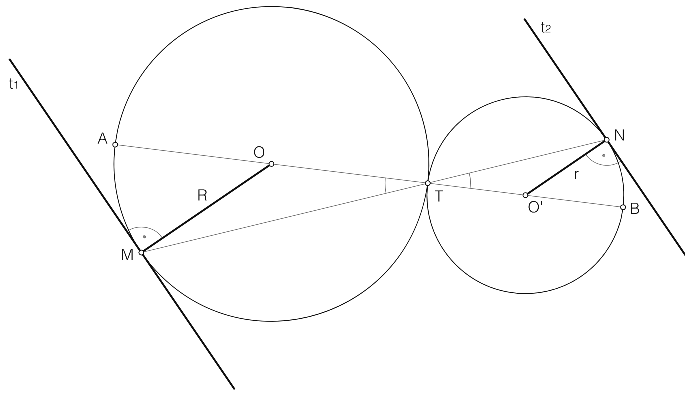
Unitat 1. Ampliació de geometria plana

ACTIVITATS (pàgines 27 i 28 del llibre de l'alumne)

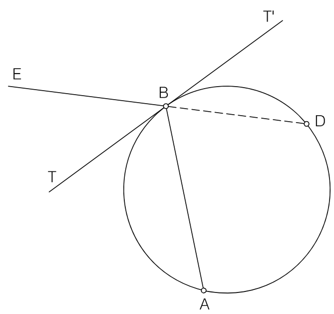
Angles, circumferència i arc capaç

1. Tracem la secant **ATB** de la figura 1; els angles **ATM** i **BTN**, inscrits a cadascuna de les circumferències, són iguals perquè estan oposats pel vèrtex. Per tant, també són iguals els angles **AOM** i **BO′N**, i, atès que tenen un costat comú, l'altre ha de ser paral·lel; és a dir, els radis **AO** i **BO′** són paral·lels.

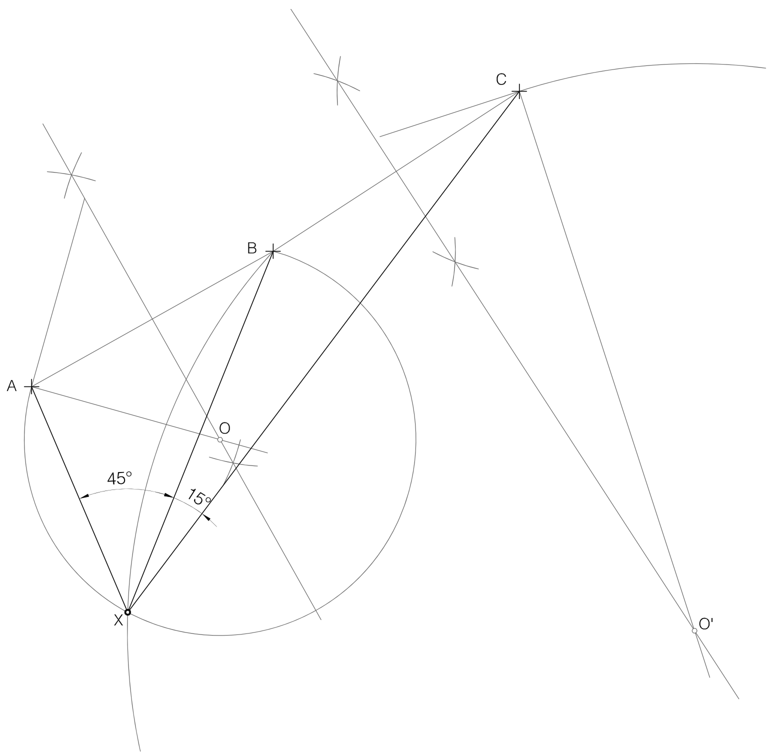
Com que la tangent sempre és perpendicular al radi traçat en el punt de tangència, si els radis anteriors són paral·lels, també ho seran les tangents $\mathbf{t_1}$ i $\mathbf{t_2}$ traçades pels punts **A** i **B** de tangència.



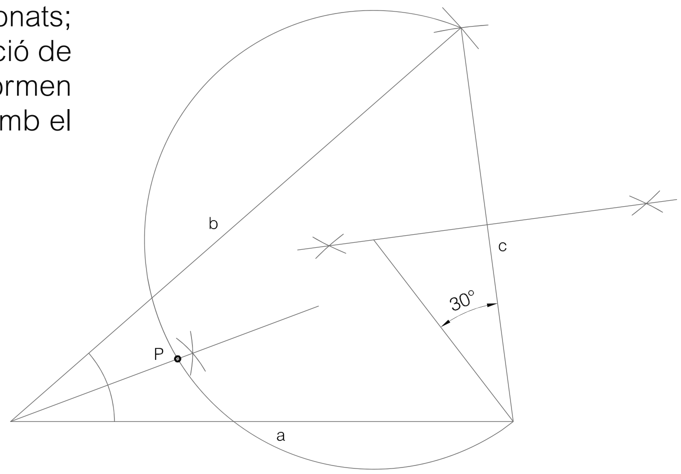
2. L'angle **ABE** és l'angle **exinscrit** que es descriu a l'enunciat; el seu valor és igual a la suma dels angles **ABT** i **TBE**. El segon d'aquests angles, **TBE**, és igual a l'angle **T′BD**, perquè estan oposats pel vèrtex; per tant, l'angle **ABE** és igual a la suma dels angles semiinscrits **ABT** i **T′BD**; si poséssim cadascun d'aquests angles en funció de l'angle central corresponent, tindríem que l'angle **ABE** és igual a la semisuma dels arcs **AB** i **BD**, com es diu a l'enunciat de l'exercici.



3. Construïm els arcs capaços de 45º en relació amb els punts **A** i **B,** i de 15º en relació amb els punts **B** i **C**; la intersecció de tots dos ens dóna la posició **X** del punt que es demana.

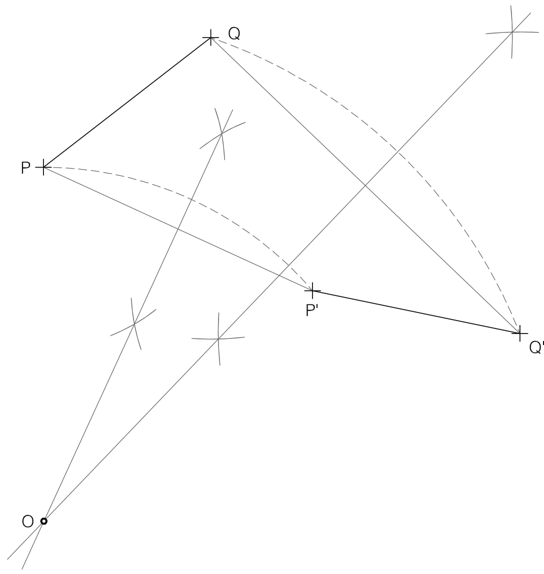


4. Construïm el triangle a partir dels tres costats donats; el punt que es demana el trobem com a intersecció de dos llocs geomètrics: la bisectriu de l'angle que formen els costats **a** i **b**, i l'arc capaç de 60º en relació amb el costat **c**.

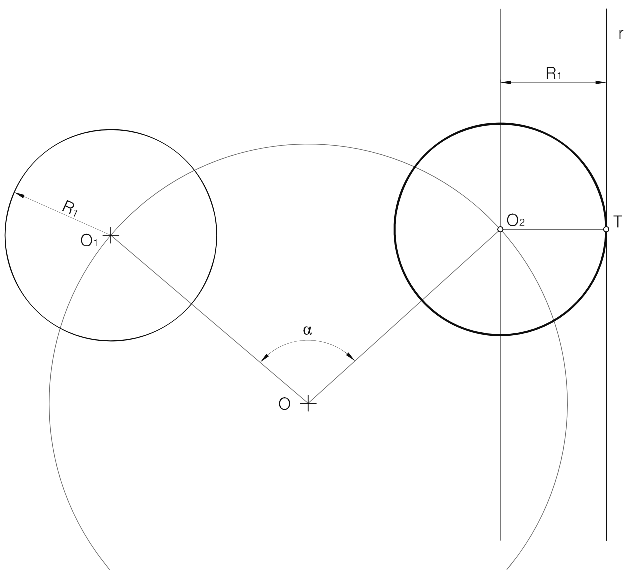


Transformacions isomètriques

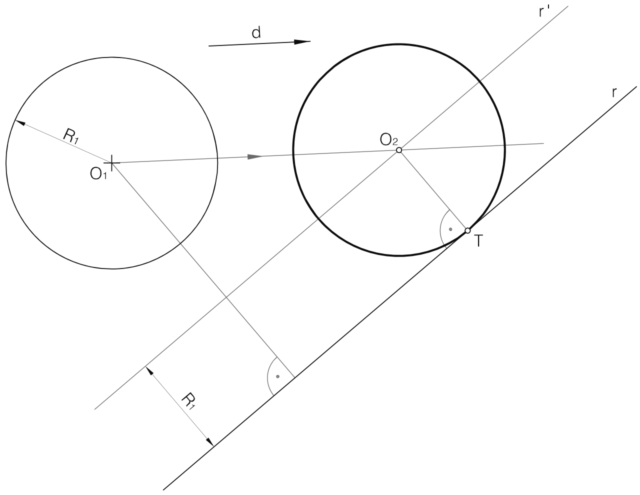
5. Les mediatrius dels segments **PP′** i **QQ′** es tallen en el punt **O**, el centre de gir que transforma el primer segment en el segon.



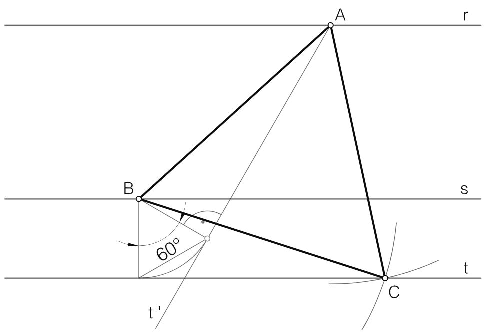
6. La posició del nou centre, $\mathbf{O_2}$, serà a la intersecció de la paral·lela a **r** a una distància $\mathbf{R_1}$ igual al radi de la circumferència, amb l'arc de centre **O** i radi igual a la distància fins a $\mathbf{O_1}$.



7. La posició del nou centre, $\mathbf{O_2}$, serà a la intersecció de la paral·lela a **r** a una distància $\mathbf{R_1}$ igual al radi de la circumferència, amb la paral·lela a la direcció **d** traçada pel centre $\mathbf{O_1}$.

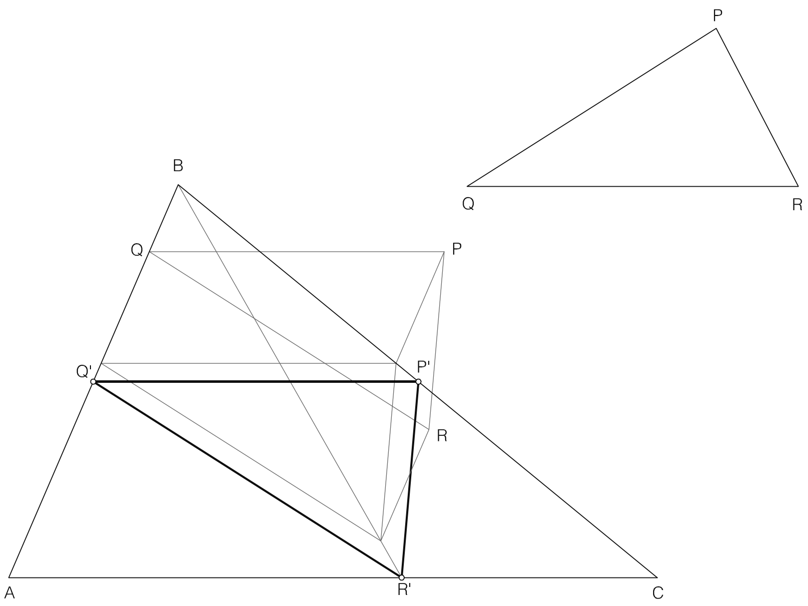


8. Situem un punt **B** qualsevol sobre la recta **s** i amb aquest centre girem la recta **t** un angle de 60º, amb la qual cosa obtenim la recta **t′**; la intersecció de **t′** amb la recta **r** ens dóna la posició del vèrtex **A** del triangle equilàter. Coneguts **A** i **B**, determinem el tercer vèrtex **C**, equidistant dels dos anteriors i situat sobre la tercera de les rectes paral·leles.

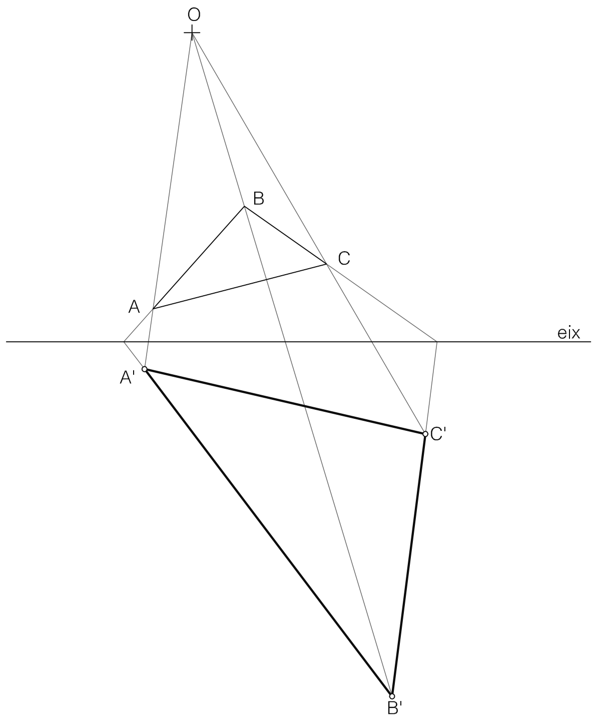


Homologia

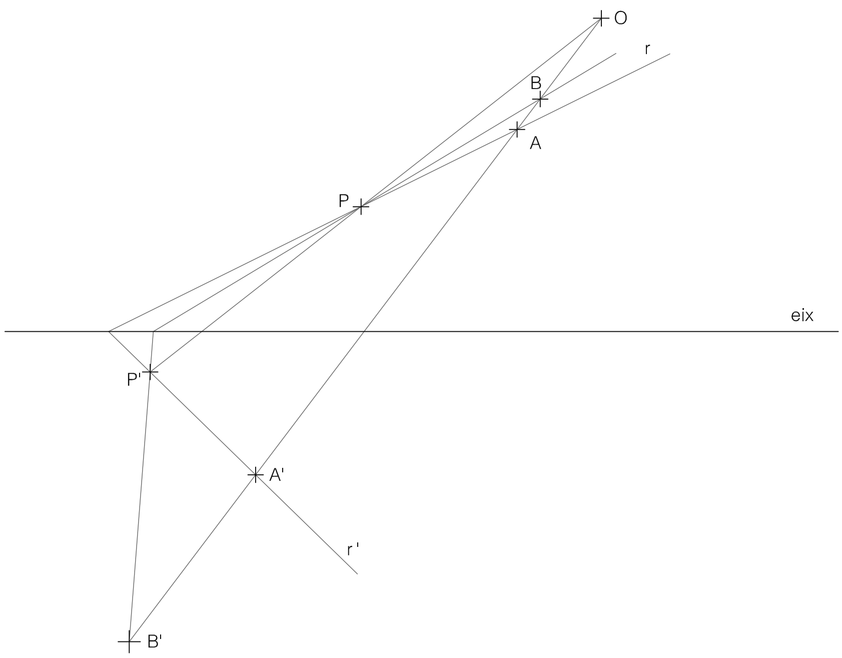
9. Respecte al triangle **ABC**, situem el triangle **PQR** amb el vèrtex **Q** col·locat en el costat **AB**; traslladem el triangle **PQR** en la direcció del costat **AB** perquè tingui dos vèrtexs situats sobre dos costats més del triangle **ABC**. Apliquem una homotècia de centre **B** per obtenir el triangle **P′Q′R′** que compleix les condicions que es demanen a l'enunciat.



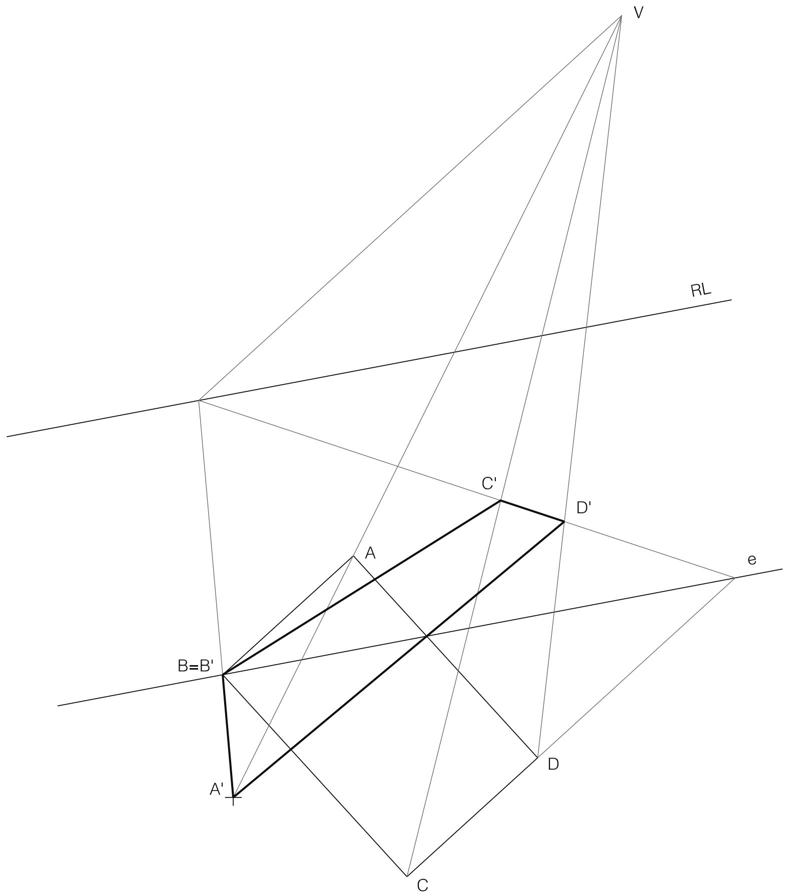
10. Com que els costats homòlegs s'han de tallar a l'eix de l'homologia, prolonguem **AB** fins a tallar l'eix i unim aquest punt amb **A′**. Sobre la recta anterior, a la seva intersecció amb **OB**, hi ha el punt **B′**. D'una manera similar, determinem el vèrtex **C′**, homòleg de **C**.



11. Mitjançant rectes homòlogues, definim una nova parella de punts homòlegs, **P** i **P′**; les rectes homòlogues que passen per **P** i **P′** i per **B′** ens permeten trobar la posició **B** que es demana.

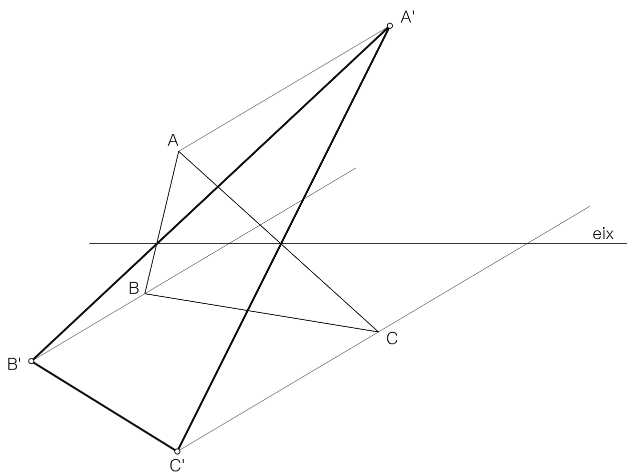


12. El vèrtex de l'homologia és a la intersecció de la recta **AA′** amb la paral·lela en el costat **AB** traçada pel punt en què la recta **A′B** talla la recta límit. Conegut el vèrtex **V**, l'aplicació de les propietats d'aquesta transformació permet determinar els altres dos vèrtexs (el **B** és homòleg de si mateix).

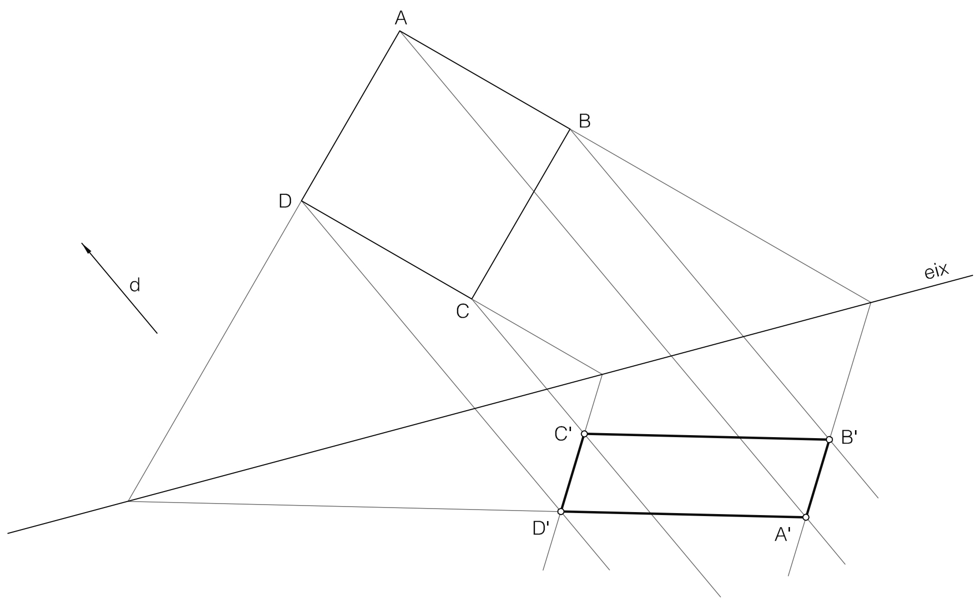


Afinitat

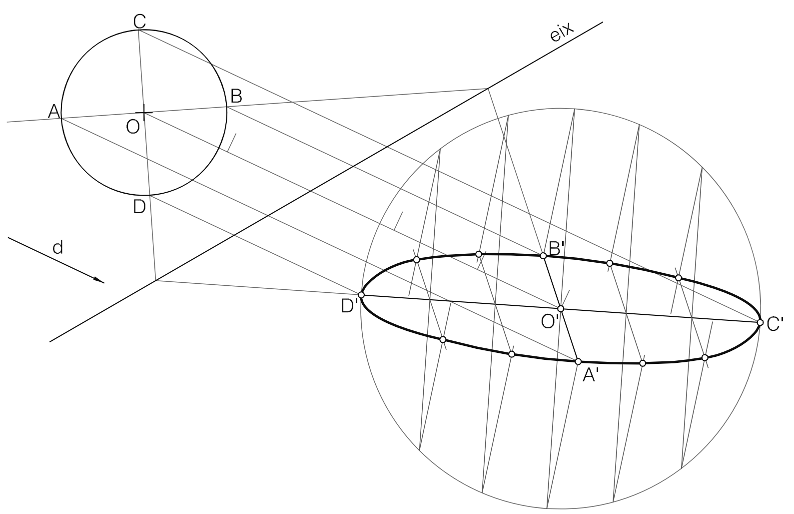
13. Les rectes d'unió de punts afins són paral·leles a **AA′** i els costats afins es tallen en punts de l'eix d'afinitat; així, determinem **B′**, afí de **B**, i tot seguit, **C′**.



14. La parella de punts afins **B** i **B′** defineixen la direcció d'afinitat que ens permet trobar la recta de punts afins; fem servir rectes afins que es tallen en punts de l'eix d'afinitat.

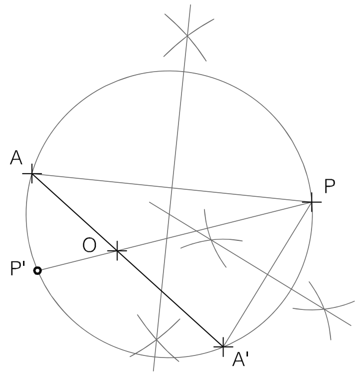


15. A la circumferència inicial, tracem els dos diàmetres perpendiculars **AB** i **CD**, dels quals determinem els afins. Trobem **O′**, afí del centre de la circumferència, en la direcció donada, i fent servir la raó de –3/2 (el punt **O′** a l'altre costat de l'eix i amb la relació de distàncies a l'eix que s'indiquen a la raó).

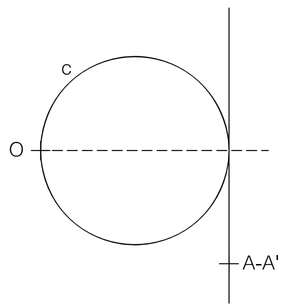


Inversió

16. Mitjançant els punts donats, **A**, **A′** i **P**, construïm la circumferència de punts dobles que passa pels tres punts. Unim **P** amb el centre d'inversió **O** i prolonguem el segment fins a tallar la circumferència en el punt **P′**, invers de **P**.



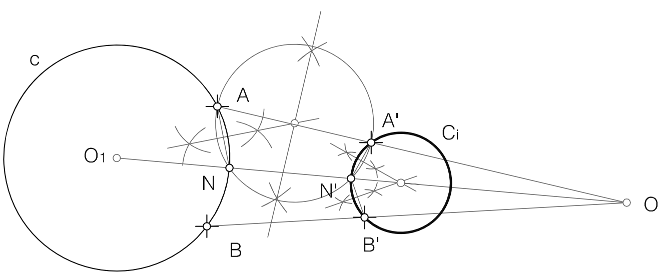
17. Si el punt **O**, extrem d'un diàmetre de la circumferència, és el centre d'inversió, la figura inversa d'aquesta circumferència és una recta tangent a la circumferència a l'altre extrem del diàmetre.



18. Unim cada punt amb el seu invers per determinar el centre **O** d'inversió. La figura inversa d'una circumferència que no passa pel centre d'inversió és una altra circumferència que tampoc no hi passa; determinem aquesta circumferència coneixent tres dels seus punts, inversos de tres punts més de la circumferència inicial. **A′** i **B′** són dos d'aquests punts.

Per determinar una nova parella de punts inversos, unim **O** amb el centre **O_1** i determinem l'invers de l'extrem **N** del diàmetre **MN**. Com que dues parelles de punts inversos no alineats sempre es troben sobre una mateixa circumferència, tracem la que passa per **A**, **A′** i **N**; la recta que uneix **N** amb **O** ens determina **N′**.

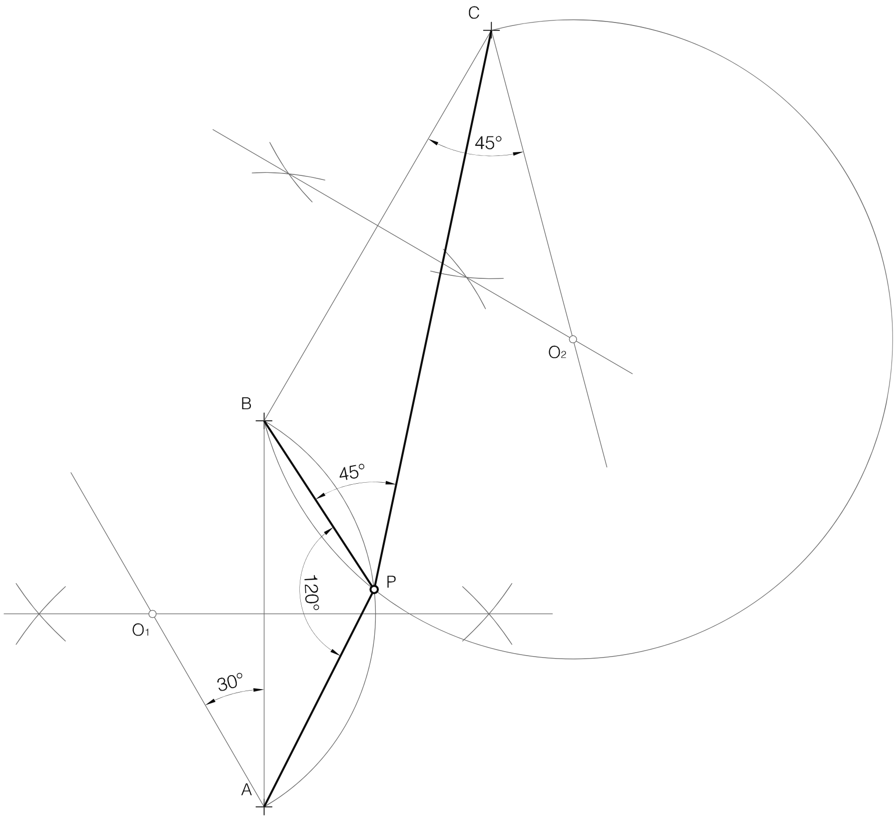
Finalment, la circumferència inversa de la inicial passa per **N′**, **A′** i **B′**.



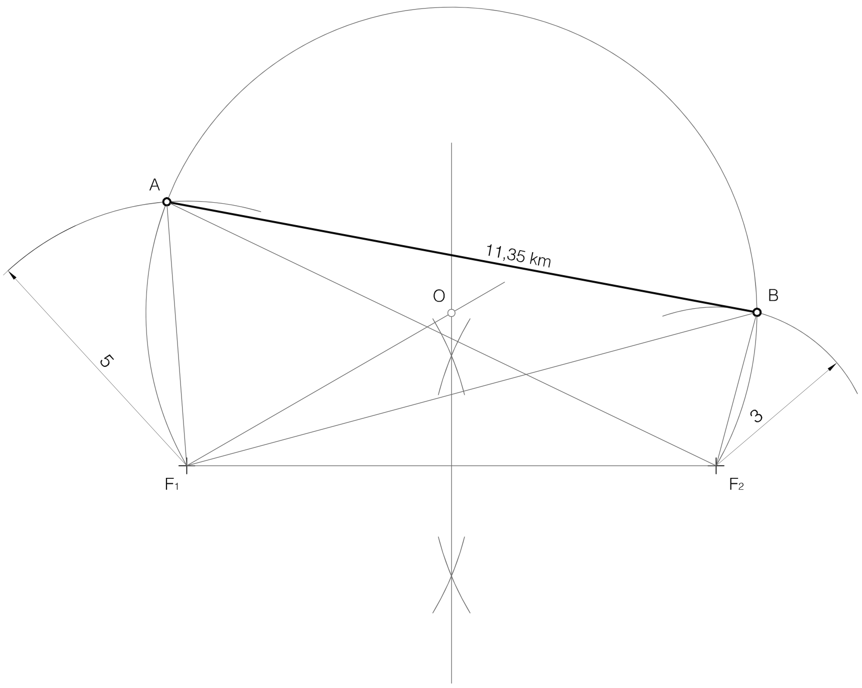
OBJECTIU UNIVERSITAT (pàgines 29 i 30 del llibre de l'alumne)

Angles, circumferència i arc capaç

19. El punt **P** és a la intersecció de dos arcs capaços: un de 120º respecte dels punts **A** i **B**, i un altre de 45º respecte dels punts **B** i **C**.

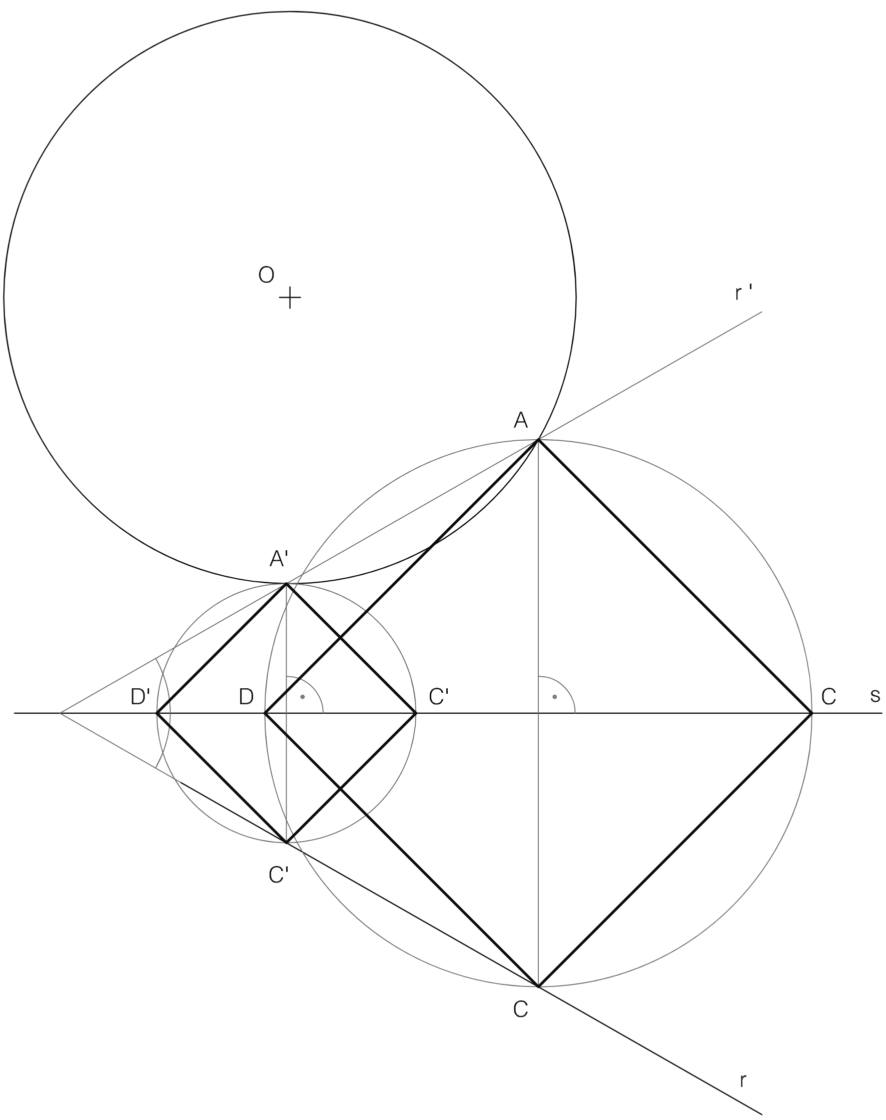


20. Respecte del segment $\mathbf{F_1F_2}$ que defineix la posició dels dos fars, tracem l'arc capaç de 60º; sobre d'aquest, amb dos arcs de centres, $\mathbf{F_1}$ i $\mathbf{F_2}$, determinem els punts **A** i **B**. A l'escala 1:100.000, les distàncies de 5 km i 3 km equivalen a 5 cm i 3 cm.

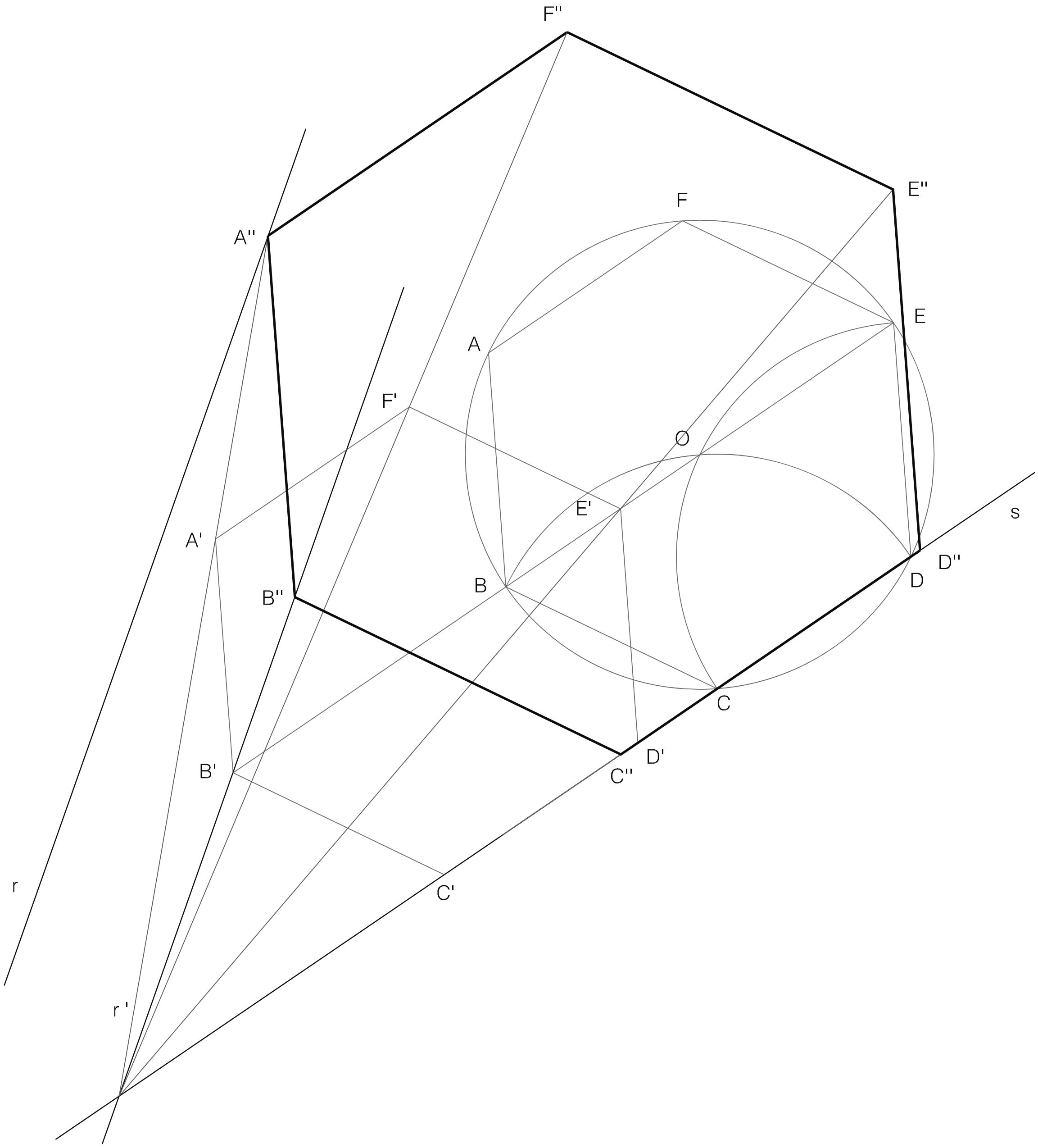


Transformacions isomètriques

21. Respecte a la recta **s**, tracem la simètrica **r′** de la recta **r**; els punts en què **r′** talla la circumferència són vèrtexs dels quadrats sol·licitats. A partir d'aquests i perpendicularment a **s**, determinem els vèrtexs situats a l'altra recta. Coneguts dos vèrtexs de cada quadrat, podem determinar els que estan situats a la recta **s**.

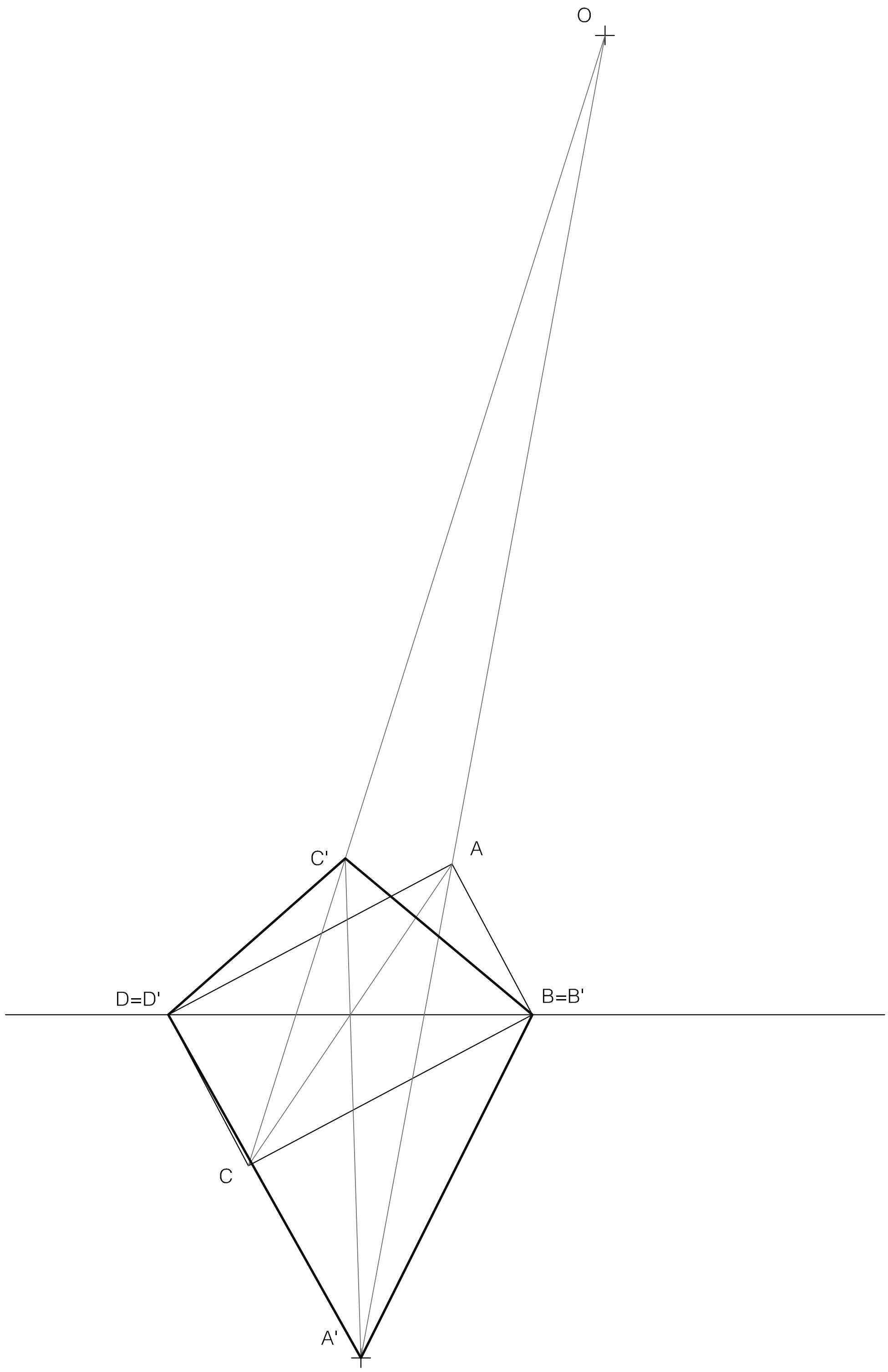


22. Dibuixem un hexàgon auxiliar **ABCDEF** amb el costat **CD** sobre la recta **s** i el traslladem en la direcció de **s** fins que el vèrtex **B** es trobi sobre la recta **r′**; així tindrem l'hexàgon intermedi **A′B′C′D′E′F′**. El punt d'intersecció entre **r′** i **s** és el centre d'una homologia; unim aquest centre amb **A′** fins a tallar la recta **r** en el punt **A′′**, homòleg de l'anterior. La paral·lela a **A′B′** traçada des de **A′′** determina a la recta **r′** el vèrtex **B′′** i el costat de l'hexàgon que busquem (el podem completar per homologia).

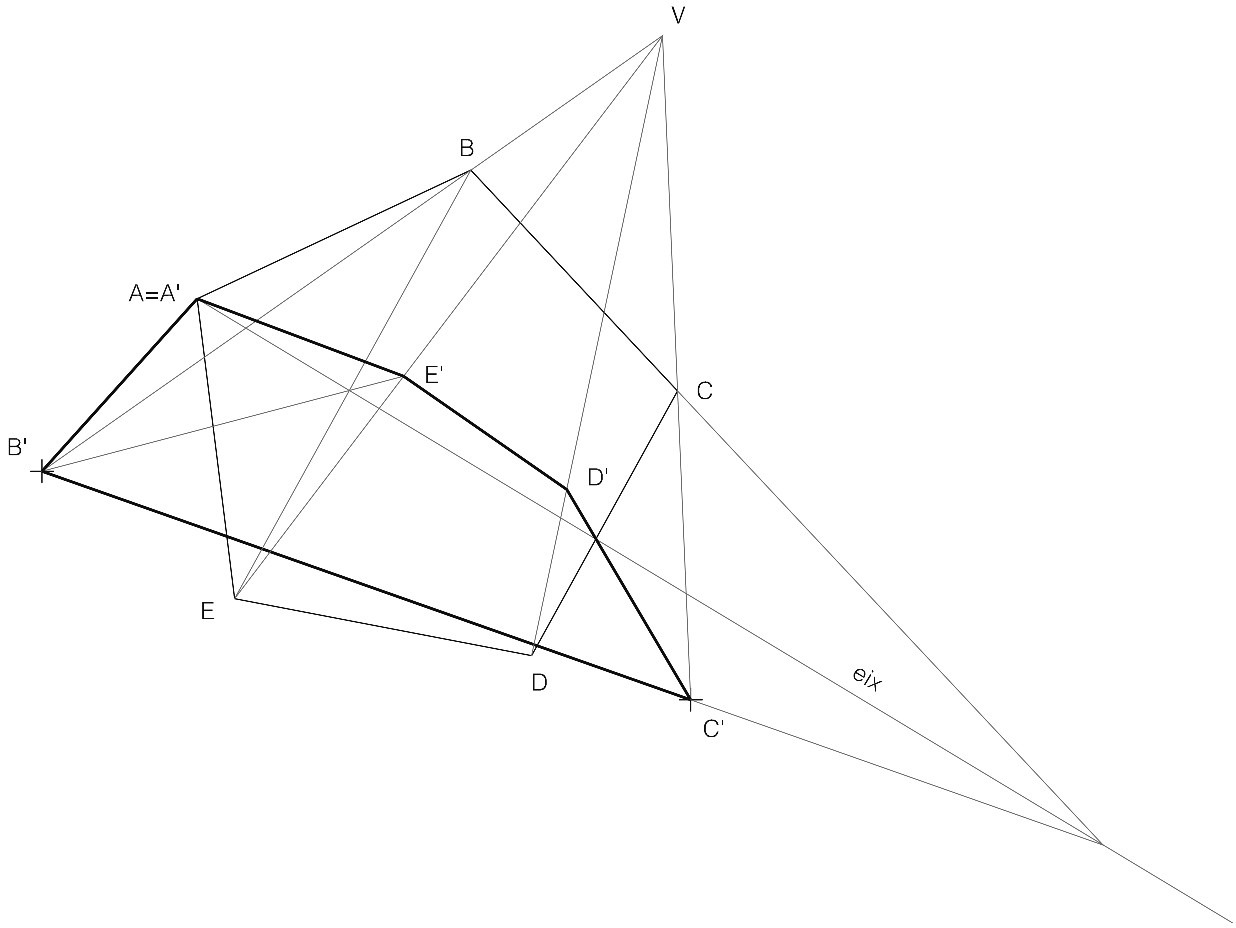


Homologia

23. El punt en què la diagonal **AC** talla l'eix és un punt doble pel qual també passarà la diagonal **A′C′.** La recta que passa per aquest punt i per **A′** intercepta sobre la recta que uneix **C** i el centre **O** de l'homologia, la posició de **C′**. Els vèrtexs **B** i **D** són punts dobles.

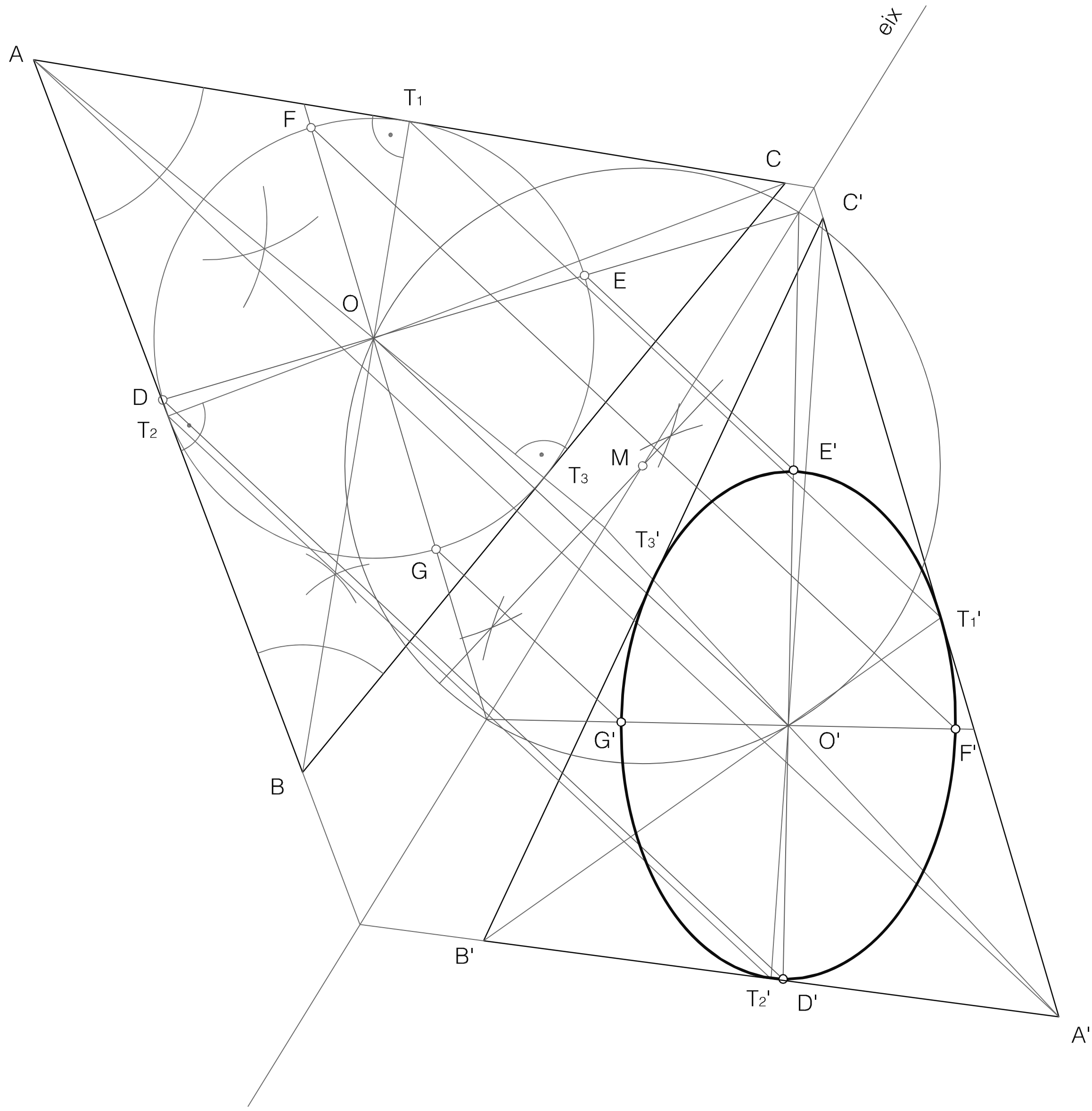


24. Les rectes **CC**′ i **BB**′ es tallen en el vèrtex **V** de l'homologia. Les rectes **BC** i **B**′**C**′ es tallen en un punt que, amb el punt doble **A-A**′, defineix l'eix de l'homologia. Amb això, disposem dels elements necessaris per determinar els homòlegs dels dos altres eixos.

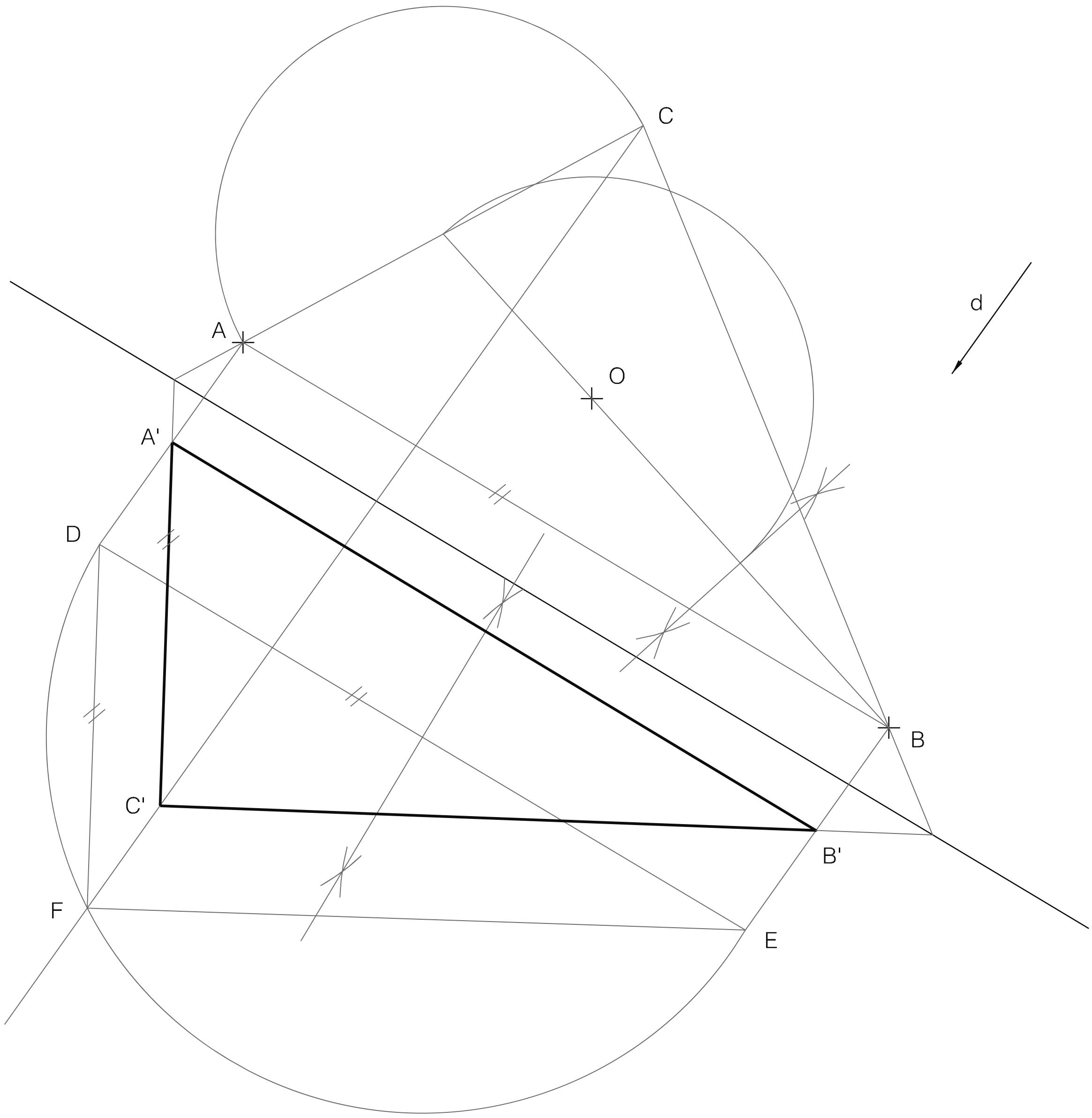


Afinitat

25. La intersecció entre els costats homòlegs **AC** i **A′C′**, i **AB** i **A′B′** defineix dos punts pels quals passa l'eix de l'afinitat. Les bisectrius del triangle **ABC** permeten traçar la circumferència inscrita, en què tracem els diàmetres perpendiculars **ED** i **FG**. Respecte de la mateixa afinitat, determinem els homòlegs **E′**, **D′**, **F′** i **G′**, amb la qual cosa podem traçar l'el·lipse afí de la circumferència inscrita.



26. El segment **BO** representa 2/3 parts de la mitjana que passa pel vèrtex **B**; portant-ne 1/3 a partir de **O**, completem la seva longitud i el punt mitjà del costat **AC**; així, tenim el triangle **ABC**. Com que **AB** és paral·lel a l'eix, el seu homòleg també ho serà; tracem un segment auxiliar **DE** paral·lel a l'eix i, respecte d'aquest, l'arc capaç de 90º; des de **C** i en la direcció d'afinitat, determinem **F**. La paral·lela a **FD** traçada pel punt en què **AC** talla l'eix ens determina **A′** i **C′**; a partir d'aquests, **B′** completa l'exercici.



Inversió

27. Tracem la circumferència que passa per **A**, **A′** i **B**; la recta que passa per aquest últim punt i pel centre d'aquesta circumferència la talla en el punt **B′**. La intersecció de la circumferència que passa per **B**, **B′** i **C** amb la recta que passa per **O** i **C**, determina la posició **C′**.