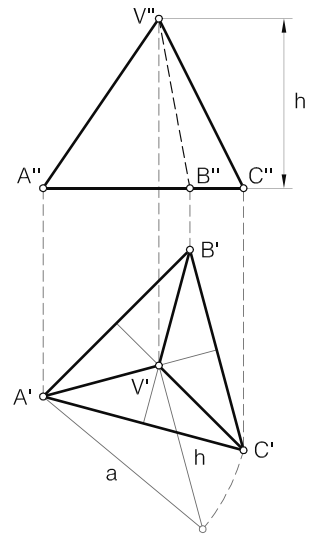


Unitat 6. Sistema dièdric, políedres regulars

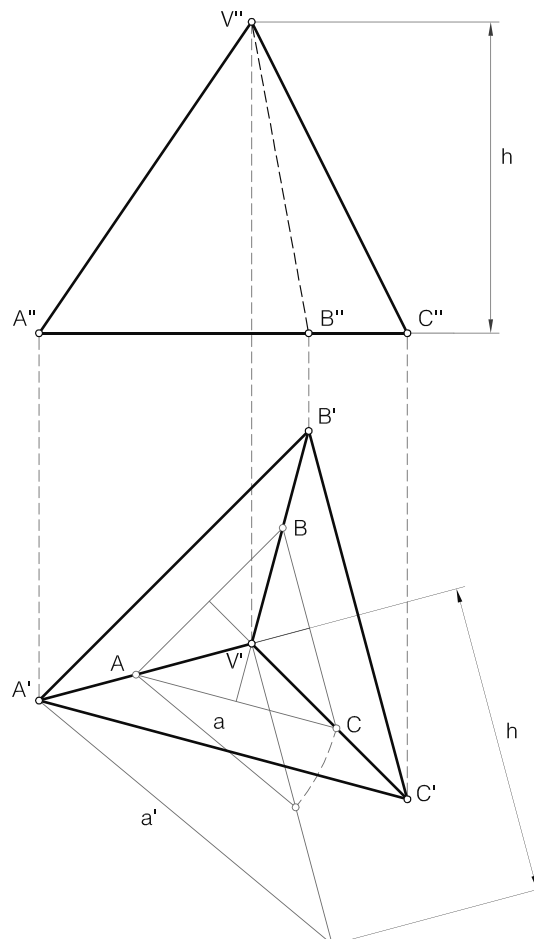
ACTIVITATS (pàgina 137 del llibre de l'alumne)

Tetràedre

- La cara **ABC**, continguda en un pla horitzontal, està en veritable magnitud a la projecció horitzontal (triangle **A'B'C'**). Per determinar la projecció vertical, cal conèixer l'altura **h** del tetràedre que es determina, a la projecció horitzontal, mitjançant l'abatiment d'un triangle rectangle que té per hipotenusa l'aresta del políedre i per catets, l'altura i la projecció de l'aresta sobre el pla de la base. Un cop determinada **h**, tracem la resta d'arestes amb la visibilitat corresponent.



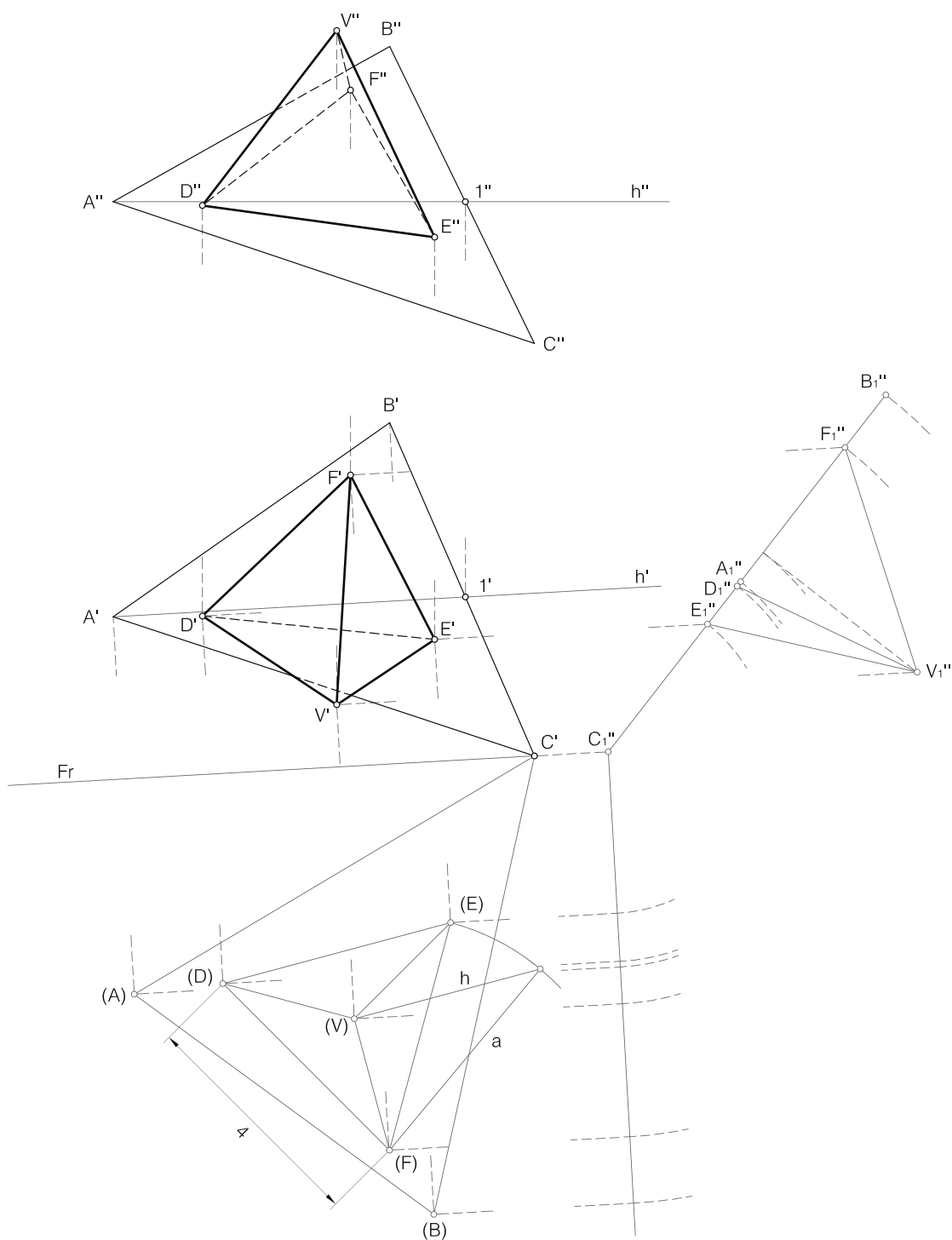
- Tornem a representar el tetràedre amb una cara paral·lela al pla horitzontal de projecció, però ara hem de determinar la longitud de l'aresta a partir de la longitud de la seva altura. Construïm un tetràedre auxiliar del qual determinem l'altura tal com hem fet a l'activitat anterior; tot seguit, establim una construcció gràfica auxiliar, a la qual, mitjançant una relació de proporcionalitat, determinem l'aresta que correspon a una altura determinada. Tracem les diferents arestes amb la visibilitat corresponent.



3. Atès que el pla **ABC** és oblic, cal tenir-lo en veritable magnitud per poder representar el tetràedre que es demana. Obtenim aquesta veritable magnitud per l'abatiment del pla **ABC** respecte al pla horitzontal de projecció; aquí podrem representar la cara **(D)(E)(F)** en veritable magnitud i determinar també l'altura real del tetràedre.

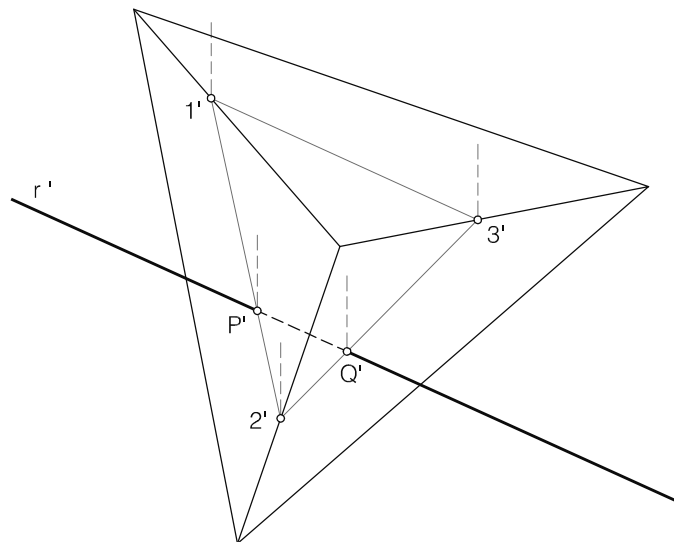
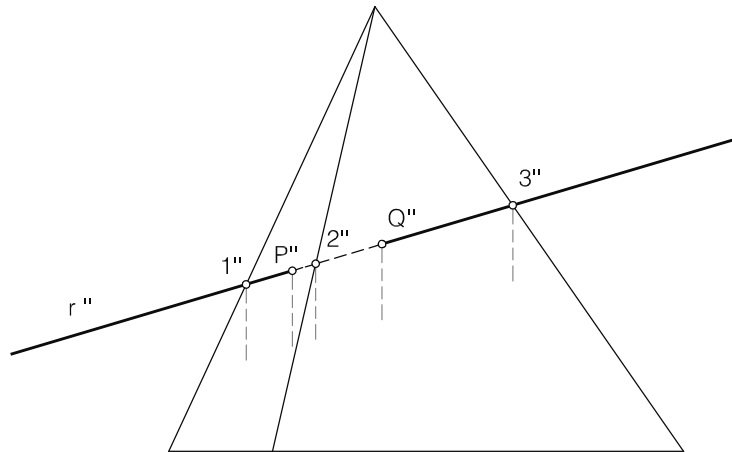
A la projecció auxiliar de cantell portem l'altura **h** del tetràedre que, pel fet de ser perpendicular al pla de la base (un pla de cantell en aquesta projecció), serà una recta frontal i tindrà la projecció vertical en veritable magnitud. Així, sobre la perpendicular traçada al pla de cantell, portem la veritable magnitud de l'aresta.

Acabem restituint projeccions i establint la visibilitat en cadascuna.



4. Per determinar aquesta intersecció, considerem el pla projectant de cantell que coincideix amb la projecció vertical r'' de la recta. Aquest pla produeix com a secció en el tetràedre el polígon **123**, que determinem directament en la projecció vertical i que referim als punts corresponents de les projeccions horitzontals de les arestes del tetràedre, **1'2'3'**.

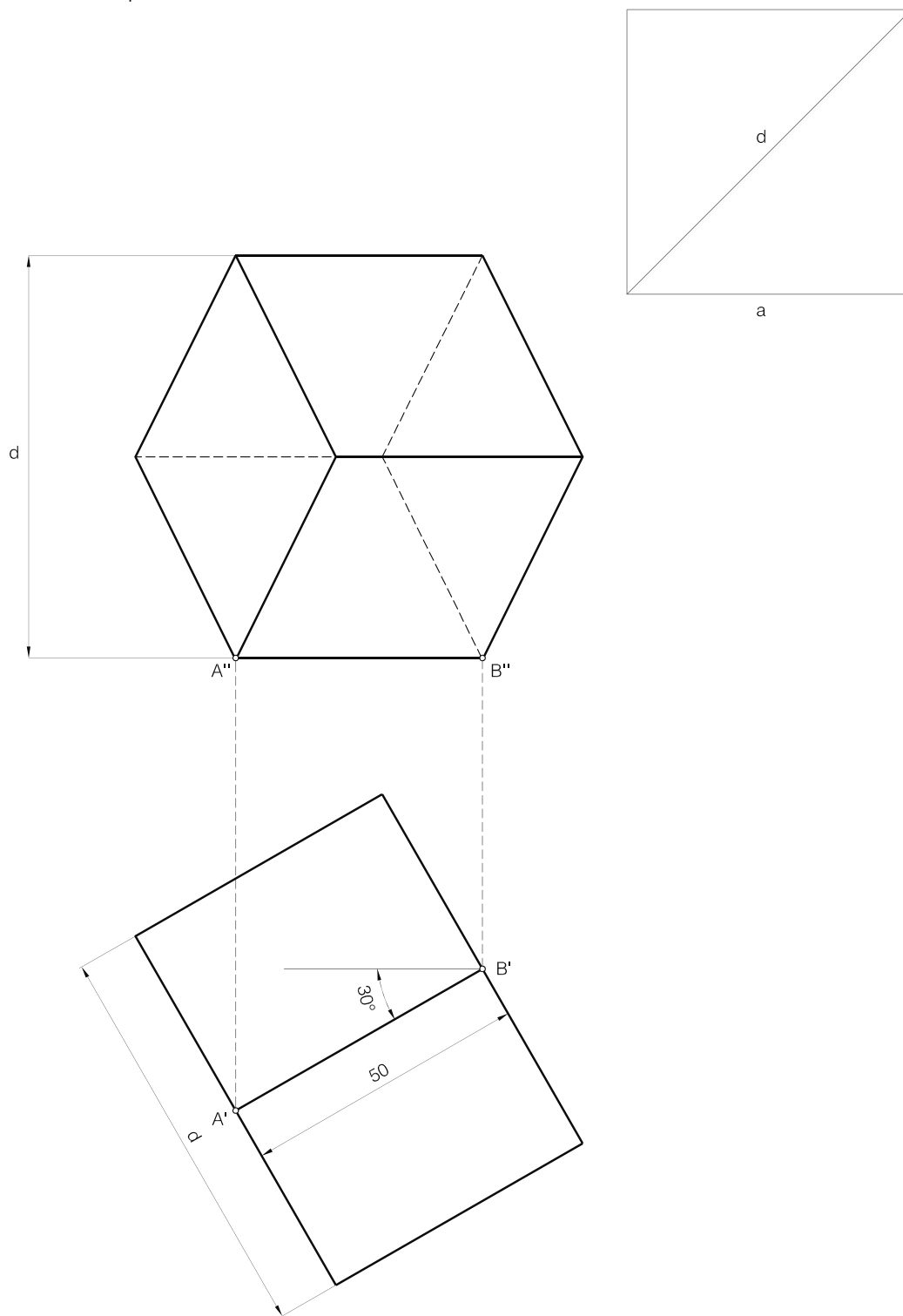
Les projeccions verticals de la recta i de la secció són coincidents, però a la projecció horitzontal es tallen en els punts **P'** i **Q'**, els quals representen els punts d'intersecció entre la recta i el políedre; uns punts que podem considerar l'un com a punt d'entrada i l'altre, de sortida; per tant, la recta serà oculta entre tots dos punts en considerar opac o sòlid el tetràedre.



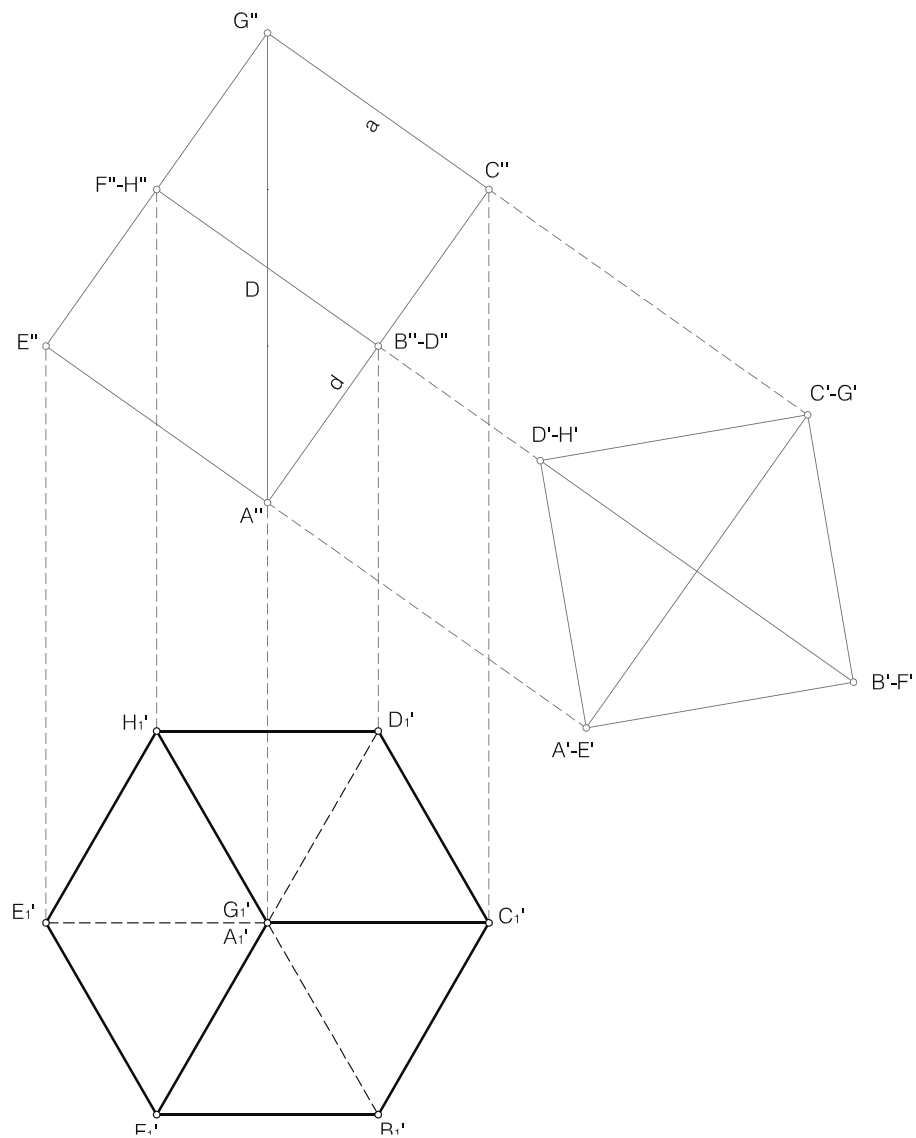
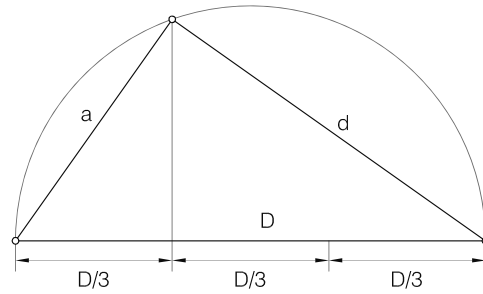
Hexàedre

5. L'aresta **AB** és l'aresta a la qual fa referència l'enunciat de l'activitat; la projecció horitzontal **A'B'** està en veritable magnitud i visualitza els 30° que l'aresta forma amb el pla vertical de projecció. En una construcció auxiliar, determinem la diagonal de la cara corresponent a l'aresta de 5 cm.

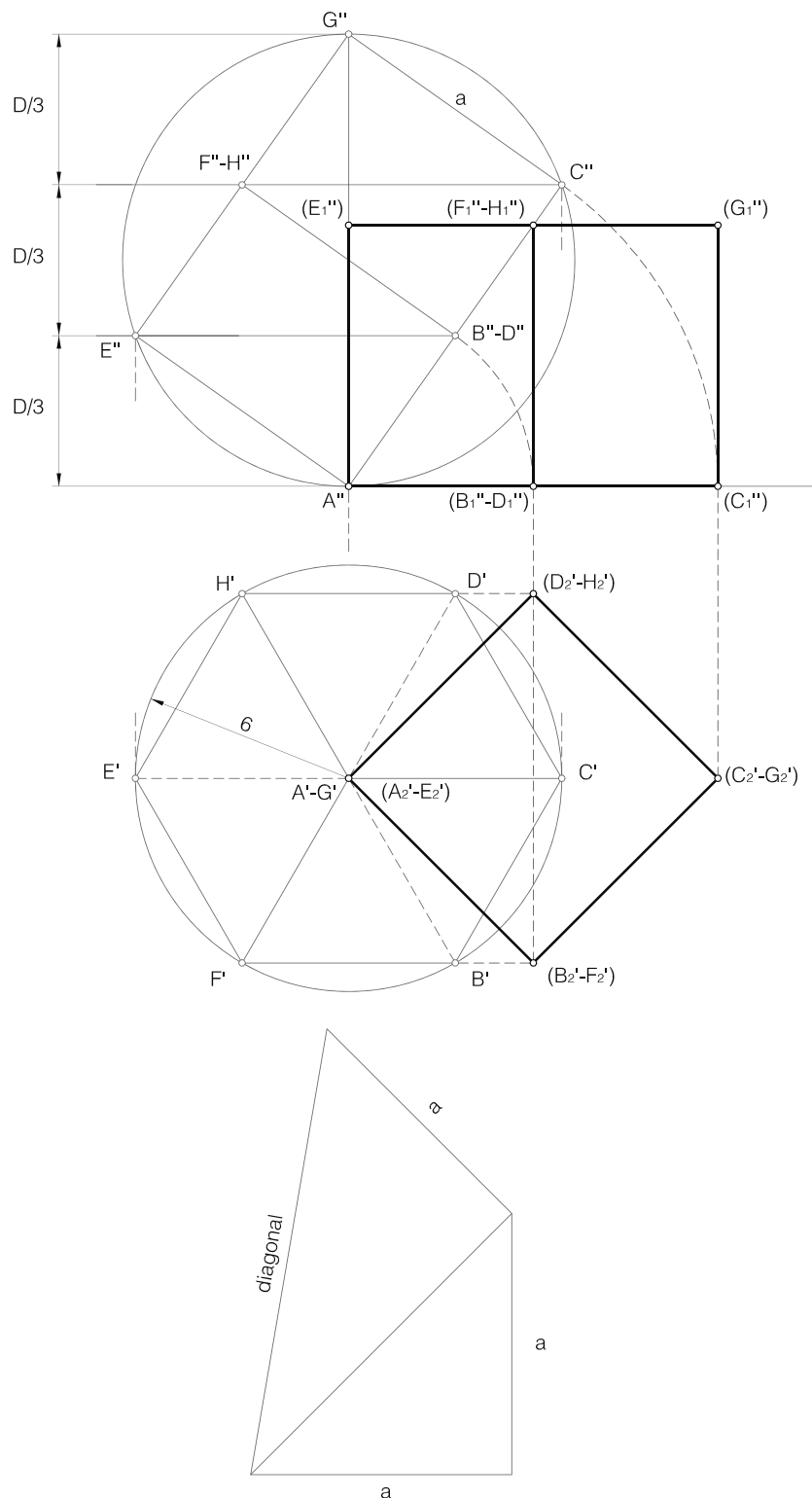
Amb aquestes dades, l'aresta i la diagonal de la cara, i considerant que, en les cares perpendiculars a l'aresta **AB**, les diagonals (perpendiculars entre elles) són dos segments horitzontal i vertical visibles en veritable magnitud, respectivament, a la projecció horitzontal i vertical, establim les dues projeccions que es demanen, i estudiem la visibilitat de les arestes interiors de cadascuna d'aquestes segons el punt de vista corresponent.



6. Una construcció auxiliar ens permet determinar l'aresta i la diagonal de la cara a partir de la diagonal coneguda del cub. Inicialment, representem dues projeccions dièdriques auxiliars; en aquestes projeccions representem el cub amb una cara paral·lela al pla horitzontal de projecció i amb la diagonal en posició de recta frontal. Un canvi de pla horitzontal de projecció, perquè la diagonal passi a ser vertical, ens donarà la nova projecció horitzontal visible com a hexàgon.

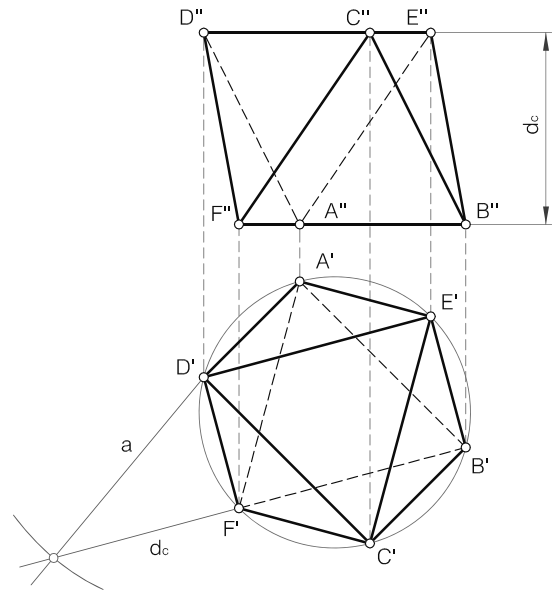


7. El diàmetre de l'esfera coincideix amb la diagonal principal del cub; així, a partir d'aquesta, determinem l'aresta per mitjà d'una construcció auxiliar. Representem el cub, en unes primeres projeccions auxiliars, amb la diagonal vertical i partint de l'esfera circumscriu. Mitjançant un gir, passem a la posició que es demana, en què la cara **ABCD** (de cantell a la projecció auxiliar) passa a ser horitzontal.

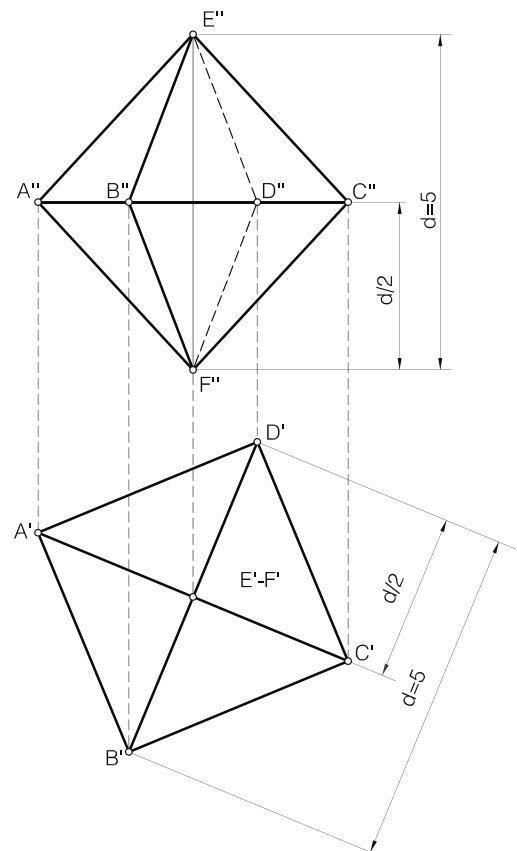


Octàedre

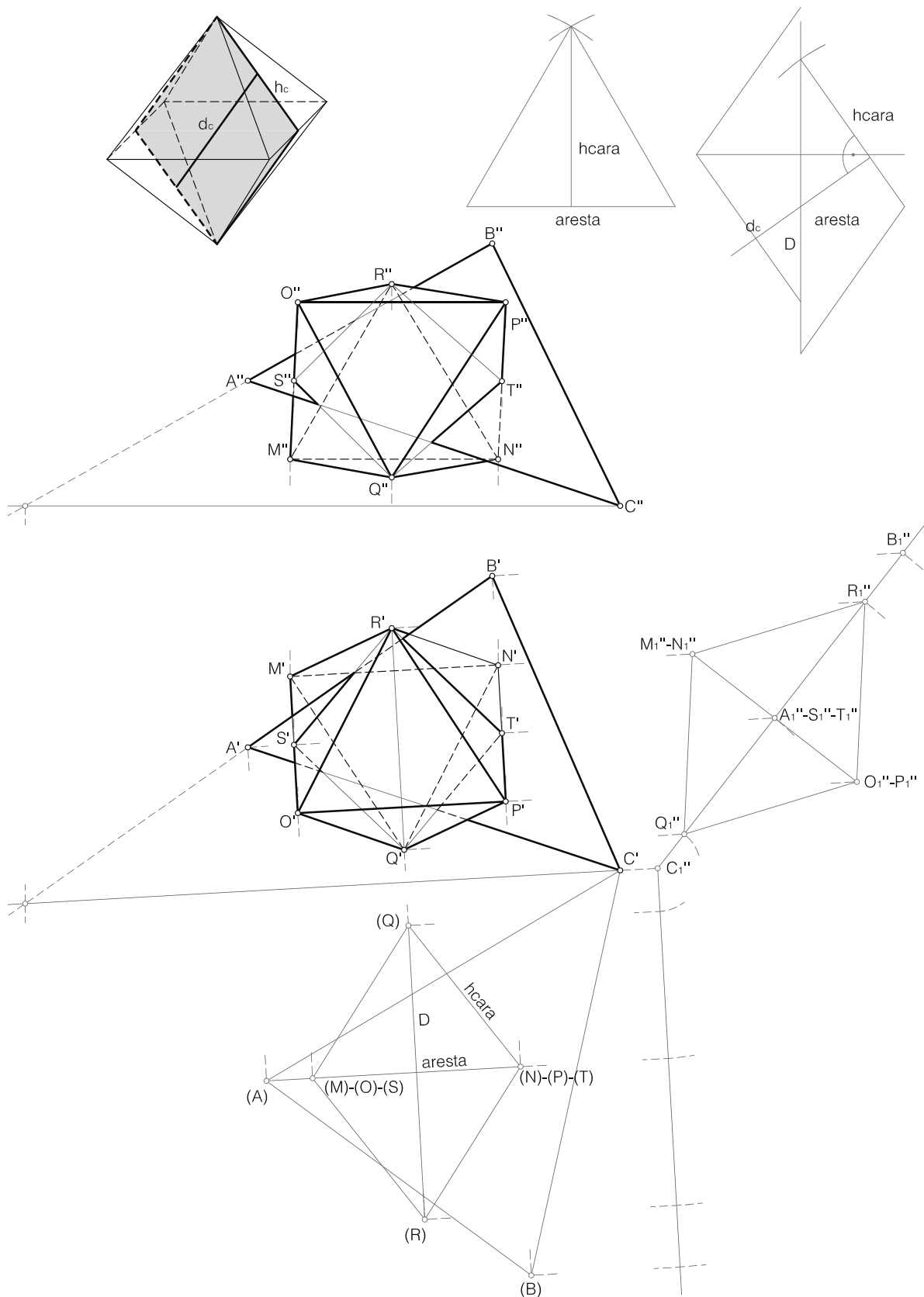
8. La cara continguda en el pla horitzontal i l'oposada es representen com a dos triangles equilàters, en veritable magnitud, i desfasats 60° . Per completar la projecció vertical, cal conèixer la distància entre cares oposades, que podem determinar en una construcció auxiliar a partir de la secció principal de l'octàedre o, en la mateixa projecció horitzontal, a partir de la projecció de l'aresta **F'D'** (hi tracem una perpendicular per formar un triangle rectangle que tindrà com a hipotenusa l'aresta en veritable magnitud; la perpendicular serà la distància entre les cares). Diferenciem la representació de les arestes segons la seva visibilitat a cadascuna de les dues projeccions.



9. Amb la diagonal vertical, la projecció horitzontal de l'octàedre és un quadrat que té com a diagonal la de l'octàedre, 5 cm en el cas d'aquesta activitat. De la diagonal deduïm l'aresta de l'octàedre i completem les dues projeccions, diferenciant la representació de les arestes segons la seva visibilitat.

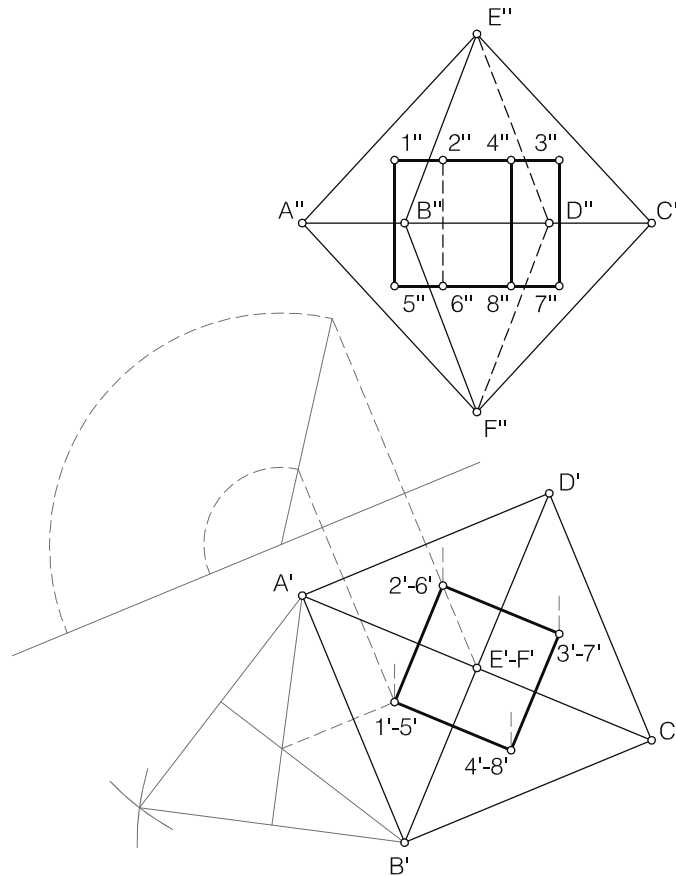


10. Partint del valor de l'aresta de l'octàedre, en les construccions auxiliars determinem les dimensions de la secció principal que representarem, en veritable magnitud, quan tinguem el pla **ABC** abatut. En relació amb la projecció auxiliar de cantell, que conté la secció principal $Q_1''S_1''R_1''T_1''$, representem els altres quatre vèrtexs de l'octàedre (M_1'' , N_1'' , O_1'' i P_1'') completant la projecció auxiliar del poliedre; aquesta projecció auxiliar ens permet completar la projecció horitzontal principal i, respecte a aquesta amb les cotes agafades de la projecció auxiliar, completar la projecció vertical principal.



11. El políedre conjugat d'un octàedre és un hexàedre que té els vèrtexs en els punts mitjans de les cares de l'octàedre. Abatem paral·lelament al pla horitzontal una de les cares de l'octàedre per determinar-ne el centre, punt al qual incideix un dels vèrtexs de l'hexàedre. Les cotes de la projecció auxiliar de cantell ens permeten completar la projecció vertical principal.

A part de les relacions que ja es coneixen entre nombres de cares, vèrtexs i arestes (relacionats per la fórmula d'Euler), en la representació efectuada es pot comprovar que la longitud de l'aresta del cub és la tercera part de la longitud de la diagonal de l'octàedre.

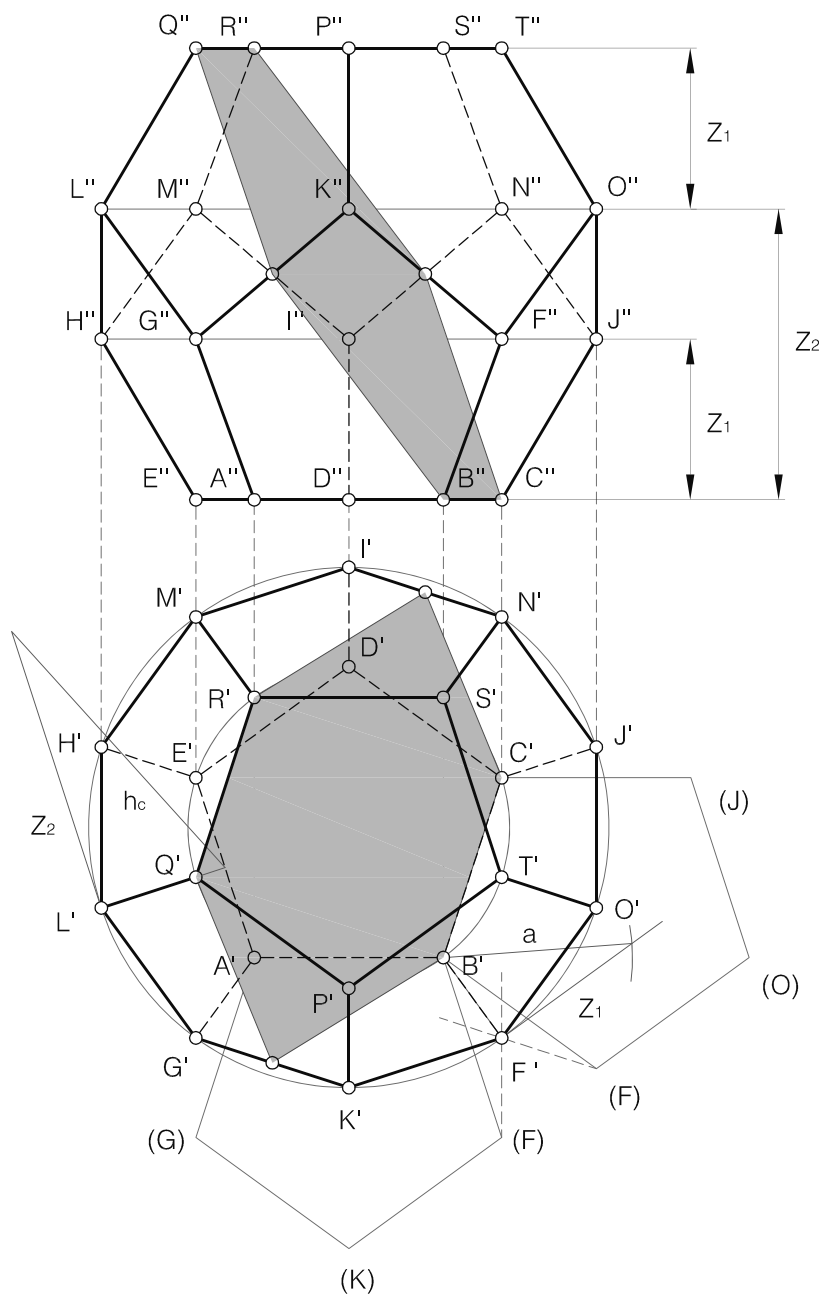


Dodecàedre

- 12.** Representem el dodecàedre amb una de les seves cares continguda en el pla horitzontal de projecció; aquesta cara, igual que l'oposada, està en veritable magnitud; comparteixen el centre geomètric, encara que estan desfasades, tal com es veu a la figura. La projecció del vèrtex **F'** de la projecció horitzontal la determinem en desabatre dues cares contigües a les que hi ha en aquest vèrtex.

Coneguda la projecció horitzontal, determinem la projecció vertical en correspondència dièdrica i determinant les cotes relatives dels diferents vèrtexs en relació amb els de la base inferior; aquestes construccions auxiliars són triangles rectangles i s'han dibuixat en la mateixa projecció horitzontal.

Unint els vèrtexs relacionats per una de les seccions principals, n'efectuem la representació en les dues projeccions.

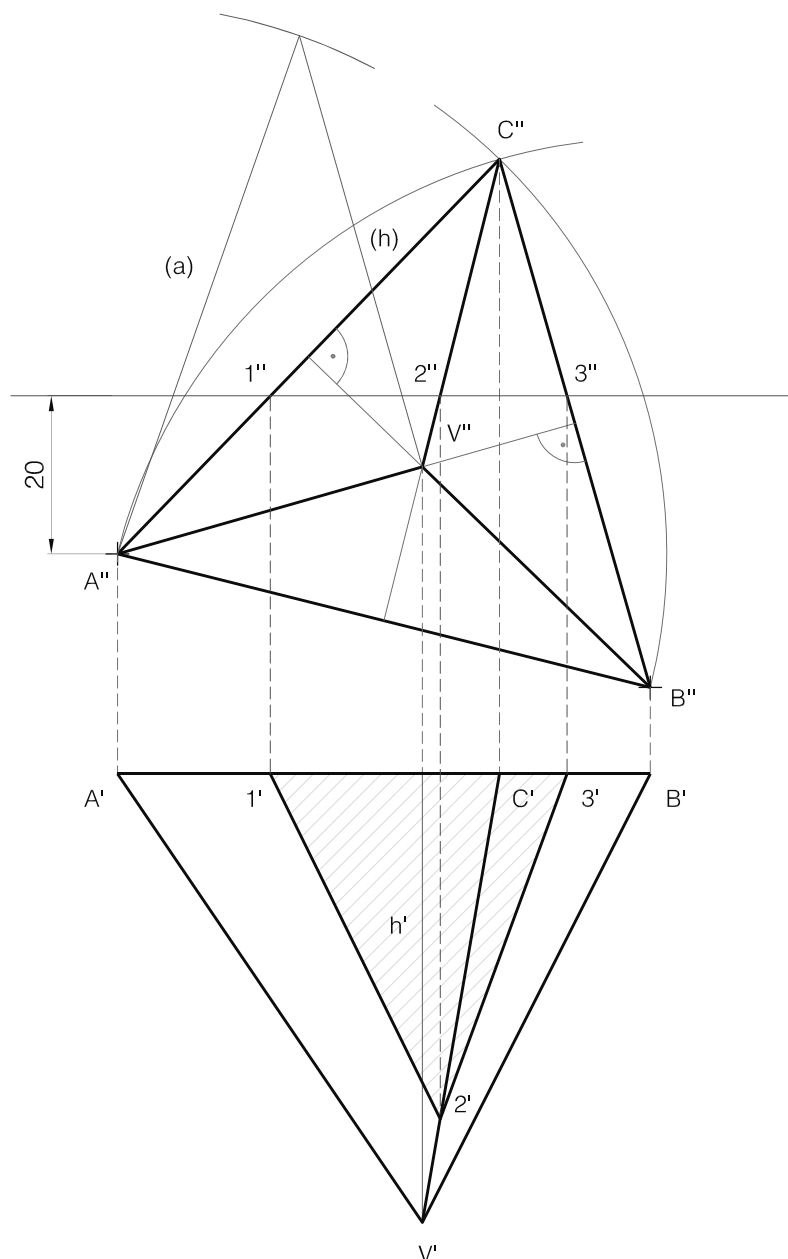


OBJECTIU UNIVERSITAT (pàgina 138 del llibre de l'alumne)

Tetràedre

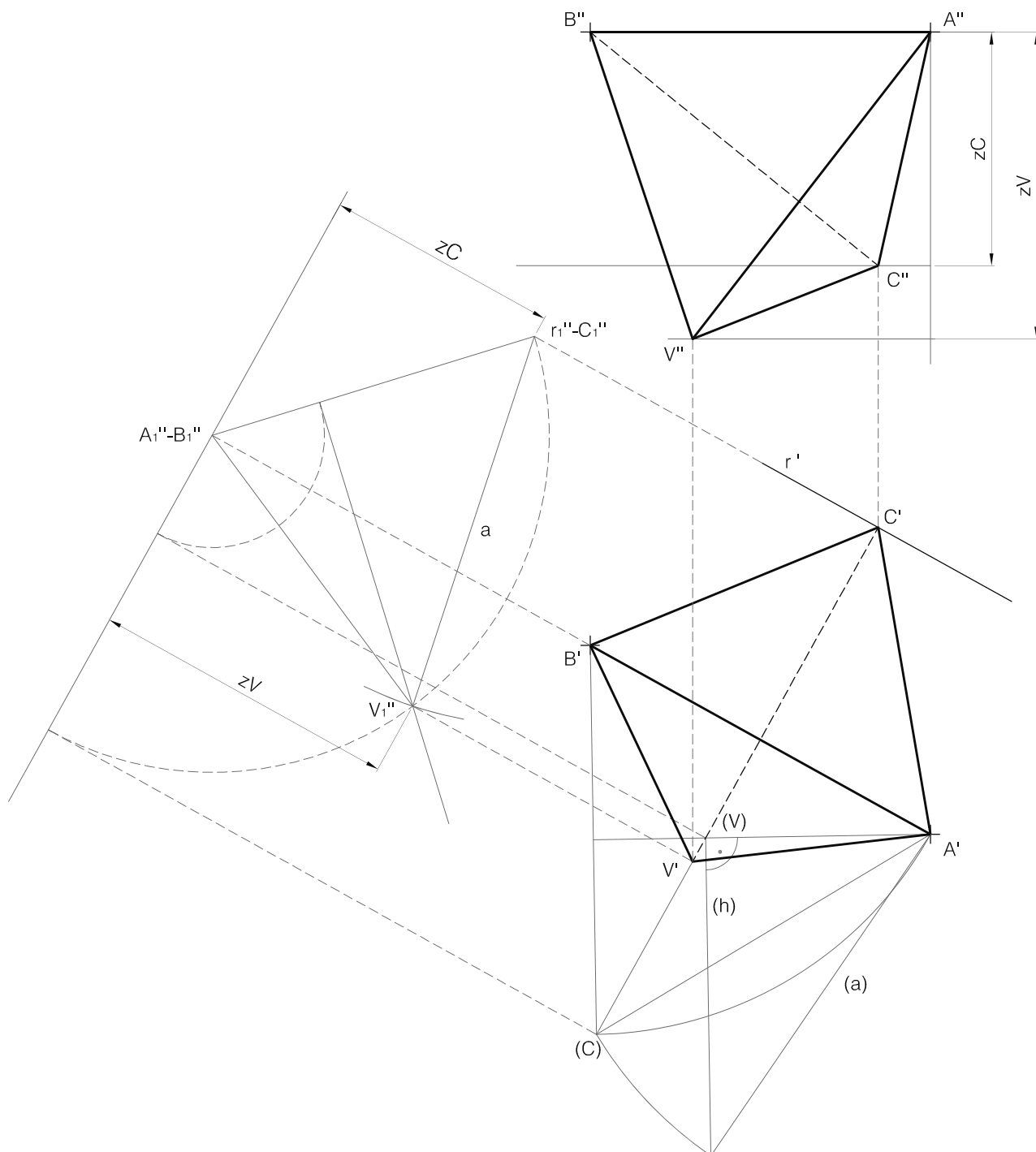
13. A partir de la projecció vertical del segment **AB**, en veritable magnitud, representem la cara **ABC**, també en veritable magnitud, en projecció vertical. La seva projecció horitzontal és la d'un pla frontal; en aquesta projecció i pel centre de la base, tracem un segment perpendicular a aquesta, una recta de punta, sobre la qual mesurem l'altura del políedre, que s'ha obtingut en l'habitual construcció auxiliar.

Representem la traça vertical projectant del pla d'acord amb la cota donada; referim a la projecció horitzontal els punts d'intersecció amb les arestes del tetràedre.



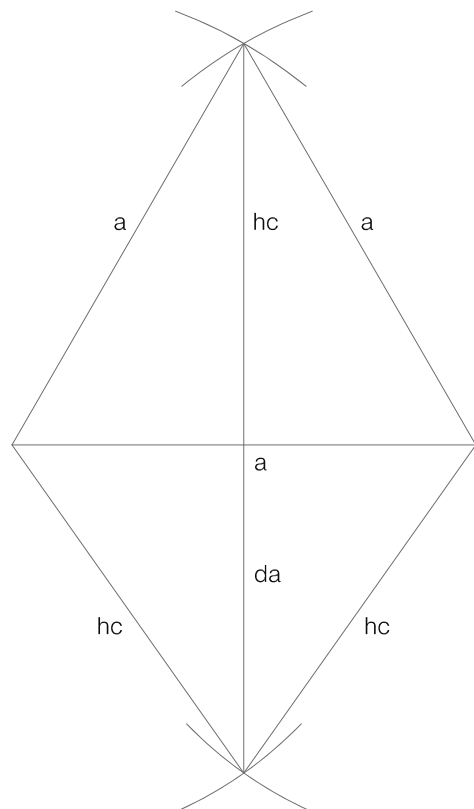
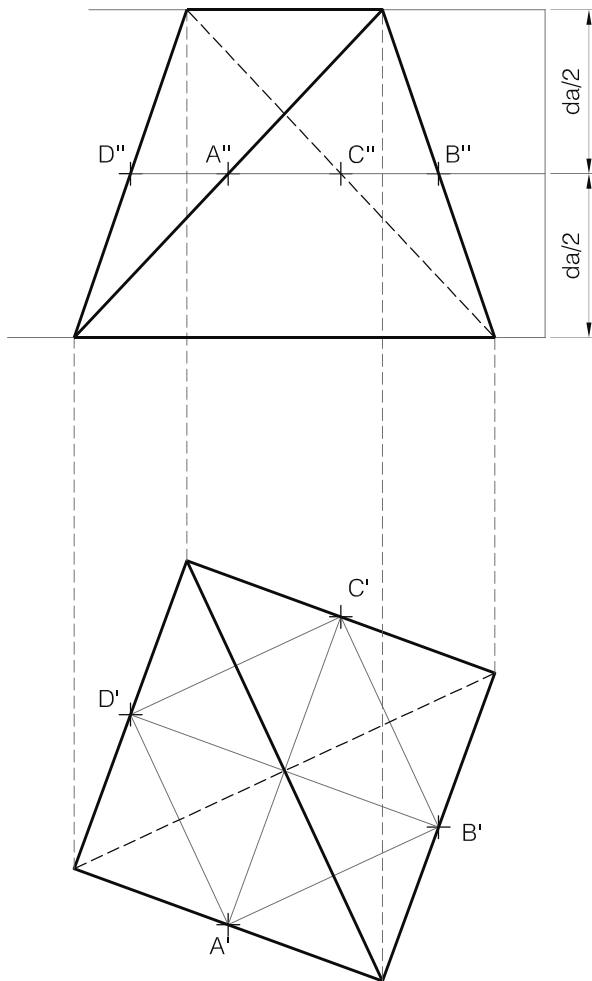
14. Respecte del segment **A'B'** (en veritable magnitud), dibuixem la cara **ABC** abatuda i la projecció **C''** del tercer vèrtex de la cara (coincident a la mediatriu de **A'B'** i a sobre de **r'**). Amb aquests elements podem representar una projecció vertical auxiliar que permet trobar la cota del vèrtex **C** per completar la projecció vertical de la primera cara.

A la projecció auxiliar determinem també la posició del quart vèrtex **V** del tetràedre; a partir d'aquesta projecció, completem les dues principals i la visibilitat d'aquestes.



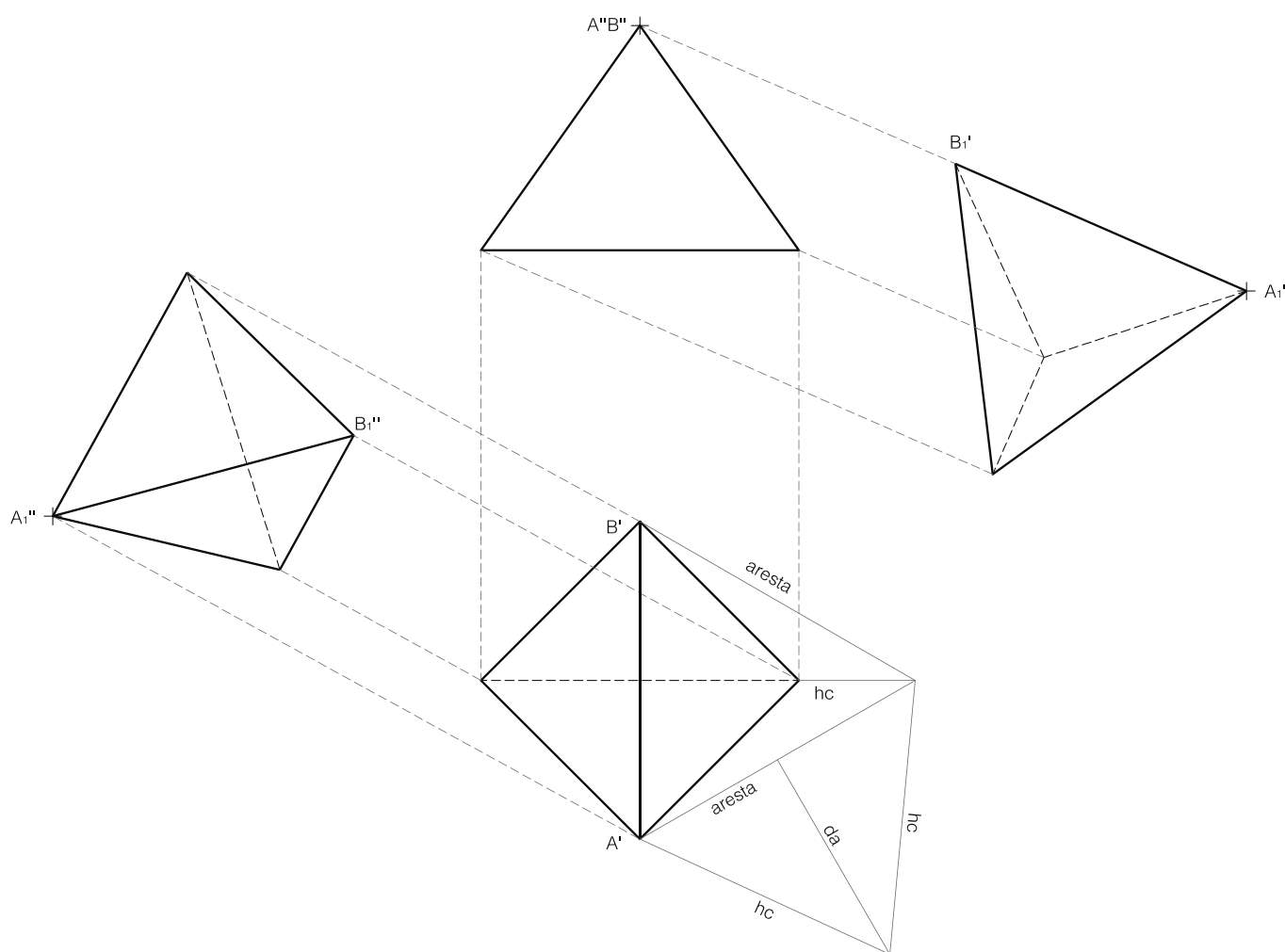
- 15.** Les dues arestes per les quals no passa la secció mitjana **ABCD** es projecten horitzontalment a sobre de les mediatrius dels costats oposats del quadrat de la secció, i la seva longitud és el doble de la dels costats de la secció. Els vèrtexs d'aquest segon quadrat defineixen el contorn aparent del tetràedre, visible a projecció horitzontal.

Una construcció auxiliar permet determinar la distància entre les arestes oposades; la meitat d'aquesta distància, repartida als dos costats de **A''B''C''D''**, permet determinar la projecció vertical dels quatre vèrtexs del tetràedre.



16. A sobre de la mediatriu de $A'B'$, i amb la mateixa longitud, hi ha la projecció horitzontal de l'aresta oposada a la donada; la projecció vertical d'aquesta aresta està per sota de $A''B''$ i a una distància igual a la distància entre arestes oposades (determinada mitjançant una construcció auxiliar a la projecció horitzontal).

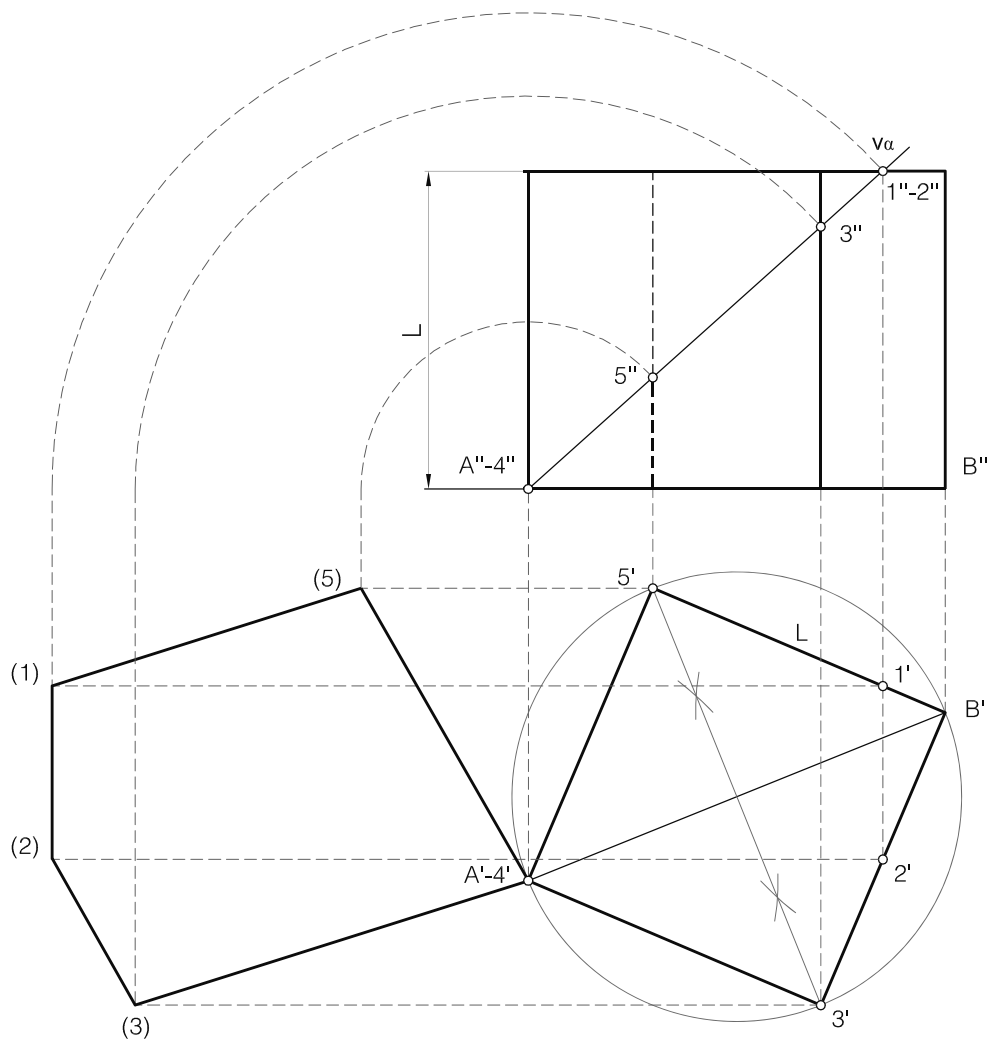
Amb les cotes i els allunyaments relatius agafats d'aquests projeccions, determinem les noves projeccions en les direccions assenyalades.



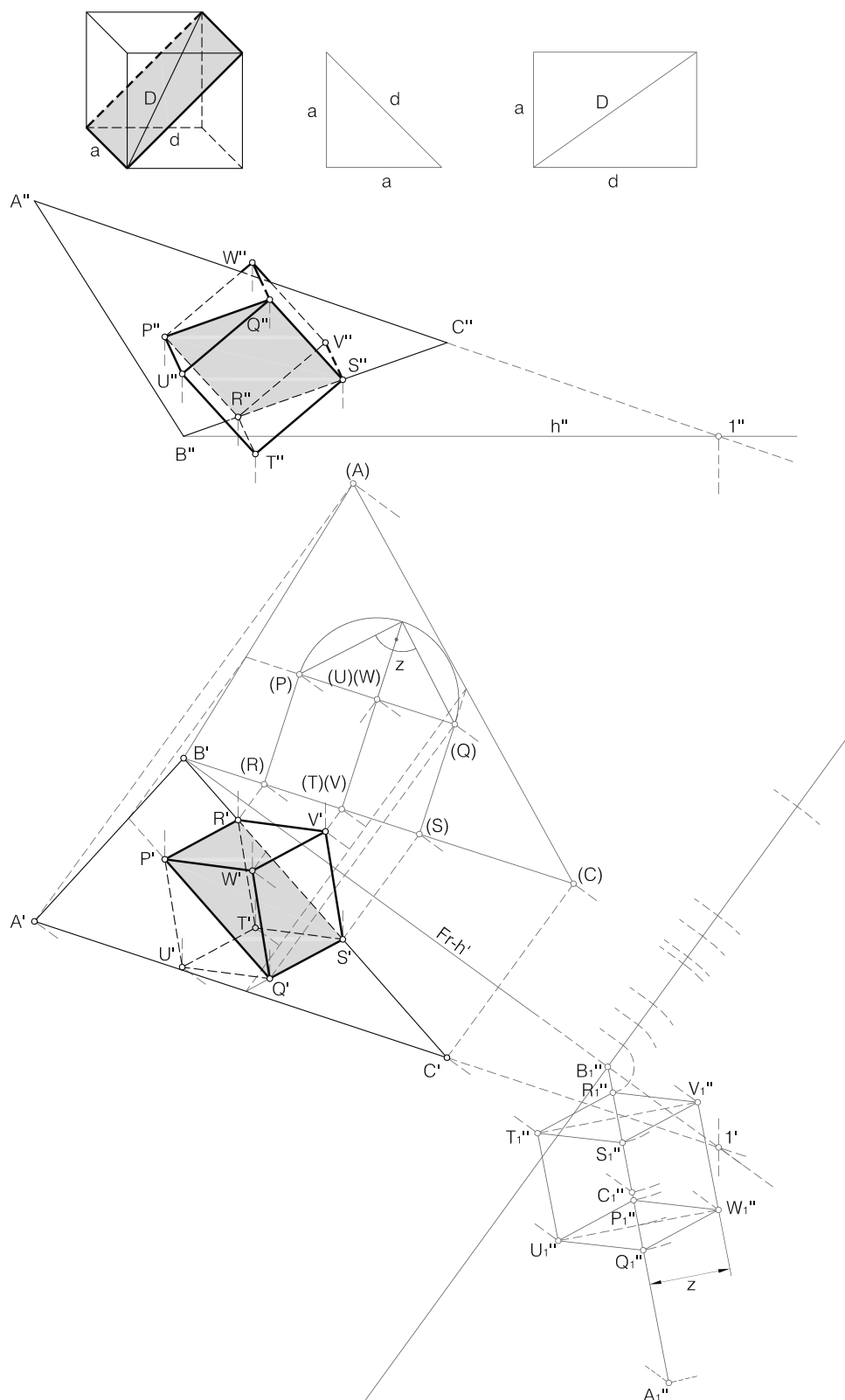
Hexàedre

17. Agafant la projecció **A'B'** (en veritable magnitud) com a diàmetre d'una circumferència, determinem el quadrat inscrit que correspon a la projecció horitzontal d'una de les cares del cub. El costat d'aquest quadrat permet completar la projecció vertical, amb la visibilitat derivada d'aquesta posició.

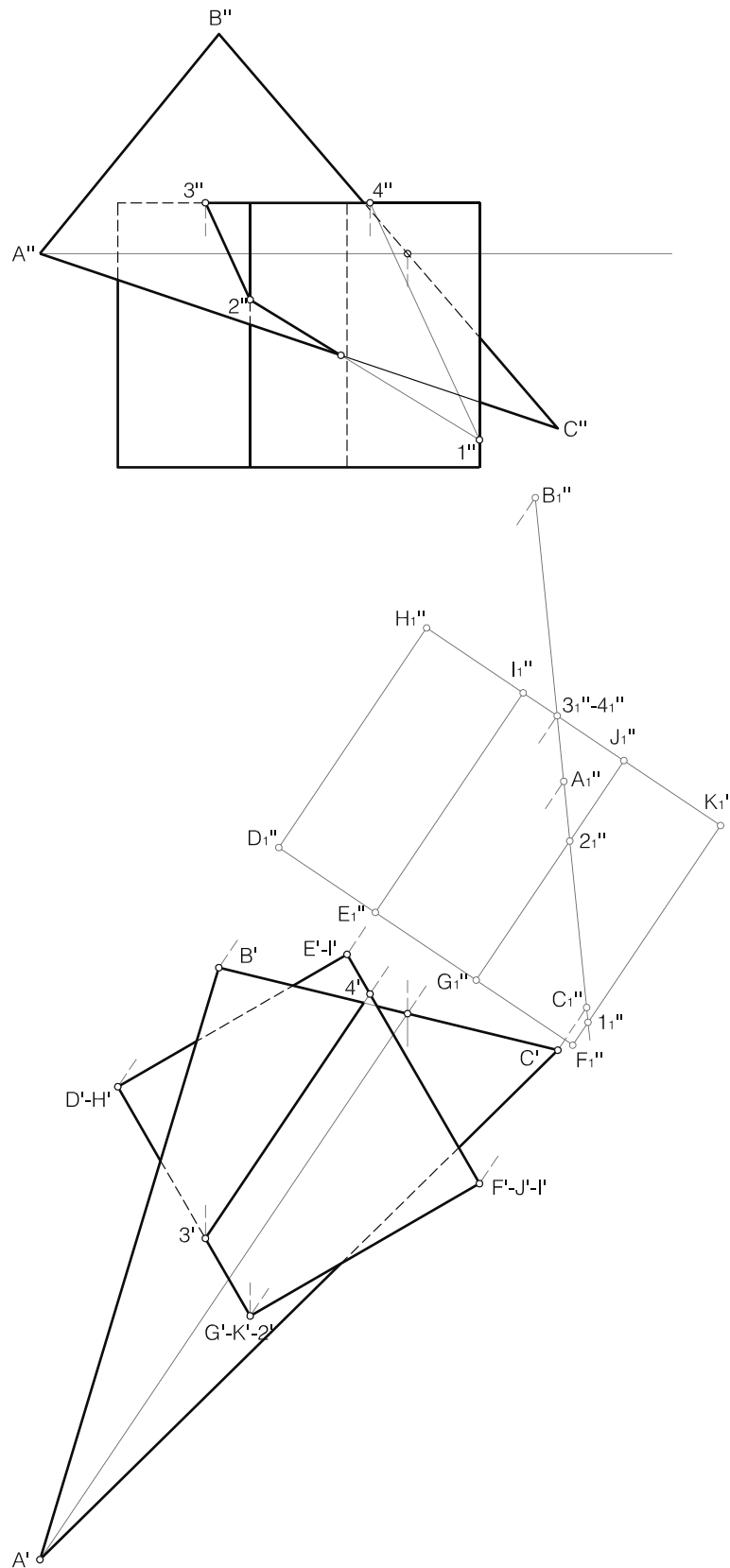
En la projecció vertical, els punts comuns al pla i al cub són els vèrtexs de la secció del pla donat. El seu abatiment permet conèixer la veritable magnitud de la secció.



18. El pla de la secció és, un cop més, oblic; l'haurem d'abatre per poder representar la veritable magnitud de la secció. Representem la secció principal a sobre del pla **ABC** determinant prèviament la diagonal del cub mitjançant construccions auxiliars. A la representació auxiliar de cantell, construïm el cub, després de passar la secció a aquesta projecció i coneixent la diagonal de la cara, que es veurà en aquesta projecció en veritable magnitud i perpendicularment a la traça projectant del pla de cantell, pel punt mig entre $R_1''S_1''$ i $P_1''Q_1''$. Des d'aquesta projecció auxiliar restituïm la representació a les projeccions principals, amb l'estudi de la visibilitat corresponent en considerar opac el pla.

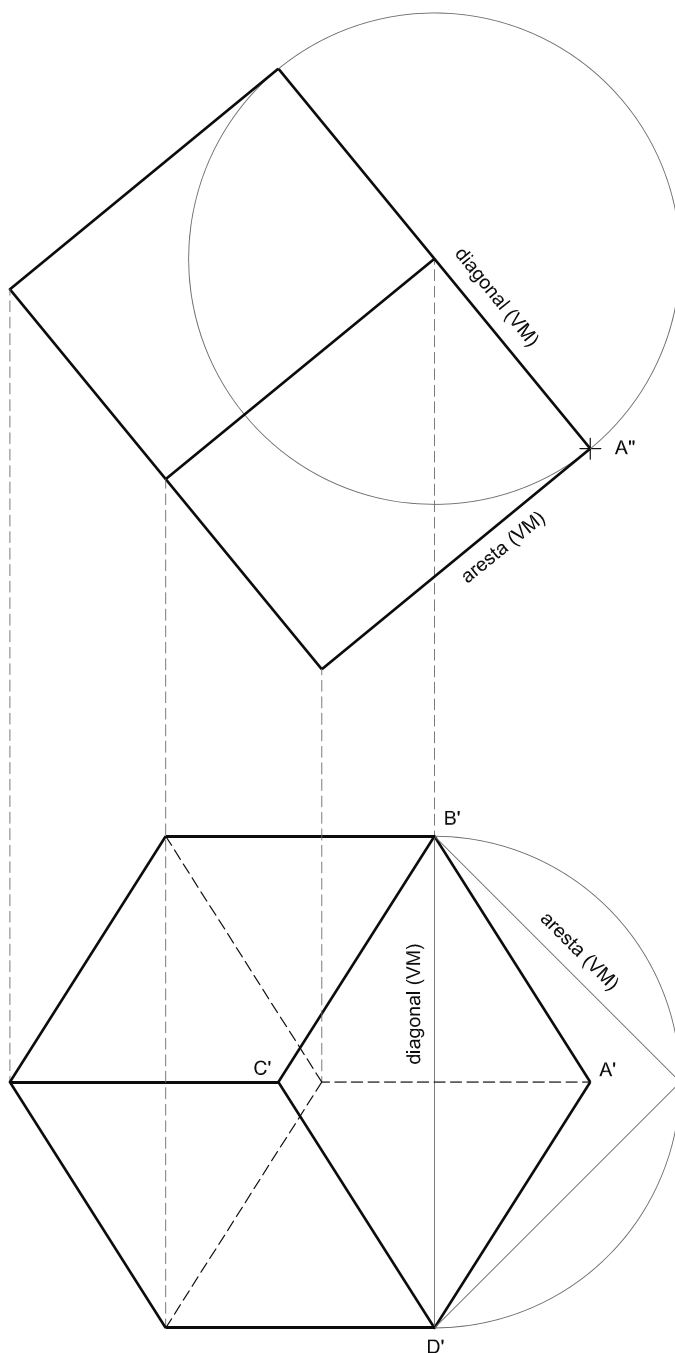


19. Efectuem una vista auxiliar, en la qual el pla **ABC** aparegui com a projectant per tal de determinar directament la secció que produeix a l'hexàedre. Passem els punts d'intersecció entre la projecció projectant del pla i les arestes del cub a les projeccions principals del cub, i estudiem la visibilitat del conjunt per completar la representació.



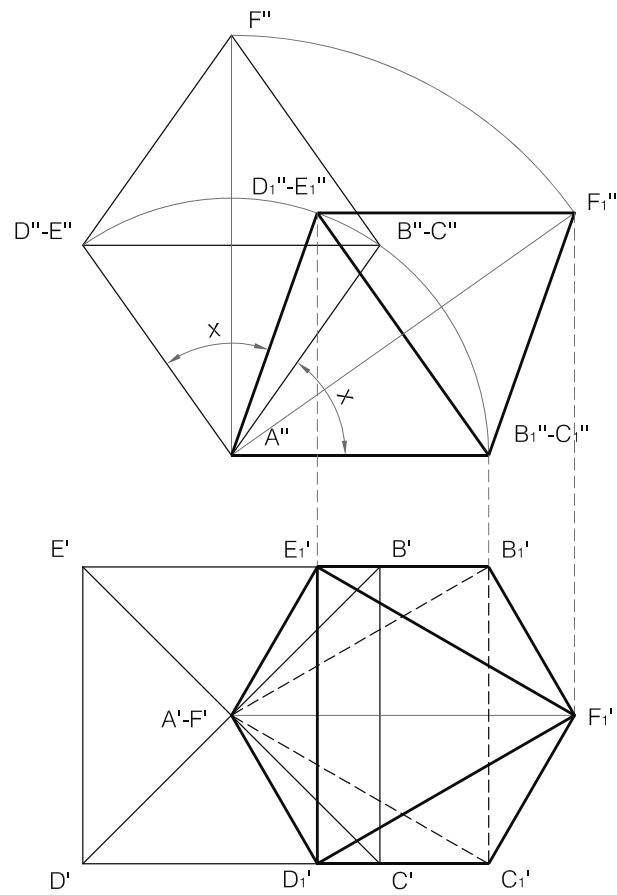
20. La projecció vertical C'' està en correspondència dièdrica amb C' i a una distància de A'' igual a la veritable magnitud de la diagonal del quadrat (que tenim a la projecció horitzontal $B'D'$). A partir d'aquesta projecció horitzontal, determinem la veritable magnitud del costat del quadrat igual a l'aresta del cub; el seu valor permet determinar la projecció vertical del cub (perpendicularment a la projecció vertical del pla $ABCD$).

Les arestes perpendiculars al pla $ABCD$ són rectes frontals; a la seva projecció horitzontal referim els vèrtexs de la base superior del cub.



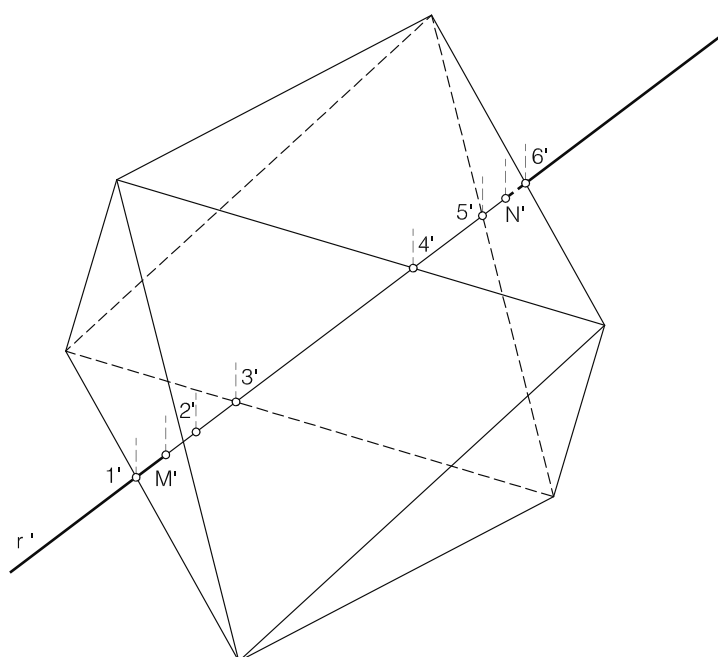
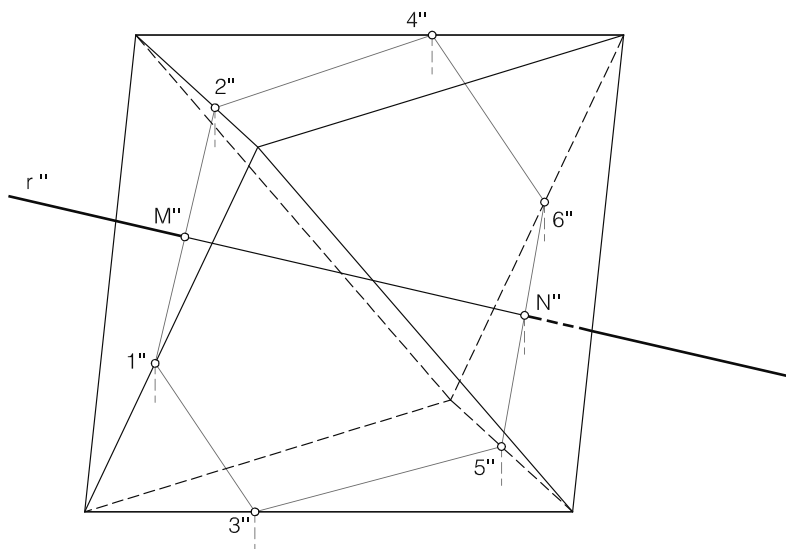
Octàedre

21. Respecte a un eix de punta, no representat, que fem passar pel vèrtex **A**, girem la projecció coincident dels dos altres vèrtexs **B** i **C** fins a situar la cara **ABC** com un pla horitzontal. Apliquem el mateix gir als vèrtexs restants de l'octàedre per completar les dues projeccions en la posició que se sol·licita.



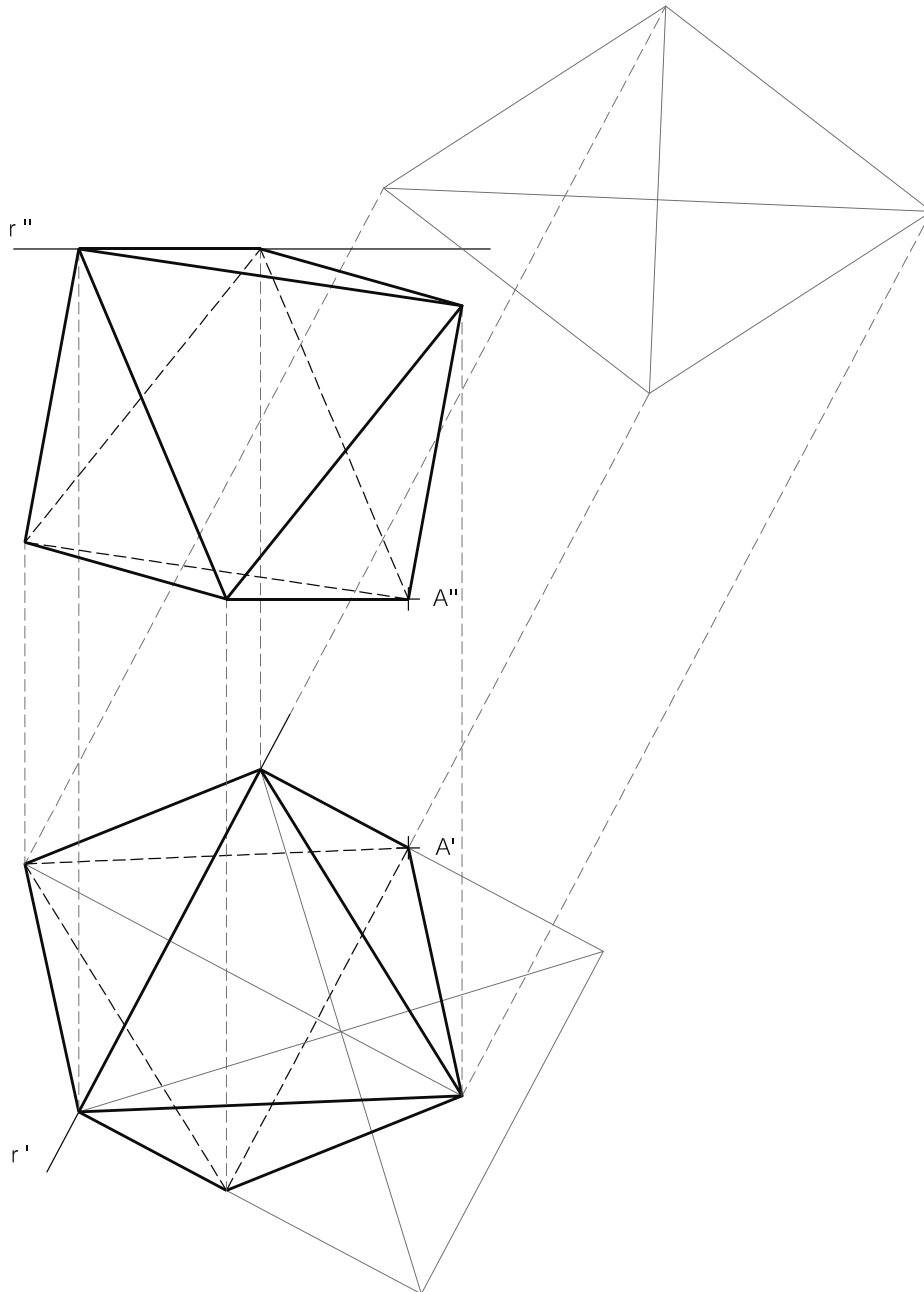
- 22.** Per determinar aquesta intersecció considerem el pla projectant vertical que coincideix amb la projecció horitzontal r' de la recta. Aquest pla produeix com a secció a l'octàedre el polígon **123456**, que determinem directament a la projecció horitzontal i que referim als punts corresponents de les projeccions verticals de les arestes de l'octaedre, **1''2''3''4''5''6''**.

Les projeccions horitzontals de la recta i de la secció són coincidents, però a la projecció vertical es tallen en els punts **M''** i **N''**, els quals representen els punts d'intersecció entre la recta i el políedre; uns punts que podem considerar l'un com a punt d'entrada i l'altre, de sortida; per tant, la recta serà oculta entre tots dos punts en considerar opac o sòlid l'octàedre.



- 23.** Busquem la veritable magnitud de la distància del punt **A** a la recta **r** (posant la recta com a recta de punta); aquesta distància coincideix amb la magnitud del costat del quadrat, que a la projecció horitzontal mesurem directament damunt de **r'**. Referim els vèrtexs a sobre de **r''** i, per paral·lelisme, completem les dues projeccions del quadrat.

La distància igual al costat de la projecció auxiliar coincideix amb un pla de cantell, la mediatriu del qual conté els altres dos vèrtexs de l'octàedre separats una distància igual a la seva diagonal. Des d'aquesta projecció auxiliar, completem les dues projeccions principals.



- 24.** Passem els punts d'intersecció entre la projecció projectant del pla i les arestes de l'octàedre a la projecció horitzontal i estudiem la visibilitat del conjunt per completar la representació.

