\rightarrow x=2$$

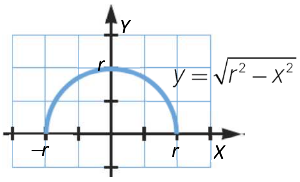
$f'(x)=e^{x-2}+1\rightarrow f'(2)=2$ $f(2)=1+2-5=-2$ $y=2x+n\rightarrow -2=4+n\rightarrow n=-6\rightarrow y=2x-6$

Hallamos los puntos de corte: $2x-6=0\rightarrow x=3$

$$\text{Área}=\left|\int_0^3(2x-6)\,dx\right|=\left|\left[x^2-6x\right]_0^3\right|=|9-18|=9$$

104. Página 313

a)



b) Hacemos el siguiente cambio de variable:

$x = r\,sen\,t \rightarrow dx = r\cos t\,dt \qquad\qquad x \in [-r, r] \rightarrow t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\text{Área} = \left|\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx\right| = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{r^2 - r^2 sen^2 t}\cdot r\cos t\right) dt\right| = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(r\sqrt{1 - sen^2 t}\cdot r\cos t\right) dt\right| =$$

$$= \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 t\,dt\right| = \left|\frac{r^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt\right| = \left|\frac{r^2}{2}\left[t + \frac{1}{2}sen\,2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right| = \left|\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right| = \frac{\pi r^2}{2}$$

El resultado es la mitad del área de un círculo, lo cual tiene sentido, pues el área de la región entre la curva y el eje de abscisas es un semicírculo de radio *r*.

105. Página 313

a) La función $y = \dfrac{1}{4+x^2}$ no corta el eje *X* y siempre es positiva.

$$\text{Área} = \int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}arc\,tg\,\frac{x}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8}$$

b) $\dfrac{2\pi}{24} = \displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{1}{4+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}arc\,tg\,\frac{x}{2}\right]_0^{\alpha} = \frac{1}{2}\left(arc\,tg\,\frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow arc\,tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{6} \rightarrow \alpha = 2tg\,\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

106. Página 313

La función es derivable en 0; por tanto, será continua en este punto. Así, tenemos:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \rightarrow \lim_{x\to 0} e^{ax} = \lim_{x\to 0}(a + bsenx) \rightarrow 1 = a$$

Además, por ser *f* derivable en 0:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) \rightarrow \lim_{x\to 0} e^{x} = \lim_{x\to 0} bcosx \rightarrow 1 = b$$

Definimos la función: $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1 + sen\,x & \text{si } 0 < x \end{cases}$

$$\text{Área} = \left|\int_{-2}^{0} e^x\,dx\right| + \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + sen\,x)\,dx\right| = \left|\left[e^x\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[x - \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right| = \left|1 - e^{-2}\right| + \left|\frac{\pi}{2} + 1\right| = 2 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{e^2}$$

107. Página 313

f(*x*) es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Calculamos *a* y *b*.

La función es continua en el intervalo $[1, 7]$.

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) \rightarrow \lim_{x\to 4}(ax - 3) = \lim_{x\to 4}\left(-x^2 + 10x - b\right) \rightarrow 4a - 3 = -16 + 40 - b \rightarrow b = -4a + 27$$

La función es derivable en el intervalo $[1, 7]$.

$$\lim_{x\to 4^-} f'(x) = \lim_{x\to 4^+} f'(x) \to \lim_{x\to 4}(a) = \lim_{x\to 4}(-2x+10) \to a = 2 \to b = 19$$

Por tanto, la función es: $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2+10x-19 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

Puntos de corte de la función con el eje X: $f(x) = 0 \to \begin{cases} 2x-3=0 \to x = \dfrac{3}{2} \\ -x^2+10x-19=0 \to x = 5+\sqrt{6} \end{cases}$

$$\text{Área} = \int_1^7 f(x)\,dx = \left|\int_1^{\frac{3}{2}} (2x-3)\,dx\right| + \left|\int_{\frac{3}{2}}^4 (2x-3)\,dx\right| + \left|\int_4^7 \left(-x^2+10x-19\right)dx\right| =$$

$$= \left|\left[x^2-3x\right]_1^{\frac{3}{2}}\right| + \left|\left[x^2-3x\right]_{\frac{3}{2}}^4\right| + \left|\left[-\frac{x^3}{3}+5x^2-19x\right]_{\frac{3}{2}}^4\right| = \frac{1}{4} + \frac{25}{4} + 15 = \frac{43}{2}$$

108. Página 314

a) $x+1$ y 2^x son continuas en los intervalos en los que están definidas, por lo que basta con estudiar lo que ocurre en los extremos de los intervalos.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1 \\ f(0) = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} 2^x = 1 \end{array}\right\} \to f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \to f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} 2^x = 4 \\ f(2) = -1 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} \dfrac{x}{x-4} = -1 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) \to f(x) \text{ presenta una discontinuidad de salto finito en } x = 2.$$

La expresión $\dfrac{x}{x-4}$ no es continua cuando el denominador se anula.

$x-4=0 \to x=4$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \dfrac{x}{x-4} = -\infty \\ \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \dfrac{x}{x-4} = +\infty \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 4^-} f(x) \neq \lim_{x\to 4^+} f(x) \to f(x) \text{ presenta una discontinuidad de salto infinito en } x = 4.$$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x-4} \qquad \forall x \geq 2 \to f(3) = -3$

$f'(x) = \dfrac{-4}{(x-4)^2} \qquad \forall x \geq 2 \to f'(3) = -4$

$y = -4x+n \to -3 = -4\cdot 3+n \to n = 9$

La recta tangente en $x=3$ es $y=-4x+9$.

c) $$\text{Área} = \left|\int_{-1}^0 (x+1)\,dx\right| + \left|\int_0^2 2^x\,dx\right| + \left|\int_2^3 \frac{x}{x-4}\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^0\right| + \left|\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^2\right| + \left|\left[x+4\ln|x-4|\right]_2^3\right| =$$

$$= \left|-\frac{1}{2}+1\right| + \left|\frac{3}{\ln 2}\right| + \left|3-2-4\ln 2\right| = \frac{3}{\ln 2} + 4\ln 2 - \frac{1}{2}$$

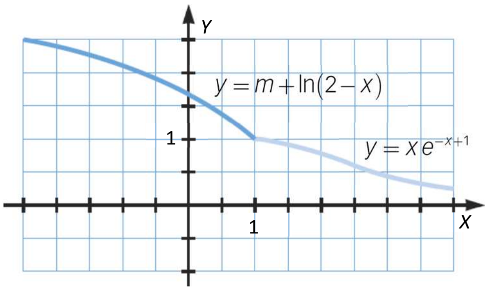
109. Página 314

$$\int_1^{\ln 5} f(x)\,dx = \int_1^{\ln 5} \left(xe^x + 3\right) dx = \left[xe^x - e^x\right]_1^{\ln 5} + \left[3x\right]_1^{\ln 5} = 5\ln 5 - 5 - e + e + 3\ln 5 - 3 = 8(\ln 5 - 1)$$

110. Página 314

a) La función es continua en cualquier intervalo:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(m + \ln(2-x)) = m \\ f(1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} xe^{-x+1} = 1 \end{array}\right\} \to m = 1$$



b) $1 + \ln(2-x) = xe^{-x+1} \to x = 1$

$$\text{Área} = \left|\int_0^1 (1+\ln(2-x))\,dx\right| + \left|\int_1^2 xe^{-x+1}\,dx\right| = \left|\left[(x-2)\ln|2-x|\right]_0^1\right| + \left|\left[e^{-x-1}(-1-x)\right]_1^2\right| =$$

$$= |2\ln 2| + \left|-3e^{-3} + 2e^{-2}\right| = 2\ln 2 - 3e^{-3} + 2e^{-2}$$

111. Página 314

a) • Continuidad:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \to \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{e^x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(x^2 + ax + b\right) = b \to b = 1 \quad \forall x \in [-1, 1]$$

• Derivabilidad:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) \to \lim_{x\to 0}\left(\frac{-2+x}{e^x}\right) = \lim_{x\to 0}(2x + a) \to a = -2 \quad \forall x \in (-1, 1)$$

La función es: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2+x}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$\exists c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(1) - f(-1)}{1-(-1)} = -e \to \dfrac{-2+c}{e^c} = -e \to c \simeq -0{,}21$.

b) Hallamos los puntos de corte:

$$f(x)=0 \to \begin{cases} \dfrac{1-x}{e^x}=0 \to x=1 \\ x^2-2x+1=0 \to x=1 \end{cases}$$

$$\text{Área}=\left|\int_{-1}^{0}\frac{1-x}{e^x}\,dx\right|+\left|\int_{0}^{1}\left(x^2-2x+1\right)dx\right|$$

Para hallar la primera integral, utilizamos la fórmula de integración por partes con:

$u=1-x \to du=-dx$ $\qquad$ $dv=e^{-x}\,dx \to v=-e^{-x}$

$$\int\frac{1-x}{e^x}\,dx=-(1-x)e^{-x}-\int e^{-x}\,dx=(-1+x)e^{-x}+e^{-x}=xe^{-x}$$

$$\text{Área}=\left|\int_{-1}^{0}\frac{1-x}{e^x}\,dx\right|+\left|\int_{0}^{1}\left(x^2-2x+1\right)dx\right|=\left|\left[xe^{-x}\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^1\right|=|e|+\left|\frac{1}{3}-1+1\right|=e+\frac{1}{3}$$

112. Página 314

a) • Continuidad:

La función es continua en cada uno de los intervalos en los que se define, por lo que para estudiar su continuidad basta con hacerlo en los extremos.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\to \lim_{x\to 2}\left(x^2+ax+b\right)=\lim_{x\to 2}(cx+1)=2c+1 \to 4+2a+b=2c+1\to$$

$$\to 2a+b-2c+3=0\ \forall x\in[0,4]$$

• Derivabilidad:

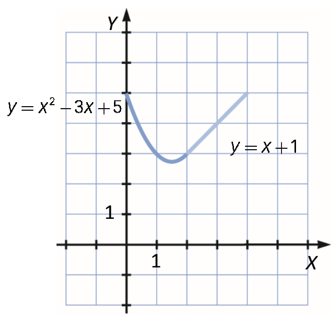
$$\lim_{x\to 2^-} f'(x)=\lim_{x\to 2^+} f'(x)\to \lim_{x\to 2}(2x+a)=\lim_{x\to 2}(c)\to 4+a=c\ \forall x\in(0,4)$$

$$f(0)=f(4)\to b=16+4a+b\to a=-4$$

Entonces: $a=-3$, $b=5$ y $c=1$

La función es: $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+5 & \text{si } 0\le x<2 \\ x+1 & \text{si } 2\le x\le 4 \end{cases}$

b) La gráfica no se corresponde con la función correcta.



c) $\text{Área}=\left|\int_0^2(x^2-3x+5)\,dx\right|+\left|\int_2^4(x+1)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+5x\right]_0^2\right|+\left|\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_2^4\right|=\left|\frac{8}{3}-6+10\right|+|8+4-2-2|=\frac{44}{3}$

113. Página 314

$$\text{Área} = \int_1^a (2x+1)\,dx = \left[x^2+x\right]_1^a = a^2+a-2$$

$$\text{Área} = 18 \to a^2+a-2=18 \to a^2+a-20=0 \to \begin{cases} a=4 \\ a=-5 \end{cases}$$

Si consideramos que $1<a$, tenemos que $a=4$.

114. Página 314

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^a (-x^2+9)\,dx\right| = \left|\left[-\frac{x^3}{3}+9x\right]_{-1}^a\right| = \left|-\frac{a^3}{3}+9a-\frac{1}{3}+9\right| = \left|-\frac{a^3}{3}+9a+\frac{26}{3}\right|$$

$$\text{Área} = 24 \to -\frac{a^3}{3}+9a+\frac{26}{3}=24 \to \begin{cases} a=-1-2\sqrt{6} \\ a=2 \\ a=2\sqrt{6}-1 \end{cases}$$

Si consideramos que $-1<a$, tenemos que $a=2$ o $a=2\sqrt{6}-1$.

115. Página 314

a) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \ln|x-1|-\ln|x+1|+k$

b) $\text{Área} = [\ln|x-1|-\ln|x+1|]_2^k = \ln|k-1|-\ln|k+1|+\ln 3 = \ln\left(3\cdot\left|\dfrac{k-1}{k+1}\right|\right)$

$$\text{Área} = \ln 2 \to \ln\left(3\cdot\left|\frac{k-1}{k+1}\right|\right) = \ln 2 \to 3\cdot\left|\frac{k-1}{k+1}\right| = 2 \to 3|k-1| = 2|k+1| \to \begin{cases} 3(k-1)=2(k+1) \to k=5 \\ 3(1-k)=2(k+1) \to k=\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

116. Página 314

Hallamos los puntos de corte:

$$x^2+2=2x+2 \to x^2-2x=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_0^2 \left(x^2+2-2x-2\right)dx\right| = \left|\int_0^2 \left(x^2-2x\right)dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2\right| = \left|\frac{8}{3}-4\right| = \frac{4}{3}$$

117. Página 314

Calculamos las rectas que determinan los lados del triángulo.

El lado que contiene los vértices $(-5, 0)$ y $(2, 0)$ está en la recta $y=\frac{2}{5}x+2$.

El lado que contiene los vértices $(-5, 0)$ y $(0, 0)$ está en la recta $y=0$.

El lado que contiene a los vértices $(0, 0)$ y $(2, 0)$ está en la recta $x=0$.

$$\text{Área} = \left|\int_{-5}^0 \left(\frac{2}{5}x+2\right)dx\right| = \left|\left[\frac{x^2}{5}+2x\right]_{-5}^0\right| = 5$$

118. Página 314

Hallamos los puntos de corte:

$$2+x-x^2=x^2-3x+2 \to 2x^2-4x=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\text{Área}=\left|\int_0^2 (2+x-x^2-x^2+3x+2)\,dx\right|=\left|\int_0^2 (-2x^2+4x)\,dx\right|=\left|\left[-\frac{2x^3}{3}+2x^2\right]_0^2\right|=\left|-\frac{16}{3}+8\right|=\frac{8}{3}$$

119. Página 314

La ecuación de la bisectriz es $y=x$.

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2-2=x \to x^2-x-2=0 \to \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\text{Área}=\left|\int_{-1}^2 (x^2-2-x)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}-2x-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2\right|=\left|\frac{8}{3}-4-2+\frac{1}{3}-2+\frac{1}{2}\right|=\frac{9}{2}$$

120. Página 314

a) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^3-2x=-x^2 \to x^3+x^2-2x=0 \to \begin{cases} x=-2 \\ x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\text{Área}=\left|\int_{-2}^0 (x^3-2x+x^2)\,dx\right|+\left|\int_0^1 (x^3-2x+x^2)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-x^2+\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^0\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-x^2+\frac{x^3}{3}\right]_0^1\right|=$$

$$=\left|-4+4+\frac{8}{3}\right|+\left|\frac{1}{4}-1+\frac{1}{3}\right|=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}$$

b) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^3-2x^2+x-1=-x^2+3x-1 \to x^3-x^2-2x=0 \to \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\text{Área}=\left|\int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x)\,dx\right|+\left|\int_0^2 (x^3-x^2-2x)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^0\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2\right|=$$

$$=\left|-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1\right|+\left|4-\frac{8}{3}-4\right|=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

121. Página 314

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{2} & \text{si } x<0\\ \dfrac{x}{2} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$\frac{|x|}{2}=\frac{1}{1+x^2}\rightarrow\begin{cases}-\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{1+x^2}\rightarrow x^3+x+2=0\rightarrow x=-1\\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{1+x^2}\rightarrow x^3+x-2=0\rightarrow x=1\end{cases}$$

$$\text{Área}=\left|\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{x}{2}\right)dx\right|+\left|\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{2}\right)dx\right|=\left|\left[arc\ tg\ x+\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[arc\ tg\ x-\frac{x^2}{4}\right]_{0}^{1}\right|=\left|\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\right|+\left|\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\right|=\frac{\pi-1}{2}$$

122. Página 314

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

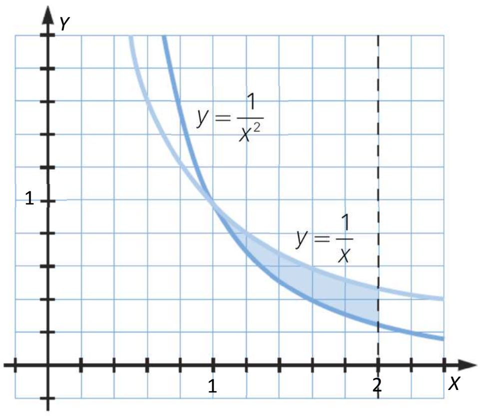
$$\frac{8}{x}=\sqrt{x}\rightarrow 8=x\sqrt{x}\rightarrow x=4$$

$$\text{Área}=\left|\int_{4}^{8}\left(\frac{8}{x}-\sqrt{x}\right)dx\right|=\left|\left[8\ln x-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_{4}^{8}\right|=\left|8\ln 8-\frac{16}{3}\sqrt{8}-8\ln 4+\frac{8}{3}\sqrt{4}\right|=\left|24\ln 2-\frac{32}{3}\sqrt{2}-16\ln 2+\frac{16}{3}\right|=$$

$$=\left|\frac{16-32\sqrt{2}}{3}+8\ln 2\right|$$

123. Página 314

a)



b) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}\rightarrow x=1$$

$$\text{Área}=\left|\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx\right|=\left|\left[\ln x+\frac{1}{x}\right]_{1}^{2}\right|=\left|\ln 2+\frac{1}{2}-1\right|=\ln 2-\frac{1}{2}$$

124. Página 314

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$1+\ln x=\frac{1}{x}\rightarrow x=1$$

$$\text{Área}=\left|\int_1^2\left(1+\ln x-\frac{1}{x}\right)dx\right|=\left|\left[x+x\ln x-x-\ln x\right]_1^2\right|=\left|\left[(x-1)\ln x\right]_1^2\right|=\ln 2$$

125. Página 314

Hallamos los puntos de corte para $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$: $sen\ 2x=cos\ x\rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}\\x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

$$\text{Área}=\left|\int_0^{\frac{\pi}{6}}(sen\ 2x-cos\ x)\ dx\right|+\left|\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(sen\ 2x-cos\ x)\ dx\right|=\left|\left[-\frac{1}{2}cos\ 2x-sen\ x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\right|+\left|\left[-\frac{1}{2}cos\ 2x-sen\ x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right|=$$

$$=\left|-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{1}{2}-1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

126. Página 314

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2=(x-2)^2\rightarrow x^2=x^2-4x+4\rightarrow 4x=4\rightarrow x=1$$

$$x^2=0\rightarrow x=0 \qquad (x-2)^2=0\rightarrow x=2$$

$$\text{Área}=\left|\int_0^1 x^2\ dx\right|+\left|\int_1^2(x-2)^2\ dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\right|+\left|\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^2\right|=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

127. Página 314

$$2=\ln x\rightarrow x=e^2$$

$$\text{Área}=\left|\int_0^{e^2}(2-\ln x)\ dx\right|=\left|\left[2x-x\ln x+x\right]_0^{e^2}\right|=\left|3e^2-2e^2\right|=e^2$$

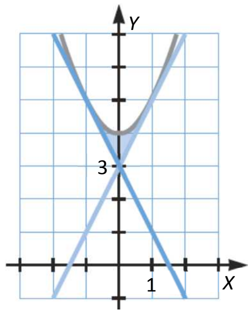
128. Página 314

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$\sqrt{x}=4\rightarrow x=16$$

$$\text{Área}=\left|\int_0^{16}\left(\sqrt{x}-4\right)dx\right|=\left|\left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-4x\right]_0^{16}\right|=\left|\frac{128}{3}-64\right|=\frac{64}{3}$$

129. Página 314



$y(-1)=5 \qquad y(1)=5$

$$f(x)=x^2+4 \rightarrow f'(x)=2x \rightarrow \begin{cases} f'(-1)=-2 \\ f'(1)=2 \end{cases}$$

Las rectas tangentes son:

$y=-2x+n \rightarrow 5=2+n \rightarrow n=3 \rightarrow y=-2x+3$

$y=2x+n \rightarrow 5=2+n \rightarrow n=3 \rightarrow y=2x+3$

$$Área=\left|\int_{-1}^{0}(x^2+4+2x-3)dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(x^2+4-2x-3)dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_{0}^{1}\right|=\left|\frac{1}{3}\right|+\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{2}{3}$$

130. Página 314

$x=0 \rightarrow f(0)=e^0=1$

$x=2 \rightarrow f(2)=e^2$

Recta: $m=\dfrac{e^2-1}{2} \rightarrow y=\left(\dfrac{e^2-1}{2}\right)x+n \rightarrow 1=n \rightarrow y=\left(\dfrac{e^2-1}{2}\right)x+1$

$$\text{Área}=\left|\int_{0}^{2}\left(\left(\frac{e^2-1}{2}\right)x+1-e^x\right)dx\right|=\left|\left[\left(\frac{e^2-1}{4}\right)x^2+x-e^x\right]_{0}^{2}\right|=\left|e^2-1+2-e^2+1\right|=2$$

131. Página 315

a) $f(1)=2 \rightarrow 1+a+b=2 \rightarrow b=1-a$

$g(1)=2 \rightarrow 1+c=2 \rightarrow c=1$

La función es: $g(x)=x^3+1$

$g'(x)=3x^2 \rightarrow g'(1)=3$

$f'(x)=2x+a \rightarrow f'(1)=3 \rightarrow 2+a=3 \rightarrow a=1 \rightarrow b=0$

La función es: $f(x)=x^2+x$

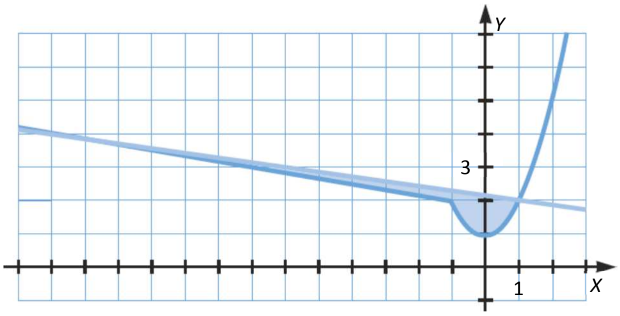
b) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2+x=x^3+1 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\text{Área}=\left|\int_{-1}^{1}(x^2+x-x^3-1)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}-x\right]_{-1}^{1}\right|=\left|\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-1\right|=\frac{4}{3}$$

132. Página 315

a)



b) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$\frac{15-x}{7}=\sqrt{3-x}\rightarrow\begin{cases}x=-13\\x=-6\end{cases}\qquad\qquad \frac{15-x}{7}=x^2+1\rightarrow x=1$$

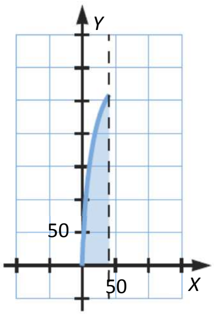
$$\text{Área}=\left|\int_{-13}^{-6}\left(\sqrt{3-x}-\frac{15}{7}+\frac{x}{7}\right)dx\right|+\left|\int_{-6}^{-1}\left(\sqrt{3-x}-\frac{15}{7}+\frac{x}{7}\right)dx\right|+\left|\int_{-1}^{1}\left(x^2+1-\frac{15}{7}+\frac{x}{7}\right)dx\right|=$$

$$=\left|\left[-\frac{2}{3}\sqrt{(3-x)^3}-\frac{15}{7}x+\frac{x^2}{14}\right]_{-13}^{-6}\right|+\left|\left[-\frac{2}{3}\sqrt{(3-x)^3}-\frac{15}{7}x+\frac{x^2}{14}\right]_{-6}^{-1}\right|+\left|\left[\frac{x^3}{3}-\frac{8}{7}x+\frac{x^2}{14}\right]_{-1}^{1}\right|=$$

$$=\left|-18+\frac{90}{7}+\frac{18}{7}+\frac{128}{3}-\frac{195}{7}-\frac{169}{14}\right|+\left|-\frac{16}{3}+\frac{15}{7}+\frac{1}{14}+18-\frac{90}{7}-\frac{18}{7}\right|+\left|\frac{1}{3}-\frac{8}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{3}-\frac{8}{7}-\frac{1}{14}\right|=$$

$$=\left|-18+\frac{90}{7}+\frac{18}{7}+\frac{128}{3}-\frac{195}{7}-\frac{169}{14}\right|+\left|-\frac{16}{3}+\frac{15}{7}+\frac{1}{14}+18-\frac{90}{7}-\frac{18}{7}\right|+\left|\frac{1}{3}-\frac{8}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{3}-\frac{8}{7}-\frac{1}{14}\right|=\frac{1}{6}+\frac{23}{42}+\frac{34}{21}=\frac{7}{3}$$

133. Página 315



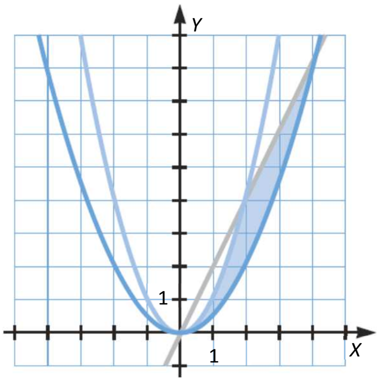
$$\text{Área}=\int_0^{40}30\sqrt{2x+1}\,dx=\left[10\sqrt{(2x+1)^3}\right]_0^{40}=7290-10=7280$$

134. Página 315

a) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$f(x)=g(x)\rightarrow x^2=\frac{x^2}{2}\rightarrow x=0$$

$$f(x)=h(x)\rightarrow x^2=2x\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}\qquad g(x)=h(x)\rightarrow\frac{x^2}{2}=2x\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=4\end{cases}$$

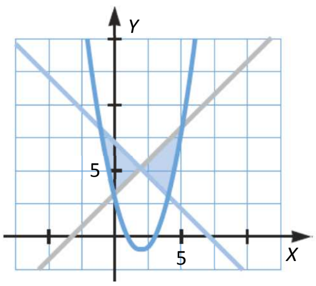


$$\text{Área}=\left|\int_0^2\left(x^2-\frac{x^2}{2}\right)dx\right|+\left|\int_2^4\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2\right|+\left|\left[\frac{x^3}{6}-x^2\right]_2^4\right|=\left|\frac{4}{3}\right|+\left|\frac{32}{3}-16-\frac{4}{3}+4\right|=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}=4$$

b) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$f(x)=g(x)\rightarrow x+3=x^2-4x+3\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=5\end{cases}$$

$$f(x)=h(x)\rightarrow x+3=-x+7\rightarrow x=2\qquad g(x)=h(x)\rightarrow x^2-4x+3=-x+7\rightarrow\begin{cases}x=-1\\x=4\end{cases}$$



$$\text{Área}=\left|\int_{-1}^0(-x+7-x^2+4x-3)\,dx\right|+\left|\int_0^2(x+3+x-7)\,dx\right|+\left|\int_2^4(x+3+x-7)\,dx\right|+\left|\int_4^5(x+3-x^2+4x-3)\,dx\right|=$$

$$=\left|\int_{-1}^0(-x^2+3x+4)dx\right|+\left|\int_0^2(2x-4)dx\right|+\left|\int_2^4(2x-4)dx\right|+\left|\int_4^5(-x^2+5x)dx\right|=$$

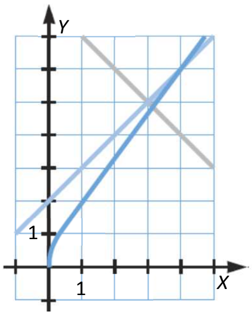
$$=\left|\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4x\right]_{-1}^0\right|+\left|\left[x^2-4x\right]_0^2\right|+\left|\left[x^2-4x\right]_2^4\right|+\left|\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}\right]_4^5\right|=$$

$$=\left|-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+4\right|+|4-8|+|-4+8|+\left|-\frac{125}{3}+\frac{125}{2}+\frac{64}{3}-40\right|=\frac{13}{6}+4+4+\frac{13}{6}=\frac{37}{3}$$

c) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$f(x)=g(x)\to -x+8=x+\sqrt{x}\to x=\frac{33}{8}-\frac{\sqrt{65}}{8}\simeq 3{,}12$$

$f(x)=h(x)\to -x+8=x+2\to x=3$ $\qquad$ $g(x)=h(x)\to x+\sqrt{x}=x+2\to x=4$



$$\text{Área}=\left|\int_{3}^{3,12}(x+2+x-8)\,dx\right|+\left|\int_{3,12}^{4}\left(x+\sqrt{x}-x-2\right)dx\right|=\left|\left[x^2-6x\right]_3^{3,12}\right|+\left|\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-2x\right]_{3,12}^{4}\right|=$$

$$=\left|(3{,}12)^2-6\cdot 3{,}12-9+18\right|+\left|\frac{16}{3}-8-\frac{2}{3}\sqrt{(3{,}12)^3}+2\cdot 3{,}12\right|=0{,}01+0{,}1=0{,}11$$

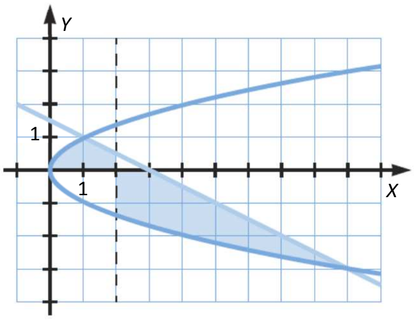
135. Página 315

$f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad$ $g(x)=-\sqrt{x}$ $\qquad$ $h(x)=\dfrac{3-x}{2}$

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$f(x)=h(x)\to\sqrt{x}=\dfrac{3-x}{2}\to x=1$ $\qquad$ $g(x)=h(x)\to -\sqrt{x}=\dfrac{3-x}{2}\to x=9$

$f(x)=0\to g(x)=0\to x=0$ $\qquad$ $h(x)=0\to x=3$



$$\text{Área}=\left|\int_0^1\sqrt{x}\,dx\right|+\left|\int_1^2\frac{3-x}{2}\,dx\right|+\left|\int_2^3-\sqrt{x}\,dx\right|+\left|\int_3^9\left(\sqrt{x}-\frac{3-x}{2}\right)dx\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1\right|+\left|\left[\frac{3}{2}x-\frac{x^2}{4}\right]_1^2\right|+\left|\left[-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_2^3\right|+\left|\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{3}{2}x+\frac{x^2}{4}\right]_3^9\right|=$$

$$=\left|\frac{2}{3}\right|+\left|3-1-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right|+\left|-2\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{2}\right|+\left|18-\frac{27}{2}+\frac{81}{4}-2\sqrt{3}+\frac{9}{2}-\frac{9}{4}\right|=$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4\sqrt{2}}{3}-2\sqrt{3}+27-2\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{2}}{3}-4\sqrt{3}+\frac{341}{12}$$

136. Página 315

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2 = 2\sqrt{x} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{4} \end{cases} \qquad \text{Área} = \left| \int_0^{\sqrt[3]{4}} \left(2\sqrt{x} - x^2\right) dx \right| = \left| \left[\frac{4}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt[3]{4}} \right| = \left| \frac{8}{3} - \frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

137. Página 315

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2 - 1 = ax - 1 \rightarrow x(x - a) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^a \left(x^2 - ax\right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_0^a \right| = \left| \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} \right| = \left| \frac{a^3}{6} \right| = 36 \rightarrow \left| \frac{a^3}{6} \right| = 36 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{a^3}{6} = 36 \rightarrow a = 6 \\ \dfrac{a^3}{6} = -36 \rightarrow a = -6 \end{cases}$$

138. Página 315

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$-x^2 + 4 = a \rightarrow x^2 = 4 - a \rightarrow \begin{cases} x = +\sqrt{4-a} \\ x = -\sqrt{4-a} \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-\sqrt{4-a}}^{\sqrt{4-a}} \left(x^2 - 4 + a\right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - 4x + ax \right]_{-\sqrt{4-a}}^{\sqrt{4-a}} \right| =$$

$$= \left| \frac{\left(\sqrt{4-a}\right)^3}{3} - 4\left(\sqrt{4-a}\right) + a\sqrt{4-a} + \frac{\left(\sqrt{4-a}\right)^3}{3} - 4\left(\sqrt{4-a}\right) + a\sqrt{4-a} \right| =$$

$$= \left| 2 \cdot \frac{\left(\sqrt{4-a}\right)^3}{3} - 8\left(\sqrt{4-a}\right) + 2a\sqrt{4-a} \right| = \left| \sqrt{4-a}\left(\frac{2}{3}(4-a) - 8 + 2a\right) \right| = \left| -\frac{4}{3}\sqrt{(4-a)^3} \right|$$

$$\text{Área} = \frac{4}{3} \rightarrow \left| -\frac{4}{3}\sqrt{(4-a)^3} \right| = \frac{4}{3} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{3}\sqrt{(4-a)^3} = \dfrac{4}{3} \rightarrow (4-a)^3 = 1 \rightarrow a = 3 \\ \dfrac{4}{3}\sqrt{(4-a)^3} = -\dfrac{4}{3} \rightarrow (4-a)^3 = -1 \rightarrow a = 5 \end{cases}$$

139. Página 315

Si $a \geq 1$, las funciones no determinan una región cerrada.

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$1 - x^2 = a \rightarrow x^2 = 1 - a \rightarrow \begin{cases} x = +\sqrt{1-a} \\ x = -\sqrt{1-a} \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-\sqrt{1-a}}^{\sqrt{1-a}} \left(x^2 - 1 + a\right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - x + ax \right]_{-\sqrt{1-a}}^{\sqrt{1-a}} \right| = \left| \frac{\left(\sqrt{1-a}\right)^3}{3} - \sqrt{1-a} + a\sqrt{1-a} + \frac{\left(\sqrt{1-a}\right)^3}{3} - \sqrt{1-a} + a\sqrt{1-a} \right| =$$

$$= \left| 2 \cdot \frac{\left(\sqrt{1-a}\right)^3}{3} - 2\left(\sqrt{1-a}\right) + 2a\sqrt{1-a} \right| = \left| \sqrt{1-a}\left(\frac{2}{3}(1-a) - 2 + 2a\right) \right| = \left| -\frac{4}{3}\sqrt{(1-a)^3} \right| = \frac{4}{3}\sqrt{(1-a)^3} \quad \forall a \in (-\infty, 1]$$

140. Página 315

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Área total} = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Entonces el área de cada una de las parcelas será la mitad, es decir, $\frac{2}{3}$.

$$\text{Área} = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}(a-x^2)\,dx = \left[ax - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} + a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} = \frac{4}{3}a\sqrt{a}$$

$$\text{Área} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{4}{3}a\sqrt{a} = \frac{2}{3} \rightarrow a\sqrt{a} = \frac{1}{2} \rightarrow a^3 = \frac{1}{4} \rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \rightarrow a = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

141. Página 315

a) Para que la curva y la recta delimiten una región del plano, tienen que cortarse en dos puntos.

$$x^2 + 2x - 3 = 2x + m \rightarrow x^2 = 3 + m \rightarrow x = \pm\sqrt{3+m}$$

Si $3 + m = 0 \rightarrow m = -3 \rightarrow$ La curva y la recta se cortarán solamente en un punto, en $x = 0$.

Si $3 + m < 0 \rightarrow m < -3 \rightarrow$ La raíz no existe, por lo que las funciones no se cortan.

Si $3 + m > 0 \rightarrow m > -3 \rightarrow$ Las dos funciones delimitan una región en el plano.

b) Las primeras coordenadas de los puntos de corte serán: $-\sqrt{3+m}$ y $\sqrt{3+m}$. Entonces:

$$\text{Área} = \left|\int_{-\sqrt{3+m}}^{\sqrt{3+m}}(x^2 + 2x - 3 - 2x - m)\,dx\right| = \left|\int_{-\sqrt{3+m}}^{\sqrt{3+m}}(x^2 - 3 - m)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - (3+m)x\right]_{-\sqrt{3+m}}^{\sqrt{3+m}}\right| =$$

$$= \left|\frac{(3+m)\sqrt{3+m}}{3} - (3+m)\sqrt{3+m} + \frac{(3+m)\sqrt{3+m}}{3} - (3+m)\sqrt{3+m}\right| = \left|-\frac{4(3+m)\sqrt{3+m}}{3}\right| = \frac{4(3+m)\sqrt{3+m}}{3}$$

Como $\frac{4(3+m)\sqrt{3+m}}{3} = 36 \rightarrow (3+m)\sqrt{3+m} = 27 \rightarrow (3+m)^2(3+m) = 27^2 \rightarrow (3+m)^3 = \left(3^2\right)^3 \rightarrow 3 + m = 9 \rightarrow m = 6$.

142. Página 315

a) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x + 2 = 4 - x^2 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

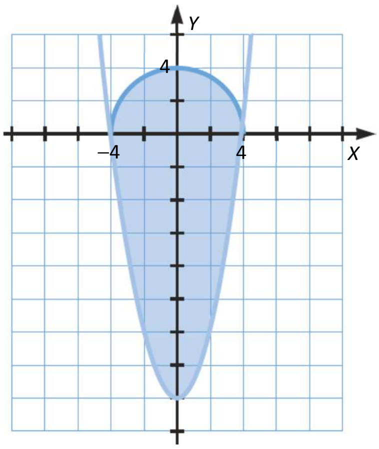
$$\text{Área} = \left|\int_{-2}^{1}(x + 2 - 4 + x^2)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1}\right| = \left|\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} - 2 - 4 + \frac{8}{3}\right| = \left|-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2}$$

b) Basta con tomar una recta paralela al eje *X*, $y = a$, de tal forma que:

$$a \cdot 2 = \frac{9}{2} \rightarrow a = \frac{9}{4} \rightarrow p(x) = \frac{9}{4}$$

143. Página 315

a) La ecuación de una circunferencia es $y=\sqrt{r^2-x^2}$. En este caso tenemos una circunferencia de radio 4; por tanto, la función es $y=\sqrt{16-x^2}$.



b) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$\sqrt{16-x^2}=x^2-16 \rightarrow 16-x^2=x^4-32x^2+16^2 \rightarrow x^4-31x^2+240=0 \rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=4 \\ x=\sqrt{15} \\ x=-\sqrt{15} \end{cases}$$

Como solo tomamos el sentido positivo de la circunferencia, las funciones se cortan en $x=-4$ y $x=4$.

$$\text{Área}=\left|\int_{-4}^{4}\left(\sqrt{16-x^2}-x^2+16\right)dx\right|=\left|\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx\right|+\left|\left[-\frac{x^3}{3}+16x\right]_{-4}^{4}\right|$$

Realizamos el siguiente cambio de variable:

$x=4\,sen\,t \rightarrow dx=4\cos t\,dt$ $\qquad$ $x\in[-4,\,4]\rightarrow t\in\left[\frac{\pi}{2},\,\frac{3\pi}{2}\right]$

$$\text{Área}=\left|\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx\right|+\left|\left[-\frac{x^3}{3}+16x\right]_{-4}^{4}\right|=\left|\left[-\frac{x^3}{3}+16x\right]_{-4}^{4}\right|+\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}4\cos t\sqrt{16-16sen^2 t}\,dt\right|=$$

$$=-\frac{64}{3}+64-\frac{64}{3}+64+\left|16\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^2 t\,dx\right|=\frac{256}{3}+\left|16\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dx\right|=\frac{256}{3}+\left|8\left[t+\frac{1}{2}sen\,2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right|=\frac{256}{3}+8\pi$$

c) $\left(\frac{256}{3}+8\pi\right)\cdot 3=331{,}40$ €

d) $\frac{256}{3}+8\pi=110{,}47\ \text{m}^2$

Tendría que comprar 3 paquetes de 50 m^2, es decir, se gastaría 300 €. Le compensa la oferta.

144. Página 315

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$6kx^2 + x = 0 \to x(6kx+1) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = -\dfrac{1}{6k} \end{cases}$$

$$\left|\int_0^k (6kx^2 + x)\,dx\right| = \left|\left[2kx^3 + \frac{x^2}{2}\right]_0^k\right| = \left|2k^4 + \frac{k^2}{2}\right| = 2k^4 + \frac{k^2}{2} \text{ porque } k > 0$$

Por tanto: $2k^4 + \dfrac{k^2}{2} = k^4 + (k^2-2)^2 \to 4k^4 + k^2 = 2k^4 + 2k^4 - 8k^2 + 8 \to 9k^2 - 8 = 0 \to \begin{cases} k = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \\ k = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$

Como buscamos el valor positivo de $k \to k = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 316

La concentración de tinta en sangre es la cantidad de tinta que hay en la sangre en un determinado momento.

El gasto cardiaco depende de la concentración de tinta en sangre, $C(t)$, el tiempo que necesita la tinta para pasar por completo por una zona de test, T_0, y la cantidad de tinta que se ha introducido en el corazón, D.

2. Página 316

Tanto el numerador como el denominador de la fracción que determina el gasto cardiaco dependen de la cantidad de tinta, por lo que el cociente se mantendrá constante independientemente de la cantidad de tinta que se inyecte.

3. Página 316

Si D es correcto, los valores anómalos nos los dará $\int_0^{T_0} C(t)\,dt$. Es decir, o bien la concentración de tinta en sangre en un momento concreto no es la adecuada, o el tiempo que necesita la tinta para pasar por completo por los puntos de test no es el correcto.

4. Página 316

Mujeres: $4 \text{ l/min} \cdot 60 \text{ min/h} \cdot 24 \text{ h} = 5760 \text{ l/día}$

En un día, el corazón de una mujer bombea 5 760 litros de sangre.

Hombres: $5 \text{ l/min} \cdot 60 \text{ min/h} \cdot 24 \text{ h} = 7200 \text{ l/día}$

En un día, el corazón de un hombre bombea 7 200 litros de sangre.