Rectas y planos en el espacio

5

ACTIVIDADES

1. Página 112

La ecuación vectorial de la recta que pasa por A y B es $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$ y, por tanto, el vector director es $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

a) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-1, 2, 5) - (3, -2, 4) = (-4, 4, 1)$

b) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (0, 3, -1) - (4, 0, -1) = (-4, 3, 0)$

2. Página 112

a) Elegimos dos puntos del eje OX, por ejemplo, $A(0, 0, 0)$ y $B(1, 0, 0)$.

Calculamos $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1, 0, 0)$.

Buscamos un vector $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ que tenga la dirección de $\vec{v}$ y módulo 2, es decir, que cumpla:

$$\left.\begin{array}{l} (w_1, w_2, w_3) = \lambda\vec{v} = \lambda(1, 0, 0) \rightarrow (w_1, w_2, w_3) = (\lambda, 0, 0) \\ \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2} = 2 \rightarrow w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \lambda^2 = 4$$

Tomamos $\lambda = 2 \rightarrow \vec{w} = 2 \cdot \vec{v} = (2, 0, 0)$.

b) Elegimos dos puntos del eje OY : $A(0, 0, 0)$ y $B(0, 1, 0) \rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (0, 1, 0)$.

$$\left.\begin{array}{l} (w_1, w_2, w_3) = \lambda\vec{v} = \lambda(0, 1, 0) \rightarrow (w_1, w_2, w_3) = (0, \lambda, 0) \\ \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2} = 2 \rightarrow w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \lambda^2 = 4$$

Tomamos $\lambda = 2 \rightarrow \vec{w} = 2 \cdot \vec{v} = (0, 2, 0)$.

c) Elegimos dos puntos del eje OZ : $A(0, 0, 0)$ y $B(0, 0, 1) \rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (0, 0, 1)$.

$$\left.\begin{array}{l} (w_1, w_2, w_3) = \lambda\vec{v} = \lambda(0, 0, 1) \rightarrow (w_1, w_2, w_3) = (0, 0, \lambda) \\ \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2} = 2 \rightarrow w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \lambda^2 = 4$$

Tomamos $\lambda = 2 \rightarrow \vec{w} = 2 \cdot \vec{v} = (0, 0, 2)$.

3. Página 113

a) Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (-1, 1, 2) + t(2, -3, 1)$

Ecuación continua: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-2}{1}$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = -1 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 + t \end{array}\right\}$

Ecuación implícita: $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{-3} \\ \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{z-2}{1} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x + 2y + 1 = 0 \\ x - 2z + 5 = 0 \end{array}\right\}$

b) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (4, 0, -1) - (3, -2, 4) = (1, 2, -5)$

Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (3, -2, 4) + t(1, 2, -5)$

Ecuación continua: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-4}{-5}$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 4 - 5t \end{array}\right\}$

Ecuación implícita: $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+2}{2} \\ \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{z-4}{-5} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - y - 8 = 0 \\ 5x + z - 19 = 0 \end{array}\right\}$

c) Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (1, 0, 3) + t(-1, 2, 0)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x=1-t \\ y=2t \\ z=3 \end{array}\right\}$

Ecuación implícita: $\left.\begin{array}{l} x=1-t \to t=\dfrac{x-1}{-1} \\ y=2t \to t=\dfrac{y}{2} \\ z=3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2} \\ z=3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 2x+y-2=0 \\ z=3 \end{array}\right\}$

4. Página 113

Lo hacemos dando tres valores diferentes a λ.

$\left.\begin{array}{r} \lambda=0 \\ 1-\lambda=1 \\ -2+2\lambda=-2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\lambda=0} P_1(0,1,-2)$ $\quad \left.\begin{array}{r} \lambda=1 \\ 1-\lambda=0 \\ -2+2\lambda=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\lambda=1} P_2(1,0,0)$ $\quad \left.\begin{array}{r} \lambda=-1 \\ 1-\lambda=2 \\ -2+2\lambda=-4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\lambda=-1} P_3(-1,2,-4)$

5. Página 113

Vemos si $P(3,-1,2)$ pertenece a la recta sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación y comprobando si se cumplen las igualdades.

$\dfrac{x+2}{5}=-y=\dfrac{z+1}{3} \xrightarrow{P(3,-1,2)} \dfrac{3+2}{5}=-(-1)=\dfrac{2+1}{3}=1 \to P\in r$. El punto $P(3,-1,2)$ pertenece a la recta.

Para determinar el vector director y un punto, escribimos la ecuación continua de $r: \dfrac{x+2}{5}=-y=\dfrac{z+1}{3}$.

$\dfrac{x-x_0}{v_1}=\dfrac{y-y_0}{v_2}=\dfrac{z-z_0}{v_3} \to r: \dfrac{x-(-2)}{5}=\dfrac{y-0}{-1}=\dfrac{z-(-1)}{3}$.

Entonces $\vec{v}=(5,-1,3)$ y $A(-2,0,-1)$ son el vector director de la recta y un punto de la misma, respectivamente.

6. Página 114

Ecuación vectorial: $(x,y,z)=\overrightarrow{OP}+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}=(-2,1,1)+\lambda(1,-2,3)+\mu(0,1,-1)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x=-2+\lambda \\ y=1-2\lambda+\mu \\ z=1+3\lambda-\mu \end{array}\right\}$

Ecuación general o implícita: $\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z-1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \to \pi: x-y-z+4=0$

7. Página 114

$\pi: 3x+2y-z+2=0 \xrightarrow{P(-2,1,-2)} 3\cdot(-2)+2\cdot 1-(-2)+2=-6+2+2+2=0 \to P\in\pi$.

El punto $P(-2,1,-2)$ no pertenece al plano porque verifica la ecuación.

8. Página 114

Sustituimos las coordenadas del punto en la ecuación e imponemos que se cumpla la igualdad.

$$2x-y+z-1=0 \xrightarrow{P(1,m,-3)} 2-m+(-3)-1=0 \to m=-2$$

9. Página 114

Sustituimos las coordenadas del punto en la ecuación e imponemos que se cumpla la igualdad.

$$mx+y-3z+4=0 \xrightarrow{P(-2,3,5)} -2m+3-15+4=0 \to m=-4$$

10. Página 115

a) Calculamos dos vectores a partir de los tres puntos.

$\overrightarrow{AB}=(-1,1,-2)$ y $\overrightarrow{AC}=(-3,4,1)$

La ecuación general del plano viene dada por los dos vectores calculados y un punto del plano.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0 \to \pi: 9x+7y-z-8=0$$

b) $\overrightarrow{AB}=(2,-2,0)$ y $\overrightarrow{AC}=(4,-1,-1)$

La ecuación general del plano viene dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0 \to 2x+2y+6z-4=0 \to \pi: x+y+3z-2=0$$

c) $\overrightarrow{AB}=(-1,2,0)$ y $\overrightarrow{AC}=(-1,0,3)$

La ecuación general del plano viene dada por:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=0 \to \pi: 6x+3y+2z-6=0$$

11. Página 115

a) Elegimos tres puntos del plano OXY.

$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$ y $C(0,1,0)$.

Calculamos dos vectores a partir de los tres puntos

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$ y $\vec{v}=\overrightarrow{AC}=(0,1,0)$

Ecuación vectorial: $(x,y,z)=\overrightarrow{OP}+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}=(0,0,0)+\lambda(1,0,0)+\mu(0,1,0)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{r} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=0 \end{array}\right\}$

Ecuación general: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \to \pi_1: z=0$

b) Elegimos tres puntos del plano OXZ.

$A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.

Calculamos dos vectores a partir de los tres puntos:

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1, 0, 0)$ y $\vec{v}=\overrightarrow{AC}=(0, 0, 1)$

Ecuación vectorial: $(x, y, z)=\overrightarrow{OP}+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}=(0, 0, 0)+\lambda(1, 0, 0)+\mu(0, 0, 1)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{r} x=\lambda \\ y=0 \\ z=\mu \end{array}\right\}$

Ecuación general: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \to \pi_2: y=0$

c) Elegimos tres puntos del plano OYZ.

$A(0, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.

Calculamos dos vectores a partir de los tres puntos:

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(0, 1, 0)$ y $\vec{v}=\overrightarrow{AC}=(0, 0, 1)$

Ecuación vectorial: $(x, y, z)=\overrightarrow{OP}+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}=(0, 0, 0)+\lambda(0, 1, 0)+\mu(0, 0, 1)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{array}\right\}$

Ecuación general: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \to \pi_3: x=0$

12. Página 116

Definimos la ecuación continua de la recta que pasa por A y B.

$\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(-1, 3, -2) \longrightarrow \frac{x}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-2}$

Comprobamos si el punto C pertenece a la recta.

$\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-2} \xrightarrow{C(2,-1,-2)} \frac{2}{-1} \neq \frac{-1+1}{3} \neq \frac{-2-3}{-2} \to C$ no pertenece a la recta $\longrightarrow$ Los puntos no están alineados.

13. Página 116

Definimos la ecuación continua de la recta que pasa por A y B.

$\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(1,-1,-3) \longrightarrow \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{-3}$

Sustituimos las coordenadas del punto C en la ecuación e imponemos que se cumplan las igualdades.

$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{-3} \xrightarrow{C(0,5,a)} \frac{-2}{1}=\frac{5-3}{-1}=\frac{a+2}{-3} \to \frac{a+2}{-3}=-2 \to a=4$.

14. Página 116

Calculamos el plano definido por A, B y C; para ello, hallamos dos vectores a partir de los tres puntos.

$\overrightarrow{AB}=(-2,2,-1)$ y $\overrightarrow{AC}=(-4,2,-2)$ $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-3 \\ -2 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix}=0\rightarrow -2x+4z-8=0\rightarrow \pi: x-2z+4=0$$

Comprobamos si el punto D pertenece al plano.

$\pi: x-2z+4=0 \xrightarrow{D(-2,-5,1)} -2-2\cdot 1+4=0\rightarrow D\in\pi$ $D\in\pi$ → Los puntos son coplanarios.

15. Página 116

Calculamos dos vectores a partir de los tres puntos.

$\overrightarrow{AB}=(1,-1,1)$ y $\overrightarrow{AC}=(-2,3,-11)$

La ecuación general del plano viene dada por: $\begin{vmatrix} x & y & z-6 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -11 \end{vmatrix}=0\rightarrow \pi: 8x+9y+z-6=0$

Sustituimos las coordenadas del punto D en la ecuación e imponemos que se cumpla la igualdad.

$8x+9y+z-6=0 \xrightarrow{D(-3,-1,a)} -24-9+a-6=0\rightarrow a=39$.

16. Página 117

La ecuación general del plano viene dada por:

$\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z-1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0\rightarrow -3x+y+z-7=0\rightarrow \pi: 3x-y-z+7=0$ $\rightarrow$ El vector normal es $\vec{n}=(3,-1,-1)$.

Si $\vec{n}$ es paralelo a $\vec{u}\times\vec{v}$ su producto vectorial es nulo.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-3\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}=(-3,1,1)\rightarrow (\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}=0$$

17. Página 117

a) $\vec{n}_1=(2,-3,1); \vec{n}_2=(0,-2,2)$

El vector director de la recta es el producto vectorial de estos dos vectores.

$$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}=-4\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}=(-4,-4,-4)$$

b) $\vec{n}_1=(-1,0,3); \vec{n}_2=(2,-1,1)$ $\rightarrow$ El vector director de la recta es el producto vectorial de estos dos vectores.

$$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=3\vec{i}+7\vec{j}+\vec{k}=(3,7,1)$$

18. Página 118

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las tres ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0 & -3\\ 3 & -1 & 2 & 8\end{pmatrix}$$

Calculamos sus rangos: $\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=-7\rightarrow \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3$

El sistema es compatible determinado. La recta y el plano se cortan en un punto.

Buscamos el punto de intersección en la solución del sistema formado por las ecuaciones del plano y la recta.

$$\left.\begin{array}{l}x+y-z+1=0\\ 2x-y-3=0\\ 3x-y+2z+8=0\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-1\\ y=-5\rightarrow P(-1,-5,-5)\\ z=-5\end{array}\right.$$

19. Página 118

a) Escribimos la recta en forma implícita: $\left.\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=1\\ z=-\lambda\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=-z\\ y=1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x+z=0\\ y-1=0\end{array}\right\}$

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las tres ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

Calculamos sus rangos: $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & -1\end{vmatrix}=1\rightarrow \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3$

El sistema es compatible determinado. La recta y el plano se cortan en un punto.

b) Escribimos la recta en forma implícita.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{3}\\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{z}{11}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}3x-2y-2=0\\ 11x-2z=0\end{array}\right\}$$

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las tres ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ 11 & 0 & -2\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0 & -2\\ 11 & 0 & -2 & 0\\ 1 & 3 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

Calculamos sus rangos.

$$\left.\begin{array}{l}\begin{vmatrix}3 & -2 & 0\\ 11 & 0 & -2\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=0\\ \begin{vmatrix}11 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}=33\neq 0\end{array}\right\}\rightarrow \text{Rango}(M)=2 \qquad \begin{vmatrix}3 & -2 & -2\\ 11 & 0 & 0\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=-88\neq 0\rightarrow \text{Rango}(M^*)=3$$

$2=\text{Rango}(M)\neq\text{Rango}(M^*)=3\rightarrow$ El sistema es incompatible. La recta y el plano son paralelos.

20. Página 119

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las dos ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}2 & 4 & -1\\ -3 & 1 & -1\end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix}2 & 4 & -1 & 2\\ -3 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

Calculamos sus rangos.

$$\begin{vmatrix}2 & 4\\ -3 & 1\end{vmatrix}=14 \to \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2$$

El sistema es compatible indeterminado. Los planos se cortan en una recta.

La recta de intersección es la solución del sistema. Como nos pide las ecuaciones paramétricas, tomamos $t=z$.

$$\left.\begin{array}{r}2x+4y-t+2=0\\ -3x+y-t-1=0\\ z=t\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l}x=-\dfrac{3}{7}-\dfrac{3}{14}t\\ y=-\dfrac{2}{7}+\dfrac{5}{14}t\\ z=t\end{array}\right\}$$

21. Página 119

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las dos ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -2\\ 2 & -6 & m\end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -2 & 1\\ 2 & -6 & m & -2\end{pmatrix}$$

Calculamos sus rangos.

$$\left.\begin{array}{l}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & -6\end{vmatrix}=0\\ \begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & m\end{vmatrix}=-m+4\\ \begin{vmatrix}3 & -2\\ -6 & m\end{vmatrix}=3m-12\end{array}\right\} \to \text{Todos los menores de rango dos se anulan cuando } \left.\begin{array}{r}-m+4=0\\ 3m-12=0\end{array}\right\} \to m=4.$$

Para $m=4 \to \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=1 \to$ El sistema es compatible indeterminado y los planos son coincidentes.

Para $m\neq 4 \to \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2 \to$ El sistema es compatible indeterminado y los planos son secantes.

No pueden ser paralelos porque el rango de M siempre es el mismo que el de M^* y, por tanto, el sistema no puede ser incompatible.

22. Página 120

a) Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las tres ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Calculamos sus rangos.

$$\left.\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 0\end{vmatrix}=8\neq 0\right\} \to \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3$$

El sistema es compatible determinado. Los tres planos se cortan en un punto.

b) $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 0\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$ $\quad M^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 3 & -2 & 0 & -1\\ 2 & -3 & 1 & -2\end{pmatrix}$

Calculamos sus rangos.

$$\left.\begin{array}{l}\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 0\\ 2 & -3 & 1\end{vmatrix}=0\\ \begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-5\neq 0\end{array}\right\}\rightarrow \text{Rango}(M)=2 \qquad \left.\begin{array}{l}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & -2 & -1\\ 2 & -3 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 0\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & -2 & 0\\ -2 & -3 & 1\end{vmatrix}=0\\ \begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-5\neq 0\end{array}\right\}\rightarrow \text{Rango}(M^*)=2$$

$\text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2\rightarrow$ Los planos se cortan en una recta.

23. Página 120

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las tres ecuaciones.

$M=\begin{pmatrix}m & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & m & 1\end{pmatrix}$ $\quad M^*=\begin{pmatrix}m & 1 & -1 & 2-m\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ 3 & m & 1 & 2-m\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ Calculamos sus rangos: $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3\neq 0\rightarrow \text{Rango}(M)\geq 2$

Estudiamos el determinante de grado 3 en función de los valores de *m*.

$$\begin{vmatrix}m & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & m & 1\end{vmatrix}=-2m^2+8\rightarrow -2m^2+8=0\rightarrow m^2=4\rightarrow m=\pm 2$$

- Para $m=2\rightarrow \text{Rango}(M)=2$: $M^*=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ con $F_3=F_1+F_2\rightarrow \text{Rango}(M^*)=\text{Rango}(M)=2$

  Sistema compatible indeterminado. Estudiamos la posición relativa de cada par de planos:

  $\left.\begin{array}{l}\pi_1: 2x+y-z=0\\ \pi_2: x+y+2z=0\end{array}\right\}\rightarrow$ Secantes. $\quad \left.\begin{array}{l}\pi_1: 2x+y-z=0\\ \pi_3: 3x+2y+z=0\end{array}\right\}\rightarrow$ Secantes. $\quad \left.\begin{array}{l}\pi_2: x+y+2z=0\\ \pi_3: 3x+2y+z=0\end{array}\right\}\rightarrow$ Secantes.

  Los planos se cortan en una recta que viene dada por la intersección de dos de los planos: $\left.\begin{array}{l}x=-t\\ y=3t\\ z=\ t\end{array}\right\}$

- Para $m=-2\rightarrow \text{Rango}(M)=2$

  $M^*=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1 & 4\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ 3 & -2 & 1 & 4\end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix}-2 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=-32\neq 0\rightarrow \text{Rango}(M^*)=3$

  Si $m=-2\rightarrow 2=\text{Rango}(M)\neq\text{Rango}(M^*)=3\rightarrow$ Sistema incompatible.

  Estudiamos la posición relativa de cada par de planos:

  $\left.\begin{array}{l}\pi_1: -2x+y-z=-4\\ \pi_2: x+y+2z=0\end{array}\right\}\rightarrow$ Secantes. $\quad \left.\begin{array}{l}\pi_1: -2x+y-z=-4\\ \pi_3: 3x-2y+z=-4\end{array}\right\}\rightarrow$ Secantes. $\quad \left.\begin{array}{l}\pi_2: x+y+2z=0\\ \pi_3: 3x-2y+z=-4\end{array}\right\}\rightarrow$ Secantes.

  Los planos se cortan dos a dos.

- Para $m\neq\pm 2\rightarrow \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3\rightarrow$ Sistema **compatible** determinado. Se cortan en un punto.

  En este caso, calculamos el punto resolviendo el sistema.

  $$\left.\begin{array}{l}mx+y-z=m-2\\ x+y+2z=0\\ 3x+my+z=m-2\end{array}\right\}\rightarrow x=-z; y=-z; z=\frac{2-m}{2+m}\rightarrow P\left(\frac{m-2}{m+2},\frac{m-2}{m+2},\frac{2-m}{2+m}\right)$$

24. Página 121

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las tres ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}6 & 3 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$M^*=\begin{pmatrix}6 & 3 & -1 & 0\\ 3 & -2 & 1 & -3\\ 0 & 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Calculamos sus rangos.

$$\begin{vmatrix}6 & 3 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=3\neq 0\to \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3$$

El sistema es compatible determinado. Los planos se cortan en un punto.

25. Página 121

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las tres ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 8 & 7\end{pmatrix}$$

$$M^*=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 3 & 3\\ 3 & 8 & 7 & 1\end{pmatrix}$$

Calculamos sus rangos.

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 8 & 7\end{vmatrix}=-20\neq 0\to \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3$$

El sistema es compatible determinado. Los planos se cortan en un punto.

26. Página 122

Hallamos un punto y el vector director de cada recta.

$$r:\begin{cases}x=5-\lambda\\ y=2-\lambda\\ z=-\lambda-3\end{cases}\to\begin{cases}P(5,2,-3)\\ \vec{u}=(-1,-1,-1)\end{cases}$$

$$s: x=y=z\to\frac{x+0}{1}=\frac{y+0}{1}=\frac{z+0}{1}\to\begin{cases}Q(0,0,0)\\ \vec{v}=(1,1,1)\end{cases}$$

Calculamos el rango de la matriz que forman los vectores directores y de la matriz formada por estos y el vector que tiene por extremos los puntos calculados ($\overrightarrow{PQ}=(-5,-2,3)$).

$$\left.\begin{array}{l}\text{Rango}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=1\\ \text{Rango}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ -5 & -2 & 3\end{pmatrix}=2\end{array}\right\}\to \text{Las rectas son paralelas.}$$

27. Página 122

Hallamos un punto y el vector director de cada recta.

$$r:\begin{cases}x=3\\ y=\lambda+2\\ z=2-\lambda\end{cases}\rightarrow\begin{cases}P(3,2,2)\\ \vec{u}=(0,1,-1)\end{cases}$$

$$s:\begin{cases}2x+y-z+3=0\\ x-2y+2z-4=0\end{cases}\rightarrow x=-\frac{2}{5};y=t-\frac{11}{5};z=t\rightarrow(x,y,z)=\left(-\frac{2}{5},-\frac{11}{5},0\right)+t(0,1,1)\rightarrow\begin{cases}Q=\left(-\frac{2}{5},-\frac{11}{5},0\right)\\ \vec{v}=(0,1,1)\end{cases}$$

Calculamos el rango de la matriz que forman los vectores directores y de la matriz formada por estos y el vector que tiene por extremos los puntos calculados $\overrightarrow{PQ}=\left(-\frac{17}{5},-\frac{21}{5},-2\right)$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Rango}\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}=2\\ \text{Rango}\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&1&1\\-\frac{17}{5}&-\frac{21}{5}&-2\end{pmatrix}=3\end{array}\right\}\rightarrow\text{Las rectas se cruzan.}$$

28. Página 123

Escribimos las ecuaciones implícitas de las rectas.

- $r:\begin{cases}x+y=2\\ y+z=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+y-2=0\\ y+z=0\end{cases}$
- $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-1)\rightarrow\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-1}\rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{-1}\\ \frac{x-2}{-1}=\frac{z}{-1}\end{array}\right\}\rightarrow s:\begin{cases}x-y-1=0\\ x-z-2=0\end{cases}$

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las cuatro ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

$$M^*=\begin{pmatrix}1&1&0&-2\\0&1&1&0\\1&-1&0&-1\\1&0&-1&-2\end{pmatrix}$$

Calculamos sus rangos.

$$\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&-1&0\end{vmatrix}=2\neq0\rightarrow\text{Rango}(M)=3$$

$$\begin{vmatrix}1&1&0&-2\\0&1&1&0\\1&-1&0&-1\\1&0&-1&-2\end{vmatrix}=0\rightarrow\text{Rango}(M^*)=3$$

$\text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3\rightarrow$ Sistema compatible determinado. Las rectas se cortan en un punto.

29. Página 123

Escribimos las rectas de forma implícita.

$$r:\begin{cases} x-2z-m=0 \\ y+z-3=0 \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} x+z-1=0 \\ y-2z-n=0 \end{cases}$$

Si están en el mismo plano, las rectas no se cruzan en el espacio. Entonces, tenemos que buscar *m* y *n* tales que el rango de la matriz ampliada del sistema formado por las cuatro ecuaciones no sea cuatro.

$$\text{Rango}(M^*)\neq 4 \rightarrow |M^*|=0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -m \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -n \end{vmatrix} = 3m-3n+6=0 \rightarrow n=m+2$$

Cuando $n=m+2$, las rectas están en el mismo plano.

30. Página 124

Tomamos el vector normal al plano:

$$\vec{n}=(1,2,-3)$$

Calculamos la ecuación de la recta que tiene por vector director a $\vec{n}=(1,2,-3)$ y que pasa por el punto pedido:

$$(x,y,z)=(1,1,-6)+t(1,2,-3) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=-6-3t \end{array}\right\} \rightarrow t=\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+6}{-3}$$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+6}{-3} \rightarrow \left.\begin{array}{r} \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2} \\ \frac{x-1}{1}=\frac{z+6}{-3} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-y-1=0 \\ 3x+z+3=0 \end{array}\right\}$$

31. Página 124

Reescribimos $r:\frac{x}{2}=\frac{1-y}{1}=\frac{z}{1} \rightarrow \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$

Hallamos el vector director de la recta:

$$\vec{v}=(2,-1,1)$$

Calculamos la ecuación del plano que tiene por vector normal al vector director de la recta:

$$\vec{v}=(2,-1,1) \rightarrow \pi: 2x-y+z+D=0$$

Imponemos la condición de que el punto A pertenezca al plano:

$$\pi: 2x-y+z+D=0 \xrightarrow{A(0,-1,1)} 2\cdot 0-(-1)+1+D=0 \rightarrow D=-2$$

La ecuación del plano pedido es:

$$\pi: 2x-y+z-2=0$$

32. Página 124

- Reescribimos $r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases} \to x=y=1-z \to \begin{cases} x=y \\ y=1-z \end{cases} \to \begin{cases} x-y=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$

- Hallamos la ecuación de s.

Hallamos un vector normal al plano.

$\pi: 2x-y+z-1=0 \to \vec{n}=(2,-1,1)$

Calculamos la ecuación de la recta que tiene por vector director a $\vec{n}$ y que pasa por el punto pedido.

$$(x,y,z)=(3,-1,2)+t(2,-1,1) \to \left.\begin{matrix} x=3+2t \\ y=-1-t \\ z=2+t \end{matrix}\right\} \to t=\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$$

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1} \to \left.\begin{matrix} \frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1} \\ \frac{x-3}{2}=\frac{z-2}{1} \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} x+2y-1=0 \\ x-2z+1=0 \end{matrix}\right\}$$

- Estudiamos la posición relativa de ambas rectas.

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las cuatro ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus rangos.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-3\neq 0 \to \text{Rango}(M)=3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0 \to \text{Rango}(M^*)=3$$

$\text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3 \to$ Sistema compatible determinado. Las rectas se cortan en un punto.

33. Página 125

Reescribimos la ecuación de $\pi_3: 4x+2y+bz-3=0 \to \pi_3: 2x+y+\frac{b}{2}z-\frac{3}{2}=0$

Un haz de planos paralelo tiene el mismo vector normal. Entonces tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} \vec{n}_1=\vec{n}_2=\vec{n}_3 \\ \vec{n}_1=(2,1,-3) \\ \vec{n}_2=(2,a^2,-3) \\ \vec{n}_3=\left(2,1,\frac{b}{2}\right) \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} a^2=1 \\ \frac{b}{2}=-3 \end{matrix}\right\} \to \begin{cases} a=\pm 1 \\ b=-6 \end{cases}$$

Los tres planos pertenecen al mismo haz de planos paralelos cuando $a=1$ y $b=-6$ o $a=-1$ y $b=-6$.

34. Página 125

Si tenemos dos planos secantes, para que un tercero pertenezca al mismo haz de planos secantes debe ser combinación lineal de los dos primeros. Es decir, $\pi_3 = \lambda\pi_1 + \beta\pi_2$.

$$3x+3y-2z-b=\lambda(x+2y-z-1)+\beta(2x+y+az)\rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x=(\lambda+2\beta)x \\ 3y=(2\lambda+\beta)y \\ -2z=(-\lambda+a\beta)z \\ -b=-\lambda \end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l} 3=\lambda+2\beta \\ 3=2\lambda+\beta \\ 2=\lambda-a\beta \\ b=\lambda \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \lambda=1; \beta=1; a=-1; b=1$$

Los tres planos pertenecen al mismo haz de planos secantes cuando $a=-1$ y $b=1$.

SABER HACER

35. Página 126

a) Calculamos la ecuación de la recta que pasa por A y B.

$\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(4,0,-1)-(0,-2,1)=(4,2,-2)$ es el vector director de la recta.

$$(x,y,z)=(0,-2,1)+t(4,2,-2)\rightarrow \left.\begin{array}{l} x=4t \\ y=-2+2t \\ z=1-2t \end{array}\right\}\rightarrow \frac{x}{4}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-2}\rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{x}{4}=\frac{y+2}{2} \\ \frac{x}{4}=\frac{z-1}{-2} \end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-4y-8=0 \\ 2x+4z-4=0 \end{array}\right\}$$

Imponemos la condición de que el punto C pertenezca a la recta.

$$\left.\begin{array}{l} 2x-4y-8=0 \\ 2x+4z-4=0 \end{array}\right\}\xrightarrow{C(4+a,a-1,-a)} \left.\begin{array}{l} 2(4+a)-4(a-1)-8=0 \\ 2(4+a)+4(-a)-4=0 \end{array}\right\}\rightarrow a=2$$

El punto C pertenece a la recta que pasa por A y B cuando $a=2$.

b) Imponemos la condición de que el punto C pertenezca a la recta.

$$\left.\begin{array}{l} 2x-4y-8=0 \\ 2x+4z-4=0 \end{array}\right\}\xrightarrow{D(2m,3m+2,5+m)} \left.\begin{array}{l} 2(2m)-4(3m+2)-8=0 \\ 2(2m)+4(5+m)-4=0 \end{array}\right\}\rightarrow m=-2$$

El punto D pertenece a la recta que pasa por A y B cuando $m=-2$.

36. Página 126

Hallamos el vector director de la recta.

$$r:\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ y-2z=0 \end{cases}\xrightarrow{z=\lambda}\begin{cases} x+y=1+\lambda \\ y=2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}\rightarrow \frac{x-1}{-1}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-0}{1}\rightarrow \vec{v}=(-1,2,1)$$

Hallamos la ecuación de la recta con vector director $\vec{v}$ y que pasa por P.

$$(x,y,z)=(-1,-2,-3)+\mu(-1,2,1)\rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1-\mu \\ y=-2+2\mu \\ z=-3+\mu \end{array}\right\}\rightarrow \frac{x+1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{1}\rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{x+1}{-1}=\frac{y+2}{2} \\ \frac{x+1}{-1}=\frac{z+3}{1} \end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y+4=0 \\ x+z+4=0 \end{array}\right\}$$

La ecuación de la recta buscada es:

$$s:\begin{cases} 2x+y+4=0 \\ x+z+4=0 \end{cases}$$

37. Página 126

Hallamos el vector director de la recta y uno de sus puntos.

$$r:\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \xrightarrow{z=t} \begin{cases} x+y=1+t \\ y=2t \\ z=t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-t \\ y=2t \\ z=t \end{cases} \rightarrow \frac{x-1}{-1}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-0}{1} \rightarrow \begin{cases} Q(1,0,0) \\ \vec{v}=(-1,2,1) \end{cases}$$

Dos vectores directores del plano son el vector director de la recta $\vec{v}$ y el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\vec{w}=\overrightarrow{PQ}=(1,0,0)-(-1,-2,-3)=(2,2,3)$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z+3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}=4x+5y-6z-4 \rightarrow$$ El plano que contiene a P y a r es $\pi: 4x+5y-6z-4=0$.

38. Página 127

Determinamos la posición relativa de las dos rectas.

$$r:\begin{cases} 2x+z-2=0 \\ y+2=0 \end{cases} \rightarrow x=\frac{-\lambda+2}{2}; y=-2; z=\lambda \rightarrow (x,y,z)=(1,-2,0)+\lambda\left(-\frac{1}{2},0,1\right) \rightarrow \begin{cases} P=(1,-2,0) \\ \vec{u}=\left(-\frac{1}{2},0,1\right) \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} 2x+y+2=0 \\ z-2=0 \end{cases} \rightarrow x=\frac{-\mu-2}{2}; y=\mu; z=2 \rightarrow (x,y,z)=(-1,0,2)+\mu\left(-\frac{1}{2},1,0\right) \rightarrow \begin{cases} Q=(-1,0,2) \\ \vec{v}=\left(-\frac{1}{2},1,0\right) \end{cases}$$

Calculamos el rango de la matriz que forman los vectores directores y de la matriz formada por estos y el vector que tiene por extremos los puntos calculados $\overrightarrow{PQ}=(-2,2,2)$.

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0 \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}=\text{Rango}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}=2 \rightarrow$$ Las rectas son secantes.

Los vectores directores del plano serán los vectores directores de las rectas.

$$\begin{cases} P=(1,-2,0) \\ \vec{u}=\left(-\frac{1}{2},0,1\right) \\ \vec{v}=\left(-\frac{1}{2},1,0\right) \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{vmatrix}=-x-\frac{y}{2}-\frac{z}{2} \rightarrow$$ El plano que contiene a las rectas es $\pi: 2x+y+z=0$.

39. Página 127

Determinamos la posición relativa de las dos rectas.

$$r:\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases} \rightarrow \frac{x+1}{-1}=\frac{y+0}{1}=\frac{z-2}{2} \rightarrow \begin{cases} P=(-1,0,2) \\ \vec{u}=(-1,1,2) \end{cases} \qquad s: \frac{x}{-2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{4} \rightarrow \begin{cases} Q=(0,2,-1) \\ \vec{v}=(-2,2,4) \end{cases}$$

Calculamos el rango de la matriz que forman los vectores directores y de la matriz formada por estos y el vector que tiene por extremos los puntos calculados $\overrightarrow{PQ}=(1,2,-3)$.

$\text{Rango}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 4\end{pmatrix}=1$ porque sus filas son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 4\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=0\\ \begin{vmatrix}2 & 4\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-14\neq 0\end{array}\right\}\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 4\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}=2$$

Las rectas son paralelas $\rightarrow$ Los vectores directores del plano serán el vector director de una de las rectas y el vector generado por un punto de cada recta.

$$\begin{cases}P=(-1,0,2)\\ \vec{u}=(-1,1,2)\\ \overrightarrow{PQ}=(1,2,-3)\end{cases}\rightarrow\begin{vmatrix}x+1 & y & z-2\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=-7x-y-3z-1\rightarrow \pi:-7x-y-3z-1=0$$

El plano que contiene a las rectas es $\pi:7x+y+3z+1=0$.

40. Página 128

Determinamos el vector normal al plano dado.

$$\pi:3x-y+z+1=0\rightarrow \vec{n}=(3,-1,1)$$

El plano que buscamos tiene como vector normal el vector calculado y pasa por el punto dado.

Si $\vec{n}=(3,-1,1)\rightarrow \pi':3x-y+z+D=0$

$$\pi':3x-y+z+D=0\xrightarrow{P(3,-1,2)}3\cdot 3-(-1)+2+D=0\rightarrow D=-12$$

El plano que contiene a P y es paralelo a π es $\pi':3x-y+z-12=0.$

41. Página 128

Determinamos el vector normal al plano π y el vector director y un punto de r .

$$\pi:-x-2y+3z+2=0\rightarrow \vec{n}=(-1,-2,3)$$

$$r:\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{2}\rightarrow\begin{cases}\vec{v}=(3,-2,2)\\ P(-1,2,0)\end{cases}$$

El plano que buscamos tiene como vectores directores estos dos vectores y pasa por cualquier punto de la recta.

$$\pi':\begin{cases}\vec{n}=(-1,-2,3)\\ \vec{v}=(3,-2,2)\\ P(-1,2,0)\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}x+1 & y-2 & z\\ -1 & -2 & 3\\ 3 & -2 & 2\end{vmatrix}=2x+11y+8z-20$$

El plano perpendicular a π y que contiene a la recta r es $\pi':2x+11y+8z-20=0.$

42. Página 128

Determinamos la posición relativa de las dos rectas.

$$r:\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=-1\end{cases}\rightarrow(x,y,z)=(1,2,-1)+\lambda(-1,1,0)\rightarrow\begin{cases}P=(1,2,-1)\\ \vec{u}=(-1,1,0)\end{cases}$$

$$s:\begin{cases}x-2y-z+2=0\\ y+2z=0\end{cases}\rightarrow x=-3\mu-2;y=-2\mu;z=\mu\rightarrow(x,y,z)=(-2,0,0)+\mu(-3,-2,1)\rightarrow\begin{cases}Q=(-2,0,0)\\ \vec{v}=(-3,-2,1)\end{cases}$$

Calculamos el rango de la matriz que forman los vectores directores y de la matriz formada por estos y el vector que tiene por extremos los puntos calculados $\overrightarrow{PQ}=(-3,-2,1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\begin{vmatrix}-1&1&0\\-3&-2&1\\-3&-2&1\end{vmatrix}=0\\ \begin{vmatrix}1&0\\-2&1\end{vmatrix}=1\neq0\end{array}\right\}\rightarrow\text{Rango}\begin{pmatrix}-1&1&0\\-3&-2&1\end{pmatrix}=\text{Rango}\begin{pmatrix}-1&1&0\\-3&-2&1\\-3&-2&1\end{pmatrix}=2\rightarrow$$ Las rectas se cortan en un punto. Entonces tenemos una única solución para la recta buscada.

Determinamos el plano que contiene a r y es perpendicular a s.

Tomamos un punto de la recta r y su vector director para aseguramos de que dicha recta esté contenida en el plano, y como segundo vector tomamos $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$, que es perpendicular a ambas rectas y, por tanto, a s.

$$\pi:\begin{cases}P=(1,2,-1)\\ \vec{u}=(-1,1,0)\\ \vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=(1,1,5)\end{cases}$$

$$\pi:\begin{vmatrix}x-1&y-2&z+1\\-1&1&0\\1&1&5\end{vmatrix}=5x+5y-2z-17=0$$

Determinamos el punto de intersección del plano con la recta que no está contenida en él.

$$\left.\begin{array}{l}x-2y-z+2=0\\ y+2z=0\\ 5x+5y-2z-17=0\end{array}\right\}\rightarrow R(1,2,-1)$$

La recta buscada tiene como vector director $\vec{n}$ y pasa por el punto que hemos calculado.

$$t:\begin{cases}\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=(1,1,5)\\ R(1,2,-1)\end{cases}\rightarrow t:(x,y,z)=(1,2,-1)+\delta(1,1,5)$$

43. Página 129

Hallamos un punto y el vector director de cada recta.

$$r:(m+\lambda,-1+(2m-1)\lambda,2\lambda)\rightarrow(x,y,z)=(m,-1,0)+\lambda(1,2m-1,2)\rightarrow\begin{cases}P=(m,-1,0)\\ \vec{u}=(1,2m-1,2)\end{cases}$$

$$s:\frac{x}{m+1}=2-y=z+2\rightarrow\frac{x-0}{m+1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{1}\rightarrow\begin{cases}Q=(0,2,-2)\\ \vec{v}=(m+1,-1,1)\end{cases}$$

Estudiamos el rango de la matriz A que forman los vectores directores y de la matriz B formada por estos y el vector que tiene por extremos los puntos calculados $\overrightarrow{PQ}=(-m,3,-2)$.

Estudiamos los menores de $A=\begin{pmatrix}1 & 2m-1 & 2\\ m+1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 2m-1 & 2\\ m+1 & -1 & 1\\ -m & 3 & -2\end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{l}\begin{vmatrix}1 & 2m-1\\ m+1 & -1\end{vmatrix}=-1-(2m-1)(m+1)=-2m^2-m=m(-2m-1)\\ \begin{vmatrix}1 & 2\\ m+1 & 1\end{vmatrix}=-2m-1\\ \begin{vmatrix}2m-1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2m+1\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}m=-\dfrac{1}{2}\rightarrow \text{Rango}(A)=1\\ m\neq-\dfrac{1}{2}\rightarrow \text{Rango}(A)=2\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\begin{vmatrix}1 & 2m-1 & 2\\ m+1 & -1 & 1\\ -m & 3 & -2\end{vmatrix}=2m^2+7m+3=0\rightarrow\left\{m=-\dfrac{1}{2},m=-3\right\}\\ \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-1\neq 0\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}m=-\dfrac{1}{2}\rightarrow \text{Rango}(B)=2\\ m=-3\rightarrow \text{Rango}(B)=2\\ m\neq-\dfrac{1}{2},-3\rightarrow \text{Rango}(B)=3\end{cases}$$

Si $m=-\dfrac{1}{2}\rightarrow\begin{cases}\text{Rango}(A)=1\\ \text{Rango}(B)=2\end{cases}\rightarrow$ Las rectas son paralelas.

Si $m=-3\rightarrow\begin{cases}\text{Rango}(A)=2\\ \text{Rango}(B)=2\end{cases}\rightarrow$ Las rectas son secantes.

Si $m\neq-\dfrac{1}{2},-3\rightarrow\begin{cases}\text{Rango}(A)=2\\ \text{Rango}(B)=3\end{cases}\rightarrow$ Las rectas se cruzan en el espacio.

44. Página 129

Calculamos las ecuaciones implícitas de la recta.

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-3}=z+3\rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-3}\\ \dfrac{x-1}{2}=z+3\end{array}\right\}\rightarrow r:\left.\begin{array}{l}3x+2y-3=0\\ x-2z-7=0\end{array}\right\}$$

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las ecuaciones implícitas de la recta y del plano.

$$M=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ a & 2 & -4\end{pmatrix}\qquad M^*=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & -3\\ 1 & 0 & -2 & -7\\ a & 2 & -4 & -b\end{pmatrix}$$

Calculamos el rango en función de los valores de ***a*** y ***b***.

$|M|=-4a+20$

- Si $a\neq 5\rightarrow \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3\rightarrow$ La recta y el plano se cortan en un punto.
- Si $a=5\rightarrow \text{Rango}(M)=2$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & -3\\ 1 & 0 & -2 & -7\\ 5 & 2 & -4 & -b\end{pmatrix}\overset{F_3-F_1-2F_2}{=}\text{Rango}\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & -3\\ 1 & 0 & -2 & -7\\ 0 & 0 & 0 & -b+17\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}b=17\rightarrow \text{Rango}(M^*)=2\\ b\neq 17\rightarrow \text{Rango}(M^*)=3\end{cases}$$

Si $a=5$ y $b=17\rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

Si $a=5$ y $b\neq 17\rightarrow$ La recta y el plano son paralelos.

La recta está contenida en el plano cuando $a=5$ y $b=17$.

ACTIVIDADES FINALES

45. Página 130

Reescribimos la ecuación de la recta $r: \dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1} \to \left.\begin{matrix} x-y-3=0 \\ x+z-5=0 \end{matrix}\right\}$

$$\left.\begin{matrix} x-y-3=0 \\ x+z-5=0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{A(2,1,1)} \left.\begin{matrix} 2-1-3\neq 0 \\ 2+1-5\neq 0 \end{matrix}\right\} \to A \text{ no pertenece a la recta.}$$

$$\left.\begin{matrix} x-y-3=0 \\ x+z-5=0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{B(-3,0,2)} \left.\begin{matrix} -3+0-3\neq 0 \\ -3+2-5\neq 0 \end{matrix}\right\} \to B \text{ no pertenece a la recta.}$$

$$\left.\begin{matrix} x-y-3=0 \\ x+z-5=0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{C(1,-2,4)} \left.\begin{matrix} 1+2-3=0 \\ 1+4-5=0 \end{matrix}\right\} \to C \text{ pertenece a la recta.}$$

46. Página 130

Imponemos la condición $y=0$ en la ecuación de la recta.

$$r: \left.\begin{matrix} x+y+z=0 \\ 2x-y-z-6=0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{y=0} \left.\begin{matrix} x+z=0 \\ 2x-z-6=0 \end{matrix}\right\} \to x=2; z=-2 \to P(2,0,-2)$$

47. Página 130

Ecuación vectorial: $(x,y,z)=(1,2,2)+t(-1,2,3)$

Ecuación continua: $\left.\begin{matrix} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=2+3t \end{matrix}\right\} \to \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{3}$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{matrix} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=2+3t \end{matrix}\right\}$

Ecuación implícita: $\left.\begin{matrix} \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{2} \\ \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{z-2}{3} \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} 2x+y-4=0 \\ 3x+z-5=0 \end{matrix}\right\}$

48. Página 130

$\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(2,1,-2)-(3,5,-1)=(-1,-4,-1)$

Ecuación vectorial: $(x,y,z)=(3,5,-1)+t(-1,-4,-1)$

Ecuación continua: $\left.\begin{matrix} x=3-t \\ y=5-4t \\ z=-1-t \end{matrix}\right\} \to \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-5}{-4}=\dfrac{z+1}{-1}$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{matrix} x=3-t \\ y=5-4t \\ z=-1-t \end{matrix}\right\}$

Ecuación implícita: $\left.\begin{matrix} \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-5}{-4} \\ \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{z+1}{-1} \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} 4x-y-7=0 \\ x-z-4=0 \end{matrix}\right\}$

49. Página 130

a) Elegimos dos puntos del eje OX, por ejemplo, $A(0,0,0)$ y $B(1,0,0)$.

Calculamos $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$.

$$(x,y,z)=(-3,2,7)+t(1,0,0)\rightarrow \left.\begin{array}{l}x=-3+t\\ y=2\\ z=7\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}y=2\\ z=7\end{array}\right\}$$

b) Elegimos dos puntos del eje OY: $A(0,0,0)$ y $B(0,1,0)\rightarrow \vec{v}=\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$.

$$(x,y,z)=(-3,2,7)+t(0,1,0)\rightarrow \left.\begin{array}{l}x=-3\\ y=2+t\\ z=7\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}x=-3\\ z=7\end{array}\right\}$$

c) Elegimos dos puntos del eje OZ: $A(0,0,0)$ y $B(0,0,1)\rightarrow \vec{v}=\overrightarrow{AB}=(0,0,1)$.

$$(x,y,z)=(-3,2,7)+t(0,0,1)\rightarrow \left.\begin{array}{l}x=-3\\ y=2\\ z=7+t\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}x=-3\\ y=2\end{array}\right\}$$

50. Página 130

a) Calculamos el vector director de la recta $r:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{5}=z\rightarrow \dfrac{x-0}{2}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z-0}{1}\rightarrow \vec{v}=(2,5,1)$

$$(x,y,z)=(1,-3,0)+t(2,5,1)\rightarrow \left.\begin{array}{l}x=1+2t\\ y=-3+5t\\ z=t\end{array}\right\}\rightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{5}=\frac{z+0}{1}\rightarrow \left.\begin{array}{l}5x-2y-11=0\\ x-2z-1=0\end{array}\right\}$$

b) $r:\left.\begin{array}{l}x-2y=0\\ y-z=0\end{array}\right\}x=2\lambda; y=\lambda; z=\lambda\rightarrow \dfrac{x-0}{2}=\dfrac{y-0}{1}=\dfrac{z-0}{1}\rightarrow \vec{v}=(2,1,1)$

$$(x,y,z)=(5,1,1)+t(2,1,1)\rightarrow \left.\begin{array}{l}x=5+2t\\ y=1+t\\ z=1+t\end{array}\right\}\rightarrow \frac{x-5}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}\rightarrow \left.\begin{array}{l}x-2y-3=0\\ x-2z-3=0\end{array}\right\}$$

51. Página 130

a) $r:(5-3t,1+t,-1+3t)\rightarrow \left.\begin{array}{l}x=5-3t\\ y=1+t\\ z=-1+3t\end{array}\right\}\rightarrow \dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{3}\rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{y-1}{1}\\ \dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{z+1}{3}\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}x+3y-8=0\\ x+z-4=0\end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l}x+3y-8=0\\ x+z-4=0\end{array}\right\}\xrightarrow{M(m,m,m)}\left.\begin{array}{l}m+3m-8=0\\ m+m-4=0\end{array}\right\}\rightarrow m=2$$

b) $r:x-1=\dfrac{y+2}{-2}=z\rightarrow \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+0}{1}\rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}\\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{z}{1}\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}2x+y=0\\ x-z-1=0\end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l}2x+y=0\\ x-z-1=0\end{array}\right\}\xrightarrow{M(m,m,m)}\left.\begin{array}{l}2m+m=0\\ m-m-1=0\end{array}\right\}-1\neq 0\rightarrow$ No existe solución.

52. Página 130

Hallamos las ecuaciones de la recta.

Calculamos $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(-5,-1,-1)$.

$$(x,y,z)=(2,1,0)+t(-5,-1,-1)\rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2-5t\\ y=1-t\\ z=-t\end{array}\right\}\rightarrow \frac{x-2}{-5}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-1}\rightarrow \left.\begin{array}{l} x-5y+3=0\\ x-5z-2=0\end{array}\right\}$$

Imponemos la condición de que el punto pertenezca a la recta.

$$\left.\begin{array}{l} x-5y+3=0\\ x-5z-2=0\end{array}\right\}\xrightarrow{P(m+n,2m-n,2)}\left.\begin{array}{l} -9m+6n+3=0\\ m+n-12=0\end{array}\right\}\rightarrow \left\{\begin{array}{l} m=5\\ n=7\end{array}\right.\rightarrow P(12,3,2)$$

53. Página 130

$$x=-2+\lambda \xrightarrow{(-1,2,7)} -1=-2+\lambda\rightarrow\lambda=1$$

$$y=3-\lambda \xrightarrow{(-1,2,7)} 2=3-\lambda\rightarrow\lambda=1$$

$z=2+3\lambda \xrightarrow{(-1,2,7)} 7=2+3\lambda\rightarrow\lambda=\frac{5}{3}\neq 1\rightarrow$ El punto no pertenece a la recta.

La recta s paralela a r que pasa por el punto $(-1,2,7)$ es $s:\left.\begin{array}{l} x=-1+\lambda\\ y=2-\lambda\\ z=7+3\lambda\end{array}\right\}$.

54. Página 130

Calculamos dos vectores a partir de los tres puntos: $\overrightarrow{AB}=(-2,-2,2)$ $\quad\overrightarrow{AC}=(1,-3,1)$

Ecuación vectorial: $(x,y,z)=(2,3,-1)+\lambda(-2,-2,2)+\mu(1,-3,1)$

Ecuación paramétrica: $(x,y,z)=(2,3,-1)+\lambda(-2,-2,2)+\mu(1,-3,1)\rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2-2\lambda+\mu\\ y=3-2\lambda-3\mu\\ z=-1+2\lambda+\mu\end{array}\right\}$

La ecuación general: $\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1\\ -2 & -2 & 2\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}=4x+4y+8z-12=0\rightarrow\pi: x+y+2z-3=0$

55. Página 130

La ecuación general del plano viene dada por: $\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1\\ 1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix}=-x-2y+z+3=0\rightarrow\pi: x+2y-z-3=0$

56. Página 130

Si $\vec{n}=(2,1,-1)\rightarrow\pi: 2x+y-z+D=0$.

Imponemos que pase por el punto pedido: $\pi: 2x+y-z+D=0\xrightarrow{P(-3,3,1)}2(-3)+3-1+D=0\rightarrow D=4$

El plano pedido es $\pi: 2x+y-z+4=0$.

57. Página 130

Imponemos que pase por el punto pedido.

$$mx+3y-2z+4=0 \xrightarrow{P(1,-2,1)} m+3\cdot(-2)-2+4=0 \rightarrow m=4$$

El plano pedido es $\pi: 4x+3y-2z+4=0$.

58. Página 130

Si el plano es paralelo al dado, tiene el mismo vector normal

$$\pi: x-y+z-1=0 \rightarrow \vec{n}=(1,-1,1)$$

Si $\vec{n}=(1,-1,1) \rightarrow \pi': x-y+z+D=0$.

Imponemos que pase por el punto dado.

$$\pi': x-y+z+D=0 \xrightarrow{P(3,3,1)} 3-3+1+D=0 \rightarrow D=-1$$

El plano pedido es el plano que teníamos, $\pi': x-y+z-1=0$, porque el punto está contenido en él.

59. Página 130

Si el plano es perpendicular a la recta, tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$r:(\lambda,\lambda,\lambda) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{1} \rightarrow \vec{v}=(1,1,1) \rightarrow \vec{n}=(1,1,1)$$

Si $\vec{n}=(1,1,1) \rightarrow \pi: x+y+z+D=0$.

Imponemos que pase por el punto dado: $\pi: x+y+z+D=0 \xrightarrow{P(2,-4,2)} 2+(-4)+2+D=0 \rightarrow D=0$

El plano pedido es el plano $\pi: x+y+z=0$.

60. Página 130

El punto más próximo al origen está en la recta perpendicular al plano que pasa por él.

Entonces, $\overrightarrow{OP}=(1,3,2)$ será el vector normal del plano.

Si $\vec{n}=(1,3,2) \rightarrow \pi: x+3y+2z+D=0$.

Imponemos que el plano pase por el punto dado.

$$\pi: x+3y+2z+D=0 \xrightarrow{P(1,3,2)} 1+3\cdot3+2\cdot2+D=0 \rightarrow D=-14$$

El plano pedido es el plano $\pi: x+3y+2z-14=0$.

61. Página 130

El segundo vector director del plano será el vector director de la recta $\vec{w}=(3,5,4)$.

$$\pi: \left.\begin{array}{r} P(-1,-1,1) \\ \vec{v}=(1,0,-2) \\ \vec{w}=(3,5,4) \end{array}\right\} \qquad \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 10x-10y+5z-5=0$$

El plano pedido es el plano $\pi: 2x-2y+z-1=0$.

62. Página 130

a) Punto de corte con el eje $\overrightarrow{OX}$

$\pi: 2x-3y+4z-12=0 \xrightarrow[y=z=0]{\overrightarrow{OX}} 2x-12=0 \to x=6 \to P_{\overrightarrow{OX}}(6,0,0)$

Punto de corte con el eje $\overrightarrow{OY}$

$\pi: 2x-3y+4z-12=0 \xrightarrow[x=z=0]{\overrightarrow{OY}} -3y-12=0 \to y=-4 \to P_{\overrightarrow{OY}}(0,-4,0)$

Punto de corte con el eje $\overrightarrow{OZ}$

$\pi: 2x-3y+4z-12=0 \xrightarrow[x=y=0]{\overrightarrow{OZ}} 4z-12=0 \to z=3 \to P_{\overrightarrow{OZ}}(0,0,3)$

b) Punto de corte con el eje $\overrightarrow{OX}$

$\pi: 2x-z+6=0 \xrightarrow[y=z=0]{\overrightarrow{OX}} 2x+6=0 \to x=-3 \to P_{\overrightarrow{OX}}(-3,0,0)$

Punto de corte con el eje $\overrightarrow{OY}$

$\pi: 2x-z+6=0 \xrightarrow[x=z=0]{\overrightarrow{OY}} 6 \neq 0 \to$ No se corta con el eje $\overrightarrow{OY}$.

Punto de corte con el eje $\overrightarrow{OZ}$

$\pi: 2x-z+6=0 \xrightarrow[x=y=0]{\overrightarrow{OZ}} -z+6=0 \to z=6 \to P_{\overrightarrow{OZ}}(0,0,6)$

63. Página 130

$\pi: Ax+By+Cz-8=0 \xrightarrow{P(4,0,0)} 4A-8=0 \to A=2$

$\pi: Ax+By+Cz-8=0 \xrightarrow{Q(0,-2,0)} -2B-8=0 \to B=-4$

$\pi: Ax+By+Cz-8=0 \xrightarrow{R(0,0,1)} C-8=0 \to C=8$

La ecuación del plano pedido es $\pi: 2x-4y+8z-8=0$.

64. Página 130

a) $x=\lambda-2 \xrightarrow{A(2,-1,m)} 2=\lambda-2 \to \lambda=4$

$y=\lambda+1 \xrightarrow{A(2,-1,m)} -1=\lambda+1 \to \lambda=-2 \neq 4 \to$ El punto A no puede pertenecer a la recta.

b) $\left.\begin{array}{l} x+3y-z=0 \xrightarrow{A(2,-1,m)} 2+3\cdot(-1)-m=0 \to m=-1 \\ x-y+3z=0 \xrightarrow{A(2,-1,m)} 2+1+3m=0 \to m=-1 \end{array}\right. \to A(2,-1,m) \in s$ cuando $m=-1$.

65. Página 130

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por A y B.

$\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(1,-1,1) \qquad (x,y,z)=(1,-1,0)+t(1,-1,1) \to \left.\begin{array}{l} x=1+t \\ y=-1-t \\ z=t \end{array}\right\} \to \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{1} \to \left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ x-z-1=0 \end{array}\right\}$

Comprobamos si el tercer punto pertenece a la recta.

$\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ x-z-1=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{C(0,0,-1)} \left.\begin{array}{l} 0+0=0 \\ -(-1)-1=0 \end{array}\right\} \to C$ pertenece a la recta que pasa por A y B.

Los tres puntos están alineados.

66. Página 130

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por A y B.

$\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(-2,4,-2)$

$$(x,y,z)=(4,-2,1)+t(-2,4,-2)\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=4-2t\\ y=-2+4t\\ z=1-2t\end{array}\right\}\rightarrow\frac{x-4}{-2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{-2}\rightarrow\left.\begin{array}{l}4x+2y-12=0\\ x-z-3=0\end{array}\right\}$$

Imponemos que el tercer punto pertenezca a la recta.

$$\left.\begin{array}{l}4x+2y-12=0\\ x-z-3=0\end{array}\right\}\xrightarrow{C(-1,a,-4)}\left.\begin{array}{l}4\cdot(-1)+2a-12=0\\ -1-(-4)-3=0\end{array}\right\}\rightarrow a=8$$

Los tres puntos están alineados cuando $a=8$.

67. Página 130

Los puntos están alineados si los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=(3,2,6-a)\\ \overrightarrow{PR}=(b-2,-4,9-a)\end{array}\right\}\rightarrow\frac{3}{b-2}=\frac{2}{-4}=\frac{6-a}{9-a}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}a=7\\ b=-4\end{array}\right.$$

68. Página 130

a) Llamamos $D=(d_1,d_2,d_3)$ al vértice buscado.

$\overrightarrow{AB}=(1,4,2)$

Entonces $\overrightarrow{CD}=(d_1-4,d_2-7,d_3+2)=-\overrightarrow{AB}=(-1,-4,-2)\rightarrow D(3,3,-4)$

b) El perímetro es la suma de la longitud de los lados.

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+4^2+2^2}=\sqrt{21}$

$\overrightarrow{BC}=(0,2,-4)$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{0^2+2^2+(-4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

El perímetro del paralelogramo es $P=2\sqrt{21}+4\sqrt{5}$.

69. Página 130

Determinamos la ecuación del plano que determinan tres de los puntos.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-1,6,-1)\\ \overrightarrow{AC}=(-4,1,1)\end{array}\right\}\rightarrow\begin{vmatrix}x-3 & y+1 & z-2\\ -1 & 6 & -1\\ -4 & 1 & 1\end{vmatrix}=7x+5y+23z-62\rightarrow\pi:7x+5y+23z-62=0$$

Estudiamos si el cuarto punto pertenece a dicho plano.

$$\pi:7x+5y+23z-62=0\xrightarrow{D(0,1,-3)}7\cdot0+5\cdot1+23\cdot(-3)-62=-126\neq0$$

Los puntos no son coplanarios.

70. Página 130

Hallamos la ecuación del plano que determinan los puntos A, B y C.

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB}=(1,-1,1)\\ \overrightarrow{AC}=(-2,3,-11)\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{vmatrix}x & y & z-6\\ 1 & -1 & 1\\ -2 & 3 & -11\end{vmatrix}=8x+9y+z-6\rightarrow\pi:8x+9y+z-6=0$$

Imponemos que el cuarto punto pertenezca al plano.

$$\pi:8x+9y+z-6=0\xrightarrow{D(-3,-1,a)}8\cdot(-3)+9\cdot(-1)+a-6=0\rightarrow a=39$$

Los puntos son coplanarios cuando $a=39$.

71. Página 130

a) $\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB}=(1,1,1)\\ \overrightarrow{AC}=(0,-1,-2)\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{vmatrix}x & y & z-1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\end{vmatrix}=-x+2y-z+1\rightarrow\pi:-x+2y-z+1=0$

b) $\pi:-x+2y-z+1\xrightarrow{D(k,0,0)}-k+2\cdot0-0+1=0\rightarrow k=1$

Los puntos son coplanarios cuando $k=1$.

72. Página 130

$\overrightarrow{AB}=(a-1,1,b-1)$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{AC}=(0,-1,-1)$

a) Si $a=2$, $\overrightarrow{AB}=(1,1,b-1)$ y $\overrightarrow{AC}=(0,-1,-1)$

El plano es: $\begin{vmatrix}x-1 & y & z\\ 1 & 1 & b-1\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}=(b-2)x+y-z+(2-b)\rightarrow\pi:(b-2)x+y-z+(2-b)=0$

Imponemos que el punto $P(2, 0, 1)$ pertenezca al plano.

$$(b-2)x+y-z+(2-b)=0\xrightarrow{P(2,0,1)}2b-4+0-1+2-b=0\rightarrow b=3$$

La ecuación del plano es: $\pi:x+y-z-1=0$

b) Los puntos *A*, *B* y *C* están alineados si los vectores que definen son proporcionales.

$\overrightarrow{AB}=(a-1,1,b-1)$ y $\overrightarrow{AC}=(0,-1,-1)$ son proporcionales $\left.\begin{matrix}a-1=0\\ \dfrac{1}{-1}=\dfrac{b-1}{-1}\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}$

73. Página 131

Calculamos la ecuación paramétrica de la recta: $\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$

$$(x,y,z)=(0,1,2)+t(1,1,1)\rightarrow\left.\begin{matrix}x=t\\ y=1+t\\ z=2+t\end{matrix}\right\}$$

Imponemos que se cumplan las ecuaciones para el punto $C(3,r+s,r-s)$.

$$\left.\begin{matrix}x=t\\ y=1+t\\ z=2+t\end{matrix}\right\}\xrightarrow{C(3,r+s,r-s)}\left.\begin{matrix}3=t\\ r+s=1+t\\ r-s=2+t\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}r+s=4\\ r-s=5\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{cases}r=\dfrac{9}{2}\\ s=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

74. Página 131

a) $r:\begin{cases}P(2,-2,3)\\ \vec{u}=(-1,3,1)\end{cases}$ $\quad s:\begin{cases}Q(2,-4,4)\\ \vec{v}=(1,-1,-2)\end{cases}$ $\quad \overrightarrow{PQ}=(0,-2,1)$

$$\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2\neq 0\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}=2$$

$$\begin{vmatrix}-1 & 3 & 1\\ 1 & -1 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=0\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 1 & -1 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}=2$$

Las rectas se cortan.

b) $r:\begin{cases}P(3,2,-4)\\ \vec{u}=(2,-1,1)\end{cases}$ $\quad s:\begin{cases}Q(-1,5,-1)\\ \vec{v}=(-4,2,-2)\end{cases}$ $\quad \overrightarrow{PQ}=(-4,3,3)$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -4 & 2 & -2\end{pmatrix}=1$$

$$\begin{vmatrix}-4 & 2\\ -4 & 3\end{vmatrix}=-4\neq 0\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -4 & 2 & -2\\ -4 & 3 & 3\end{pmatrix}=2$$

Las rectas son paralelas.

c) $r:\begin{cases}P(3,-2,1)\\ \vec{u}=(-1,2,3)\end{cases}$ $\quad s:\left.\begin{matrix}3x+z=10\\ 5x-y-z=16\end{matrix}\right\}\rightarrow \left.\begin{matrix}x=t\\ y=-26+8t\\ z=10-3t\end{matrix}\right\}\rightarrow \left.\begin{matrix}Q(0,-26,10)\\ \vec{v}=(1,8,-3)\end{matrix}\right\}$ $\quad \overrightarrow{PQ}=(-3,-24,9)$

$$\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 8\end{vmatrix}=-10\neq 0\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 8 & -3\end{pmatrix}=2$$

$$\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 8 & -3\\ -3 & -24 & 9\end{vmatrix}=0\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 8 & -3\\ -3 & -24 & 9\end{pmatrix}=2$$

Las rectas son secantes.

d) $$\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-10\neq 0\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 3\end{pmatrix}=3$$

$$\begin{vmatrix}2 & 0 & 1 & 4\\ 1 & 3 & 1 & 4\\ 1 & 1 & -1 & 8\\ 3 & -1 & 3 & 18\end{vmatrix}=-180\neq 0\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 4\\ 1 & 3 & 1 & 4\\ 1 & 1 & -1 & 8\\ 3 & -1 & 3 & 18\end{pmatrix}=4$$

Las rectas se cruzan.

e) $r:\left.\begin{matrix}2x+4y-z=7\\ -x+y+2z=-2\end{matrix}\right\}\rightarrow \left.\begin{matrix}x=4-3t\\ y=t\\ z=1-2t\end{matrix}\right\}\rightarrow \left.\begin{matrix}P(4,0,1)\\ \vec{u}=(-3,1,-2)\end{matrix}\right\}$ $\quad s\begin{cases}Q(1,1,-1)\\ \vec{v}=(3-1,2)\end{cases}$ $\quad \overrightarrow{PQ}=(-3,1,-2)$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}=1 \qquad \text{Rango}\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ 3 & -1 & 2\\ -3 & 1 & -2\end{pmatrix}=1$$

Las rectas son coincidentes.

75. Página 131

$$r:\left.\begin{matrix}x+2y-z=13\\2x-y-7z=16\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}x=9+3t\\y=2-t\\z=t\end{matrix}\right\}\rightarrow r:\begin{cases}P(9,2,0)\\\vec{u}=(3,-1,1)\end{cases}$$

$$s:\left.\begin{matrix}x=1-3\lambda\\y=2+\lambda\\z=-\lambda\end{matrix}\right\}\rightarrow s:\begin{cases}Q=(1,2,0)\\\vec{v}=(-3,1,-1)\end{cases}$$

$$\overrightarrow{PQ}=(-8,0,0)$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix}-3&-1&1\\-3&1&-1\end{pmatrix}=1\qquad \text{Rango}\begin{pmatrix}3&-1&1\\-3&1&-1\\-8&0&0\end{pmatrix}=2$$

Las rectas son paralelas. El plano que las contiene es:

$$\pi:\begin{vmatrix}x-1&y-2&z\\3&-1&1\\-8&0&0\end{vmatrix}=-8y-8z+16=0\rightarrow\pi:-y-z+2=0$$

76. Página 131

$$r:\begin{cases}P(-4,0,-1)\\\vec{u}=(7,2,0)\end{cases}\qquad s:\begin{cases}Q=(1,10,3)\\\vec{v}=(-1,4,2)\end{cases}\qquad \overrightarrow{PQ}=(5,10,4)$$

$$\begin{vmatrix}7&2\\-1&4\end{vmatrix}=30\neq 0\rightarrow\text{Rango}\begin{pmatrix}7&2&0\\-1&4&2\end{pmatrix}=2$$

$$\begin{vmatrix}7&2&0\\-1&4&2\\5&10&4\end{vmatrix}=0\rightarrow\text{Rango}\begin{pmatrix}7&2&0\\-1&4&2\\5&10&4\end{pmatrix}=2$$

Las rectas son secantes.

$$\left.\begin{matrix}-4+7\lambda=1-\mu\\2\lambda=10+4\mu\\-1=3+2\mu\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{cases}\lambda=1\\\mu=-2\end{cases}\rightarrow R(3,2,-1)\ \text{ es el punto de corte.}$$

77. Página 131

$$r:\begin{cases}P(-3,1,-1)\\\vec{u}=(2,2,-1)\end{cases}\qquad s:\begin{cases}Q=(3,1,0)\\\vec{v}=(-2,1,-1)\end{cases}\qquad \overrightarrow{PQ}=(6,0,1)$$

$$\begin{vmatrix}2&2\\-2&1\end{vmatrix}=6\neq 0\rightarrow\text{Rango}\begin{pmatrix}2&2&-1\\-2&1&-1\end{pmatrix}=2$$

$$\begin{vmatrix}2&2&-1\\-2&1&-1\\6&0&1\end{vmatrix}=0\rightarrow\text{Rango}\begin{pmatrix}2&2&-1\\-2&1&-1\\6&0&1\end{pmatrix}=2$$

Las rectas son secantes.

Calculamos el plano que las contiene.

$$\begin{vmatrix}x+3&y-1&z+1\\2&2&-1\\-2&1&-1\end{vmatrix}=-x+4y+6z-1\rightarrow\pi:-x+4y+6z-1=0$$

78. Página 131

a) $r:\left.\begin{array}{l} x=3-\lambda \\ y=2 \\ z=-1+3\lambda \end{array}\right\} \rightarrow r:\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{z+1}{3} \\ y=2 \end{array}\right\} \rightarrow r:\left.\begin{array}{l} 3x+z-8=0 \\ y-2=0 \end{array}\right\}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}=3$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}=3$$

La recta y el plano se cortan en un punto.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}=5\neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}=2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 3 \\ 5 & 5 & -7 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}=2$$

La recta está contenida en el plano.

c) $\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-2x-y-z+3 \rightarrow \pi: 2x+y+z-3=0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}=6\neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}=2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}=60\neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}=3$$

La recta y el plano son paralelos.

79. Página 131

a) $\pi: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}=10x-10y-8z-22=0 \rightarrow \pi: 5x-5y-4z-11=0$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}=1$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -11 \\ -5 & -12 \end{vmatrix}=-115\neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 & -11 \\ -5 & 5 & 4 & -12 \end{pmatrix}=2$$

Los planos son paralelos.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=9\neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}=2$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}=2$$

Los planos son secantes.

c) $\pi:\begin{vmatrix} x & y-3 & z-1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -x+y-z-2=0 \rightarrow \pi: -x+y-z+2=0$

Las ecuaciones de ambos planos son iguales; por tanto, los planos son coincidentes.

Haciéndolo por rangos:

$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1$

$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$

Los planos son coincidentes.

80. Página 131

a) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 44 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 3$

$\text{Rango}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} = 3$

Los planos se cortan en un punto.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & -4 & 7 \end{pmatrix} = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \\ 7 & -4 & 7 & 7 \end{pmatrix} = 2$

Como no hay dos planos coincidentes, los tres planos se cortan en una recta.

c) $\begin{vmatrix} 6 & -3 & 9 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} = 2$

$\begin{vmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 51 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 5 \end{pmatrix} = 3$

Como π y π'' son paralelos:

$\frac{6}{4} = \frac{-3}{-2} = \frac{9}{6} \neq \frac{-1}{7}$

Tenemos dos planos paralelos que cortan al tercero.

d) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 6 & -5 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 6 & -5 & 9 \end{pmatrix} = 2$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 6 & -5 & -1 \end{vmatrix} = -44 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 6 & -5 & 9 & -1 \end{pmatrix} = 3$

Como no hay planos paralelos, los planos se cortan dos a dos.

81. Página 131

$$r:\begin{cases} P(m,-10,-3) \\ \vec{u}=(-1,4,1) \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} Q=(1,6,-1) \\ \vec{v}=(0,4,2) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PQ}=(1-m,16,2)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=-4\neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}=2$$

Las rectas se cortan cuando $\text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1-m & 16 & 2 \end{pmatrix}=2$, es decir, si $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1-m & 16 & 2 \end{vmatrix}=-4m+28=0$.

Las rectas se cortan en un punto cuando $m=7$.

82. Página 131

Calculamos el rango de la matriz que forman los vectores directores y el de la matriz formada por estos y el vector que tiene por extremos los puntos calculados.

$$r:\left.\begin{matrix} x+y+z+3=0 \\ x-y-z-1=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=-t-3 \\ x-y=t+1 \\ z=t \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x=-1 \\ y=-2-t \\ z=t \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} P(-1,-2,0) \\ \vec{u}=(0,-1,1) \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} Q=(-1,-1,-m) \\ \vec{v}=(2,1,-2) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PQ}=(0,1,-m)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}=2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -m \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -m \end{vmatrix}=-2(m-1)=-2m+2 \rightarrow \begin{cases} m=1 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -m \end{pmatrix}=2 \\ m\neq 1 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -m \end{pmatrix}=3 \end{cases}$$

Las rectas se cruzan cuando $m\neq 1$.

Las rectas se cortan cuando $m=1$. Calculamos el punto de corte para este caso.

$$s:\frac{x+1}{2}=y+1=\frac{z+1}{-2} \rightarrow \left.\begin{matrix} x=-1+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=-1-2\lambda \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} -1=-1+2\lambda \\ -2-t=-1+\lambda \\ t=-1-2\lambda \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ t=-1 \end{cases} \rightarrow R(-1,-1,-1)$$ es el punto de corte.

83. Página 132

a) Calculamos el rango de la matriz que forman los vectores directores y la matriz formada por estos y el vector que tiene por extremos los puntos calculados.

$$r:\left.\begin{array}{l}x+y=2\\x+z=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=\lambda\\y=2-\lambda\\z=-\lambda\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}P(0,2,0)\\\vec{u}=(1,-1,-1)\end{cases}\qquad s:\begin{cases}Q=(2,1,0)\\\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-1)\end{cases}$$

$$\overrightarrow{PQ}=(2,-1,0)$$

$$\begin{vmatrix}1&-1\\-1&-1\end{vmatrix}=-2\neq0\rightarrow\text{Rango}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}=2\qquad\begin{vmatrix}1&-1&-1\\-1&-1&-1\\2&-1&0\end{vmatrix}=-2\neq0\rightarrow\text{Rango}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&-1&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}=3$$

Las rectas se cruzan en el espacio.

b) Sea $C=(c_1,c_2,c_3)$.

Por un lado, como $C\in r\rightarrow\left.\begin{array}{l}c_1+c_2=2\\c_1+c_3=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}c_2=2-c_1\\c_3=-c_1\end{array}\right\}$.

Por otro lado, si $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}\rightarrow\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{CA}=(2-c_1,1-c_2,-c_3)\\\overrightarrow{CB}=(1-c_1,-c_2,-1-c_3)\end{array}\right\}\rightarrow\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=c_1^2+c_2^2+c_3^2-3c_1-c_2+c_3+2=0\xrightarrow[c_3=-c_1]{c_2=2-c_1}3c_1^2-7c_1+4=0$$

Como el enunciado solamente nos pide buscar un punto, nos quedamos con una de las raíces de la ecuación de segundo grado resultante, en este caso la negativa $\rightarrow c_1=\dfrac{7-\sqrt{49-4\cdot4\cdot3}}{6}=1$.

El punto pedido es $C=(1,1,-1)$.

84. Página 132

$$r:\begin{cases}P(1,-1,m)\\\vec{u}=(4,m^2,-4)\end{cases}\qquad s:\begin{cases}Q=(2,0,1)\\\vec{v}=(1,1,-1)\end{cases}\qquad\overrightarrow{PQ}=(1,1,1-m)$$

Si las rectas son paralelas $\rightarrow\text{Rango}\begin{pmatrix}4&m^2&-4\\1&1&-1\end{pmatrix}=1$ y $\text{Rango}\begin{pmatrix}4&m^2&-4\\1&1&-1\\1&1&1-m\end{pmatrix}=2$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix}4&m^2&-4\\1&1&-1\end{pmatrix}=1\rightarrow m^2=4\qquad\text{Rango}\begin{pmatrix}4&m^2&-4\\1&1&-1\\1&1&1-m\end{pmatrix}=2\rightarrow\left.\begin{array}{l}\begin{vmatrix}4&m^2&-4\\1&1&-1\\1&1&1-m\end{vmatrix}=0\rightarrow m^3-2m^2-4m+8=0\\\begin{vmatrix}1&-1\\1&1-m\end{vmatrix}=2-m\neq0\end{array}\right\}$$

$$\text{Resolvemos el sistema resultante}\ \left.\begin{array}{l}m^2=4\\m^3-2m^2-4m+8=0\\2-m\neq0\end{array}\right\}\rightarrow m=-2$$

Las rectas son paralelas cuando $m=-2$. En ese caso, la ecuación del plano que las contiene es:

$$\pi:\begin{cases}P(1,-1,-2)\\\vec{v}=(1,1,-1)\\\overrightarrow{PQ}=(1,1,3)\end{cases}\rightarrow\begin{vmatrix}x-1&y+1&z+2\\1&1&-1\\1&1&3\end{vmatrix}=4x-4y-8\rightarrow\pi:x-y-2=0$$

85. Página 132

$$r: \left.\begin{array}{l} x+z-1=0 \\ 2x+y+z+1=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1-\lambda \\ y=-3+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} P(1,-3,0) \\ \vec{u}=(-1,1,1) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q=(0,0,-1) \\ \vec{v}=(-1,1,m) \end{cases} \qquad \overrightarrow{PQ}=(-1,3,-1)$$

Calculamos el rango de la matriz que forman los vectores directores y la matriz formada por estos y el vector que tiene por extremos los puntos calculados.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} m=1 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & m \end{pmatrix}=1 \\ m\neq 1 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & m \end{pmatrix}=2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & m \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=2m-2 \rightarrow \begin{cases} m=1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-4 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & m \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}=2 \\ m\neq 1 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & m \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}=3 \end{cases}$$

Si $m=1$, las rectas son paralelas.

Si $m\neq 1$, las rectas son secantes.

86. Página 132

$$r: \begin{cases} P(0,0,0) \\ \vec{u}=(2,m,-3) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q=(0,0,0) \\ \vec{v}=(1,1,1) \end{cases}$$

Observamos que las dos rectas pasan por el origen de coordenadas; por tanto, siempre son secantes.

Serán perpendiculares si $\vec{u}\perp\vec{v} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2,m,-3)\cdot(1,1,1)=2+m-3=0 \rightarrow m=1$$

Las rectas son perpendiculares para $m=1$.

Calculamos la recta perpendicular común a las dos rectas.

Determinamos el plano que contiene a la recta r y es perpendicular a s.

$$\pi: \begin{cases} P(0,0,0) \\ \vec{u}=(2,1,-3) \\ \vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=(4,-5,1) \end{cases}$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix}=-14x-14y-14z=0 \rightarrow \pi: x+y+z=0$$

Determinamos el punto de intersección del plano con la recta que no está contenida en él.

$$\left.\begin{array}{l} x-y=0 \\ x-z=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\} \rightarrow R(0,0,0)$$

La recta buscada tiene como vector director $\vec{n}$ y pasa por el punto que hemos calculado.

$$t: \begin{cases} \vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=(4,-5,1) \\ R(0,0,0) \end{cases} \rightarrow t:(x,y,z)=(0,0,0)+\lambda(4,-5,1).$$

87. Página 132

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las tres ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & m & -1\end{pmatrix}$$

$$M^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & m & -1 & -6\end{pmatrix}$$

Calculamos sus rangos.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & m & -1\end{vmatrix}=-m+2$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0\rightarrow\begin{cases}m\neq 2\rightarrow \text{Rango}(M)=3\\ m=2\rightarrow \text{Rango}(M)=2\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -6\end{vmatrix}=-3\neq 0\rightarrow \text{Rango}(M^*)=3$$

Si $m\neq 2\rightarrow \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3\rightarrow$ El sistema es compatible determinado. La recta y el plano se cortan en un punto.

Si $m=2\rightarrow 2=\text{Rango}(M)\neq\text{Rango}(M^*)=3\rightarrow$ El sistema es incompatible. La recta y el plano son paralelos.

88. Página 132

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las tres ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & -a\end{pmatrix}$$

$$M^*=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 2 & 3 & -a & 0\end{pmatrix}$$

$$\text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)$$

$$\left.\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & -a\end{vmatrix}=-a+5\right\}\rightarrow\begin{cases}a\neq 5\rightarrow \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3\\ a=5\rightarrow \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2\end{cases}$$

Si $a=5\rightarrow \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2\rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado. La recta está contenida en el plano.

Si $a\neq 5\rightarrow \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3\rightarrow$ El sistema es compatible determinado. La recta y el plano se cortan en un punto. Calculamos dicho punto de corte.

$$\begin{cases}x=y\\ z=x\\ 2x+3y-az=0\end{cases}\rightarrow 2x+3x-ax=0\rightarrow(5-a)x=0\xrightarrow{a\neq 5}x=y=z=0\rightarrow P(0,0,0)$$

89. Página 132

Escribimos la ecuación continua de la recta.

$$r:\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+3}{1}\to\begin{cases}\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{-4}\\[2mm]\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{z+3}{1}\end{cases}\to\begin{cases}x+y-4=0\\x-4z-15=0\end{cases}$$

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las tres ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&-4\\a&2&-4\end{pmatrix}\qquad M^*=\begin{pmatrix}1&1&0&-4\\1&0&-4&-15\\a&2&-4&-b\end{pmatrix}$$

Calculamos sus rangos: $\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&-4\\a&2&-4\end{vmatrix}=-4a+12$ $\qquad \begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0\to\begin{cases}a\neq 3\to \text{Rango}(M)=3\\a=3\to\text{Rango}(M)=2\end{cases}$

Si $a\neq 3\to\text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3\to$ La recta y el plano se cortan en un punto.

Si $a=3\to$ Tenemos que estudiar el Rango de M^*: $\begin{vmatrix}1&1&-4\\1&0&-15\\3&2&-b\end{vmatrix}=b-23\to\begin{cases}b\neq 23\to\text{Rango}(M^*)=3\\b=23\to\text{Rango}(M^*)=2\end{cases}$

Si $a=3; b=23\to\text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2\to$ El sistema es compatible indeterminado. La recta está contenida en el plano.

Si $a=3; b\neq 23\to 2=\text{Rango}(M)\neq\text{Rango}(M^*)=3\to$ El sistema es incompatible. La recta y el plano son paralelos.

90. Página 132

Escribimos la ecuación continua de la recta.

$$r:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{2}\to\begin{cases}\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}\\[2mm]\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{z-1}{2}\end{cases}\to\begin{cases}2x-3y-8=0\\2x-3z+1=0\end{cases}$$

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las tres ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}2&-3&0\\2&0&-3\\2&-1&m\end{pmatrix}\qquad M^*=\begin{pmatrix}2&-3&0&-8\\2&0&-3&1\\2&-1&m&-4\end{pmatrix}$$

Los planos son paralelos cuando $2=\text{Rango}(M)\neq\text{Rango}(M^*)=3$.

$\text{Rango}(M)=2\to\begin{vmatrix}2&-3&0\\2&0&-3\\2&-1&m\end{vmatrix}=6m+12=0\to m=-2$ $\qquad\begin{vmatrix}2&-3&-8\\2&0&1\\2&-1&-4\end{vmatrix}=-12\neq 0\to\text{Rango}(M^*)=3$

El plano perpendicular al dado que contiene a la recta tiene por vectores directores el vector normal del plano y el vector director de la recta.

$$\pi:\begin{cases}\vec{u}=\vec{n}=(2,-1,-2)\\\vec{v}=(3,2,2)\\P(1,-2,1)\end{cases}\to\begin{vmatrix}x-1&y+2&z-1\\2&-1&-2\\3&2&2\end{vmatrix}=2x-10y+7z-29\to\pi:2x-10y+7z-29=0$$

91. Página 132

Para que el plano y la recta sean ortogonales, el vector normal del plano ($\vec{n}$) y el vector director de la recta ($\vec{v}$) deben ser paralelos.

$$\vec{n}=(2,3,1)$$

$$r:\frac{-x}{2}=\frac{y}{-3}=-z\rightarrow r:\frac{x}{-2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{-1}\rightarrow\vec{v}=(-2,-3,-1)$$

Como $\vec{n}=-\vec{v}$, el plano y la recta son ortogonales.

92. Página 132

a) Los planos son paralelos cuando sus vectores normales son paralelos.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1: ax+9y-3z-8=0\rightarrow n_1=(a,9,-3)\\ \pi_2: x+ay-z=0\rightarrow n_2=(1,a,-1)\end{array}\right\}\rightarrow n_1=\lambda n_2\rightarrow\frac{a}{1}=\frac{9}{a}=\frac{-3}{-1}\rightarrow a=3$$

b) Los planos son perpendiculares cuando sus vectores normales son perpendiculares.

$$\left.\begin{array}{l}n_1=(a,9,-3)\\ n_2=(1,a,-1)\end{array}\right\}\rightarrow n_1\cdot n_2=(a,9,-3)\cdot(1,a,-1)=a+9a+3=0\rightarrow a=-\frac{3}{10}$$

93. Página 132

a) Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las tres ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&4&k\end{pmatrix}\qquad M^*=\begin{pmatrix}1&1&1&-3\\1&2&0&3\\1&4&k&15\end{pmatrix}$$

Calculamos sus rangos.

$$\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1\neq 0\qquad \begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&4&k\end{vmatrix}=k+2\rightarrow\begin{cases}k=-2\rightarrow \text{Rango}(M)=2\\ k\neq-2\rightarrow\text{Rango}(M)=3\end{cases}$$

- Para $k=-2\rightarrow\text{Rango}(M)=2$ y $M^*=\begin{pmatrix}1&1&1&-3\\1&2&0&3\\1&4&-2&15\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}1&1&-3\\1&2&3\\1&4&15\end{vmatrix}=0\rightarrow\text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2\rightarrow$$ Sistema compatible indeterminado.

Estudiamos la posición relativa de cada par de planos:

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1: x+y+z-3=0\\ \pi_2: x+2y+3=0\end{array}\right\}\rightarrow\text{Secantes}\quad \left.\begin{array}{l}\pi_1: x+y+z-3=0\\ \pi_3: x+4y-2z+15=0\end{array}\right\}\rightarrow\text{Secantes}\quad \left.\begin{array}{l}\pi_2: x+2y+3=0\\ \pi_3: x+4y-2z+15=0\end{array}\right\}\rightarrow\text{Secantes}$$

Los planos se cortan en una recta.

- Para $k\neq-2\rightarrow\text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Los planos se cortan en un punto.

b) Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las tres ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}2 & -k & 4\\ 1 & 1 & 7\\ k & -1 & 13\end{pmatrix}\qquad M^*=\begin{pmatrix}2 & -k & 4 & 0\\ 1 & 1 & 7 & 0\\ k & -1 & 13 & 0\end{pmatrix}$$

Como M^* tiene la cuarta columna nula, $\text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)$.

$$\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 7\end{vmatrix}=10\neq 0\qquad \begin{vmatrix}2 & -k & 4\\ 1 & 1 & 7\\ k & -1 & 13\end{vmatrix}=-7k^2+9k+36\to 7k^2-9k-36=0\to\begin{cases}k=3\\ k=-\dfrac{12}{7}\end{cases}$$

- Para $k\neq 3; k\neq -\dfrac{12}{7}\to \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3$

$\text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3\to$ Sistema compatible determinado. Los planos se cortan en un punto.

- Para $k=3\to\text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2\to$ Sistema compatible indeterminado.

Estudiamos la posición relativa de cada par de planos:

$$\left.\begin{matrix}\pi_1: 2x-3y+4z=0\\ \pi_2: x+y+7z=0\end{matrix}\right\}\to\text{Secantes}\qquad \left.\begin{matrix}\pi_1: 2x-3y+4z=0\\ \pi_3: 3x-y+13z=0\end{matrix}\right\}\to\text{Secantes}\qquad \left.\begin{matrix}\pi_2: x+y+7z=0\\ \pi_3: 3x-y+13z=0\end{matrix}\right\}\to\text{Secantes}$$

Los planos se cortan en una recta.

- Para $k=-\dfrac{12}{7}\to\text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2\to$ Sistema compatible indeterminado.

Estudiamos la posición relativa de cada par de planos:

$$\left.\begin{matrix}\pi_1: 2x+\dfrac{12}{7}y+4z=0\\ \pi_2: x+y+7z=0\end{matrix}\right\}\to\text{Secantes}\qquad \left.\begin{matrix}\pi_1: 2x+\dfrac{12}{7}y+4z=0\\ \pi_3: -\dfrac{12}{7}x-y+13z=0\end{matrix}\right\}\to\text{Secantes}\qquad \left.\begin{matrix}\pi_2: x+y+7z=0\\ \pi_3: -\dfrac{12}{7}x-y+13z=0\end{matrix}\right\}\to\text{Secantes}$$

Los planos se cortan en una recta.

94. Página 132

a) Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las tres ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & a^2\\ 1 & -1 & a^2-a\end{pmatrix}\qquad M^*=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -a\\ 1 & 0 & a^2 & -2a-1\\ 1 & -1 & a^2-a & -2a\end{pmatrix}$$

Calculamos sus rangos.

$$\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1\neq 0\qquad \begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & a^2\\ 1 & -1 & a^2-a\end{vmatrix}=a^2-a=a(a-1)\to\begin{cases}a=0\to\text{Rango}(M)=2\\ a=1\to\text{Rango}(M)=2\\ a\neq 0; a\neq 1\to\text{Rango}(M)=3\end{cases}$$

- Para $a=1\to\text{Rango}(M)=2$ y $M^*=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1 & -3\\ 1 & -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 1 & -1 & -2\end{vmatrix}=-1\neq 0\to 2=\text{Rango}(M)\neq\text{Rango}(M^*)=3\to\text{Sistema incompatible.}$$

Estudiamos la posición relativa de cada par de planos:

$\left.\begin{array}{l}\pi_1: x-y=1\\ \pi_2: x+z-3=0\end{array}\right\}\rightarrow$ Secantes $\quad \left.\begin{array}{l}\pi_1: x-y=1\\ \pi_3: x-y-2=0\end{array}\right\}\rightarrow$ Paralelos $\quad \left.\begin{array}{l}\pi_2: x+z-3=0\\ \pi_3: x-y-2=0\end{array}\right\}\rightarrow$ Secantes

Dos planos paralelos cortan al tercero.

- Para $a=0\rightarrow \text{Rango}(M)=2$ y $M^*=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

  $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1\rightarrow \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado con dos ecuaciones iguales.

  Dos planos coincidentes cortan al tercero.

- Para $a\neq 0; a\neq 1\rightarrow \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

  Los planos se cortan en un punto.

b) Estudiamos los casos en que los tres planos son secantes en un punto o en una recta.

- Para $a=0$, calculamos la recta intersección donde los dos planos coincidentes cortan al tercero.

  $\left.\begin{array}{l}\pi_1: x-y=0\\ \pi_2: x=1\\ \pi_3: x-y=0\end{array}\right\}\rightarrow r:(x,y,z)=(1,1,\lambda)=(1,1,0)+\lambda(0,0,1)$

- Para $a\neq 0$ y $a\neq 1$, calculamos el punto donde se cortan.

  $\left.\begin{array}{l}\pi_1: x-y=a\\ \pi_2: x+a^2z=2a+1\\ \pi_3: x-y+(a^2-a)z=2a\end{array}\right\}\rightarrow P\left(\dfrac{a^2-a-1}{a-1},\dfrac{-1}{a-1},\dfrac{1}{a-1}\right)$

95. Página 132

El plano tendrá por vectores directores al vector director de la recta y al vector $\overrightarrow{AB}$.

$$r:(-3+\lambda,0,1+2\lambda)\rightarrow \left.\begin{array}{l}x=-3+\lambda\\ y=0\\ z=1+2\lambda\end{array}\right\}\rightarrow \begin{cases}P(-3,0,1)\\ \vec{u}=(1,0,2)\end{cases}$$

$$\pi:\begin{cases}\vec{u}=(1,0,2)\\ \vec{v}=\overrightarrow{AB}=(1,-1,0)\\ A(0,1,1)\end{cases}\rightarrow \begin{vmatrix}x & y-1 & z-1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=2x+2y-z-1\rightarrow \pi: 2x+2y-z-1=0$$

96. Página 132

$$r:\left.\begin{array}{l}2x+y-z=4\\ x+y-2z=3\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}x=1-\lambda\\ y=2+3\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right\}\rightarrow \begin{cases}P(1,2,0)\\ \vec{u}=(-1,3,1)\end{cases}$$

El plano tendrá por vectores directores al vector director de la recta y al vector $\overrightarrow{AP}$.

$$\pi:\begin{cases}P(1,2,0)\\ \vec{u}=(-1,3,1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{AP}=(3,0,2)\end{cases}\rightarrow \pi: \begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z\\ -1 & 3 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{vmatrix}=6x+5y-9z-16\rightarrow \pi: 6x+5y-9z-16=0$$

97. Página 132

El plano tendrá por vector normal al vector director de la recta.

$\vec{u}=(3,2,-3)=\vec{n}\rightarrow\pi:3x+2y-3z+D=0$

Imponemos que el plano contenga al punto A: $\pi:3x+2y-3z+D=0\xrightarrow{A(-3,1,0)}3\cdot(-3)+2\cdot1-3\cdot0+D=0\rightarrow D=7$

El plano es $\pi:3x+2y-3z+7=0$.

98. Página 132

La recta tendrá por vector director el vector normal del plano y pasará por A.

$$r:\begin{cases}\vec{n}=(-1,3,-5)=\vec{u}\\ A(0,-1,5)\end{cases}\rightarrow r:\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{-5}$$

99. Página 132

El plano tendrá por vectores directores al vector normal del plano y al vector director de la recta.

$$r:\begin{cases}x=\lambda\\ y=\lambda-1\\ z=2\lambda+1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}P(0,-1,1)\\ \vec{u}=(1,1,2)\end{cases}\qquad\vec{n}=(7,-2,6)$$

$$\pi:\begin{cases}\vec{u}=(1,1,2)\\ \vec{v}=\vec{n}=(7,-2,6)\\ P(0,-1,1)\end{cases}\rightarrow\begin{vmatrix}x & y+1 & z-1\\ 1 & 1 & 2\\ 7 & -2 & 6\end{vmatrix}=10x+8y-9z+17\rightarrow\pi:10x+8y-9z+17=0$$

100. Página 132

$$r:\frac{x+1}{-2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{-1}\rightarrow\begin{cases}P(-1,-1,-3)\\ \vec{u}=(-2,2,-1)\end{cases}\qquad s:\left.\begin{matrix}x+2y-z+4=0\\ 2x-3y+2z+4=0\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}x=-3-t\\ y=4t\\ z=1+7t\end{matrix}\right\}\rightarrow\vec{v}=(-1,4,7)$$

El plano que buscamos pasa por el punto $P(-1,-1,-3)\in r$, y tiene por vectores directores los vectores directores $\vec{u}=(-2,2,-1)$ y $\vec{v}=(-1,4,7)$ de las rectas dadas.

$$\pi:\begin{cases}\vec{u}=(-2,2,-1)\\ \vec{v}=(-1,4,7)\\ P(-1,-1,-3)\end{cases}\rightarrow\pi:\begin{vmatrix}x+1 & y+1 & z+3\\ -2 & 2 & -1\\ -1 & 4 & 7\end{vmatrix}=18x+15y-6z+15\rightarrow\pi:6x+5y-2z+5=0$$

101. Página 132

$$r:\left.\begin{matrix}x-2y=0\\ y-2z+4=0\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}x=-8+4\beta\\ y=-4+2\beta\\ z=\beta\end{matrix}\right\}\rightarrow\vec{u}=(4,2,1)\qquad s:\left.\begin{matrix}x=2+\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=\lambda\end{matrix}\right\}\rightarrow\vec{v}=(1,-1,1)$$

El plano que buscamos pasa por el punto $P(1,1,1)$, y tiene por vectores directores los vectores directores $\vec{u}=(4,2,1)$ y $\vec{v}=(1,-1,1)$ de las rectas dadas.

$$\pi:\begin{cases}\vec{u}=(4,2,1)\\ \vec{v}=(1,-1,1)\\ P(1,1,1)\end{cases}\rightarrow\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-1\\ 4 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=3x-3y-6z+6\rightarrow\pi:x-y-2z+2=0$$

102. Página 133

Calculamos las ecuaciones paramétricas de r_1: $r_1: x = y = z \to \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

Calculamos el punto de corte de r_1 con π.

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \\ 5x-4y+7z+1=0 \end{cases} \to 5\lambda-4\lambda+7\lambda+1=0 \to \lambda=-\frac{1}{8} \to P_1\left(-\frac{1}{8},-\frac{1}{8},-\frac{1}{8}\right)$$

Calculamos las ecuaciones paramétricas de r_2.

$$r_2: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2} \to \beta=\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2} \to \begin{cases} x=1+2\beta \\ y=3\beta \\ z=2\beta \end{cases}$$

Calculamos el punto de corte de r_2 con π.

$$\begin{cases} x=1+2\beta \\ y=3\beta \\ z=2\beta \\ 5x-4y+7z+1=0 \end{cases} \to 5(1+2\beta)-4\cdot 3\beta+7\cdot 2\beta+1=0 \to \beta=\frac{-1}{2} \to P_2\left(0,-\frac{3}{2},-1\right)$$

Calculamos las ecuaciones paramétricas de r_3.

$$r_3: -x+2=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3} \to \mu=\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3} \to \begin{cases} x=2-\mu \\ y=1+2\mu \\ z=3\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2-\mu \\ y=1+2\mu \\ z=3\mu \\ 5x-4y+7z+1=0 \end{cases} \to 5(2-\mu)-4(1+2\mu)+7\cdot 3\mu+1=0 \to \mu=-\frac{7}{8} \to P_3\left(\frac{23}{8},-\frac{3}{4},-\frac{21}{8}\right)$$

$P_3\left(\frac{23}{8},-\frac{3}{4},-\frac{21}{8}\right)$ es punto de corte de r_3 con π.

103. Página 133

Por un lado, $P \in r \to (p_1,p_2,p_3)=(1,1+\lambda,3+2\lambda)$ para algún valor de λ.

$$(p_1,p_2,p_3)=(1,1+\lambda,3+2\lambda) \to \left.\begin{matrix} p_1=1 \\ p_2=1+\lambda \\ p_3=3+2\lambda \end{matrix}\right\}$$

Por otro lado, si *AB* es hipotenusa del triángulo, *AP* y *PB* son los catetos y deben ser perpendiculares por ser triángulo rectángulo.

$$\text{Sea } P(p_1,p_2,p_3) \to \begin{cases} \overrightarrow{AP}=(p_1-2,p_2-1,p_3-1) \\ \overrightarrow{PB}=(-3-p_1,4-p_2,3-p_3) \end{cases} \xrightarrow{\left.\begin{smallmatrix} p_1=1 \\ p_2=1+\lambda \\ p_3=3+2\lambda \end{smallmatrix}\right\}} \begin{cases} \overrightarrow{AP}=(-1,\lambda,2+2\lambda) \\ \overrightarrow{PB}=(-4,3-\lambda,-2\lambda) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{PB} \to \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB}=0 \to (-1,\lambda,2+2\lambda)(-4,3-\lambda,-2\lambda)=-5\lambda^2-\lambda+4=0$$

$$5\lambda^2+\lambda-4=0 \to \begin{cases} \lambda_1=-1 \to P_1(1,0,1) \\ \lambda_2=\frac{4}{5} \to P_2\left(1,\frac{9}{5},\frac{23}{5}\right) \end{cases}$$

104. Página 133

Ecuaciones paramétricas de $r: 2x-2=y+2=\frac{z+1}{4} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1+\frac{\lambda}{2} \\ y=-2+\lambda \\ z=-1+4\lambda \end{array}\right\}$

$$Q(q_1,q_2,q_3) \in r \rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1=1+\frac{\lambda}{2} \\ q_2=-2+\lambda \\ q_3=-1+4\lambda \end{array}\right\}$$

La recta s que pasa por los puntos P y Q tiene vector director $\overrightarrow{PQ}=(q_1-3,q_2-5,q_3+1)$, y como es paralela al plano $\pi: 3x-2y+z+13=0$, dicho vector director $\overrightarrow{PQ}$ es ortogonal al vector normal del plano.

$$\overrightarrow{PQ} \perp \vec{n} \rightarrow (q_1-3,q_2-5,q_3+1)(3,-2,1)=0 \xrightarrow{q\in r} \left(-2+\frac{\lambda}{2},-7+\lambda,4\lambda\right)(3,-2,1)=0 \rightarrow \lambda=-\frac{16}{7}$$

$$\left.\begin{array}{l} q_1=1+\frac{\lambda}{2} \\ q_2=-2+\lambda \\ q_3=-1+4\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1=-\frac{1}{7} \\ q_2=-\frac{30}{7} \\ q_3=-\frac{71}{7} \end{array}\right\}$$

El punto buscado es $Q\left(-\frac{1}{7},-\frac{30}{7},-\frac{71}{7}\right)$.

105. Página 133

Determinamos la posición relativa de ambas rectas.

$$r: (2t-1,1-t,-t) \rightarrow \begin{cases} \vec{u}=(2,-1,-1) \\ P(-1,1,0) \end{cases}$$

$$s: \frac{x+5}{-1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-2}{m} \rightarrow \begin{cases} \vec{v}=(-1,3,m) \\ Q(-5,3,2) \end{cases}$$

Calculamos el rango de la matriz que forman los vectores directores y la matriz formada por estos y el vector que tiene por extremos los puntos calculados.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=7\neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & m \end{pmatrix}=2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & m \\ -4 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & m \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}=2$$

Las rectas son secantes.

Calculamos la recta perpendicular común a las dos rectas, para ello calculamos el punto de intersección entre ambas rectas.

$$r: (2t-1,1-t,-t) \rightarrow \left.\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-1}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y-1=0 \\ x+2z+1=0 \end{array}\right\}$$

$$s: \frac{x+5}{-1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-2}{m} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+y+12=0 \\ mx+z+5m-2=0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-1=0 \\ x+2z+1=0 \\ 3x+y+12=0 \\ mx+z+5m-2=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases} \rightarrow Q(-5,3,2)$$

La recta buscada tiene como vector director el producto vectorial de los vectores directores de las rectas y pasa por el punto de intersección de ambas.

$$t:\begin{cases} \vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=(3-m,1-2m,5) \\ R(-5,3,2) \end{cases} \rightarrow t:(x,y,z)=(-5,3,2)+\lambda(3-m,1-2m,5)$$

Calculamos el plano que las contiene.

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & m \end{vmatrix}=(3-m)x+(1-2m)y+5z+(m+2)$$

106. Página 133

a) Escribimos la ecuación continua de la recta.

$$r:\left.\begin{array}{l} x=1-t \\ y=2+3t \\ z=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{3} \\ z=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+y-5=0 \\ z-5=0 \end{array}\right\}$$

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las tres ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M^*=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus rangos.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \rightarrow \text{Rango}(M)=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}=3 \rightarrow \text{Rango}(M^*)=3$$

$\text{Rango}(M)\neq\text{Rango}(M^*)=3 \rightarrow$ El sistema es incompatible indeterminado. La recta y el plano son paralelos.

b) Calculamos el punto P del plano donde $x=1$ e $y=5$.

$$\pi:3x+y-2z+8=0 \xrightarrow{x=1;y=5} 3+5-2z+8=0 \rightarrow z=8 \rightarrow P(1,5,8).$$

Buscamos la ecuación de la recta s' paralela a $s:\dfrac{x-1}{2}=y=\dfrac{z-1}{3}$ que pasa por P.

$$s':\begin{cases} P(1,5,8) \\ v=(2,1,3) \end{cases} \rightarrow s':(1,5,8)+\lambda(2,1,3).$$

107. Página 133

a) Escribimos la ecuación implícita de la recta.

$$r:(5-2t,t,6+mt)\rightarrow \frac{x-5}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-6}{m}\rightarrow \left.\begin{matrix}\dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{y}{1}\\ \dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{z-6}{m}\end{matrix}\right\}\rightarrow \left.\begin{matrix}x+2y-5=0\\ mx+2z-12-5m=0\end{matrix}\right\}$$

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las tres ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}1&2&0\\ m&0&2\\ 2&1&-1\end{pmatrix}\qquad M^*=\begin{pmatrix}1&2&0&-5\\ m&0&2&12-5m\\ 2&1&-1&2\end{pmatrix}$$

Calculamos sus rangos: $\begin{vmatrix}1&2&0\\ m&0&2\\ 2&1&-1\end{vmatrix}=2m+6$ $\qquad \begin{vmatrix}2&0\\ 0&2\end{vmatrix}=4\neq 0\rightarrow \begin{cases}m=-3\rightarrow \text{Rango}(M)=2\\ m\neq -3\rightarrow \text{Rango}(M)=3\end{cases}$

- Para $m\neq -3\rightarrow \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3\rightarrow$ El sistema es compatible determinado. La recta y el plano se cortan en un punto.

- Para $m=-3\rightarrow \text{Rango}(M)=2$: $M^*=\begin{pmatrix}1&2&0&-5\\ -3&0&2&-3\\ 2&1&-1&2\end{pmatrix}\rightarrow \begin{vmatrix}1&2&-5\\ -3&0&-3\\ 2&1&2\end{vmatrix}=18\neq 0$

$2=\text{Rango}(M)\neq \text{Rango}(M^*)=3\rightarrow$ El sistema es incompatible. La recta y el plano son paralelos.

b) El plano buscado π' tiene como vector director al vector normal de $\pi: 2x+y-z+2=0$ y al vector director de la recta.

$\pi: 2x+y-z+2=0\rightarrow \vec{n}=(2,1,-1)$

$$\pi':\begin{cases}\vec{n}=(2,1,-1)\\ \vec{u}=(-2,1,-3)\\ P(5,0,6)\end{cases}\qquad \begin{vmatrix}x-5&y&z-6\\ 2&1&-1\\ -2&1&-3\end{vmatrix}=-2x+8y+4z-14\rightarrow \pi': x-4y-2z+7=0$$

c) El plano buscado π'' tiene el mismo vector normal que $\pi: 2x+y-z+2=0$ y pasa por el punto de la recta.

$\vec{n}=(2,1,-1)\rightarrow \pi'': 2x+y-z+D=0$ $\qquad \pi'': 2x+y-z+D=0\xrightarrow{P(5,0,6)}10-6+D=0\rightarrow D=-4$

El plano buscado es $\pi'': 2x+y-z-4=0$.

108. Página 133

$$r:\left.\begin{matrix}x+y-z=5\\ 2x+y-2z=2\end{matrix}\right\}\rightarrow \left.\begin{matrix}x=-3+t\\ y=8\\ z=t\end{matrix}\right\}\rightarrow \begin{cases}P(-3,8,0)\\ \vec{u}=(1,0,1)\end{cases}\qquad s:\left.\begin{matrix}x=3+2\lambda\\ y=10+2\lambda\\ z=5+\lambda\end{matrix}\right\}\rightarrow \begin{cases}Q(3,10,5)\\ \vec{v}=(2,2,1)\end{cases}$$

Calculamos el rango de la matriz que forman los vectores directores y de la matriz formada por estos y el vector que tiene por extremos los puntos calculados.

$\begin{vmatrix}1&0\\ 2&2\end{vmatrix}=2\neq 0\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}1&0&1\\ 2&2&1\end{pmatrix}=2$ $\qquad \begin{vmatrix}1&0&1\\ 2&2&1\\ 6&2&5\end{vmatrix}=0\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}1&0&1\\ 2&2&1\\ 6&2&5\end{pmatrix}=2\rightarrow$ Las rectas son secantes.

a) Calculamos el punto de corte.

$$\left.\begin{matrix}3+2\lambda=-3+t\\ 10+2\lambda=8\\ 5+\lambda=t\end{matrix}\right\}\rightarrow \begin{cases}\lambda=-1\\ t=4\end{cases}\rightarrow R(1,8,4)\text{ es el punto de corte.}$$

b) La recta buscada tiene como vector director el producto vectorial de los vectores directores de las rectas y pasa por el punto de corte calculado.

$$t:\begin{cases}\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=(-2,1,2)\\ R(1,8,4)\end{cases}\rightarrow t:(x,y,z)=(1,8,4)+\lambda(-2,1,2)\rightarrow \frac{x-1}{-2}=\frac{y-8}{1}=\frac{z-4}{2}\Bigg\}\rightarrow \begin{matrix}x+2y-17=0\\ x+z-5=0\end{matrix}\Bigg\}$$

c) $$\pi:\begin{cases}\vec{u}=(1,0,1)\\ \vec{v}=(2,2,1)\\ A(3,2,1)\end{cases}\qquad \begin{vmatrix}x-3 & y-2 & z-1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=-2x+y+2z+2\rightarrow \pi:2x-y-2z-2=0$$

109. Página 133

a) $$r:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}\rightarrow\begin{cases}R(2,-1,0)\\ \vec{u}=(1,2,-1)\end{cases}$$

$$\pi:\begin{cases}P(1,1,-1)\\ \vec{u}=(1,2,-1)\\ \overrightarrow{PR}=(1,-2,1)\end{cases}\qquad \begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z+1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=-2y-4z-2\rightarrow \pi:y+2z+1=0$$

b) $$s:\frac{x-1}{1}=\frac{y+7}{2}=\frac{z+5}{3}\rightarrow\begin{matrix}2x-y-9=0\\ 3x-z-8=0\end{matrix}\Bigg\}\rightarrow\begin{cases}S(1,-7,-5)\\ \vec{v}=(1,2,3)\end{cases}$$

Resolvemos el sistema formado por las tres ecuaciones.

$$\begin{matrix}2x-y-9=0\\ 3x-z-8=0\\ y+2z+1=0\end{matrix}\Bigg\}\rightarrow M(3,-3,1)$$

c) $$\begin{matrix}P(1,1,-1)\\ \overrightarrow{PM}=(2,-4,2)\end{matrix}\Bigg\}\rightarrow(x,y,z)=(1,1,-1)+t(2,-4,2)\rightarrow\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+1}{2}\rightarrow r_{PM}:\begin{matrix}2x+y-3=0\\ x-z-2=0\end{matrix}\Bigg\}$$

d) Comprobamos que P pertenece a la recta r_{PM} : $\begin{matrix}2x+y-3=0\\ x-z-2=0\end{matrix}\Bigg\}\xrightarrow{P(1,1,-1)}\begin{matrix}2\cdot1+1-3=0\\ 1-(-1)-2=0\end{matrix}\Bigg\}$

Comprobamos que las rectas r_{PM} y r son secantes calculando el rango de la matriz que forman los vectores directores y de la matriz formada por estos y el vector que tiene por extremos un punto de cada recta.

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-8\neq0\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -4 & 2\end{pmatrix}=2$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -4 & 2\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}=2\qquad \text{Rango}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -4 & 2\end{pmatrix}=\text{Rango}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -4 & 2\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}=2\rightarrow$$ Las rectas son secantes.

Comprobamos que las rectas r_{PM} y s son secantes.

$$r_{PM}:\begin{matrix}P(1,1,-1)\\ \overrightarrow{PM}=(2,-4,2)\end{matrix}\Bigg\}\rightarrow(x,y,z)=(1,1,-1)+t(2,-4,2)\rightarrow\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+1}{2}\rightarrow r_{PM}:\begin{matrix}2x+y-3=0\\ x-z-2=0\end{matrix}\Bigg\}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-8\neq0\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -4 & 2\end{pmatrix}=2\qquad \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -4 & 2\\ 0 & 8 & 4\end{vmatrix}=\neq0\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -4 & 2\\ 0 & 8 & 4\end{pmatrix}=2\,.$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -4 & 2\end{pmatrix}=\text{Rango}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -4 & 2\\ 0 & 8 & 4\end{pmatrix}=2\rightarrow$$ Las rectas son secantes.

110. Página 133

a) $r: \frac{x+2}{3} = -y = \frac{1-z}{2} \rightarrow \frac{x+2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-2} \rightarrow \begin{cases} R(-2,0,1) \\ \vec{u} = (3,-1,-2) \end{cases}$

$\pi: \begin{cases} P(3,-1,1) \\ \vec{u} = (3,-1,-2) \\ \overrightarrow{RP} = (5,-1,0) \end{cases}$ $\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2x-10y+2z-6=0 \rightarrow \pi: x+5y-z+3=0$

b) La recta s es perpendicular a r, es decir, la recta está contenida en el plano π' perpendicular a r que pasa por $P(3,-1,1)$.

$\vec{n} = \vec{u} = (3,-1,-2) \rightarrow \pi': 3x - y - 2z + D = 0 \xrightarrow{P(3,-1,1)} 9+1-2+D=0 \rightarrow D=-8 \rightarrow \pi': 3x-y-2z-8=0$

Como la recta s está contenida en π y π'. Definimos s como intersección de ambos planos.

$s: \left.\begin{matrix} x+5y-z+3=0 \\ 3x-y-2z-8=0 \end{matrix}\right\}$

111. Página 133

a) $r: \left.\begin{matrix} x = 2-\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1} \rightarrow r: \begin{cases} P(2,0,0) \\ \vec{u} = (-1,3,1) \end{cases}$

$s: \frac{x-1}{3} = y-3 = \frac{z+1}{2} \rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{x-1}{3} = y-3 \\ \frac{x-1}{3} = \frac{z+1}{2} \end{matrix}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{matrix} x-3y+8=0 \\ 2x-3z-5=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} Q=(1,3,-1) \\ \vec{v} = (3,1,2) \end{cases}$

Determinamos el plano π que contiene a la recta r y es perpendicular a la recta s.

Tomamos el vector perpendicular a r y s dado por $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (5,5,-10)$.

Entonces $\pi: \begin{cases} P(2,0,0) \\ \vec{n} = (5,5,-10) \\ \vec{u} = (-1,3,1) \end{cases}$

$\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & -10 \end{vmatrix} = -35x-5y-20z+70=0 \rightarrow \pi: 7x+y+4z-14=0$

Calculamos el punto de intersección entre ese plano y la recta s no contenida en él.

$\left.\begin{matrix} x-3y+8=0 \\ 2x-3z-5=0 \\ 7x+y+4z-14=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = \frac{49}{15} \\ z = -\frac{7}{15} \end{cases} \rightarrow R\left(\frac{9}{5}, \frac{49}{15}, -\frac{7}{15}\right)$

La recta que buscamos pasa por R y tiene por vector director a $\vec{n}$.

Es decir, tiene por ecuación $(x,y,x) = \left(\frac{9}{5}, \frac{49}{15}, -\frac{7}{15}\right) + \mu(5,5,-10)$.

b) $r:\left.\begin{matrix}2x-y+2z=3\\ x+2y+2z=0\end{matrix}\right\}\rightarrow r:\left.\begin{matrix}x=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}\lambda\\ y=-\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\lambda\\ z=\lambda\end{matrix}\right\}\rightarrow r:\begin{cases}P\left(\frac{6}{5},-\frac{3}{5},0\right)\\ \vec{u}=\left(-\frac{6}{5},-\frac{2}{5},1\right)\end{cases}$

$s:x=y=z\rightarrow\begin{cases}Q=(0,0,0)\\ \vec{v}=(1,1,1)\end{cases}$

Determinamos el plano π que contiene a la recta r y es perpendicular a la recta s.

Tomamos el vector perpendicular a r y s dado por $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\left(-\frac{7}{5},\frac{11}{5},-\frac{4}{5}\right)$.

Entonces $\pi:\begin{cases}P\left(\frac{6}{5},-\frac{3}{5},0\right)\\ \vec{u}=\left(-\frac{6}{5},-\frac{2}{5},1\right)\\ \vec{n}=\left(-\frac{7}{5},\frac{11}{5},-\frac{4}{5}\right)\end{cases}$. $\begin{vmatrix}x-\frac{6}{5} & y+\frac{3}{5} & z\\ -\frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & 1\\ -\frac{7}{5} & \frac{11}{5} & -\frac{4}{5}\end{vmatrix}=-\frac{47}{25}x-\frac{59}{25}y-\frac{16}{5}z+\frac{21}{25}=0\rightarrow\pi:47x+59y+80z-21=0$

Calculamos el punto de intersección entre ese plano y la recta s no contenida en él.

$\left.\begin{matrix}x=y\\ x=z\\ 47x+59y+80z-21=0\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{cases}x=\frac{7}{62}\\ y=\frac{7}{62}\rightarrow R\left(\frac{7}{62},\frac{7}{62},\frac{7}{62}\right).\\ z=\frac{7}{62}\end{cases}$

La recta que buscamos pasa por R y tiene por vector director a $\vec{n}$

Es decir, tiene por ecuación $(x,y,x)=\left(\frac{7}{62},\frac{7}{62},\frac{7}{62}\right)+\mu\left(-\frac{7}{5},\frac{11}{5},-\frac{4}{5}\right)$.

c) $r:\left.\begin{matrix}3x-5y+z=3\\ 2x-y-z-1=0\end{matrix}\right\}\rightarrow r:\left.\begin{matrix}x=\frac{2}{7}+\frac{6}{7}\lambda\\ y=-\frac{3}{7}+\frac{5}{7}\lambda\\ z=\lambda\end{matrix}\right\}\rightarrow r:\begin{cases}P\left(\frac{2}{7},-\frac{3}{7},0\right)\\ \vec{u}=\left(\frac{6}{7},\frac{5}{7},1\right)\end{cases}$

$s:\left.\begin{matrix}x+2y-3=0\\ y-2z=4\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}x=-5-4t\\ y=4+2t\\ z=t\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{cases}Q=(-5,4,0)\\ \vec{v}=(-4,2,1)\end{cases}$

Determinamos el plano π que contiene a la recta r y es perpendicular a la recta s.

Tomamos el vector perpendicular a r y s dado por $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\left(-\frac{9}{7},-\frac{34}{7},\frac{32}{7}\right)$.

Entonces $\pi:\begin{cases}P\left(\frac{2}{7},-\frac{3}{7},0\right)\\ \vec{u}=\left(\frac{6}{7},\frac{5}{7},1\right)\\ \vec{n}=\left(-\frac{9}{7},-\frac{34}{7},\frac{32}{7}\right)\end{cases}$

$$\begin{vmatrix} x-\frac{2}{7} & y+\frac{3}{7} & z \\ \frac{6}{7} & \frac{5}{7} & 1 \\ -\frac{9}{7} & -\frac{34}{7} & \frac{32}{7} \end{vmatrix} = \frac{398}{49}x-\frac{255}{49}y-\frac{159}{49}z-\frac{223}{49}=0 \to \pi: 398x-255y-159z-223=0$$

Calculamos el punto de intersección entre ese plano y la recta s no contenida en él.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-3=0 \\ y-2z=4 \\ 398x-255y-159z-223=0 \end{array}\right\} \to \begin{cases} x=\frac{1627}{2261} \\ y=\frac{2578}{2261} \\ z=-\frac{3233}{2261} \end{cases} \to R\left(\frac{1627}{2261},\frac{2578}{2261},-\frac{3233}{2261}\right)$$

La recta que buscamos pasa por R y tiene por vector director a $\vec{n}$.

Es decir, tiene por ecuación $(x,y,x)=\left(\frac{1627}{2261},\frac{2578}{2261},-\frac{3233}{2261}\right)+\mu\left(-\frac{9}{7},-\frac{34}{7},\frac{32}{7}\right)$.

112. Página 133

a) $$r: \left.\begin{array}{l} x=4+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1+\lambda \end{array}\right\} \to (x,y,z)=(4,2,1)+\lambda(2,-1,1) \to \begin{cases} P(4,2,1) \\ \vec{u}=(2,-1,1) \end{cases}$$

$$s: \left.\begin{array}{l} x=4+t \\ y=2+3t \\ z=m-2t \end{array}\right\} \to \begin{cases} Q(4,2,m) \\ \vec{v}=(1,3,-2) \end{cases}$$

Calculamos el rango de la matriz que forman los vectores directores y de la matriz formada por estos y el vector que tiene por extremos los puntos calculados $\overrightarrow{PQ}=(0,0,m-1)$.

$$\left.\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=7\neq 0\right\} \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}=2$$

$$\left.\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix}=7(m-1)\right\} \to \begin{cases} m=1 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}=2 \\ m\neq 1 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}=3 \end{cases}$$

Para $m=1$ las rectas se cortan en un punto. Para $m\neq 1$ las rectas se cruzan en el espacio.

b) Calculamos el vector normal $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=(-1,5,7)$

Calculamos el punto de corte entre r y s.

$$\left.\begin{array}{l} 4+t=4+2\lambda \\ 2+3t=2-\lambda \\ 1-2t=1+\lambda \end{array}\right\} \to \begin{cases} t=0 \\ \lambda=0 \end{cases} \to R(4,2,1)$$

La recta buscada pasa por el punto R y tiene vector director $\vec{n}$.

$t: (x,y,z)=(4,2,1)+\lambda(-1,5,7)$

113. Página 134

a) $r:\left.\begin{matrix}x+y+2z+1=0\\x-y+3=0\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}x=-3+\lambda\\y=\lambda\\z=1-\lambda\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{cases}\vec{u}=(1,1,-1)\\P(-3,0,1)\end{cases}$

$s:\left.\begin{matrix}x=m+2\lambda\\y=2-\lambda\\z=-1+3\lambda\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{cases}Q(m,2,-1)\\\vec{v}=(2,-1,3)\end{cases}$

Calculamos el rango de la matriz que forman los vectores directores y el de la matriz formada por estos y el vector que tiene por extremos los puntos calculados $\overrightarrow{PQ}=(m+3,2,-2)$.

$\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}=-3\neq 0\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&3\end{pmatrix}=2$

$\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&-1&3\\m+3&2&-2\end{vmatrix}=2m+2\rightarrow\begin{cases}m=-1\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&3\\m+3&2&-2\end{pmatrix}=2\\m\neq -1\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&3\\m+3&2&-2\end{pmatrix}=3\end{cases}$

Para $m=-1$ las rectas se cortan en un punto.

Para $m\neq -1$ las rectas se cruzan en el espacio.

b) $s:\left.\begin{matrix}x=2\mu\\y=2-\mu\\z=-1+3\mu\end{matrix}\right\}\rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{3}\rightarrow\left.\begin{matrix}x+2y-4=0\\3x-2z-2=0\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{cases}Q(0,2,-1)\\\vec{v}=(2,-1,3)\end{cases}$

Calculamos el vector normal:

$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=(2,-5,-3)$

Calculamos el plano que contiene a r y es perpendicular a s

$\pi:\begin{cases}\vec{n}=(2,-5,-3)\\\vec{u}=(1,1,-1)\\P(-3,0,1)\end{cases}$

$\begin{vmatrix}x+3&y&z-1\\1&1&-1\\2&-5&-3\end{vmatrix}=-8x+y-7z-17=0\rightarrow\pi:8x-y+7z+17=0$

Calculamos el punto de corte entre π y la recta s :

$\left.\begin{matrix}x+2y-4=0\\3x-2z-2=0\\8x-y+7z+17=0\end{matrix}\right\}\rightarrow R\left(-\frac{8}{19},\frac{42}{19},-\frac{31}{19}\right)$

La recta buscada pasa por el punto R y tiene vector director $\vec{n}$.

$(x,y,z)=\left(-\frac{8}{19},\frac{42}{19},-\frac{31}{19}\right)+t(2,-5,-3)$

114. Página 134

a) $r:\left.\begin{matrix}x=1\\ z-y=1\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}x=1\\ y=\mu\\ z=1+\mu\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{cases}P(1,0,1)\\ \vec{u}=(0,1,1)\end{cases}$

$s:\left.\begin{matrix}x=\lambda\\ y=a\\ z=1+\lambda\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{cases}Q(0,a,1)\\ \vec{v}=(1,0,1)\end{cases}$

Calculamos el rango de la matriz que forman los vectores directores y de la matriz formada por estos y el vector que tiene por extremos los puntos calculados $\left(\overrightarrow{PQ}=(-1,a,0)\right)$.

$$\left.\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0\right\}\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=2$$

$$\left.\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\-1&a&0\end{vmatrix}=a-1\right\}\rightarrow\begin{cases}a=1\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\-1&a&0\end{pmatrix}=2\\ a\neq 1\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\-1&a&0\end{pmatrix}=3\end{cases}$$

Para $a=1$ las rectas se cortan en un punto.

Para $a\neq 1$ las rectas se cruzan en el espacio.

b) Calculamos el punto de corte de ambas rectas.

$$\left.\begin{matrix}1=\lambda\\ \mu=1\\ 1+\mu=1+\lambda\end{matrix}\right\}\rightarrow \lambda=\mu=1\rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\rightarrow R(1,1,2)\\ z=2\end{cases}$$

Calculamos el vector perpendicular a ambas rectas $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=(1,1,-1)$.

La recta buscada pasa por el punto R y tiene vector director $\vec{n}$.

$(x,y,z)=(1,1,2)+t(1,1,-1)$

c) $r:\left.\begin{matrix}x=1\\ z-y=1\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}x=1\\ y=\mu\\ z=1+\mu\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{cases}P(1,0,1)\\ \vec{u}=(0,1,1)\end{cases}$ $\qquad s:\left.\begin{matrix}x=\lambda\\ y=0\\ z=1+\lambda\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{cases}Q(0,0,1)\\ \vec{v}=(1,0,1)\end{cases}$

Calculamos el vector normal $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=(1,1,-1)$.

Calculamos el plano que contiene a r y es perpendicular a s.

$$\pi:\begin{cases}P(1,0,1)\\ \vec{u}=(0,1,1)\\ \vec{n}=(1,1,-1)\end{cases}\qquad \begin{vmatrix}x-1&y&z-1\\0&1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=-2x+y-z+3=0\rightarrow \pi: 2x-y+z-3=0$$

Calculamos el punto de corte entre π y la recta s.

$$\left.\begin{matrix}y=0\\ z=1+x\\ 2x-y+z-3=0\end{matrix}\right\}\rightarrow R\left(\frac{2}{3},0,\frac{5}{3}\right)$$

La recta buscada pasa por el punto R y tiene vector director $\vec{n}$.

$(x,y,z)=\left(\frac{2}{3},0,\frac{5}{3}\right)+t(1,1,-1)$

115. Página 134

a) Calculamos el plano π_1 que pasa por P y contiene a r.

$$r:(1+\lambda,\lambda,-\lambda)\rightarrow\begin{cases}R(1,0,0)\\ \vec{u}_r=(1,1,-1)\end{cases}$$

Los vectores de directores del plano son el vector director de la recta y el vector con origen en el punto que P y extremo en R, $\overrightarrow{PR}=(1,-1,0)$.

$$\pi_1:\begin{vmatrix}x & y-1 & z\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=-x-y-2z+1=0\rightarrow\pi_1:x+y+2z-1=0$$

Calculamos el plano π_2 que pasa por P y contiene a s.

$$s:\frac{x-2}{2}=y=\frac{z}{-3}\rightarrow\begin{cases}S(2,0,0)\\ u_s=(2,1,-3)\end{cases}\qquad \overrightarrow{PS}=(2,-1,0)$$

$$\pi_2:\begin{vmatrix}x & y-1 & z\\ 2 & 1 & -3\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=-3x-6y-4z+6=0\rightarrow\pi_2:3x+6y+4z-6=0$$

La recta t buscada es la intersección entre ambos planos.

$$t:\left.\begin{array}{l}x+y+2z-1=0\\ 3x+6y+4z-6=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=-\frac{8}{3}t\\ y=\frac{2}{3}t+1\\ z=t\end{array}\right\}$$

b) Calculamos el plano π_1 que pasa por P y contiene a r.

$$r:\left.\begin{array}{l}-x+2z=2\\ y=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=2\lambda-2\\ y=\frac{1}{2}\\ z=\lambda\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}R\left(-2,\frac{1}{2},0\right)\\ \vec{u}_r=(2,0,1)\end{cases}\qquad \overrightarrow{PR}=\left(-2,\frac{1}{2},-1\right)$$

$$\pi_1:\begin{vmatrix}x+2 & y-\frac{1}{2} & z\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & \frac{1}{2} & -1\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}x+z-1=0\rightarrow\pi_1:x-2z+2=0$$

Calculamos el plano π_2 que pasa por P y contiene a s.

$$s:x-3=-y=\frac{z-1}{-2}\rightarrow\begin{cases}S(3,0,1)\\ u_s=(1,-1,-2)\end{cases}\qquad \overrightarrow{PS}=(3,0,0)$$

$$\pi_2:\begin{vmatrix}x-3 & y & z-1\\ 1 & -1 & -2\\ 3 & 0 & 0\end{vmatrix}=-6y+3z-3=0\rightarrow\pi_2:2y-z+1=0$$

La recta t buscada es la intersección entre ambos planos.

$$t:\left.\begin{array}{l}x-2z+2=0\\ 2y-z+1=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=2t-2\\ y=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\\ z=t\end{array}\right\}$$

c) Calculamos el plano π_1 que pasa por P y contiene a r.

$$r:(-2\lambda,1,2)\rightarrow\begin{cases}R(0,1,2)\\ \vec{u}_r=(-2,0,0)\end{cases}\qquad \overrightarrow{PR}=(-1,1,2)\qquad \pi_1:\begin{vmatrix}x & y-1 & z-2\\ -2 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=4y-2z=0\rightarrow\pi_1:2y-z=0$$

Calculamos el plano π_2 que pasa por P y contiene a s.

$$s:\left.\begin{matrix}3x-y=10\\ y+3z=5\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}x=\dfrac{10}{3}+\dfrac{\lambda}{3}\\ y=\lambda\\ z=\dfrac{5}{3}-\dfrac{\lambda}{3}\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{cases}S\left(\dfrac{10}{3},0,\dfrac{5}{3}\right)\\ u_s=\left(\dfrac{1}{3},1,-\dfrac{1}{3}\right)\end{cases}\qquad \overrightarrow{PS}=\left(\dfrac{7}{3},0,\dfrac{5}{3}\right)$$

$$\pi_2:\begin{vmatrix}x-\dfrac{10}{3} & y & z-\dfrac{5}{3}\\ \dfrac{1}{3} & 1 & -\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{7}{3} & 0 & \dfrac{5}{3}\end{vmatrix}=\dfrac{5}{3}x-\dfrac{4}{3}y-\dfrac{7}{3}z-\dfrac{5}{3}=0\rightarrow\pi_2:5x-4y-7z-5=0$$

La recta t buscada es la intersección entre ambos planos.

$$t:\left.\begin{matrix}2y-z=0\\ 5x-4y-7z-5=0\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}x=1+\dfrac{9}{5}t\\ y=\dfrac{1}{2}t\\ z=t\end{matrix}\right\}$$

116. Página 134

Calculamos el plano π_1 que pasa por A y contiene a r.
$$r:\left.\begin{matrix}x=2+t\\ y=1\\ z=-1+t\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{cases}R(2,1,-1)\\ \vec{u}_r=(1,0,1)\end{cases}$$

Los vectores de directores del plano son el vector director de la recta y el vector con origen en el punto que P y extremo en R, $\overrightarrow{AR}=(2,1,-2)$.

$$\pi_1:\begin{vmatrix}x-2 & y-1 & z+1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=-x+4y+z-1=0\rightarrow\pi_1:x-4y-z+1=0$$

Calculamos el plano π_2 que pasa por A y contiene a s.

$$s:\frac{x-2}{2}=y-5=\frac{z-2}{1}\rightarrow\begin{cases}S(2,5,2)\\ u_s=(2,1,1)\end{cases}\qquad \overrightarrow{AS}=(2,5,1)$$

$$\pi_2:\begin{vmatrix}x-2 & y-5 & z-2\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 5 & 1\end{vmatrix}=-4x+8z-8=0\rightarrow\pi_2:x-2z+2=0$$

La recta t buscada es la intersección entre ambos planos.

$$t:\left.\begin{matrix}x-4y-z+1=0\\ x-2z+2=0\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}x=2\mu-2\\ y=\dfrac{1}{4}\mu-\dfrac{1}{4}\\ z=\mu\end{matrix}\right\}$$

117. Página 134

$$r:\left.\begin{array}{r}x=3-\lambda\\ y=m+\lambda\\ z=2+2\lambda\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}P(3,m,2)\\ \vec{u}=(-1,1,2)\end{cases}\qquad s: x-1=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{3}\rightarrow\begin{cases}Q(1,0,-2)\\ \vec{v}=(1,-1,3)\end{cases}$$

Calculamos el rango de la matriz que forman los vectores directores y de la matriz formada por estos y el vector que tiene por extremos los puntos calculados $\overrightarrow{PQ}=(-2,-m,-4)$.

$$\left.\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=5\neq 0\right\}\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}=2$$

$$\left.\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ -2 & -m & -4\end{vmatrix}=-5m-10\right\}\rightarrow\begin{cases}m=-2\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ -2 & -m & -4\end{pmatrix}=2\\ m\neq -2\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ -2 & -m & -4\end{pmatrix}=3\end{cases}$$

Las rectas son coplanarias cuando no se cruzan en el espacio.

Es decir, cuando $m=-2$. En ese caso $\text{Rango}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}=\text{Rango}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ -2 & 2 & -4\end{pmatrix}=2$. Las rectas son secantes.

118. Página 134

Sean $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$ $\quad A\in\pi: 2x+y+z=0\rightarrow\left.\begin{array}{l}a_1=\lambda\\ a_2=\mu\\ a_3=-2\lambda-\mu\end{array}\right\}\quad B\in r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{3}\rightarrow\left.\begin{array}{l}b_1=1+2t\\ b_2=2-t\\ b_3=3t\end{array}\right\}$

$$M=(0,0,0)=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\frac{a_3+b_3}{2}\right)\rightarrow\left.\begin{array}{r}\lambda+1+2t=0\\ \mu+2-t=0\\ -2\lambda-\mu+3t=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}\lambda=\frac{1}{3}\\ \mu=-\frac{8}{3}\\ t=-\frac{2}{3}\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}A\left(\frac{1}{3},-\frac{8}{3},2\right)\\ B\left(-\frac{1}{3},\frac{8}{3},-2\right)\end{cases}$$

119. Página 134

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las dos ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 5 & -1 & 6\end{pmatrix}\qquad M^*=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -5\\ 5 & -1 & 6 & -3\end{pmatrix}$$

Calculamos el rango de las matrices.

$\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & -1\end{vmatrix}=3\neq 0\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 5 & -1 & 6\end{pmatrix}=\text{Rango}\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -5\\ 5 & -1 & 6 & -3\end{pmatrix}=2\rightarrow$ Los planos son secantes.

Buscamos la recta de intersección en la solución del sistema.

$$\left.\begin{array}{r}2x-y+3z-5=0\\ 5x-y+6z-3=0\end{array}\right\}\rightarrow r:\left.\begin{array}{l}x=-\frac{2}{3}-t\\ y=-\frac{19}{3}+t\\ z=t\end{array}\right\}$$

120. Página 134

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las dos ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$M^*=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -5\\ 0 & -1 & 4 & 4\end{pmatrix}$$

Calculamos el rango de las matrices.

$\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0\rightarrow \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2\rightarrow$ Los planos son secantes.

Si la recta común en la que se cortan pasa por $P(3,0,-1)$, se deben cumplir las ecuaciones de ambos planos.

$$\pi_1: x-2z-5=0\xrightarrow{P(3,0,-1)}3-2\cdot(-1)-5=0$$

$$\pi_2: y-4z-4=0\xrightarrow{P(3,0,-1)}0-4\cdot(-1)-4=0$$

Buscamos la recta de intersección en la solución del sistema.

$$\left.\begin{array}{l}x-2z-5=0\\ y-4z-4=0\end{array}\right\}\rightarrow r:\left.\begin{array}{l}x=5+2t\\ y=4+4t\\ z=t\end{array}\right\}$$

121. Página 134

a) π_1 es paralelo a π y tienen el mismo vector normal.

$$\pi: x-2y-z=0\rightarrow \vec{n}=(1,-2,-1)\rightarrow \pi_1: x-2y-z+D=0$$

π_1 pasa por $P(1,1,1)$.

$$\pi_1: x-2y-z+D=0\xrightarrow{P(1,1,1)}1-2\cdot 1-1+D=0\rightarrow D=2\rightarrow \pi_1: x-2y-z+2=0$$

b) Calculamos el vector director y un punto de la recta.

$$r:(x,y,x)=(t+1,2t,3t)\rightarrow\begin{cases}Q(1,0,0)\\ \vec{u}=(1,2,3)\end{cases}$$

π_2 tiene por vectores directores al vector director de la recta y al vector con origen en el punto que nos da el problema y de extremo el punto hallado.

$$\pi_2:\begin{cases}P(1,1,1)\\ \vec{u}=(1,2,3)\\ \overrightarrow{PQ}=(0,-1,-1)\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-1\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}=x+y-z-1\rightarrow \pi_2: x+y-z-1=0$$

c) $$\left.\begin{array}{l}x-2y-z+2=0\\ x+y-z-1=0\end{array}\right\}\rightarrow s:\left.\begin{array}{l}x=t\\ y=1\\ z=t\end{array}\right\}$$

122. Página 134

Calculamos la ecuación general del plano π_1.

$$\pi_1:(x,y,z)=(3,0,1)+\lambda(-1,1,0)+\mu(2,-1,2)\rightarrow\begin{vmatrix}x-3 & y & z-1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=0\rightarrow\pi_1:2x+2y-z-5=0$$

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las dos ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 4 & a & -2\end{pmatrix}\qquad M^*=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2 & -5\\ 4 & a & -2 & -5\end{pmatrix}$$

Calculamos el rango de las matrices.

$$\begin{vmatrix}2 & -5\\ 4 & -5\end{vmatrix}=10\neq 0\rightarrow \text{Rango}(M^*)=2\qquad \begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & a\end{vmatrix}=2a-8\rightarrow\begin{cases}a=4\rightarrow\text{Rango}(M)=1\\ a\neq 4\rightarrow\text{Rango}(M)=2\end{cases}$$

Para $a=4\rightarrow 1=\text{Rango}(M)\neq\text{Rango}(M^*)=2\rightarrow$ Los planos son paralelos.

Para $a\neq 4\rightarrow\text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2\rightarrow$ Los planos son secantes.

123. Página 134

El plano paralelo a π tiene el mismo vector normal.

$$\pi:-2x+y-z-3=0\rightarrow\vec{n}=(-2,1,-1)\rightarrow\pi':-2x+y-z+D=0$$

π' pasa por $A(1,1,1)$.

$$\pi':-2x+y-z+D=0\xrightarrow{A(1,1,1)}-2\cdot 1+1-1+D=0\rightarrow D=2\rightarrow\pi':-2x+y-z+2=0$$

Determinamos la intersección entre la recta y el plano resolviendo el sistema que forman las tres ecuaciones.

$$r:\frac{x-2}{2}=y=z\rightarrow\left.\begin{matrix}x-2y-2=0\\ x-2z-2=0\end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix}x-2y-2=0\\ x-2z-2=0\\ -2x+y-z+2=0\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-\dfrac{1}{2}\rightarrow P\left(1,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)\\ z=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$ es el punto buscado.

124. Página 134

El plano buscado tiene por vectores directores al vector director de r y al de s y contiene a todos los puntos de la recta s.

$$r:\left.\begin{matrix}x+y-2z=3\\ x-y+3z=-1\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}x=t\\ y=7-5t\\ z=2-2t\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{cases}P(0,7,2)\\ \vec{u}=(1,-5,-2)\end{cases}$$

$$s:\frac{x+2}{-3}=\frac{2-y}{2}=z\rightarrow\frac{x+2}{-3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-0}{1}\rightarrow\begin{cases}Q(-2,2,0)\\ \vec{v}=(-3,-2,1)\end{cases}$$

$$\pi:\begin{cases}\vec{u}=(1,-5,-2)\\ \vec{v}=(-3,-2,1)\\ Q(-2,2,0)\end{cases}\qquad\begin{vmatrix}x+2 & y-2 & z\\ 1 & -5 & -2\\ -3 & -2 & 1\end{vmatrix}=-9x+5y-17z-28\rightarrow\pi:9x-5y+17z+28=0$$ es el plano buscado.

125. Página 134

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las tres ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}3 & -m & 2\\ 1 & 3 & 1-m\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix}3 & -m & 2 & 1-m\\ 1 & 3 & 1-m & 0\\ 2 & -5 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

Calculamos el rango de las matrices.

$$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -5\end{vmatrix}=-11\neq 0 \qquad \begin{vmatrix}3 & -m & 2\\ 1 & 3 & 1-m\\ 2 & -5 & 3\end{vmatrix}=2m^2-14m+20$$

$$2m^2-14m+20=0\to m^2-7m+10=0\to \begin{cases}m=2\\ m=5\end{cases}$$

- Para $m=2\to \text{Rango}(M)=2$

$$M^*=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -1 & 0\\ 2 & -5 & 3 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{F_1=F_2+F_3}\text{Rango}(M^*)=2$$

$\text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2$ ⟶ No hay ecuaciones proporcionales. Los planos se cortan en una recta.

- Para $m=5\to \text{Rango}(M)=2$

$$M^*=\begin{pmatrix}3 & -5 & 2 & -4\\ 1 & 3 & -4 & 0\\ 2 & -5 & 3 & -1\end{pmatrix}\to\begin{vmatrix}3 & -5 & -4\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & -5 & -1\end{vmatrix}=30\to \text{Rango}(M^*)=3$$

$2=\text{Rango}(M)\neq\text{Rango}(M^*)=3$ ⟶ No hay planos paralelos. Los planos se cortan dos a dos.

- Para $\begin{cases}m\neq 2\\ m\neq 5\end{cases}\to \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3\to$ Los planos se cortan en un punto.

126. Página 135

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las tres ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}a & 0 & 1\\ 1 & 0 & b\\ \sqrt{5} & 3 & 2\end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix}a & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & b & 2\\ \sqrt{5} & 3 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

Queremos que el rango de ambas matrices sea 3: $\begin{vmatrix}a & 0 & 1\\ 1 & 0 & b\\ \sqrt{5} & 3 & 2\end{vmatrix}\neq 0\to -3ab+3\neq 0\to ab\neq 1\to b\neq\frac{1}{a}$

Para $b\neq\frac{1}{a}\to \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3\to$ Los planos se cortan en un punto.

Calculamos el punto resolviendo el sistema que forman las ecuaciones de los tres planos.

$$\left.\begin{array}{l}ax+z-1=0\\ x+bz+2=0\\ \sqrt{5}x+3y+2z-3=0\end{array}\right\}\xrightarrow{b\neq\frac{1}{a}}\begin{cases}x=\dfrac{b+2}{ab-1}\\ y=\dfrac{3ab+4a-\sqrt{5}b-2\sqrt{5}-1}{3ab-3}\\ z=\dfrac{1+2a}{1-ab}\end{cases}$$

127. Página 135

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las tres ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & a\\ 3 & 3 & -2\end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -1\\ 2 & 1 & a & 0\\ 3 & 3 & -2 & -b\end{pmatrix}$$

Queremos que el rango de ambas matrices sea 2 y que las ecuaciones no sean proporcionales.

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3\neq 0 \qquad \begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & a\\ 3 & 3 & -2\end{vmatrix}=3a+3=0\rightarrow a=-1$$

Para $a=-1\rightarrow \text{Rango}(M)=2$

$$M^*=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -1\\ 2 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 3 & -2 & -b\end{pmatrix}\rightarrow \text{para } b=1\rightarrow F_3=F_1+F_2\rightarrow \text{Rango}(M^*)=2$$

Los planos se pertenecen al mismo haz cuando $a=-1$ y $b=1$.

128. Página 135

El plano paralelo a π tienen el mismo vector normal.

a) $r:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{3}=z\rightarrow \left.\begin{array}{l}3x-2y-11=0\\ x-2z-3=0\end{array}\right\}$

Hallamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las tres ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0 & -11\\ 1 & 0 & -2 & -3\\ 1 & -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}3 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0\rightarrow \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3\rightarrow \text{La recta y el plano son secantes.}$$

Determinamos la intersección entre la recta y el plano resolviendo el sistema que forman las tres ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}3x-2y-11=0\\ x-2z-3=0\\ x-y+2z+1=0\end{array}\right\}\rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=-7\\ y=-16\rightarrow Q(-7,-16,-5)\\ z=-5\end{array}\right.$$

b) Calculamos las coordenadas del vector director de la recta y uno de sus puntos.

$$r:\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=z\rightarrow \left\{\begin{array}{l}\vec{u}=(2,3,1)\\ R(3,-1,0)\end{array}\right.$$

El plano tiene por vectores directores al vector director de la recta y al vector con origen en el punto que nos da el problema y extremo el punto hallado.

$\overrightarrow{PR}=(1,-2,5)$

$$\begin{vmatrix}x-3 & y+1 & z\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 5\end{vmatrix}=17x-9y-7z-60\rightarrow \pi':17x-9y-7z-60=0$$

129. Página 135

La recta s es perpendicular a r, es decir, la recta está contenida en el plano perpendicular a r que pasa por $O(0,0,0)$.

$$r: x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \rightarrow \begin{cases} \vec{u} = (1,2,3) \\ P(0,0,0) \end{cases}$$

$$\vec{u} = (1,2,3) \rightarrow \vec{n} = (1,2,3) \rightarrow \pi': x + 2y + 3z + D = 0 \xrightarrow{(0,0,0)} D = 0 \rightarrow \pi': x + 2y + 3z = 0$$

La recta s está contenida en π y π'.

Calculamos s como intersección de ambos planos.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: 5x - 4y + z = 0 \\ \pi': x + 2y + 3z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -t \\ y = -t \\ z = t \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x = y \\ x = -z \end{array}\right\}$$

130. Página 135

La recta buscada s pasa por el punto A y tiene vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

$$s: (x,y,z) = (1,1,1) + t(v_1, v_2, v_3)$$

(v_1, v_2, v_3) es perpendicular al vector normal de π.

$$\pi: x - y + z - 3 = 0 \rightarrow \vec{n} = (1,-1,1)$$

$$\vec{v} \perp \vec{n} \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow (v_1, v_2, v_3)(1,-1,1) = v_1 - v_2 + v_3 = 0 \rightarrow v_1 = v_2 - v_3 \rightarrow s: (x,y,z) = (1,1,1) + t(v_2 - v_3, v_2, v_3)$$

Calculamos el vector director de r y uno de sus puntos.

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3 \\ z = \mu \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} v_r = (0,0,1) \\ P(1,3,0) \end{cases}$$

Si r y s se cortan $\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} v_2 - v_3 & v_2 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} v_2 - v_3 & v_2 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2$.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} v_2 - v_3 & v_2 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow v_2 \neq 0$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} v_2 - v_3 & v_2 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} v_2 - v_3 & v_2 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2v_2 + 2v_3 = 0 \rightarrow v_3 = v_2$$

$$s: (x,y,z) = (1,1,1) + t \cdot v_2(0,1,1) = (1,1,1) + \lambda(0,1,1)$$

131. Página 135

a) $r: \left.\begin{array}{l} x = m - 2\lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \vec{u} = (-2,-1,2) \\ R(m,-3,-1) \end{cases}$

$$s: \left.\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ 2x + z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \beta \\ y = 1 - 3\beta \\ z = 1 - 2\beta \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \vec{v} = (1,-3,-2) \\ S(0,1,1) \end{cases}$$

Sean $M=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\ 1 & -3 & -2\end{pmatrix}$ y $M^*=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\ 1 & -3 & -2\\ -m & 4 & 2\end{pmatrix}$ la matriz formada por los vectores directores de cada recta y la matriz formada por estos vectores y el vector $\overrightarrow{RS}=(-m,4,2)$, respectivamente.

$\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=7\neq 0 \qquad \begin{vmatrix}-2 & -1 & 2\\ 1 & -3 & -2\\ -m & 4 & 2\end{vmatrix}=0\to -8m+6=0$

Para $m=\frac{3}{4}\to \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2\to$ Las rectas son secantes.

Para $m\neq\frac{3}{4}\to 2=\text{Rango}(M)\neq\text{Rango}(M^*)=3\to$ Las rectas se cruzan en el espacio.

b) $r:\dfrac{x-\frac{3}{4}}{-2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+1}{2}\to \left.\begin{array}{l} x-2y-\frac{27}{4}=0\\ x+z+\frac{1}{4}=0\end{array}\right\}$ $\qquad s:\left.\begin{array}{l}x+y-z=0\\ 2x+z=1\end{array}\right\}$

Calculamos el punto de intersección de las rectas resolviendo el sistema que forman las cuatro ecuaciones que definen dichas rectas

$$\left.\begin{array}{l} x-2y-\frac{27}{4}=0\\ x+z-\frac{1}{4}=0\\ x+y-z=0\\ 2x+z=1\end{array}\right\}\to\left(\frac{5}{4},-\frac{11}{4},-\frac{3}{2}\right)$$

Tomamos el vector perpendicular a r y s dado por $\vec{u}\times\vec{v}=(-2,-1,2)\times(1,-3,-2)=(8,-2,7)$.

La recta buscada tiene por ecuación $(x,y,x)=\left(\frac{5}{4},-\frac{11}{4},-\frac{3}{2}\right)+\mu(8,-2,7)$

c) $r:\left.\begin{array}{l}x=-1-2\lambda\\ y=-3-\lambda\\ z=-1+2\lambda\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l}\vec{u}=(-2,-1,2)\\ R(-1,-3,-1)\end{array}\right.$ $\qquad s:\left.\begin{array}{l}x+y-z=0\\ 2x+z=1\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l}\vec{v}=(1,-3,-2)\\ S(0,1,1)\end{array}\right.$

Determinamos el plano π que contiene a la recta r y el perpendicular a la recta s.

Tomamos el vector perpendicular a r y s dado por $\vec{u}\times\vec{v}=(-2,-1,2)\times(1,-3,-2)=(8,-2,7)$.

Entonces $\pi:\left\{\begin{array}{l}R(-1,-3,-1)\\ \vec{n}=(8,-2,7)\\ \vec{u}=(-2,-1,2)\end{array}\right.$. $\qquad \pi:\begin{vmatrix}x+1 & y+3 & z+1\\ 8 & -2 & 7\\ -2 & -1 & 2\end{vmatrix}=0\to\pi: x-10y-4z-33=0$

Calculamos el punto de intersección entre ese plano y la recta s no contenida en él.

$$\left.\begin{array}{l}x+y-z=0\\ 2x+z=1\\ x-10y-4z-33=0\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l}x=\frac{47}{39}\\ y=-\frac{34}{13}\\ z=-\frac{55}{39}\end{array}\right.\to Q\left(\frac{47}{39},-\frac{34}{13},-\frac{55}{39}\right).$$

La recta que buscamos pasa por Q y tiene por vector director a $\vec{n}$

Es decir, tiene por ecuación $(x,y,x)=\left(\frac{47}{39},-\frac{34}{13},-\frac{55}{39}\right)+\mu(8,-2,7)$.

132. Página 135

Calculamos el punto de intersección de π y la recta r resolviendo el sistema que forman las tres ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}3y-x=6\\ y-z=3\\ x+y-z+6=0\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-9\\ y=-1\rightarrow P(-9,-1,-4)\\ z=-4\end{array}\right.$$

Calculamos el vector director de la recta s.

$$s:(1+2\lambda,1-6\lambda,-26\lambda)\rightarrow v_s=(2,-6,-26)$$

La recta buscada tiene vector director v_s y pasa por P.

$$(x,y,z)=(-9,-1,-4)+\lambda(2,-6,-26)$$

Sus ecuaciones paramétricas son $\left.\begin{array}{l}x=-9+2\lambda\\ y=-1-6\lambda\\ z=-4-26\lambda\end{array}\right\}$.

133. Página 135

a) Hallamos la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las tres ecuaciones.

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&1&-4\end{pmatrix}\qquad M^*=\begin{pmatrix}1&0&0&-2\\0&0&1&-3\\1&1&-4&7\end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&1&-4\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&-4\end{vmatrix}=-1\neq 0\rightarrow \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=3\rightarrow$ La recta y el plano se cortan en un punto.

Calculamos el punto de intersección de la recta π y r resolviendo el sistema que forman las tres ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}x=2\\ z=3\\ x+y-4z+7=0\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=2\\ y=3\rightarrow M(2,3,3)\\ z=3\end{array}\right.$$

b) Calculamos el vector director de la recta y uno de sus puntos.

$$r:\left.\begin{array}{l}x=2\\ y=t\\ z=3\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}R(2,0,3)\\ v_r=(0,1,0)\end{array}\right.$$

El plano buscado tiene vectores directores v_r y $\overrightarrow{PR}$, y pasa por R.

$$\overrightarrow{PR}=(-3,2,-2)$$

$$\begin{vmatrix}x-2&y&z-3\\0&1&0\\-3&2&-2\end{vmatrix}=-2x+3z-5\rightarrow\pi':2x-3z+5=0$$

c) Sea $Q(q_1,q_2,q_3)\in r\rightarrow\left.\begin{array}{l}q_1=2\\ q_2=t\\ q_3=3\end{array}\right\}$.

El vector director de la recta buscada es $\overrightarrow{PQ}=(-1,t+2,2)$ y es perpendicular al vector normal del plano π.

$$\pi:x+y-4z+7=0\rightarrow\vec{n}=(1,1,-4)$$

$\overrightarrow{PQ}\perp\vec{n}\rightarrow\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}=0\rightarrow(-1,t+2,2)\cdot(1,1,-4)=t-7=0\rightarrow t=7\rightarrow Q(2,7,3)$ es el punto buscado.

134. Página 135

a) $r: x+1=y-2=\frac{z-3}{4} \rightarrow \begin{cases} \vec{u}=(1,1,4) \\ P(-1,2,3) \end{cases}$

$s: \begin{cases} \vec{v}=(v_1,v_2,v_3) \\ A(1,2,1) \end{cases}$

Sean $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ y $M^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ la matriz formada por los vectores directores de cada recta y la matriz formada por estos vectores y el vector $\overrightarrow{AP}=(-2,0,2)$.

Si las rectas son secantes $\rightarrow \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0 \rightarrow -2v_1+10v_2-2v_3=0 \rightarrow -v_1+5v_2-v_3=0$$

Como además son perpendiculares, sus vectores directores deben ser perpendiculares.

$$v_r \perp \vec{v} \rightarrow v_r \cdot \vec{v}=0 \rightarrow (1,1,4)\cdot(v_1,v_2,v_3)=v_1+v_2+4v_3=0$$

$$\left.\begin{matrix} v_1+v_2+4v_3=0 \\ -v_1+5v_2-v_3=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} v_1=-\frac{7}{2}v_3 \\ v_1=-\frac{1}{2}v_3 \\ v_3=v_3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \vec{v}=v_3\left(-\frac{7}{2},-\frac{1}{2},1\right)=\frac{v_3}{2}(-7,-1,2)$$

La ecuación de la recta buscada es: $s:(1,2,1)+\frac{v_3}{2}(-7,-1,2) \rightarrow s:(1,2,1)+\beta(-7,-1,2)$.

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

Determinamos una recta que pase por un punto de *r* y otro de *s*:

$P(-1,2,3)$ y $A(1,2,1) \rightarrow \overrightarrow{AP}=(-2,0,2)$

Una recta que corta a *r* y a *s* es: $(-1,2,3)+t(-2,0,2)$.

135. Página 135

Sea $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ el vector director de la recta s buscada.

Si s es paralela a $r_3: x=-y=z$

$r_3: x=-y=z \rightarrow r_3: \frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1} \rightarrow \begin{cases} R_3(0,0,0) \\ \vec{v}_{r_3}=(1,-1,1) \end{cases}$ es el vector director de r_3.

$$\vec{v}_s=m\vec{v}_{r_3}=m(1,-1,1) \rightarrow s:(s_1,s_2,s_3)+t\cdot m(1,-1,1) \rightarrow s:(s_1,s_2,s_3)+\eta(1,-1,1)$$

La recta buscada s corta a r_1.

$$r_1: \left.\begin{matrix} x=0 \\ z=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x=0 \\ y=\beta \\ z=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} R_1(0,0,1) \\ \vec{v}_{r_1}=(0,1,0) \end{cases}$$

Sean $M=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $M^*=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ s_1 & s_2 & s_3-1\end{pmatrix}$ la matriz formada por los vectores directores de cada recta y la matriz formada por estos vectores y el vector $\overrightarrow{R_1S}=(s_1,s_2,s_3-1)$.

Si las rectas son secantes $\rightarrow \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2$.

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ s_1 & s_2 & s_3-1\end{vmatrix}=0\rightarrow -s_1+s_3-1=0\rightarrow s_3=s_1+1$$

La recta buscada s corta a r_2: $r_2:(2\lambda-3,1,\lambda)\rightarrow \left.\begin{array}{l}x=2\lambda-3\\ y=1\\ z=\lambda\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}R_2(-3,1,0)\\ \vec{v}_{r_1}=(2,0,1)\end{cases}$

Sean $M=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $M^*=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ s_1+3 & s_2-1 & s_3\end{pmatrix}$ la matriz formada por los vectores directores de cada recta y la matriz formada por estos vectores y el vector $\overrightarrow{R_2S}=(s_1+3,s_2-1,s_3)$.

Si las rectas son secantes $\rightarrow \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2$.

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ s_1+3 & s_2-1 & s_3\end{vmatrix}=0\rightarrow -s_1+s_2+2s_3-4=0\rightarrow s_2=s_1-2s_3+4$$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones que hemos ido obteniendo.

$$\left.\begin{array}{l}s_3=s_1+1\\ s_2=s_1-2s_3+4\end{array}\right\}\rightarrow S(t,-t+2,t+1)$$

Tomamos el valor de $t=0\rightarrow s:(0,2,1)+\eta(1,-1,1)$.

136. Página 135

Sea $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ el vector director de la recta s buscada.

Si $P\in s\rightarrow s:(1,-1,2)+\lambda(v_1,v_2,v_3)$

La recta buscada s es paralela al plano $\pi: x-3y+2z-1=0$.

Sea $\vec{n}=(1,-3,2)$ el vector normal al plano $\rightarrow \vec{n}\cdot\vec{v}=0\rightarrow(1,-3,2)(v_1,v_2,v_3)=v_1-3v_2+2v_3=0\rightarrow v_1=3v_2-2v_3$.

La recta buscada s es secante a la recta r.

$$r:\left.\begin{array}{l}z-x=1\\ y=2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=\beta\\ y=2\\ z=\beta+1\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}R(0,2,1)\\ \vec{v}_r=(1,0,1)\end{cases}$$

Sean $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ v_1 & v_2 & v_3\end{pmatrix}$ y $M^*=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ v_1 & v_2 & v_3\\ -1 & 3 & -1\end{pmatrix}$ la matriz formada por los vectores directores de cada recta y la matriz formada por estos vectores y el vector $\overrightarrow{PR}=(-1,3,-1)$

Si las rectas son secantes $\rightarrow \text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ v_1 & v_2 & v_3\\ -1 & 3 & -1\end{vmatrix}=0\rightarrow 3v_1-3v_3=0\rightarrow v_1=v_2$$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones que hemos ido obteniendo.

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = 3v_2 - 2v_3 \\ v_1 = v_2 \end{array}\right\} \to \vec{v} = (m,m,m) = m(1,1,1)$$

$s:(1,-1,2)+\lambda(v_1,v_2,v_3) \to s:(1,-1,2)+\lambda m(1,1,1) \to s:(1,-1,2)+\mu(1,1,1)$ es la recta buscada.

137. Página 135

Llamamos $P(p_1,p_2,p_3)$ al punto buscado.

Si $P \in r \to \left.\begin{array}{l} p_1 - p_3 = 0 \\ p_2 + p_3 = -1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} p_1 = p_3 \\ p_2 = -1 - p_3 \\ p_3 = \alpha \end{array}\right\} \to P(\alpha,-1-\alpha,\alpha)$

$P(\alpha,-1-\alpha,\alpha)$ determina con $s: \left.\begin{array}{l} 2x+z=-2 \\ x+y=0 \end{array}\right\}$ un plano π.

$$s: \left.\begin{array}{l} 2x+z=-2 \\ x+y=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-2-2\lambda \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} S(0,0,-2) \\ \vec{v}_s=(1,-1,-2) \end{array}\right.$$

$$\pi: \left\{\begin{array}{l} S(0,0,-2) \\ \vec{v}_s=(1,-1,-2) \\ \overrightarrow{PS}=(-\alpha,1+\alpha,-2-\alpha) \end{array}\right. \to \begin{vmatrix} x & y & z+2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -\alpha & 1+\alpha & -2-\alpha \end{vmatrix} = (3\alpha+4)x+(3\alpha+2)y+z+2 \quad \pi:(3\alpha+4)x+(3\alpha+2)y+z+2=0$$

El plano $\pi:(3\alpha+4)x+(3\alpha+2)y+z+2=0$ contiene a la recta $t: \left.\begin{array}{l} x=-2 \\ y-z=0 \end{array}\right\}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3\alpha+4 & 3\alpha+2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3\alpha+4 & 3\alpha+2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $r \subset \pi \to \text{Rango}(M) = \text{Rango}(M^*) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3\alpha+4 & 3\alpha+2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to 3\alpha+3=0 \to \alpha=-1 \to M^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to R(M^*)=2$$

$P(\alpha,-1-\alpha,\alpha) \to P(-1,0,-1)$ es el punto pedido.

138. Página 135

Estudiamos si el plano contiene a la recta: $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \\ 6 & -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\text{Rango}(M) = \text{Rango}(M^*) = 2 \to$ Sistema compatible indeterminado. El plano pertenece al haz definido por la recta.

Escribimos el plano como combinación lineal de los planos que definen a la recta.

$$6x-4y+z-1 = \alpha(2x-y+z-3)+\beta(y+2z-8) \to \left.\begin{array}{l} 6x = 2\alpha x \\ -4y = -\alpha y + \beta y \\ z = \alpha z + 2\beta y \\ -1 = -3\alpha - 8\beta \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \end{array}\right.$$

Así $6x-4y+z-1 = 3(2x-y+z-3)-(y+2z-8)$.

139. Página 135

Estudiamos la posición relativa de ambos planos: $M=\begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $M^*=\begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 1 & -8 \end{pmatrix}$

$\text{Rango}(M)=\text{Rango}(M^*)=2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. Los planos son secantes.

Las caras de un cubo forman ángulos de 90º: podremos apoyar el cubo si los planos secantes son ortogonales.

Sean n_1 y n_2 los vectores normales de los planos $\pi_1 \perp \pi_2 \rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_1=(2,7,-1) \\ \vec{n}_2=(-3,1,1) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (2,7,-1)\cdot(-3,1,1) = -6+7-1=0 \rightarrow$ Podemos apoyar el cubo en ambos planos a la vez.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 136

Con tres puntos no alineados y el plano que definen, con un cuarto punto pueden pasar dos cosas:

a) El punto pertenece al plano definido por los tres primeros. Entonces, cualquier plano formado por tres de los cuatro puntos es coincidente con el que ya tenemos y cualquier recta que pase por dos de los puntos queda dentro del plano.

b) El punto no pertenece al plano definido por los tres primeros y, entonces, cada tres puntos definen planos no coincidentes. La posición relativa entre planos no coincidentes se define en el espacio y no es el plano y por eso necesitamos una tercera dimensión.

2. Página 136

Si tres patas definen el plano donde se apoya la mesa, cuantas más patas extra tengamos, más fácil es que una de ellas esté fuera de dicho plano y, por tanto, la mesa tendrá más posibilidades de estar coja.

3. Página 136

Siempre vamos a necesitar un punto más que el número de dimensiones de tengamos. Si pudiéramos ver en cuatro dimensiones necesitaríamos cinco puntos y si fueran cinco dimensiones, necesitaríamos seis puntos.

4. Página 136

Cualquier objeto que se apoye en más de tres puntos: las ruedas de un vehículo, las patas de un baúl, etc.