Distribuciones binomial y normal 14

ACTIVIDADES

1. Página 342

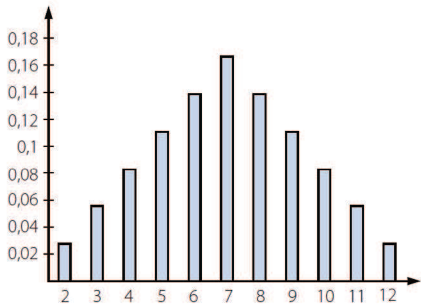
a) El espacio muestral es: $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

La función X que asigna a cada suceso la suma de las puntuaciones es una variable aleatoria.

$X(1, 1) = 2$ $X(1, 2) = 3$ $X(1, 3) = 4$ $X(1, 4) = 5$ $X(1, 5) = 6$ $X(1, 6) = 7$
$X(2, 1) = 3$ $X(2, 2) = 4$ $X(2, 3) = 5$ $X(2, 4) = 6$ $X(2, 5) = 7$ $X(2, 6) = 8$
$X(3, 1) = 4$ $X(3, 2) = 5$ $X(3, 3) = 6$ $X(3, 4) = 7$ $X(3, 5) = 8$ $X(3, 6) = 9$
$X(4, 1) = 5$ $X(4, 2) = 6$ $X(4, 3) = 7$ $X(4, 4) = 8$ $X(4, 5) = 9$ $X(4, 6) = 10$
$X(5, 1) = 6$ $X(5, 2) = 7$ $X(5, 3) = 8$ $X(5, 4) = 9$ $X(5, 5) = 10$ $X(5, 6) = 11$
$X(6, 1) = 7$ $X(6, 2) = 8$ $X(6, 3) = 9$ $X(6, 4) = 10$ $X(6, 5) = 11$ $X(6, 6) = 12$

b)

X	$P(X = x_i)$	$P(X \leq x_i)$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$
6	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{12}$
7	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$
8	$\frac{5}{36}$	$\frac{13}{18}$
9	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{6}$
10	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{12}$
11	$\frac{1}{18}$	$\frac{35}{36}$
12	$\frac{1}{36}$	1



2. Página 342

a) El espacio muestral es:

$E = \{(1, C), (2, C), (3, C), (4, C), (5, C), (6, C), (1, X), (2, X), (3, X), (4, X), (5, X), (6, X)\}$

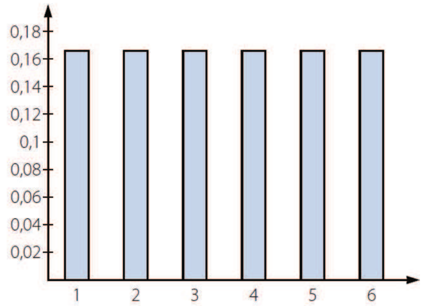
La probabilidad de cada suceso elemental es $\frac{1}{12}$.

b) Respuesta abierta.

La función X asigna a cada suceso el número obtenido en el dado.

$X(1, C) = 1$ $X(2, C) = 2$ $X(3, C) = 3$ $X(4, C) = 4$ $X(5, C) = 5$ $X(6, C) = 6$
$X(1, X) = 1$ $X(2, X) = 2$ $X(3, X) = 3$ $X(4, X) = 4$ $X(5, X) = 5$ $X(6, X) = 6$

X	$P(X=x_i)$	$P(X\le x_i)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	1

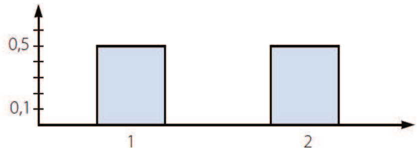


La función Y asigna a cada suceso elemental el número 1 si sale cara en la moneda y 2 si sale cruz.

$Y(1, C)=1$ $Y(2, C)=1$ $Y(3, C)=1$ $Y(4, C)=1$ $Y(5, C)=1$ $Y(6, C)=1$

$Y(1, X)=2$ $Y(2, X)=2$ $Y(3, X)=2$ $Y(4, X)=2$ $Y(5, X)=2$ $Y(6, X)=2$

Y	$P(Y=y_i)$	$P(Y\le y_i)$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	1



3. Página 343

X	$P(X=x_i)$	$P(X\le x_i)$
0	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$
1	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{7}$
2	$\frac{15}{56}$	$\frac{55}{56}$
3	$\frac{1}{56}$	1

Media: $\mu=\frac{9}{8}=1{,}125$

Desviación típica: $\sigma=\sqrt{0{,}502}=0{,}709$

4. Página 343

X = «Puntuación»	1	2	4	5	6
$P(X=x_i)$	0,1	0,12	0,2	0,3	0,15

La probabilidad, p, que falta es $X=3$. Como la suma de todas las probabilidades tiene que ser 1:

$0{,}1+0{,}12+0{,}2+0{,}3+0{,}15+p=1 \rightarrow p=0{,}13$

$\mu=1\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}12+3\cdot 0{,}13+4\cdot 0{,}2+5\cdot 0{,}3+6\cdot 0{,}15=3{,}93$

$\sigma=\sqrt{1^2\cdot 0{,}1+2^2\cdot 0{,}12+3^2\cdot 0{,}13+4^2\cdot 0{,}2+5^2\cdot 0{,}3+6^2\cdot 0{,}15-3{,}93^2}=1{,}55$

5. Página 344

Determinamos el espacio muestral, siendo C = «Cara» y + = «Cruz»:

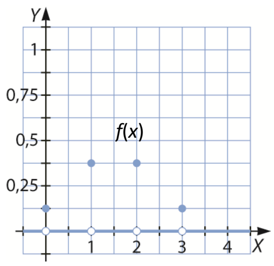
E = {CCC, CC+, C+C, C++, +CC, +C+, ++C, +++}

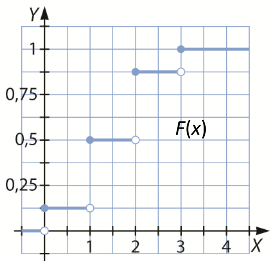
Son un total de 8 sucesos probables. Calculamos las probabilidades de los sucesos elementales:

$P(X=3)=\frac{1}{8}$ $\quad P(X=2)=\frac{3}{8}$ $\quad P(X=1)=\frac{3}{8}$ $\quad P(X=0)=\frac{1}{8}$

Las funciones de probabilidad y de distribución serían, respectivamente:

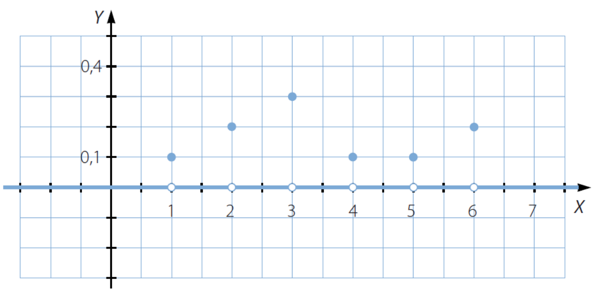
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8} & \text{si } x=0 \text{ o } x=3\\ \frac{3}{8} & \text{si } x=1 \text{ o } x=2\\ 0 & \text{en el resto de los valores}\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \frac{1}{8} & \text{si } 0\le x<1\\ \frac{1}{2} & \text{si } 1\le x<2\\ \frac{7}{8} & \text{si } 2\le x<3\\ 1 & \text{si } x\ge 3\end{cases}$$





6. Página 344

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } -\infty<x<1\\ 0{,}1 & \text{si } 1\le x<2\\ 0{,}3 & \text{si } 2\le x<3\\ 0{,}6 & \text{si } 3\le x<4\\ 0{,}7 & \text{si } 4\le x<5\\ 0{,}8 & \text{si } 5\le x<6\\ 1 & \text{si } 6\le x<+\infty\end{cases} \rightarrow f(x)=\begin{cases}0{,}1 & \text{si } x=1,4,5\\ 0{,}2 & \text{si } x=2,6\\ 0{,}3 & \text{si } x=3\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$



7. Página 345

La variable es discreta, porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3 y 4.

$n=4$ es el número de veces que se realiza el experimento.

Sea A = «Salir un 5», entonces $P(A)=\frac{1}{6}$.

Los experimentos son independientes, porque lo que sucede en un lanzamiento no influye en el siguiente.

Por tanto, la variable sigue una distribución binomial: $B\left(4, \frac{1}{6}\right)$

8. Página 345

La variable es discreta y mide la cantidad de veces que se repite un suceso («Salir 3»), que no depende de los sucesos anteriores. La probabilidad de que ocurra ese suceso es $\frac{1}{4}$; por tanto, la variable aleatoria sigue una distribución $B\left(3, \frac{1}{4}\right)$.

$$P(X=0)=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(1-\frac{1}{4}\right)^{3-0}=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64} \qquad P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)^{3-2}=3\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$$

$$P(X=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(1-\frac{1}{4}\right)^{3-1}=3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}=\frac{27}{64} \qquad P(X=3)=\binom{3}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(1-\frac{1}{4}\right)^{3-3}=\frac{1}{64}$$

Calculamos la media y la varianza:

$$\mu=0\cdot\frac{27}{64}+1\cdot\frac{27}{64}+2\cdot\frac{9}{64}+3\cdot\frac{1}{64}=\frac{48}{64}=\frac{3}{4} \qquad \sigma^2=0^2\cdot\frac{27}{64}+1^2\cdot\frac{27}{64}+2^2\cdot\frac{9}{64}+3^2\cdot\frac{1}{64}-\frac{3^2}{4^2}=\frac{18}{16}-\frac{9}{16}=\frac{9}{16}$$

$$np=3\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=\mu \qquad npq=3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{16}=\sigma^2$$

9. Página 346

a) $P(X=4)=\binom{8}{4}\cdot 0{,}6^4\cdot 0{,}4^4=0{,}23$

b) $P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}0085$

c) $P(X\geq 6)=P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)=0{,}315$

d) $P(3\leq X\leq 5)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=0{,}635$

e) $P(X\leq 7)=1-P(X=8)=0{,}983$

f) $P(0<X<8)=1-(P(X=0)+P(X=8))=0{,}9825$

10. Página 346

$X\equiv B(10;\,0{,}02)$

a) $P(X=2)=\binom{10}{2}\cdot 0{,}02^2\cdot 0{,}98^8=0{,}01531$

b) $P(X>1)=1-P(X\leq 1)=1-(P(X=0)+P(X=1))=$

$$=1-\binom{10}{0}\cdot 0{,}02^0\cdot 0{,}98^{10}-\binom{10}{1}\cdot 0{,}02^1\cdot 0{,}98^9=1-0{,}8171-0{,}1667=0{,}0162$$

11. Página 347

$X\equiv B(3;\,0{,}4)$

$P(X=2)=0{,}288$

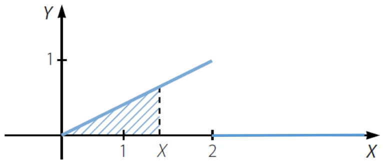
12. Página 348

a) $P(X=3)+P(X=0)=0{,}064+0{,}216=0{,}28$

b) $1-P(X=3)=1-0{,}064=0{,}936$

13. Página 348

La gráfica de *f*(*x*) es:



$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{2} kx\,dx+\int_{2}^{+\infty} 0\,dx=\left[\frac{kx^2}{2}\right]_0^2=\frac{k\cdot 2^2}{2}-\frac{k\cdot 0^2}{2}=2k\rightarrow k=\frac{1}{2}$$

Si $-\infty<x<0\rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,dx=0$

Si $0\leq x\leq 2\rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{x}\frac{x}{2}dx=0+\frac{x^2}{4}=\frac{x^2}{4}$

Si $2<x<+\infty\rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{2}\frac{x}{2}dx+\int_{2}^{x} 0\,dx=0+1+0=1$

Luego: $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } -\infty<x<0 \\ \dfrac{x^2}{4} & \text{si } 0\leq x\leq 2 \\ 1 & \text{si } 2<x<+\infty \end{cases}$

14. Página 348

La función de densidad será:

$$F'(x)=f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } -\infty<x<0 \\ 2x & \text{si } 0\leq x\leq 1 \\ 0 & \text{si } 1<x<+\infty \end{cases}$$

15. Página 349

Tipificamos las distribuciones para compararlas:

Ebanista: $1320\xrightarrow{\text{Tipificar}}\frac{1320-1280}{200}=0{,}2$

Fontanero: $1100\xrightarrow{\text{Tipificar}}\frac{1100-1060}{180}=0{,}222$

$0{,}2<0{,}222\longrightarrow$ Es mejor oferta la del fontanero.

16. Página 349

$z_1=\frac{2-1}{2}=0{,}5$ $\qquad z_2=\frac{1-2}{1}=-1$ $\qquad z_3=\frac{1{,}5-1{,}5}{1{,}5}=0$

$z_2<z_3<z_1$

17. Página 350

a) $P(X<2)=P\left(\frac{X-5}{2}<\frac{2-5}{2}\right)=P(Z<-1{,}5)=1-P(Z\leq 1{,}5)=1-0{,}9332=0{,}0668$

b) $P(X>3)=P\left(\frac{X-5}{2}>\frac{3-5}{2}\right)=P(Z>-1)=P(Z<1)=0{,}8413$

c) $P(X \leq 4) = P\left(\frac{X-5}{2} \leq \frac{4-5}{2}\right) = P(Z \leq -0{,}5) = 1 - P(Z \leq 0{,}5) = 0{,}3085$

d) $P(X \geq 6) = 1 - P\left(\frac{X-5}{2} \leq \frac{6-5}{2}\right) = 1 - P(Z \leq 0{,}5) = 0{,}3085$

e) $P(X < 7) = P\left(\frac{X-5}{2} \leq \frac{7-5}{2}\right) = P(Z < 1) = 0{,}8413$

f) $P(X \leq 8) = P\left(\frac{X-5}{2} \leq \frac{8-5}{2}\right) = P(Z \leq 1{,}5) = 0{,}9332$

18. Página 350

a) $P(X > 200) = P\left(\frac{X-192}{12} > \frac{200-192}{12}\right) = P(Z > 0{,}67) = 1 - P(Z \leq 0{,}67) =$
$= 1 - 0{,}7486 = 0{,}2514$

b) $P(180 < X < 220) = P\left(\frac{180-192}{12} < \frac{X-192}{12} < \frac{220-192}{12}\right) = P(-1 < Z < 2{,}33) =$
$= P(Z < 2{,}33) - (1 - P(Z < 1)) = 0{,}9901 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}8314$

19. Página 351

$X \equiv B(2\,000;\ 0{,}01) \approx N(20;\ 4{,}45)$

$P(X > 50) = P\left(\frac{X-20}{4{,}45} > \frac{50-20}{4{,}45}\right) = P(Z > 6{,}74) = 1 - P(Z \leq 6{,}74) = 1 - 1 = 0$

$P(X < 25) = P\left(\frac{X-20}{4{,}45} < \frac{25-20}{4{,}45}\right) = P(Z < 1{,}12) = 0{,}8686$

20. Página 351

$X \equiv B(100;\ 0{,}1) \approx N(10{,}3)$

$P(X \geq 14) = P\left(\frac{X-10}{3} \geq \frac{14-10}{3}\right) = P(Z \geq 1{,}33) = 1 - P(Z < 1{,}33) =$
$= 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$

$P(X = 14) = P(13{,}5 < X < 14{,}5) = P\left(\frac{13{,}5-10}{3} < \frac{X-10}{3} < \frac{14{,}5-10}{3}\right) =$
$= P(Z < 1{,}5) - P(Z < 1{,}17) = 0{,}9332 - 0{,}879 = 0{,}0542$

SABER HACER

21. Página 352

a) Es una variable discreta que cuenta el número de veces que ocurre un suceso determinado («Tener gingivitis»), y que ocurra ese suceso es independiente de si ha ocurrido o no antes. Por tanto, la variable estadística X sigue una binomial:

- El número de experimentos es 7.
- La probabilidad de que ocurra el suceso es $\frac{1}{8} = 0{,}125$.

Por tanto, $X \equiv B(7;\ 0{,}125)$.

b) $P(X=2)=0,168$

c) $P(X=0)=0,393$

d) $\mu=7\cdot 0,125=0,875$ $\sigma^2=7\cdot 0,125\cdot 0,875=0,766$

22. Página 352

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^3 (kx+1)dx=\left[\frac{kx^2}{2}+x\right]_0^3=\frac{k\cdot 9}{2}+3\rightarrow\frac{9k}{2}+3=1\rightarrow k=-\frac{4}{9}$$

Así, tenemos que la función de distribución es: $F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x-\dfrac{2x^2}{9} & \text{si } 0\le x\le 3\\ 1 & \text{si } 3<x\end{cases}$

23. Página 352

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^2 kx^3dx=\left[\frac{kx^4}{4}\right]_0^2=4k\rightarrow k=\frac{1}{4}$$

Luego la función de distribución es: $F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \dfrac{x^4}{16} & 1\le x\le 3\\ 1 & x>3\end{cases}$

24. Página 353

a) $P(Z\ge 0,7)=1-P(X\le 0,7)=0,242$

b) $P(Z\ge 1,73)=1-P(X\le 1,73)=0,0418$

c) $P(Z\ge 2,03)=1-P(X\le 2,03)=0,0212$

25. Página 353

a) $P(0,2\le Z\le 0,9)=P(Z\le 0,2)-P(Z\le 0,9)=0,2366$

b) Por simetría de la normal, tenemos: $P(-1,9\le Z\le -1,2)=P(1,2\le Z\le 1,9)=P(Z\le 1,9)-P(Z\le 1,2)=0,0864$

26. Página 353

a) $P(Z\le -1,3)=1-P(X\le 1,3)=0,0968$

b) $P(Z\ge -1,3)=P(X\le 1,3)=0,9032$

c) $P(Z\ge -1,82)=P(X\le 1,82)=0,9656$

d) $P(Z\le -1,82)=1-P(X\le 1,82)=0,0344$

27. Página 354

a) $P(Z<a)=0,8907\rightarrow a=1,23$

b) $P(Z<b)=0,3446\rightarrow P(Z<-b)=1-0,3446=0,6554\rightarrow -b=0,4\rightarrow b=-0,4$

c) $P(Z<a)=0,49\rightarrow P(Z<-a)=1-0,49=0,51\rightarrow -a=0,025\rightarrow a=-0,025$

d) $P(Z>a)=0,1\rightarrow P(Z<a)=1-0,1=0,9\rightarrow a=1,28$

28. Página 354

$$P(11,2 \le X \le 12,5) = P(X \le 12,5) - P(X \le 11,2) = P\left(\frac{X-12}{0,6} \le \frac{12,5-12}{0,6}\right) - P\left(\frac{X-12}{0,6} \le \frac{11,2-12}{0,6}\right) =$$

$$= P(Z \le 0,83) - P(Z \le -1,33) = P(Z \le 0,83) - (1 - P(Z \le 1,33)) = 0,705$$

29. Página 354

X = «Diámetro de las piezas producidas» $\qquad X \equiv N(45; \sigma)$

$$P(X > 50) = 0,006 \rightarrow P\left(\frac{X-45}{\sigma} > \frac{50-45}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{5}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \le \frac{5}{\sigma}\right) = 0,006 \rightarrow P\left(Z \le \frac{5}{\sigma}\right) = 0,994 \rightarrow \frac{5}{\sigma} = 2,51 \rightarrow \sigma = 1,992$$

30. Página 355

$$P(X \le 12,2) = 0,67 \rightarrow P\left(Z \le \frac{12,2-\mu}{\sigma}\right) = 0,67 \rightarrow \frac{12,2-\mu}{\sigma} = 0,44$$

$$P(X > 16,7) = 0,09 \rightarrow P\left(Z > \frac{16,7-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \frac{16,7-\mu}{\sigma}\right) = 1 - 0,09 = 0,91 \rightarrow \frac{16,7-\mu}{\sigma} = 1,34$$

Resolvemos el sistema planteado por las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{12,2-\mu}{\sigma} = 0,44 \\ \dfrac{16,7-\mu}{\sigma} = 1,34 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu = 10 \\ \sigma = 5 \end{array}\right\}$$

31. Página 355

La distribución que rige esta variable es $B(70; 0,15)$. Como $n \cdot p = 10,5 > 5$ y $n \cdot (1 - p) = 59,5 > 5$ podemos aproximarla por una normal:

$$X \equiv B(70; 0,15) \approx N(10,5; 2,987)$$

La probabilidad pedida será:

$$P(15 \le X \le 18) = P(X \le 18) - P(X \le 15) \approx P\left(Z \le \frac{18-10,5}{2,987}\right) - P\left(Z \le \frac{15-10,5}{2,987}\right) = 0,994 - 0,9345 = 0,06$$

ACTIVIDADES FINALES

32. Página 356

a) Determinamos el espacio muestral, siendo B = «Blanca» y A = «Azul»:

E = {BBB, BBA, BAB, BAA, ABB, ABA, AAB, AAA}

Los sucesos no tienen la misma probabilidad, ya que cada extracción no es independiente. El total de bolas es 7. Calculamos las probabilidades de los sucesos elementales:

$$P(X=0) = \underbrace{\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}}_{\text{AAA}} = \frac{6}{210} = \frac{1}{35}$$

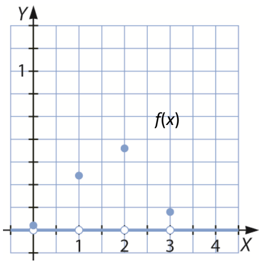
$$P(X=2) = \underbrace{\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}}_{\text{BBA}} + \underbrace{\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}}_{\text{BAB}} + \underbrace{\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}}_{\text{ABB}} = \frac{108}{210} = \frac{18}{35}$$

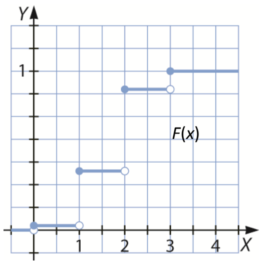
$$P(X=1) = \underbrace{\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}}_{\text{BAA}} + \underbrace{\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}}_{\text{ABA}} + \underbrace{\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}}_{\text{AAB}} = \frac{72}{210} = \frac{12}{35}$$

$$P(X=3) = \underbrace{\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}}_{\text{BBB}} = \frac{24}{210} = \frac{4}{35}$$

Las funciones de probabilidad y de distribución son, respectivamente:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{35} & \text{si } x=0\\ \frac{12}{35} & \text{si } x=1\\ \frac{18}{35} & \text{si } x=2\\ \frac{4}{35} & \text{si } x=3\\ 0 & \text{en el resto de los valores}\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \frac{1}{35} & \text{si } 0\le x<1\\ \frac{13}{35} & \text{si } 1\le x<2\\ \frac{31}{35} & \text{si } 2\le x<3\\ 1 & \text{si } 3\le x\end{cases}$$





b) Determinamos el espacio muestral, siendo F = «Fresa», N = «Naranja» y M = «Menta»:

E = {FF, FN, FM, NN, NF, NM, MF, MN}

Los sucesos no tienen la misma probabilidad, ya que cada extracción no es independiente. El total de caramelos es 7. Calculamos las probabilidades de los sucesos elementales:

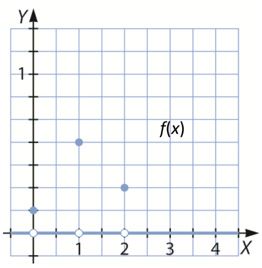
$$P(X=0)=\underbrace{\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}}_{FF}+\underbrace{\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}}_{FM}+\underbrace{\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{6}}_{MF}=\frac{6}{42}=\frac{1}{7}$$

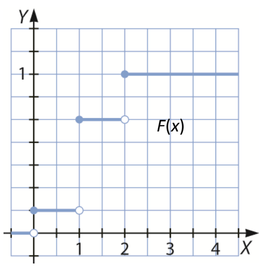
$$P(X=1)=\underbrace{\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{6}}_{FN}+\underbrace{\frac{1}{7}\cdot\frac{4}{6}}_{MN}+\underbrace{\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{6}}_{NF}+\underbrace{\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{6}}_{NM}=\frac{24}{42}=\frac{4}{7}$$

$$P(X=2)=\underbrace{\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}}_{NN}=\frac{12}{42}=\frac{2}{7}$$

Las funciones de probabilidad y de distribución son, respectivamente:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{7} & \text{si } x=0\\ \frac{4}{7} & \text{si } x=1\\ \frac{2}{7} & \text{si } x=2\\ 0 & \text{en el resto de los valores}\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \frac{1}{7} & \text{si } 0\le x<1\\ \frac{5}{7} & \text{si } 1\le x<2\\ 1 & \text{si } 2\le x\end{cases}$$





c) Determinamos el espacio muestral, siendo V = «Varón» y M = «Mujer»:

E = {VVVV, VVVM, VVMV, VMVV, MVVV, VVMM, VMMV,VMVM,MVMV, MVVM, MMVV, MMMV, MMVM, MVMM, VMMM, MMMM}

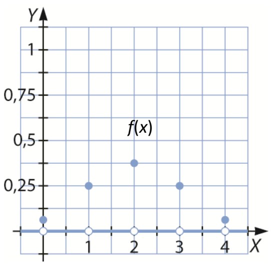
Los sucesos tienen la misma probabilidad, y el número total es 16. Calculamos las probabilidades de los sucesos elementales:

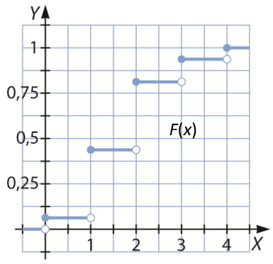
$P(X=0)=\frac{1}{16}$ $\quad P(X=1)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ $\quad P(X=2)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$ $\quad P(X=3)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ $\quad P(X=4)=\frac{1}{16}$

Las funciones de probabilidad y de distribución son, respectivamente:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{16} & \text{si } x=0 \text{ o } x=4\\ \frac{1}{4} & \text{si } x=1 \text{ o } x=3\\ \frac{3}{8} & \text{si } x=2\\ 0 & \text{en el resto de los valores}\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \frac{1}{16} & \text{si } 0\le x<1\\ \frac{5}{16} & \text{si } 1\le x<2\\ \frac{11}{16} & \text{si } 2\le x<3\\ \frac{15}{16} & \text{si } 3\le x<4\\ 1 & \text{si } 4\le x\end{cases}$$





33. Página 356

a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}\neq 1 \rightarrow$ No es una función de probabilidad.

b) $\frac{1}{2}+\frac{3}{25}+\frac{2}{7}+\frac{2}{25}=\frac{69}{70}\neq 1 \rightarrow$ No es una función de probabilidad.

c) $\frac{1}{4}+\frac{2}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{7}{6}\neq 1 \rightarrow$ No es una función de probabilidad.

d) $0{,}2+0{,}1+0{,}1+0{,}2+0{,}4=1 \rightarrow$ Es una función de probabilidad.

Su función de distribución es:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<x_1\\ 0{,}2 & \text{si } x_1\le x<x_2\\ 0{,}3 & \text{si } x_2\le x<x_3\\ 0{,}4 & \text{si } x_3\le x<x_4\\ 0{,}6 & \text{si } x_4\le x<x_5\\ 1 & \text{si } x_5\le x\end{cases}$$

34. Página 356

a) $P(\text{Sacar bola de } U_1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ $\qquad$ $P(\text{Sacar bola de } U_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{12}$

Todos los sucesos tienen la misma probabilidad: $P(X = x_i) = \frac{1}{12}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12} & \text{si } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \text{ o } 12 \\ 0 & \text{en el resto de los valores} \end{cases}$ $\qquad$ $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{[x]}{12} & \text{si } 1 \le x < 12 \\ 1 & \text{si } 12 \le x \end{cases}$

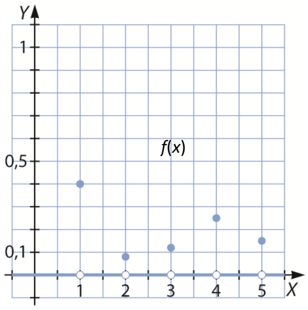
$\mu = 6{,}5$ $\qquad$ $\sigma^2 = 11{,}9167$ $\qquad$ $\sigma = 3{,}452$

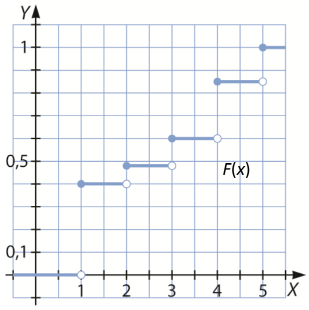
35. Página 356

Comprobamos que es una función de probabilidad:

$0{,}4 + 0{,}08 + 0{,}12 + 0{,}25 + 0{,}15 = 1 \rightarrow$ Es función de probabilidad.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 0{,}4 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 0{,}48 & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 0{,}6 & \text{si } 3 \le x < 4 \\ 0{,}85 & \text{si } 4 \le x < 5 \\ 1 & \text{si } 5 \le x \end{cases}$$





36. Página 356

a) $P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - F(3) = 0{,}4$

b) $P(X \le 2) = F(2) = 0{,}48$

c) $P(2 < X \le 4) = P(X \le 4) - P(X \le 2) = F(4) - F(2) = 0{,}37$

d) $\mu = 2{,}67$; $\sigma = 1{,}556$

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(1{,}114 < X < 4{,}226) = P(X < 4{,}226) - P(X \le 1{,}114) = F(4{,}226) - F(1{,}114) = 0{,}45$

37. Página 356

a) $0{,}6 + 0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}05 = 1$

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 4 \\ 0{,}6 & \text{si } 4 \le x < 5 \\ 0{,}8 & \text{si } 5 \le x < 6 \\ 0{,}95 & \text{si } 6 \le x < 7 \\ 1 & \text{si } 7 \le x < +\infty \end{cases}$

c) Media: $\mu = 4{,}65$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{0{,}8275} = 0{,}909$

38. Página 356

a) $P(X > 4) = 0{,}4$

b) $P(X < 6) = 0{,}8$

c) $P(4 \leq X < 7) = 0{,}95$

d) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(3{,}741 < X < 5{,}559) = 0{,}8$

39. Página 356

a) Como la ficha sacada se vuelve a meter en la urna, la probabilidad de sacar una ficha roja es siempre la misma:

$P(\text{Sacar ficha roja}) = \frac{5}{14} \rightarrow P(\text{No sacar ficha roja}) = \frac{9}{14}$

Determinamos el espacio muestral, siendo R = «Sacar rojo» y N = «No sacar rojo»:

E = {NNN, NNR, NRN, RNN, NRR, RNR, RRN, RRR}

Los sucesos no tienen la misma probabilidad. Calculamos las probabilidades de los sucesos elementales:

$P(X = 0) = \left(\frac{9}{14}\right)^3 = \frac{729}{2744}$

$P(X = 2) = 3 \cdot \left(\frac{9}{14}\right)\left(\frac{5}{14}\right)^2 = \frac{675}{2744}$

$P(X = 1) = 3 \cdot \left(\frac{9}{14}\right)^2 \left(\frac{5}{14}\right) = \frac{1215}{2744}$

$P(X = 3) = \left(\frac{5}{14}\right)^3 = \frac{125}{2744}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{729}{2\,744} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1215}{2\,744} & \text{si } x = 1 \\ \frac{675}{2\,744} & \text{si } x = 2 \\ \frac{125}{2\,744} & \text{si } x = 3 \\ 0 & \text{en el resto de los valores} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{729}{2\,744} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1944}{2\,744} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{2619}{2\,744} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

40. Página 356

a)

X	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	$\frac{7}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{28}$

b) $\mu_X = 4$ $\quad \sigma_X = 1{,}732$

$\mu_Y = 2$ $\quad \sigma_Y = 1{,}732$

c) $P(X < 4) = \frac{5}{14}$

d) $P(X \geq 5) = \frac{3}{28}$

41. Página 357

a)

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

$\mu = 7 \qquad \sigma = 2{,}4152$

b) $P(X > 9) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

c) $P(X \le 5) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

42. Página 357

$P(\text{Sacar bola de } B_1) = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $P(\text{Sacar bola de } B_2) = \frac{1}{5}$ $\qquad$ $P(\text{Sacar un par } (b_1, b_2)) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$

Algunos resultados no son posibles porque no se pueden obtener multiplicando los números de las bolsas.

X	Posibilidades	$P(X=x_i)$
1	(1, 1)	$\frac{1}{20}$
2	(1, 2) (2, 1)	$\frac{1}{10}$
3	(1, 3) (3, 1)	$\frac{1}{10}$
4	(1, 4) (4, 1) (2, 2)	$\frac{3}{20}$
5	(1, 5)	$\frac{1}{20}$
6	(2, 3) (3, 2)	$\frac{1}{10}$
8	(2, 4) (4, 2)	$\frac{1}{10}$
9	(3, 3)	$\frac{1}{20}$
10	(2, 5)	$\frac{1}{20}$
12	(3, 4) (4, 3)	$\frac{1}{10}$
15	(3, 5)	$\frac{1}{20}$
16	(4, 4)	$\frac{1}{20}$
20	(4, 5)	$\frac{1}{20}$

$P(X > 12) = \frac{3}{20}$

43. Página 357

a) La variable aleatoria no sigue una distribución binomial.

b) La variable es discreta porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3.

$n = 3$ es el número de veces que se realiza el experimento.

Sea A = «Salir una ficha blanca», entonces $P(A) = \frac{3}{8}$.

Los experimentos son independientes, porque lo que sucede en una extracción no influye en la siguiente.

Por tanto, la variable sigue una distribución binomial: $B\left(3, \frac{3}{8}\right)$

c) La variable es discreta porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

$n = 10$ es el número de veces que se realiza el experimento.

Sea A = «Salir un 1», entonces $P(A) = \frac{1}{6}$.

Los experimentos son independientes, porque lo que sucede en un lanzamiento no influye en el siguiente.

Por tanto, la variable sigue una distribución binomial: $B\left(10, \frac{1}{6}\right)$

d) La variable aleatoria no sigue una distribución binomial.

e) La variable es discreta, porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20.

$n = 20$ es el número de veces que se realiza el experimento.

Sea A = «Tener los ojos azules», entonces $P(A) = 0{,}1$.

Los experimentos son independientes, porque el color de los ojos de una persona no influye en el color de los ojos de la otra persona.

Por tanto, la variable sigue una distribución binomial: $B(20; 0{,}1)$

44. Página 357

$X \equiv B(4; 0{,}25)$	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,3164	0,4219	0,2109	0,0469	0,0039

45. Página 357

a)

$X \equiv B(3; 0{,}9)$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,001	0,027	0,243	0,729

$\mu = 2{,}7$

$\sigma = 0{,}5196$

b)

$X \equiv B(5; 0{,}15)$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,4437	0,3915	0,1382	0,02438	0,0022	0,00008

$\mu = 0{,}75$

$\sigma = 0{,}7984$

46. Página 357

a) Es una $B(50; 0{,}97) \rightarrow \mu = 48{,}5 \quad \sigma = 1{,}21 \rightarrow$ El caso con mayor probabilidad es 49.

b) Es una $B(5; 0{,}12) \rightarrow \mu = 0{,}6 \quad \sigma = 0{,}7266 \rightarrow$ El caso con mayor probabilidad es 0.

c) Es una $B\left(10; \frac{1}{6}\right) \rightarrow \mu = 1{,}67 \quad \sigma = 1{,}18 \rightarrow$ El caso con mayor probabilidad es 1.

d) Es una $B\left(7;\frac{1}{2}\right) \to \mu = 3,5 \quad \sigma = 1,323 \to$ Los casos con mayor probabilidad son 3 y 4.

e) Es una $B(20;0,7) \to \mu = 14 \quad \sigma = 2,049 \to$ El caso con mayor probabilidad es 14.

f) Si la variable aleatoria fuese saber si se han titulado en el tiempo mínimo sí sería una binomial, pero esta variable no sigue una binomial.

47. Página 357

a) $P(X = 0) = 0,2401 \quad P(X < 2) = 0,6517 \quad P(X \geq 3) = 0,0837$

b) $P(X = 7) = 0,267 \quad P(X \leq 4) = 0,1138 \quad P(X > 6) = 0,3671$

c) $P(X = 8) = 0,0147 \quad P(X \leq 1) = 0,0355 \quad P(X < 10) = 0,9998$

48. Página 357

X	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

$\mu = 5 \cdot 0,8 = 4 \qquad \sigma = \sqrt{0,8} = 0,89 = \sqrt{5 \cdot 0,8 \cdot 0,2}$

49. Página 357

$X \equiv B(12;\ 0,002)$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) =$$
$$= 1 - \binom{12}{0} \cdot 0,002^0 \cdot 0,998^{12} - \binom{12}{1} \cdot 0,002^1 \cdot 0,998^{11} - \binom{12}{2} \cdot 0,002^2 \cdot 0,998^{10} =$$
$$= 1 - 0,97626 - 0,023477 - 0,00025877 = 0,000004$$

50. Página 357

Sea $X =$ «Tirar una moneda al aire 8 veces y apuntar el número de caras» $\to X \equiv B\left(8;\frac{1}{2}\right)$

$P(X \leq 5) = 0,8555$

51. Página 358

Sea $X =$ «Cuántos grifos son defectuosos de una muestra de 9 grifos» $\to X \equiv B(9;0,06)$

a) $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 0,0978$ b) $P(X = 0) = 0,573$

52. Página 358

Sea $X =$ «Cuántas chicas hay en el grupo de 6 estudiantes» $\to X \equiv B\left(6;\frac{1}{2}\right)$

a) $P(X \leq 3) = 0,6563$ b) $P(X = 0) = 0,0156$ c) $P(X = 3) = 0,3125$

53. Página 358

Por cada chica hay tres chicos, es decir: $P(\text{Chica}) = \frac{1}{4} \to X \equiv B\left(6;\frac{1}{4}\right)$

a) $P(X \leq 3) = 0,9624$ b) $P(X = 0) = 0,178$ c) $P(X = 3) = 0,1318$

54. Página 358

Sea X = «Cuántos enfermos sanarán del grupo de 20» $\rightarrow X \equiv B(20; 0,8)$.

$P(10 < X < 15) = P(x < 15) - P(X \leq 10) = 0,1932$

55. Página 358

Sea X = «Cuántos 5 salen en los 4 dados» $\rightarrow X \equiv B\left(4; \frac{1}{6}\right)$.

a) $P(X = 2) = 0,1157$ b) $P(X > 2) = 0,0162$ c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0,5177$

El orden sería: b) < a) < c).

56. Página 358

Sea X = «Cuántas canastas encesta de 5 lanzamientos» $\rightarrow X \equiv B(5; 0,4)$.

a) $P(X = 4) = 0,0768$

b) $P(X > 3) = 0,087$

c) $P(X \leq 2) = 0,6826$

d) $P(X = 0) = 0,0778$

57. Página 358

Sea X = «Cuántos encuestados responden 'NS/NC' de los 15» $\rightarrow X \equiv B(15; 0,13)$.

a) $P(X \geq 10) = 0,000002$ b) $P(X = 3) = 0,188$

58. Página 358

Sea X = «Cuántas revisiones son no aptas de los 35 vehículos» $\rightarrow X \equiv B\left(35; \frac{1}{12}\right)$.

a) $P(X = 3) = 0,234$ b) $P(X = 0) = 0,0476$ c) $P(X \leq 30) \approx 1$

59. Página 358

a) $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 kdx + \int_1^2 4kdx = [kx]_0^1 + [4kx]_1^2 = k + 8k - 4k = 5k \rightarrow k = \frac{1}{5}$

La función de distribución es: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{5} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{4x}{5} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$

b) $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^k \frac{x+1}{4}dx = \left[\frac{x^2}{8} + \frac{x}{4}\right]_0^k = \frac{k^2}{8} + \frac{k}{4} \rightarrow k^2 + 2k - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} k = -4 \\ k = 2 \end{cases}$

La única solución válida es $k = 2$ ya que este valor debe ser mayor que cero.

La función de distribución es: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 + 2x}{8} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$

c) $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(-0{,}5x+k)dx=\int_{-1}^{1}(-\frac{x}{2}+k)dx=\left[-\frac{x^2}{4}+kx\right]_{-1}^{1}=-\frac{1}{4}+k+\frac{1}{4}+k\rightarrow 1=2k\rightarrow k=\frac{1}{2}$

La función de distribución es: $F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<-1\\ \dfrac{-x^2+2x+3}{4} & \text{si } -1\le x\le 1\\ 1 & \text{si } 1<x\end{cases}$

60. Página 358

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{2}^{8}\frac{1}{6}dx=\left[\frac{x}{6}\right]_{2}^{8}=\frac{8}{6}-\frac{2}{6}=1\longrightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6} & \text{si } x\in[2,8]\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$ es una función de densidad.

La función de distribución es:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<2\\ \dfrac{x-2}{6} & \text{si } 2\le x\le 8\\ 1 & \text{si } 8<x\end{cases}$$

a) $P(X<3)=F(3)=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$

b) $P(3\le X\le 5)=P(X\le 5)-P(X<3)=F(5)-F(3)=\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

c) $P(X>6)=1-P(X\le 6)=1-F(6)=1-\frac{4}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

61. Página 358

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{1}^{5}\frac{x}{12}dx=\left[\frac{x^2}{24}\right]_{1}^{5}=\frac{25}{24}-\frac{1}{24}=1\longrightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{12} & \text{si } x\in[1,5]\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$ es una función de densidad.

La función de distribución es:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ \dfrac{x^2-1}{24} & \text{si } 1\le x\le 5\\ 1 & \text{si } 5<x\end{cases}$$

a) $P(X<2)=F(2)=\frac{4-1}{24}=\frac{1}{8}$

b) $P\left(\frac{3}{2}\le X\le 4\right)=P(X\le 4)-P\left(X<\frac{3}{2}\right)=F(4)-F\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{16-1}{24}-\frac{(3/2)^2-1}{24}=\frac{5}{8}-\frac{5}{96}=\frac{55}{96}$

c) $P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-F(3)=1-\frac{3^2-1}{24}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

62. Página 358

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{\pi} \frac{sen\,x}{2}dx = \left[\frac{-cos\,x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1 \rightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\,x}{2} & \text{si } x \in [0,\ \pi] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,\ \pi] \end{cases}$$ es una función de densidad.

La función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1-cos\,x}{2} & \text{si } 0 \le x \le \pi \\ 1 & \text{si } \pi < x \end{cases}$$

a) $P\left(0 \le X \le \frac{\pi}{4}\right) = P\left(X \le \frac{\pi}{4}\right) - P(X<0) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{2-\sqrt{2}}{4} - 0 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

b) $P\left(\frac{\pi}{2} \le X\right) = 1 - P\left(X < \frac{\pi}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

c) $P\left(\frac{\pi}{3} \le X \le 4\right) = P(X \le 4) - P\left(X < \frac{\pi}{3}\right) = F(4) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

63. Página 359

La función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^3}{8} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

a) $P(0,5 < X < 1,5) = F(1,5) - F(0,5) = 0,40625$

b) $P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = 0,875$

c) $P(X < 1,5) = F(1,5) = 0,4219$

d) $P(X > 1,2) = 1 - F(1,2) = 0,784$

64. Página 359

a) $P(2 \le X \le 3) = F(3) - F(2) = \frac{1}{3}$

b) $P(X \le 3) = F(3) = \frac{2}{3}$

c) $P(1,5 \le X \le 2,5) = F(2,5) - F(1,5) = \frac{1}{3}$

d) $P(X > 2) = 1 - F(2) = \frac{2}{3}$

65. Página 359

a) $P(3 \le X \le 4) = P(X \le 4) - P(X \le 3) = F(4) - F(3) = 1 - 0 = 1$

b) $P(3,5 \le X < 3,6) = P(X < 3,6) - P(X \le 3,5) = F(3,6) - F(3,5) = 0,57 - 0,47 = 0,1$

c) $P(X \le 3,5) = F(3,5) = 0,47$

d) $P(X > 3,8) = 1 - P(X \le 3,8) = 1 - F(3,8) = 1 - 0,78 = 0,22$

66. Página 359

a) $P(Z < 0,6) = 0,7257$

b) $P(Z \leq 0,92) = 0,8212$

c) $P(Z < 1,3) = 0,9032$

d) $P(Z \leq 2,4) = 0,9918$

e) $P(Z < 1,23) = 0,8907$

f) $P(Z \leq 2,01) = 0,9778$

g) $P(Z \leq 0,07) = 0,5279$

h) $P(Z < 0,31) = 0,6217$

67. Página 359

a) $P(Z \geq 0,68) = 1 - P(Z \leq 0,68) = 0,2483$

b) $P(Z > 0,9) = 1 - P(Z \leq 0,9) = 0,1841$

c) $P(Z > 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 0,0668$

d) $P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 0,0228$

e) $P(Z = 1,2) = 0$

f) $P(Z > 1,6) = 1 - P(Z \leq 1,6) = 0,0548$

g) $P(Z > 0,03) = 1 - P(Z \leq 0,03) = 0,488$

h) $P(Z \geq 2,21) = 1 - P(Z \leq 2,21) = 0,0136$

68. Página 359

a) $P(Z \leq -0,4) = 1 - P(Z \leq 0,4) = 0,3446$

b) $P(Z \leq -1,62) = 1 - P(Z \leq 1,62) = 0,0526$

c) $P(Z < -2,3) = 1 - P(Z \leq 2,3) = 0,0107$

d) $P(Z = -2,05) = 0$

e) $P(Z < -2,5) = 1 - P(Z \leq 2,5) = 0,0062$

f) $P(Z \leq -1,76) = 1 - P(Z \leq 1,76) = 0,0392$

g) $P(Z < -0,13) = 1 - P(Z \leq 0,13) = 0,4483$

h) $P(Z \leq -1,07) = 1 - P(Z \leq 1,07) = 0,1423$

69. Página 359

a) $P(Z > -1,27) = P(Z \leq 1,27) = 0,898$

b) $P(Z \geq -2,02) = P(Z \leq 2,02) = 0,9783$

c) $P(Z > -1,35) = P(Z \leq 1,35) = 0,9115$

d) $P(Z \geq -2) = P(Z \leq 2) = 0,9772$

e) $P(Z = -0,2) = 0$

f) $P(Z \geq -1,04) = P(Z \leq 1,04) = 0,8508$

g) $P(Z > -0,09) = P(Z \leq 0,09) = 0,5359$

h) $P(Z \geq -2,31) = P(Z \leq 2,31) = 0,9896$

70. Página 359

a) $P(Z > 1,11) = 1 - P(Z \leq 1,11) = 0,1335$

b) $P(Z \leq -0,93) = 1 - P(Z \leq 0,93) = 0,1762$

c) $P(Z \geq 2,29) = 1 - P(Z \leq 2,29) = 0,011$

d) $P(Z = 0) = 0$

e) $P(Z < -0,33) = 1 - P(Z \leq 0,33) = 0,3707$

f) $P(Z > 0,45) = 1 - P(Z \leq 0,45) = 0,3264$

g) $P(Z \leq -1) = 1 - P(Z \leq 1) = 0,1587$

h) $P(Z \geq -2,11) = P(Z \leq 2,11) = 0,9826$

71. Página 359

a) $P\left(Z \leq \frac{1}{2}\right) = 0,6915$

b) $P\left(Z \geq -\frac{3}{4}\right) = P\left(Z \leq \frac{3}{4}\right) = 0,7734$

c) $P\left(Z > \frac{7}{3}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{7}{3}\right) = 0,0098$

d) $P\left(Z < -\frac{10}{6}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{10}{6}\right) = 0,0478$

e) $P\left(Z \leq \frac{4}{7}\right) = 0,7161$

f) $P\left(Z \geq \frac{5}{2}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{5}{2}\right) = 0,0062$

72. Página 359

a) $P(0,4 < Z \leq 1,8) = P(Z \leq 1,8) - P(Z \leq 0,4) = 0,3086$

b) $P(-0,6 \leq Z \leq 0,93) = P(Z \leq 0,93) - P(Z \leq -0,6) = P(Z \leq 0,93) - (1 - P(Z \leq 0,6)) = 0,5496$

c) $P(-1,51 \leq Z < -0,64) = P(Z \leq -0,64) - P(Z \leq -1,51) = 1 - P(Z \leq 0,64) - (1 - P(Z \leq 1,51)) =$
$= P(Z \leq 1,51) - P(Z \leq 0,64) = 0,1956$

d) $P(-2,31 < Z \leq 0) = P(Z \leq 0) - P(Z < -2,31) = 0,5 - (1 - P(Z \leq 2,31)) = 0,5 - 0,0104 = 0,4896$

73. Página 359

a) $P(-1,8 < Z \leq 1,8) = P(Z \leq 1,8) - P(Z \leq -1,8) = P(Z \leq 1,8) - (1 - P(Z \leq 1,8)) = 2 \cdot P(Z \leq 1,8) - 1 = 0,9281$

b) $P(-2,06 \leq Z \leq 2,06) = 2 \cdot P(Z \leq 2,06) - 1 = 0,9606$

c) $P(-1,51 \leq Z < 1,51) = 2 \cdot P(Z \leq 1,51) - 1 = 0,8690$

d) $P(0 < Z \leq 1,96) = P(Z \leq 1,96) - P(Z \leq 0)) = 0,9750 - 0,5 = 0,4750$

74. Página 359

a) $P(Z < k) = 0,9599 \rightarrow k = 1,75$

b) $P(Z > k) = P(Z \leq -k) = 0,9375 \rightarrow k = -1,535$

c) $P(Z > k) = 1 - P(Z \leq k) = 0,3085 \rightarrow P(Z \leq k) = 0,6915 \rightarrow k = 0,5$

d) $P(Z < k) = 1 - P(Z \leq -k) = 0,0256 \rightarrow P(Z \leq -k) = 0,9744 \rightarrow k = -1,95$

e) $P(Z \leq k) = 1 - P(Z \leq -k) = 0,4364 \rightarrow P(Z \leq -k) = 0,5636 \rightarrow k = -0,16$

f) $P(Z > k) = P(Z \leq -k) = 0,5557 \rightarrow k = -0,14$

75. Página 359

a) $P(X < a) = 0,8849 \rightarrow P\left(\frac{X - 108}{16} < \frac{a - 108}{16}\right) = 0,8849 \rightarrow \frac{a - 108}{16} = 1,2$
$\rightarrow a = 127,2$

b) $P(X < b) = 0,9972 \rightarrow P\left(\frac{X - 108}{16} < \frac{b - 108}{16}\right) = 0,9972 \rightarrow \frac{b - 108}{16} = 2,77$
$\rightarrow b = 152,32$

c) $P(X < c) = 0,3632 \rightarrow P\left(\frac{X - 108}{16} < \frac{c - 108}{16}\right) = 0,3632$
$\rightarrow P\left(\frac{X - 108}{16} \leq -\frac{c - 108}{16}\right) = 0,6368 \rightarrow -\frac{c - 108}{16} = 0,35$
$\rightarrow c = 102,4$

d) $P(X \geq d) = 0,0495 \rightarrow P\left(\frac{X - 108}{16} \geq \frac{d - 108}{16}\right) = 0,0495$
$\rightarrow P\left(\frac{X - 108}{16} < \frac{d - 108}{16}\right) = 0,9505 \rightarrow \frac{d - 108}{16} = 1,65$
$\rightarrow d = 134,4$

e) $P(X \geq e) = 0,5987 \rightarrow P\left(\frac{X - 108}{16} \geq \frac{e - 108}{16}\right) = 0,5987$
$\rightarrow P\left(\frac{X - 108}{16} \leq -\frac{e - 108}{16}\right) = 0,5987 \rightarrow -\frac{e - 108}{16} = 0,25$
$\rightarrow e = 104$

f) $P(X \leq f) = 0,7717 \rightarrow P\left(\frac{X - 108}{16} \leq \frac{f - 108}{16}\right) = 0,7717 \rightarrow \frac{f - 108}{16} = 0,745 \rightarrow f = 119,92$

76. Página 359

$P(-k < Z < k) = P(Z \le k) - (1 - P(Z \le k)) = 2 \cdot P(Z \le k) - 1$

a) $P(-k < Z < k) = 0{,}8414 \to P(Z \le k) = \dfrac{0{,}8414 + 1}{2} = 0{,}9207 \to k = 1{,}41$

b) $P(-k < Z < k) = 0{,}0398 \to P(Z \le k) = \dfrac{0{,}0398 + 1}{2} = 0{,}5199 \to k = 0{,}05$

c) $P(-k < Z < k) = 0{,}383 \to P(Z \le k) = \dfrac{0{,}383 + 1}{2} = 0{,}6915 \to k = 0{,}5$

d) $P(-k < Z < k) = 0{,}4448 \to P(Z \le k) = \dfrac{0{,}4448 + 1}{2} = 0{,}7224 \to k = 0{,}59$

e) $P(-k < Z < k) = 0{,}8664 \to P(Z \le k) = \dfrac{0{,}8664 + 1}{2} = 0{,}9332 \to k = 1{,}5$

f) $P(-k < Z < k) = 0{,}9426 \to P(Z \le k) = \dfrac{0{,}9426 + 1}{2} = 0{,}9713 \to k = 1{,}9$

77. Página 359

Calculamos los extremos correspondientes, $-k$ y k, para $N(0, 1)$ y los transformamos en los extremos x, y de la normal correspondiente mediante las siguientes transformaciones:

$\dfrac{x - \mu}{\sigma} = -k \to x = \mu - \sigma k$ $\qquad$ $\dfrac{y - \mu}{\sigma} = k \to x = \mu + \sigma k$

a) $P(-k < Z < k) = 0{,}9 \to P(Z \le k) = \dfrac{0{,}9 + 1}{2} = 0{,}95 \to k = 1{,}645$ El intervalo es [10,065; 19,935].

b) $P(-k < Z < k) = 0{,}68 \to P(Z \le k) = \dfrac{0{,}68 + 1}{2} = 0{,}84 \to k = 0{,}995$ El intervalo es [41,035; 54,965].

c) $P(-k < Z < k) = 0{,}84 \to P(Z \le k) = \dfrac{0{,}84 + 1}{2} = 0{,}92 \to k = 1{,}405$ El intervalo es [48,925; 91,075].

78. Página 360

a) $P(k < Z < 2k) = P(Z < 2k) - P(Z < k) = 0{,}0761 \to k = 0{,}2$

b) $P(-k < Z < 3k) = P(Z < 3k) - P(Z < -k) = P(Z < 3k) - P(Z > k) = P(Z < 3k) + P(Z < k) - 1 = 0{,}1574 \to$

$\to P(Z < 3k) + P(Z < k) = 1{,}1574 \to k = 0{,}1$

c) $P(-2k < Z < k) = P(Z < k) - P(Z < -2k) = P(Z < k) - P(Z > 2k) = P(Z < k) + P(Z < 2k) - 1 = 0{,}9318 \to$

$\to P(Z < k) + P(Z < 2k) = 1{,}9318 \to k = 1{,}5$

d) $P(-5k < Z < -2k) = P(2k < Z < 5k) = P(Z < 5k) - P(Z < 2k) = 0{,}1891 \to k = 0{,}4$

79. Página 360

a) $P(X < 22) = P\left(Z \le \dfrac{22 - 25}{4}\right) = P(Z \le -0{,}75) = 1 - P(Z \le 0{,}75) = 0{,}2266$

b) $P(X \ge 27{,}3) = 1 - P(X \le 27{,}3) = 1 - P(Z \le 0{,}575) = 0{,}2826$

c) $P(X \le 28{,}4) = P(Z \le 0{,}85) = 0{,}8023$

d) $P(X \ge 18{,}04) = 1 - P(X \le 18{,}04) = 1 - P(Z \le -1{,}74) = P(Z \le 1{,}74) = 0{,}9591$

e) $P(24 < X \le 30) = P(X \le 30) - P(X \le 24) = P(Z \le 1{,}25) - P(Z \le -0{,}25) = P(Z \le 1{,}25) - (1 - P(Z \le 0{,}25)) = 0{,}4931$

f) $P(20 \le X < 23) = P(X \le 23) - P(X \le 20) = P(Z \le -0{,}5) - P(Z \le -1{,}25) = P(Z \le 1{,}25) - P(Z \le 0{,}5) = 0{,}2029$

80. Página 360

a) $P(X<86)=P\left(Z\leq\frac{86-80}{11}\right)=P(Z\leq 0{,}55)=0{,}7088$

b) $P(X\geq 88)=1-P(X\leq 88)=1-P(Z\leq 0{,}73)=0{,}2327$

c) $P(X\leq 75)=P(Z\leq -0{,}45)=1-P(Z\leq 0{,}45)=0{,}33$

d) $P(X\geq 68)=1-P(X\leq 68)=1-P(Z\leq -1{,}09)=P(Z\leq 1{,}09)=0{,}8621$

e) $P(67<X\leq 77)=P(X\leq 77)-P(X\leq 67)=P(Z\leq -0{,}27)-P(Z\leq -1{,}18)=P(Z\leq 1{,}18)-P(Z\leq 0{,}27)=0{,}2746$

f) $P(76\leq X<85)=P(X\leq 85)-P(X\leq 76)=P(Z\leq 0{,}45)-P(Z\leq -0{,}36)=P(Z\leq 0{,}45)-(1-P(Z\leq 0{,}36))=0{,}3142$

81. Página 360

a) $P(X\leq 22)=P\left(Z\leq\frac{22-\mu}{\sigma}\right)=0{,}6915\rightarrow\frac{22-\mu}{\sigma}=0{,}5\rightarrow 0{,}5\sigma+\mu=22$

$P(X<28)=P\left(Z\leq\frac{28-\mu}{\sigma}\right)=0{,}9938\rightarrow\frac{28-\mu}{\sigma}=2{,}5\rightarrow 2{,}5\sigma+\mu=28$

$\left.\begin{array}{l}0{,}5\sigma+\mu=22\\2{,}5\sigma+\mu=28\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}\mu=20{,}5\\\sigma=3\end{array}\right\}$

b) $P(X>25)=1-P(X\leq 25)=1-P\left(Z\leq\frac{25-\mu}{\sigma}\right)=0{,}1056\rightarrow P\left(Z\leq\frac{25-\mu}{\sigma}\right)=0{,}8944\rightarrow\frac{25-\mu}{\sigma}=1{,}25\rightarrow 1{,}25\sigma+\mu=25$

$P(X>4{,}8)=1-P(X\leq 4{,}8)=1-P\left(Z\leq\frac{4{,}8-\mu}{\sigma}\right)=P\left(Z\leq-\frac{4{,}8-\mu}{\sigma}\right)=0{,}9332\rightarrow-\frac{4{,}8-\mu}{\sigma}=1{,}5\rightarrow -1{,}5\sigma+\mu=4{,}8$

$\left.\begin{array}{l}1{,}25\sigma+\mu=25\\-1{,}5\sigma+\mu=4{,}8\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}\mu=\frac{174}{11}=15{,}8182\\\sigma=\frac{404}{55}=7{,}34545\end{array}\right\}$

82. Página 360

a) $P(X>170)=1-P(X\leq 170)=1-P(Z\leq 0{,}42)=0{,}3372$

b) $P(X<168)=P(Z\leq 0{,}25)=0{,}5987$

c) $P(159\leq X\leq 172)=P(X\leq 172)-P(X\leq 159)=P(Z\leq 0{,}58)-P(Z\leq -0{,}50)=P(Z\leq 0{,}58)+P(Z\leq 0{,}50)-1=0{,}4105$

83. Página 360

Para calcular el número de lubinas multiplicamos la probabilidad por el número de ejemplares extraídos.

a) $P(X\geq 980)=1-P(X\leq 980)=1-P(Z\leq 0{,}4)=0{,}3446\rightarrow 100\cdot 0{,}3446\approx 34$ lubinas

b) $P(750\leq X\leq 1100)=P(X\leq 1100)-P(X\leq 750)=P(Z\leq 1)-P(Z\leq -0{,}75)=$

$=P(Z\leq 1)+P(Z\leq 0{,}75)-1=0{,}6147=61{,}47\%$ de las lubinas

c) Las 20 lubinas más pequeñas representan la $\frac{20}{100}=0{,}2$ parte menor de la probabilidad; por tanto, debemos encontrar un número k tal que:

$P(X\leq k)=0{,}2\rightarrow P(X\leq k)=P\left(Z\leq\frac{k-900}{200}\right)=1-P\left(Z\leq-\frac{k-900}{200}\right)=0{,}2\rightarrow$

$\rightarrow P\left(Z\leq-\frac{k-900}{200}\right)=0{,}8\rightarrow-\frac{k-900}{200}=0{,}84\rightarrow k=732$

«Las 20 lubinas más pequeñas pesan menos de 732 g».

d) Procedemos de forma similar al apartado anterior:

$$P(X \geq k) = \frac{1}{4} = 0,25 \rightarrow P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k) = 1 - P\left(Z \leq \frac{k - 900}{200}\right) = 0,25 \rightarrow$$

$$\rightarrow P\left(Z \leq \frac{k - 900}{200}\right) = 0,75 \rightarrow \frac{k - 900}{200} = 0,675 \rightarrow k = 1035$$

«Las cuarta parte formada por las más grandes pesa más de 1 035 g».

84. Página 360

Para calcular el número de manzanas multiplicamos la probabilidad por el número de kilos comprados.

a) $P(X \leq 168) = P(Z \leq -0,28) = 1 - P(Z \leq 0,28) = 0,3897 \rightarrow 0,3897 \cdot 15000 = 5845$ kg de manzanas.

b) $P(170 \leq X \leq 180) = P(X \leq 180) - P(X \leq 170) = P(Z \leq 0,2) - P(Z \leq -0,2) =$

$= P(Z \leq 0,2) + P(Z \leq 0,2) - 1 = 0,1585 \rightarrow 0,1585 \cdot 100 = 15,85\%$ de las manzanas.

c) $P(X \leq 160) = P(Z \leq -0,6) = 1 - P(Z \leq 0,6) = 0,2743 \rightarrow 0,2743 \cdot 15\,000 = 4\,114,5$ kg de manzanas de menos de 160 g.

$15\,000 - 4\,114,5 = 10\,885,5$ kg de manzanas de más de 160 g.

d) El peso, *k*, debe cumplir:

$$P(X \geq k) = \frac{1}{4} = 0,25 \rightarrow P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k) = 1 - P\left(Z \leq \frac{k - 175}{25}\right) = 0,25 \rightarrow$$

$$\rightarrow P\left(Z \leq \frac{k - 175}{25}\right) = 0,75 \rightarrow \frac{k - 175}{25} = 0,675 \rightarrow k = 191,875 \text{ g será el peso de separación.}$$

85. Página 360

a) $P(70 \leq X \leq 72) = P(X \leq 72) - P(X \leq 70) = P(Z \leq -0,75) - P(Z \leq -1,25) = P(Z \leq 1,25) - P(Z \leq 0,75) = 0,121$

b) $P(78 \leq X \leq 80) = P(X \leq 80) - P(X \leq 78) = P(Z \leq 1,25) - P(Z \leq 0,75) = 0,121$

c) $P(X > 81) = 1 - P(X \leq 81) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 0,0668$

86. Página 360

a) $P(X > 5200) = 1 - P(X \leq 5200) = 1 - P(Z \leq 1,67) = 0,0475 = 4,75\%$ de bombillas

b) $P(5040 \leq X \leq 5070) = P(X \leq 5070) - P(X \leq 5040) = P(Z \leq 0,58) - P(Z \leq 0,33) = 0,0897 = 8,97\%$ de las bombillas

c) $P(5\,145 \leq X \leq 5230) = P(X \leq 5230) - P(X \leq 5\,145) = P(Z \leq 1,92) - P(Z \leq 1,21) = 0,0857 = 8,57\%$ de las bombillas

87. Página 360

X = «Tiempo de fabricación de una camisa» $\equiv N(6,5; \sigma)$

$$P(X \leq 7) = 93,70\% = 0,937 \rightarrow P(X \leq 7) = P\left(Z \leq \frac{7 - 6,5}{\sigma}\right) = 0,937 \rightarrow \frac{0,5}{\sigma} = 1,53 \rightarrow \sigma = 0,327 \rightarrow X \equiv N(6,5; 0,327)$$

88. Página 360

Para calcular el número de días multiplicamos la probabilidad por el número total de días del año.

$P(X \geq 37) = 1 - P(X \leq 37) = 1 - P(Z \leq 1,25) = 0,1056 \rightarrow 0,1056 \cdot 31 = 3,27 \approx 3$ días del mes se superan los 37 ºC.

$P(X \leq 35) = P(Z \leq 0,75) = 0,7734 \rightarrow 0,7734 \cdot 31 = 23,97 \approx 24$ días del mes no se superan los 35ºC.

89. Página 360

Sea X = «Cuántos discos son defectuosos de los 100 escogidos al azar» $\rightarrow$ $X \equiv B(100; 0,1)$.

$$\left.\begin{array}{l} 100 \cdot 0,1 = 10 > 5 \\ 100 \cdot 0,9 = 90 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(100; 0,1) \approx N(10; 3)$$

a) $P\left(2-\frac{1}{2} \le X \le 2+\frac{1}{2}\right) = P(X \le 2,5) - P(X \le 1,5) = P(Z \le -2,5) - P(Z \le -2,83) = P(Z \le 2,83) - P(Z \le 2,5) = 0,0039$

b) $P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - P(Z \le -3) = P(Z \le 3) = 0,9987$

90. Página 360

$P(\text{Acertar una pregunta}) = \frac{1}{3}$

Sea X = «Cuántas preguntas se han respondido correctamente de las 50» $\rightarrow$ $X \equiv B\left(50; \frac{1}{3}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} 50 \cdot \frac{1}{3} = 16,67 > 5 \\ 50 \cdot \frac{2}{3} = 33,33 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B\left(50; \frac{1}{3}\right) \approx N\left(\frac{50}{3}; \frac{10}{3}\right)$$

a) $P(X > 4) = 1 - P(X \le 4) = 1 - P(Z \le -3,80) = P(Z \le 3,80) = 0,9999$

b) $P(X < 10) = P(Z \le -2) = 1 - P(Z \le 2) = 0,0228$

c) $P(X \ge 25) = 1 - P(X \le 25) = 1 - P(Z \le 2,50) = 0,0062$

91. Página 360

Sea X = «Cuántas pruebas dan positivas de las 60» $\rightarrow$ $X \equiv B(60; 0,3)$.

$$\left.\begin{array}{l} 60 \cdot 0,3 = 18 > 5 \\ 60 \cdot 0,7 = 42 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(60; 0,3) \approx N(18; 3,55)$$

a) $P(X < 5) = P(Z \le -3,66) = 1 - P(Z \le 3,66) = 0,0001$

b) $P(X \ge 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - P(Z \le -4,79) = P(Z \le 4,79) \approx 1$

92. Página 361

Sea X = «Cuántas vacunaciones son efectivas de las 200 realizadas» $\rightarrow$ $X \equiv B(200; 0,6)$.

$$\left.\begin{array}{l} 200 \cdot 0,6 = 120 > 5 \\ 200 \cdot 0,4 = 80 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(200; 0,6) \approx N(120; 6,93)$$

a) $P\left(30 - \frac{1}{2} \le X \le 30 + \frac{1}{2}\right) = P(X \le 30,5) - P(X \le 29,5) = P(Z \le -12,91) - P(Z \le -13,06) = P(Z \le 13,06) - P(Z \le 12,91) \approx 0$

b) $P(80 \le X \le 120) = P(X \le 120) - P(X \le 80) = P(Z \le 0) - P(Z \le -5,77) = P(Z \le 5,77) - P(Z \le 0) = 0,5$

c) $P(X \le 90) = P(Z \le -4,33) = 1 - P(Z \le 4,33) \approx 1$

93. Página 361

$X \equiv B(40;\ 0{,}2)$

$\left.\begin{array}{l} np = 8 > 5 \\ n(1-p) = 32 > 5 \end{array}\right\} \to X \equiv B(40;\ 0{,}2) \approx N(8;\ 2{,}53)$

a) $P(X = 10) = P(9{,}5 < X < 10{,}5) = P\left(\frac{9{,}5-8}{2{,}53} < \frac{X-8}{2{,}53} \qquad 2{,}53\right)$

$= P(0{,}59 < Z < 0{,}98) = P(Z < 0{,}98) - P(Z < 0{,}59) =$

$= 0{,}8365 - 0{,}7224 = 0{,}1141$

b) $P(10 \leq X \leq 12) = P\left(\frac{10-8}{2{,}53} \leq \frac{X-8}{2{,}53} \leq \frac{12-8}{2{,}53}\right) = P(0{,}79 \leq Z \leq 1{,}58) =$

$= P(Z \leq 1{,}58) - P(Z \leq 0{,}79) = 0{,}9429 - 0{,}7852 = 0{,}1577$

c) $P(X > 15) = P\left(\frac{X-8}{2{,}53} > \frac{15-8}{2{,}53}\right) = P(Z > 2{,}76) = 1 - P(Z \leq 2{,}76) =$

$= 1 - 0{,}9971 = 0{,}0029$

94. Página 361

a) $P(X > 23) = P\left(\frac{X-20{,}5}{1{,}5} > \frac{23-20{,}5}{1{,}5}\right) = P(Z > 1{,}67) = 1 - P(Z \leq 1{,}67) =$

$= 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$

El 4,75 % de la población tiene un contorno de muñeca de más de 23 cm.

b) $P(17 < X < 22) = P\left(\frac{17-20{,}5}{1{,}5} < \frac{X-20{,}5}{1{,}5} < \frac{22-20{,}5}{1{,}5}\right) = P(-2{,}33 < Z < 1) =$

$= P(Z < 1) - (1 - P(Z < 2{,}33)) = 0{,}8413 - 1 + 0{,}9901 = 0{,}8314$

Estas correas podrá usarlas el 83,14 % de la población.

c) $P(20{,}5 - a < X < 20{,}5 + a) = 0{,}95$

$\to P\left(\frac{20{,}5 - a - 20{,}5}{1{,}5} < \frac{X - 20{,}5}{1{,}5} < \frac{20{,}5 + a - 20{,}5}{1{,}5}\right) =$

$= P\left(-\frac{a}{1{,}5} < Z < \frac{a}{1{,}5}\right) = P\left(Z < \frac{a}{1{,}5}\right) - \left(1 - P\left(Z < \frac{a}{1{,}5}\right)\right) =$

$= 2P\left(Z < \frac{a}{1{,}5}\right) - 1 = 0{,}95 \to P\left(Z < \frac{a}{1{,}5}\right) = 0{,}975 \to \frac{a}{1{,}5} = 1{,}96 \to a = 2{,}94$

El intervalo en el que se encuentra el 95 % de los varones es (17,56; 23,44).

95. Página 361

Si se compran 10 boletos: $P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^8 = 0{,}1937$

Si se compran 3 boletos: $P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243$

Así, es más probable conseguir un premio comprando 3 boletos.

96. Página 361

a) $P(\text{suma mayor que 9 al lanzar dos dados}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0{,}1667$

b) $X \equiv B(10;\ 0{,}5)$

$P(X > 6) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{7} \cdot 0{,}5^7 \cdot 0{,}5^3 +$

$+ \binom{10}{8} \cdot 0{,}5^8 \cdot 0{,}5^2 + \binom{10}{9} \cdot 0{,}5^9 \cdot 0{,}5^1 + \binom{10}{10} \cdot 0{,}5^{10} \cdot 0{,}5^0 = 0{,}1718$

En el juego b) se tiene mayor probabilidad de ganar.

97. Página 361

$$P(X < 3{,}398) = 0{,}9861 \to P\left(\frac{X-3{,}2}{\sigma} < \frac{3{,}398-3{,}2}{\sigma}\right) = 0{,}9861$$
$$\to P\left(Z < \frac{0{,}198}{\sigma}\right) = 0{,}9861 \to \frac{0{,}198}{\sigma} = 2{,}2 \to \sigma = 0{,}09$$

98. Página 361

$$P(X < 32) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{32-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{32-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}9452 \to \frac{32-\mu}{\sigma} = 1{,}6$$
$$\to 32-\mu = 1{,}6\sigma$$

$$P(X < 20) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{20-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}2119$$
$$\to P\left(Z < -\frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}7881 \to -\frac{20-\mu}{\sigma} = 0{,}8 \to 20-\mu = -0{,}8\sigma$$

$$\left.\begin{array}{l} 32-\mu = 1{,}6\sigma \\ 20-\mu = -0{,}8\sigma \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mu = 24 \\ \sigma = 5 \end{array}$$

99. Página 361

No es imposible, porque la probabilidad no puede asegurar el resultado de los lanzamientos.

$$X \equiv B\left(30, \frac{1}{6}\right) \qquad P(X = 0) = \binom{30}{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{30} = 0{,}0042$$

100. Página 361

$X \equiv N(180, 25)$

a) $P(X \leq 120) = P\left(\frac{X-180}{25} \leq \frac{120-180}{25}\right) = P(Z \leq -2{,}4) = 1 - P(Z < 2{,}4) =$
$= 1 - 0{,}9918 = 0{,}0082$

b) $P(X > 200) = P\left(\frac{X-180}{25} > \frac{200-180}{25}\right) = P(Z > 0{,}8) = 1 - P(Z \leq 0{,}8) =$
$= 1 - 0{,}7881 = 0{,}2119$

Como $0{,}2119 \cdot 150 = 31{,}785$; en 31 ordenadores la carga de la batería durará más de 200 minutos.

c) $\leq$ $P(X \geq 180) = P\left(\frac{X-180}{25} \geq \frac{180-180}{25}\right) = P(Z \geq 0) = 1 - P(Z < 0) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

$Y \equiv B(150; 0{,}5)$

$$\left.\begin{array}{l} np = 75 > 5 \\ n(1-p) = 75 > 5 \end{array}\right\} \to Y \equiv B(150; 0{,}5) \approx N(75; 6{,}12)$$

$P(Y = 110) = P(109{,}5 \leq Y < 110{,}5) = P\left(\frac{109{,}5-75}{6{,}12} \leq \frac{Y-75}{6{,}12} < \frac{110{,}5-75}{6{,}12}\right) =$
$= P(5{,}62 \leq Z < 5{,}8) = P(Z \leq 5{,}8) - P(Z < 5{,}62) = 1 - 1 = 0$

101. Página 361

$$P(X<3{,}2)=0{,}75\to P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{3{,}2-\mu}{\sigma}\right)=P\left(Z<\frac{3{,}2-\mu}{\sigma}\right)=0{,}75\to\frac{3{,}2-\mu}{\sigma}=0{,}68$$

$$P(X<3{,}5)=0{,}9\to P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{3{,}5-\mu}{\sigma}\right)=P\left(Z<\frac{3{,}5-\mu}{\sigma}\right)=0{,}9\to\frac{3{,}5-\mu}{\sigma}=1{,}29$$

$$\left.\begin{array}{l}3{,}2-\mu=0{,}68\sigma\\3{,}5-\mu=1{,}29\sigma\end{array}\right\}\begin{array}{l}\mu=2{,}86\\\sigma=0{,}49\end{array}$$

a) $$P(X<2{,}5)=P\left(\frac{X-2{,}86}{0{,}49}<\frac{2{,}5-2{,}86}{0{,}49}\right)=P(Z<-0{,}73)=1-P(Z\le 0{,}73)=$$
$$=1-0{,}7673=0{,}2327$$

b) $$P(X>4)=P\left(\frac{X-2{,}86}{0{,}49}>\frac{4-2{,}86}{0{,}49}\right)=P(Z>2{,}32)=1-P(Z\le 2{,}32)=$$
$$=1-0{,}9898=0{,}0102$$

c) $$P(X<a)=0{,}1\to P\left(\frac{X-2{,}86}{0{,}49}<\frac{a-2{,}86}{0{,}49}\right)=P\left(Z<\frac{a-2{,}86}{0{,}49}\right)=0{,}1$$
$$\to P\left(Z\le-\frac{a-2{,}86}{0{,}49}\right)=0{,}9\to-\frac{a-2{,}86}{0{,}49}=1{,}29\to a=2{,}23$$

d) $$P(X\le M)=0{,}5\to P\left(\frac{X-2{,}86}{0{,}49}\le\frac{M-2{,}86}{0{,}49}\right)=P\left(Z\le\frac{M-2{,}86}{0{,}49}\right)=0{,}5$$
$$\to\frac{M-2{,}86}{0{,}49}=0\to M=2{,}86$$

102. Página 361

$$P(X>960)=0{,}75\to P\left(\frac{X-1\,500}{\sigma}>\frac{960-1\,500}{\sigma}\right)=P\left(Z>-\frac{540}{\sigma}\right)=$$
$$=P\left(Z<\frac{540}{\sigma}\right)=0{,}75\to\frac{540}{\sigma}=0{,}68\to\sigma=794{,}12$$

a) $$P(X>1\,600)=P\left(\frac{X-1\,500}{794{,}12}>\frac{1\,600-1\,500}{794{,}12}\right)=P(Z>0{,}13)=1-P(Z\le 0{,}13)=$$
$$=1-0{,}5517=0{,}4483$$

b) $$P(X\ge a)=0{,}05\to P\left(\frac{X-1\,500}{794{,}12}\ge\frac{a-1.500}{794{,}12}\right)=P\left(Z\ge\frac{a-1\,500}{794{,}12}\right)=0{,}05$$
$$\to P\left(Z<\frac{a-1\,500}{794{,}12}\right)=0{,}95\to\frac{a-1\,500}{794{,}12}=1{,}65\to a=2\,810{,}29$$

El sueldo mínimo de los directivos es de 2 810,29 euros.

103. Página 361

$$P(X<53)=P\left(\frac{X-62}{8}<\frac{53-62}{8}\right)=P(Z<-1{,}125)=1-P(Z\le 1{,}125)=$$
$$=1-0{,}8697=0{,}1303$$

$$P(53\le X<63)=P\left(\frac{53-62}{8}\le\frac{X-62}{8}<\frac{63-62}{8}\right)=P(-1{,}125\le Z<0{,}125)=$$
$$=P(Z<0{,}125)-(1-P(Z\le 1{,}125))=0{,}5497-1+0{,}8697=0{,}4194$$

$$P(63\le X<73)=P\left(\frac{63-62}{8}\le\frac{X-62}{8}<\frac{73-62}{8}\right)=P(0{,}125\le Z<1{,}375)=$$
$$=P(Z<1{,}375)-P(Z\le 0{,}125)=0{,}9154-0{,}5497=0{,}3657$$

$$P(X \geq 73) = P\left(\frac{X-62}{8} \geq \frac{73-62}{8}\right) = P\left(Z \geq 1{,}375\right) = 1 - P\left(Z < 1{,}375\right) =$$
$$= 1 - 0{,}9154 = 0{,}0846$$

Hay un 13,03 % de huevos de tamaño S; un 41,94 % de tamaño M; un 36,57 % de tamaño L; y un 8,46 % de tamaño XL.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 362

Respuesta abierta.

La mayoría de las situaciones cotidianas se pueden ajustar con una distribución normal, por ejemplo:

- El peso de una población.

- La altura de los niños de un país cuando tienen un año de vida.

- El tiempo que tardas cada día en ir al instituto.

2. Página 362

Según la distribución el número de personas con C.I. de 115 debería ser menor que las que tienen un C.I. de 110; sin embargo, dada la simetría que presenta la distribución normal el número de personas con un coeficiente de 85, teóricamente, debería coincidir con el de personas con un coeficiente de 115.

3. Página 362

El menor valor que puede tomar la función por la izquierda en teoría es cero; no obstante, la probabilidad de tome valores menores que 55 es muy pequeña.

Las puntuaciones mayores podrían llegar de forma teórica a los 200 puntos, pero la probabilidad de encontrar una persona de estas características es muy pequeña. Según la gráfica presentada la puntuación máxima por la derecha queda establecida en 160.

4. Página 362

0,13 % de 46,77 millones es 0,060801 millones. En España cabe esperar que haya unas 60 800 personas con una inteligencia por encima de la que se considera superior.