Determinantes

2

ACTIVIDADES

1. Página 36

a) $|A|=\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 5 & -4\end{vmatrix}=(-3)\cdot(-4)-2\cdot 5=12-10=2$

b) $|B|=\begin{vmatrix}2 & 0 & 5\\ 1 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=2\cdot 1\cdot 1+0\cdot(-2)\cdot(-1)+5\cdot 1\cdot 1-5\cdot 1\cdot(-1)-0\cdot 1\cdot 1-2\cdot(-2)\cdot 1=16$

2. Página 36

a) $\begin{vmatrix}4 & 2x\\ 1 & -2\end{vmatrix}=4\cdot(-2)-2x\cdot 1=-8-2x\rightarrow -2x-8=0\rightarrow x=-4$

b) $\begin{vmatrix}3 & -2 & -3\\ 2 & x & -5\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=3\cdot x\cdot 2+(-2)\cdot(-5)\cdot 1+(-3)\cdot 2\cdot 1-(-3)\cdot x\cdot 1-(-2)\cdot 2\cdot 2-3\cdot(-5)\cdot 1=9x+27\rightarrow 9x+27=0\rightarrow x=-3$

3. Página 37

a) $\begin{vmatrix}-1 & 7 & 4\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=(-1)\cdot 1\cdot 1+7\cdot(-2)\cdot 2+4\cdot 2\cdot(-1)-4\cdot 1\cdot 2-7\cdot 2\cdot 1-(-1)\cdot(-2)\cdot(-1)=-57$

b) $|A| = |A^t| = -57$

c) $|2A| = 2^3\ |A| = 8\cdot(-57) = -456$

d) $|-A| = (-1)^3\ |A| = -(-57) = 57$

4. Página 37

a) $\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^t \rightarrow \begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=-\frac{2}{3}$

b) $\begin{vmatrix}a & 3b\\ c & 3d\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=-2$

c) $\begin{vmatrix}5b & 5d\\ 3a & 3c\end{vmatrix}=3\cdot 5\cdot\begin{vmatrix}b & d\\ a & c\end{vmatrix}=3\cdot 5\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix}=3\cdot 5\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=10$

5. Página 38

$$\begin{vmatrix}3a & b+2a & c-a\\ 3d & e+2d & f-d\\ 3g & h+2g & i-g\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}a & b+2a & c-a\\ d & e+2d & f-d\\ g & h+2g & i-g\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=3\cdot(-2)=-6$$

6. Página 38

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_2=F_2-\frac{1}{2}F_1 \\ F'_3=F_3+F_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \overset{F'_3=F_3+F_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot(-1) = -4$$

$$\begin{vmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & \frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_2=F_2-\frac{1}{4}F_1 \\ F'_3=F_3+\frac{1}{2}F_1}}{=} \begin{vmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

7. Página 39

$$\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ a & 3 & a \\ a & 5 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & 2 \\ a & a & 4 \\ a & a & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ a & 3 & 4 \\ a & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0+0+0+ \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ a & 3 & 4 \\ a & 5 & 6 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_3=F_3-F_2 \\ F'_2=F_2-F_1}}{=} \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

8. Página 39

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 21 & 23 \\ 23 & 12 & -14 \\ 30 & 43 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 7\cdot(-7)\cdot 10 + 8\cdot 3\cdot 1 = -466$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot(-2)\cdot 4 = 10 \qquad |A|\cdot|B| = -466\cdot 10 = -4660$$

$$|A\cdot B| = \begin{vmatrix} -16 & 21 & 23 \\ 23 & 12 & -14 \\ 30 & 43 & 1 \end{vmatrix} = (-16)\cdot 12\cdot 1 + 21\cdot(-14)\cdot 30 + 23\cdot 23\cdot 43 - 23\cdot 12\cdot 30 - 21\cdot 23\cdot 1 - (-16)\cdot(-14)\cdot 43 = -4660$$

9. Página 40

a) $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_2=F_2-2F_1 \\ F'_3=F_3-3F_1 \\ F'_4=F_4-2F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{F''_3=F'_3-\frac{4}{3}F_2 \\ F''_4=F'_4-F_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \overset{F'''_4=F''_4+6F''_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)\cdot 9 = -18$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_2=F_2-2F_1 \\ F'_3=F_3-F_1 \\ F'_4=F_4-3F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{vmatrix} \overset{F''_4=F'_4-\frac{2}{3}F'_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{3} & -\frac{16}{3} \end{vmatrix} = 0$$

10. Página 40

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{F_3\leftrightarrow F_4}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ a & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_2=F_2-F_1 \\ F'_3=F_3-F_1 \\ F'_4=F_4-aF_1}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -1-a & -1-a & 1-2a \end{vmatrix} \overset{\substack{F''_3=F'_3+2F'_2 \\ F''_4=F'_4+(1+a)F'_2}}{=}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -5-5a & 7+4a \end{vmatrix} \overset{F'''_4 = F''_4 - \left(\frac{5+5a}{8}\right)F''_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2-a \end{vmatrix} = -1\cdot 1\cdot(-8)\cdot(2-a)$$

Por tanto, el determinante será 0 si y solo si $a = 2$.

11. Página 41

a) $\alpha_{21} = 3$

b) $\alpha_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 18 = -4$

12. Página 41

a) $A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot 1 = -1$

b) $A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -(8\cdot(-1) - 2\cdot(-2)) = 4$

13. Página 42

a) $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5A_{11} + (-4)A_{12} + 0A_{13} = 5\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-4)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 5(3-2) + 4(-12) = -43$

$\begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 15 - 10 - 48 = -43$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3A_{11} - 2A_{12} + 1A_{13} = 3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$= 3(8+6) + 2(4-6) + (-2-4) = 32$

$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 12 - 2 - 4 + 18 + 8 = 32$

14. Página 42

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 1A_{11} + (-1)A_{13} + 2A_{14} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} - (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$

$= -43 - 21 - 2\cdot 4 = -72$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} = (-1)A_{11} + 2A_{21} + 7A_{41} =$

$= (-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \\ -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 10 & 4 \\ -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} + 7(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix} =$

$= (-1)\cdot 175 + 2\cdot(-1)^3\cdot(-287) + 7\cdot(-1)^5\cdot(-77) = 938$

15. Página 43

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \overset{F'_2=F_2-F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

16. Página 43

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 5 & 7 \\ 0 & 2 & a & 6 \\ 0 & 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

17. Página 44

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \qquad \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \qquad \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \qquad \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \qquad \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Y cada uno de los elementos de la matriz es un menor de orden 1.

18. Página 44

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -6+4 = -2 \neq 0$; por tanto, el rango de A es 2.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4+4 = 8 \neq 0$; por tanto, el rango de B es 2.

19. Página 45

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1 = 2 \neq 0 \rightarrow$ Rango ≥ 2

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Rango < 3

Por tanto, el rango de la matriz A es 2.

b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2+3 = 5 \neq 0 \rightarrow$ Rango ≥ 2

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 12 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Rango < 3

Por tanto, el rango de la matriz B es 2.

20. Página 45

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+2 = 3 \neq 0 \rightarrow$ Rango ≥ 2

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & m \end{vmatrix} = m-15+4-10+2m-3 = 3m-24 \rightarrow 3m-24=0 \rightarrow m=8$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6-5m+4-10+12-m = -6m+12 \rightarrow -6m+12=0 \rightarrow m=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & m \\ 5 & m & 6 \end{vmatrix} = 18+10m+4m-30-24-m^2 = -m^2+14m-36 \rightarrow -m^2+14m-36=0 \rightarrow m = 7 \pm \sqrt{13}$$

Ningún valor de m anula los tres menores de orden 3 simultáneamente, luego el rango de A es 3.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1 \neq 0 \rightarrow$ Rango ≥ 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 1+2m+m-1-2-m^2 = -m^2+3m-2 \rightarrow -m^2+3m-2=0 \rightarrow m=1 \text{ y } m=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 1 \end{vmatrix} = m+m-1+m^2-m^2(m-1)-1-m = -m^3+2m^2+m-2 \rightarrow -m^3+2m^2+m-2=0 \rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=1 \\ m=2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 1 \end{vmatrix} = m+2(m-1)+m-m(m-1)-2-m = -m^2+4m-4 \rightarrow -m^2+4m-4=0 \rightarrow m=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m-1 & m & 1 \end{vmatrix} = 1+2m(m-1)+m-(m-1)-2-m^2 = m^2-2m \longrightarrow m^2-2m=0 \rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=2 \end{cases}$$

Solo el valor $m = 2$ anula los cuatro menores de orden 3 simultáneamente, luego el rango de B es 3 para todo valor $m \neq 2$, y para $m = 2$, el rango de B es 2.

21. Página 46

a) $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

22. Página 46

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 16 & -16 \\ 2 & -16 & 10 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 16 & -16 & 6 \\ -16 & 10 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 16 & -16 & 6 \\ -16 & 10 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 40+96+72-120-64-36 = -12 \qquad A \cdot \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = -12 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

23. Página 47

a) $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \longrightarrow \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 & -7 \\ -1 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{F_4 \leftrightarrow F_1}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & -1 & -7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -(4+3+6-16) = 3$$

$$\text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & -4 & 4 & -3 \\ 4 & -13 & 10 & -9 \\ -4 & 31 & -25 & 24 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Adj}(B)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & -4 \\ -3 & -4 & -13 & 31 \\ 3 & 4 & 10 & -25 \\ -3 & -3 & -9 & 24 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & -4 \\ -3 & -4 & -13 & 31 \\ 3 & 4 & 10 & -25 \\ -3 & -3 & -9 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ -1 & -\frac{4}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{31}{3} \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{25}{3} \\ -1 & -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

24. Página 47

a) $|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & m & 3\\ 4 & 1 & -m\end{vmatrix}=-m^2+4m-3 \longrightarrow -m^2+4m-3=0\rightarrow\begin{cases}m=1\\ m=3\end{cases}\longrightarrow$ *A* es invertible si y solo si $m\neq 1$ y $m\neq 3$.

b) $|B|=\begin{vmatrix}2 & -1 & m\\ m & 3 & 4\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=12-12-m^2-9m+2m+8=-m^2-7m+8 \longrightarrow -m^2-7m+8=0\rightarrow\begin{cases}m=1\\ m=-8\end{cases}\longrightarrow$ *B* es invertible si y solo si $m\neq 1$ y $m\neq -8$.

SABER HACER

25. Página 48

a) $\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1\\ 1 & 1+x & 1\\ 1 & 1 & 1+x\end{vmatrix}=(1+x)^3+1+1-(1+x)-(1+x)-(1+x)=x^3+3x^2 \longrightarrow x^3+3x^2=0\rightarrow\begin{cases}x=-3\\ x=0\end{cases}$

b) $\begin{vmatrix}x & 0 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & x\end{vmatrix}=x^2-1 \longrightarrow x^2-1=0\rightarrow\begin{cases}x=-1\\ x=1\end{cases}$

c) $\begin{vmatrix}x & 1 & 0\\ 1 & x & -1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x-1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 0\\ x & 2 & 1\end{vmatrix}=x^2-3+2(x-1)+4-4x=x^2-2x-1 \longrightarrow x^2-2x-1=-2\rightarrow x^2-2x+1=0\rightarrow x=1$

26. Página 48

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ a+d & b+e & c+f\\ 2d & 2e & 2f\end{vmatrix}=\frac{2}{3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a+d & b+e & c+f\\ d & e & f\end{vmatrix}=\frac{2}{3}\left(\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ d & e & f\\ d & e & f\end{vmatrix}\right)=\frac{2}{3}\cdot(2+0)=\frac{4}{3}$$

27. Página 49

$$\begin{vmatrix}-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\ 1 & 9 & -1 & \cdots & -1 & -1\\ 1 & 1 & 9 & \ldots & -1 & -1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 9 & -1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 9\end{vmatrix}\overset{\substack{F'_2=F_2+F_1\\ F'_3=F_3+F_1\\ \cdots\cdots\\ F'_n=F_n+F_1}}{=}\begin{vmatrix}-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\ 0 & 8 & -2 & \cdots & -2 & -2\\ 0 & 0 & 8 & \cdots & -2 & -2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 8 & -2\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 8\end{vmatrix}=-1\cdot 8\cdot 8\cdot\ldots\cdot 8=-8^{n-1}$$

$|A_n|=-8^{n-1}\longrightarrow |A_6|=-8^{6-1}=-32\,768$

28. Página 49

$$\begin{vmatrix}m & m-1 & m(m-1)\\ m & 1 & m\\ m & 1 & m-1\end{vmatrix}=m(m-1)+m^2(m-1)+m^2(m-1)-m^2(m-1)-m(m-1)^2-m^2=m^2-2m=m(m-2)$$

$m(m-2)=0\rightarrow\begin{cases}m=0\\ m=2\end{cases}$ Si $m\neq 0$ y $m\neq 2$, el rango de la matriz *A* es 3.

Si $m=0\longrightarrow A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, que tiene rango 2.

Si $m=2\longrightarrow A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, que tiene rango 2.

29. Página 50

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \to \text{Rango} \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ k & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -9+3k-9+9 = 3k-9 \;\to\; 3k-9=0 \to k=3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 9+3k \to 9+3k=0 \to k=-3$$

Como no hay ningún valor que anule simultáneamente todos los menores de orden 3, el rango de *A* es 3.

30. Página 50

$$|A| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = m(m-1)^2+1-m-(m-1) = m^3-2m^2-m+2 \;\to\; m^3-2m^2-m+2=0 \to \begin{cases} m=-1 \\ m=1 \\ m=2 \end{cases}$$

Por tanto, *A* es invertible si y solo si $m \neq -1$, $m \neq 1$ y $m \neq 2$.

31. Página 50

Tomamos $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot X = B \to A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \to X = A^{-1}B$$

Vamos a calcular A^{-1}:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,\; A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

32. Página 51

Consideramos $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$AX+B=C^2 \to AX=C^2-B \to A^{-1}AX = A^{-1}(C^2-B) \;\to\; X = A^{-1}(C^2-B)$$

$$|A| = -3 \text{ y } A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(C^2-B) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & -6 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & -7 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 19 & -22 & -4 \\ -26 & 23 & -1 \\ -50 & 44 & -10 \end{pmatrix}$$

33. Página 51

$$AX+X=B \rightarrow AX+IX=B \rightarrow (A+I)X=B \rightarrow (A+I)^{-1}(A+I)X=(A+I)^{-1}B \rightarrow X=(A+I)^{-1}B$$

$$X=(A+I)^{-1}B=\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 20 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 20 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 20 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 15 & 15 \\ -20 & 55 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES FINALES

34. Página 52

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-4 \qquad |B|=\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=-11$$

$$A+B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A+B|=\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-5$$

$$A-B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow |A-B|=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=-25$$

35. Página 52

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=5 \qquad |B|=\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow |A\cdot B|=\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-15=|A|\cdot|B|$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 16 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow |B\cdot A|=\begin{vmatrix} 9 & 16 \\ -3 & -7 \end{vmatrix}=-15=|B|\cdot|A|$$

36. Página 52

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=1$

c) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ b & -3 \end{vmatrix}=-3a-2b$

e) $\begin{vmatrix} a-4 & 2 \\ 6 & a-3 \end{vmatrix}=a^2-7a$

b) $\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -9 & 3 \end{vmatrix}=0$

d) $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & x \end{vmatrix}=0$

f) $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ 1-a & a+1 \end{vmatrix}=2a^2+2$

37. Página 52

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & a \end{vmatrix}=4a+6$, $4a+6=26 \rightarrow a=5$

b) $\begin{vmatrix} b & 4 \\ 3b & -3 \end{vmatrix}=-15b$, $-15b=45 \rightarrow b=-3$

c) $\begin{vmatrix} c & 3c-1 \\ 4 & c \end{vmatrix}=c^2-12c+4$, $c^2-12c+4=32 \rightarrow c=-2$ o $c=14$

d) $\begin{vmatrix} \frac{1}{d} & \frac{-2}{d} \\ 3 & 8 \end{vmatrix}=\frac{14}{d}$, $\frac{14}{d}=7 \rightarrow d=2$

e) $\begin{vmatrix} \sqrt{e} & 2 \\ 2 & \sqrt{e-6} \end{vmatrix}=\sqrt{e^2-6e}-4$, $\sqrt{e^2-6e}-4=0 \rightarrow e=8$

f) $\begin{vmatrix} sen f & cos f \\ cos f & sen f \end{vmatrix}=sen^2 f-cos^2 f$, $sen^2 f-cos^2 f=-\frac{1}{2} \rightarrow f=\frac{1}{6}(6\pi n-\pi), n\in\mathbb{Z}$ o $f=\frac{1}{6}(6\pi n+\pi), n\in\mathbb{Z}$

38. Página 52

$$|A|=\begin{vmatrix}-1&2&-3\\0&1&-1\\3&1&1\end{vmatrix}=1 \qquad |B|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&2\\0&3&0\end{vmatrix}=0$$

$$A+B=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\0&1&-1\\3&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&2\\0&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&-2\\2&1&1\\3&4&1\end{pmatrix}\rightarrow|A+B|=\begin{vmatrix}0&3&-2\\2&1&1\\3&4&1\end{vmatrix}=-7$$

$$A-B=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\0&1&-1\\3&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&2\\0&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&-4\\-2&1&-3\\3&-2&1\end{pmatrix}\rightarrow|A-B|=\begin{vmatrix}-2&1&-4\\-2&1&-3\\3&-2&1\end{vmatrix}=-1$$

39. Página 52

a) $\begin{vmatrix}3&2&-1\\4&0&3\\2&-3&5\end{vmatrix}=11$

c) $\begin{vmatrix}-1&4&6\\2&-3&1\\-8&17&9\end{vmatrix}=0$

e) $\begin{vmatrix}x-1&2&x\\x+1&4&3\\-2&0&-2\end{vmatrix}=4x$

b) $\begin{vmatrix}3&4&2\\2&0&-3\\-1&3&5\end{vmatrix}=11$

d) $\begin{vmatrix}a&2&4\\0&b&3\\0&0&c\end{vmatrix}=a\cdot b\cdot c$

f) $\begin{vmatrix}-a&b&c\\-b&c&a\\-c&a&b\end{vmatrix}=a^3+b^3+c^3-3\cdot a\cdot b\cdot c$

40. Página 52

a) $\begin{vmatrix}3&a&-1\\4&1&1\\2&a&-2\end{vmatrix}=3a-4$, $3a-4=2\rightarrow a=2$

b) $\begin{vmatrix}-2&b&-1\\b&1&b\\3&5&2\end{vmatrix}=b^2+5b-1$, $b^2+5b-1=5\rightarrow b=-6$ o $b=1$

c) $\begin{vmatrix}c-1&c+2&0\\c&-1&4\\2&-3&-1\end{vmatrix}=c^2+23c+3$, $c^2+23c+3=-197\rightarrow$ No tiene solución.

d) $\begin{vmatrix}d&d^2&d-1\\2&-1&0\\d&0&d\end{vmatrix}=-2d^3-d$, $-2d^3-d=-18\rightarrow d=2$

41. Página 52

$$A^2=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+dc&cb+d^2\end{pmatrix} \qquad (a+d)A=\begin{pmatrix}a^2+ad&ba+bd\\ca+cd&da+d^2\end{pmatrix}$$

$$A^2-(a+d)A=\begin{pmatrix}bc-ad&0\\0&bc-ad\end{pmatrix} \qquad |A|=ad-bc$$

$$A^2-(a+d)\cdot A+|A|\cdot I=\begin{pmatrix}bc-ad&0\\0&bc-ad\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}ad-bc&0\\0&ad-bc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

42. Página 52

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1\\0&2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-3\\-2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}0&-3\\-2&1\end{vmatrix}=-6$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-1&1\\0&2\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&0&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}0&2&-2\\2&0&-2\\1&-2&1\end{vmatrix}=0$$

43. Página 52

a) $|A|=\begin{vmatrix}3&5\\-1&2\end{vmatrix}=11$, $2|A|=22$

$2A=\begin{pmatrix}6&10\\-2&4\end{pmatrix}$, $|2A|=\begin{vmatrix}6&10\\-2&4\end{vmatrix}=44\longrightarrow$ No se cumple.

b) $A+B=\begin{pmatrix}3&5\\-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&4\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&9\\2&3\end{pmatrix}$, $|A+B|=\begin{vmatrix}1&9\\2&3\end{vmatrix}=-15$

$|A|=11$, $|B|=\begin{vmatrix}-2&4\\3&1\end{vmatrix}=-14$, $|A|+|B|=-3\longrightarrow$ No se cumple.

c) $C-2B=\begin{pmatrix}6&-3\\-4&3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-2&4\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&-11\\-10&1\end{pmatrix}$, $|C-2B|=\begin{vmatrix}10&-11\\-10&1\end{vmatrix}=-100$

$|B|=-14$, $|C|=\begin{vmatrix}6&-3\\-4&3\end{vmatrix}=6$, $|C|-2|B|=34\longrightarrow$ No se cumple.

d) $A\cdot B=\begin{pmatrix}3&5\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&4\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&17\\8&-2\end{pmatrix}$, $|A\cdot B|=\begin{vmatrix}9&17\\8&-2\end{vmatrix}=-154$

$|A|=11$, $|B|=-14$, $|A|\cdot|B|=-154\longrightarrow$ Se cumple por la propiedad 9.

44. Página 52

$|A|=\begin{vmatrix}1&3&-1\\2&-1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=-5$ $\qquad |A^t|=|A|=-5$ $\qquad |2A|=2^3|A|=-40$

$|A^2|=|A\cdot A|=|A|\cdot|A|=25$ $\qquad \left|\frac{1}{2}A^3\right|=\frac{1}{2^3}|A|\cdot|A|\cdot|A|=\frac{1}{8}(-5)^3=\frac{-125}{8}$

45. Página 52

$$\begin{vmatrix}3&4&-1\\1&2&-1\\2&5&-2\end{vmatrix}=2$$

a) $F_3+F_2\rightarrow\begin{vmatrix}3&4&-1\\1&2&-1\\3&7&-3\end{vmatrix}=2$

b) $C_3+C_1\rightarrow\begin{vmatrix}3&4&2\\1&2&0\\2&5&0\end{vmatrix}=2$

c) $C_2+3C_1+C_3\rightarrow\begin{vmatrix}3&12&-1\\1&4&-1\\2&9&-2\end{vmatrix}=2$

d) $F_3-F_1-2F_2\rightarrow\begin{vmatrix}3&4&-1\\1&2&-1\\-3&-3&1\end{vmatrix}=2$

46. Página 52

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ b & 0 & -2 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2c - b + 2a \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad \begin{vmatrix} a+2 & 1 & -1 \\ b-3 & 0 & -2 \\ c+5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2a - b - 2c - 3$$

Por tanto, se cumple la igualdad: $\begin{vmatrix} a+2 & 1 & -1 \\ b-3 & 0 & -2 \\ c+5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ b & 0 & -2 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

47. Página 52

$|A| = 3$, $|2A| = 48$

$2^n|A| = 48 \rightarrow 2^n \cdot 3 = 48 \rightarrow 2^n = 16 \rightarrow n = 4$

La matriz *A* es de orden 4.

48. Página 52

$|3A| = 54$, $n = 3$

$3^3|A| = 54 \rightarrow |A| = 2$

49. Página 52

a) $|M^t| = 5$
Propiedad 1

b) $|2M| = 2^2|M| = 4 \cdot 5 = 20$
Propiedad 3

c) $|5M| = 5^2|M| = 25 \cdot 5 = 125$
Propiedad 3

d) $|2M| = 2^3|M| = 8 \cdot 5 = 40$
Propiedad 3

e) $|5M| = 5^3|M| = 125 \cdot 5 = 625$
Propiedad 3

f) $|2M| = 2^4|M| = 16 \cdot 5 = 80$
Propiedad 3

50. Página 53

a) Propiedad 3 – Propiedad 5 – Propiedad 2

b) Propiedad 5 $\left(F'_1 = F_1 - 10F_2\right)$

c) Propiedad 5 $\left(F'_1 = F_1 - 10F_2\right)$ y $\left(F'_2 = F_2 - 10F_3\right)$

d) Propiedad 8 – Propiedad 6

51. Página 53

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} \overset{F'_3=F_3+2F_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5\cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \dot{5}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 5 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} \overset{C'_3=100C_1+10C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 125 \\ 3 & 7 & 375 \\ 6 & 2 & 625 \end{vmatrix} = 25\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 15 \\ 6 & 2 & 25 \end{vmatrix} = \dot{25}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & 7 & -3 \\ 8 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{C'_1=C_1+C_2+C_3+C_4}{=} \begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 & 6 \\ 6 & 1 & -1 & 5 \\ 6 & -2 & 7 & -3 \\ 6 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6\cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \dot{6}$

52. Página 53

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 5 = 30$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$

c) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -5 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{C'_1=C_1-C_2-C_3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$

d) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} -\begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & -4 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot 5 = -10$

53. Página 53

a) $\begin{vmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 8 = 48$

b) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -8$

c) $\begin{vmatrix} a-3b & b \\ c-3d & d \end{vmatrix} \overset{C'_1=C_1+3C_3}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 8$

d) $\begin{vmatrix} c & d \\ a+2c & b+2d \end{vmatrix} \overset{F'_2=F_2-2F_1}{=} \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{=} -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -8$

54. Página 53

$\begin{vmatrix} 2d & 2f & 2e \\ 2g & 2i & 2h \\ 2a & 2c & 2b \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} d & f & e \\ g & i & h \\ a & c & b \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} -2^3 \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_3}{=} 2^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \overset{F_2 \leftrightarrow F_3}{=} -2^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2^3\cdot \frac{1}{2} = -4$

55. Página 53

$|M^3| = |M|\cdot|M|\cdot|M| = 6^3 = 216$

$|2M| = 2^{(\text{Orden de } M)}\cdot |M| = 6\cdot 2^{(\text{Orden de } M)}$

56. Página 53

a) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & 5c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot 3 = 45$

b) $\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix} \overset{C'_1=C_1-2C_3}{=} \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} \overset{C_2\leftrightarrow C_3}{=} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -3$

57. Página 53

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ \frac{d}{3} & \frac{e}{3} & \frac{f}{3} \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{d}{3} & \frac{e}{3} & \frac{f}{3} \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\cdot 6 = 4$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{vmatrix} \overset{F'_2=F_2-F_1}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{vmatrix} \overset{F'_3=F_3-F_2-F_1}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6$

c) $\begin{vmatrix} 2b & c+3a & \frac{a}{5} \\ 2e & f+3d & \frac{d}{5} \\ 2h & i+3g & \frac{g}{5} \end{vmatrix} = \frac{2}{5}\begin{vmatrix} b & c+3a & a \\ e & f+3d & d \\ h & i+3g & g \end{vmatrix} \overset{C'_2=C_2-3C_3}{=} \frac{2}{5}\begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix} \overset{C_1\leftrightarrow C_3}{=} -\frac{2}{5}\begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} \overset{C_2\leftrightarrow C_3}{=} \frac{2}{5}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{12}{5}$

58. Página 53

a) $C_3 = -2C_1$ b) $F_3 = F_1 + F_2$ c) $C_3 = \frac{1}{2}C_1 + C_2$ d) $F_3 = 3F_2 - 2F_1$

59. Página 53

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2d & b+2e & c+2f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} \overset{F'_2=F_2-F_1}{=} 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} \overset{F'_3=F_3+F_1}{=} 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

60. Página 53

$\begin{vmatrix} bc & ac & ab \\ 3d & 3d & 3d \\ \frac{2}{a} & \frac{2}{b} & \frac{2}{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & abc & abc \\ 3ad & 3bd & 3cd \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3ad & 3bd & 3cd \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

El determinante es 0, ya que la primera y la tercera filas son linealmente dependientes.

61. Página 53

$$\begin{vmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 8 \rightarrow a \cdot b \cdot c = 8$$

a) $\begin{vmatrix} a+f & d-a & f \\ c+e & b & c+e \\ e & b & e \end{vmatrix} \overset{C'_1=C_1-C_3}{=} \begin{vmatrix} a & d-a & f \\ 0 & b & c+e \\ 0 & b & e \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b & c+e \\ b & e \end{vmatrix} = ab\begin{vmatrix} 1 & c+e \\ 1 & e \end{vmatrix} \overset{F_1-F_2}{=} ab\begin{vmatrix} 0 & c \\ 1 & e \end{vmatrix} = ab(-c) = -8$

b) $abc = 8 \rightarrow a \cdot 1 \cdot 2 = 8 \rightarrow a = 4$

62. Página 54

$$M^2 = \begin{pmatrix} -y^2-z^2 & xy & xz \\ xy & -x^2-z^2 & zy \\ zx & zy & -x^2-y^2 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1-y^2-z^2 & xy & xz \\ xy & 1-x^2-z^2 & zy \\ zx & zy & 1-x^2-y^2 \end{pmatrix}$$

$$x^2+y^2+z^2 = 1 \rightarrow |P| = \begin{vmatrix} 1-y^2-z^2 & xy & xz \\ xy & 1-x^2-z^2 & zy \\ zx & zy & 1-x^2-y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & zy \\ zx & zy & z^2 \end{vmatrix} = (x \cdot y \cdot z)\begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

63. Página 54

$|B| = |2 \cdot A^2| = 2^3 \cdot |A| \cdot |A| = 8 \cdot |A|^2 \rightarrow 8 \cdot |A|^2 = -32 \rightarrow |A|^2 = -4$ No puede ser; por tanto, no es posible que el valor del determinante de B sea -32.

64. Página 54

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x-1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow 3x^2-7x+6 = 2x \rightarrow 3x^2-9x+6=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$

b) $\begin{vmatrix} x & x+2 & x-1 \\ x & x+4 & x-3 \\ x & x+6 & x-6 \end{vmatrix} = -10 \rightarrow \begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ x & 4 & -3 \\ x & 6 & -6 \end{vmatrix} = -10 \rightarrow -2x = -10 \rightarrow x = 5$

c) $\begin{vmatrix} 2x & 4 & -2 \\ x & 2 & x \\ -1 & 3 & 2x \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -6x^2-10x-4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-\frac{2}{3} \end{cases}$

d) $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1-7x \rightarrow x^2-4x+3 = 1-7x \rightarrow x^2+3x+2=0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-1 \end{cases}$

65. Página 54

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_1=F_1-F_2 \\ F'_2=F_2-F_3}}{=} \begin{vmatrix} x & -x & 0 \\ 0 & x & -x \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & a \\ -x & x & b \\ 0 & -x & x+c \end{vmatrix} \overset{F'_3=F_1+F_2+F_3}{=} \begin{vmatrix} x & 0 & a \\ -x & x & b \\ 0 & 0 & x+a+b+c \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & 0 & a \\ -x & x & b \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = (x-3)\begin{vmatrix} x & 0 \\ -x & x \end{vmatrix} = x^2 \cdot (x-3)$$

$$x^2 \cdot (x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

66. Página 54

$$|M|=3\longrightarrow|4M|=4^2|M|\xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_2}-4^2|M|\xrightarrow{\frac{1}{2}F_2}-4^2\cdot\frac{1}{2}|M|=-24=|P|$$

67. Página 54

$$|M|=5\longrightarrow|3M|=3^3|M|\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_3}-3^3|M|\xrightarrow{-2C_2}-3^3\cdot(-2)|M|=270=|P|$$

68. Página 54

$$\begin{vmatrix} a & a+b & b \\ b & a & b \\ 2a & 3a & a+b \end{vmatrix}\overset{C'_1=C_1-C_3}{=}\begin{vmatrix} a-b & a+b & b \\ 0 & a & b \\ a-b & 3a & a+b \end{vmatrix}\overset{F'_3=F_3-F_1-F_2}{=}\begin{vmatrix} a-b & a+b & b \\ 0 & a & b \\ 0 & a-b & a-b \end{vmatrix}\overset{C'_2=C_2-C_3}{=}\begin{vmatrix} a-b & a & b \\ 0 & a-b & b \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}=(a-b)^3$$

69. Página 54

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix}=7+6-84-9=-80$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}-(-2)\cdot\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=3\cdot(-3)-(-2)\cdot(-39)+7=-80$

70. Página 54

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}=60-3+24-8-10+54=117$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}\overset{\substack{C'_2=C_2-6C_1 \\ C'_3=C_3-5C_1}}{=}\begin{vmatrix} 3 & -17 & -13 \\ 2 & -8 & -13 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -17 & -13 \\ -8 & -13 \end{vmatrix}=117$

71. Página 54

a) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & -5 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -5 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -1 & -5 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix}=$

$=-(-8+10-24-24+20+4)-(-30-36+16-40+6+72)=34$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}=$

$=3(-8-24-20+30-16-8)-3(8-24-16+24-16+8)-(8-20+8-16+8-10)=-92$

72. Página 54

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_3=F_3+F_1 \\ F'_5=F_5+F_1}}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} \overset{F'_4=F_4-F_2}{=} - \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{F_3=2F_4}{=} 0$$

73. Página 54

$$\begin{vmatrix} -a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -a \end{vmatrix} \overset{C'_1=C_1-C_3}{=} \begin{vmatrix} -a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ a & 1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -a \end{vmatrix} = (-a)\cdot \begin{vmatrix} -a & 1 & 0 \\ 1 & -a & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix} + a\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix} =$$

$$= -a(-a^3+a+a)+a(-a-a) = a^4-4a^2$$

74. Página 54

$$\begin{vmatrix} 3a & a & a & a \\ a & 3a & a & a \\ a & a & 3a & a \\ a & a & a & 3a \end{vmatrix} = a^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{C'_2=C_2-C_1 \\ C'_3=C_3-C_1 \\ C'_4=C_4-C_1}}{=} a^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= a^4 \cdot \left[-1\cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \right] = a^4\left[-(-8)+2(12+4+4)\right] = 48a^4$$

75. Página 54

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & -3 & 4 \\ x^2 & 4 & 9 & 16 \\ x^3 & 8 & -27 & 64 \end{vmatrix} \overset{\substack{C'_2=C_2-C_1 \\ C'_3=C_3-C_1 \\ C'_4=C_4-C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 2-x & -3-x & 4-x \\ x^2 & 4-x^2 & 9-x^2 & 16-x^2 \\ x^3 & 8-x^3 & -27-x^3 & 64-x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & -3-x & 4-x \\ 4-x^2 & 9-x^2 & 16-x^2 \\ 8-x^3 & -27-x^3 & 64-x^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-x)(-3-x)(4-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+2 & x-3 & x+4 \\ x^2+2x+4 & x^2-3x+9 & x^2+4x+16 \end{vmatrix}$$

Por tanto, $x=2$, $x=-3$ y $x=4$ son soluciones de la ecuación.

Como todas las incógnitas están en la primera columna, esto quiere decir que la ecuación es de grado menor o igual que tres, luego las tres soluciones halladas son las únicas que tiene.

76. Página 54

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{C'_1=C_1-C_4 \\ C'_2=C_2-C_4 \\ C'_3=C_3-C_4}}{=} \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x+1 & 1 \\ x-3 & x-3 & x-3 & 3 \end{vmatrix} = (x+1)\begin{vmatrix} x+1 & 0 & 1 \\ 0 & x+1 & 1 \\ x-3 & x-3 & 3 \end{vmatrix} - (x-3)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x+1 & 0 & 1 \\ 0 & x+1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+1)\left[3(x+1)^2-(x+1)(x-3)-(x+1)(x-3)\right]-(x-3)\left[(x+1)^2\right] = 12x^2+24x+12$$

$$12x^2+24x+12=0 \rightarrow x=-1$$

77. Página 54

$$f(1)=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & -2 \\ -1 & 1-a & 2a \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix}=5$$

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & -2 \\ -1 & 1-a & 2a \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2'=C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 1+a & -1 & -2 \\ -1 & 1+a & 2a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2a \\ a & 1 \end{vmatrix} + (1+a)\begin{vmatrix} 1+a & -2 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -1-2a^2+(1+a)(1+a+2a) = a^2+4a$$

$a^2+4a=5$, $a^2+4a-5=0 \rightarrow \begin{cases} a=-5 \\ a=1 \end{cases}$ → El valor que buscamos es $a=-5$.

78. Página 55

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow$ Rango = 2

b) $\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ -8 & 12 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 12 & -18 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} -8 & 12 \\ 12 & -18 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Rango = 1

c) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 8 & 11 & -11 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Rango < 3, $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow$ Rango = 2

d) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -39 \neq 0 \rightarrow$ Rango = 3

e) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 24 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 24 & 3 & 19 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 19 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & 24 & 19 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Rango < 3

$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \rightarrow$ Rango = 2

f) $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -24 & 1 \end{vmatrix} = 78 \neq 0 \rightarrow$ Rango = 2

79. Página 55

a) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow$ Rango = 3

b) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 7 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 7 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Rango < 3

$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 23 \neq 0 \rightarrow$ Rango = 2

80. Página 55

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \longrightarrow$ Rango = 3

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow$ Rango < 3, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \longrightarrow$ Rango = 2

81. Página 55

$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \longrightarrow$ Rango = 3

Una combinación sería, por ejemplo: $C_4 = C_1 - C_2 + 2C_3$

82. Página 55

a) $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \longrightarrow$ Rango $\geq$ 2

$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = 2a^2 - 3a - 9$, $2a^2 - 3a - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{3}{2} \\ a = 3 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & a \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5a - 15$, $5a - 15 = 0 \longrightarrow a = 3$

El rango es 3 excepto en el caso de que $a = 3$, que es 2.

b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \longrightarrow$ Rango $\geq$ 2

$\begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ b+1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2b - 4$, $2b - 4 = 0$ si $b = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ b+1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2b^2 + 2b - 4$, $2b^2 + 2b - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ b = 1 \end{cases}$

El rango es 3, pues no hay ningún valor de *b* que anule simultáneamente a todos los menores de orden 3.

83. Página 55

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-a & e-b & f-c \\ 2a-d & 2b-e & 2c-f \end{vmatrix} \overset{F'_2 = F_2 + F_1}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a-d & 2b-e & 2c-f \end{vmatrix} \overset{F'_3 = F_3 - F_2}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow$ Rango < 3

Como $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ tiene rango 2 $\longrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d-a & e-b & f-c \\ 2a-d & 2b-e & 2c-f \end{pmatrix}$ tiene rango 2.

84. Página 55

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & n \\ m & m & 4 \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} = m^2(n-2) \qquad B \to \begin{vmatrix} m & 0 & n \\ m & m & 4 \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} = m^2(n-2) \qquad \begin{vmatrix} m & 0 & 2 \\ m & m & 4 \\ 0 & m & n \end{vmatrix} = -m(n-2)^2$$

a) Una condición necesaria para que $R(A)$ sea 2 es que $m = 0$ o $n = 2$, pero en ambos casos $R(B)$ no puede ser 3.

b) Si $n = 2$ y $m \neq 0 \to \begin{vmatrix} m & 0 \\ m & m \end{vmatrix} = m^2 \neq 0$; por tanto, el rango de A es 2.

$B = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 & 2 \\ m & m & 4 & 4 \\ 0 & m & 2 & 2 \end{pmatrix}$, todos los menores de orden 3 son cero, $\begin{vmatrix} m & 0 \\ m & m \end{vmatrix} = m^2 \neq 0 \to$ El rango de B es 2.

c) Si $n \neq 2$ y $m \neq 0 \to$ Los menores de orden 3 son distintos de cero; por tanto, los rangos de A y B son 3.

85. Página 55

a) $C_4 = 0$; por tanto, rango $X < 4$

$\begin{vmatrix} p & q & 0 \\ r & s & 0 \\ a & 0 & b \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \neq 0$ si $b \neq 0 \to$ Rango de $X = 3$

Si $b = 0 \to a \cdot d = 0 \to$ Si $d = 0$, el rango de X es 2, y si $d \neq 0$, el rango de X es 3.

b) Como el rango de la matriz A es 1, al menos uno de sus elementos es distinto de cero. Supongamos que $c \neq 0$:

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ p & q & 0 & 0 \\ r & s & 0 & 0 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 0 & 0 & d \\ p & q & 0 \\ r & s & 0 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ p & q & 0 \\ r & s & 0 \end{vmatrix} = ad\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} - bc\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = 0$, ya que $ad = bc$,

pues $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \to$ Rango $Y < 4$ $\qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ p & q & 0 \\ r & s & 0 \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \neq 0 \to$ Rango $Y = 3$

c) $F_3 = F_4 = 0 \to$ Rango $Z < 3$ $\qquad \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \neq 0 \to$ Rango $Z = 2$

d) $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ p & 0 & 0 & q \\ r & 0 & 0 & s \end{vmatrix} = 0 \to R(W) < 4$ $\qquad \begin{vmatrix} c & d & 0 \\ p & 0 & q \\ r & 0 & s \end{vmatrix} = d\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ p & 0 & q \\ r & 0 & s \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}$

Si $b = d = 0 \to R(W) = 2$, y si $b \neq 0$ o $d \neq 0 \to R(W) = 3$

86. Página 55

$\begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & a+2 \end{vmatrix} = a^2 + 2a + 1$, $a^2 + 2a + 1 = 0 \to a = -1$; por tanto, $|A| = 0 \to$ Rango $A = 1$

87. Página 55

$A + tI = \begin{pmatrix} 2+t & 2 \\ 3 & 1+t \end{pmatrix} \qquad |A + tI| = \begin{vmatrix} 2+t & 2 \\ 3 & 1+t \end{vmatrix} = t^2 + 3t - 4$, $t^2 + 3t - 4 = 0 \to \begin{cases} t = -4 \\ t = 1 \end{cases}$

Por tanto, si $t = -4$ o $t = 1$ el rango de $A + tI$ es 1.

88. Página 55

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ a & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = a(a^5 - a^3 - a^2 + 1)\,,\ a(a^5 - a^3 - a^2 + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Si $a = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, el rango es 1.

Si $a = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, el rango es 2.

Si $a = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, el rango es 2.

89. Página 55

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & a+1 \\ a+1 & a-1 & 2a \end{vmatrix}$, $C_3 = C_1 + C_2 \rightarrow$ Rango $A < 3$

$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a+1 & a-1 \end{vmatrix} = -a^2 - 1$, $-a^2 - 1 \neq 0$ para cualquier valor de $a \rightarrow$ Rango $A = 2$

90. Página 55

a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \rightarrow$ Rango ≥ 2 $\qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & a \\ -5 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -16a - 48$, $-16a - 48 = 0 \rightarrow a = -3$

Si $a \neq -3 \rightarrow$ Rango $= 3$

Si $a = -3 \rightarrow$ Rango $= 2$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow$ Rango ≥ 2

$$\begin{vmatrix} b & 2 & -1 \\ 3 & 2 & b+1 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -6b^2 + 10b + 4\,,\ -6b^2 + 10b + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{1}{3} \\ b = 2 \end{cases}$$

Si $b \neq 2$ y $b \neq -\frac{1}{3} \rightarrow$ Rango $= 3$ $\qquad$ Si $b = 2$ o $b = -\frac{1}{3} \rightarrow$ Rango $= 2$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow$ Rango ≥ 2

Como $C_1 = -C_4$, todos los menores se pueden reducir a uno.

$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ c & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 3c$, $-6 + 3c = 0 \rightarrow c = 2$

Si $c \neq 2 \rightarrow$ Rango $= 3$

Si $c = 2 \rightarrow$ Rango $= 2$

d) $\begin{vmatrix} 1 & -d & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ d & -4 & 6 \end{vmatrix} = 9d^2 - 36d + 36$, $9d^2 - 36d + 36 = 0 \rightarrow d = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -d & -2 \\ -3 & 6 & 6 \\ d & -4 & -4 \end{vmatrix} = -6d^2 + 24d - 24$, $-6d^2 + 24d - 24 = 0 \rightarrow d = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & -9 & 6 \\ d & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} -d & 3 & -2 \\ 6 & -9 & 6 \\ -4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -3 & 6 & -9 & 6 \\ 2 & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

Si $d \neq 2 \rightarrow$ Rango = 3 Si $d = 2 \rightarrow$ Rango = 1, ya que todas las filas son proporcionales.

91. Página 55

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = a^3 - a$, $a(a^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$

Si $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1 \rightarrow$ Rango = 3

Si $a = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Rango = 2

Si $a = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Rango = 2

Si $a = -1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow$ Rango = 2

b) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & -2 \\ 2a+1 & a+1 & -1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - a$, $a(a^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$

Si $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1 \rightarrow$ Rango = 3

Si $a = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Rango = 2

Si $a = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Rango = 2

Si $a = -1 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Rango = 2

c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow$ Rango ≥ 2

$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2a & -1 & a \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 3a - 4$, $a^2 + 3a - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ a = 1 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2a & a & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a^2 - 4$, $-a^2 - 4 = 0$ no se cumple para ningún valor de a.

El rango de la matriz es 3, ya que para cualquier valor de a existe un menor de orden 3 distinto de cero.

92. Página 56

a) $\begin{vmatrix} m-2 & m+1 & -1 \\ m^3 & -1 & m+1 \\ m^4+1 & m & 2m+1 \end{vmatrix} = m^6-4m^4-2m^3+7m+2$

$\begin{vmatrix} m-2 & m+1 & m \\ m^3 & -1 & m \\ m^4+1 & m & 7 \end{vmatrix} = m^6+3m^5-7m^4-8m^3+3m^2-5m+14$

$\begin{vmatrix} m-2 & -1 & m \\ m^3 & m+1 & m \\ m^4+1 & 2m+1 & 7 \end{vmatrix} = -m^6+m^4+5m^3+9m^2-7m-14$

$\begin{vmatrix} m+1 & -1 & m \\ -1 & m+1 & m \\ m & 2m+1 & 7 \end{vmatrix} = -3m^3+12m$, $-3m^3+12m=0 \rightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m=0 \\ m=2 \end{cases}$

Estudiamos $m=2$, por ser el único valor de *m* que hace cero todos los menores de orden 3.

Si $m \neq 2$, Rango = 3, y si $m=2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & -1 & 3 & 2 \\ 17 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -24 \neq 0 \rightarrow$ Rango = 2

b) $\begin{vmatrix} m & 1 & m+2 \\ -1 & -m & -1-2m \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} m & 1 & 4 \\ -1 & -m & 2m+6 \\ 2 & 2 & m \end{vmatrix} = -m^3-4m^2+m+4$, $-m^3-4m^2+m+4=0 \rightarrow \begin{cases} m=-4 \\ m=-1 \\ m=1 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} m & m+2 & 4 \\ -1 & -1-2m & 2m+6 \\ 2 & 6 & m \end{vmatrix} = -2m^3-8m^2+2m+8$, $-2m^3-8m^2+2m+8=0 \rightarrow \begin{cases} m=-4 \\ m=-1 \\ m=1 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & m+2 & 4 \\ -m & -1-2m & 2m+6 \\ 2 & 6 & m \end{vmatrix} = m^3+4m^2-m-4$, $m^3+4m^2-m-4=0 \rightarrow \begin{cases} m=-4 \\ m=-1 \\ m=1 \end{cases}$

Si $m \neq -1$, $m \neq 1$ o $m \neq -4 \rightarrow$ Rango = 3

Si $m=-1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow$ Rango = 2

Si $m=1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -27 \neq 0 \rightarrow$ Rango = 2

Si $m \neq -4 \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -24 \neq 0 \rightarrow$ Rango = 2

c) $\begin{vmatrix} a+3 & a-3 & a+1 \\ 2a-1 & 1 & a+1 \\ -1 & a & 2a+2 \end{vmatrix} = -3a^3+8a^2+15a+4$, $-3a^3+8a^2+15a+4=0 \to \begin{cases} a=-1 \\ a=-\frac{1}{3} \\ a=4 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} a+3 & a-3 & a+1 \\ 2a-1 & 1 & a-4 \\ -1 & a & a-2 \end{vmatrix} = -a^3+13a^2+3a-11$, $-a^3+13a^2+3a-11=0 \to \begin{cases} a=-1 \\ a=7-\sqrt{38} \\ a=7+\sqrt{38} \end{cases}$

$\begin{vmatrix} a+3 & a+1 & a+1 \\ 2a-1 & a+1 & a-4 \\ -1 & 2a+2 & a-2 \end{vmatrix} = a^3+11a^2+29a+19$, $a^3+11a^2+29a+19=0 \to \begin{cases} a=-5-\sqrt{6} \\ a=-5+\sqrt{6} \\ a=-1 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} a-3 & a+1 & a+1 \\ 1 & a+1 & a-4 \\ a & 2a+2 & a-2 \end{vmatrix} = -a^3+4a^2-9a-14$, $-a^3+4a^2-9a-14=0 \to a=-1$

Estudiamos $a=-1$, ya que para cualquier otro valor de a existe un menor de orden 3 distinto de cero.

Si $a \neq -1 \to$ Rango = 3

Si $a=-1 \to \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \to$ Rango = 2.

93. Página 56

$$\begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C'_1=C_1-C_4}{=} \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+1)\begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 1 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C'_1=C_1-C_3}{=}$$

$$=(a+1)\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 0 & a+2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+1)^2\begin{vmatrix} a+2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+1)^3, \ (a+1)^3=0 \to a=-1$$

Si $a \neq -1 \to$ Rango = 4

Si $a=-1 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$ Rango = 1

94. Página 56

a) $|A| = 2 \neq 0 \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

b) $|B| = 1 \neq 0 \to B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -2 & 7 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $|C| = -20 \neq 0 \to C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{20} & \frac{7}{20} \end{pmatrix}$

d) $|D| = 10 \neq 0 \to D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{10} & -\frac{9}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{9}{10} & -\frac{11}{10} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{7}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

95. Página 56

a) $|A^t|=|A|=5$

b) $|B^{-1}|=\frac{1}{|B|}=\frac{1}{4}$

c) $|AB|=|A|\cdot|B|=20$

d) $|A^{-1}B|=|A^{-1}|\cdot|B|=\frac{1}{|A|}\cdot|B|=\frac{4}{5}$

e) $|(BC)^{-1}|=\frac{1}{|BC|}=\frac{1}{|B|\cdot|C|}=\frac{1}{8}$

f) $|C^{-1}B^t|=\frac{1}{|C|}\cdot|B^t|=\frac{1}{|C|}\cdot|B|=2$

96. Página 56

$$|A|=4\,,\ |B|=-4\,,\ B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{4}\\ 0 & -1 & \frac{5}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix};\ B^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}-\frac{15}{2} & -3 & \frac{7}{2}\\ 9 & 4 & -5\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix},\ A+B^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}-\frac{19}{2} & -3 & \frac{7}{2}\\ 10 & 5 & -5\\ 6 & 3 & -3\end{pmatrix}$$

a) $|A+B^{-1}\cdot A|=0$

b) $|A^3\cdot B^{-1}|=|A^3|\cdot|B^{-1}|=|A|^3\cdot\frac{1}{|B|}=-16$

97. Página 56

$A^2=I\rightarrow|A^2|=|I|=1\rightarrow|A|\cdot|A|=1\rightarrow|A|=\pm1\neq0$ → La matriz A es invertible.

$A^2=A\cdot A=I\ \rightarrow A^{-1}=A\rightarrow(A^{-1})^2=A^{-1}\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I\rightarrow(A^{-1})^2=I$

98. Página 56

$$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$-A-I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$A^3=-A-I\rightarrow I=-A-A^3=A(-I-A^2)\rightarrow A^{-1}=-I-A^2\quad A^{-1}=-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

99. Página 56

$|M|=-a^2+a\,,\ |M|=0$ si $-a^2+a=0\rightarrow\begin{cases}a=0\\ a=1\end{cases}$; por tanto, la matriz M no tiene inversa para $a=0$ y $a=1$.

Si $a=2\,,\ M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix};\ |M|=-2\rightarrow M^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

100. Página 56

$|A| = -m-1$, $|A| = 0 \rightarrow -m-1=0 \rightarrow m=-1 \rightarrow$ La matriz A es singular para $m=-1$.

Si $m=2 \rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $|A|=-3 \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -2 & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

101. Página 56

a) A es invertible si y solo si $|A| \neq 0$; $|A| = a^2-2ab+b^2$.

$|A|=0 \rightarrow a^2-2ab+b^2=0 \rightarrow a=b \rightarrow A$ es invertible si y solo si $a \neq b$.

b) $A=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $|A|=4 \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$

102. Página 56

a) $X=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

b) $Y=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 14 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 14 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

103. Página 56

a) $X=\begin{pmatrix} 66 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 66 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $Y=\begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 0 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 0 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

104. Página 56

a) $X=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -17 & -10 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -17 & -10 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $Y=\left[\begin{pmatrix} 10 & -10 & -10 \\ -10 & 10 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ 13 & -2 & -3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -8 \\ -23 & 12 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 8 & 6 & \frac{3}{2} \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

105. Página 56

a) $Z=\begin{pmatrix}2&0&3\\1&-1&3\\0&-2&-1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\left[\begin{pmatrix}1\\3\\-8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7\\8\\10\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\frac{7}{8}&-\frac{3}{4}&\frac{3}{8}\\\frac{1}{8}&-\frac{1}{4}&-\frac{3}{8}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\-5\\-18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\9\\0\end{pmatrix}$

b) $T=\begin{pmatrix}4&1\\7&2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}32&28&111\\54&52&194\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&3\\-2&4&1\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-7&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}32&28&111\\54&52&194\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&3\\-\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&\frac{7}{4}\\1&0&-1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}10&4&28\\-8&12&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&3\\-\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&\frac{7}{4}\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&9\\0&3&-2\end{pmatrix}$

106. Página 56

$C=\begin{pmatrix}2&11&12\\-1&-4&17\\2&12&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&5&3\\2&5&-4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&11&12\\-1&-4&17\\2&12&2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{76}\begin{pmatrix}35&-23&9\\-2&10&6\\15&1&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&0\\3&0&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$

$D=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&5&3\\2&5&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&11&12\\-1&-4&17\\2&12&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&5&3\\2&5&-4\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{76}\begin{pmatrix}212&-122&-235\\-36&20&46\\4&2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-5&3&6\\3&-2&-3\end{pmatrix}$

$CD=BA^{-1}AB^{-1}=BIB^{-1}=BB^{-1}=I\rightarrow C$ y D son inversas, $C=D^{-1}$.

107. Página 57

a) No existe matriz inversa si $|A|=0$.

$|A|=a^2-3$, $|A|=0$ si $a^2-3=0$, es decir, si $a=\pm\sqrt{3}$

Por tanto, A no tiene inversa si $a=\pm\sqrt{3}$.

b) $a=2\rightarrow A=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$, $|A|=1\rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}$, $A^t=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$ y $(A^t)^2=\begin{pmatrix}7&12\\4&7\end{pmatrix}$

$B=\frac{1}{2}\cdot(A^t)^2=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}7&12\\4&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7/2&3\\2&7/2\end{pmatrix}$

c) $a=2\rightarrow A=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$, $X=A^{-1}\cdot\left(A^t+A^2\right)$

$A^2=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&4\\12&7\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\left[\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&4\\12&7\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9&7\\13&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&5\\-1&-3\end{pmatrix}$

108. Página 57

a) La ecuación $AX - A^t = A$ tiene solución si existe A^{-1}, es decir, si $|A| \neq 0$

$|A| = 1 - 7m$, $1 - 7m = 0$ si $m = \frac{1}{7}$; por tanto, la ecuación tiene solución cuando $m \neq \frac{1}{7}$.

b) Si $m = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $|A| = 1 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & -11 & 12 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & -11 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -3 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \\ -29 & 25 & 8 \end{pmatrix}$$

109. Página 57

a) La ecuación $AX + 2B = 3C$ tiene solución si existe A^{-1}, es decir, si $|A| \neq 0$.

$|A| = m \rightarrow$ La ecuación tiene solución si y solo si $m \neq 0$.

b) Si $m = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $|A| = 1 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

110. Página 57

a) A es invertible si $|A| \neq 0$, $|A| = 2a - 1$.

$|A| = 0$ si $2a - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2}$; por tanto, A es invertible si y solo si $a \neq \frac{1}{2}$.

b) $XA + A = A^t \rightarrow X = (A^t - A)A^{-1}$

Si $a = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $A^T - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

111. Página 57

A no es invertible $\rightarrow |A| = 0$, $|A| = x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n 2^{n-1} & 0 & (-1)^{n-1} 2^{n-1} \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ (-1)^{n-1} 2^{n-1} & 0 & (-1)^n 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

112. Página 57

a) A no es invertible si y solo si $|A|=0$. $|A|=-3t^2+18t-16=0 \to t=3\pm\sqrt{\frac{11}{3}}$.

b) $t=1 \to A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ $A^3=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^4=(-I)\cdot A=-A$ $A^5=-A\cdot A=-A^2$ $A^6=A^5\cdot A=-A^2\cdot A=-(-I)\cdot A=A$

$A^n=A^{(\text{Resto de la división } n:6)}$, por ejemplo: $\frac{100}{6}=16+\frac{4}{6} \to A^{100}=A^4=-A$

113. Página 57

a) A es invertible si y solo si $|A|\neq 0$, $|A|=-m^3+4m$.

$|A|=0 \to -m^3+4m=0$ si $m=0$, $m=2$ o $m=-2$; por tanto, A es invertible si y solo si $m\neq 0$ y $m\neq \pm 2$.

b) Si $m=1$, $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $|A|=3$

$|6\cdot A^{-1}|=6^3\cdot|A^{-1}|=6^3\cdot\frac{1}{|A|} \to |6\cdot A^{-1}|=\frac{6^3}{3}=72$

c) $m=1$, $XA=B \to X=BA^{-1}$

$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$X=(3 \quad 0 \quad 3)\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}=(-2 \quad 3 \quad 2)$

114. Página 57

a) $|A|=-8a^2+10a+6$

$B-I=\begin{pmatrix} a & 7 \\ a & a-2 \end{pmatrix}$, $(B-I)^t=\begin{pmatrix} a & a \\ 7 & a-2 \end{pmatrix}$, $|(B-I)^t|=\begin{vmatrix} a & a \\ 7 & a-2 \end{vmatrix}=a^2-9a$

$|A|+|(B-I)^t|=0 \to -8a^2+10a+6+a^2-9a=0 \to -7a^2+a+6=0 \to \begin{cases} a=-\frac{6}{7} \\ a=1 \end{cases}$

Por tanto, la solución que buscamos es $a=-\frac{6}{7}\notin\mathbb{Z}$.

b) Si $a=1 \to A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $|A|=8 \to A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{11}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$

115. Página 57

a) $|A|=0 \to$ Rango < 3, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to$ Rango = 2

b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \to$ Rango ≥ 2

$|B| = -m \to |B| = 0$ si $m=0$

Por tanto, si $m \neq 0 \to |B| \neq 0$ y el rango es 3, pero si, en cambio, $m=0$, el rango es 2.

c) *B* no es invertible si $|B|=0$, es decir, si $m=0$.

d) Si $m=-1$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$B \cdot X \cdot B = A \to X = B^{-1} \cdot A \cdot B^{-1} \quad X = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 7 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ -5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

116. Página 57

a) *A* tiene inversa si $|A| \neq 0$, $|A| = a^2(a-1)$.

$$|A| = 0 \to a^2(a-1) = 0 \to \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Por tanto, *A* tiene inversa si y solo si $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

b) Si $a=3 \to A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $|A|=18 \to A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

c) $AB=\begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 5a \\ 2a-2 & 0 \\ -a & -2a \end{pmatrix} \to (AB)^t = \begin{pmatrix} a & 2(a-1) & -a \\ 5a & 0 & -2a \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a & 2(a-1) \\ 5a & 0 \end{vmatrix} = -10a(a-1), \ -10a(a-1)=0 \to \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a & -a \\ 5a & -2a \end{vmatrix} = 3a^2, \ 3a^2=0 \to a=0$$

$$\begin{vmatrix} 2(a-1) & -a \\ 0 & -2a \end{vmatrix} = -4a(a-1), \ -4a(a-1)=0 \to \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Si $a=0 \to (AB)^t = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 1.

Si $a=1 \to (AB)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ tiene rango 2.

117. Página 57

a) A es invertible si y solo si $|A|\neq 0$.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -1 & -1 & 0\\ -a & a & -1 & 1\\ 1 & -1 & a & 1\\ 1 & -1 & 0 & a\end{vmatrix} \overset{C_1'=C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} a-1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & a & -1 & 1\\ 0 & -1 & a & 1\\ 0 & -1 & 0 & a\end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} a & -1 & 1\\ -1 & a & 1\\ -1 & 0 & a\end{vmatrix} = (a-1)(a^3+1) = = (a-1)(a+1)(a^2-a+1)$$

$$|A|=0,\ (a-1)(a+1)(a^2-a+1)=0 \to \begin{cases} a=-1\\ a=1\end{cases}$$

Por tanto, A es invertible si y solo si $a\neq 1$ y $a\neq -1$.

b) Si $a=0 \rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

c) $X\cdot A=B \to X=BA^{-1}$

$$X=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

118. Página 57

a) $$|A|=\begin{vmatrix} a & a & a & a\\ a & a & a & 1\\ a & a & 1 & 2\\ a & 1 & 2 & 3\end{vmatrix} \overset{C_1'=C_1-C_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & a & a & a\\ 0 & a & a & 1\\ 0 & a & 1 & 2\\ a-1 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix} = -(a-1)\begin{vmatrix} a & a & a\\ a & a & 1\\ a & 1 & 2\end{vmatrix} \overset{C_1'=C_1-C_2}{=} -(a-1)\begin{vmatrix} 0 & a & a\\ 0 & a & 1\\ a-1 & 1 & 2\end{vmatrix} =$$

$$=-(a-1)^2\begin{vmatrix} a & a\\ a & 1\end{vmatrix} \overset{C_1'=C_1-C_2}{=} -(a-1)^2\begin{vmatrix} 0 & a\\ a-1 & 1\end{vmatrix} = a(a-1)^3$$

$$|A|=0,\ a(a-1)^3=0 \to \begin{cases} a=0\\ a=1\end{cases}$$

Si $a=0 \to A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \to$ Rango $A<4$, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix} = -1\neq 0 \to$ Rango $A=3$

Si $a=1 \to A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \to$ Rango $A<4$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix} = -1\neq 0 \to$ Rango $A=3$

Si $a\neq 0$ y $a\neq 1 \to R(A)=4$

b) $|A^{-1}|+|BB^t|=\dfrac{1}{|A|}+|BB^t|$, $|A|=2$ para $a=2$

$$B\cdot B^t=\begin{pmatrix} -1 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix},\ |B\cdot B^t|=0 \to |A^{-1}|+|BB^t|=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$$

c) $XA = B^t \rightarrow X = B^t A^{-1}$

$$a = 2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & -2 & -2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

119. Página 57

a) $|M| = 3 \rightarrow |M^{-1}| = \frac{1}{|M|} = \frac{1}{3}$

b) $|M| = 3 \rightarrow |aM| = a^4 |M| = 3a^4$

c) $\text{Det}(2F_1 - F_4, F_3, 7F_2, F_4) = \text{Det}(2F_1, F_3, 7F_2, F_4) + \text{Det}(-F_4, F_3, 7F_2, F_4) = \text{Det}(2F_1, F_3, 7F_2, F_4) =$

$= 2 \cdot 7 \cdot \text{Det}(F_1, F_3, F_2, F_4) = -2 \cdot 7 \cdot \text{Det}(F_1, F_2, F_3, F_4) = -2 \cdot 7 \cdot 3 = -42$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 58

Porque los lados de los triángulos son líneas rectas.

2. Página 58

La triangulación no es única, puede haber tantas triangulaciones diferentes como imaginemos.

3. Página 58

No, porque no hay un triángulo cuya superficie sea nula.

4. Página 58

Respuesta abierta, puede ser cualquiera. No obstante, se recomienda dibujar la figura irregular sobre la cuadrícula previamente dibujada, pues de esa manera haremos coincidir los vértices de la triangulación con puntos de coordenadas enteras.