Aplicaciones de la derivada

9

ACTIVIDADES

1. Página 212

a) $f(x) = -x^2 + 3x$ Dom $f(x) = \mathbb{R}$

$f'(x) = -2x + 3$ $f'(x) = 0 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Damos valores a la izquierda y a la derecha de $x = \dfrac{3}{2}$:

$f'(1) = 1 > 0 \rightarrow f(x)$ creciente a la izquierda de $x = \dfrac{3}{2}$

$f'(2) = -1 < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente a la derecha de $x = \dfrac{3}{2}$.

Por tanto, $f(x)$ es creciente en $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$ y decreciente en $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$.

b) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$

$f'(x) = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$ $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x)$ tiene asíntota vertical en $x = 2$.

$f'(0) = -\dfrac{3}{4} < 0$ $f'(3) = -3 < 0$

Por tanto, $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

2. Página 212

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Caso $x \leq 1$:

$f(x) = 2 - x^2$ $f'(x) = -2x$ $f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

Estudiamos $f'(x)$ a la izquierda y derecha del punto $x = 0$:

$f'(-1) = 2 > 0$ $f'(1) = -2 < 0$

Es decir, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, 1)$.

Caso $x > 1$:

$f(x) = x^2 - 6x + 8$ $f'(x) = 2x - 6$ $f'(x) = 0 \rightarrow x = 3$

Estudiamos $f'(x)$ a la izquierda y derecha del punto $x = 3$:

$f'(2) = -2 < 0$ $f'(4) = 2 > 0$

Es decir, $f(x)$ es decreciente en $(1, 3)$ y creciente en $(3, +\infty)$.

Por tanto, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en $(0, 1) \cup (1, 3)$.

3. Página 212

a) $f(x)=x^4-2x^2+1$ $\qquad$ $\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}$

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)$ $\qquad$ $f'(x)=0\to x=0,\ x=\pm1$

Estudiamos $f'(x)$ en torno a los puntos $x=-1$, $x=0$ y $x=+1$.

$f'(-2)=-24<0$ $\qquad$ $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\left(\frac{1}{4}-1\right)=\frac{3}{2}>0$ $\qquad$ $f'\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{4}-1\right)=-\frac{3}{2}<0$ $\qquad$ $f'(2)=24>0$

Por tanto, $f(x)$ es decreciente en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ y creciente en $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

b) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{1+x^2}$ $\qquad$ $\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}$

$f'(x)=\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$ $\qquad$ $f'(x)=0\to x=0$

Estudiamos un punto a la izquierda del 0 y otro a la derecha.

$f'(-2)=-\frac{8}{25}<0$ $\qquad$ $f'(2)=\frac{8}{25}>0$

Por tanto, $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-\infty,0)$ y creciente en el intervalo $(0,+\infty)$.

4. Página 213

$f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$ $\qquad$ $\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$ $\to$ Hay asíntotas verticales en $x=1$ y $x=-1$.

$f'(x)=\dfrac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$ $\to$ $f'(x)=0\to x=0,\ x=\pm\sqrt{3}$

$f'(-2)=-\frac{4}{9}<0$ $\qquad$ $f'\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{25}>0$ $\qquad$ $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{9}>0$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{9}>0$ $\qquad$ $f'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{25}>0$ $\qquad$ $f'(2)=-\frac{4}{9}<0$

En $x=-\sqrt{3}$ se alcanza el mínimo relativo, y en $x=\sqrt{3}$ el máximo relativo.

Las coordenadas de los puntos en los que alcanza dichos valores son:

$$\left(-\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \left(\sqrt{3},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

5. Página 214

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3}$ $\qquad$ $\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}-\{0\}$

$f'(x)=\dfrac{3-x^2}{x^4}$ $\qquad$ $f'(x)=0\to x=\pm\sqrt{3}$

$f''(x)=\dfrac{2(x^2-6)}{x^5}$ $\qquad$ $f''(-\sqrt{3})=\dfrac{2(3-6)}{(-\sqrt{3})^5}=\dfrac{6}{\sqrt{3}^5}>0$ y $f''(\sqrt{3})=\dfrac{2(3-6)}{(\sqrt{3})^5}=-\dfrac{6}{\sqrt{3}^5}<0$

Es decir, en $x=\sqrt{3}$ se alcanza un máximo relativo, y en $x=-\sqrt{3}$ un mínimo relativo.

b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^6+2}$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

$f'(x)=-\dfrac{4x(x^6-1)}{(x^6+2)^2}$ $f'(x)=0\rightarrow x=0,\ x=\pm 1$

$f''(x)=\dfrac{4(5x^{12}-25x^6+2)}{(x^6+2)^3}$

$f''(-1)=\dfrac{4(5-25+2)}{(1+2)^3}=-\dfrac{8}{3}<0$ $f''(0)=1>0$ $f''(1)=\dfrac{4(5-25+2)}{(1+2)^3}=-\dfrac{8}{3}<0$

Es decir, en $x=0$ se alcanza un mínimo relativo de $f(x)$, y en $x=-1$ y $x=1$ los máximos relativos.

6. Página 214

$f(x)=\dfrac{x+3}{x^3+x^2-6x}$ Dom $f(x)=\mathbb{R}-\{-3,0,2\}$

$f'(x)=\dfrac{-2x^3-10x^2-6x+18}{x^2(x^2+x-6)^2}=-\dfrac{2(x-1)}{(x-2)^2x^2}$ $f'(x)=0\rightarrow x=1$

$f''(x)=\dfrac{2(3x^2-6x+4)}{(x-2)^3x^3}\longrightarrow f''(1)=-2<0$

Es decir, $f(x)$ alcanza el máximo relativo en $x=1$.

7. Página 215

a) $f(x)=7x^3-x^2-x+2$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

$f'(x)=21x^2-2x-1$

$f''(x)=42x-2$ $f''(x)=0\rightarrow x=\dfrac{1}{21}$

$f''(0)=-2<0$ $f''(1)=40>0$

Por tanto, $f(x)$ es convexa en $\left(-\infty,\dfrac{1}{21}\right)$ y cóncava en $\left(\dfrac{1}{21},+\infty\right)$.

b) $g(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

$g'(x)=\dfrac{x^2\cdot(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$ $g''(x)=-\dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$ $g''(x)=0\rightarrow x=0,\ x=\pm\sqrt{3}$

$g''(-2)>0$ $g''(-1)<0$ $g''(1)>0$ $g''(2)<0$

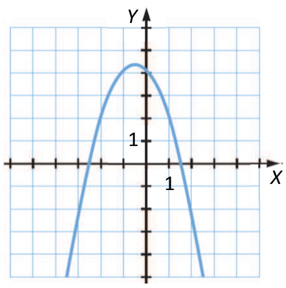
Por tanto, $g(x)$ es cóncava en $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$ y convexa en $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$.

8. Página 215

a) $f(x)=-x^2-x+4$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

$f'(x)=-2x-1$ $f''(x)=-2<0$

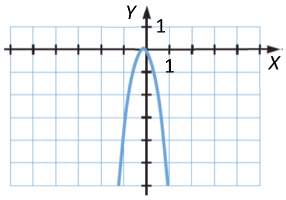
Por tanto, $f(x)$ es convexa $\forall x\in\mathbb{R}$.



b) $g(x) = -x - 5x^2$ Dom $g(x) = \mathbb{R}$

$g'(x) = -1 - 10x$ $g''(x) = -10 < 0$

Es decir, $g(x)$ es convexa $\forall x \in \mathbb{R}$.



9. **Página 216**

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$ Dom $f(x) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$ $f''(x) = 6x + 6$ $f''(x) = 0 \rightarrow x = -1$

$f''(-2) = -6 < 0$ $f''(0) = 6 > 0$

Por tanto:

$f(x)$ es convexa en $(-\infty, -1)$ y cóncava en $(-1, +\infty)$.

$f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = -1$.

b) $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2 + 7x}$ Dom $g(x) = \mathbb{R} - \{-7, 0\}$

$g'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 7}{(x+7)^2 x^2}$ $g''(x) = \dfrac{2(x^3 - 3x^2 - 21x - 49)}{(x+7)^3 x^3}$

$g''(x) = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 - 21x - 49 = 0 \rightarrow x = 7$

$g''(-8) < 0$ $g''(-6) > 0$ $g''(6) < 0$ $g''(8) > 0$

Por tanto:

$g(x)$ es convexa en $(-\infty, -7) \cup (0, 7)$ y cóncava en $(-7, 0) \cup (7, +\infty)$.

$g(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = 7$.

10. **Página 216**

$f(x) = x^3 + ax^2 + 3$ Dom $f(x) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax$ $f''(x) = 6x + 2a$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = -\dfrac{a}{3}$

Como existe punto de inflexión en $x = 1 \longrightarrow -\dfrac{a}{3} = 1 \rightarrow a = -3 \longrightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

Estudiamos puntos a la izquierda y derecha de $x = 1$:

$f''(0) = -6 < 0$ $f''(2) = 6 > 0$

Es decir:

$f(x)$ es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, +\infty)$.

Las coordenadas del punto de inflexión son $(1, f(1)) = (1, 1)$.

11. Página 217

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2x^3}$ $\quad$ $\text{Dom} f(x)=\mathbb{R}-\{0\}$

$f'(x)=\dfrac{3-x^2}{2x^4}$ $\quad$ $f''(x)=\dfrac{x^2-6}{x^5}$ $\quad$ $f'''(x)=\dfrac{30-3x^2}{x^6}$

$f''(x)=0\to x=\pm\sqrt{6}$

$f'''(-\sqrt{6})=\dfrac{30-18}{6^3}\neq 0$ $\quad$ $f'''(\sqrt{6})=\dfrac{30-18}{6^3}\neq 0$

Es decir, $f(x)$ tiene puntos de inflexión en $x=-\sqrt{6}, x=\sqrt{6}$.

b) $g(x)=-\dfrac{x}{x^2-7}$ $\quad$ $\text{Dom}\, g(x)=\mathbb{R}-\{-\sqrt{7},\sqrt{7}\}$

$g'(x)=\dfrac{x^2+7}{(x^2-7)^2}$ $\quad$ $g''(x)=-\dfrac{2x(x^2+21)}{(x^2-7)^3}$ $\quad$ $g'''(x)=\dfrac{6(x^4+42x^2+49)}{(x^2-7)^4}$

$g''(x)=0\to x=0$

$g'''(0)=\dfrac{6\cdot 49}{(-7)^4}\neq 0$

Por tanto, $g(x)$ tiene un punto de inflexión en $x=0$.

12. Página 217

a) $f(x)=2x^3$ $\quad$ $f'(x)=6x^2$ $\quad$ $f''(x)=12x$ $\quad$ $f'''(x)=12$

$f'(x)=0\to x=0$ $\longrightarrow$ Posible máximo o mínimo

$f''(x)=0\to x=0$ $\longrightarrow$ Posible punto de inflexión

$f'''(0)=6\neq 0$ $\longrightarrow$ El orden es impar $\longrightarrow$ $x=0$ es un punto de inflexión.

b) $f(x)=-3x^4$

$f'(x)=-12x^3$ $\quad$ $f''(x)=-36x^2$ $\quad$ $f'''(x)=-72x$ $\quad$ $f^{IV)}(x)=-72$

$f'(x)=0\to x=0$ $\longrightarrow$ Posible máximo o mínimo

$f''(x)=0\to x=0$ $\longrightarrow$ Posible punto de inflexión

$f'''(0)=0$

$f^{IV)}(0)=-72\neq 0$ $\longrightarrow$ El orden es par y $f^{IV)}(0)<0$ $\longrightarrow$ $x=0$ es un máximo relativo.

c) $f(x)=6x^5$

$f'(x)=30x^4$ $\quad$ $f''(x)=120x^3$ $\quad$ $f'''(x)=360x^2$ $\quad$ $f^{IV)}(x)=720x$ $\quad$ $f^{V)}(x)=720$

$f'(x)=0\to x=0$ $\longrightarrow$ Posible máximo o mínimo

$f''(x)=0\to x=0$ $\longrightarrow$ Posible punto de inflexión

$f'''(0)=0$ $\quad$ $f^{IV)}(0)=0$

$f^{V)}(0)=720\neq 0$ $\longrightarrow$ El orden es impar $\longrightarrow$ $x=0$ es un punto de inflexión.

13. Página 218

$B(x) = I(x) - C(x) = 60x - x^2 - (x^2 - 12x + 120) = -2x^2 + 72x - 120$

Calculamos el máximo de la función $B(x)$:

$B'(x) = -4x + 72 \qquad B'(x) = 0 \to x = 18$

$B''(x) = -4 \qquad B''(18) = -4 \to x = 18$ es un máximo relativo.

El beneficio máximo se obtiene para una producción de 18 unidades, y el beneficio máximo es:

$$B(18) = -2 \cdot 18^2 + 72 \cdot 18 - 120 = 528 \text{ €}$$

14. Página 218

Buscamos el máximo global de la función concentración $f(t) = 300t(3-t) = 900t - 300t^2$:

$f'(t) = 900 - 600t \qquad f'(t) = 0 \to t = \frac{3}{2}$

$f''(t) = -600 \qquad f''\left(\frac{3}{2}\right) = -600 < 0 \to t = \frac{3}{2}$ es un máximo de $f(t)$.

La máxima concentración se obtendrá en $t = \frac{3}{2}$.

15. Página 219

Definimos dos sumandos x, y tales que $x + y = 90$.

Queremos que estos sumandos minimicen, además, la expresión $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.

Reducimos la función a una sola variable:

$$y = 90 - x \longrightarrow f(x) = x^2 + 2(90 - x)^2$$

$f'(x) = 6x - 360 \qquad f'(x) = 0 \to x = 60$

$f''(x) = 6 \qquad f''(60) = 6 > 0 \to$ En $x = 60$ hay un mínimo relativo.

Así, $x = 60$ e $y = 30$ minimizan la función $f(x)$.

16. Página 219

l: longitud del lado de la base en cm *h*: altura del prisma en cm

$P_{\text{Cara}} = 30 \longrightarrow 2(l + h) = 30 \longrightarrow h = 15 - l$

La función que queremos maximizar es:

$$V(l, h) = l^2 h \xrightarrow{h = 15 - l} V(l) = l^2(15 - l)$$

$V'(l) = 3l(10 - l) \qquad V'(l) = 0 \longrightarrow l = 0, l = 10$ La solución válida es $l = 10$.

$V''(l) = 30 - 6l \longrightarrow V''(10) = -30 < 0 \longrightarrow$ En $l = 10$ se alcanza el máximo.

Por tanto, las dimensiones que debe tener el prisma para cumplir las condiciones dadas son:

$$l = 10 \text{ cm} \qquad h = 5 \text{ cm}$$

17. Página 220

$f(x)=e^{x^2-1}$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

$f(x)$ es continua y derivable $\forall x\in\mathbb{R}$ $\rightarrow f(x)$ continua en $[-1,1]$ y derivable en $(-1,1)$.

Además, $f(-1)=f(1)=1$.

Es decir:

$f(x)$ cumple las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-1,1]$.

$f'(x)=2xe^{x^2-1}$ $\quad f'(x)=0\rightarrow x=0$

Por tanto, el punto *c* en el que $f(x)$ tiene derivada nula es $c=0$.

18. Página 220

$f(x)=3cos^2x$ $\qquad$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

- $f(x)$ continua y derivable $\forall x\in\mathbb{R}$ $\rightarrow$ En particular, es continua en $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ y derivable en $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$

Es decir:

$f(x)$ cumple las condiciones del teorema de Rolle.

$f'(x)=-6cos(x)sen(x)$ $\quad f'(x)=0\rightarrow x=k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

Estamos estudiando el intervalo $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, por lo que solo consideramos $k=2$.

Por tanto, $f(x)$ tiene derivada nula para el valor $c=\pi$.

19. Página 221

$f(x)=7x^4-x^3-4x$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

$f(x)$ es continua y derivable $\forall x\in\mathbb{R}$ $\rightarrow$ En particular es continua en $[0,2]$ y derivable en $(0,2)$.

Por tanto, $f(x)$ cumple las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0,2]$.

20. Página 221

$f(x)=cos^2x$ $\qquad$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

$f(x)$ es continua y derivable $\forall x\in\mathbb{R}$ $\rightarrow$ En particular, es continua en $[0,\pi]$ y derivable en $(0,\pi)$.

Luego cumple las condiciones del *T.V.M.* en $[0,\pi]$.

$$\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi-0}=\frac{cos^2\pi-cos^2 0}{\pi-0}=\frac{1-1}{\pi}=0$$

Es decir, $\exists c\in(0,\pi)$ tal que $f'(c)=0$.

21. Página 222

$f(x)=x^2-x \qquad g(x)=\ln x$

$f(x)$ es continua y derivable $\forall x\in\mathbb{R}$. $g(x)$ es continua y derivable en $(0,+\infty)$.

En particular, $f(x)$ y $g(x)$ continuas y derivables en $[1,3]$.

Además, $\ln 1=g(1)\neq g(3)=\ln 3$.

Por tanto, $f(x)$ y $g(x)$ cumplen las condiciones del *T.V.M.* generalizado.

$\dfrac{f(3)-f(1)}{g(3)-g(1)}=\dfrac{9-3-(1-1)}{\ln 3-\ln 1}=\dfrac{6}{\ln 3-\ln 1}=\dfrac{6}{\ln 3}\rightarrow$ Así, $\exists c\in(1,3)$ tal que $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{6}{\ln 3}$.

El valor *c* resultante será: $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{2c-1}{\frac{1}{c}}=\dfrac{6}{\ln 3}\rightarrow c=\dfrac{1+\sqrt{1+\frac{48}{\ln 3}}}{4}\in(1,3)$

22. Página 222

$f(x)=x^2$ y $g(x)=x^3$

$f(x), g(x)$ son continuas y derivables $\forall x\in\mathbb{R}\rightarrow f(x), g(x)$ son continuas en $[-1,1]$ y derivables en $(-1,1)$.

Además, $g(1)=1\neq -1=g(-1)$.

Por lo tanto, $f(x)$ y $g(x)$ cumplen las condiciones del *T.V.M.* generalizado.

23. Página 223

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,x}{4x}$

$\lim\limits_{x\to 0} sen\,x=0$ y $\lim\limits_{x\to 0} 4x=0\rightarrow$ Podemos aplicar L'Hôpital:

$(sen\,x)'=cos\,x$ y $(4x)'=4\rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,x}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos\,x}{4}=\dfrac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x}{\sqrt{x+9}-3}$

$\lim\limits_{x\to 0}(x^3-x)=0$ y $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x+9}-3=0\rightarrow$ Podemos aplicar L'Hôpital:

$(x^3-x)'=3x^2-1$ y $(\sqrt{x+9}-3)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+9}}\rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x}{\sqrt{x+9}-3}=\lim\limits_{x\to 0}(3x^2-1)2\sqrt{x+9}=-6$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0$ y $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x)=0\rightarrow$ Podemos aplicar L'Hôpital:

$(x^2-1)'=2x$ y $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}\rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}2x^2=2$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} tg\,x=0$ y $\lim\limits_{x\to 0} x=0\rightarrow$ Podemos aplicar L'Hôpital:

$(tg\,x)'=1+tg^2x$ y $(x)'=1\rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+tg^2x)=1$

24. Página 223

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^5-4x^2}{-x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to 1}(4x^5-4x^2)=0$ y $\lim\limits_{x\to 1}(-x^2+1)=0$ → Podemos aplicar L'Hôpital:

$(4x^5-4x^2)'=20x^4-8x$ y $(-x^2+1)'=-2x$ → $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^5-4x^2}{-x^2+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{20x^4-8x}{-2x}=-6$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-e^x}{3\operatorname{sen}x}$

$\lim\limits_{x\to 0}(e^{-x}-e^x)=0$ y $\lim\limits_{x\to 0}3\operatorname{sen}x=0$ → Podemos aplicar L'Hôpital:

$(e^{-x}-e^x)'=-e^{-x}-e^x$ y $(3\operatorname{sen}x)'=3\cos x$ → $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-e^x}{3\operatorname{sen}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^{-x}-e^x}{3\cos x}=-\dfrac{2}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{sen}x}$

$\lim\limits_{x\to 0}x=0$ y $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}x=0$ → Podemos aplicar L'Hôpital:

$(x)'=1$ y $(\operatorname{sen}x)'=\cos x$ → $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{sen}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$

d) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-9x+14}{\ln(x^2-6x-6)}$

$\lim\limits_{x\to 7}(x^2-9x+14)=0$ y $\lim\limits_{x\to 7}(\ln(x^2-6x-6))=0$ → Podemos aplicar L'Hôpital:

$(x^2-9x+14)'=2x-9$ y $(\ln(x^2-6x-6))'=\dfrac{2x-6}{x^2-6x-6}$

$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-9x+14}{\ln(x^2-6x-6)}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{(2x-9)(x^2-6x-6)}{2x-6}=\dfrac{(14-9)(49-42-6)}{14-6}=\dfrac{5}{8}$

25. Página 224

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x\to \infty}\ln x=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty}x=+\infty$ → Podemos aplicar L'Hôpital:

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ y $(x)'=1$ → $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x}=0$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{\ln x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}e^x=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$ → Podemos aplicar L'Hôpital:

$(e^x)'=e^x$ y $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ → $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to +\infty}xe^x=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2x^3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$ → Podemos aplicar L'Hôpital:

$(e^x)' = e^x$ y $(2x^3)' = 6x^2 \to \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{6x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} 6x^2 = +\infty$ → Podemos aplicar L'Hôpital de nuevo:

$(e^x)' = e^x$ y $(6x^2)' = 12x \to \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{12x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} 12x = +\infty$ → Podemos aplicar L'Hôpital de nuevo:

$(e^x)' = e^x$ y $(12x)' = 12 \to \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{12x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{12} = +\infty$

26. Página 224

a) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{4x} - \dfrac{2}{xe^x}\right) = \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x-8}{4xe^x}\right) = \dfrac{-7}{0} \to \begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty \end{cases}$ → No existe el límite en $x = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x+1}}{3x} \to \dfrac{\infty}{\infty}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x+1}}{3x} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{3} = \dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to0}(x\ln x) \to 0\cdot(-\infty)$ $\qquad \lim\limits_{x\to0}(x\ln x) = \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}\right) \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0}(-x) = 0$

27. Página 225

a) $\lim\limits_{x\to0}(tg\,x)^x \to 0^0$ $\qquad \ln\left(\lim\limits_{x\to0}(tg\,x)^x\right) = \lim\limits_{x\to0} x\ln(tg\,x) \to 0\cdot(-\infty)$

$$\lim_{x\to0} x\ln(tg\,x) = \lim_{x\to0}\frac{\ln(tg\,x)}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to0}\frac{\frac{1+tg^2x}{tg\,x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0}\frac{-(1+tg^2x)\cdot x^2}{tg\,x} \to \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{-(1+tg^2x)\cdot x^2}{tg\,x} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to0}\frac{-2x^2tg\,x(1+tg^2x) - 2x(1+tg^2x)}{1+tg^2x} = \lim_{x\to0}(-2x(x\cdot tg\,x + 1)) = 0$$

$\lim\limits_{x\to0}(tg\,x)^x = e^0 = 1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{4x-5} \to 1^\infty$ $\qquad \ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{4x-5}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(4x-5)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right) \to 0\cdot\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(4x-5)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{4x-5}} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\frac{-3}{x^2}}{\frac{x+3}{x}}}{\frac{-4}{(4x-5)^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x(4x-5)^2}{4x^2(x+3)} = 12$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{4x-5} = e^{12}$

28. Página 225

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{x^3+1}{x^2+5x}} \longrightarrow 1^{\infty} \qquad \ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{x^3+1}{x^2+5x}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+1}{x^2+5x}\ln\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-2x}\right)\longrightarrow 0\cdot\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{x^2+5x}\ln\left(\frac{x^2+2}{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-2x}\right)}{\dfrac{x^2+5x}{x^3+1}}\xrightarrow{\text{L'Hôpital}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\dfrac{-2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2}}{\dfrac{x^2+2}{x^2-2x}}}{\dfrac{(2x+5)(x^3+1)-(x^2+5x)(3x^2)}{(x^3+1)^2}}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{x^3+1}{x^2+5x}}=e^2$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[x-2]{\dfrac{x^2+1}{x+3}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+3}\right)^{\frac{1}{x-2}}\longrightarrow\infty^0$

$$\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+3}\right)^{\frac{1}{x-2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x+3}\right)\longrightarrow 0\cdot\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x+3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+3}\right)}{x-2}\xrightarrow{\text{L'Hôpital}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\dfrac{x^2+6x-1}{(x+3)^2}}{\dfrac{x^2+1}{x+3}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+6x-1}{(x+3)(x^2+1)}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+3}\right)^{\frac{1}{x-2}}=e^0=1$$

SABER HACER

29. Página 226

Primero calculamos la derivada de $f(x)=ax^3+bx+c$:

$$f'(x)=3ax^2+b$$

Después, planteamos y resolvemos el sistema formado con las condiciones dadas:

- La ordenada en el origen es 1 $\longrightarrow$ $f(0)=1$
- Pasa por el punto (–1, 3) $\longrightarrow$ $f(-1)=3$
- Tiene un punto extremo relativo en (–1, 3) $\longrightarrow$ $f'(-1)=0$

$$\left.\begin{array}{l}c=1\\-a-b+c=3\\3a+b=0\end{array}\right\}\rightarrow a=1, b=-3, c=1$$

La expresión algebraica es $f(x)=x^3-3x+1$.

Estudiamos si en $x=-1$ se alcanza un máximo o mínimo relativo:

$f''(x)=6x \longrightarrow f''(-1)=-6<0 \longrightarrow$ Se trata de un máximo.

30. Página 226

$f(x) = ax^4 - 3x^3 + 2x^2 - x$ $\qquad$ $f'(x) = 4ax^3 - 9x^2 + 4x - 1$ $\qquad$ $f''(x) = 12ax^2 - 18x + 4$

Buscamos a tal que $f''(x)$ no tenga raíces reales:

$$f''(x) = 12ax^2 - 18x + 4 \neq 0 \rightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 12a \cdot 4}}{24a} \rightarrow 324 - 192a < 0 \rightarrow a > \frac{27}{16}$$

$f''(0) = 4$ $\rightarrow$La función es cóncava en todos sus puntos cuando $a > \frac{27}{16}$.

31. Página 227

Estudiamos el signo de $f'(x)$ con la monotonía de $f(x)$:

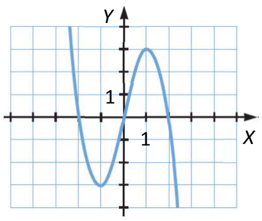
- $f(x)$ es creciente en $(-3, -2) \cup (0, 2) \rightarrow f'(x) > 0$
- $f(x)$ es decreciente en $(-2, 0) \cup (2, 3) \rightarrow f'(x) < 0$
- $f(x)$ tiene máximos en $x = -2, x = 2 \rightarrow f'(-2) = f'(2) = 0$
- $f(x)$ tiene un mínimo en $x = 0 \rightarrow f'(0) = 0$

Estudiamos la concavidad y los puntos de inflexión:

- $f(x)$ es convexa en $(-3, -1) \cup (1, 3)$ y cóncava en $(-1, 1)$.
- $f(x)$ tiene puntos de inflexión en $x = -1, x = 1$.

Además, $f''(-1) = f''(1) = 0 \rightarrow f'(x)$ tiene extremos relativos en $x = -1, x = 1$.

Representamos $f'(x)$ con la información obtenida:



32. Página 227

Sean *x* e *y* los catetos del triángulo rectángulo. Por el teorema de Pitágoras, $5^2 = x^2 + y^2 \rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$.

La función que queremos maximizar es:

$$A(x, y) = \frac{x \cdot y}{2} \xrightarrow{y=\sqrt{25-x^2}} A(x) = \frac{x \cdot \sqrt{25 - x^2}}{2}$$

$A'(x) = \frac{25 - 2x^2}{2\sqrt{25 - x^2}}$ $\qquad$ $A'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 = 25 \rightarrow x = \pm\frac{5}{\sqrt{2}} \rightarrow$ La solución válida es $x = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

$A''(x) = \frac{x \cdot (2x^2 - 75)}{2(25 - x^2)^{3/2}} \rightarrow A''\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\frac{5}{\sqrt{2}} \cdot (25 - 75)}{2 \cdot \left(\frac{25}{2}\right)^{3/2}} < 0 \rightarrow$ En $x = \frac{5}{\sqrt{2}}$ se alcanza el máximo.

Por tanto, los catetos del triángulo deben medir: $\quad x = \frac{5}{\sqrt{2}}$ metros $\qquad y = \frac{5}{\sqrt{2}}$ metros

33. Página 228

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x+4 & \text{si } 0<x\le 2 \\ -\frac{3}{4}x^2+6x-6 & \text{si } 2<x\le 6 \\ \frac{1}{6}x+2 & \text{si } 6<x\le 12 \end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{si } 0<x<2 \\ -\frac{3}{2}x+6 & \text{si } 2<x<6 \\ \frac{1}{6} & \text{si } 6<x<12 \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow -\frac{3}{2}x+6=0 \rightarrow x=4$$

Analizamos si $x=4$ es la abscisa de un máximo o un mínimo:

$f''(x)=-\frac{3}{2}$ si $2<x<6 \rightarrow f''(4)=-\frac{3}{2}<0 \rightarrow$ Se trata de un máximo.

Calculamos el valor de $f(x)$ en los extremos de cada intervalo y también en $x=4$:

$f(0)=4,\ f(2)=3,\ f(6)=3,\ f(12)=4,\ f(4)=6$

Por tanto:

Existe un máximo, que se alcanza en el cuarto mes, con un beneficio de 6 000 €.

Hay dos mínimos que se dan en el segundo y sexto mes, con un beneficio de 3 000 € en cada uno.

34. Página 228

Estudiamos la continuidad en el intervalo $[-2, 2]$:

x^2+x es polinómica $\rightarrow f(x)$ es continua en $x\le 0$.

x es polinómica $\rightarrow f(x)$ es continua en $0<x\le 3$.

El único punto de discontinuidad posible de la función en $[-2, 2]$ es $x=0$

$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+x)=0$ $\qquad$ $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0 \rightarrow f(x)$ es continua en $x=0$.

Así, $f(x)$ es continua en $[-2, 2]$.

Analizamos la derivabilidad de la función en el intervalo (a, b):

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } 0<x<3 \\ -3\,sen(x-3) & \text{si } x>3 \end{cases}$$

El único punto donde la función puede no ser derivable en el intervalo $(-2, 2)$ es $x=0$.

$f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x+1)=1$ $\qquad$ $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} 1=1$

$f'(0^+)=f'(0^-)=1 \rightarrow f(x)$ es derivable en $x=0 \rightarrow f(x)$ es derivable en $[-2, 2]$.

Comprobamos si la función toma los mismos valores en los extremos del intervalo:

$$f(-2)=(-2)^2+(-2)=2 \qquad\qquad f(2)=2$$

Aplicamos el teorema de Rolle para asegurar la existencia de c:

Como f es continua en $[-2, 2]$, derivable en $(-2, 2)$ y $f(-2)=f(2)$, entonces existe algún punto c en $(-2, 2)$ en el que $f'(c)=0$.

35. Página 229

$f(x)=x^3+2x$ $\qquad\qquad g(x)=x^2-1$

Definimos la función $h(x)=f(x)-g(x)=x^3+2x-x^2+1$, y la igualamos a cero.

Supongamos que existen dos soluciones x_1 y x_2 de la ecuación. Así, $f(x)$ y $g(x)$ se cortarían en dos puntos.

Es decir, $h(x_1)=h(x_2)=0$.

Comprobamos las hipótesis del teorema de Rolle:

$h(x)$ es continua y derivable por ser la diferencia de dos funciones continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{r} h(x) \text{ continua} \\ h(x) \text{ derivable} \\ h(x_1)=h(x_2) \end{array}\right\} \rightarrow \exists c \in (x_1, x_2) \text{ tal que } h'(c)=0$$

$h'(x)=3x^2+2-2x$ $\qquad h'(x)=0 \ \rightarrow\ x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-24}}{6}$ $\rightarrow$ No existen valores reales que satisfagan la ecuación.

Como no se cumple la tesis del teorema de Rolle y $h(x)$ es continua y derivable en el intervalo, no pueden existir dos puntos distintos en los que las funciones se cortan.

Mediante el teorema de Bolzano, comprobamos que *f* y *g* tienen un punto de corte:

$h(-1)=-3<0$ y $h(0)=1>0 \rightarrow \exists c\in(-1,0)$ tal que $h(c)=f(c)-g(c)=0 \rightarrow f(c)=g(c)$

36. Página 229

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+x+b & \text{si } x<1 \\ 2x+2 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

La función es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$, porque las dos ramas son polinómicas. Imponemos la condición de que sea continua en $x=1$:

$$f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)=a+1+b$ $\qquad \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)=2+2=4 \ \rightarrow\ a+1+b=4 \ \rightarrow\ a+b=3$

Estudiamos la derivabilidad en el intervalo abierto $(0,4)$.

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+1 & \text{si } x<1 \\ 2 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$ porque las dos ramas son polinómicas. Imponemos la condición de que sea derivable en $x=1$:

$$f'(1^-)=f'(1^+)$$

$\displaystyle f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}(2ax+1)=2a+1$ $\qquad \displaystyle f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+} 2=2 \ \rightarrow\ 2a+1=2$

Así, $f(x)$ es derivable en $(0,4)$.

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} a+b=3 \\ 2a+1=2 \end{cases} \rightarrow a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{5}{2}$

Para terminar, comprobamos las hipótesis del teorema:

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continua en } [0,4] \\ f \text{ derivable en } (0,4) \end{array}\right\} \rightarrow \exists c\in(0,4) \text{ tal que } f'(c)=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{10-\frac{5}{2}}{4}=\frac{15}{8}$$

37. Página 229

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{e^x-1}\to\dfrac{0}{0}$ $\qquad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{e^x-1}\xrightarrow{\text{L'Hôpital}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{e^x}=\dfrac{a}{1}=a\ \to\ a=4$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 ax-1}{\operatorname{sen} x^2}=-1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 ax-1}{\operatorname{sen} x^2}=\frac{1-1}{0}\ \to\ \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 ax-1}{\operatorname{sen} x^2}\xrightarrow{\text{L'Hôp}}\lim_{x\to 0}\frac{-2a\cdot\cos ax\cdot\operatorname{sen} ax}{2\operatorname{sen} x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-a\cdot\operatorname{sen} 2ax}{\operatorname{sen} 2x}\ \to\ \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-a\cdot\operatorname{sen} 2ax}{\operatorname{sen} 2x}\xrightarrow{\text{L'Hôp}}\lim_{x\to 0}\frac{-2a^2\cdot\cos 2ax}{2\cos 2x}=-a^2$$

Así: $-a^2=-1\ \to\ a=\pm 1$

ACTIVIDADES FINALES

38. Página 230

a) $y=-2x^2+3x$ $\qquad \operatorname{Dom} f(x)=\mathbb{R}$

$y'=-4x+3$ $\qquad y'=0\to x=\dfrac{3}{4}$

$y'(1)=-1<0$ $\qquad y'(0)=3>0$

La función es creciente en $\left(-\infty,\dfrac{3}{4}\right)$ y decreciente en $\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$.

Tiene un máximo relativo en $x=\dfrac{3}{4}$.

b) $y=x^4+2x^3-5x^2+4$ $\qquad \operatorname{Dom} f(x)=\mathbb{R}$

$y'=4x^3+6x^2-10x$ $\qquad y'=0\to x=-\dfrac{5}{2}, x=0, x=1$

$y'(-3)=-24<0$ $\qquad y'(-1)=12>0$ $\qquad y'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-3<0$ $\qquad y'(2)=36>0$

La función es decreciente en $\left(-\infty,-\dfrac{5}{2}\right)\cup(0,1)$ y creciente en $\left(-\dfrac{5}{2},0\right)\cup(1,+\infty)$.

Tiene mínimos relativos en $x=-\dfrac{5}{2}$ y $x=1$, y un máximo relativo en $x=0$.

c) $y=4x^3-x^2-x+5$ $\qquad \operatorname{Dom} f(x)=\mathbb{R}$

$y'=12x^2-2x-1$ $\quad y'=0\to x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{12}, x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{12}$

$y'(-1)=13$ $\qquad y'(0)=-1$ $\qquad y'(1)=9$

La función es decreciente en $\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{12},\dfrac{1+\sqrt{13}}{12}\right)$ y creciente en $\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{13}}{12}\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{12},+\infty\right)$.

Tiene un mínimo relativo en $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{12}$ y un máximo relativo en $x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{12}$.

d) $y = x^5 - 5x^3$ $\quad$ $\text{Dom}\, f(x) = \mathbb{R}$

$y' = 5x^4 - 15x^2 \quad y' = 0 \rightarrow 5x^2 \cdot (x^2 - 3) = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{3}$

$y'(-2) = 20 > 0 \qquad y'(-1) = -10 < 0 \qquad y'(1) = -10 < 0 \qquad y'(2) = 80 - 60 - 20 > 0$

La función es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ y decreciente en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Tiene máximos relativos en $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$.

39. Página 230

a) $y = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad y'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

$y'(-1) = -2 < 0 \qquad y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 > 0$

$y(1^-) = y(1^+) = y(1) = 0 \rightarrow$ La función es continua en $x = 1$.

$y'(1^-) = 2 \neq y'(1^+) = 1 \rightarrow$ La función no es derivable en $x = 1$.

$y'(2) = \dfrac{1}{2} > 0$

La función es creciente en $(0, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$.

Tiene el mínimo relativo en $x = 0$.

b) $y = |x^2 - 4| - 3 \rightarrow y = \begin{cases} x^2 - 7 & \text{si } x \in (-\infty, \sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty) \\ -x^2 + 1 & \text{si } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$

$y' = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in (-\infty, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \\ -2x & \text{si } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases} \qquad y' = 0 \rightarrow x = 0$

$y'(-2) = -4 < 0 \qquad y'(2) = 4 > 0 \qquad y'(-1) = 2 > 0 \qquad y'(1) = -2 < 0$.

La función es creciente en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$.

Tiene un máximo relativo en $x = 0$ y mínimos relativos en $x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$.

40. Página 230

a) $f(x) = x^2(x + 1)$ $\quad$ $\text{Dom}\, f(x) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x + 2)$

$f'(x) = 0 \rightarrow x(3x + 2) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\dfrac{2}{3}$

$f'(-1) = 1 > 0 \qquad f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4} < 0 \qquad f'(1) = 5 > 0$

La función es creciente en $\left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right) \cup (0, +\infty)$ y decreciente en $\left(-\dfrac{2}{3}, 0\right)$.

Tiene un máximo relativo en $x = -\dfrac{2}{3}$ y un mínimo relativo en $x = 0$.

b) $g(x)=3x^3-7x+2$ Dom $g(x)=\mathbb{R}$

$g'(x)=9x^2-7$ $g'(x)=0\rightarrow 9x^2=7\rightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

$g'(-1)=2>0$ $g'(0)=-7<0$ $g'(1)=2>0$

La función es creciente en $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{7}}{3},+\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{3},\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)$.

Tiene un máximo relativo en $x=-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ y un mínimo relativo en $x=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

c) $h(x)=-x^4+3x^2-2x$ Dom $h(x)=\mathbb{R}$

$h'(x)=-4x^3+6x-2$ $h'(x)=0\rightarrow(x-1)(-4x^2-4x+2)=0\rightarrow x=1,\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

$h'(-2)=18>0$ $h'(0)=-2<0$ $h'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}>0$ $h'(2)=-22<0$

La función es creciente en $\left(-\infty,\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},1\right)$ y decreciente en $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\cup(1,+\infty)$.

Tiene máximos relativos en $x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ y $x=1$, y un mínimo relativo en $x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

41. Página 230

a) $y=|x^2-2|\rightarrow y=\begin{cases}x^2-2 & \text{si } x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty)\\ -x^2+2 & \text{si } x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})\end{cases}$

$y'=\begin{cases}2x & \text{si } x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)\\ -2x & \text{si } x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})\end{cases}$ $y'=0\rightarrow x=0$

$y'(-2)=-4<0$ $y'(-1)=2>0$ $y'(1)=-2<0$ $y'(2)=4>0$

La función es creciente en $(-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2},+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(0,\sqrt{2})$.

Tiene mínimos relativos en $x=-\sqrt{2}$ y $x=\sqrt{2}$, y un máximo relativo en $x=0$.

b) $y=|-x^2+6x-9|\rightarrow y=|-(x-3)^2|=(x-3)^2$

$y'=2(x-3)$ $y'=0\rightarrow x=3$

$y'(0)=-6<0$ $y'(4)=2>0$

La función es creciente en $(3,+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,3)$ y tiene un mínimo relativo en $x=3$.

c) $y=|-x^2+5x-6|\rightarrow y=\begin{cases}-x^2+5x-6 & \text{si } x\in[2,3]\\ x^2-5x+6 & \text{si } x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)\end{cases}$

$y'=\begin{cases}-2x+5 & \text{si } x\in(2,3)\\ 2x-5 & \text{si } x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)\end{cases}$ $y'=0\rightarrow x=\dfrac{5}{2}$

$y'(0)=-5<0$ $y'\left(\dfrac{11}{5}\right)=\dfrac{3}{5}>0$ $y'\left(\dfrac{13}{5}\right)=-\dfrac{1}{5}<0$ $y'(4)=3>0$

La función es creciente en $\left(2,\dfrac{5}{2}\right)\cup(3,+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,2)\cup\left(\dfrac{5}{2},3\right)$.

Tiene mínimos relativos en $x=2$ y $x=3$, y el máximo relativo en $x=\dfrac{5}{2}$.

42. Página 230

a) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ $\qquad$ $\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}-\{1\}$

$f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ $\qquad$ $f'(x)=0 \to x=0,\ x=2$

En $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ se tiene $f'(x)>0 \longrightarrow f(x)$ es creciente.

En $(0,1)\cup(1,2)$ se tiene $f'(x)<0 \longrightarrow f(x)$ es decreciente.

Así, $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x=0$ y un mínimo relativo en $x=2$.

b) $g(x)=\dfrac{40-5x}{10-x}$ $\qquad$ $\text{Dom } g(x)=\mathbb{R}-\{10\}$

$g'(x)=\dfrac{-10}{(10-x)^2}<0 \quad \forall x\in\mathbb{R}-\{10\}$ $\longrightarrow$ Por tanto, $g(x)$ es decreciente en todo su dominio.

c) $h(x)=\dfrac{7x^2+2}{x}$ $\qquad$ $\text{Dom } h(x)=\mathbb{R}-\{0\}$

$h'(x)=\dfrac{7x^2-2}{x^2}$ $\qquad$ $h'(x)=0 \to x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{7}}$

En $\left(-\infty,-\sqrt{\dfrac{2}{7}}\right)\cup\left(\sqrt{\dfrac{2}{7}},+\infty\right)$ se tiene que $h'(x)>0 \longrightarrow h(x)$ es creciente.

En $\left(-\sqrt{\dfrac{2}{7}},0\right)\cup\left(0,\sqrt{\dfrac{2}{7}}\right)$ se tiene que $h'(x)<0 \longrightarrow h(x)$ es decreciente.

La función tiene un máximo relativo en $x=-\sqrt{\dfrac{2}{7}}$ y un mínimo relativo en $x=\sqrt{\dfrac{2}{7}}$.

d) $i(x)=\dfrac{x}{x^2+2}$ $\qquad$ $\text{Dom } i(x)=\mathbb{R}$

$i'(x)=\dfrac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}$ $\qquad$ $i'(x)=0 \to x=\pm\sqrt{2}$

En $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$ se tiene que $i'(x)<0 \longrightarrow i(x)$ es decreciente.

En $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ se tiene que $i'(x)>0 \longrightarrow i(x)$ es creciente.

Así, $i(x)$ tiene un máximo relativo en $x=\sqrt{2}$ y un mínimo relativo en $x=-\sqrt{2}$.

e) $j(x)=\dfrac{1}{x-2}$ $\qquad$ $\text{Dom } j(x)=\mathbb{R}-\{2\}$

$j'(x)=\dfrac{-1}{(x-2)^2}<0 \quad \forall x\neq 2 \longrightarrow j(x)$ es decreciente en todo su dominio.

f) $k(x)=-\dfrac{x^3}{x^2-3}$ $\qquad$ $\text{Dom } k(x)=\mathbb{R}-\left\{\pm\sqrt{3}\right\}$

$k'(x)=\dfrac{-x^4+9x^2}{(x^2-3)^2}$ $\qquad$ $k'(x)=0 \to x=0,\ x=\pm 3$

En $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$ se tiene que $k'(x)<0 \longrightarrow k(x)$ es decreciente en dicho intervalo.

En $(-3,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},0)\cup(0,\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},3)$ se tiene que $k'(x)>0 \longrightarrow k(x)$ es creciente en dicho conjunto.

La función tiene un mínimo relativo en $x=-3$ y un máximo relativo en $x=3$.

43. Página 230

a) $y=\ln x-2$

El dominio de $y(x)$ es el intervalo $(0,+\infty)$.

$y'=\dfrac{1}{x}\rightarrow y'>0$ en todo el dominio de y

Por tanto, no tiene máximos ni mínimos relativos y es creciente para $x>0$.

b) $y=\ln(x-2)$

El dominio de $y(x)$ es el intervalo $(2,+\infty)$.

$y'=\dfrac{1}{x-2}\rightarrow y'>0$ en todo el dominio de y

Por tanto, no tiene máximos ni mínimos relativos y es creciente para $x>0$.

c) $y=\dfrac{2}{x}+\ln x$

El dominio de $y(x)$ es el intervalo $(0,+\infty)$.

$y'=\dfrac{-2}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-2+x}{x^2}\rightarrow y'=0\rightarrow x=2$ $\qquad y'(1)=-1<0$ $\qquad y'(4)=\dfrac{1}{8}>0$

La función es decreciente en (0, 2) y creciente en $(2,+\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $x=2$.

d) $y=\dfrac{\ln x}{x}$

El dominio de $y(x)$ es el intervalo $(0,+\infty)$.

$y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$y'=0\rightarrow 1-\ln x=0\rightarrow x=e$

$y'(1)=1>0$ $\qquad y'(e^2)=\dfrac{1-2}{e^2}<0$

Por tanto, hay un máximo relativo en $x=e$, es creciente en $(0,e)$ y decreciente en $(e,+\infty)$.

e) $y=\dfrac{\ln x}{x^2}\rightarrow$ El dominio de $y(x)$ es el intervalo $(0,+\infty)$.

$y'=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$ $\qquad y'=0\rightarrow 1-2\ln x=0\rightarrow \ln x=\dfrac{1}{2}\rightarrow x=\sqrt{e}$

$y'(1)=1>0\rightarrow y$ es creciente a la izquierda de $x=\sqrt{e}$.

$y'(2)=\dfrac{1-2\ln 2}{8}<0$

Por tanto, y es decreciente a la derecha de $x=\sqrt{e}\rightarrow$ Es creciente en $(0,\sqrt{e})$ y decreciente en $(\sqrt{e},+\infty)$.

Hay un máximo relativo en $x=\sqrt{e}$.

f) $y=\ln(\sqrt{x})$

El dominio de $y(x)$ es el intervalo $(0,+\infty)$.

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2x}\rightarrow y'>0$ en todo el dominio de y

Por tanto, no tiene máximos ni mínimos y es creciente para $x>0$.

44. Página 230

a) $f(x)=2cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow f(x)=-2sen(x)$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

La función es continua en toda la recta real y $f'(x)=-2\cdot cos\,x$.

Es periódica de período 2π, la estudiamos en $[-\pi, \pi]$:

En $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ se tiene que $f'(x)>0 \longrightarrow f(x)$ es creciente en dicho intervalo.

En $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ se tiene que $f'(x)<0 \longrightarrow f(x)$ es decreciente en dicho intervalo.

b) $g(x)=x-sen\,x$ Dom $g(x)=\mathbb{R}$

$g(x)$ es continua en toda la recta real.

$g'(x)=1-cosx \quad g'(x)=0 \rightarrow x=0\pm k\frac{\pi}{2}, k=0,1,2...$

Pero como en el intervalo $[-\pi,\pi]$ $cos\,x\le 1$, $g'(x)$ es siempre positiva.

Así, $g(x)$ es siempre creciente y no tiene extremos relativos.

c) $h(x)=arctg\,x$ Dom $h(x)=\mathbb{R}$

$h'(x)=\frac{1}{1+x^2} \longrightarrow h'(x)>0$ para todo $x \longrightarrow h(x)$ siempre creciente y no tiene extremos relativos.

45. Página 230

a) $y=2x^2\cdot e^x$ Dom $y(x)=\mathbb{R}$

$y'=2xe^x(2+x)$ $\quad y'=0 \longrightarrow x=0, x=-2$

En $(-\infty,-2)$ se tiene que $y'>0$ y en $(-2,0)$ se tiene que $y'<0$.

En $(0,\infty)$ se tiene que $y'>0$.

Por tanto, es creciente en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y decreciente en $(-2,0)$.

En $x=-2$ se alcanza el máximo relativo, y en $x=0$, el mínimo.

b) $y=(x-4)\cdot e^x$ Dom $y(x)=\mathbb{R}$

$y'=e^x(x-3)$ $\quad y'=0 \longrightarrow x=3$

En $(-\infty,3)$ se tiene que $y'<0 \longrightarrow$ Es decreciente en $(-\infty,3)$.

En $(3,+\infty)$ se tiene que $y'>0 \longrightarrow$ Es creciente en $(3,+\infty)$.

En $x=3$ se alcanza el mínimo relativo.

c) $y=e^{x^2+2x}+1$ Dom $y(x)=\mathbb{R}$

$y'=2(x+1)e^{x^2+2x}$ $\quad y'=0 \longrightarrow x=-1$

En $(-\infty,-1)$ se tiene que $y'<0 \longrightarrow$ Es decreciente en $(-\infty,-1)$.

En $(-1,+\infty)$ se tiene que $y'>0 \longrightarrow$ Es creciente en $(-1,+\infty)$.

En $x=-1$ se alcanza el mínimo relativo.

d) $y = x \cdot 2^x$ Dom $y(x) = \mathbb{R}$

$y' = 2^x(1 + x\ln 2)$ $y' = 0 \to x = -\dfrac{1}{\ln 2}$

En $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\ln 2}\right)$ se tiene que $y' < 0 \to$ Es decreciente en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\ln 2}\right)$.

En $\left(-\dfrac{1}{\ln 2}, +\infty\right)$ se tiene que $y' > 0 \to$ Es creciente en $\left(-\dfrac{1}{\ln 2}, +\infty\right)$.

En $x = -\dfrac{1}{\ln 2}$ se alcanza el mínimo relativo.

e) $y = 2^{x-x^2} - 3$ Dom $y(x) = \mathbb{R}$

$y' = (1-2x)2^{x-x^2}\ln 2$ $y' = 0 \to x = \dfrac{1}{2}$

En $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ se tiene que $y' > 0 \to$ Es creciente en $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$.

En $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ se tiene que $y' < 0 \to$ Es decreciente en $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

En $x = \dfrac{1}{2}$ se alcanza el máximo relativo.

f) $y = 2^{x^3+1}$ Dom $y(x) = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 \cdot 2^{x^3+1} \cdot \ln 2$ $y' = 0 \to x = 0$

En $(-\infty, 0)$ se tiene que $y' > 0$ y en $(0, +\infty)$ se tiene que $y' > 0$.

Por tanto, es creciente en $\mathbb{R}$ y no tiene extremos relativos.

46. Página 230

a) $y' = 3x^2 - 24$ $y'(x) = 0 \to x = \pm\sqrt{8}$ $y'' = 6x$

$y''(\sqrt{8}) = 6\sqrt{8} > 0 \to x = \sqrt{8}$ es un mínimo.

$y''(-\sqrt{8}) = -6\sqrt{8} < 0 \to x = -\sqrt{8}$ es un máximo.

b) $y'(x) = 8 + 12x - 4x^3$ $y'(x) = 0 \to x = -1, x = 2$ $y''(x) = 12 - 12x^2$

$y''(2) = -36 < 0 \to x = 2$ es un máximo.

$y''(-1) = 0$, $y'''(x) = -24x \to y'''(-1) = 24 \neq 0 \to x = -1$ es un punto de inflexión.

c) $y' = \dfrac{2x^2 - 2}{(x^2+1)^2}$ $y'(x) = 0 \to x = \pm 1$ $y'' = \dfrac{-4x^3 + 12x}{(x^2+1)^3}$

$y''(1) > 0 \to$ La función alcanza un mínimo en $x = 1$.

$y''(-1) < 0 \to$ La función alcanza un máximo en $x = -1$.

d) $y'(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$ $y'(x) = 0 \to x = \pm 2$ $y''(x) = \dfrac{8}{x^3}$

$y''(2) = 1 > 0 \to$ La función alcanza un mínimo en $x = 2$.

$y''(-2) = -1 < 0 \to$ La función alcanza un máximo en $x = -2$.

e) $y' = \frac{2x}{x^2+1}$ $y' = 0 \rightarrow x = 0$ $y'' = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

$y''(0) = 2 \longrightarrow$ La función alcanza un mínimo en $x = 0$.

f) $y' = (x^2+2x+4) \cdot e^x$

$y' \neq 0$ para todo valor de x.

Por tanto, la función no tiene extremos relativos.

47. Página 230

$y(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 13$

Veamos que si $y(x)$ es siempre creciente, entonces $y'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$:

$y'(x) = 3x^2 - 4x + 6 \quad y'(x) = 0 \rightarrow x = -\frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (3 \cdot 6)}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{-56}}{6}$

$y'(x)$ no tiene raíces reales (es decir, nunca se anula) y es continua $\longrightarrow$ El signo de *y* es constante.

Comprobamos el signo de la derivada: $y'(0) = 6 > 0$

Es decir, $y'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

48. Página 230

$y(x) = x^5 + mx + 2 \quad y'(x) = 5x^4 + m$

$5x^4 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow m > 0 \longrightarrow 5x^4 + m > 0$

Por tanto, $y'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow y(x)$ es creciente en todos los reales y para cualquier valor del parámetro *m*.

49. Página 230

a) $f(x)$ no es derivable en todos sus puntos, ya que las derivadas laterales en $x = -1$ no coinciden.

b) $f'(x) < 0$ en $(-\infty, -2) \longrightarrow f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2)$.

$f'(x) > 0$ en $(-2, +\infty) \longrightarrow f(x)$ es creciente en $(-2, +\infty)$.

c) Existe un mínimo relativo en $x = -2$ porque es el punto donde se anula la derivada.

d) $f'(x) = 1$ si $x \geq -1 \longrightarrow f(x) = x + k$ si $x \geq -1$ porque la derivada de una recta es justamente su pendiente.

Para obtener *k*, imponemos la condición dada: $f(1) = 1 \rightarrow 1 + k = 1 \rightarrow k = 0$

Así: $f(2) = 2 + 0 = 2$

50. Página 230

$y(x) = ax^2 + bx + c$

La función pasa por $(1,\ 2)$ y $(2,\ 6) \longrightarrow 2 = a + b + c$ y $6 = 4a + 2b + c$.

$y'(x) = 2ax + b$

$y'(2) = 4a + b$ equivale a la pendiente de la recta tangente.

La recta tangente en $(2,\ 6)$ es $y = 7x - 8 \longrightarrow 4a + b = 7$.

Tenemos, por tanto, un conjunto de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=6 \\ 4a+b=7 \end{cases} \rightarrow \quad a=3, b=-5, c=4$$

Es decir, $y(x)=3x^2-5x+4$.

A continuación, estudiamos la monotonía de la función:

$y'(x)=6x-5 \qquad y'(x)=0 \rightarrow x=\frac{5}{6}$

En $\left(-\infty, \frac{5}{6}\right)$: $y'(x)<0 \rightarrow y(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $\left(\frac{5}{6}, +\infty\right)$: $y'(x)>0 \rightarrow y(x)$ es creciente en este intervalo.

En $x=\frac{5}{6}$ está el único mínimo relativo de la función.

51. Página 230

$y(x)=ax^2+bx+c$

La función pasa por $(1, 0)$ y $(0,-2) \rightarrow 0=a+b+c$ y $-2=c$.

Además, tiene un mínimo relativo en $x=\frac{3}{2} \rightarrow y'\left(\frac{3}{2}\right)=0$

$y'(x)=2ax+b \rightarrow 2a\frac{3}{2}+b=0 \rightarrow 3a+b=0$

Tenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+b=0 \\ c=-2 \end{cases} \rightarrow a=-1,\ b=3\ , c=-2 \rightarrow y(x)=-x^2+3x-2$$

A continuación, estudiamos la monotonía de la función:

$y'(x)=-2x+3 \qquad y'(x)=0 \rightarrow -2x+3=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$

En $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$: $y'(x)>0 \rightarrow y(x)$ es creciente en este intervalo.

En $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$: $y'(x)<0 \rightarrow y(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $x=\frac{3}{2}$ está el único máximo relativo de la función.

52. Página 230

a) $y=x^3+ax \qquad y'(x)=3x^2+a$

Como existe un extremo relativo en $x=2 \rightarrow y'(2)=0$:

$3\cdot 2^2+a=0 \rightarrow a=-12$

Es decir, $y(x)=x^3-12x$.

b) $y(x)=x^3-12x$ $\quad y'(x)=3x^2-12$ $\quad y''(x)=6x$

$y'(x)=0 \rightarrow a=\pm 2$

$y''(2)=12>0 \quad y''(-2)=-12<0$

Es decir:

- $x=2$ es un mínimo relativo y $x=-2$ es un máximo relativo.
- $y(x)$ es creciente en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ y decreciente en $(-2,2)$.

53. Página 231

$y(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$y(0)=0 \quad \rightarrow d=0$

$y(1)=\frac{5}{6} \rightarrow a+b+c+d=\frac{5}{6} \rightarrow 6a+6b+6c=5$

$y'(x)=3ax^2+2bx+c$

$y(x)$ tiene un máximo en $x=1 \rightarrow 3a+b+c=0$

$y(x)$ tiene un mínimo en $x=2 \rightarrow 12a+4b+c=0$

Por tanto, tenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{cases} 6a+6b+6c=5 \\ 3a+b+c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases} \rightarrow a=-\frac{5}{12},\ b=\frac{5}{4},\ c=0 \text{ y } d=0$$

54. Página 231

a) $y=\dfrac{ax^2+x+b}{x^2+1} \rightarrow y'=\dfrac{2ax-2bx-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

Tiene un máximo en $x=-1 \rightarrow y'(-1)=0=\dfrac{-2a+2b}{4} \rightarrow a=b$

Pasa por $P\left(-2,\dfrac{13}{5}\right) \rightarrow y(-2)=\dfrac{13}{5}=\dfrac{4a-2+b}{5} \rightarrow 4a-2+b=13$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a=b \\ 4a+b-15=0 \end{cases} \rightarrow a=b=3$$

Por tanto, la función es $y=\dfrac{3x^2+x+3}{x^2+1}$.

b) Estudiamos la monotonía de la función:

El dominio es toda la recta real.

$y'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ $\qquad y'(x)=0 \rightarrow 1-x^2=0 \rightarrow x=\pm 1$

En $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, $y'(x)<0 \rightarrow y(x)$ es decreciente en este conjunto de intervalos.

En $(-1,1)$, $y'(x)>0 \rightarrow y(x)$ es creciente en este intervalo.

En $x=-1$ existe el único mínimo relativo de la función, y en $x=1$, el único máximo relativo.

55. Página 231

$$f(x)=\frac{a^2x}{2x^2-5ax+2a^2}\ \rightarrow\ f'(x)=\frac{2a^2(a^2-x^2)}{(2x^2-5ax+2a^2)^2}$$

$f(x)$ tiene un extremo relativo en $x=2\ \rightarrow\ f'(2)=0=\dfrac{2a^2(a^2-4)}{(8-10a+2a^2)^2}$

La anterior identidad se verifica si $2a^2(a^2-4)=0\ \rightarrow\ a=0$ y $a=\pm 2$

Por tanto, $a=\pm 2$, ya que en el enunciado se pide descartar la solución $a=0$.

- Si $a=-2$:

  $2x^2+10x+8=0\rightarrow x^2+5x+4=0\rightarrow x_1=-4,\ x_2=-1$

  Así: $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{-4,-1\}$

- Si $a=2$:

  $2x^2-10x+8=0\rightarrow x^2-5x+4=0\rightarrow x_1=4,\ x_2=1$

  Así: $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{1,4\}$

56. Página 231

$$y=\frac{x^2+ax+b}{x^2+ax+c}\ \rightarrow\ y'(x)=\frac{(2x+a)(c-b)}{(x^2+ax+c)^2}$$

Tiene un extremo relativo en $P(2,-1)\ \rightarrow\ y'(2)=0\ \rightarrow\ \dfrac{(4+a)(c-b)}{(4+2a+c)^2}=0\ \rightarrow\ (a+4)(c-b)=0$

Pasa por el punto (2, –1) $\rightarrow\ y(2)=-1\ \rightarrow\ \dfrac{4+2a+b}{4+2a+c}=-1\ \rightarrow\ 4a+b+c=-8$

Pasa por el origen $\rightarrow\ y(0)=0=\dfrac{b}{c}\ \rightarrow\ b=0$ y $c\neq 0$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases}(4+a)(c-b)=0\\ 8+4a+b+c=0\\ b=0\end{cases}\ \rightarrow\ a=-4,\ b=0$ y $c=8$

57. Página 231

$$y(x)=x\cdot e^{ax}\ \rightarrow\ y'(x)=e^{ax}+ax\cdot e^{ax}=e^{ax}(1+ax)$$

Tiene un extremo relativo en $x=1\ \rightarrow\ e^{a}(1+a)=0\ \rightarrow\ a=-1$

Así: $y(x)=x\cdot e^{-x}$.

58. Página 231

$$f(x)=x+ax\cdot|x|\ \rightarrow\ f(x)=\begin{cases}x+ax^2 & \text{si } x\geq 0\\ x-ax^2 & \text{si } x<0\end{cases}\qquad \text{Dom}\, f(x)=\mathbb{R}$$

$$f'(x)=\begin{cases}1+2ax & \text{si } x>0\\ 1-2ax & \text{si } x<0\end{cases}$$

Tiene un extremo relativo en $x=1\rightarrow f'(1)=0\ \rightarrow\ 1+2a=0\ \rightarrow\ a=-\dfrac{1}{2}$

Entonces:

$$f(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{2}x^2 & \text{si } x\geq 0 \\ x+\frac{1}{2}x^2 & \text{si } x<0 \end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases} 1-x & \text{si } x>0 \\ 1+x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

En $x=0$, $f(x)$ es continua por coincidir sus límites laterales y $f(x)$ es derivable por coincidir sus derivadas laterales.

Ahora ya podemos calcular la monotonía de la función y sus extremos relativos:

$$f'(x)=0 \rightarrow \begin{cases} 1-x=0 \\ 1+x=0 \end{cases} \rightarrow x=\pm 1$$

En $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ se tiene que $f'(x)<0 \rightarrow$ La función es decreciente.

En $(-1,0)\cup(0,1)=(-1,1)$ se tiene que $f'(x)>0 \rightarrow$ La función es creciente.

En $x=-1$ se alcanza el mínimo relativo y en $x=1$, el máximo.

59. Página 231

a) $y=x^3+3x^2-5x+1 \rightarrow y'=3x^2+6x-5 \rightarrow y''=6x+6$

$y''(x)=0 \rightarrow x=-1$

$\text{Dom } y=\mathbb{R}$

$y''(x)>0$ en el intervalo $(-1,+\infty) \rightarrow y$ es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x)<0$ en el intervalo $(-\infty,-1) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

b) $y=x^4-6x^2 \rightarrow y'=4x^3-12x \rightarrow y''=12x^2-12$

$y''(x)=0 \rightarrow x=\pm 1$

$\text{Dom } y=\mathbb{R}$

$y''(x)>0$ en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \rightarrow y$ es cóncava en dicho conjunto de intervalos.

$y''(x)<0$ en el intervalo $(-1,1) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

c) $y=\frac{x^2}{x^2-1} \rightarrow y'=\frac{-2x}{(x^2-1)^2} \rightarrow y''=\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$ $\qquad$ $\text{Dom } y=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

$y''(x)\neq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$

$y''(x)>0$ en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \rightarrow y$ es cóncava en dicho conjunto de intervalos.

$y''(x)<0$ en el intervalo $(-1,1) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

d) $y=\frac{x^3-1}{x^2} \rightarrow y'=\frac{x^3+2}{x^3} \rightarrow y''=-\frac{6}{x^2}$

$y''(x)<0 \ \forall x\in\mathbb{R}-\{0\} \rightarrow y$ es convexa en $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

e) $y=\sqrt{x^2+4} \rightarrow y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \rightarrow y''=\frac{4}{(x^2+4)^{3/2}}$ $\qquad$ $\text{Dom } y=\mathbb{R}$

$y''(x)\neq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$ $\qquad$ $y''>0 \ \forall x \rightarrow y$ es cóncava en toda la recta real.

f) $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2} \to y'=-\dfrac{x}{2\sqrt{4-x^2}} \to y''=-\dfrac{2}{(4-x^2)^{3/2}}$ Dom $y=[-2,2]$

$y''(x)\neq 0 \ \ \forall x\in(-2,2)$

$y''<0$ en $(-2, 2) \to y$ es convexa en $(-2, 2)$.

$y''>0$ en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty) \to y$ es cóncava en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

g) $y=1-2\ln x \to y'=-\dfrac{2}{x} \to y''=\dfrac{2}{x^2}$ Dom $y=(0,+\infty)$

$y''(x)\neq 0 \ \ \forall x\in(0,+\infty)$

$y''>0$ para todo $x>0 \to y$ es cóncava en todo su dominio.

h) $y=\ln(x^2-x)$ Dom$y=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

$y'=\dfrac{2x-1}{x^2-x} \to y''(x)=\dfrac{2(x^2-x)-(2x-1)^2}{(x^2-x)}=\dfrac{-2x^2+2x-1}{x^2(x-1)^2}$

$y''(x)\neq 0 \ \ \forall x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

$y''<0$ en $(-\infty,0)\cup(1,+\infty) \to y$ es convexa en todo su dominio.

i) $y=\dfrac{\ln x}{x} \to y'=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\ln x}{x^2} \to y''=\dfrac{-3}{x^3}+\dfrac{2\ln x}{x^3}$ Dom$y=(0,+\infty)$

$y''=0 \to x=e^{\frac{3}{2}}$

$y''(x)>0$ en el intervalo $\left(e^{\frac{3}{2}},+\infty\right) \to y$ es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x)<0$ en el intervalo $\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right) \to y$ es convexa en dicho intervalo.

j) $y=(x-1)e^x \to y'=xe^x \to y''=(x+1)e^x$ Dom$y=\mathbb{R}$

$y''=0 \to x=-1$

$y''(x)>0$ en el intervalo $(-1,+\infty) \to y$ es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x)<0$ en el intervalo $(-\infty,-1) \to y$ es convexa en dicho intervalo.

k) $y=\dfrac{x}{e^x} \to y'=\dfrac{1-x}{e^x} \to y''=\dfrac{x-2}{e^x}$ Dom$y=\mathbb{R}$

$y''=0 \to x=2$

$y''(x)>0$ en el intervalo $(2,+\infty) \to y$ es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x)<0$ en el intervalo $(-\infty,2) \to y$ es convexa en dicho intervalo.

l) $y=1+2\,sen x \to y'=2\cos x \to y''=-2\,sen x$ Dom$y=\mathbb{R}$

Estudiamos la función en $(-\pi,\pi)$ por ser periódica de período 2π.

$y''=0 \to x=0$

$y''(x)>0$ en el intervalo $(-\pi,0) \to y$ es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x)<0$ en el intervalo $(0,\pi) \to y$ es convexa en dicho intervalo.

m) $y = cos\,2x \rightarrow y' = -2sen\,2x \rightarrow y'' = -4cos\,2x$ $\quad$ $\text{Dom}\,y = \mathbb{R}$

Estudiamos la función en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ por ser periódica de período π.

$y'' = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}$

$y''(x) > 0$ en $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow y$ es cóncava en dicho conjunto de intervalos.

$y''(x) < 0$ en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

n) $y = sen^2 x \rightarrow y' = sen2x \rightarrow y'' = 2\cos 2x$ $\quad$ $\text{Dom}\,y = \mathbb{R}$

Estudiamos la función en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ por ser periódica de período π.

$y'' = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}$

$y''(x) > 0$ en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow y$ es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x) < 0$ en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

60. Página 231

$y(x) = x^3 + ax^2 - 3x \rightarrow y'(x) = 3x^2 - 2ax - 3 \rightarrow y''(x) = 6x - 2a$

$y(x)$ tiene punto de inflexión en $x = 1 \rightarrow y''(1) = 0 \rightarrow 6 \cdot 1 - 2a = 0 \rightarrow a = 3$

61. Página 231

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow f''(x) = 6x + 2a$

$f(x)$ tiene punto de inflexión en $x = 3 \rightarrow f''(3) = 0 \rightarrow 6 \cdot 3 + 2a = 0 \rightarrow a = -9$

$f(x)$ pasa por $(1,0) \rightarrow f(1) = 0 \rightarrow b + c = 8$

$f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 1 \rightarrow f'(1) = 0 \rightarrow b = 15$

Como $b + c = 8$ y $b = 15 \rightarrow c = -7 \rightarrow f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$

62. Página 231

$y(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 6 \rightarrow y'(x) = 4x^3 + 6x - 5 \rightarrow y''(x) = 12x^2 + 6$

$y''(x) > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$ ya que $12 > 0$ y $12x^2 > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$

Es decir, $y(x)$ no tiene puntos de inflexión al no anularse nunca su segunda derivada.

63. Página 231

a) $y(x)=x^3+ax^2-ax+b \rightarrow y'(x)=3x^2+2ax-a \rightarrow y''(x)=6x+2a$

$y(x)$ tiene un punto de inflexión en $(1,3) \rightarrow y''(1)=0 \rightarrow 6\cdot 1+2a=0 \rightarrow a=-3$

$y(1)=3 \rightarrow b=2$

Es decir, $y(x)=x^3-3x^2+3x+2$

b) $y'(x)=3x^2-6x+3$ $\qquad$ $y'(x)=0 \rightarrow x=1$

$y'(0)=3>0$ e $y'(2)=3>0 \rightarrow x=1$ no es extremo relativo $\rightarrow y$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.

Ya hemos visto que $y(x)$ tiene derivada segunda nula en $x=1$.

Estudiamos $y''(x)$ en torno a $x=1$:

$y''(0)=-6<0 \rightarrow y(x)$ es convexa para $x<1$

$y''(2)=6>0 \rightarrow y(x)$ es cóncava para $x>1$

Esto confirma que $x=1$ es, en efecto, un punto de inflexión.

64. Página 231

$f(x)=x^3+ax^2+bx+7 \rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b \rightarrow f''(x)=6x+2a$

Punto de inflexión en $x=1 \rightarrow f''(1)=0=6+2a \rightarrow a=-3$

La recta tangente que forma 45º con el eje *OX* es la recta $y=x$. Así:

$$f'(1)=1=3+2a+b \rightarrow 1=3-6+b \rightarrow b=4$$

65. Página 231

$y(x)=ax^4+bx^2+cx+d \rightarrow y'(x)=4ax^3+2bx+c \rightarrow y''(x)=12ax^2+2b$

$y(x)$ pasa por $P(0,3) \rightarrow y(0)=3=d$

$y(x)$ pasa por $Q(1,0) \rightarrow y(1)=0=a+b+c+3$

$y(x)$ tiene un extremo relativo en $Q(1,0) \rightarrow y'(1)=0 \rightarrow 4a+2b+c=0$

$y(x)$ tiene un punto de inflexión en $x=\frac{1}{2} \rightarrow y''\left(\frac{1}{2}\right)=0=12a\left(\frac{1}{2}\right)^2+2b \rightarrow 3a+2b=0$

$y(x)$ viene por tanto dada por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a+b+c=-3 \\ 4a+2b+c=0 \\ 3a+2b=0 \end{cases} \rightarrow a=2,\ b=-3,\ c=-2,\ d=3$$

Así, $y(x)=2x^4-3x^2-2x+3$.

Estudiamos a continuación la naturaleza del extremo relativo $Q(1,0)$:

$y'(x)=8x^2-6x-2$

$y'(-1)<0$ e $y'(2)>0 \rightarrow$ El extremo relativo es un mínimo.

66. Página 231

$y(x)=x^3-ax^2-4x+b \rightarrow y'(x)=3x^2-2ax-4 \rightarrow y''(x)=6x-2a$

$y(x)$ tiene un punto de inflexión en $x=\frac{2}{3} \rightarrow y''\left(\frac{2}{3}\right)=0 \rightarrow 6\cdot\frac{2}{3}-2a=0 \rightarrow a=2$

$y(x)$ pasa por $(3,0) \rightarrow y(3)=0 \rightarrow b=3$

Es decir: $y(x)=x^3+2x^2-4x+3$

67. Página 231

Sean c_1, c_2 los catetos de un triángulo rectángulo cualquiera.

El área, $A(c_1,c_2)$ de dicho triángulo viene dada por la función $A(c_1,c_2)=\frac{c_1\cdot c_2}{2}$.

El enunciado impone la siguiente restricción: $c_1+c_2=20 \rightarrow c_2=20-c_1$

$A(c_1)=\frac{c_1(20-c_1)}{2}=10c_1-\frac{1}{2}c_1^2$ $\qquad A'(c_1)=10-c_1$ $\qquad A'(c_1)=0 \rightarrow c_1=10$

Además, $A''(c_1)=-1<0 \rightarrow A(c_1)$ tiene un máximo en $c_1=10$. Y como $c_2=20-c_1 \rightarrow c_2=10$.

Así, el triángulo rectángulo con mayor área es aquel que tiene $c_1=c_2=10$ cm.

Por tanto, su área es: $A(10)=\frac{10\cdot 10}{2}=50$ cm^2.

68. Página 231

h : hipotenusa de un triángulo rectángulo

c_1, c_2 : catetos del triángulo rectángulo.

Por el teorema de Pitágoras, se tiene que: $8^2=c_1^2+c_2^2 \rightarrow c_2=\sqrt{64-c_1^2}$

Así, la función área viene dada por la siguiente expresión:

$$A(c_1,c_2)=\frac{c_1\cdot c_2}{2}=\frac{c_1\cdot\sqrt{64-c_1^2}}{2}$$

$A'(c_1)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{64-c_1^2}-\frac{c_1^2}{\sqrt{64-c_1^2}}\right)$ $\qquad A'(c_1)=0 \rightarrow \sqrt{64-c_1^2}=\frac{c_1^2}{\sqrt{64-c_1^2}} \rightarrow c_1=\pm 4\sqrt{2}$

Descartamos la solución negativa, y comprobamos que la positiva es un máximo:

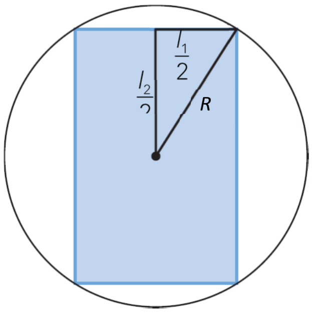
$A'(5)=\frac{7\sqrt{39}}{39}>0$ $\qquad A'(6)=\frac{-2\sqrt{7}}{7}<0$

Por tanto, en $c_1=c_2=4\sqrt{2}$ cm la función alcanza su valor máximo:

$$A(4\sqrt{2})=\frac{1}{2}(4\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2})=16 \text{ cm}^2$$

69. Página 231

El área de un rectángulo es $A(l_1, l_2) = l_1 \cdot l_2$ donde l_1, l_2 son los lados del rectángulo.



Como el rectángulo está inscrito en la circunferencia, se tiene que:

$$(2R)^2 = l_1^2 + l_2^2 \rightarrow l_2 = \sqrt{144 - l_1^2}$$

Así, la función que se quiere maximizar es la siguiente:

$$A(l_1) = l_1\sqrt{144 - l_1^2}$$

$$A'(l_1) = \sqrt{144 - l_1^2} - \frac{l_1^2}{\sqrt{144 - l_1^2}} \qquad A'(l_1) = 0 \rightarrow 144 - l_1^2 = l_1^2 \rightarrow l_1 = \pm 6\sqrt{2}$$

Descartamos el valor negativo, y comprobamos que $l_1 = 6\sqrt{2}$ es un máximo:

$$A''(l_1) = \frac{-l_1}{\sqrt{144 - l_1^2}} - \frac{2l_1\sqrt{144 - l_1^2} + \dfrac{l_1^3}{\sqrt{144 - l_1^2}}}{144 - l_1^2} \qquad A''(6\sqrt{2}) = -4 < 0$$

Los rectángulos con lado $l_1 = l_2 = 6\sqrt{2}$ cm son los que maximizan el área.

El rectángulo de área máxima que encaja en el círculo de radio $R = 6$ cm es un cuadrado de lado $l = 6\sqrt{2}$ cm.

70. Página 231

El área de un rectángulo es $A(l_1, l_2) = l_1 \cdot l_2$ donde l_1, l_2 son los lados del rectángulo.

Como el rectángulo está inscrito en la circunferencia, se tiene que:

$$(2R)^2 = l_1^2 + l_2^2 \rightarrow l_2 = \sqrt{4R^2 - l_1^2}$$

Así, la función que queremos maximizar viene dada por la siguiente expresión:

$$A(l_1) = l_1\sqrt{4R^2 - l_1^2}$$

$$A'(l_1) = \sqrt{4R^2 - l_1^2} - \frac{l_1^2}{\sqrt{4R^2 - l_1^2}} \qquad A'(l_1) = 0 \rightarrow 2l_1(l_1^2 - 2R^2) = 0 \rightarrow l_1 = \pm R\sqrt{2}$$

Descartamos el valor negativo, y comprobamos que $l_1 = R\sqrt{2}$ es un máximo:

$$A''(l_1) = \frac{-l_1}{\sqrt{4R^2 - l_1^2}} - \frac{2l_1\sqrt{4R^2 - l_1^2} + \dfrac{l_1^3}{\sqrt{4R^2 - l_1^2}}}{4R^2 - l_1^2} \qquad A''(R\sqrt{2}) < 0$$

Por tanto, $l_1 = R\sqrt{2}$ es un máximo para la función $A(l_1, l_2) = l_1 \cdot l_2$.

El rectángulo de área máxima que encaja en el círculo de radio R es un cuadrado de lado $l = R\sqrt{2}$ cm.

71. Página 231

Sean *x* e *y* las dimensiones del rectángulo, y sea *d* su diagonal.

Por un lado, el área del rectángulo viene dada por $xy=3$.

Por otro lado, por el teorema de Pitágoras se tiene que $d\cdot d=d^2=x^2+y^2$.

Así, la función que se quiere minimizar es: $P(x)=x^2+\left(\frac{3}{x}\right)^2=x^2+\frac{9}{x^2}$

$P'(x)=2x-\frac{18}{x^3}$ $\quad\quad$ $P'(x)=0\rightarrow 2x^4-18=0\rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

La única solución válida es $x=\sqrt{3}$. Comprobamos que es un mínimo de la función:

$$P''(x)=2+\frac{54}{x^4}\rightarrow P''\left(\sqrt{3}\right)>0$$

Las dimensiones del rectángulo son $x=\sqrt{3}$ e $y=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$, es decir, se tiene un cuadrado de lado $\sqrt{3}$ metros.

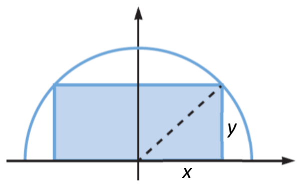
72. Página 231

Sea *x* la mitad de la base del rectángulo e *y* su altura. Se cumple que:

$x^2+y^2=25\rightarrow y=\sqrt{25-x^2}$

La función que queremos maximizar es:

$A(x)=2x\sqrt{25-x^2}=2\sqrt{25x^2-x^4}$



$A'(x)=\frac{50x-4x^3}{\sqrt{25x^2-x^4}}$ $\quad\quad$ $A'(x)=0\rightarrow 50x-4x^3=0\rightarrow x=0,\ x=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$

En $\left(0,\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\rightarrow A'(x)>0$ y en $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},5\right)\rightarrow A'(x)<0$. Por tanto, en $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ alcanza un máximo.

Así, la base del rectángulo de área máxima mide $5\sqrt{2}$ cm y la altura, $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.

73. Página 231

l: longitud del lado del cuadrado $\quad\quad$ *r*: radio del círculo

Se sabe que la suma de perímetros es 98 cm.

Además, aproximando el valor de π por 3, obtenemos: $4l+6r=98\rightarrow l=\frac{49-3r}{2}$

La función que queremos minimizar es: $A(r,l)=l^2+3r^2\rightarrow A(r)=\left(\frac{49-3r}{2}\right)^2+3r^2$

$A'(r)=\frac{21r-147}{2}$ $\quad\quad$ $A'(r)=0\rightarrow 21r-147=0\rightarrow r=\frac{147}{21}=7$

Como $A''(7)>0$, se puede afirmar que en $r=7$ cm se alcanza el mínimo de la función. Así, el lado mide:

$$l=\frac{49-3r}{2}\xrightarrow{r=7} l=14\text{ cm}$$

Por tanto, para que la suma de áreas sea mínima, el lado del cuadrado y el radio del círculo deben medir 14 cm y 7 cm, respectivamente.

74. Página 231

l: lado de la base cuadrada del prisma h: altura del prisma

$A_{\text{Total}} = 24 \rightarrow 2l^2 + 4lh = 24 \rightarrow h = \dfrac{12 - l^2}{2l} = \dfrac{6}{l} - \dfrac{l}{2}$

Así, la función que queremos maximizar es: $V(l) = l^2\left(\dfrac{6}{l} - \dfrac{l}{2}\right) = 6l - \dfrac{l^3}{2}$

$V'(l) = 6 - \dfrac{3}{2}l^2 = 0 \rightarrow 6 = \dfrac{3}{2}l^2 \rightarrow l = \pm 2$

La única solución válida es $l = 2$ cm. Comprobamos que con él se alcanza el máximo: $V''(l) = -3l \rightarrow V''(2) = -6 < 0$

Así, se tiene que $h = \dfrac{6}{2} - \dfrac{2}{2} = 2$ cm.

Por tanto, el prisma que maximiza el volumen es un cubo de lado 2 cm.

75. Página 232

r: radio de la base del cilindro h: altura del cilindro

La cartulina rectangular, por las condiciones del enunciado, tendrá dimensiones h y r, por lo que se cumplirá que:

$$2h + 2r = 60 \rightarrow h = 30 - r$$

La función que vamos a optimizar es:

$$V(r,h) = \pi r^2 h \rightarrow V(r) = \pi r^2(30 - r) = 30\pi r^2 - \pi r^3$$

$V'(r) = 60\pi r - 3\pi r^2$ $V'(r) = 0 \rightarrow 60\pi r = 3\pi r^2 \rightarrow r = 0, r = 20$

La solución válida es $r = 20$. Comprobamos que es donde se alcanza el máximo: $V''(r) = 60\pi - 6\pi r \rightarrow V''(20) < 0$

Así, se tiene que $h = 30 - r \xrightarrow{r=20} h = 10$ cm.

Por tanto, las dimensiones de la cartulina para conseguir el volumen máximo son 20 × 10 cm.

76. Página 232

g: longitud de los lados iguales r: longitud de la mitad del lado desigual

Perímetro = 10 $\rightarrow 2g + 2r = 10 \rightarrow g = 5 - r$

$V_{\text{Cono}} = \dfrac{A_{\text{Base}} \cdot h}{3} = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

Por el teorema de Pitágoras, se tiene que $h^2 = g^2 - r^2$. Así, la función que queremos maximizar es:

$$V(r) = \frac{\pi r^2 \cdot \sqrt{(5-r)^2 - r^2}}{3} = \frac{\pi r^2\sqrt{25 - 10r}}{3}$$

$V'(r) = \dfrac{2\pi r}{3}\sqrt{25 - 10r} - \dfrac{5\pi r^2}{3\sqrt{25 - 10r}}$ $V'(r) = 0 \rightarrow 2r(25 - 10r) = 5r^2 \rightarrow r = 0, r = 2$

La solución válida es $r = 2$ m. Comprobamos que es donde se alcanza el máximo:

En (0, 2) se tiene que $V'(r) > 0$ y en $(2, +\infty)$, $V'(r) < 0$

Así, se tiene que $g = 5 - r \xrightarrow{r=2} g = 3$ m.

Por tanto, para que el volumen del cono generado sea máximo, los lados del triángulo deben medir 3, 3 y 4 m, respectivamente.

77. Página 232

x: radio de la base del cilindro

y: longitud de la mitad de la altura del cilindro

$R = 9$ cm es el radio de la esfera.

Se verifica que $x^2 + y^2 = R^2 \to x^2 + y^2 = 81 \to y = \sqrt{81 - x^2}$.

La función que queremos maximizar es:

$$V(x,y) = \pi x^2 h \text{, donde } h = 2y$$

$V(x,y) = 2\pi x^2 y \to V(x) = 2\pi x^2\sqrt{81 - x^2} = 2\pi\sqrt{81x^4 - x^6}$

$V'(x) = \dfrac{2\pi(324x^3 - 6x^5)}{2\sqrt{81x^4 - x^6}} = \dfrac{\pi(324x^3 - 6x^5)}{\sqrt{81x^4 - x^6}}$ $\qquad V'(x) = 0 \to x = 0,\ x = \pm\sqrt{54} = \pm 3\sqrt{6}$

La solución válida es $x = 3\sqrt{6}$. Comprobamos que es donde se alcanza el máximo:

En $\left(0, 3\sqrt{6}\right) \to V'(x) > 0$ $\qquad$ En $\left(3\sqrt{6}, +\infty\right) \to V'(x) < 0$

Así, el radio y la altura del cilindro de mayor volumen que puede inscribirse en una esfera de radio 9 cm son:

Radio = $3\sqrt{6}$ cm $\qquad$ Altura = $2\sqrt{81 - 54} = 6\sqrt{3}$ cm.

78. Página 232

Llamamos r y h al radio y a la altura del cono, respectivamente.

Se cumple que:

$$r^2 + (h-9)^2 = 81 \to r^2 = 81 - (h-9)^2 = -h^2 + 18h$$

La función que debemos optimizar es:

$$V(r, h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h \to V(h) = \frac{1}{3}\pi(-h^2 + 18h)h = \frac{1}{3}\pi(-h^3 + 18h^2)$$

$V'(h) = \dfrac{1}{3}\pi(-3h^2 + 36h) = \pi(-h^2 + 12h)$ $\quad V'(h) = 0 \to h = 0,\ h = 12$

La solución válida es $h = 12$. Comprobamos que es donde se alcanza el máximo:

$$V''(h) = \pi(-2h + 12) \to V''(12) < 0$$

Por tanto, las dimensiones del cono de mayor volumen son:

Altura = 12 cm $\qquad$ Radio de la base = $\sqrt{-12^2 + 18 \cdot 12} = 6\sqrt{2}$ cm

79. Página 232

x: abscisa del punto de corte de la recta con el eje OX

m: pendiente de la recta $\qquad$ n: ordenada en el origen de la recta

Como r pasa por los puntos $(2, 1)$ y $(x, 0)$ se tiene que:

$$m = \frac{1-0}{2-x} = \frac{1}{2-x}$$

$r: y = mx + n \xrightarrow{P(2,1)} 1 = 2m + n \to n = 1 - 2m \to n = 1 - 2 \cdot \dfrac{1}{2-x} = \dfrac{x}{x-2}$

Entonces, la función que se quiere minimizar es: $A(x)=\dfrac{x\cdot\dfrac{x}{x-2}}{2}=\dfrac{x^2}{2x-4}$

$A'(x)=\dfrac{x^2-4x}{2x^2-8x+8}$ $\qquad A'(x)=0 \rightarrow x=0,\ x=4$ La solución válida es $x=4$.

$A''(x)=\dfrac{(2x-4)(2x^2-8x+8)-(x^2-4x)(4x-8)}{(2x^2-8x+8)^2}=\dfrac{4}{(x-2)^3} \rightarrow A''(4)=\dfrac{1}{2}>0$

Por tanto, $m=\dfrac{1}{2-4}=-\dfrac{1}{2}$ y $n=1-2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2$.

Y la recta buscada que minimiza el área del triángulo es $y=-\dfrac{1}{2}x+2$.

80. Página 232

Uno de los vértices está sobre la recta $x+2y=2$. Así, los cuatro vértices que forman el rectángulo son de la forma:

$$O(0,0) \qquad A(x,0) \qquad B\left(0,\frac{2-x}{2}\right) \qquad C\left(x,\frac{2-x}{2}\right)$$

La función que queremos maximizar es: $f(x)=x\cdot\dfrac{2-x}{2}=\dfrac{2x-x^2}{2}$

$f'(x)=1-x$ $\qquad f'(x)=0 \rightarrow x=1$

$f''(x)=-1 \rightarrow f''(1)=-1<0 \rightarrow$ En $x=1$ se alcanza el máximo.

Por tanto, los vértices del rectángulo de máxima área son:

$$O(0,0) \qquad A(1,0) \qquad B\left(0,\frac{1}{2}\right) \qquad C\left(1,\frac{1}{2}\right)$$

Y el área de dicho rectángulo es: $f(1)=\dfrac{2\cdot 1-1^2}{2}=\dfrac{1}{2}$ u^2

81. Página 232

Los puntos buscados son de la forma (x,x^2).

La distancia entre estos puntos y $(0,1)$ viene determinada por: $D(x)=\sqrt{(x-0)^2+(x^2-1)^2}=\sqrt{x^4-x^2+1}$

$D'(x)=\dfrac{2x^3-x}{\sqrt{x^4-x^2+1}}$ $\qquad D''(x)=\dfrac{2x^6-3x^4+6x^2-1}{\sqrt{(x^4-x^2+1)^3}}$

$D'(x)=0 \rightarrow x(2x^2-1)=0 \rightarrow x=0$, $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Las tres soluciones son válidas. Así:

$D''(0)=-\dfrac{1}{1}=-1<0 \rightarrow$ En $x=0$ no es un mínimo.

$D''\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}>0 \rightarrow$ En $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ es un mínimo. $\qquad D''\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}>0 \rightarrow$ En $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ es un mínimo.

Por tanto, los puntos de distancia mínima son: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ y $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

Y dicha distancia es: $D\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=D\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ u

82. Página 232

El vértice (a,b) está sobre la curva $y=\frac{1}{x^2}+4$.

Así, los cuatro vértices que forman el rectángulo son de la forma:

$$O(0,0) \qquad A(a,0) \qquad B\left(0,\frac{1}{a^2}+4\right) \qquad C\left(a,\frac{1}{a^2}+4\right)$$

La función que queremos minimizar es $f(a)=a\cdot\left(\frac{1}{a^2}+4\right)=\frac{1}{a}+4a$.

$f'(a)=-\frac{1}{a^2}+4 \qquad f'(a)=0 \rightarrow 4a^2=1 \rightarrow a=\pm\frac{1}{2}$

La solución válida es $a=\frac{1}{2}$ porque a debe ser positivo.

$f''(a)=\frac{2}{a^3} \rightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right)=16>0 \rightarrow$ En $a=\frac{1}{2}$ se alcanza el mínimo.

Por tanto, los vértices del rectángulo son:

$$O(0,0) \qquad A\left(\frac{1}{2},0\right) \qquad B(0,8) \qquad C\left(\frac{1}{2},8\right)$$

Y el área de dicho rectángulo es $f\left(\frac{1}{2}\right)=2+\frac{4}{2}=4$ u^2.

83. Página 232

$f(x)=x^2+2x-3$ es continua y derivable $\forall x\in\mathbb{R} \rightarrow f(x)$ continua y derivable en $[-4,2]$.

Además, $f(-4)=(-4)^2+2(-4)-3=5$ y $f(2)=2^2+2\cdot 2-3=5$.

Así, por el teorema de Rolle, $\exists c\in(-4,2)$ tal que $f'(c)=0$.

Interpretación geométrica:

Dado que $f(x)$ no es constante, por el teorema de Rolle sabemos que en algún punto dentro del intervalo $[-4,2]$ se produce un cambio en el crecimiento de la función. Esto es lo que provoca que la función retorne al mismo valor en el eje de ordenadas ($f(x)=5$) tras haber recorrido un tramo dentro de dicho intervalo.

84. Página 232

$f(x)=x^3+x^2-x-1$ es continua y derivable (por ser función polinómica).

Además, $f(1)=0=f(-1) \rightarrow f(x)$ satisface el teorema de Rolle en $[-1,1]$.

$f'(x)=3x^2+2x-1 \quad f'(x)=0 \rightarrow x=\frac{1}{3}, x=-1$

En este caso, el punto que verifica que el teorema se satisface es $x=\frac{1}{3}$, ya que el teorema garantiza la existencia de un punto en el que la derivada es cero excluyendo los bordes del intervalo.

85. Página 232

a) En este caso, no se contradice el teorema de Rolle:

La función $f(x)=\frac{1}{x^4}$ no es continua en el intervalo $[-2,2]$, porque tiene una asíntota vertical en $x=0$.

b) En este caso, no se contradice el teorema de Rolle:

La función $g(x)=2-|x|$ es continua pero no es derivable en el intervalo $[-2,2]$.

En particular, la derivada no existe para el punto $x=2$.

$$g'(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x<2\\ 1 & \text{si } x>2\end{cases}$$

En $x=2$ no hay derivada, ya que los límites por la izquierda y por la derecha no coinciden.

86. Página 232

$f(x)=3cos^2x$ es continua y derivable en $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\rightarrow$ Además, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Por tanto, se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle para $f(x)$ en $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

$f'(x)=-6sen(x)cos(x)$ $\qquad$ $f'(x)=0\rightarrow x=k\frac{\pi}{2}$, para $k=0,1,2,3$

En este caso, el valor que verifica que el teorema de Rolle es cierto para $f(x)$ en $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ es $x=\pi$,

ya que los demás valores quedan en la frontera del intervalo o fuera del mismo.

87. Página 232

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{16-x^2} & \text{si } -4\le x<0\\ -x^2+4 & \text{si } 0<x\le 2\end{cases}$$

Estudiamos si $f(x)$ es continua en $[-4,2]$, considerando que está formada por funciones elementales (una raíz cuyo radical es positivo y una función polinómica) y que el único posible punto de discontinuidad es $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-0^2+4=4$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\sqrt{16-0^2}=4\ \longrightarrow\ f(x)$ es continua en $x=0$.

Estudiamos si $f(x)$ es derivable en $[-4,2]$ bajo las mismas consideraciones que antes:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{\sqrt{16-x^2}} & \text{si } -4<x<0\\ -2x & \text{si } 0<x<2\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\dfrac{0}{\sqrt{16-0^2}}=0$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-2\cdot 0=0\ \longrightarrow\ f(x)$ es derivable en $[-4,2]$.

$f(-4)=\sqrt{16-(-4)^2}=0$ y $f(2)=-2^2+4=0\ \longrightarrow\ f(-4)=f(2)$. Se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle.

El punto cuya existencia predice el teorema de Rolle es $x=0$.

Dado que $f(x)$ no es constante, por el teorema de Rolle sabemos que en algún punto dentro del intervalo $[-4,2]$ se produce un cambio en el crecimiento de la función. Esto es lo que provoca que la función retorne al mismo valor en el eje de ordenadas ($f(x)=0$) tras haber recorrido un tramo dentro de dicho intervalo.

88. Página 232

$f(x)=x^3-7x$

Buscamos valores de a tales que $f(1)=f(a)$: $1^3-7\cdot 1=a^3-7a \to a^3-7a+6=0 \to a=-3, a=1, a=2$

El valor $a=1$ se descarta porque el intervalo se reduciría a un punto.

El valor $a=-3$ se descarta por ser menor que 1.

Comprobamos que se verifican las hipótesis del teorema de Rolle cuando $a=2$:

- $f(x)$ es continua en $[1,2]$ y derivable en $(1,2)$ por ser polinómica.
- $f(1)=f(a)$

Entonces existe algún punto $c\in(1,2)$ tal que $f'(c)=0$.

Para calcular el punto c , derivamos e igualamos a cero:

$$f'(x)=3x^2-7 \qquad\qquad 3x^2-7=0 \;\longrightarrow\; \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$$

Descartamos la solución negativa por no pertenecer al intervalo $(1,2)$.

Así, el punto cuya existencia predice el teorema de Rolle es $c=\sqrt{\frac{7}{3}}$.

89. Página 232

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & si\;\; 0\le x\le 2 \\ cx+1 & si\;\; 2<x\le 4\end{cases}$$

$f(x)$ polinómica en cada rama. Así, se garantiza la continuidad y derivabilidad en cada correspondiente intervalo excepto en el punto $x = 2$:

$f(x)$ continua $\longrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=4+2a+b$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2c+1 \longrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \to 4+2a+b=2c+1 \longrightarrow 2a+b-2c=-3$

$f(x)$ derivable $\longrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)$

- $f'(x)=\begin{cases} 2x+a & si\;\; 0\le x\le 2 \\ c & si\;\; 2<x\le 4\end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=4+a$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=c \longrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) \to 4+a=c$

Además, que se cumpla el teorema de Rolle para $f(x)$ en $[0,4]$ requiere que $f(0)=f(4) \longrightarrow b=4c+1$.

Por lo tanto, los parámetros a,b,c buscados vendrán dados por el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2a+b-2c=-3 \\ a-c=-4 \\ b-4c=1\end{cases} \longrightarrow a=-3\,,\; b=5\,,\; c=1 \longrightarrow \text{Así, } f(x)=\begin{cases} x^2-3x+5 & si\;\; 0\le x\le 2 \\ x+1 & si\;\; 2<x\le 4\end{cases}.$$

Por tanto, $f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{si}\;\; 0<x<2 \\ 1 & \text{si}\;\; 2<x<4\end{cases}$ $\qquad f'(x)=0 \to x=\frac{3}{2}$

Es decir, el punto c que confirma el teorema de Rolle para $f(x)$ en $[0,4]$ es $c=\frac{3}{2}$.

90. Página 232

$f(x)$ continua en $[-\sqrt{2}, 2] \rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3-(1)^2 = 2$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{\lambda-1}{1} = \lambda-1 \rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \rightarrow \lambda = 3$

Comprobamos el resto de condiciones para este valor de λ:

$f(x)$ derivable en $[-\sqrt{2}, 2] \rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = -2$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = -\dfrac{(3-1)}{1} = -2 \rightarrow f(x)$ derivable en $[-\sqrt{2}, 2]$.

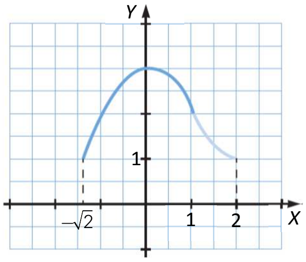
$f(-\sqrt{2}) = 3-(\sqrt{2})^2 = 1$ y $f(2) = \dfrac{3-1}{2} = 1 \rightarrow f(\sqrt{2}) = f(2)$

Por tanto, para $\lambda = 3$ se cumplen las condiciones del teorema de Rolle en $[-\sqrt{2}, 2]$. Así:

$$f(x) = \begin{cases} 3-x^2 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{-2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ El punto c que verifica el teorema de Rolle es $x = 0$.

$f''(x) = -2$ en $x = 0 \rightarrow x = 0$ es un máximo de la función.



91. Página 232

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + b(x-1) + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 1 \\ 2ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$f(x)$ cumple el teorema de Rolle en $[-2, c]$ si:

- $f(x)$ es continua en $[-2, c]$ y derivable en $(-2, c)$
- $f(-2) = f(c)$

Sabemos que $c > 1$ ya que $\neg\exists x : x \neq -2 \wedge 3x = -6 \rightarrow$ No puede cumplirse el teorema de Rolle para la función y el intervalo dados si $c \leq 1$.

$f(x)$ es continua en $[-2, c]$ si $f(x)$ es continua en $x = 1$ (en el resto, es continua por ser función polinómica).

$f(x)$ es continua en $x = 1$ si $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \rightarrow 3 = a + 4 \rightarrow a = -1$

$f(x)$ derivable en $[-2, c]$ si $f'(-1)$ está definida en $x = 1$ (en el resto, es continua por ser función polinómica).

$f(x)$ es derivable en $x = 1$ si $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) \rightarrow 3 = b - 2 \rightarrow b = 5$

Por último, $f(-2)=-6$ y $f(c)=-c^2+5c-1 \rightarrow -c^2+5c+5=0 \rightarrow c^2-5c-5=0 \rightarrow c=\frac{5\pm 3\sqrt{5}}{2}$

Descartamos $c=\frac{5-3\sqrt{5}}{2}$, ya que en tal caso $c<1$ y ya hemos visto que esto no es posible. Es decir:

$f(x)=\begin{cases} 3x & \text{si } x\leq 1 \\ -x^2+5x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$ cumple el teorema de Rolle en $\left(-2,\frac{5+3\sqrt{5}}{2}\right)$.

Además, como $f'(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x<1 \\ -2x+5 & \text{si } x>1 \end{cases} \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow x=\frac{5}{2}$

Por tanto, el valor de x que verifica el teorema de Rolle para $f(x)$ en el intervalo dado es $x=\frac{5}{2}$.

92. Página 232

$f(x)=x^3+6x^2+12x+9$

$f(x)$ continua y derivable en $\mathbb{R}$ y además $f(-4)=-7<0$ y $f(-2)=1>0$

Así, por el teorema de Bolzano, la función tiene al menos una raíz real en $(-4,2)$.

Afinamos más el intervalo para que tenga longitud $\frac{1}{2}$:

$\begin{cases} f\left(-\frac{13}{4}\right)<0 \\ f\left(-\frac{11}{4}\right)>0 \end{cases} \rightarrow -\frac{11}{4}-\left(-\frac{13}{4}\right)=\frac{1}{2} \rightarrow f(x)$ tiene al menos una raíz real en el intervalo $\left(-\frac{13}{4},-\frac{11}{4}\right)$.

$f'(x)=3x^2-12x+12=3(x-2)^2\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \rightarrow f(x)$ es siempre creciente

Por tanto, $f(x)$ solo tiene una raíz real, que está en el intervalo $\left(-\frac{13}{4},-\frac{11}{4}\right)$ por el teorema de Bolzano.

93. Página 232

$f(x)=x^3+2x-4$

$f(x)$ continua y derivable en $\mathbb{R}$ y además $f(1)=-1<0$ y $f(2)=8>0$

Por el teorema de Bolzano, la función tiene al menos una raíz real en $(1,2)$.

Afinamos más el intervalo para que tenga longitud $\frac{1}{2}$:

$\begin{cases} f(1)=-1<0 \\ f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{19}{8}>0 \end{cases} \rightarrow \frac{3}{2}-1=\frac{1}{2} \rightarrow f(x)$ tiene al menos una raíz real en el intervalo $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

$f'(x)=3x^2+2\geq 0 \;\; \forall x\in\mathbb{R} \rightarrow f(x)$ es siempre creciente.

Por tanto, $f(x)$ solo tiene una raíz real, que está en el intervalo $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ por el teorema de Bolzano.

94. Página 232

$f(x)=e^{x-2}+x-5$

$f(x)$ continua y derivable en $\mathbb{R}$ y además $f(2)=-2<0$ y $f(3)=e-2>0$

Por el teorema de Bolzano, la función tiene al menos una raíz real en $(2, 3)$.

Afinamos más el intervalo para que tenga longitud $\frac{1}{4}$:

$\begin{cases} f\left(\frac{11}{4}\right)<0 \\ f(3)>0 \end{cases} \rightarrow 3-\frac{11}{4}=\frac{1}{4} \rightarrow f(x)$ tiene al menos una raíz real en el intervalo $\left(\frac{11}{4}, 3\right)$.

$f'(x)=e^{x-2}+1>0\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x)$ es siempre creciente

Por tanto, $f(x)$ solo tiene una raíz real, que está en el intervalo $\left(\frac{11}{4}, 3\right)$ por el teorema de Bolzano.

95. Página 232

$f(x)$ continua en $[-3, 3]$ y derivable $(-3, 3)$ por ser polinómica $\rightarrow f(x)$ cumple el *T.V.M.* $\rightarrow$

$\rightarrow \exists c \in (-3, 3)$ tal que $f'(c)=\frac{f(3)-f(-3)}{3-(-3)}$

$$\frac{f(3)-f(-3)}{3-(-3)}=\frac{-3^2+2\cdot 3-8-\left(-(-3)^2+2(-3)-8\right)}{6}=\frac{12}{6}=2$$

Buscamos el valor c tal que $f'(c)=2$: $f'(c)=-2c+2 \rightarrow f'(c)=2 \rightarrow c=0$

Es decir, $f(x)$ cumple el *T.V.M.* y el punto para el que se verifica es $x=0$.

Geométricamente: existe un punto en el interior del intervalo cuya recta tangente es paralela a la recta que une los puntos $(-3, f(-3))$ y $(3, f(3))$.

96. Página 233

$$f(x)=\begin{cases} x\ln x & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Comprobamos si $f(x)$ es continua y derivable en $[0, e]$:

$f(x)$ continua en $[0, e] \rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)$, que es indeterminación de tipo $0\cdot\infty \rightarrow$ Aplicamos L'Hôpital.

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{-x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0 \rightarrow f(x)$ es continua en $x=0$.

$f(x)$ derivable en $(0, e) \rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=f'(0)=0$ Por tanto, se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio.

$\exists c \in (0, e)$ tal que $f'(c)=\frac{f(e)-f(0)}{e-0}=1 \rightarrow f'(c)=\ln c+1=1 \rightarrow c=1$

97. Página 233

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{7-x} & \text{si } 6<x<7\\ \sqrt{x-7} & \text{si } 7\le x<10\end{cases}$$

En el intervalo $[8,10]$ se cumple el teorema del valor medio por ser la función continua y derivable.

En dicho intervalo se cumple que $f(x)=\sqrt{x-7}$.

$$\frac{f(10)-f(8)}{10-8}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\rightarrow \exists\, c\in[8,10] \text{ tal que } f'(c)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-7}}\rightarrow \frac{1}{\sqrt{c-7}}=\sqrt{3}-1\rightarrow c=7+\frac{1}{3-2\sqrt{3}+1}=8+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Es decir, el punto que verifica el *T.V.M.* para $f(x)$ en $[8,10]$ es $x=8+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

El teorema del valor medio no se cumple para el intervalo $[6,8]$ porque $f(x)$ no es derivable en dicho intervalo.

En particular, la derivabilidad no se cumple en $x=7$, porque:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{2\sqrt{7-x}} & \text{si } 6<x<7\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-7}} & \text{si } 7<x<10\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 7^-}\dfrac{-1}{2\sqrt{7-x}}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 7^+}\dfrac{1}{2\sqrt{x-7}}=+\infty\end{cases}$$

98. Página 233

$$f(x)=x^2\rightarrow f'(x)=2x$$

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{9-1}{2}=4\rightarrow \text{El punto } x \text{ tal que } f'(x)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1} \text{ es } x=2.$$

99. Página 233

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+3x & \text{si } x\le 2\\ x^2+bx-4 & \text{si } x>2\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}2ax+3 & \text{si } x<2\\ 2x+b & \text{si } x>2\end{cases}$$

$f(x)$ continua y derivable en $[-1,3]$ si es continua y derivable en $x=2$.

$f(x)$ continua en $x=2$ si $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)\rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=4a+6$ y $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=2b\rightarrow 4a-2b+6=0$

$f(x)$ derivable en $x=2$ si $\lim\limits_{x\to 2^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f'(x)\rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-}f'(x)=4a+3$ y $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=b+4\rightarrow 4a-b-1=0$

Por tanto, *a* y *b* vendrán dados por el siguiente sistema:

$$\begin{cases}4a-2b+6=0\\ 4a-b-1=0\end{cases}\rightarrow a=2, b=7$$

$$f(x)=\begin{cases}2x^2+3x & \text{si } x\le 2\\ x^2+7x-4 & \text{si } x>2\end{cases}\qquad f'(x)=\begin{cases}4x+3 & \text{si } x<2\\ 2x+7 & \text{si } x>2\end{cases}$$

$$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{9+21-4-(18+9)}{4}=-\frac{1}{4}$$

Obtenemos el punto que verifica el *T.V.M.* : $f'(c)=-\frac{1}{4}\rightarrow c=-\frac{13}{16}$

100. Página 233

$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax+6b & \text{si} \quad x<4 \\ \dfrac{2x}{x-3} & \text{si} \quad x\geq 4 \end{cases}$$

$f(x)$ continua en $\mathbb{R}-\{4\}$, por ser polinómica en $[-\infty, 4)$ y cociente de polinomios (sin que se anule el denominador) en $[4, +\infty)$.

Imponemos la condición de continuidad en $x=4$:

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{2x}{x-3}=8 \text{ y } \lim_{x\to 4^-}(x^2-ax+6b)=16-4a+6b \longrightarrow 2a-3b=4$$

$f(x)$ derivable en cada rama por ser composición de funciones derivables.

Imponemos la condición de derivabilidad en $x=4$:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-a & \text{si} \quad x<4 \\ \dfrac{-6}{(x-3)^2} & \text{si} \quad x>4 \end{cases} \longrightarrow 2\cdot 4-a=\frac{-6}{(4-3)^2} \longrightarrow 8-a=-6$$

Para que f sea continua en $[3, 5]$ y derivable en $(3, 5)$ se debe cumplir:

$$\begin{cases} 2a-3b=4 \\ 8-a=-6 \end{cases} \longrightarrow a=14, b=8$$

Como la función es continua y derivable en el intervalo (lo hemos impuesto), sabemos que se puede aplicar el *T.V.M.* en el mismo.

101. Página 233

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{\sqrt{x+2}} & \text{si } x\geq -1 \\ (x+b)^2 & \text{si } x<-1 \end{cases} \longrightarrow f'(x)=\begin{cases} \dfrac{a(x+4)}{2(x+2)^{3/2}} & \text{si } x>-1 \\ 2(x+b) & \text{si } x<-1 \end{cases}$$

La función es continua en $[-2, 2]$ y derivable en $(-2, 2)$ si es continua y derivable en $x=-1$:

Es continua en $x=-1$ si $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=-a \text{ y } \lim_{x\to 1^-} f(x)=(b-1)^2 \longrightarrow b^2-2b+1=-a$$

Es derivable en $x=-1$ si $\lim\limits_{x\to -1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)$:

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x)=\frac{3a}{2} \text{ y } \lim_{x\to -1^-} f(x)=2b-2 \longrightarrow 3a=4b-4$$

Por tanto, los parámetros vendrán determinados por el siguiente sistema:

$$\begin{cases} b^2-2b+1=-a \\ 3a=4b-4 \end{cases} \to \begin{cases} b^2-2b+1+a=0 \\ 3a-4b+4=0 \end{cases} \to \begin{cases} a_1=0, b_1=1 \\ a_2=-\dfrac{16}{9}, b_2=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Si $a_1=0, b_1=1 \longrightarrow f'(c)=\dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=-\dfrac{1}{4}\to 2(c+1)=-\dfrac{1}{4}\to c=-\dfrac{9}{8}$

Si $a_2=-\dfrac{16}{9}, b_2=-\dfrac{1}{3}\to f'(c)=\dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=-\dfrac{41}{36}\to 2\left(c-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{41}{36}\to c=-\dfrac{17}{72}$

102. Página 233

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{si } x<0 \\ a^2-\operatorname{sen} x & \text{si } x\ge 0\end{cases} \rightarrow f'(x)\begin{cases} 2ax+b & \text{si } x<0 \\ -\cos x & \text{si } x>0\end{cases}$$

$f(x)$ continua y derivable en el intervalo dado, salvo tal vez en $x=0$:

$f(x)$ continua en $x=0$ si $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \rightarrow a^2=1 \rightarrow a=\pm 1$

$f(x)$ derivable en $x=0$ si $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) \rightarrow b=-1$

- Caso 1: $a=1, b=-1$

$$f'(c)=\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(-1)}{\frac{\pi}{2}+1}=\frac{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)-(1-1+1)}{\frac{\pi}{2}+1}=-\frac{3}{\frac{\pi}{2}+1}=-\frac{6}{\pi+2}$$

Si $c\ge 0 \rightarrow f'(c)=-\cos c \rightarrow \cos c=\frac{6}{\pi+2} \rightarrow c=\arccos\left(\frac{6}{\pi+2}\right) \rightarrow$ Imposible. No existe c.

Si $c<0 \rightarrow f'(c)=2c-1=-\frac{6}{\pi+2} \rightarrow c=\frac{\pi-4}{2(\pi-2)}<0$

Así, $c=\frac{\pi-4}{2(\pi-2)}$ verifica el *T.V.M.* generalizado para $f(x)$ en $\left[-1,\frac{\pi}{2}\right]$.

- Caso 2: $a=-1, b=-1$

$$f'(c)=\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(-1)}{\frac{\pi}{2}-(-1)}=\frac{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)-(-(-1)^2+1+1)}{\frac{\pi}{2}+1}=-\frac{1}{\frac{\pi}{2}+1}=-\frac{2}{\pi+2}$$

Si $c\ge 0 \rightarrow f'(c)=-\cos c \rightarrow \cos c=\frac{2}{\pi+2} \rightarrow c=\arccos\left(\frac{2}{\pi+2}\right)=1{,}17$

Si $c<0 \rightarrow f'(c)=-2c-1=-\frac{2}{\pi+2} \rightarrow c=\frac{-\pi}{2(\pi+2)}<0$

Así, $c=\frac{-\pi}{2(\pi+2)}$ y $c=1{,}17$ verifican el *T.V.M.* generalizado para $f(x)$ en $\left[-1,\frac{\pi}{2}\right]$.

103. Página 233

$f(x)$ continua y derivable en $\left[-2,\frac{\pi}{2}\right]$ si es continua y derivable en $x=0$.

$f(x)$ continua en $x=0$ si $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \rightarrow a=1$

$f(x)$ derivable en $x=0$ si $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) \rightarrow a=b \rightarrow b=1$

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x\le 0 \\ 1+\operatorname{sen} x & \text{si } x>0\end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x<0 \\ \cos x & \text{si } x>0\end{cases}$$

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(-2)}{\frac{\pi}{2}+2}=\frac{1+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)-e^{-2}}{\frac{\pi}{2}+2}=\frac{2-e^{-2}}{\frac{\pi}{2}+2}=\frac{4-2e^{-2}}{\pi+4}$$

Buscamos el punto c tal que $f'(c)=\frac{4-2e^{-2}}{\pi+4}$:

Si $-2<c\le 0 \longrightarrow f'(c)=e^{c}=\frac{4-2e^{-2}}{\pi+4} \longrightarrow c=\ln\left(\frac{4-2e^{-2}}{\pi+4}\right)$

Además, $\left|\frac{4-2e^{-2}}{\pi-4}\right|<1$, por lo que $c=\ln\left(\frac{4-2e^{-2}}{\pi+4}\right)<0$, tal y como se preveía.

Es decir, $c=\ln\left(\frac{4-2e^{-2}}{\pi+4}\right)$ verifica el *T.V.M.* para $f(x)$ en $\left[-2,\frac{\pi}{2}\right]$.

Si $0<c<\frac{\pi}{2} \longrightarrow f'(c)=\cos c \rightarrow \frac{4-2e^{-2}}{\pi+4}=\cos c \rightarrow c=\arccos\frac{4-2e^{-2}}{\pi+4}$

Es decir, $c=\arccos\frac{4-2e^{-2}}{\pi+4}$ verifica el *T.V.M.* para $f(x)$ en $\left[-2,\frac{\pi}{2}\right]$.

104. Página 233

a) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2-3x-4}=\frac{(-1)^3+1}{(-1)^2-3(-1)-4}=\frac{0}{0} \longrightarrow$ Aplicamos L'Hôpital.

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2-3x-4}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x^3+1)'}{(x^2-3x-4)'}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x^2}{2x-3}=-\frac{3}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{3x^2-6x+3}=\frac{1-1-1+1}{3-6+3}=\frac{0}{0} \longrightarrow$ Aplicamos L'Hôpital.

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{3x^2-6x+3}=\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-2x-1}{6x-6}=\frac{0}{0} \longrightarrow$ Aplicamos L'Hôpital.

$\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-2x-1}{6x-6}=\lim\limits_{x\to1}\frac{6x-2}{6}=\frac{2}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x+2}{x^2+2x+1}=\frac{-2+2}{1-2+1}=\frac{0}{0} \longrightarrow$ Aplicamos L'Hôpital.

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x+2}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{2}{2x+2}=\frac{2}{0}$. No existe el límite.

d) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{4-x^2}{\sqrt{x+2}}=\frac{4-4}{\sqrt{2-2}}=\frac{0}{0} \longrightarrow$ Aplicamos L'Hôpital.

$\lim\limits_{x\to-2}\frac{4-x^2}{\sqrt{x+2}}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{-2x}{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}=\lim\limits_{x\to-2}-4x\sqrt{x+2}=0$

e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}=\frac{0}{0} \longrightarrow$ Aplicamos L'Hôpital.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{4+x}}+\frac{1}{2\sqrt{4-x}}}{4}=\frac{1}{8}$

f) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{3x-2}}=\frac{0}{0} \longrightarrow$ Aplicamos L'Hôpital.

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{3x-2}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{-\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}}=\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{6}$

105. Página 233

a) $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{1-\cos x}=\frac{0}{0}$ $\longrightarrow$ Aplicamos L'Hôpital.

$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{sen\,x}=\frac{1}{0}$. No existe el límite.

b) $\lim_{x\to 0}\frac{x-sen\,x}{x\cdot sen\,x}=\frac{0}{0}$ $\longrightarrow$ Aplicamos L'Hôpital.

$\lim_{x\to 0}\frac{x-sen\,x}{x\cdot sen\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{sen\,x+x\cdot\cos x}=\frac{0}{0}\longrightarrow$ Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{sen\,x+x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{\cos x+(\cos x-x\cdot sen\,x)}=\frac{0}{2}=0$$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{x^4-\left(\frac{1}{3}\right)x^2}{x-tg\,x}=\frac{0}{0}\longrightarrow$ Aplicamos L'Hôpital.

$\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-x^2}{1-(1+tg^2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-x^2}{-tg^2x}=\frac{0}{0}\longrightarrow$ Aplicamos L'Hôpital.

$\lim_{x\to 0}\frac{12x^2-2x}{-2tg\,x\cdot(1+tg^2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{12x^2-2x}{-2tg\,x\cdot(1+tg^2x)}=\frac{0}{0}\longrightarrow$ Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{24x-2}{-2-2tg^2\,x-6tg^2x-6tg^3x}=\frac{-2}{-2}=1$$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{2sen\,x}{x^2-3x}=\frac{0}{0}$ $\longrightarrow$ Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2sen\,x}{x^2-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{2x-3}=-\frac{2}{3}$$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(2x)}{3x^2}=\frac{0}{0}\longrightarrow$ Aplicamos L'Hôpital.

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(2x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2sen(4x)}{6x}=\frac{0}{0}$ $\longrightarrow$ Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2sen(4x)}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{8\cos(4x)}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

f) $\lim_{x\to 0}\frac{x-2sen\,x}{tg\,x-2\,sen\,x}=\frac{0}{0}$ $\longrightarrow$ Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos x}{sec^2x-2\cos x}=\frac{-1}{-1}=1$$

106. Página 233

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x^3)}{x}=\frac{0}{0}$ $\longrightarrow$ Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x^3)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+e^x}{x^3+e^x}=1$$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x)}{x^2}=\frac{0}{0}$ $\to$ Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-3tg(3x)}{2x}=\frac{0}{0}\to \text{Aplicamos L'Hôpital.}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3tg(3x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-9sec^2(3x)}{2}=-\frac{9}{2}$$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 8x)}{\ln(\cos 4x)}=\frac{0}{0}$ $\to$ Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{-8tg(8x)}{-4tg(4x)}=\frac{0}{0}\to \text{Aplicamos L'Hôpital.}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-8tg(8x)}{-4tg(4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-64\cdot sec^2(8x)}{-16\cdot sec^2(4x)}=\frac{64}{16}=4$$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{0}{0}$ $\to$ Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt[4]{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt[4]{x}}{3(1+x)}=0$$

107. **Página 233**

a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{senx}}{1-cosx}=\frac{0}{0}$ $\to$ Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{sen\,x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x\cdot e^{sen\,x}}{1+sen\,x}=0$$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\frac{0}{0}$ $\to$ Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a-b^x\ln b}{1}=\ln a-\ln b$$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{sen^2x}=\frac{0}{0}$ $\to$ Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{sen^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{sen2x}=\frac{0}{0}\to \text{Aplicamos L'Hôpital.}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{sen2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{2\cdot cos2x}=-\frac{1}{2}$$

d) $\lim_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{9-3^x}=\frac{0}{0}$ $\to$ Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{9-3^x}=\lim_{x\to 2}\frac{2^x\ln 2-2x}{-3^x\ln 3}=\frac{-4\cdot(\ln 2-1)}{9\ln 3}$$

108. Página 233

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{x^2+x+2}\right)^{\frac{1}{x^2}} \longrightarrow 1^{\infty}$ $\quad$ $\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{x^2+x+2}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{x+2}{x^2+x+2}\right)}{x^2} \longrightarrow \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{x+2}{x^2+x+2}\right)}{x^2}\xrightarrow{\text{L'Hôp}}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\dfrac{-x^2-4x}{(x^2+x+2)^2}}{\dfrac{x+2}{x^2+x+2}}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-4}{2(x^2+x+2)(x+2)}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x^2+x+2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+2}{2-2senx}\right)^{\frac{2}{x}} \longrightarrow 1^{\infty}$ $\quad$ $\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+2}{2-2senx}\right)^{\frac{2}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln\left(\dfrac{x^2+2}{2-2senx}\right)}{x} \longrightarrow \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln\left(\dfrac{x^2+2}{2-2sen\,x}\right)}{x}\xrightarrow{\text{L'Hôp}}\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\dfrac{4x(1-senx)+(x^2+2)\cdot(2\cos x)}{4(1-sen\,x)^2}}{\dfrac{x^2+2}{2(1-sen\,x)}}=2$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+2}{2-2sen\,x}\right)^{\frac{2}{x}}=e^2$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-x)^{\frac{1}{x}} \longrightarrow 1^{\infty}$ $\quad$ $\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(e^x-x)^{\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^x-x)}{x} \longrightarrow \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x-x)}{x}\xrightarrow{\text{L'Hôp}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}(e^x-x)^{\frac{1}{x}}=e^0=1$$

d) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}} \longrightarrow 1^{\infty}$ $\quad$ $\ln\left(\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x} \longrightarrow \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}\xrightarrow{\text{L'Hôp}}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1 \qquad \lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

109. Página 233

a) $\lim\limits_{x\to 0}x^x \longrightarrow 0^0$ $\quad$ $\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}x^x\right)=\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \longrightarrow \dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\xrightarrow{\text{L'Hôp}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0 \qquad \lim_{x\to 0}x^x=e^0=1$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(3x)^{2senx} \longrightarrow 0^0$ $\quad$ $\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(3x)^{2senx}\right)=\lim\limits_{x\to 0}2sen\,x\ln(3x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(3x)}{\frac{1}{2sen\,x}} \longrightarrow \dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(3x)}{\frac{1}{2sen\,x}}\xrightarrow{\text{L'Hôp}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{2sen^2\,x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2sen^2\,x}{-x\cos x} \longrightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2sen^2x}{-x\cos x}\xrightarrow{\text{L'Hôp}}\lim_{x\to 0}\frac{4\,sen\,x\cos x}{-\cos x+x sen\,x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}(3x)^{2senx}=e^0=1$$

c) $\lim_{x\to 0} x^{tg\,x} \to 0^0$ $\qquad \ln\left(\lim_{x\to 0} x^{tg\,x}\right) = \lim_{x\to 0} tg\,x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{tg\,x}} \to \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{tg\,x}} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-(1+tg^2 x)}{tg^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{tg^2 x}{-x(1+tg^2 x)} \to \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg^2 x}{-x(1+tg^2 x)} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to 0} \frac{-2(1+tg^2 x)tg\,x}{(1+tg^2 x)+x(2tg^2 x)(1+tg^2 x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2tg\,x}{1+x(2tg^2 x)} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x^{tg\,x} = e^0 = 1$$

d) $\lim_{x\to 0} (cotg\,x)^{sen\,x} \to 0^0$ $\qquad \ln\left(\lim_{x\to 0} (cotg\,x)^{sen\,x}\right) = \lim_{x\to 0} sen\,x \ln(cotg\,x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(cotg\,x)}{\frac{1}{sen\,x}} \to \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(cotg\,x)}{\frac{1}{sen\,x}} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-(1+cotg^2 x)}{cotg\,x}}{\frac{-cos\,x}{sen^2\,x}} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+cotg^2 x)sen^2\,x}{cos\,x\,cotg\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{cos^2 x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} (cotg\,x)^{sen\,x} = e^0 = 1$$

110. Página 234

a) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{\ln(1+x)} - \frac{2}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2x-2\ln(1+x)}{x\cdot\ln(1+x)}\right] = \frac{0}{0} \to$ Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{2x-2\ln(1+x)}{x\cdot\ln(1+x)}\right] \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to 0} \frac{2-\frac{2}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}} \to \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2-\frac{2}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to 0} \frac{2}{2+x} = 1$$

b) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{3}{x} - \frac{3}{sen\,x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{3sen\,x - 3x}{x\cdot sen\,x}\right] = \frac{0}{0} \to$ Aplicamos L'Hôpital.

$\lim_{x\to 0}\left[\frac{3sen\,x-3x}{x\cdot sen\,x}\right] \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to 0}\left[\frac{3cos\,x-3}{sen\,x + x\cdot cos\,x}\right] = \frac{0}{0} \to$ Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{3\cdot cos\,x - 3}{sen\,x + x\cdot cosx}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{-3sen\,x}{2cos\,x - x\cdot sen\,x}\right] = 0$$

c) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x}{x-1} - \frac{2}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{3x\cdot\ln x - 2(x-1)}{(x-1)\ln x}\right) = \frac{0}{0} \to$ Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x\cdot\ln x - 2(x-1)}{(x-1)\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{3\ln x + 1}{\ln x + \frac{(x-1)}{x}}\right) = \infty$$

111. Página 234

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{\frac{2}{x}} = \infty\cdot e^0 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[x]{e}-1\right) \to 0\cdot\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[x]{e}-1}{\frac{1}{x}} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[x]{e}-1}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt[x]{e}}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{e} = e^0 = 1$$

c) $\lim\limits_{x\to1}(x^2-1)\cdot tg\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) \to 0\cdot\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to1} \dfrac{tg\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{1}{x^2-1}} \to \dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to1} \frac{tg\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{1}{x^2-1}} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to1} \frac{\frac{\pi}{2cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}}{\frac{-2x}{(x^2-1)^2}} = \lim_{x\to1} \frac{-\pi(x^2-1)^2}{4x\,cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \to \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to1} \frac{-\pi(x^2-1)^2}{4x cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to1} \frac{-2x\pi(x^2-1)}{2cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \pi x\,sen(\pi x)} \to \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to1} \frac{-2x\pi(x^2-1)}{2cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \pi x\,sen(\pi x)} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to1} \frac{-2\pi(3x^2-1)}{-\pi sen\,\pi x - \pi sen\,\pi x - \pi^2 x cos\,\pi x} = \frac{-4\pi}{\pi^2} = -\frac{4}{\pi}$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot arctg\left(\dfrac{2}{x}\right) \to 0\cdot\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{arctg\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{arctg\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2+4} = 2$$

112. Página 234

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot tg\,x \to 0\cdot\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{tg\,x}} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{tg\,x}} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\frac{1}{sen^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} -sen^2 x = -1$$

b) $\lim\limits_{x\to0}(arc\,sen\,x\cdot cotg\,x) \to 0\cdot\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to0}(arc\,sen\,x\cdot cotg\,x) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{arc\,sen\,x}{\frac{1}{cotg\,x}} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0} \frac{arc\,sen\,x}{tg\,x} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{cos^2 x}} = \lim_{x\to0} \frac{cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (tg\, x-1)\cdot sec\, x = (1-1)\cdot\sqrt{2} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 2} (2-x)\cdot tg\left(\frac{\pi x}{4}\right) \to 0\cdot\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to 2} \frac{tg\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\frac{1}{2-x}} \to \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{tg\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\frac{1}{2-x}} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{\pi}{4cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}}{\frac{1}{(2-x)^2}} = \lim_{x\to 2} \frac{\pi(2-x)^2}{4cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \to \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\pi(2-x)^2}{4cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to 2} \frac{4-2x}{sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \to \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{4-2x}{sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to 2} \frac{-2}{\frac{\pi}{2} cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{-4}{\pi cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \frac{4}{\pi}$$

113. Página 234

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{e^{-x}} \to \infty^0$ $\qquad \ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{e^{-x}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{e^x} \to \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{e^x} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x\ln x}}{e^x} = \frac{1}{e^x x\ln x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{e^{-x}} = e^0 = 1$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+tg\frac{1}{x}\right)^x \to 1^\infty$ $\qquad \ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+tg\frac{1}{x}\right)^x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+tg\frac{1}{x}\right) \to \infty\cdot 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+tg\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \to \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+tg\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1+tg^2\frac{1}{x}}{-x^2\left(1+tg\frac{1}{x}\right)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+tg^2\frac{1}{x}}{1+tg\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+tg\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$$

114. Página 234

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen[tg(sen\, x)]}{sen(tg\, x)} \to \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen[tg(sen\, x)]}{sen(tg\, x)} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to 0} \frac{[1+tg^2(sen\, x)]\cdot cos[tg(sen\, x)]\cdot cos\, x}{cos(tg\, x)\cdot(1+tg^2 x)} = 1$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(1+x)-sen\, x}{x\cdot sen\, x} \to \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)-sen\, x}{x\cdot sen\, x} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-cos\, x}{sen\, x + x\cos x} \to \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-cos\, x}{sen\, x + x\cos x} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2}+sen\, x}{2cos\, x - x\, sen\, x} = -\frac{1}{2}$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x\cdot\left(arc\,tg\,e^x-\frac{\pi}{2}\right)\right] \longrightarrow \infty\cdot 0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x\cdot\left(arc\,tg\,e^x-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{arc\,tg\,e^x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2x}} \longrightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{arc\,tg\,e^x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2x}} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^{2x}}}{-\frac{1}{2x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2e^x}{1+e^{2x}} \longrightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2e^x}{1+e^{2x}} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to+\infty}\frac{-(4x+2x^2)e^x}{2e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-(4x+2x^2)}{2e^x} \longrightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-(4x+2x^2)}{2e^x} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to+\infty}\frac{-(4+4x)}{2e^x} \longrightarrow \frac{\infty}{\infty} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{-(4+4x)}{2e^x} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{2e^x}=0$$

115. Página 234

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+mx}{x-sen\,x}=\frac{0}{0} \longrightarrow$ Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+mx}{x-sen\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}+m}{1-\cos x}=\frac{2+m}{0}$$

Tomando $m=-2$, el límite será del tipo $\frac{0}{0}$ y podremos continuar aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{sen\,x}=\frac{0}{0} \longrightarrow \text{Aplicamos L'Hôpital.}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{sen\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+m\cdot sen\,x-e^x}{(arc\,tg\,x)^2}=\frac{0}{0} \longrightarrow$ Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+m\cdot sen\,x-e^x}{(arc\,tg\,x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(m\cdot\cos x-e^x)(x^2+1)}{2arc\,tgx}\to\frac{m-1}{0}$$

Tomando $m=1$, el límite será del tipo $\frac{0}{0}$ y podremos continuar aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-e^x)\cdot(x^2+1)}{2arc\,tg\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)\cdot\left(2x(\cos x-e^x)-(1+x^2)\cdot(sen\,x+e^x)\right)}{2}=-\frac{1}{2}$$

116. Página 234

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-2\cos x+\mu\cdot x\ln(1+x)}{x^3}=\frac{0}{0} \longrightarrow$ Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x+\mu\cdot x\ln(1+x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2sen\,x+\mu\cdot\ln(1+x)+\frac{\mu x}{1+x}}{3x^2}=\frac{0}{0} \longrightarrow \text{Aplicamos L'Hôpital.}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2sen\,x+\mu\cdot\ln(1+x)+\frac{\mu x}{1+x}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x+\mu\frac{2+x}{(1+x)^2}}{6x}\to\frac{2+2\mu}{0}$$

Podremos continuar aplicando L'Hôpital si $\mu=-1$ (de otro modo el límite no será finito):

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-\frac{2+x}{(1+x)^2}}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2senx+\frac{x+3}{(1+x)^3}}{6}=\frac{1}{2}$$

117. Página 234

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos x}{\operatorname{sen} x^2}=\frac{0}{0}\to \text{Aplicamos L'Hôpital.}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos x}{\operatorname{sen} x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2ax+b+\operatorname{sen}x}{2x\cdot\cos x^2}\to\frac{b}{0}$$

El único valor que permite seguir aplicando L'Hôpital es $b=0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2ax+\operatorname{sen}x}{2x\cdot\cos x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2a+\cos x}{2\cdot\cos x^2-4x^2\cdot\operatorname{sen}x^2}=\frac{2a+1}{2}$$

Para que se cumpla la condición enunciada necesitamos que $1=\dfrac{2a+1}{2}\to a=\dfrac{1}{2}$.

118. Página 234

$C(t)=(t-a)^2+b,\ 9\le t\le 14$

$C'(t)=2(t-a)$

$C(t)$ tiene un mínimo en $t=12\to 2(12-a)=0$

$C(12)=15\to (12-a)^2+b=15$

Resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones, obtenemos los parámetros buscados:

$$\begin{cases}-2a+24=0\\(12-a)^2+b=15\end{cases}\to a=12,\ b=15$$

119. Página 234

a) $C(t)=8t^3-84t^2+240t,\ 1\le t\le 6$

$C'(t)=24t^2-168t+240$ $\qquad C'(t)=0\to t^2-7t+10=0\to t=2, t=5$

$C''(t)=48t-168$ $\qquad C''(2)=96-168<0$ y $C''(5)=240-168>0$

Es decir:

En $t=2$ está el máximo de $C(t)$, con valor $C(2)=208$.

En $t=5$ está el mínimo de $C(t)$, con valor $C(5)=100$.

b) Dado que la ecuación modela el gasto de energía en calefacción, lo natural sería que esta reflejase un mayor gasto en los meses de invierno y un menor gasto en los meses cercanos al verano, como efectivamente ocurre. De ahí que el máximo se dé en febrero y el mínimo en mayo.

$C(t)$ es creciente en $(1, 2)\cup(5, 6)$ y decreciente en $(2, 5)$.

120. Página 234

a) $R(t)=A\cdot t\cdot(B-t),\ 0<t\le 20$

$R'(t)=A(B-t)-At$

Máximo rendimiento para $t=10\to A(B-10)-10A=0$

$R(10)=100\to 10A(B-10)=100$

Los valores de A y B vendrán dados por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A(B-20)=0 \\ 10A(B-10)=100 \end{cases} \rightarrow A=1,\ B=20$$

Es decir, $R(t)=t(20-t)$

b) $R(t)=64 \rightarrow 64=20t-t^2 \quad -t^2+20t-64=0 \rightarrow t=4,\ t=16$

Se alcanza un rendimiento del 64 % para $t=4$ y $t=16$.

Estos valores tienen sentido ya que se encuentran ambos a la misma distancia (6 horas) del máximo del rendimiento, que se alcanzaba para $t=10$.

121. Página 234

a) Los gastos iniciales se corresponden con $G(0)$, y tienen un valor de $G(0)=100$.

Este valor representa la inversión inicial que debe realizar la empresa para comenzar su actividad comercial.

b) $B(t)=I(t)-G(t) \rightarrow B(t)=-2t^2+50t-(t^2-16t+100)=-3t^2+66t-100$

La función de los beneficios será: $B(t)=-3t^2+66t-100$

c) $B'(t)=-6t+66 \qquad B'(t)=0 \rightarrow t=11 \qquad B''(11)=-6<0 \rightarrow t=11$ es máximo.

Los beneficios son máximos para $t=11$, el undécimo año desde su fundación.

Los beneficios totales en ese año son $B(11)=-3\cdot 11^2+66\cdot 11-100=263$ miles de euros.

122. Página 235

a) $R'(t)=\dfrac{1}{100}-\dfrac{2}{1000}t \qquad R'(t)=0 \rightarrow t=5$

$R''(t)=-\dfrac{2}{1000}<0 \qquad R''(5)<0 \rightarrow t=5$ es un máximo.

La rentabilidad $R(t)$ será máxima para $t=5$ años.

b) $R(5)=3+\dfrac{1}{100}5-\dfrac{1}{1000}5^2=3+\dfrac{1}{20}-\dfrac{1}{40}=3+\dfrac{1}{40}=\dfrac{121}{40}=3{,}025\,\%$

123. Página 235

x: largo del escenario $\qquad$ y: ancho del escenario

$A_{\text{Escenario}}=100 \rightarrow xy=100 \rightarrow y=\dfrac{100}{x}$

La función que debemos minimizar es: $P(x)=2\left(x+\dfrac{100}{x}\right)$

$P'(x)=2-\dfrac{200}{x^2} \qquad P'(x)=0 \rightarrow 2=\dfrac{200}{x^2} \rightarrow x=\pm 10$ La solución válida es $x=10$.

$P''(x)=\dfrac{400}{x^3} \rightarrow P''(10)>0 \rightarrow$ En $x=10$ se alcanza el mínimo.

Por tanto, las dimensiones que debe tener el escenario para cumplir las especificaciones dadas son:

Largo = 10 m $\qquad$ Ancho = 10 m

Es decir, el escenario debe tener forma cuadrada.

124. Página 235

x : longitud de los lados iguales de tela metálica

y: longitud del lado de tela metálica que mide igual que la pared

Como disponemos de 1 000 metros de tela metálica:

$$2x + y = 1000 \longrightarrow y = 1000 - 2x$$

La función que queremos maximizar es:

$$A(x) = x(1000 - 2x) = 1000x - 2x^2$$

$A'(x) = 1000 - 4x$ $\qquad$ $A'(x) = 0 \longrightarrow 1000 = 4x \longrightarrow x = 250$

$A''(250) = -4 < 0 \longrightarrow$ En $x = 250$ se alcanza el máximo.

Por tanto, la cerca estará construida por la pared y tres paredes metálicas de 250, 250 y 500 metros de longitud, respectivamente.

Área: $250 \cdot 500 = 125000$ metros cuadrados.

125. Página 235

x: largo de la barra en metros $\qquad$ y: ancho de la barra en metros

$P = 2(x + y) = 30 \rightarrow x + y = 15 \rightarrow x = 15 - y$

$A_{\text{interor}} = (y - 1) \cdot (x - 1) = (y - 1) \cdot (14 - y)$

$A'_{\text{Interior}} = 15 - 2y$ $\qquad$ $A'_{\text{Interior}} = 0 \rightarrow 15 - 2y = 0 \rightarrow y = \frac{15}{2}$

Por tanto, la barra debe ser de forma cuadrada, con sus lados de $\frac{15}{2}$ metros.

126. Página 235

x: número de alarmas de tipo A $\qquad$ y: número de alarmas de tipo B

Como se van a colocar 9 alarmas, se tiene que $x + y = 9 \rightarrow y = 9 - x$.

La función que se quiere maximizar es:

$$S(x, y) = \frac{xy^2}{10} \longrightarrow S(x) = \frac{x(9 - x)^2}{10}$$

$S'(x) = \frac{(9 - x)^2 - 2x(9 - x)}{10} = \frac{3x^2 - 36x + 81}{10}$ $\qquad$ $S'(x) = 0 \longrightarrow x = 3, x = 9$

$S''(x) = \frac{3x - 18}{5} \longrightarrow S''(3) < 0 \longrightarrow$ En $x = 3$ se alcanza un máximo.

$\longrightarrow S''(9) > 0 \longrightarrow$ En $x = 9$ se alcanza un mínimo.

Por tanto, la seguridad será máxima cuando se instalen 3 alarmas de tipo A y 6 alarmas de tipo B.

127. Página 235

Ángulo de 90º $\rightarrow b^2 = 2c^2 \rightarrow c = \frac{b\sqrt{2}}{2}$

Perímetro = 6 $\rightarrow 2a + b + 2c = 6 \rightarrow 2a + b(1+\sqrt{2}) = 6 \rightarrow a = \frac{6 - b(1+\sqrt{2})}{2}$

h : altura del triángulo.

Por el teorema de la altura: $h^2 = \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \rightarrow h = \frac{b}{2}$

Para que haya mayor luminosidad, el área de la ventana debe ser máxima. Es decir, la función que queremos optimizar es:

$$A(a,b,h) = a \cdot b + \frac{b \cdot h}{2} \rightarrow A(b) = \frac{6 - b \cdot (1+\sqrt{2})}{2} \cdot b + \frac{b \cdot \frac{b}{2}}{2} = \frac{12b - b^2(1+2\sqrt{2})}{4}$$

$A'(b) = 3 - \frac{b}{2}\left(1+2\sqrt{2}\right)$ $\qquad$ $A'(b) = 0 \rightarrow b = \frac{6}{1+2\sqrt{2}}$

$A''(b) = -\frac{1}{2} - \sqrt{2} < 0 \rightarrow b = \frac{6}{1+2\sqrt{2}}$ es el máximo.

Por tanto, las dimensiones de la ventana deben ser:

$a = \frac{12 - 3\sqrt{2}}{7}$ metros $\qquad$ $b = \frac{6}{1+2\sqrt{2}}$ metros $\qquad$ $c = \frac{12 - 3\sqrt{2}}{7}$ metros

128. Página 235

x: altura de la ventana $\qquad$ y: ancho de la ventana

Área = 1 $\rightarrow xy = 1 \rightarrow y = \frac{1}{x}$

La función que queremos minimizar es: $P(x) = 2(x + \frac{1}{x})$

$P'(x) = 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$ $\qquad$ $P'(x) = 0 \rightarrow 1 = \frac{1}{x^2} \rightarrow x = \pm 1$ La solución válida es $x = 1$.

$P''(x) = \frac{4}{x^3} \rightarrow P''(1) > 0 \rightarrow$ En $x = 1$ se alcanza el mínimo.

Por tanto, la ventana debe ser un cuadrado de 1 metro de lado para que se minimice el coste del marco.

129. Página 235

r: radio de la base $\qquad$ h: altura de la lata

Volumen = 10 dm³ $\rightarrow \pi r^2 h = 10 \rightarrow h = \frac{10}{\pi r^2}$

La función que queremos minimizar es: $A(r,h) = \pi r^2 + 2\pi rh \xrightarrow{h=\frac{10}{\pi r^2}} A(r) = \pi r^2 + \frac{20}{r}$

$A'(r) = 2\pi r - \frac{20}{r^2}$ $\qquad$ $A'(r) = 0 \rightarrow \pi r^3 = 10 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$

$A''(r) = 2\pi + \frac{40}{r^3} \rightarrow A''\left(\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\right) > 0 \rightarrow$ En $r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$ se alcanza el mínimo.

$$h=\frac{10}{\pi r^2}\xrightarrow{r=\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}}h=\frac{10}{\pi\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\right)^2}\xrightarrow{\text{Racionalizando}}h=\frac{10}{\pi\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}}{\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}}=\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$$

Por tanto, las dimensiones de la lata deben ser:

$$r=\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\text{ dm}\qquad\qquad h=\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\text{ dm}$$

130. Página 235

x: lado de la base $\qquad$ h: altura del depósito

Volumen $=20\to x^2h=20\to h=\frac{20}{x^2}$

La función que queremos minimizar es:

$$C(x,h)=4xh+2x^2\xrightarrow{h=\frac{20}{x^2}}C(x)=\frac{80}{x}+2x^2$$

$C'(x)=-\frac{80}{x^2}+4x\qquad C'(x)=0\to x^3=20\to x=\sqrt[3]{20}$

$C''(x)=\frac{160}{x^3}+4\to C''(\sqrt[3]{20})=\frac{160}{20}+4=12>0\to$ En $x=\sqrt[3]{20}$ se alcanza el mínimo.

Por tanto, las dimensiones deben ser:

$$x=\sqrt[3]{20}\text{ metros}\qquad\qquad h=\frac{20}{\left(\sqrt[3]{20}\right)^2}=\sqrt[3]{20}\text{ metros}$$

Y el coste mínimo es: $C\left(\sqrt[3]{20}\right)=\frac{80}{\sqrt[3]{20}}+2\left(\sqrt[3]{20}\right)^2=\frac{120}{\sqrt[3]{20}}=12\sqrt[3]{50}$ **€.**

131. Página 235

r: radio de las semiesferas y del cilindro $\qquad$ h: altura de la zona cilíndrica

Volumen $=10\pi\to\pi r^2h+\frac{4}{3}\pi r^3=10\pi\to h=\frac{10}{r^2}-\frac{4}{3}r$

La función que queremos minimizar es:

$$C(r,h)=20\cdot4\pi r^2+10\cdot2\pi rh=80\pi r^2+20\pi r\left(\frac{10}{r^2}-\frac{4}{3}r\right)$$

$C'(r)=\frac{320\pi r}{3}-\frac{200\pi}{r^2}\qquad\qquad C'(r)=0\to r=\sqrt[3]{\frac{15}{8}}$

$C''(r)=\frac{160\cdot2}{3}\pi+\frac{400\pi}{r^3}\qquad\qquad C''\left(\sqrt[3]{\frac{15}{8}}\right)>0$

Por tanto, en $r=\sqrt[3]{\frac{15}{8}}$ metros se alcanza un mínimo.

Las dimensiones que minimizan el coste son:

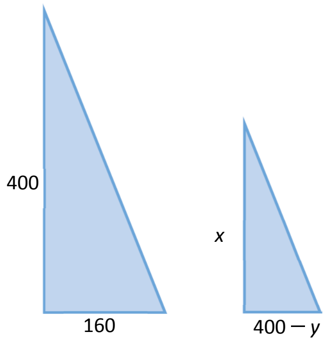
$$r=\sqrt[3]{\frac{15}{8}}\text{ m}\qquad\qquad h=2\sqrt[3]{15}\text{ m}$$

132. Página 235

x: altura en metros del campo para maíz

y: ancho en metros del campo para maíz

Por el teorema de Tales:



$$\frac{400}{160}=\frac{x}{400-y}\rightarrow y=\frac{2000-2x}{5}$$

La función que queremos maximizar es:

$$B(x,y)=0{,}12xy+0{,}10\cdot 240\cdot(400-x)\xrightarrow{y=\frac{2000-2x}{5}}B(x)=24x-\frac{6}{125}x^2+9600$$

$$B'(x)=24-\frac{12}{125}x^2 \qquad B'(x)=0\rightarrow x=250$$

$$B''(x)=-\frac{12}{125} \qquad B''(250)=-\frac{12}{125}<0$$

Por tanto, en $x=250$ metros se alcanza el máximo.

Así, el campo de maíz debe medir 250 metros de alto por 300 metros de ancho; y el campo de trigo, 150 metros de alto por 240 metros de ancho.

El beneficio máximo es:

$$B(x)=24x-\frac{6}{125}x^2+9600\xrightarrow{x=250}B(250)=12600\text{ €}$$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 236

Superficie de la lata ideal: $S_{\text{Ideal}}=2\pi\cdot 3{,}75\cdot 7{,}5+2\pi\cdot 3{,}75^2=265{,}07$ cm²

Superficie de la lata común: $S_{\text{Común}}=2\pi\cdot 3{,}25\cdot 11{,}5+2\pi\cdot 3{,}25^2=301{,}20$ cm²

$S_C-S_I=36{,}13$ cm²

2. Página 236

No pueden existir otras medidas para latas cilíndricas. Las únicas dimensiones que minimizan la superficie son las obtenidas anteriormente.

3. Página 236

Depende de la lata. Habría que comprobarlo teniendo en cuenta los diferentes tipos de latas que se encuentran en el mercado.

4. Página 236

Coste por lata:

$$C_{\text{Ideal}}=\frac{265{,}07\cdot 50}{10000}=1{,}325 \text{ céntimos}$$

$$C_{\text{Normal}}=\frac{301{,}20\cdot 50}{10\,000}=1{,}506 \text{ céntimos}$$