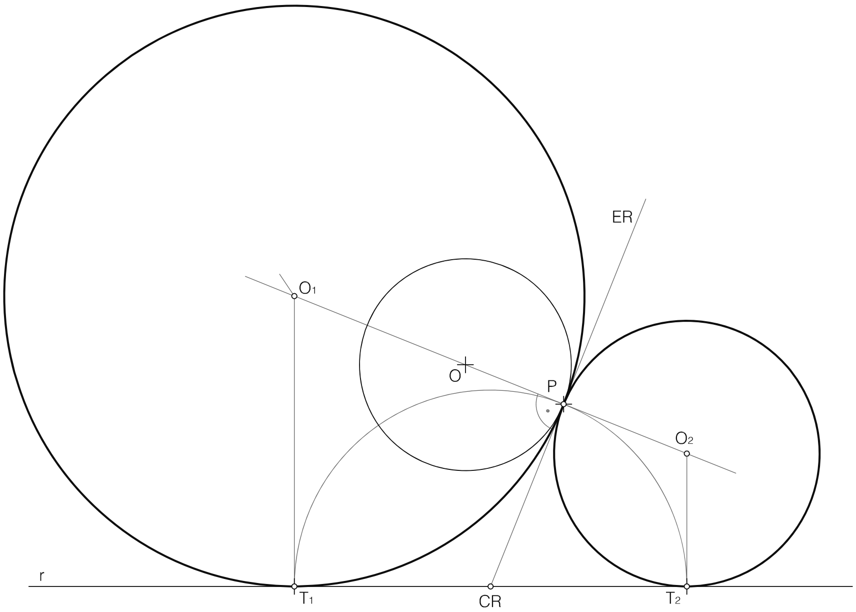
Unitat 2. Generalització de l'estudi de tangències

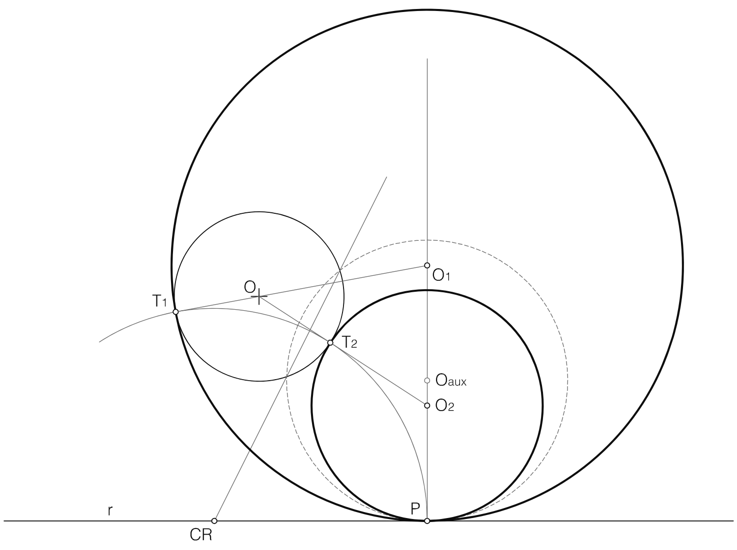
ACTIVITATS (pàgines 53 i 54 del llibre de l'alumne)

Tangències amb circumferències

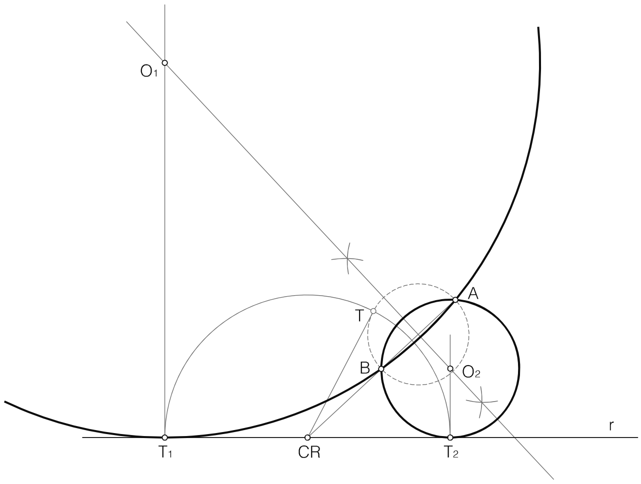
1. La recta d'unió de **O** amb **P** és la recta de centres, i la perpendicular a aquesta, traçada per **P**, és l'eix radical entre la circumferència donada i les solucions. El punt en què aquest eix talla la recta **r** és el centre radical, des del qual establim la igualtat de potències mitjançant un arc de radi fins a **P** i que talla **r** en els punts de tangència; des d'aquests punts, alcem perpendiculars a **r** per determinar en les seves interseccions amb la recta de centres els punts $\mathbf{O_1}$ i $\mathbf{O_2}$, centres de les circumferències solució.



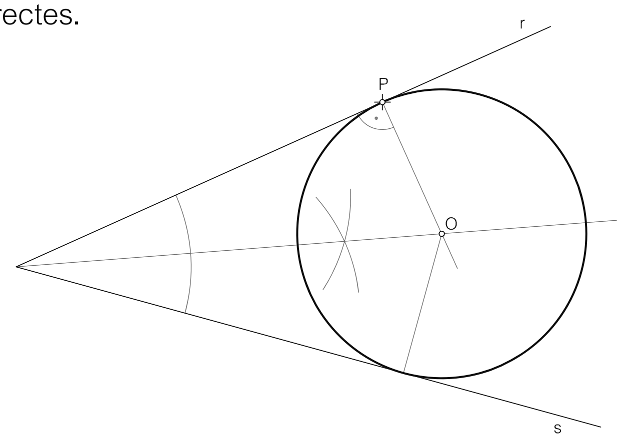
2. Pel punt **P** de la recta tracem la recta de centres, perpendicular a **r**. Tracem una circumferència auxiliar amb centre a la recta de centres, que passi per **P** i talli la circumferència inicial; la intersecció entre les dues circumferències defineix un eix radical que talla **r** en el centre radical entre la circumferència donada i les solucions. Tracem una circumferència que tingui de centre el radical, i de radi, la distància fins a **P**, que, en tallar la circumferència inicial, determina els punts de tangència $\mathbf{T_1}$ i $\mathbf{T_2}$; unim aquests punts amb **O** per tenir sobre la recta de centres els punts $\mathbf{O_1}$ i $\mathbf{O_2}$, centres de les circumferències solució.



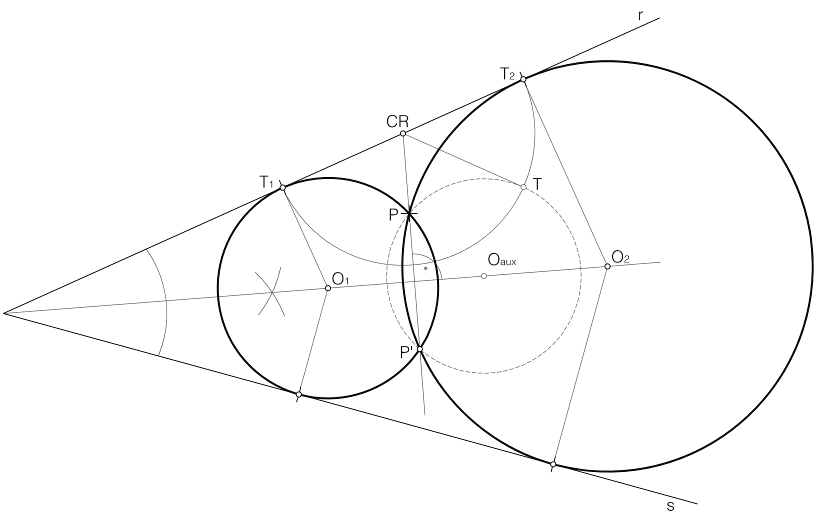
3. La recta d'unió de **A** i **B** és un eix radical que, en tallar-se amb **r**, ens determina el centre radical **CR**. Tracem una circumferència auxiliar de diàmetre **AB**, a la qual tracem la tangent des de **CR**; aquesta tangent representa la potència i ens permet trobar els punts de tangència $\mathbf{T_1}$ i $\mathbf{T_2}$, a partir dels quals determinem els centres de les solucions sobre la recta de centres, la mediatriu de **AB**.



4. Amb el punt **P** situat en una de les rectes, aquest punt serà el de tangència amb la recta **r**; per tant, el centre de la circumferència solució es trobarà en la intersecció de la perpendicular a **r** traçada per **P** i la bisectriu de les dues rectes.

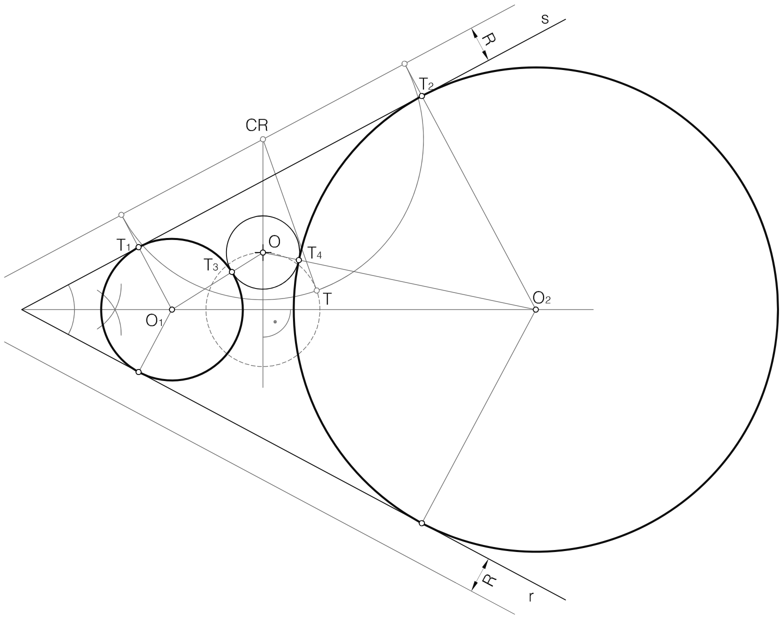


5. La bisectriu de les dues rectes és la recta de centres. Determinem el simètric de **P** respecte de la bisectriu i tracem una circumferència auxiliar que passi per **P** i **P′** i tingui el centre a la bisectriu. Des del punt en què la recta **PP′** talla **r** (centre radical **CR**), tracem la tangent a la circumferència auxiliar; tangent que representa la potència i que, portada sobre la recta **r**, ens determina els punts de tangència $\mathbf{T_1}$ i $\mathbf{T_2}$, que ens permeten trobar els centres de les dues solucions.

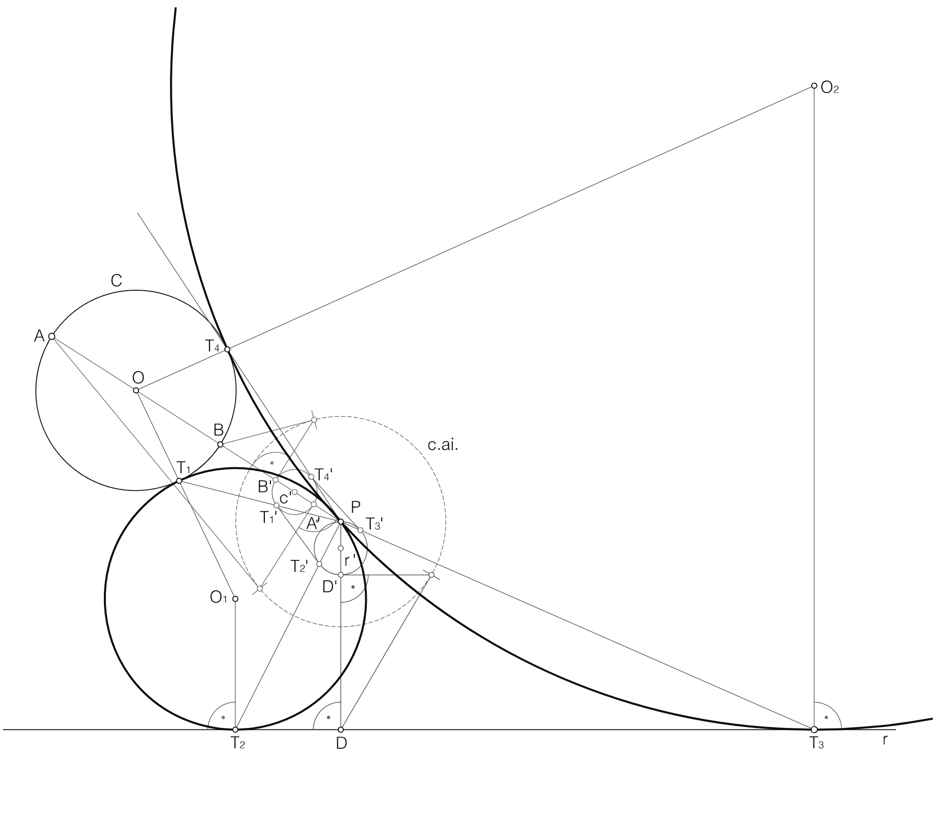


6. Restant el mateix radi a la circumferència inicial, aquesta queda transformada en un punt (el seu centre); fem la mateixa operació amb les rectes **r** i **s**, a les quals tracem paral·leles a una distància igual al radi **R** de la circumferència. Amb aquestes operacions, el problema queda transformat a determinar les tangents a dues rectes (les paral·leles a **r** i **s**) que passin per un punt (el centre **O** de la circumferència); un problema que hem resolt a l'activitat anterior.

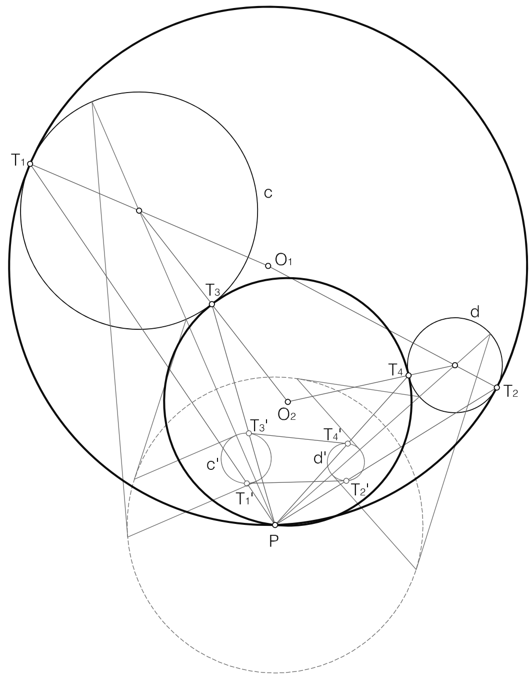
Podríem obtenir dues solucions més, diferents, traçant les paral·leles interiors a les dues rectes inicials.



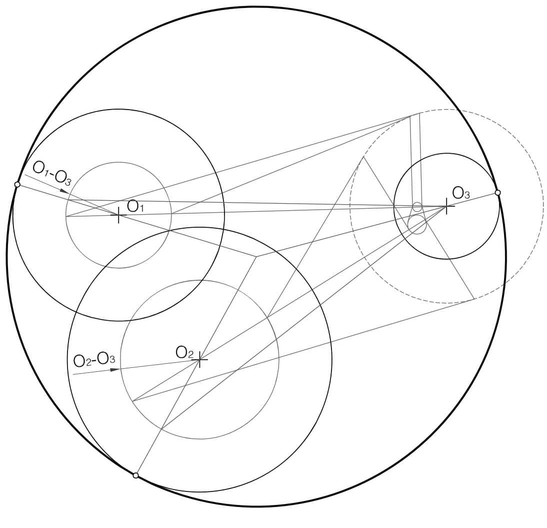
7. Utilitzant **P** com a centre d'inversió (i amb una raó qualsevol), determinem les figures inverses de les inicials: la recta es converteix en una circumferència que passa per **P** i la circumferència, en una altra que no passa per **P**. A les dues circumferències inverses, tracem les rectes tangents, exteriors i interiors. Aquestes tangents les invertim respecte de **P** i es converteixen en circumferències que mantindran els punts de tangència.



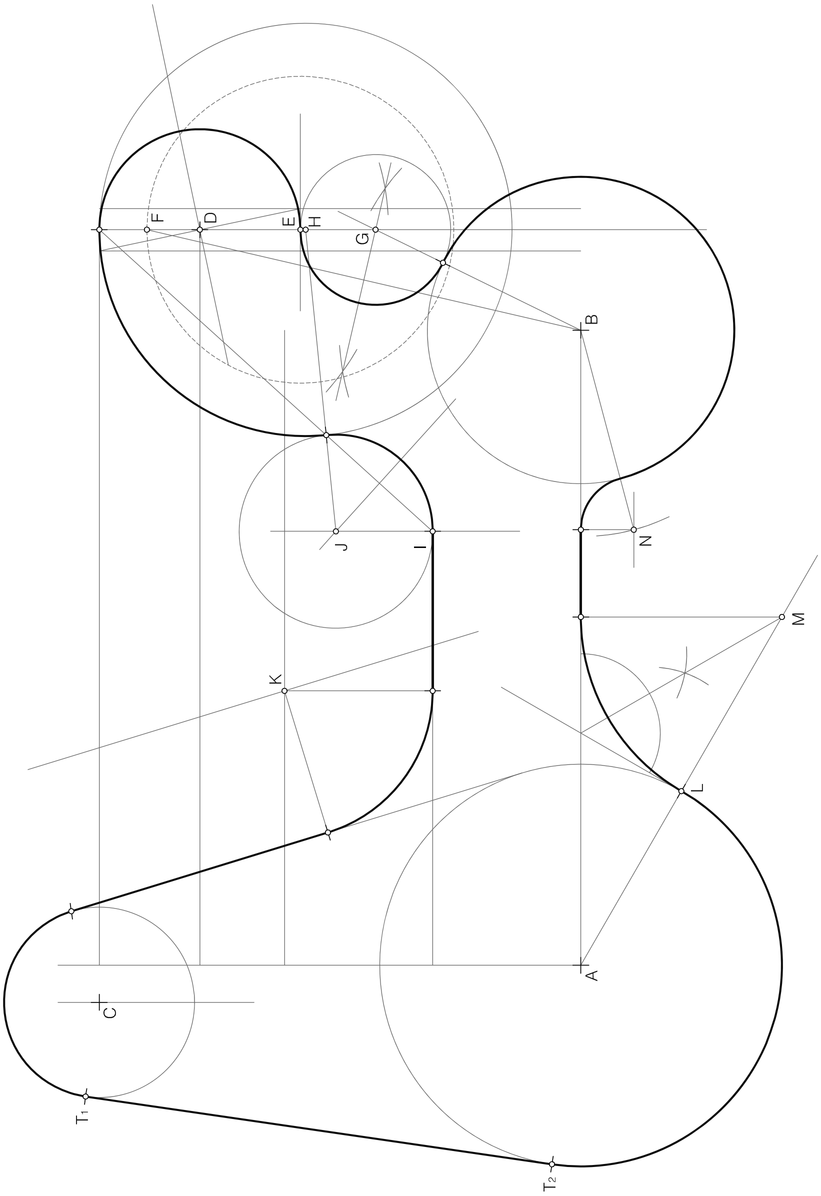
8. El punt **P** l'agafem com a centre d'una inversió de raó qualsevol, i en relació amb el qual determinem les circumferències inverses, **c′** i **d′**, de les dues circumferències donades. Les rectes tangents a les circumferències inverses són els elements inversos de les circumferències tangents solució; aquestes les determinem trobant els punts inversos dels de tangència, que estan situats a les circumferències inicials.



9. Restem de les tres circumferències el radi de la circumferència de centre **O_3**; les dues de radis més grans queden transformades en noves circumferències concèntriques a les inicials, i la més petita, en un punt, el seu centre **O_3**. Amb aquesta transformació, modifiquem les condicions del problema, que queda convertit a fer les tangents a dues circumferències passant per un punt, un problema que hem resolt a l'activitat anterior.

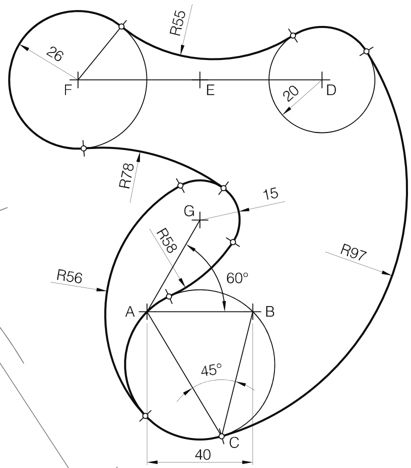


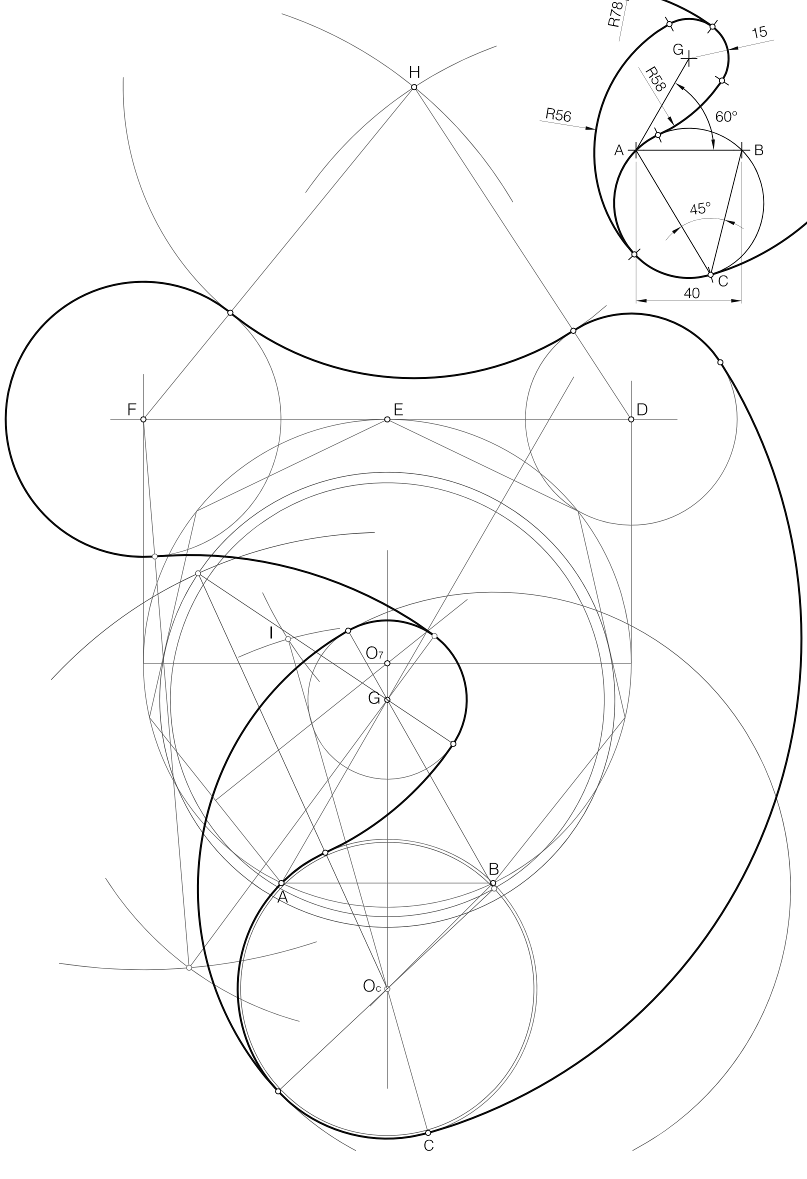
10. Situem en primer lloc el punt **C**. Així, podem dibuixar les rectes tangents comunes exteriors a les circumferències de centres **A** i **C** i trobem els punts de tangència **T_1** i **T_2**. Situem després el punt **D**, centre d'una circumferència de radi 19 mm. Trobem el punt **E** per mitjà d'una paral·lela a la recta **AB** a una distància de 53 mm. A partir de **E**, sumem el radi de la circumferència de centre **B** i radi 29. Unim el punt **F** amb **B** i hi tracem la mediatriu, per trobar el centre de l'enllaç, el punt **G**. Sabent el punt de tangència i el radi, trobem el centre **H** de la circumferència de radi 39 mm. Mitjançant les paral·leles a 82 i 63, determinem el punt **I**. Utilitzant el procediment anterior, afegint el radi de la circumferència de centre en **H**, trobem el punt **J**, centre de la circumferència que passa per **I** i és tangent a la circumferència de centre **H**. També per paral·lelisme, trobem el centre **K**. Amb l'angle de 30º, determinem la recta tangent a la circumferència de centre en **A**, que és tangent a **L**, i, amb la bisectriu de l'angle que aquesta forma amb la recta **AB**, trobem el centre de la circumferència tangent a ambdues, el punt **M**. Finalment, trobem el centre **N** mitjançant el radi, que sumem a la recta **AB** i també a la circumferència de centre en **B**.



A la segona de les figures, situem el punt **B** i, mitjançant un dels procediments que s'han estudiat a primer de Batxillerat, en primer lloc trobem **O$_7$**, centre de la circumferència circumscrita a l'heptàgon, i després el punt **E**. Amb el radi de l'heptàgon, obtenim els punts **D** i **F**. Trobem el punt **H**, centre de la circumferència tangent a les de centre en **D** i **F** i radis coneguts. Trobem el centre **O$_c$** de l'arc capaç que ens ha de servir per trobar el punt **C**. A partir d'aquest centre i del punt **D**, resolem la tangència amb la circumferència de radi 97 mm i trobem el punt **I**. Unim **I** amb **O$_c$** i en la seva prolongació trobem el punt **C**. Trobem **C** en la intersecció del segment **AB** amb una recta auxiliar a 60º des de **A**. Resolem els arcs restants a partir dels seus radis.

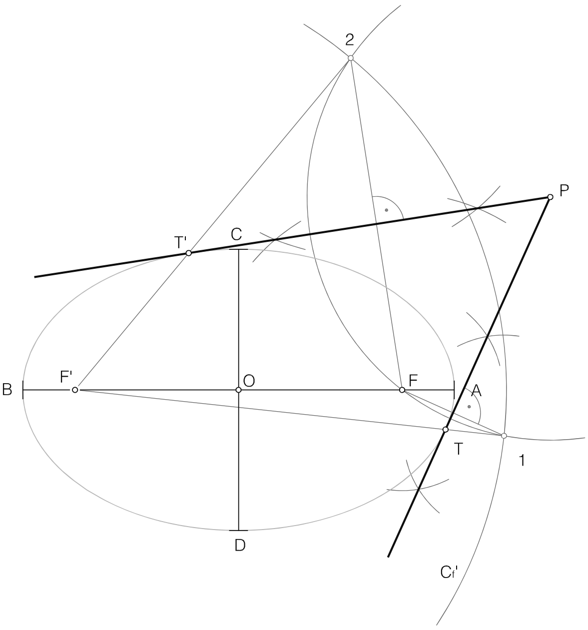
AB i E són el costat i el vèrtex oposats d'un heptàgon.
El segment FD és igual al diàmetre de la circumferència circumscrita a l'heptàgon
FE=ED



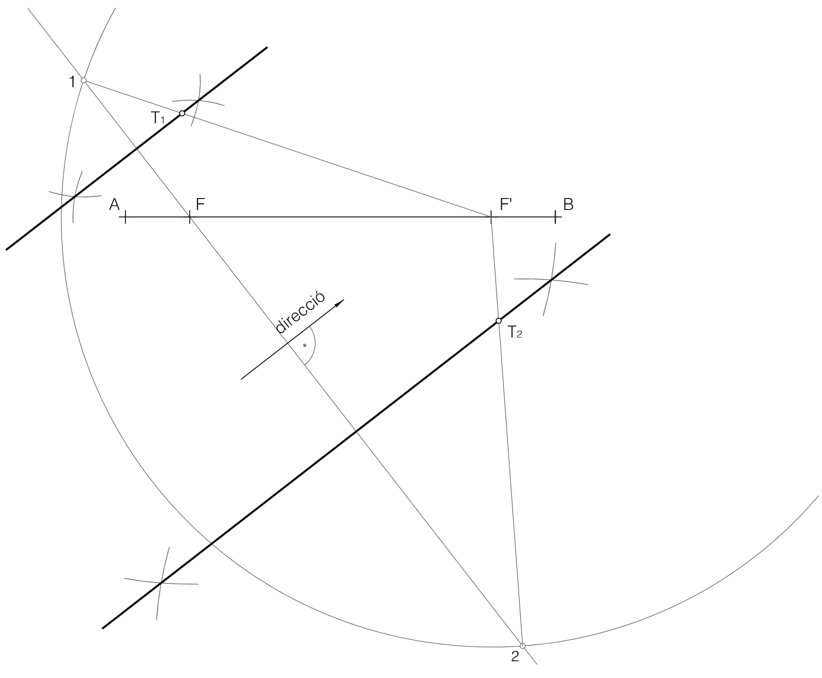


Tangències amb còniques

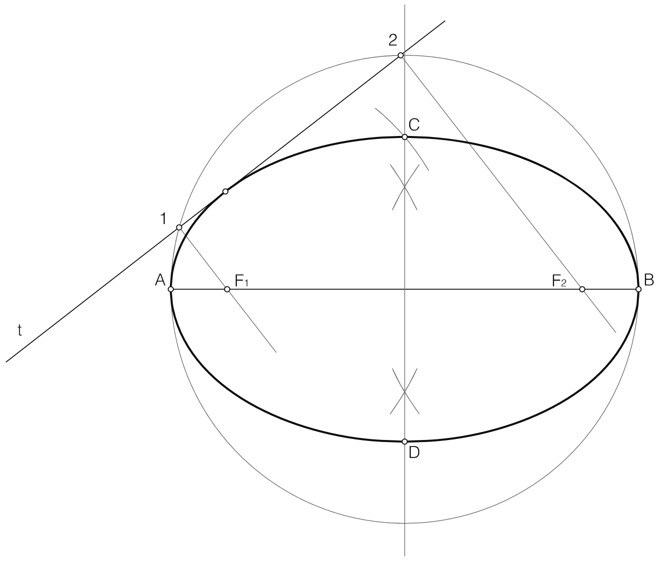
11. Coneguts els eixos, determinem els dos focus de l'el·lipse; tracem la circumferència focal de **F′** i, amb centre a **P**, tracem un arc de radi que sigui igual a la distància des de **P** fins a l'altre focus; aquest arc talla l'anterior circumferència focal en els punts **1** i **2**, simètrics de **F** respecte de dues tangents. Les mediatrius de **F1** i de **F2** són les tangents que busquem. Els punts de tangència es troben a la intersecció amb les tangents dels segments que uneixen els punts **1** i **2** amb el focus **F′** (el centre de la circumferència focal que hem utilitzat).



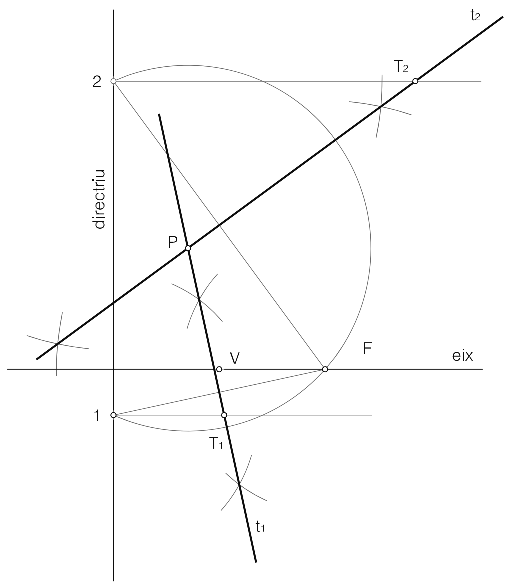
12. Tracem la circumferència focal de centre **F′** i la perpendicular a la direcció donada per les tangents des de l'altre focus; la intersecció de la perpendicular anterior amb la circumferència focal ens determina els punts **1** i **2**; les mediatrius dels segments **1F** i **2F** són les tangents que es demanen. Els punts de tangència els determinaríem unint els punts **1** i **2** amb **F′** i en la seva intersecció amb les tangents a l'el·lipse.



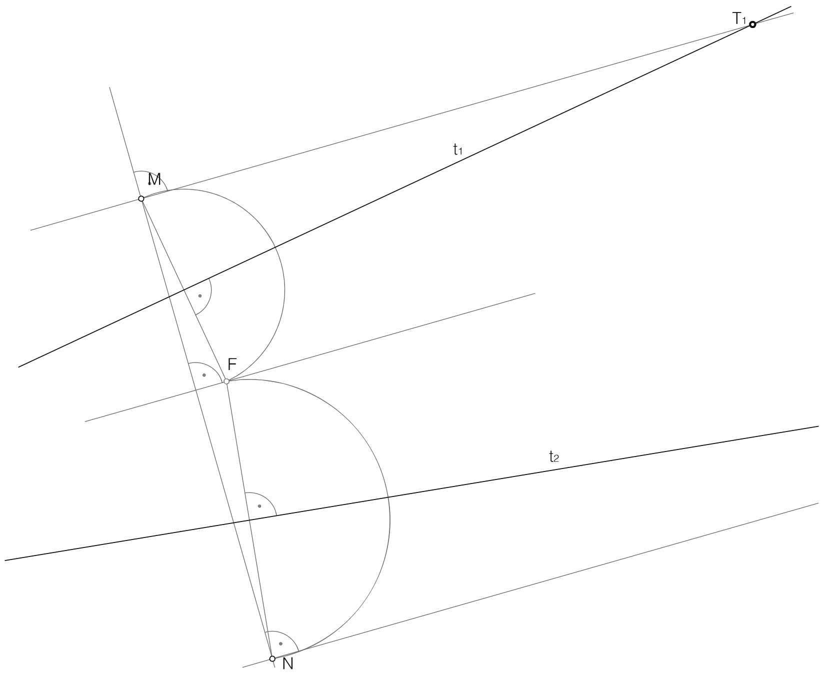
13. Amb centre al punt mitjà de **AB**, tracem la circumferència principal que talla la tangent **t** en els punts **1** i **2**; aquests punts, comuns a l'el·lipse i a una tangent, són les projeccions dels focus de la cònica. Des d'**1** i **2**, tracem perpendiculars a la tangent, que tallaran l'eix en dos punts, que són els focus $\mathbf{F_1}$ i $\mathbf{F_2}$. Un cop sabem els focus, situem sobre la mediatriu de **AB** la posició dels altres vèrtexs **C** i **D**, amb un arc de centre qualsevol dels focus, i de radi, la meitat de **AB**. Coneguts els eixos, podem dibuixar l'el·lipse.



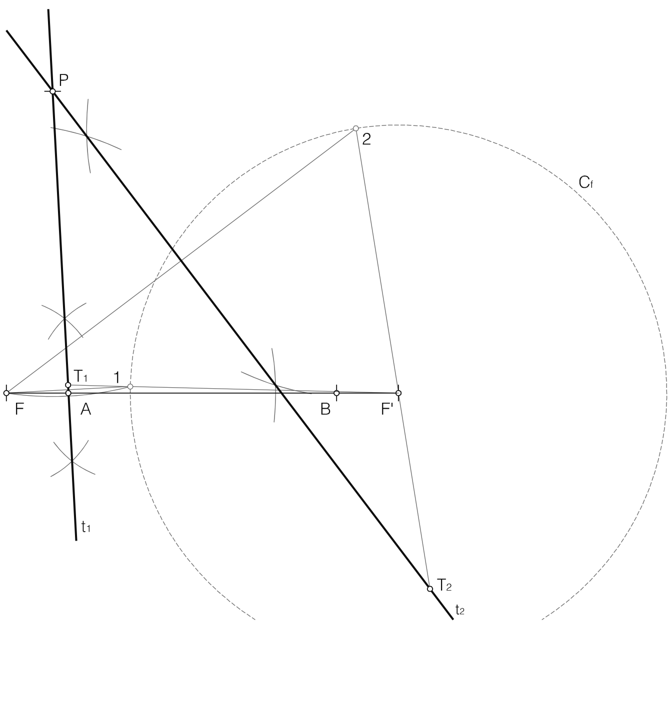
14. Amb centre a **P** i un radi igual a la distància fins al focus, tracem una circumferència que talla la directriu en els punts **1** i **2**; les mediatrius dels segments **1F** i **2F** són les tangents demanades. Els punts de tangència es troben a sobre d'aquestes tangents en tallar-se amb les perpendiculars a la directriu fetes des dels punts **1** i **2**.



15. Determinem els simètrics **M** i **N** del focus **F** respecte de cadascuna de les dues tangents donades; els punts **M** i **N** ens defineixen la directriu de la paràbola. Les perpendiculars a la directriu traçades pels punts **M** i **N** en tallar-se amb les dues tangents, defineixen la posició dels punts de tangència $\mathbf{T_1}$ i $\mathbf{T_2}$.



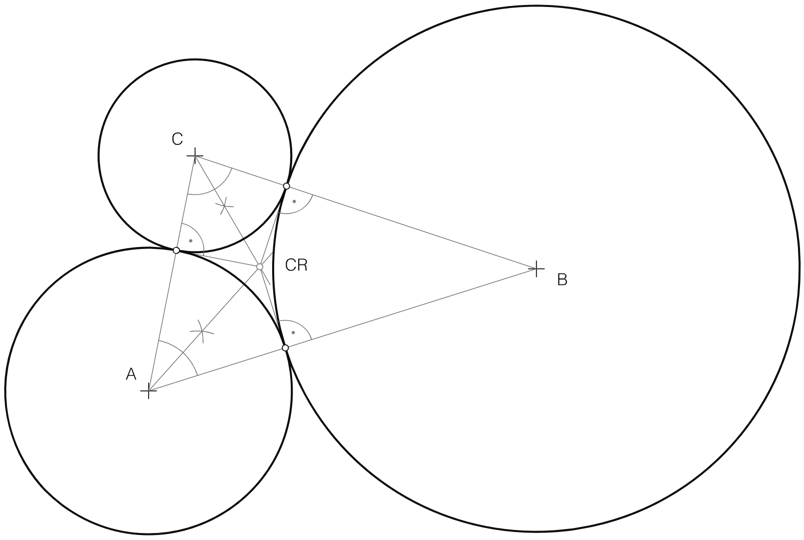
16. Determinem els punts **1** i **2**, en què la circumferència de centre **P** i que passa pel focus **F** es talla amb la circumferència focal de l'altre focus **F'**. Les mediatrius dels segments **1F** i **2F** són les tangents que es demanen. Els punts de tangència respectius es troben unint els punts **1** i **2** amb el centre **F'** de la circumferència focal que s'ha traçat anteriorment.



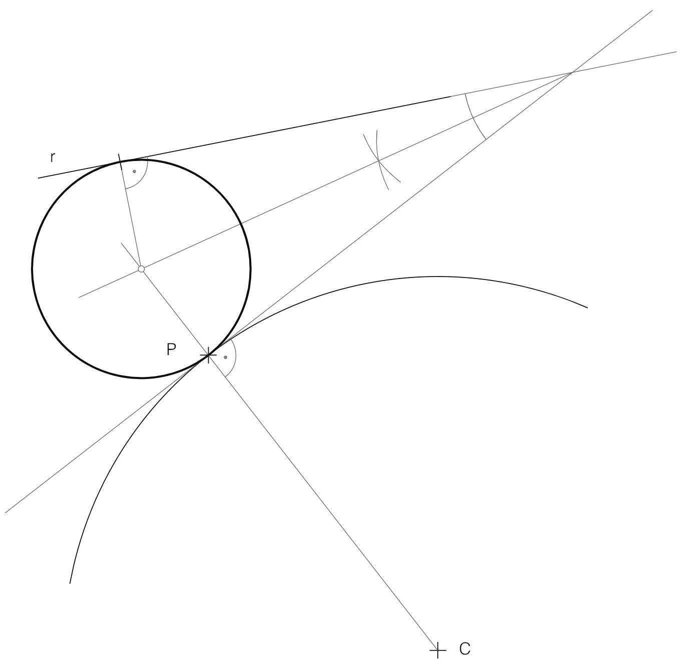
OBJECTIU UNIVERSITAT (pàgines 55 i 56 del llibre de l'alumne)

Tangències amb circumferències

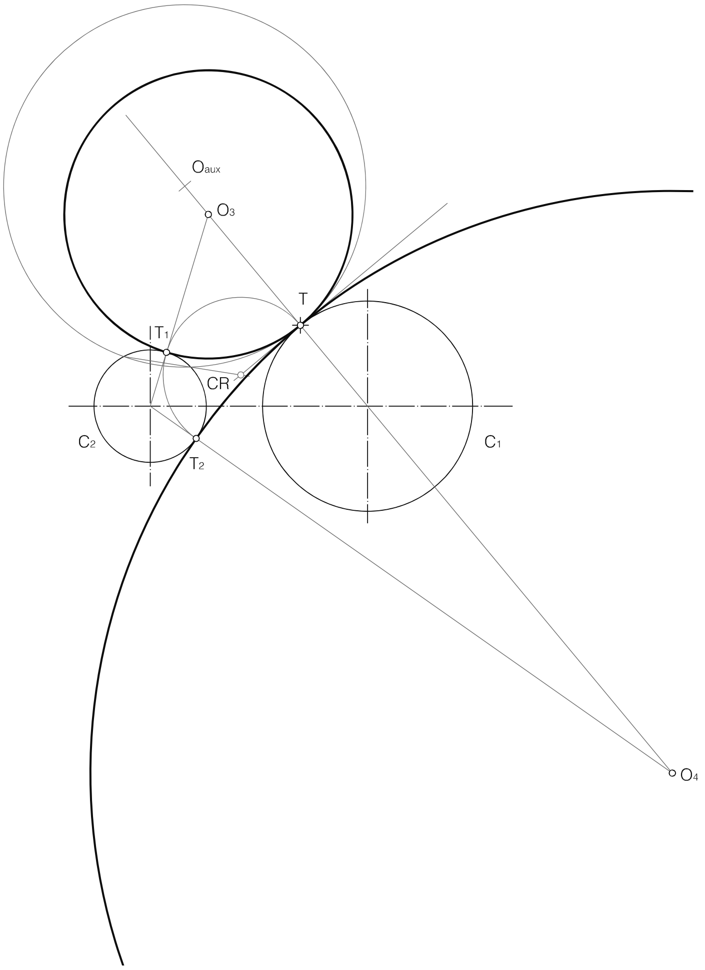
17. La distància de l'incentre del triangle **ABC** als seus costats és un valor constant que coincideix amb la potència d'aquest punt respecte de les circumferències. Tracem dues de les bisectrius i, des del seu punt d'intersecció, les perpendiculars als costats del triangle **ABC**; els punts d'intersecció amb els costats defineixen els punts de tangència entre les circumferències.



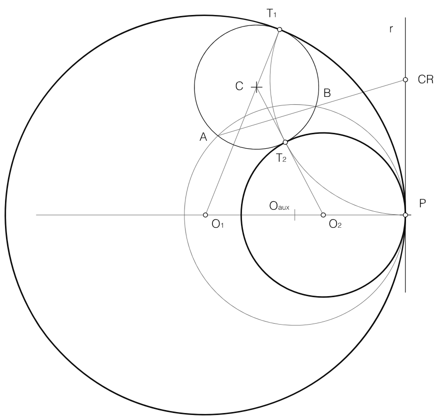
18. La perpendicular traçada per **P** en el segment **CP**, en tallar-se amb la recta **r**, forma un angle, la bisectriu del qual, en la seva intersecció amb la prolongació de **CP**, defineix el centre de la circumferència que busquem.



19. Els centres de les circumferències solució són a la recta que passa per **T** i pel centre de $\mathbf{C_1}$. Amb centre sobre aquesta recta, tracem una circumferència auxiliar que passi per **T** i que talli la circumferència $\mathbf{C_2}$; els eixos radicals entre aquesta circumferència i les donades es tallen a **CR**, la distància del qual fins a **T** és el radi que determina en la circumferència $\mathbf{C_2}$ els punts de tangència $\mathbf{T_1}$ i $\mathbf{T_2}$. La unió de cada un d'aquests punts amb el centre de $\mathbf{C_2}$ intercepta sobre $\mathbf{TC_1}$ els centres que permeten el traçat de les solucions.

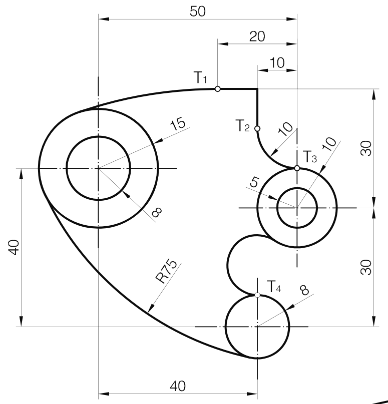


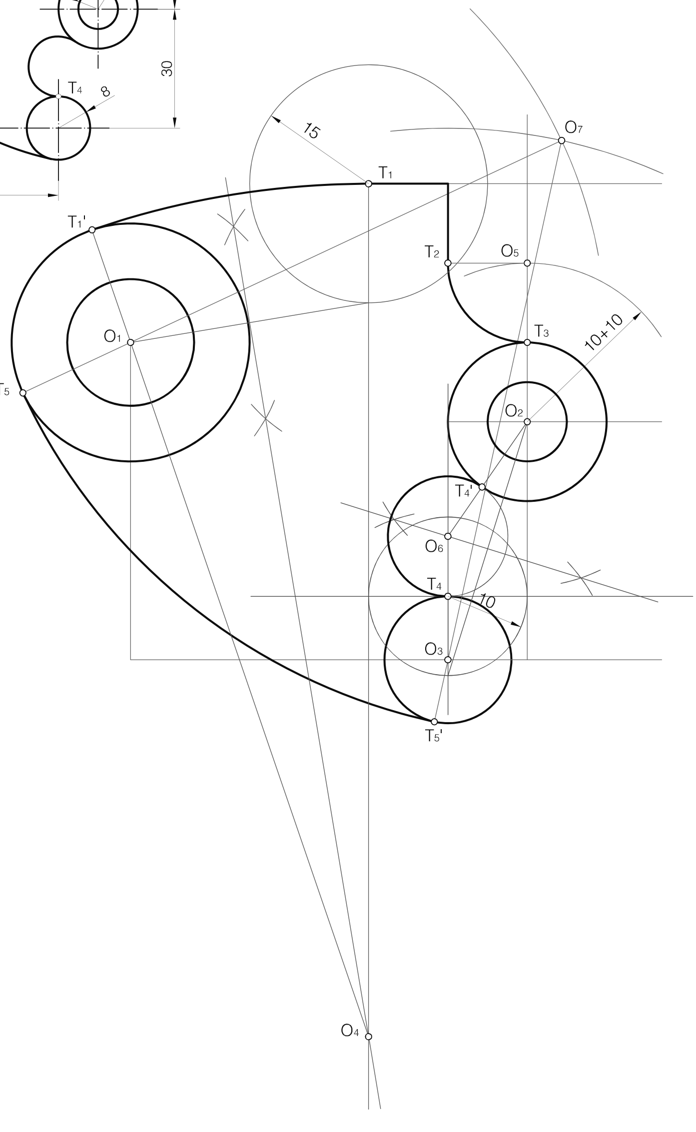
20. Tracem una circumferència auxiliar amb el centre sobre la perpendicular a **r** per **P**, que passi per **P** i talli la circumferència donada; l'eix radical entre les dues circumferències talla **r** en el punt **CR**. La distància de **CR** a **P** portada sobre la circumferència inicial determina els punts de tangència $\mathbf{T_1}$ i $\mathbf{T_2}$. A partir d'aquests punts, trobem els centres de les circumferències solució i les tracem.



21. Comencem per representar les circumferències concèntriques de radis 8 i 15. A partir del seu centre, podem situar el de la circumferència de radi 8; des d'aquests centres, situem el de les circumferències concèntriques de radis 5 i 10. La resta d'elements es determina com a aplicació de:

- Arc de radi 75, mitjançant la tangència interior respecte de les circumferències no concèntriques de radis 15 i 8.
- L'arc que parteix de $\mathbf{T_4}$ és tangent a dues circumferències (les de radi 8 i 10), conegut el punt de tangència en la primera de totes dues.
- L'arc $\mathbf{T_2T_3}$ és un quart de circumferència, el traçat del qual permet arribar a la posició del punt $\mathbf{T_1}$; a partir d'aquest punt, l'arc que tanca la figura és tangent a un segment de longitud 10 i a la circumferència de radi 15, conegut el punt de tangència $\mathbf{T_1}$ en el primer.

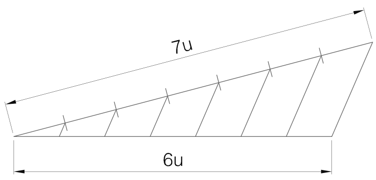


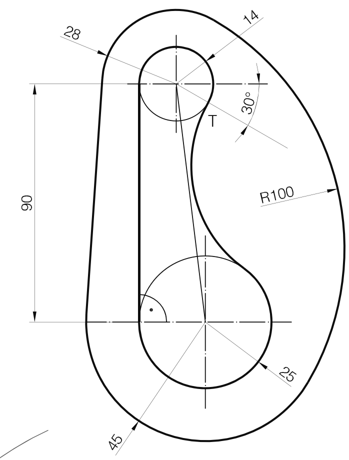


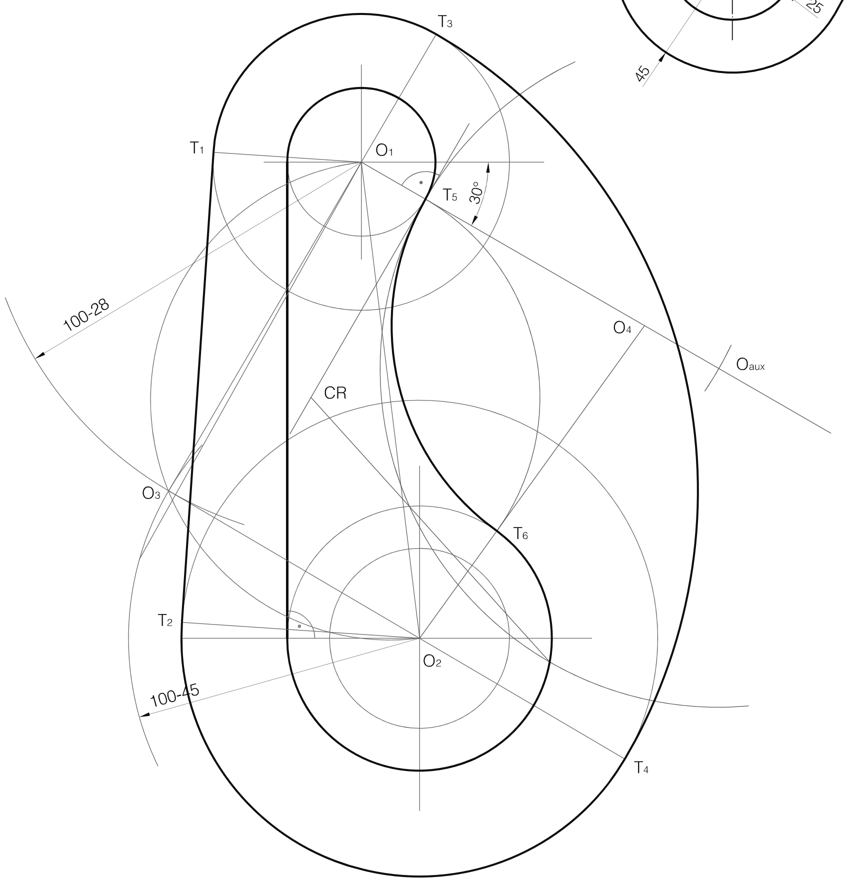
22. L'escala 6:7 és una escala de reducció que, construïda de manera auxiliar, permet passar les mesures del croquis a les que es necessiten per traçar el dibuix.

Representem les circumferències concèntriques de radis 14 i 28; a partir del seu centre, podem determinar el de les concèntriques de radis 25 i 45. El perímetre exterior el completen un segment recte tangent a les exteriors a les circumferències de radi 28 i 45, i un arc de radi 100 tangent interior a les mateixes circumferències.

A la circumferència de radi 14, i a 30º respecte de l'horitzontal, situem el punt de tangència **T**; a partir d'aquest punt, tracem l'arc tangent exterior a les circumferències de radis 14 i 25.





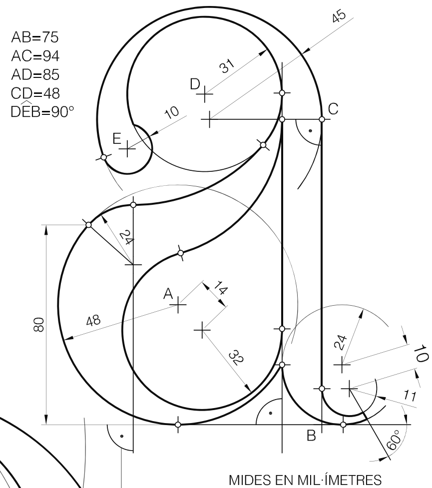


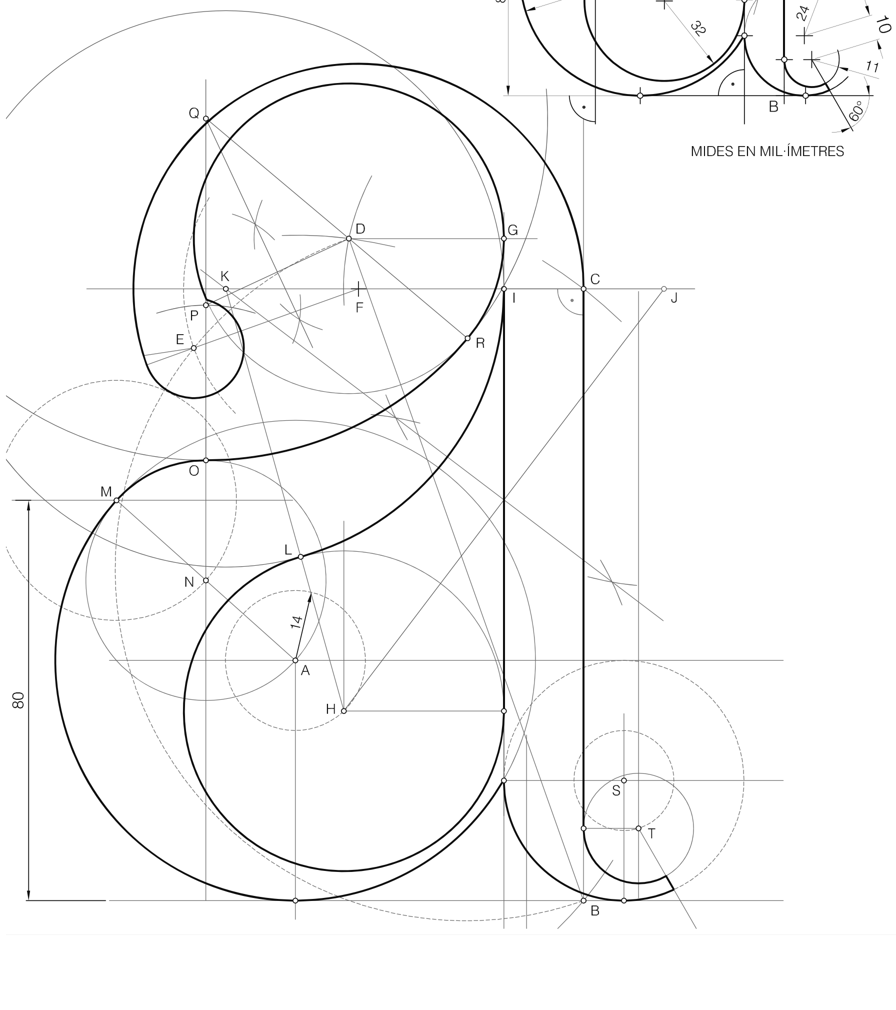
23. Una tangent horitzontal a la circumferència de centre **A** i radi 48 ens permet situar el punt **B**; des d'aquest punt, situem **C** a sobre de la vertical alçada des de **B** i a 94 mm de **A**. La intersecció de dos arcs de centres **A** i **C** ens determina la posició del punt **D**. Des de **C**, trobem el centre de la circumferència de radi 45 mm; tracem aquesta circumferència i la de centre **D** i radi 31 mm. Com que la circumferència de centre **E** és tangent a la de radi 45 mm, la distància entre els seus centres serà igual a la diferència dels seus radis; amb aquesta propietat i l'arc capaç de 90º en relació amb **B** i **D**, determinem la posició del punt **E**.

A la circumferència inicial de radi 48 mm, situem el punt **M** mitjançant la paral·lela indicada; conegut **M**, en podem determinar el centre i traçar l'arc de radi 24 mm. A partir del segon extrem d'aquest arc i amb la condició de tangència a la circumferència de centre **D**, tracem l'arc d'enllaç, del qual, prèviament, hem de determinar el centre (circumferència tangent a altres dues, sabent el punt de tangència a una d'aquestes).

El centre **H** de la circumferència de radi 32 mm, el determinem a 14 mm de **A** i a sobre de la paral·lela traçada a 32 mm de la vertical que passa pels punts **G** i **I**. Aquesta circumferència l'hem d'enllaçar amb la vertical **GI**, sabent el punt **I** de l'enllaç situat a la recta.

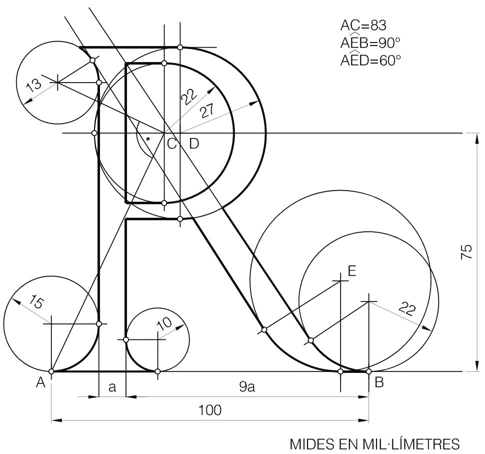
Per completar la figura, ens falten les circumferències de radis 24 mm i 11 mm de la part dreta; el primer, el determinem en la intersecció de les dues paral·leles traçades, a distància 24 mm, a les rectes a les quals és tangent; el centre del segon es troba a 10 mm del centre de l'anterior i a sobre d'una paral·lela a la vertical que parteix de **B** situada a una distància d'11 mm. L'acabament que s'indica en el croquis a 60º ens completa la figura.

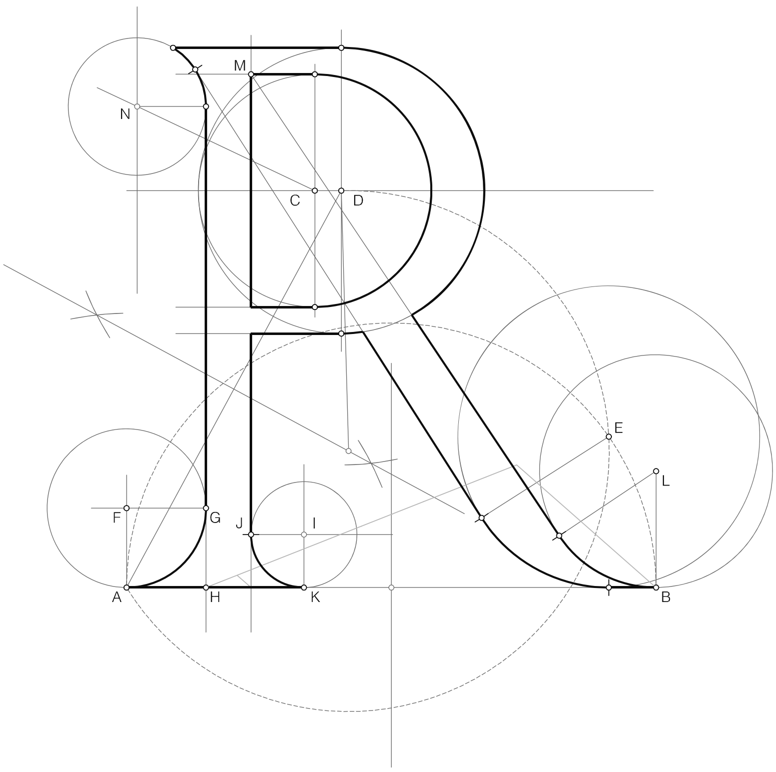




24. La lletra **R** la iniciem traçant dues paral·leles a una distància de 75 mm; corresponen a les rectes que passen per **A** i **B**, i **C** i **D**, respectivament. A sobre d'aquestes rectes i a les distàncies donades, situem els punts **A**, **B** i **C**. Atès que les circumferències de centres **C** i **D** són tangents interiors, la distància entre els seus centres és igual a la diferència dels seus radis; això significa que **D** és a 5 mm de **C**. Coneguts **A**, **B** i **D**, determinem **E** en la intersecció dels dos arcs capaços que s'indiquen en el croquis. Conegut **E**, podem traçar la circumferència que té aquest punt per centre i que és tangent a la recta **AB**. Perpendicularment a **AB** pel punt **B**, determinem **L**, el centre d'una circumferència de radi 22 mm.

A partir de **A**, determinem el centre **F** de la circumferència de radi 15 mm; un cop traçada la circumferència, representem la tangent vertical **GH**. Dividim la distància **HB** en deu parts iguals i portem una d'aquestes parts a la dreta de **H**; aquest punt de divisió ens permet traçar la vertical **JM**; determinem **M** en la intersecció amb la tangent horitzontal traçada a la circumferència de centre **C**. Des de **M**, tracem la tangent a la circumferència de centre **L**; aquesta tangent defineix una direcció, a la qual és paral·lela la tangent a la circumferència de centre **E**. Una paral·lela a aquesta última, a la distància de 13 mm, en tallar-se amb la paral·lela a la vertical **HG** traçada a la mateixa distància, ens determina la posició del punt **N**. Aquest punt **N** ens permet traçar l'acabament de la part superior esquerra, que, juntament amb els arcs de centres **F** i **I**, ens completen la figura.

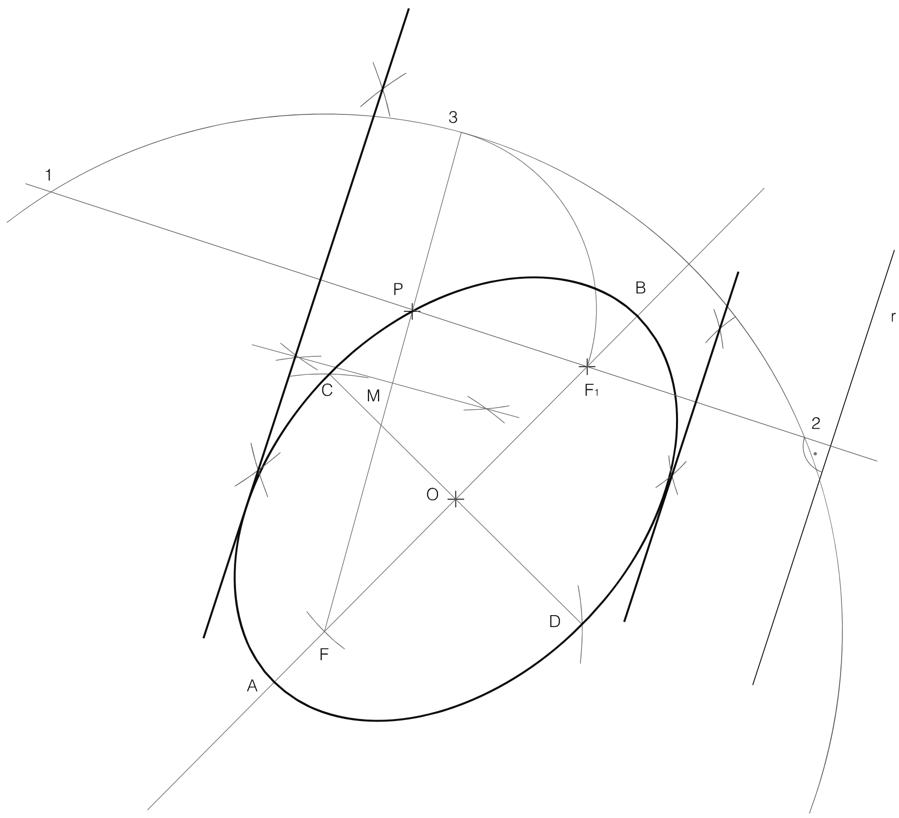




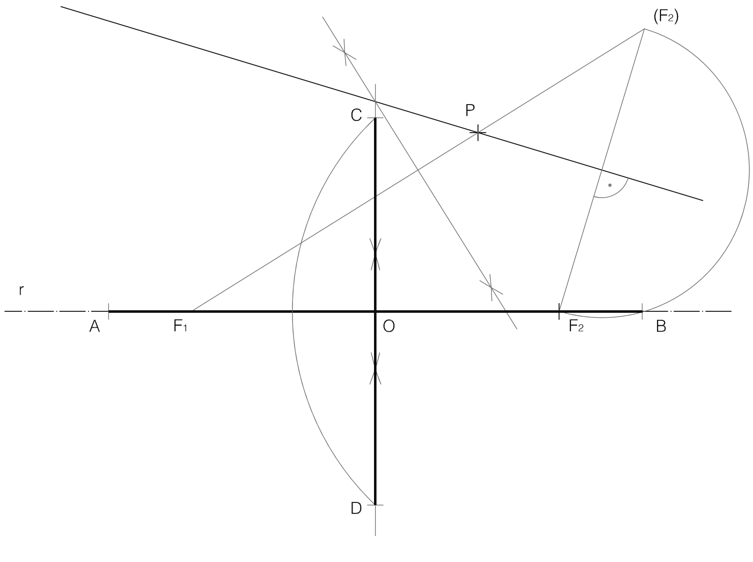
Tangències amb còniques

25. Sobre la recta **OF_1**, i simètricament respecte de **O**, situem l'altre focus. La suma de les distàncies **PF** i **PF_1**, feta gràficament, equival a l'eix major de l'el·lipse **AB**; a partir d'aquest eix, determinem els extrems **C** i **D** de l'altre eix.

La perpendicular traçada des de **F_1** a la recta donada intercepta sobre la circumferència focal de centre **F** els punts **1** i **2**; les mediatrius dels segments **$F_1 1$** i **$F_1 2$** són les tangents que busquem.



26. Determinem el simètric **(F_2)** del focus donat respecte de la recta **t**; la seva unió amb **P** intercepta en la recta **r** la posició de l'altre focus **F_1**. El segment **$F_1(F_2)$** té la longitud de l'eix major **AB**; a partir d'aquest eix i dels focus, determinem l'eix menor **CD**.



27. Pel punt **A** tracem la perpendicular a la directriu, i des del punt de tall, la perpendicular a la recta tangent de la qual aquesta és la mediatriu; així determinem el focus **F**. Per **F** hi passa l'eix de la paràbola, amb la qual cosa ja tenim prou elements per traçar la cònica.