Representación de funciones

10

ACTIVIDADES

1. Página 238

a) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$ Im $f = [0, +\infty)$ b) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$ Im $f = [-1, 1]$

2. Página 238

a) $x^2 - 3 > 0 \rightarrow (x+\sqrt{3})\cdot(x-\sqrt{3}) > 0 \rightarrow \text{Dom}\, f = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$

b) $\sqrt{x+3} + 2x = 0 \rightarrow \sqrt{x+3} = -2x \rightarrow x+3 = 4x^2 \rightarrow 4x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow \sqrt{1+3} + 2 \neq 0 \\ x = -\dfrac{3}{4} \rightarrow \sqrt{-\dfrac{3}{4}+3} + 2\left(-\dfrac{3}{4}\right) = 0 \end{cases}$

$x + 3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \rightarrow \text{Dom}\, f = \left[-3, -\dfrac{3}{4}\right) \cup \left(-\dfrac{3}{4}, +\infty\right)$

3. Página 239

a) $9 - 4x^2 \geq 0 \rightarrow \left(\dfrac{3}{2} - x\right)\left(\dfrac{3}{2} + x\right) \geq 0 \rightarrow x \in \left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right] \rightarrow \text{Dom}\, f = \left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$

- Cortes con el eje X:

  $\sqrt{9-4x^2} = 0 \rightarrow 9 - 4x^2 = 0 \rightarrow (3+2x)(3-2x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \rightarrow \left(-\dfrac{3}{2}, 0\right) \\ x = \dfrac{3}{2} \rightarrow \left(\dfrac{3}{2}, 0\right) \end{cases}$

- Corte con el eje Y:

  $x = 0 \rightarrow f(0) = \sqrt{9-0} = 3 \rightarrow (0, 3)$

- La función es positiva en todo su dominio, ya que la raíz cuadrada de un número mayor o igual que cero es siempre mayor o igual que cero.

b) $f(x) = cotg\ x = \dfrac{\cos x}{sen\ x} \xrightarrow{sen\ x \neq 0} \rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \rightarrow \text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

- Cortes con el eje X:

  $cotg\ x = \dfrac{\cos x}{sen\ x} = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

- Corte con el eje Y:

  La función no está definida para $x = 0$; por tanto, no corta el eje Y.

- La función es positiva en los intervalos de la forma: $\left(k\pi, k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

  La función es negativa en los intervalos de la forma: $\left(k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k\pi + \pi\right)$.

4. Página 239

a) Por la actividad 2: $\text{Dom}\, f = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$

- Cortes con el eje *X*: $\ln(x^2-3) = 0 \rightarrow x^2 - 3 = 1 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \rightarrow (2,0) \\ x = -2 \rightarrow (-2,0) \end{cases}$

- Corte con el eje *Y*:

  La función no está definida para $x = 0$; por tanto, no corta el eje *Y*.

- $f(-3) > 0$ $\quad f(-1{,}8) < 0$ $\quad f(1{,}8) < 0$ $\quad f(3) > 0$

  Entonces, la función es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y negativa en $\left(-2, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, 2\right)$.

b) Por la actividad 2: $\text{Dom}\, f = \left[-3, -\frac{3}{4}\right) \cup \left(-\frac{3}{4}, +\infty\right)$

- Cortes con el eje *X*:

  $$f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}+2x} = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow (-1,0) \\ x = 1 \rightarrow (1,0) \end{cases}$$

- Corte con el eje *Y*:

  $$x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

- $f(-2) < 0$, $f\left(-\frac{4}{5}\right) > 0$, $f(0) < 0$, $f(2) > 0$

  Entonces, la función es positiva en $\left(-1, -\frac{3}{4}\right) \cup (1, +\infty)$ y es negativa en $[-3, -1) \cup \left(-\frac{3}{4}, 1\right)$.

5. Página 240

a) $f(-x) = \ln\left((-x)^2 - 4\right) + 2 = \ln\left(x^2 - 4\right) + 2 = f(x) \rightarrow$ $f(x)$ es simétrica respecto del eje *Y*.

b) $f(-x) = 3\,sen(-x) = 3(-sen\, x) = -3\, sen\, x = -f(x) \rightarrow$ $f(x)$ es simétrica respecto del origen de coordenadas.

c) $f(-x) = \sqrt{2(-x)^2 - 25} = \sqrt{2x^2 - 25} = f(x) \rightarrow$ $f(x)$ es simétrica respecto del eje *Y*.

d) $f(-x) = -(-x)^2 - 27 = x^2 - 27 = f(x) \rightarrow$ $f(x)$ es simétrica respecto del eje *Y*.

6. Página 240

a) $f(x + k\pi) = 1 - 5\cos\left(2(x + k\pi)\right) = 1 - 5\cos(2x + 2k\pi) = 1 - 5[\cos 2x \cos 2k\pi - sen\, 2x\; sen\, 2k\pi] =$

$= 1 - 5[\cos 2x \cdot 1 - sen\, 2x \cdot 0] = 1 - 5\cos 2x = f(x)$

La función $f(x)$ es periódica de período π.

b) $f\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = tg\left[2\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\right] = tg(2x + k\pi) = \frac{tg\, 2x + tg\, k\pi}{1 - tg\, 2x \cdot tg\, k\pi} = \frac{tg\, 2x + 0}{1 - tg\, 2x \cdot 0} = tg\, 2x$

La función $f(x)$ es periódica de período $\frac{\pi}{2}$.

7. Página 240

Sí, es una función periódica con período la unidad.

8. Página 241

a) Respuesta abierta. Por ejemplo: $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)(x+1)}=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo: $f(x)=\dfrac{1}{x(x+2)}=\dfrac{1}{x^2+2x}$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo: $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}$

9. Página 241

a) $x^3-4x=0\rightarrow x\left(x^2-4\right)=0\rightarrow x(x+2)(x-2)=0\rightarrow \mathrm{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x^3-4x}=\dfrac{1}{0}=\infty\rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=0$.

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+1}{x^3-4x}=\dfrac{-1}{0}=\infty\rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=-2$.

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x^3-4x}=\dfrac{1}{3}=\infty\rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=2$.

b) $x^2-16>0\rightarrow x^2-16=0\rightarrow x=\pm 4\xrightarrow{x=0}0^2-16<0\rightarrow \mathrm{Dom}\, f=(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to -4^-}\log(x^2-16)=-\infty\rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=-4$.

$\lim\limits_{x\to -4^+}\log(x^2-16)=-\infty\rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=4$.

c) $9-x^2>0\rightarrow(3+x)(3-x)>0\rightarrow \mathrm{Dom}\, f=(-3,3)$

$\lim\limits_{x\to 3^-}\left(1-\ln\left(9-x^2\right)\right)=+\infty\rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=3$.

$\lim\limits_{x\to -3^+}\left(1-\ln\left(9-x^2\right)\right)=+\infty\rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=-3$.

10. Página 242

a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+x^2-1}{x^3+3x}=2\\[2ex] \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+x^2-1}{x^3+3x}=2\end{array}\right\}\rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y=2$.

b) $\left.\begin{array}{l}\text{No existe } \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln x}{2x}\\[2ex] \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{2}=0\end{array}\right\}\rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y=0$.

11. Página 242

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+3}} = 1 \to$ Asíntota horizontal en $y = 1$.

- Si $x \to +\infty$, $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+3}} - 1 < 0 \to f(x)$ está por debajo de la asíntota.
- Si $x \to -\infty$, $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+3}} - 1 < 0 \to f(x)$ está por debajo de la asíntota.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = 0 \to$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

- Si $x \to +\infty$, $\dfrac{x}{x^2-1} - 0 > 0 \to f(x)$ está por encima de la asíntota.
- Si $x \to -\infty$, $\dfrac{x}{x^2-1} - 0 < 0 \to f(x)$ está por debajo de la asíntota.

12. Página 243

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x\left(x^2+3\right)} = 0 \to f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.

b) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x\left(x^2+3\right)} = 1 \neq 0 \to m = 1 \\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+3} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - x^3 - 3x}{x^2+3} = 0 \to n = 0 \end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota oblicua en } y = x.$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2+1}{x\left(2x^2-x\right)} = 0 \to f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.

13. Página 243

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2}{x\left(x^2+2\right)} = 0 \to f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+1}{x\left(x^2+x\right)} = \infty \to f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.

c) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x \cdot x} = 1 \neq 0 \to m = 1 \\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+1} - x^2}{x} = 0 \to n = 0 \end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota horizontal en } y = x.$$

$$f(x) - (mx + n) = \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x} - x = \dfrac{\sqrt{x^4+1} - x^2}{x}$$

- Si $x \to +\infty$, $\dfrac{\sqrt{x^4+1} - x^2}{x} > 0 \to f(x)$ está por encima de la asíntota.
- Si $x \to -\infty$, $\dfrac{\sqrt{x^4+1} - x^2}{x} < 0 \to f(x)$ está por debajo de la asíntota.

14. Página 244

a) $f(x)$ es polinómica $\longrightarrow$ $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$ y no tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-x^3+4}{2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-x^3+4}{2}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-x^3+4}{2x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-x^3+4}{2x}=-\infty\end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Por tanto, la función tiene ramas parabólicas cuando $x \longrightarrow +\infty$ y $x \longrightarrow -\infty$.

b) $\text{Dom}\, g = (0, +\infty)$

$$\lim_{x\to0^+}(x\ln x)\to 0\cdot\infty\to\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0\to \text{No tiene asíntotas verticales.}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x\ln x)=+\infty\to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Por tanto, la función tiene una rama parabólica cuando $x \longrightarrow +\infty$.

15. Página 244

a) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{3\}$

$$\lim_{x\to3}\frac{2x^2}{x-3}=\infty\to \text{Tiene asíntota vertical en } x=3.$$

$$\lim_{x\to3^-}\frac{2x^2}{x-3}=-\infty \qquad \lim_{x\to3^+}\frac{2x^2}{x-3}=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x-3}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x-3}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x(x-3)}=2\to m=2\\ \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-2x^2+6x}{x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x}{x-3}=6\to n=6\end{array}\right\}\to y=2x+6 \text{ es asíntota oblicua de } f(x).$$

Por lo tanto, $f(x)$ no tiene ramas parabólicas.

b) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} \to$ La función no tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[(1-x)\cdot e^x\right]\to+\infty\cdot0\to\lim_{x\to-\infty}\left[(1-x)\cdot e^x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[(-1)\cdot e^x\right]=0\to y=0 \text{ es una asíntota horizontal de } f(x).$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(1-x)\cdot e^x\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-x)\cdot e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(-e^x\right)=-\infty\to \text{ La función no tiene asíntotas oblicuas.}$$

Por lo tanto, $f(x)$ no tiene ramas parabólicas.

16. Página 245

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x^2+2x=0 \rightarrow x=0;\ x=-2$$

$f'(-3) > 0$ $f(-1,5) < 0$ $f(-0,5) < 0$ $f(1) > 0$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y es decreciente en el intervalo $(-2,-1)\cup(-1,0)$.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow 4x=0 \rightarrow x=0$$

$f'(-1) < 0$ $f(1) > 0$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y es creciente en el intervalo $(0, +\infty)$.

17. Página 245

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = x\,e^x + \frac{x^2 e^x}{2} = \frac{x\,e^x(2+x)}{2} = 0 \rightarrow x=0;\ x=-2$$

$f'(-3) > 0$ $f'(-1) < 0$ $f(1) > 0$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y es decreciente en el intervalo $(-2, 0)$.

La función crece a la izquierda del -2 y decrece a la derecha $\rightarrow x = -2$ máximo:

$f(-2) = \frac{2}{e^2} \rightarrow P\left(-2, \frac{2}{e^2}\right)$ es un máximo.

La función decrece a la izquierda del 0 y crece a la derecha $\rightarrow x = 0$ mínimo:

$f(0) = 0 \rightarrow Q(0, 0)$ es un mínimo.

b) $\text{Dom } f = (0, +\infty)$

$$f'(x) = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{e}$$

$f'\left(\frac{1}{3}\right) < 0$ $f'(1) > 0$

La función es decreciente en el intervalo $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ y creciente en el intervalo $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

La función decrece a la izquierda del $\frac{1}{e}$ y crece a la derecha $\rightarrow$ $x = \frac{1}{e}$ mínimo:

$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \rightarrow P\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$ es un mínimo.

18. Página 246

a) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (2x+2)(x^2+2x)}{(x+1)^4} = \frac{2x+2}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3} \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$$ No tiene puntos de inflexión.

$f''(-2) < 0 \longrightarrow f(x)$ es convexa en el intervalo $(-\infty, -1)$.

$f''(0) > 0 \longrightarrow f(x)$ es cóncava en el intervalo $(-1, +\infty)$.

b) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4(x^2+1)^2 - 4x(4x^3+4x)}{(x^2+1)^4} = \frac{-12x^4 - 8x^2 + 4}{(x^2+1)^4} = \frac{(-12x^2+4)(x^2+1)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3} = 0 \rightarrow -12x^2 + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$f''(-1) < 0$ $\qquad$ $f''(0) > 0$ $\qquad$ $f''(1) < 0$

$f(x)$ es convexa en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$.

$f(x)$ es cóncava en el intervalo $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2} \rightarrow P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$ es punto de inflexión. $\qquad$ $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2} \rightarrow Q\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$ es punto de inflexión.

19. Página 246

a) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = x\,e^x + \frac{x^2\,e^x}{2} = \frac{x\,e^x(2+x)}{2}$$

$$f''(x) = \frac{(e^x + x\,e^x)(2+x) + x\,e^x}{2} = \frac{2\,e^x + x\,e^x + 2x\,e^x + x^2\,e^x + xe^x}{2} = \frac{e^x(x^2+4x+2)}{2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$$

$f''(-4) > 0$ $\qquad$ $f''(-1) < 0$ $\qquad$ $f''(0) > 0$

La función $f(x)$ es cóncava en el intervalo $\left(-\infty, -2-\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+\sqrt{2}, +\infty\right)$.

La función $f(x)$ es convexa en el intervalo $\left(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right)$.

$f\left(-2-\sqrt{2}\right) = \left(3+2\sqrt{2}\right)e^{-2-\sqrt{2}} \rightarrow P\left(-2-\sqrt{2}, \left(3+2\sqrt{2}\right)e^{-2-\sqrt{2}}\right)$ es punto de inflexión.

$f\left(-2+\sqrt{2}\right) = \left(3-2\sqrt{2}\right)e^{-2+\sqrt{2}} \rightarrow Q\left(-2+\sqrt{2}, \left(3-2\sqrt{2}\right)e^{-2+\sqrt{2}}\right)$ es punto de inflexión.

b) $\text{Dom}\, f = (0, +\infty)$

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$f''(x) = \frac{1}{x} \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función no tiene puntos de inflexión.

La función $f(x)$ es cóncava o convexa en todo su dominio. $f''(e) > 0 \rightarrow$ La función es cóncava en $(0, +\infty)$.

20. Página 247

a) • $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow 2x^3 - 6x = 2x\left(x^2 - 3\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow$ Corta al eje X en $(0, 0)$, $\left(\sqrt{3}, 0\right)$ y $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow$ Corta al eje Y $(0, 0)$.

• Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(2x^3 - 6x\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2x^3 - 6x\right) = +\infty$$

• Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En el intervalo $(-1, 1)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

La función crece a la izquierda de $x = -1$ y decrece a la derecha $\rightarrow x = -1$ es un máximo:

$f(-1) = 4 \rightarrow (-1, 4)$ es un máximo.

La función decrece a la izquierda de $x = 1$ y crece a la derecha $\rightarrow x = 1$ es un mínimo:

$f(1) = -4 \rightarrow (1, -4)$ es un mínimo.

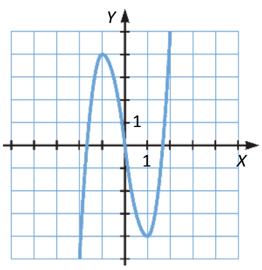
• Concavidad y convexidad:

$$f''(x) = 12x = 0 \rightarrow x = 0$$

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

La función es convexa a la izquierda de $x = 0$ y cóncava a la derecha $\rightarrow$ En $x = 0$ hay un punto de inflexión $\rightarrow (0, 0)$ es punto de inflexión.



b) • $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$$f(x) = 0 \rightarrow 8x^2 - x^4 = x^2(8 - x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \text{ Corta al eje } X \text{ en } (0,0),\ (2\sqrt{2},0) \text{ y } (-2\sqrt{2},0).$$

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0,0)$

- Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (8x^2 - x^4) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (8x^2 - x^4) = -\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = 16x - 4x^3 = 4x(4 - x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

En $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

La función crece a la izquierda de $x = -2$ y decrece a la derecha $\rightarrow x = -2$ es un máximo:

$f(-2) = 16 \rightarrow (-2, 16)$ es un máximo.

La función decrece a la izquierda de $x = 0$ y crece a la derecha $\rightarrow x = 0$ es un mínimo:

$f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es un mínimo.

La función crece a la izquierda de $x = 2$ y decrece a la derecha $\rightarrow x = 2$ es un máximo:

$f(2) = 16 \rightarrow (2, 16)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

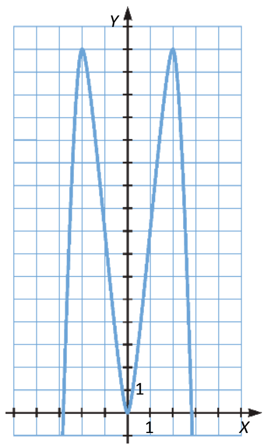
$$f''(x) = -12x^2 + 16 = 4(4 - 3x^2) = 0 \rightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

En $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

En el intervalo $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

La función es convexa a la izquierda de $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ y cóncava a la derecha $\rightarrow$ En $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ hay punto de inflexión $\rightarrow \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{80}{9}\right)$ es punto de inflexión.

La función es cóncava a la izquierda de $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ y convexa a la derecha $\rightarrow$ En $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ hay punto de inflexión $\rightarrow \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{80}{9}\right)$ es punto de inflexión.



21. Página 247

a) • $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow 6x^5 - 12x^3 - 4x = 2x\left(3x^4 - 6x^2 - 2\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1{,}51 \end{cases} \rightarrow$ Corta al eje X en $(0, 0)$, $(1{,}51; 0)$ y $(-1{,}51; 0)$.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow$ Corta al eje Y en $(0, 0)$.

- Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(6x^5 - 12x^3 - 4x\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(6x^5 - 12x^3 - 4x\right) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = 30x^4 - 36x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 1{,}14$

En $(-\infty; -1{,}14) \cup (1{,}14, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(-1{,}14; 1{,}14)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

La función crece a la izquierda de $x = -1{,}14$ y decrece a la derecha $\rightarrow x = -1{,}14$ es un máximo:

$f(-1{,}14) = 10{,}79 \rightarrow (-1{,}14; 10{,}79)$ es un máximo.

La función decrece a la izquierda de $x = 1{,}14$ y crece a la derecha $\rightarrow x = 1{,}14$ es un mínimo:

$f(1{,}14) = -10{,}79 \rightarrow (1{,}14; -10, 79)$ es un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

$f''(x) = 120x^3 - 72x = 24x\left(5x^2 - 3\right) \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 0{,}77 \end{cases}$

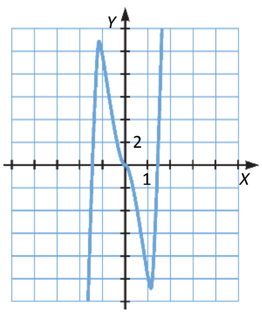
En $(-\infty; -0{,}77) \cup (0; 0{,}77)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

En $(-0{,}77; 0) \cup (0{,}77, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

La función es convexa a la izquierda de $x = -0{,}77$ y cóncava a la derecha $\rightarrow$ En $x = -0{,}77$ hay punto de inflexión $\rightarrow (-0{,}77; 6{,}93)$ es punto de inflexión.

La función es cóncava a la izquierda de $x = 0$ y convexa a la derecha $\rightarrow$ En $x = 0$ hay punto de inflexión $\rightarrow (0, 0)$ es punto de inflexión.

La función es convexa a la izquierda de $x = 0{,}77$ y cóncava a la derecha $\rightarrow$ En $x = 0{,}77$ hay punto de inflexión $\rightarrow (0{,}77; -6{,}93)$ es punto de inflexión.



b) • $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$$f(x) = 0 \to x^3 + x^4 = x^3(1+x) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \to \text{ Corta al eje } X \text{ en } (0, 0) \text{ y } (-1, 0)$$

$x = 0 \to f(0) = 0 \to$ Corta al eje Y en (0, 0).

• Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3 + x^4) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3 + x^4) = +\infty$$

• Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = 3x^2 + 4x^3 = x^2(3+4x) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

En $\left(-\frac{3}{4}, 0\right) \cup (0, +\infty)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

En el intervalo $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

La función decrece a la izquierda de $x = -\frac{3}{4}$ y crece a la derecha $\to$ $x = -\frac{3}{4}$ es un mínimo:

$f\left(-\frac{3}{4}\right) = -0{,}11 \to \left(-\frac{3}{4}, -0{,}11\right)$ es un mínimo.

• Concavidad y convexidad:

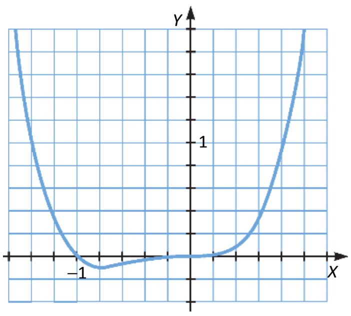
$$f''(x) = 6x + 12x^2 = 6x(1+2x) \to \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

En $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$, $f''(x) > 0 \to f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $f''(x) < 0 \to f(x)$ es convexa.

La función es cóncava a la izquierda de $x = -\frac{1}{2}$ y convexa a la derecha $\to$ En $x = -\frac{1}{2}$ hay punto de inflexión $\to$ $\left(-\frac{1}{2}; -0{,}06\right)$ es punto de inflexión.

La función es convexa a la izquierda de $x = 0$ y cóncava a la derecha $\to$ En $x = 0$ punto de inflexión $\to$ (0, 0) es punto de inflexión.



22. Página 248

a) • $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2-5}{x} = 0 \rightarrow x^2 - 5 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{5} \rightarrow$ Corta al eje X en $\left(-\sqrt{5}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{5}, 0\right)$.

No corta al eje Y porque en $x = 0$ no está definida.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-5}{x} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 0$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to -\infty} f(x) &= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-5}{x} = -\infty \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) &= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-5}{x} = +\infty \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-5}{x^2} = 1 \rightarrow m = 1 \\ &\lim_{x\to \infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-5}{x} = 0 \rightarrow n = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y = x.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

• Crecimiento y decrecimiento:

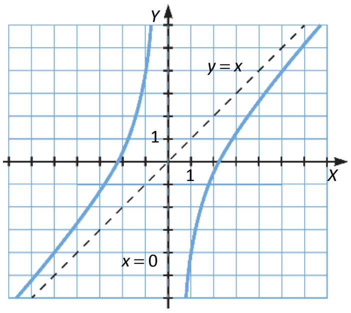
$f'(x) = \dfrac{x^2+5}{x^2} > 0 \rightarrow$ La función $f(x)$ es creciente en su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

• Concavidad y convexidad:

$f''(x) = -\dfrac{10}{x^3} \neq 0 \rightarrow$ La función $f(x)$ no presenta puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.



b) • $x^3 + x = x\left(x^2+1\right) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Dom } g = \mathbb{R} - \{0\}$

• Cortes con los ejes:

$g(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{x^3+x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ No corta al eje X porque no está definida para $x = 0$.

No corta al eje Y porque la función no está definida para $x = 0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^3+x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x^2+1} = 0 \to \text{No tiene asíntotas verticales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x^3+x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^3+x} = 0 \end{array}\right\} \to \text{Asíntota horizontal en } y = 0.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$g'(x) = \frac{-x^4+x^2}{\left(x^3+x\right)^2} = \frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \to x = \pm 1$$

En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $g'(x) < 0 \to g(x)$ es decreciente.

En $(-1, 0) \cup (0, 1)$, $g'(x) > 0 \to g(x)$ es creciente.

$x = -1 \to g(-1) = -\dfrac{1}{2} \to \left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$ es un mínimo.

$x = 1 \to g(1) = \dfrac{1}{2} \to \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

$$g''(x) = \frac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3} = 0 \to 2x^3 - 6x = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

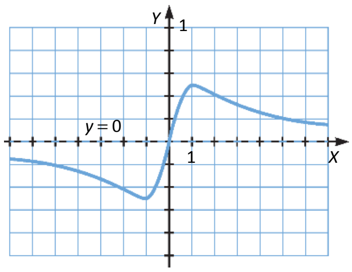
En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$, $g''(x) < 0 \to g(x)$ es convexa.

En $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$, $g''(x) > 0 \to g(x)$ es cóncava.

$x = -\sqrt{3} \to g\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} \to \left(-\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ es punto de inflexión.

$x = 0 \to g(0) = 0 \to (0, 0)$ es punto de inflexión.

$x = \sqrt{3} \to g\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \to \left(\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ es punto de inflexión.



23. Página 248

a) • $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{0\}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \to \dfrac{x^3 - 3}{x} = 0 \to x^3 - 3 = 0 \to x = \sqrt[3]{3} \to \left(\sqrt[3]{3}, 0\right)$ corta al eje X.

No tiene corte con el eje Y porque la función no está definida para $x = 0$.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - 3}{x} = \infty \to$ Asíntota vertical en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3 - 3}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 - 3}{x} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3 - 3}{x^2} = \infty \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3 - 3}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 - 3}{x} = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = \dfrac{2x^3 + 3}{x^2} = 0 \to 2x^3 + 3 = 0 \to x = \sqrt[3]{-\dfrac{3}{2}} \simeq -1{,}14$

En el intervalo $\left(-\infty, \sqrt[3]{-\dfrac{3}{2}}\right)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

En $\left(\sqrt[3]{-\dfrac{3}{2}}, 0\right) \cup (0, +\infty)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

$x = \sqrt[3]{-\dfrac{3}{2}} \to f\left(\sqrt[3]{-\dfrac{3}{2}}\right) = \dfrac{3\sqrt[3]{12^2}}{4} \simeq 3{,}93 \to \left(\sqrt[3]{-\dfrac{3}{2}}, \dfrac{3\sqrt[3]{12^2}}{4}\right)$ es un mínimo.

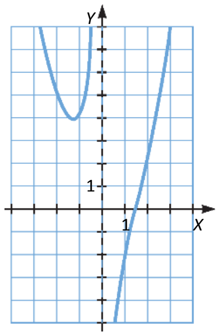
• Concavidad y convexidad:

$f''(x) = \dfrac{2x^3 - 6}{x^3} = 0 \to 2x^3 - 6 = 0 \to x = \sqrt[3]{3}$

En $(-\infty, 0) \cup \left(\sqrt[3]{3}, +\infty\right)$, $f''(x) > 0 \to f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $\left(0, \sqrt[3]{3}\right)$, $f''(x) < 0 \to f(x)$ es convexa.

$x = \sqrt[3]{3} \to f\left(\sqrt[3]{3}\right) = 0 \to \left(\sqrt[3]{3}, 0\right)$ es punto de inflexión.



b) • $\text{Dom}\, g = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con los ejes:

  $$g(x) = 0 \rightarrow \frac{x^4 - 3x}{x} = 0 \rightarrow x^4 - 3x = 0 \rightarrow x\left(x^3 - 3\right) = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{3} \rightarrow \left(\sqrt[3]{3}, 0\right) \text{ corta el eje } X.$$

  No tiene corte con el eje Y porque la función no está definida para $x = 0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^4 - 3x}{x} \rightarrow \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to 0} \frac{4x^3 - 3}{1} = -3 \rightarrow \text{No tiene asíntotas verticales.}$$

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4 - 3x}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - 3x}{x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

  $$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - 3x}{x^2} = \infty \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

  Tiene ramas parabólicas:

  $$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = +\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $$g'(x) = 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ es creciente.

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ es creciente.

  No presenta máximos ni mínimos, ya que la función no está definida en $x = 0$.

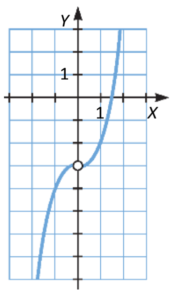
- Concavidad y convexidad:

  $$g''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$$

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ es convexa.

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ es cóncava.

  No presenta puntos de inflexión, ya que en $x = 0$ la función no está definida.



24. Página 249

a) • $2x+1\geq 0\rightarrow x\geq -\frac{1}{2}\rightarrow \text{Dom}\,f=\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

- Cortes con los ejes:

$f(x)=0\rightarrow \sqrt{2x+1}=0\rightarrow x=-\frac{1}{2}\rightarrow \left(-\frac{1}{2},0\right)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$f(0)=\sqrt{1}=1\rightarrow (0,1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}=+\infty\rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x+1}}{x}=0\rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

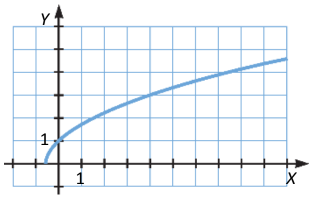
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}>0\ \forall x\in \text{Dom}\,f\rightarrow$ La función es siempre creciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$f''(x)=\frac{-1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}<0\ \forall x\in \text{Dom}\,f\rightarrow$ La función es siempre convexa y no tiene puntos de inflexión.



b) • $\text{Dom}\,f=[0,+\infty)$

- Cortes con los ejes:

$f(x)=0\rightarrow 2x+\sqrt{x}=0\rightarrow x=0\rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$f(0)=0\rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x+\sqrt{x}\right)=+\infty\rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x}}{x}=2\\ \lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene una rama parabólica:

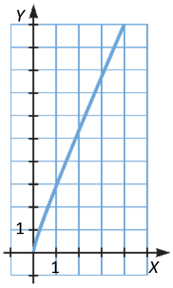
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x+\sqrt{x}\right)=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \ \forall x \in \text{Dom} f \rightarrow$ La función es creciente en todo su dominio y no tiene máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$f''(x) = \dfrac{-1}{4x\sqrt{x}} < 0 \ \forall x \in \text{Dom} f \rightarrow$ La función es convexa en todo el dominio y no tiene puntos de inflexión.



25. Página 249

a) • $4 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 4 \rightarrow |x| \leq 2 \rightarrow \text{Dom} f = [-2, 2]$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \sqrt{4 - x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (-2, 0)$ y $(2, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$f(0) = \sqrt{4} = 2 \rightarrow (0, 2)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

No tiene asíntotas horizontales, ni asíntotas oblicuas, ni ramas parabólicas, ya que la función no está definida cuando $x \rightarrow +\infty$ ni cuando $x \rightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \rightarrow x = 0$

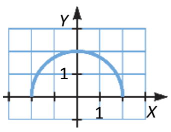
En el intervalo $(-2, 0)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En el intervalo $(0, 2)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 2 \rightarrow (0, 2)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

$f''(x) = \dfrac{-4}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}} < 0 \ \forall x \in \text{Dom} f \rightarrow$ La función es convexa en todo el dominio y no tiene puntos de inflexión.



b) • $\text{Dom}\, f = [0, +\infty)$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow x + \sqrt{x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$f(0) = \sqrt{1} = 1 \rightarrow (0, 1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \sqrt{x}\right) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sqrt{x}}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

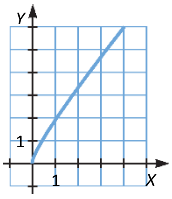
Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \sqrt{x}\right) = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función es siempre creciente y no presenta máximos ni mínimos.

• Concavidad y convexidad:

$f''(x) = \dfrac{-1}{4x\sqrt{x}} < 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función es siempre convexa y no tiene puntos de inflexión.



26. Página 250

a) • $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow e^{-x} - 2 = 0 \rightarrow x = -\ln 2 \rightarrow (-\ln 2, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$f(0) = 1 - 2 = -1 \rightarrow (0, -1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{-x} - 2\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-x} - 2\right) = -2 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \text{ tiene una asíntota horizontal en } y = -2 \text{ cuando } x \rightarrow +\infty.$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x} - 2}{x} = -\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

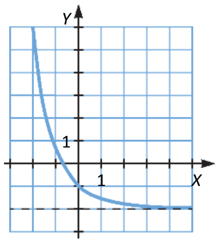
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{-x} - 2\right) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = -e^{-x} < 0 \ \forall x \in \text{Dom} f \rightarrow$ La función es siempre decreciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = e^{-x} > 0 \ \forall x \in \text{Dom} f \rightarrow$ La función es siempre cóncava y no presenta puntos de inflexión.



b) • $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow 3 + e^{\frac{x}{2}} \neq 0 \ \forall x \in \text{Dom} f \rightarrow$ La función no corta al eje X.

  $f(0) = 3 + e^0 = 4 \rightarrow (0, 4)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(3 + e^{\frac{x}{2}}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(3 + e^{\frac{x}{2}}\right) = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Tiene una asíntota horizontal en } y = 3 \text{ cuando } x \rightarrow -\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3 + e^{\frac{x}{2}}}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3 + e^{\frac{x}{2}}}{x} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

  Tiene una rama parabólica:

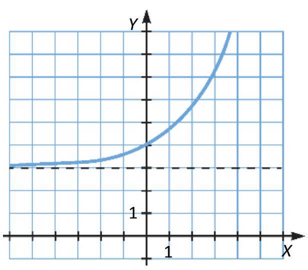
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(3 + e^{\frac{x}{2}}\right) = +\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} > 0 \ \forall x \in \text{Dom} f \rightarrow$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} > 0 \ \forall x \in \text{Dom} f \rightarrow$ La función es cóncava en todo el dominio y no tiene puntos de inflexión.



27. Página 250

a) • $\text{Dom}\, f = [0, +\infty)$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}} > 0\ \forall\ x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función no corta al eje *X*.

$f(0) = \frac{1}{2}e^{0} = \frac{1}{2} \rightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\right) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}}{x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\right) = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}} > 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

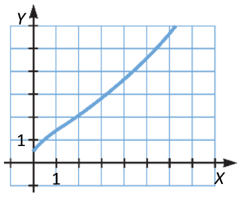
• Concavidad y convexidad:

$f''(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right)}{8x\sqrt{x}} = 0 \rightarrow x = 1$

En el intervalo (0, 1), $f''(x) < 0 \longrightarrow f(x)$ es convexa.

En el intervalo (1, +∞), $f''(x) > 0 \longrightarrow f(x)$ cóncava.

$x = 1 \rightarrow f(1) = \frac{e}{2} \rightarrow \left(1, \frac{e}{2}\right)$ es un punto de inflexión.



b) • $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}} \neq 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función no corta al eje *X*.

$f(0) = \frac{1}{2}e^{0} = \frac{1}{2} \rightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}} = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}}{x} = -\infty\end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

  Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}} = +\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{x}{2}e^{\frac{x^2}{2}} = 0 \to x = 0$$

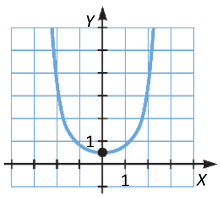
  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

  $x = 0 \to f(0) = \frac{1}{2} \to \left(0, \frac{1}{2}\right)$ es un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}(1 + x^2) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \to$ La función es siempre cóncava y no presenta puntos de inflexión.



28. Página 251

a) • $2x - 4 > 0 \to x > 2 \to \text{Dom} f = (2, +\infty)$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \to \ln(2x - 4) = 0 \to 2x - 4 = 1 \to x = \frac{5}{2} \to \left(\frac{5}{2}, 0\right)$ es el punto de corte con el eje X.

  No tiene puntos de corte con el eje Y, ya que la función no está definida para $x = 0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} [\ln(2x - 4)] = -\infty \to$ Asíntota vertical en $x = 2$.

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [\ln(2x - 4)] = +\infty \to$ No tiene asíntotas horizontales.

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x - 4)}{x} = 0 \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

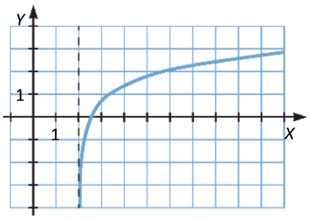
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [\ln(2x-4)] = +\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = \dfrac{1}{x-2} > 0 \ \forall x \in \text{Dom} f \rightarrow$ La función es siempre creciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$f''(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2} < 0 \ \forall x \in \text{Dom} f \rightarrow$ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.



b) • $4 - 2x > 0 \rightarrow x < 2 \rightarrow \text{Dom} f = (-\infty, 2)$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \ln(4-2x) = 0 \rightarrow 4 - 2x = 1 \rightarrow x = \dfrac{3}{2} \rightarrow \left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$f(0) = \ln 4 \rightarrow (\ln 4, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} [\ln(4-2x)] = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 2$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [\ln(4-2x)] = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(4-2x)}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

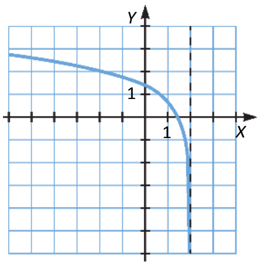
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [\ln(4-2x)] = +\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = \dfrac{1}{x-2} < 0 \ \forall x \in \text{Dom} f \rightarrow$ La función es siempre decreciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$f''(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2} < 0 \ \forall x \in \text{Dom} f \rightarrow$ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.



29. Página 251

a) • $x^2 - 3 > 0 \to x^2 > 3 \to \text{Dom}\, f = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \to \ln\left(x^2 - 3\right) = 0 \to x^2 - 3 = 1 \to x = \pm 2 \to (-2, 0)$ y $(2, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  No tiene corte con el eje *Y*, ya que la función no está definida para $x = 0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x \to -\sqrt{3}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -\sqrt{3}^-} \left[\ln\left(x^2 - 3\right)\right] = -\infty \to$ Asíntota vertical en $x = -\sqrt{3}$.

  $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \sqrt{3}^+} \left[\ln\left(x^2 - 3\right)\right] = -\infty \to$ Asíntota vertical en $x = \sqrt{3}$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[\ln\left(x^2 - 3\right)\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\ln\left(x^2 - 3\right)\right] = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln\left(x^2 - 3\right)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\left(x^2 - 3\right)}{x} = 0 \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

  Tiene ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[\ln\left(x^2 - 3\right)\right] = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\ln\left(x^2 - 3\right)\right] = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

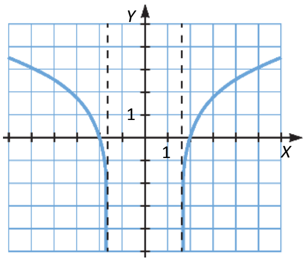
  $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 3} \neq 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \to$ La función no presenta máximos ni mínimos.

  En el intervalo $\left(-\infty, \sqrt{3}\right)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

  En el intervalo $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$,$f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 6}{\left(x^2 - 3\right)^2} < 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \to$ La función es convexa en todo su dominio y no tiene puntos de inflexión.



b) • $3 - x^2 > 0 \to x^2 < 3 \to \text{Dom}\, f = \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \to \ln\left(3 - x^2\right) = 0 \to 3 - x^2 = 1 \to x = \pm\sqrt{2} \to \left(-\sqrt{2}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{2}, 0\right)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  $f(0) = \ln 3 \to (0, \ln 3)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -\sqrt{3}^+} \left[\ln\left(3-x^2\right)\right] = -\infty \to$ Asíntota vertical en $x = -\sqrt{3}$.

  $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \sqrt{3}^-} \left[\ln\left(3-x^2\right)\right] = -\infty \to$ Asíntota vertical en $x = \sqrt{3}$.

  No tiene asíntotas horizontales, ni oblicuas, ni ramas parabólicas, porque la función no está definida cuando $x \longrightarrow -\infty$ ni cuando $x \longrightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-3} = 0 \to x = 0$

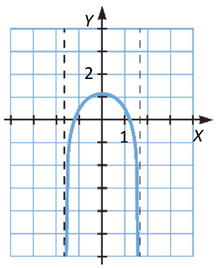
  En el intervalo $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, $f'(x) > 0 \longrightarrow f(x)$ es creciente.

  En el intervalo $\left(\sqrt{3}, 0\right)$, $f'(x) < 0 \longrightarrow f(x)$ decreciente.

  $x = 0 \to f(0) = \ln 3 \to (0, \ln 3)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = \dfrac{-2x^2-6}{\left(x^2-3\right)^2} < 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \to$ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.



30. **Página 252**

- $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

- Continuidad:

  Las funciones de cada tramo son continuas, pero la función no es continua en $x = 1$:

  $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = e^0 = 1 \neq 0 = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \to$ Salto de discontinuidad finito en $x = 1$.

- Cortes con los ejes:

  $f(x) \neq 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \to$ No corta al eje X.

  $f(0) = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2} \to \left(0, \dfrac{1}{e^2}\right)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

  $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} e^{2x-2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (x-1)^2 = +\infty \end{array}\right\} \to$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^2}{x}=+\infty \rightarrow$$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

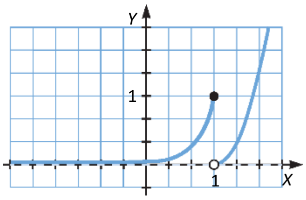
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)^2=+\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=\begin{cases}2e^{2x-2} & \text{si} \quad x\le 1\\ 2(x-1) & \text{si} \quad x>1\end{cases}\rightarrow f'(x)>0\ \forall x\in \text{Dom}\, f \rightarrow$$ Es siempre creciente y no tiene máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$$f''(x)=\begin{cases}4e^{2x-1} & \text{si} \quad x\le 1\\ 1 & \text{si} \quad x>1\end{cases}\rightarrow f''(x)>0\ \forall x\in \mathbb{R} \rightarrow$$ La función es siempre cóncava y no tiene puntos de inflexión.



31. Página 252

- $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}$

- Continuidad:

Las funciones de cada tramo son continuas, pero la función no es continua en $x=-2$:

$$\lim_{x\to-2^-}f(x)=0\neq 3=\lim_{x\to-2^+}f(x)\rightarrow$$ Salto de discontinuidad finito en $x=-2$.

- Cortes con los ejes:

$$f(x)=0\rightarrow\begin{cases}\ln(-1-x)=0\rightarrow x=-2\rightarrow(-2,0)\\ 4-\sqrt{x+3}=0\rightarrow x=13\rightarrow(13,0)\end{cases}$$ son los puntos de corte con el eje X.

$f(0)=4-\sqrt{3}\rightarrow\left(0,4-\sqrt{3}\right)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}[\ln(-1-x)]=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[4-\sqrt{x+3}\right]=-\infty\end{array}\right\}\rightarrow$$ No tiene asíntotas horizontales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-1-x)}{x}=0\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-\sqrt{x+3}}{x}=0\end{array}\right\}\rightarrow$$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}[\ln(-1-x)]=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[4-\sqrt{x+3}\right]=-\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

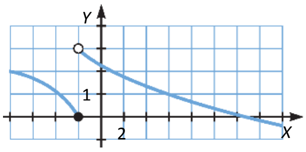
$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad x\le -2\\ \dfrac{-1}{2\sqrt{x+3}} & \text{si} \quad x>-2\end{cases}\rightarrow f'(x)<0\ \forall x\in\mathbb{R}\rightarrow$$ La función es decreciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x\le -2\\ \dfrac{1}{4(x+3)\sqrt{x+3}} & \text{si} \quad x>-2\end{cases}\rightarrow f''(x)\ne 0\ \forall x\in\mathbb{R}\rightarrow$$ La función no tiene puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, -2)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

En el intervalo $(-2, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

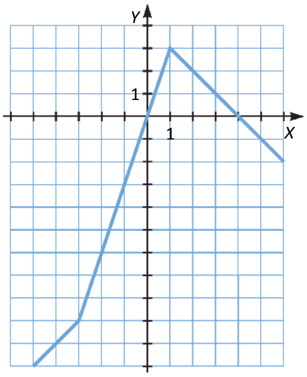


32. Página 253

a) $$f(x)=\begin{cases}-x-3+2x-2-1 & \text{si} \quad x<-3\\ x+3+2x-2-1 & \text{si} \quad -3\le x\le 1\\ x+3-2x+2-1 & \text{si} \quad 1<x\end{cases}\rightarrow f(x)=\begin{cases}x-6 & \text{si} \quad x<-3\\ 3x & \text{si} \quad -3\le x\le 1\\ -x+4 & \text{si} \quad 1<x\end{cases}$$

Se trata de representar cada una de las rectas en su correspondiente intervalo. Teniendo en cuenta la pendiente y la ordenada en el origen de cada una de ellas:

$$y=x-6\rightarrow\begin{cases}m=1\\ n=-6\end{cases} \qquad y=3x\rightarrow\begin{cases}m=3\\ n=0\end{cases} \qquad y=-x+4\rightarrow\begin{cases}m=-1\\ n=4\end{cases}$$



b) Representaremos la función sin tener en cuenta el valor absoluto: $f(x) = x - x^3$.

- $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$$f(x)=0\rightarrow x-x^3=x(1-x^2)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=\pm 1\end{cases}\rightarrow(0,0),\ (1,0)\ \text{y}\ (-1,0)$$ son los puntos de corte con el eje X.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x - x^3\right) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - x^3\right) = -\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = 1 - 3x^2 = 0 \to x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

  En $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

  En el intervalo $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

  $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \to f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \to \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ es un mínimo.

  $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \to f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \to \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

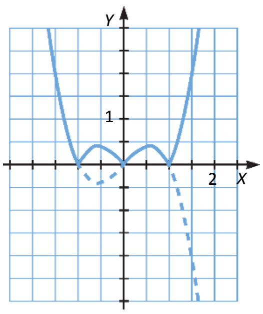
  $f''(x) = -6x = 0 \to x = 0$

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) > 0 \to f(x)$ es cóncava.

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) < 0 \to f(x)$ es convexa.

  $f(0) = 0 \to (0, 0)$ es un punto de inflexión.

Una vez representada la función sin valor absoluto, dibujamos las partes negativas como positivas, haciendo una simetría respecto del eje X.



33. Página 253

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

Sean $g(x) = 1 - e^{-x}$ y $h(x) = 1 - e^{x}$.

- $\text{Dom}\, g = \text{Dom}\, h = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $g(x) = 0 \to 1 - e^{-x} = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$ es el punto de corte de $g(x)$ con el eje X.

  $h(x) = 0 \to 1 - e^{x} = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$ es el punto de corte de $h(x)$ con el eje X.

$g(0)=1-e^{0}=0 \to (0,0)$ es el punto de corte de $g(x)$ con el eje Y.

$h(0)=1-e^{0}=0 \to (0,0)$ es el punto de corte de $h(x)$ con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Ni $g(x)$ ni $h(x)$ tienen asíntotas verticales.

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-e^{-x}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-e^{-x}\right)=-\infty\end{array}\right\}\to g(x) \text{ tiene asíntota horizontal en } y=1.$$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-e^{x}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-e^{x}\right)=1\end{array}\right\}\to h(x) \text{ tiene asíntota horizontal en } y=1.$$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-x}}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-e^{-x}}{x}=+\infty\end{array}\right\}\to g(x) \text{ no tiene asíntotas oblicuas.}$$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{x}}{x}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-e^{x}}{x}=0\end{array}\right\}\to h(x) \text{ no tiene asíntotas oblicuas.}$$

  $g(x)$ y $h(x)$ tienen una rama parabólica:

  $$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-e^{-x}\right)=-\infty$$

  $$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-e^{x}\right)=-\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $g'(x)=e^{-x}>0\ \forall x\in \text{Dom } g \to$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

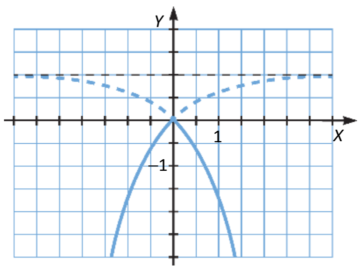
  $h'(x)=-e^{x}<0\ \forall x\in \text{Dom } h \to$ La función es decreciente en todo su dominio y no tiene máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

  $g''(x)=-e^{-x}<0\ \forall x\in \text{Dom } g \to$ La función es convexa en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

  $h''(x)=-e^{x}<0\ \forall x\in \text{Dom } h \to$ La función es convexa en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

Por último, para representar $f(x)$, representamos ambas funciones en su dominio correspondiente:



b) $f(x)=\begin{cases}\ln\left(x^2-4\right) & \text{si} \quad x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)\\ \ln\left(4-x^2\right) & \text{si} \quad x\in(-2,2)\end{cases}$

Sean $g(x)=\ln\left(x^2-4\right)$ y $h(x)=\ln\left(4-x^2\right)$

- $\text{Dom}\, g=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ $\qquad$ $\text{Dom}\, h=(-2,2)$
- Cortes con los ejes:

  $g(x)=0\rightarrow\ln\left(x^2-4\right)=0\rightarrow x^2-4=1\rightarrow x=\pm\sqrt{5}\rightarrow\left(-\sqrt{5},0\right)$ y $\left(\sqrt{5},0\right)$ son los puntos de corte de $g(x)$ con el eje X.

  $h(x)=0\rightarrow\ln\left(4-x^2\right)=0\rightarrow 4-x^2=1\rightarrow x=\pm\sqrt{3}\rightarrow\left(-\sqrt{3},0\right)$ y $\left(\sqrt{3},0\right)$ son los puntos de corte de $h(x)$ con el eje X.

  La función $g(x)$ no tiene corte con el eje Y.

  $h(0)=\ln 4\rightarrow(0,\ln 4)$ es el punto de corte de $h(x)$ con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\left[\ln\left(x^2-4\right)\right]=-\infty\\ \lim\limits_{x\to2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left[\ln\left(x^2-4\right)\right]=-\infty\end{array}\right\}\rightarrow g(x) \text{ tiene asíntotas verticales en } x=-2 \text{ y en } x=2.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^+} h(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\left[\ln\left(4-x^2\right)\right]=-\infty\\ \lim\limits_{x\to2^-} h(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\left[\ln\left(4-x^2\right)\right]=-\infty\end{array}\right\}\rightarrow h(x) \text{ tiene asíntotas verticales en } x=-2 \text{ y en } x=2.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x^2-4\right)\right]=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(x^2-4\right)\right]=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow g(x) \text{ no tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2-4\right)}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(x^2-4\right)}{x}=0\end{array}\right\}\rightarrow g(x) \text{ no tiene asíntotas oblicuas.}$$

  $h(x)$ no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas porque no está definida cuando $x\rightarrow-\infty$ ni cuando $x\rightarrow+\infty$.

  $g(x)$ tiene dos ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x^2-4\right)\right]=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(x^2-4\right)\right]=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $g'(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}\neq 0\ \forall x\in \text{Dom}\, g\rightarrow$ La función no presenta máximos ni mínimos.

  En el intervalo $(-\infty,-2)$, $g'(x)<0\rightarrow g(x)$ es decreciente.

  En el intervalo $(2,+\infty)$, $g'(x)>0\rightarrow g(x)$ es creciente.

  $h'(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}=0\rightarrow x=0$

  En el intervalo $(-2, 0)$, $h'(x)>0\rightarrow h(x)$ es creciente.

  En el intervalo $(0, 2)$, $h'(x)<0\rightarrow h(x)$ es decreciente.

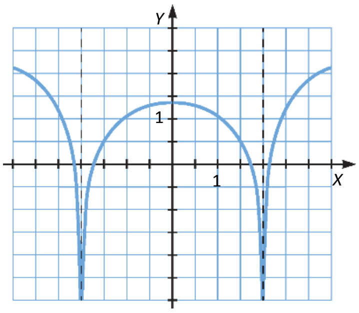
  $x=0\rightarrow h(0)=\ln 4\rightarrow(0,\ln 4)$ es un máximo de $h(x)$.

- Concavidad y convexidad:

$$g''(x)=\frac{-2(x^2+4)}{(x^2-4)^2}<0\ \forall x\in \text{Dom}\, g\rightarrow$$ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.

$$h''(x)=\frac{-2(x^2+4)}{(x^2-4)^2}<0\ \forall x\in \text{Dom}\, h\rightarrow$$ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.

Por último, para representar *f*(*x*), representamos ambas funciones en su dominio correspondiente:



34. Página 254

$$x+2\neq 0\rightarrow x\neq -2 \qquad \frac{1}{x+2}\geq 0\rightarrow x+2>0\rightarrow x>-2 \qquad \sqrt{\frac{1}{x+2}}>0\rightarrow x+2>0\rightarrow x>-2$$

$$\text{Dom}\, f=(-2,+\infty)$$

35. Página 254

$$f(-x)=\frac{5\ln\left(\sqrt{(-x)^2+1}\right)}{(-x)^2+2}=\frac{5\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{x^2+2}=f(x)\rightarrow$$ La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.

36. Página 254

$$y=\frac{x+1}{2}\rightarrow m=\frac{1}{2}, n=\frac{1}{2}$$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2+1}{x^2-x}=a\rightarrow a=\frac{1}{2} \qquad n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}x^2+1}{x-1}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{2x-2}\right)=\frac{1}{2}$$

37. Página 255

$f'(x)>0$ en $(-\infty,-2)\cup(2,6)\rightarrow f(x)$ crece. $\qquad f'(x)<0$ en $(-2,2)\cup(6,+\infty)\rightarrow f(x)$ decrece.

$f'(x)=0\rightarrow x=x_1,\ x=x_2,\ x=x_3$

Mínimos: $x=x_2$ $\qquad$ Máximos: $x=x_1,\ x=x_3$

$f'(x)$ decrece en $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)\rightarrow f(x)$ es convexa.

$f'(x)$ crece en $(0, 4)\rightarrow f(x)$ es cóncava.

$f''(x)=0\rightarrow$ Estos serán los máximos o mínimos de $f'(x)$.

$x=0$ y $x=4$ son puntos de inflexión.

38. Página 255

$\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Punto de corte: (0, 0)

Asíntotas verticales: $x = 2$, $x = -2$

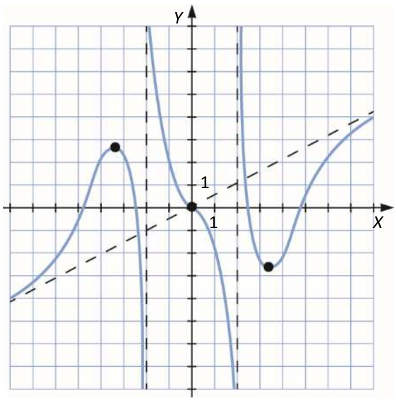
Asíntota oblicua: $y = \frac{1}{2}x$

Crece en $\left(-\infty, -\sqrt{12}\right) \cup \left(\sqrt{12}, +\infty\right)$.

Máximo: $\left(\sqrt{12}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Decrece en $\left(-\sqrt{12}, -2\right) \cup (-2, 2) \cup \left(2, \sqrt{12}\right)$.

Mínimo: $\left(-\sqrt{12}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$



39. Página 256

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + b \to f'(1) = 3a + b = 0 \\ f(1) = a + b + 1 = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3a + b = 0 \\ a + b = -1 \end{array}\right\} \to a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$$

40. Página 256

a) • $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \to x^2 e^{-x} = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

$f(0) = 0 \to (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 e^{-x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 e^{-x}\right) = 0 \end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota horizontal en } y = 0 \text{ cuando } x \to +\infty.$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = -\infty \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

$$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 e^{-x}\right) = +\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = x\,e^{-x}(2-x) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

En el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

En el intervalo (0, 2), $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

$x = 0 \to f(0) = 0 \to (0, 0)$ es un mínimo.

$x = 2 \to f(2) = \frac{4}{e^2} \to \left(2, \frac{4}{e^2}\right)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

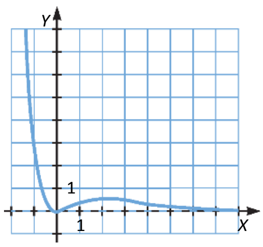
$$f''(x) = e^{-x}\left(x^2 - 4x + 2\right) = 0 \to x = 2 \pm \sqrt{2}$$

En el intervalo $\left(-\infty, 2-\sqrt{2}\right) \cup \left(2+\sqrt{2}, +\infty\right)$, $f''(x) > 0 \to f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $\left(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right)$, $f''(x) < 0 \to f(x)$ es convexa.

$x = 2-\sqrt{2} \to f\left(2-\sqrt{2}\right) = \left(6-4\sqrt{2}\right)e^{\sqrt{2}-2} \to \left(2-\sqrt{2}, (6-4\sqrt{2})\,e^{\sqrt{2}-2}\right)$ es punto de inflexión.

$x = 2+\sqrt{2} \to f\left(2+\sqrt{2}\right) = \left(6+4\sqrt{2}\right)e^{\sqrt{2}+2} \to \left(2+\sqrt{2}, (6+4\sqrt{2})\,e^{\sqrt{2}+2}\right)$ es punto de inflexión.



b) - $\text{Dom}\, f = (0, +\infty)$

- Cortes con los ejes:

$$f(x) = 0 \to x\ln x - x = 0 \to x(\ln x - 1) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \to (0, 0) \\ x = e \to (e, 0) \end{cases} \to (e, 0)$$ es el punto de corte con el eje *X*.

$f(0) = 0 \to (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}(x\ln x - x) = \lim_{x\to0^+}\left[x(\ln x - 1)\right] = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x - 1}{\frac{1}{x}} \to \frac{-\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = 0 \to$$

$\to$ No tiene asíntotas verticales.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x\ln x - x) = +\infty \to$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x - x}{x} = +\infty \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x\ln x - x) = +\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = \ln x = 0 \rightarrow x = 1$

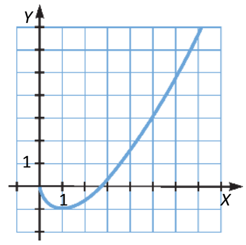
  En el intervalo (0, 1), $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

  En el intervalo $(1, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

  $x = 1 \rightarrow f(1) = -1 \rightarrow (1, -1)$ es un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ La función es cóncava en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.



41. Página 257

- Simetría:

  $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 + 1} = -\dfrac{x}{x^2 + 1} = -f(x)$

  Es simétrica respecto del origen de coordenadas, solo es necesario estudiar la función en el intervalo $(0, +\infty)$.

- $\text{Dom}\, f = (0, +\infty) - \{1\}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ son los puntos de corte con el eje X.

  $f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x^2 - 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 1$.

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow$ Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

  No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} < 0\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función $f(x)$ es siempre decreciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

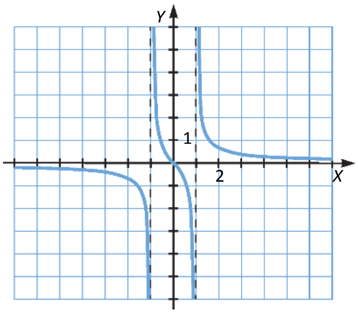
$$f''(x)=\frac{2x^3+6x}{\left(x^2-1\right)^3}=0\rightarrow x=0$$

En el intervalo $(0,1)$, $f''(x)<0\longrightarrow f(x)$ es convexa.

En el intervalo $(1,+\infty)$, $f''(x)>0\longrightarrow f(x)$ es cóncava.

$x=0\rightarrow f(0)=0\rightarrow(0,0)$ es punto de inflexión.

Se dibuja la gráfica teniendo en cuenta la simetría de la función:



42. Página 257

$$f(x)=\frac{|x|}{|x|-1}=\begin{cases}\dfrac{x}{x+1} & \text{si} \quad x<0\\ \dfrac{x}{x-1} & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

Sean $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$ y $h(x)=\dfrac{x}{x-1}$.

- $\text{Dom}\, g=\mathbb{R}-\{-1\}$ $\qquad$ $\text{Dom}\, h=\mathbb{R}-\{1\}$
- Cortes con los ejes:

$g(x)=0\rightarrow\dfrac{x}{x+1}=0\rightarrow x=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte de g con el eje X.

$h(x)=0\rightarrow\dfrac{x}{x-1}=0\rightarrow x=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte de h con el eje X.

$g(0)=\dfrac{x}{x+1}=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte de g con el eje Y.

$h(0)=\dfrac{x}{x-1}=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte de h con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x}{x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x}{x+1}=-\infty\end{array}\right\}\rightarrow g(x) \text{ tiene asíntota vertical en } x=-1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{x-1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to1^+} h(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{x-1}=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow h(x) \text{ tiene asíntota vertical en } x=1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x+1}=1\end{array}\right\}\to g(x) \text{ tiene asíntota horizontal en } y=1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x-1}=1\end{array}\right\}\to h(x) \text{ tiene asíntota horizontal en } y=1.$$

Ni $g(x)$ ni $h(x)$ tienen ramas parabólicas.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $g'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0\ \forall x\in \text{Dom } g\to$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

  $h'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0\ \forall x\in \text{Dom } h\to$ La función es decreciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

  $g''(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^3}\neq 0\ \forall x\in \text{Dom } g\to$ La función no presenta puntos de inflexión.

  En el intervalo $(-\infty, -1)$, $g''(x) > 0 \to g(x)$ es cóncava.

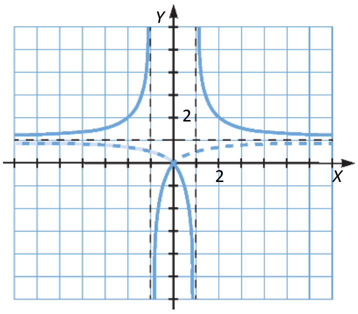
  En el intervalo $(-1, +\infty)$, $g''(x) < 0 \to g(x)$ es convexa.

  $h''(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}\neq 0\ \forall x\in \text{Dom } h\to$ La función no presenta puntos de inflexión.

  En el intervalo $(-\infty, 1)$, $h''(x) < 0 \to h(x)$ es convexa.

  En el intervalo $(1, +\infty)$, $h''(x) > 0 \to h(x)$ es cóncava.

Por último, para representar $f(x)$, representamos ambas funciones en su dominio correspondiente:



ACTIVIDADES FINALES

43. Página 258

a) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = 3x - 9 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow (3, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -9 \rightarrow (0, -9)$

b) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = -2x + 6 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow (3, 0)$

Puntos de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 6 \rightarrow (0, 6)$

c) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = -x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \rightarrow (-3, 0) \\ x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow (0, 3)$

d) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \rightarrow (-2, 0) \\ x = -1 \rightarrow (-1, 0) \\ x = 2 \rightarrow (2, 0) \end{cases}$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -4 \rightarrow (0, -4)$

44. Página 258

a) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{2\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \dfrac{x+6}{x-2} = 0 \rightarrow x = -6 \rightarrow (-6, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

b) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-3\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \dfrac{x^2 - 4}{x+3} = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (-2, 0), (2, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -\dfrac{4}{3} \rightarrow \left(0, -\dfrac{4}{3}\right)$

c) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \dfrac{x+3}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow (-3, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -\dfrac{3}{4} \rightarrow \left(0, -\dfrac{3}{4}\right)$

d) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-2\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \dfrac{x^3 - x}{x^3 + 2x^2 + x + 2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = -1 \rightarrow (-1, 0) \\ x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

45. Página 258

a) $\text{Dom } y = (-\infty, 4]$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \sqrt{4-x} - 3 = 0 \rightarrow x = -5 \rightarrow (-5, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$

b) $\text{Dom } y = \left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \sqrt{3x+4} - 5 = 0 \rightarrow x = 7 \rightarrow (7, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

c) $\text{Dom } y = [-5, 5]$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \sqrt{25 - x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 5 \rightarrow (-5, 0), (5, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 5 \rightarrow (0, 5)$

d) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \sqrt{x^2 + 9} - 5 = 0 \rightarrow x = \pm 4 \rightarrow (-4, 0), (4, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -2 \rightarrow (0, -2)$

46. Página 258

a) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = x \cdot e^x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

b) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = 2^x - 1 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

c) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = 2 - 2^{\frac{1}{x}} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$

No está definida la función para $x = 0$; por tanto, no tiene punto de corte con eje *Y*.

d) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = 9 - 3^{2-\frac{1}{x}} \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ No tiene puntos de corte.

No está definida la función para $x = 0$; por tanto, no tiene punto de corte con eje *Y*.

47. Página 258

a) $\text{Dom}\, y = (-3, +\infty)$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \log_3(3x+9) = 0 \rightarrow x = -\frac{8}{3} \rightarrow \left(-\frac{8}{3}, 0\right)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow (0, 2)$

b) $\text{Dom}\, y = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \ln(x^2+2x) = 0 \rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2} \rightarrow \left(-1-\sqrt{2}, 0\right), \left(-1+\sqrt{2}, 0\right)$

No está definida la función para $x = 0$; por tanto, no tiene punto de corte con eje *Y*.

c) $\text{Dom}\, y = (-2, 4)$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \log_2\left(\frac{2+x}{4-x}\right) = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$

Puntos de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$

d) $\text{Dom}\, y = (1, 2) \cup (2, +\infty)$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \frac{x}{\log_2(x-1)} \neq 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ No tiene puntos de corte.

No está definida la función para $x = 0$; por tanto, no tiene punto de corte con eje *Y*.

48. Página 258

a) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{0\}$

b) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{1\}$

c) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $-1 \leq x^2 - 8 \leq 1 \rightarrow 7 \leq x^2 \leq 9 \rightarrow \begin{cases} \sqrt{7} \leq x \leq 3 \\ -3 \leq x \leq -\sqrt{7} \end{cases} \rightarrow \text{Dom}\, y = \left(-3, -\sqrt{7}\right) \cup \left(\sqrt{7}, 3\right)$

49. Página 258

a) $(-\infty, -4) \cup \{-3, +3\}$

b) $(4, +\infty) \cup \{-3, +3\}$

c) $(-\infty, -4]$

d) $(-\infty, -2) \cup \{3\}$

e) $(2, +\infty) \cup \{-3\}$

f) $[4, +\infty)$

50. Página 258

a) Dom $y = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

b) Dom $y = (-\infty, -2) \cup [0, 1] \cup (3, +\infty)$

c) Dom $y = (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (2, +\infty)$

d) Dom $y = \left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left(-\sqrt{5}, -2\right) \cup \left(2, \sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$

51. Página 258

a) Dom $y = (-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

b) Dom $y = [3, 4) \cup (4, 7)$

c) Dom $y = (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

d) Dom $y = [-5, -1) \cup (-1, 2]$

52. Página 258

a) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{0\}$

b) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{1\}$

c) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

d) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{0, 2\}$

53. Página 258

Tenemos que buscar los valores para los que $f(x)$ no está definida.

El denominador de la función se anula para $x = 0$; así que ese será un valor.

$tg\, x = \dfrac{sen\, x}{cos\, x}$ no está definida en los puntos donde se anula el coseno, es decir, en $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Así, los valores de m para los que $f(x)$ tal que $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$ son $\{0\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

54. Página 258

a) $f(-x) = (-x)^3 - x = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del origen.

b) $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 5 = x^4 - 2x^2 + 5 = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y.

c) $f(-x) = (-x)^2 - (-x) + 3 = x^2 + x + 3 \rightarrow$ No es simétrica.

d) $f(-x) = \dfrac{3(-x)}{(-x)^2 - 9} = \dfrac{-3x}{x^2 - 9} = -\dfrac{3x}{x^2 - 9} = -f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del origen.

e) $f(-x) = \dfrac{\ln|-x|}{-x + 4} = \dfrac{\ln|x|}{-x + 4} \rightarrow$ No es simétrica.

f) $f(-x) = \left(2(-x)^2 - 1\right)^2 = \left(2x^2 - 1\right)^2 = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y.

55. Página 258

a) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{0\}$

Puntos de corte con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x - 1}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$

No está definida la función para $x = 0$; por tanto, no tiene punto de corte con eje Y.

$f(-x) = \dfrac{-x - 1}{(-x)^2} = \dfrac{-x - 1}{x^2} \rightarrow$ No es simétrica.

b) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{e^x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{e^{-x}} = x^2\, e^x \rightarrow$ No es simétrica.

c) $25-x^2\geq 0\rightarrow (5-x)(5+x)\geq 0\rightarrow x\in[-5,5]\rightarrow \text{Dom } y=[-5,5]$

Puntos de corte con el eje *X*: $y=0\rightarrow \sqrt{25-x^2}=0\rightarrow x=\pm 5\rightarrow (-5,0),(5,0)$

Punto de corte con el eje *Y*: $x=0\rightarrow y=5\rightarrow (0,5)$

$f(-x)=\sqrt{25-(-x)^2}=\sqrt{25-x^2}=f(x)\rightarrow$ Simétrica respecto del eje *Y*.

d) $4-x^2\geq 0\rightarrow (2-x)(2+x)\geq 0\rightarrow x\in[-2,2]\rightarrow \text{Dom } y=[-2,2]$

Puntos de corte con el eje *X*: $y=0\rightarrow \sqrt{4-x^2}=0\rightarrow x=\pm 2\rightarrow (-2,0),(2,0)$

Punto de corte con el eje *Y*: $x=0\rightarrow y=2\rightarrow (0,2)$

$f(-x)=\sqrt{4-(-x)^2}=\sqrt{4-x^2}=f(x)\rightarrow$ Simétrica respecto del eje *Y*.

e) $\text{Dom } y=\mathbb{R}$

Puntos de corte con el eje *X*: $y=0\rightarrow 7-2x^2=0\rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}\rightarrow \left(-\sqrt{\frac{7}{2}},0\right),\left(\sqrt{\frac{7}{2}},0\right)$

Punto de corte con el eje *Y*: $x=0\rightarrow y=7\rightarrow (0,7)$

$f(-x)=7-2(-x)^2=7-2x^2=f(x)\rightarrow$ Simétrica respecto del eje *Y*.

f) $x^2-2x+7\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}\rightarrow \text{Dom } y=\mathbb{R}$

Puntos de corte con el eje *X*: $y=0\rightarrow \sqrt{x^2-2x+7}\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}\rightarrow$ No tiene.

Punto de corte con el eje *Y*: $x=0\rightarrow y=\sqrt{7}\rightarrow \left(0,\sqrt{7}\right)$

$f(-x)=\sqrt{(-x)^2-2(-x)+7}=\sqrt{x^2+2x+7}\rightarrow$ No es simétrica.

56. Página 258

a) $f(x+2k\pi)=2sen(x+2k\pi)=2[sen\ x\cos 2k\pi-\cos x\ sen\ 2k\pi]=2[sen\ x\cdot 1-\cos x\cdot 0]=2\ sen\ x=f(x)$

La función es periódica de período 2π.

b) $f(x+k\pi)=sen(2x+2k\pi)=sen\ 2x\cos 2k\pi-\cos 2x\ sen\ 2k\pi=sen\ 2x\cdot 1-\cos 2x\cdot 0=sen\ 2x=f(x)$.

La función es periódica de período π.

c) $f(x+6k\pi)=3sen\left(\frac{x}{3}+2k\pi\right)=3\left[sen\frac{x}{3}\cos 2k\pi-\cos\frac{x}{3}sen\ 2k\pi\right]=3\left[sen\frac{x}{3}\cdot 1-\cos\frac{x}{3}\cdot 0\right]=3\ sen\frac{x}{3}=f(x)$

La función es periódica de período 6π.

d) $f(x+k\pi)=2tg(x+k\pi)=2\ tg(x+k\pi)=2\frac{tg\ x+tg\ k\pi}{1-tg\ x\cdot tg\ k\pi}=2\frac{tg\ x+0}{1-tg\ x\cdot 0}=2\ tg\ x=f(x)$

La función es periódica de período π.

e) $f\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)=tg\left[2\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)\right]=tg(2x+k\pi)=\frac{tg\ 2x+tg\ k\pi}{1-tg\ 2x\cdot tg\ k\pi}=\frac{tg\ 2x+0}{1-tg\ 2x\cdot 0}=tg\ 2x=f(x)$

La función es periódica de período $\frac{\pi}{2}$.

f) $f(x+3k\pi)=3\ tg\left(\frac{x}{3}+k\pi\right)=3\frac{tg\frac{x}{3}+tg\ k\pi}{1-tg\frac{x}{3}\cdot tg\ k\pi}=3\frac{tg\frac{x}{3}+0}{1-tg\frac{x}{3}\cdot 0}=3\ tg\frac{x}{3}=f(x)$

La función es periódica de período 3π.

57. Página 258

a) $f\left(x+\frac{2k\pi}{3}\right)=cos(3x+2k\pi)=cos\,3x\,cos\,2k\pi-sen\,3x\,sen\,2k\pi=cos\,3x\cdot 1-sen\,3x\cdot 0=cos\,3x=f(x)$

La función es periódica de período $\frac{2\pi}{3}$.

b) $f(x+k\pi)=sen^2(x+k\pi)=\frac{1-cos(2x+2k\pi)}{2}=\frac{1-(cos\,2x\,cos\,2k\pi-sen\,2x\,sen\,2k\pi)}{2}=$

$=\frac{1-(cos\,2x\cdot 1-sen\,2x\cdot 0)}{2}=\frac{1-cos\,2x}{2}=sen^2x=f(x)$

La función es periódica de período π.

c) Utilizando el apartado b) de la actividad 56 y el apartado a) de esta actividad tenemos:

$f(x+2k\pi)=sen(2x+4k\pi)\,cos(3x+6k\pi)=sen\,2x\,cos\,3x=f(x)$

La función es periódica de período 2π.

d) $f(x+2k\pi)=3\,cos(x+2k\pi)=3(cos\,x\,cos\,2k\pi-sen\,x\,sen\,2k\pi)=3()cos\,x\cdot 1-sen\,x\cdot 0=3\,cos\,x=f(x)$

La función es periódica de período 2π.

e) $f(x+2k\pi)=sen\left(x-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)cos\,2k\pi-cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)sen\,2k\pi=sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot 1-cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot 0=$

$=sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$

f) La función no es periódica.

58. Página 259

a) $y=1$

b) $x=-1$ $\quad x=1$ $\quad y=0$

c) $y=0$

d) $x=-1$ $\quad y=\frac{x-1}{2}$

e) $y=-x$ $\quad y=x$

59. Página 259

a) Las funciones polinómicas solo tienen ramas infinitas y no tienen asíntotas.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-2x+6\right)=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-2x+6\right)=+\infty$

b) Las funciones polinómicas solo tienen ramas infinitas y no tienen asíntotas.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-x^2\right)=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-x^2\right)=+\infty$

c) Las funciones polinómicas solo tienen ramas infinitas y no tienen asíntotas.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4+2x^3-2x-1\right)=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4+2x^3-2x-1\right)=+\infty$

d) Las funciones polinómicas solo tienen ramas infinitas y no tienen asíntotas.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^4+3x^2-x-1\right)=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^4+3x^2-x-1\right)=-\infty$

60. Página 259

a) Dom $y = \mathbb{R} \rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = 0.$$

No tiene ramas parabólicas porque tiene asíntotas horizontales.

b) Dom $y = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$$\lim_{x\to-3} f(x) = \lim_{x\to-3} \frac{5x}{x^2-9} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical en } x = -3.$$

$$\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3} \frac{5x}{x^2-9} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical en } x = 3.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x}{x^2-9} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x}{x^2-9} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = 0.$$

No tiene ramas parabólicas porque tiene asíntotas horizontales.

c) Dom $y = \mathbb{R} - \{1\}$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{2x}{x+1} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical en } x = -1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x+1} = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x+1} = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = 2.$$

No tiene ramas parabólicas porque tiene asíntotas horizontales.

d) Dom $y = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$$\lim_{x\to-3} f(x) = \lim_{x\to-3} \frac{4x^2}{x^2-9} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical en } x = -3.$$

$$\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3} \frac{4x^2}{x^2-9} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical en } x = 3.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2}{x^2-9} = 4 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2}{x^2-9} = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = 4.$$

No tiene ramas parabólicas porque tiene asíntotas horizontales.

e) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{3x^2+7}{2x+4} = \infty \to \text{Asíntota vertical en } x = -2.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2+7}{2x+4} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+7}{2x+4} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2+7}{2x^2+4x} = \dfrac{3}{2} \to m = \dfrac{3}{2} \\ \lim\limits_{x\to \infty} (f(x)-mx) = \lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x^2+7}{2x+4} - \dfrac{3}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{-6x+7}{2x+4}\right) = -3 \to n = -3 \end{array}\right\} \to \text{Tiene una asíntota oblicua en } y = \frac{3x-6}{2}.$$

f) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{-2x^4}{x^2-1} = \infty \to \text{Asíntota vertical en } x = -1.$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{-2x^4}{x^2-1} = \infty \to \text{Asíntota vertical en } x = 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-2x^4}{x^2-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-2x^4}{x^2-1} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{-2x^4}{x^3-x} = \infty \to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x^4}{x^2-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{-2x^4}{x^2-1} = -\infty$$

61. Página 259

a) $\text{Dom}\, y = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$

No tiene asíntotas verticales porque la función está definida en los extremos del dominio.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-4x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-4x} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4x}}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to \infty} (f(x)-x) = \lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{x^2-4x} - x = -2 \end{array}\right\} \to \text{Tiene asíntota oblicua en } y = x - 2.$$

b) $\text{Dom}\, y = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

No tiene asíntotas verticales porque la función está definida en los extremos del dominio.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^4-1}}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^4-1}}{x} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^4-1}}{x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x\to \infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^4-1}}{x} - x = 0 \end{array}\right\} \to \text{Tiene asíntota oblicua en } y = x.$$

c) $\text{Dom } y = (0, +\infty)$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \infty \to$ Asíntota vertical en $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-2x^4}{x^2-1} = 0 \to$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

d) $\text{Dom } y = (0, +\infty)$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x}} = 0 \to$ No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = +\infty \to$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{x\sqrt{x}} = 0 \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

e) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-2}{\sqrt[3]{x}} = \infty \to$ Asíntota vertical en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2-2}{\sqrt[3]{x}} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-2}{\sqrt[3]{x}} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2-2}{x\sqrt[3]{x}} = \infty \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

f) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[4]{|x|}} = 0 \to$ No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt[4]{|x|}} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt[4]{|x|}} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{x\sqrt[4]{|x|}} = 0 \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

62. Página 259

a) $\text{Dom } y = (-3, +\infty)$

$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} (\log_3(3x+9)) = -\infty \to$ Asíntota vertical en $x = -3$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (\log_3(3x+9)) = +\infty \to$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\log_3(3x+9)}{x} = 0 \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

b) $\text{Dom}\, y = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \left(\ln\left(x^2+2x\right)\right) = -\infty \rightarrow \text{Asíntota vertical en } x=-2.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\ln\left(x^2+2x\right)\right) = -\infty \rightarrow \text{Asíntota vertical en } x=0.$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\ln\left(x^2+2x\right)\right) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \left(\ln\left(x^2+2x\right)\right) = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(x^2+2x\right)}{x} = 0 \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

c) $\text{Dom}\, y = (-2, 4)$

$$\lim_{x\to -2+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \left(\log_2\left(\frac{2+x}{4-x}\right)\right) = -\infty \rightarrow \text{Asíntota vertical en } x=-2.$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \left(\log_2\left(\frac{2+x}{4-x}\right)\right) = +\infty \rightarrow \text{Asíntota vertical en } x=4.$$

No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas porque la función no está definida cuando $x \longrightarrow -\infty$ ni cuando $x \longrightarrow +\infty$.

d) $\text{Dom}\, y = (1, 2) \cup (2, +\infty)$

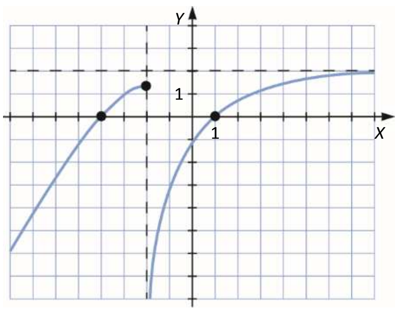
$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{\log_2(x-1)}\right) = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \left(\frac{x}{\log_2(x-1)}\right) = \infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota vertical en } x=2.$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{\log_2(x-1)}\right) = +\infty \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x\cdot\log_2(x-1)} = 0 \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

63. Página 259

Respuesta abierta. Por ejemplo:



64. Página 259

a) $\text{Dom}\, f = (-2, +\infty)$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{4-x^2}{\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to -2^+} \frac{(2+x)(2-x)}{\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to -2^+} \left[\sqrt{x+2}(2-x)\right] = 0 \rightarrow \text{No tiene asíntotas verticales.}$$

b) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos^2 2x}{3x^2} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos^2 2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{8\cos 2x \operatorname{sen} 2x}{6x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{16\cos^2 2x - 16\operatorname{sen}^2 2x}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \to \text{No tiene asíntotas verticales.}$$

c) $\text{Dom}\, f = \left\{ \left(-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \right) : k \in \mathbb{Z} \right\} - \{0\}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 4x)}{x^2} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos 4x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-4\operatorname{tg} 4x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-16(1+\operatorname{tg}^2 4x)}{2} = -8 \to \text{No tiene}$$

asíntota vertical en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\ln(\cos 4x)}{x^2} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\ln(\cos 4x)}{x^2} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{Tiene asíntotas verticales en los puntos } x = \pm\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

d) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{2^{x+1} - 3^{x+1}}{x+1} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2^{x+1} - 3^{x+1}}{x+1} = \lim_{x\to 0} \frac{2^{x+1}\ln 2 - 3^{x+1}\ln 3}{1} = 2\ln 2 - 3\ln 3 \to \text{No tiene}$$

asíntotas verticales.

65. Página 259

a) $$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (4x\cdot e^{-x}) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4x}{e^x}\right) = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (4x\cdot e^{-x}) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{4x}{e^x}\right) = 0 \end{array}\right\} \to \text{Asíntota horizontal en } y = 0.$$

b) $$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(3x\cdot e^{\frac{1}{x}}\right) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(3x\cdot e^{\frac{1}{x}}\right) = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(2x\left(\sqrt[x]{e} - 3\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(2x\left(e^{\frac{1}{x}} - 3\right)\right) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(2x\left(\sqrt[x]{e} - 3\right)\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(2x\left(e^{\frac{1}{x}} - 3\right)\right) = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

d) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(3x\cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3}{x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{3x}}\right) \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{3x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{-3}{9+x^2}}{\frac{-1}{3x^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{-3}{9+x^2}}{\frac{-1}{3x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{9x^2}{9+x^2}\right) = 9 \to \text{Asíntota horizontal en } y = 9.$$

66. Página 259

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^2+3x-2}{bx+5}=3<\infty\to a=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{bx+5}=\dfrac{3}{b}=3\to b=1\end{array}\right\}\to f(x)=\dfrac{3x-2}{x+5}$$

$\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-5\}$

$\lim\limits_{x\to-5} f(x)=\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{3x-2}{x+5}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=-5$.

67. Página 259

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^2+3x-2}{bx^2+5x}=\dfrac{a}{b}=m=1\to a=b\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{ax^2+3x-2-ax^2-5x}{ax+5}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-2x-2}{ax+5}\right)=\dfrac{-2}{a}=n=2\to a=b=-1\end{array}\right\}\to f(x)=\dfrac{-x^2+3x-2}{-x+5}$$

$\lim\limits_{x\to5} f(x)=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{-x^2+3x-2}{-x+5}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=5$.

68. Página 259

a) $f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{9-(-x)^2}=\dfrac{x^2}{9-x^2}=f(x)\to$ La función es simétrica respecto del eje Y.

b) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

$\lim\limits_{x\to-3} f(x)=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2}{9-x^2}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=-3$.

$\lim\limits_{x\to3} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2}{9-x^2}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=3$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{9-x^2}=-1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{9-x^2}=-1\end{array}\right\}\to \text{ Asíntota horizontal en } y=-1.$$

69. Página 260

a) $f(-x)=\dfrac{-(-x)^3}{(-x)^2-4}=\dfrac{x^3}{x^2-4}=-\dfrac{-x^3}{x^2-4}=-f(x)\to$ Simetría respecto del origen.

b) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

$\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{-x^3}{x^2-4}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=-2$.

$\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{-x^3}{x^2-4}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^3}{x^2-4}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3}{x^2-4}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^3}{x^3-4x}=-1=m\\ \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x^3+x^3-4x}{x^2-4}\right)=0=n\end{array}\right\}\to \text{Tiene asíntota oblicua en } y=-x.$$

70. Página 260

a) $f(-x)=(-x)\cdot e^{-(-x)^2}=-x\cdot e^{-x^2}=-\left(x\cdot e^{-x^2}\right)=-f(x)\rightarrow$ Simetría respecto del origen de coordenadas.

$\text{Dom}\, f=\mathbb{R}\rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{-x^2}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\cdot e^{-x^2}\right)=0\end{array}\right\}\rightarrow \text{Tiene asíntota horizontal en } y=0.$$

No tiene asíntotas oblicuas porque tiene asíntotas horizontales.

b) $f(-x)=\frac{1}{2}\ln|-x|=\frac{1}{2}\ln|x|=f(x)\rightarrow$ Simetría respecto del eje Y.

$\text{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{0\}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\ln|x|=-\infty\rightarrow$ Asíntota vertical en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln|x|\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\ln|x|\right)=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\ln|x|}{x}=0\rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

71. Página 260

$\text{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{0\}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\cdot \text{sen}\, x}{x}\rightarrow\frac{0}{0}\rightarrow\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\cdot\cos x}{1}=a\rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

72. Página 260

a) $\text{Dom}\, y=\mathbb{R}$ $\qquad y'=3x^2+12x-15=0\rightarrow\begin{cases}x=-5\\ x=1\end{cases}$

En $(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)$, $y'>0\rightarrow$ Función creciente.

En $(-5, 1)$, $y'<0\rightarrow$ Función decreciente.

En $x=-5$ presenta un máximo, y en $x=1$, un mínimo.

b) $\text{Dom}\, y=\mathbb{R}-\{0\}$ $\qquad y'=\frac{4x^2-1}{x^2}=0\rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$

En $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, $y'>0\rightarrow$ Función creciente. En $\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $y'<0\rightarrow$ Función decreciente.

En $x=-\frac{1}{2}$ presenta un máximo, y en $x=\frac{1}{2}$, un mínimo.

c) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{3\}$

$y' = \frac{-2}{(x-3)^3} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ **No tiene máximos ni mínimos.**

En $(-\infty, 3)$ **,** $y' > 0 \longrightarrow$ **Función creciente.**

En $(3, +\infty)$ **,** $y' < 0 \longrightarrow$ **Función decreciente.**

d) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 - 72x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 18 \end{cases}$

En $(18, +\infty)$ **,** $y' > 0 \longrightarrow$ **Función creciente.**

En $(-\infty, 0) \cup (0, 18)$ **,** $y' < 0 \longrightarrow$ **Función decreciente.**

En $x = 18$ **presenta un mínimo.**

e) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

$y' = \frac{3^x \ln 3 - 3^{-x} \ln 3}{2} = 0 \rightarrow 3^x - \frac{1}{3^x} = 0 \rightarrow (3^x)^2 - 1 = 0 \rightarrow 3^x = 1 \rightarrow x = 0$

En $(-\infty, 0)$ **,** $y' < 0 \longrightarrow$ **Función decreciente.**

En $(0, +\infty)$ **,** $y' > 0 \longrightarrow$ **Función creciente.**

En $x = 0$ **presenta un mínimo.**

f) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

$y' = \frac{3x^4 - 2}{x^2} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$

En $\left(-\infty, -\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt[4]{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$ **,** $y' > 0 \longrightarrow$ **Función creciente.**

En $\left(-\sqrt[4]{\frac{2}{3}}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right)$ **,** $y' < 0 \longrightarrow$ **Función decreciente.**

En $x = -\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ **presenta un máximo, y en** $x = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ **, un mínimo.**

73. Página 260

a) $x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow x(x-2) \geq 0 \rightarrow \text{Dom } y = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$y' = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = 0 \rightarrow x = 1$ **, que no está en el dominio.**

En $(-\infty, 0)$ **,** $y' < 0 \longrightarrow$ **Función decreciente.**

En $(2, +\infty)$ **,** $y' > 0 \longrightarrow$ **Función creciente.**

b) $\text{Dom } y = (0, +\infty)$

$y' = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0 \rightarrow 2\ln x = 1 \rightarrow x = \sqrt{e}$

En $(0, \sqrt{e})$ **,** $y' > 0 \longrightarrow$ **Función creciente.**

En $(\sqrt{e}, +\infty)$ $y' < 0 \longrightarrow$ **Función decreciente.**

c) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{4\}$

$y' = \frac{-8}{(x-4)^2} < 0 \rightarrow$ La función es decreciente en su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

d) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

$y' = \frac{2x - x^2 \ln 3}{3^x} = 0 \rightarrow x(2 - x\ln 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{\ln 3} \end{cases}$

En $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{\ln 3}, +\infty\right)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

En $\left(0, \frac{2}{\ln 3}\right)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

En $x = 0$ presenta un mínimo, y en $x = \frac{2}{\ln 3}$ un máximo.

74. Página 260

a) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

$y' = \frac{-2x^2 + 4}{e^x} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

En $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

En $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

b) $x = -\sqrt{2} \rightarrow f(-\sqrt{2}) = \frac{-4\sqrt{2}+4}{e^{-\sqrt{2}}} \rightarrow \left(-\sqrt{2}, \frac{-4\sqrt{2}+4}{e^{-\sqrt{2}}}\right)$ es un mínimo.

$x = \sqrt{2} \rightarrow f(\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}+4}{e^{\sqrt{2}}} \rightarrow \left(\sqrt{2}, \frac{4\sqrt{2}+4}{e^{\sqrt{2}}}\right)$ es un máximo.

75. Página 260

a) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

b) Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2}{x^2-1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

c) $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2}{x^2-1} = f(x) \rightarrow$ Es simétrica respecto del eje Y.

d) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2}{x^2-1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -1$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2}{x^2-1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 1$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow$ Asíntota horizontal en $y = 1$.

$|x| > 1 \rightarrow \frac{x^2}{x^2-1} - 1 > 0 \rightarrow$ La gráfica está por encima de la asíntota.

Como tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \pm\infty$, no tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

e) $f'(x)=\dfrac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}=0\rightarrow x=0$

En $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$, $f'(x)>0 \longrightarrow f(x)$ es creciente.

En $(0,1)\cup(1,+\infty)$, $f'(x)<0 \longrightarrow f(x)$ es decreciente.

f) $x=0\rightarrow f(0)=0\rightarrow(0,0)$ es máximo.

No presenta mínimos.

76. Página 260

a) $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{0\}$

b) Cortes con el eje X: $f(x)=0\rightarrow\dfrac{x+1}{x^2}=0\rightarrow x=-1\rightarrow(-1,0)$

Corte con el eje Y: no tiene porque no está definida para $x=0$.

c) $f(-x)=\dfrac{(-x)+1}{(-x)^2}=\dfrac{-x+1}{x^2}\rightarrow$ No es simétrica par ni impar.

d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}=\infty\rightarrow$ Asíntota vertical en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x^2}=0\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y=0.$$

Como tiene asíntota horizontal cuando $x\longrightarrow+\infty$ y cuando $x\longrightarrow-\infty$, no tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

e) $f'(x)=\dfrac{-x-2}{x^3}=0\rightarrow x=-2$

En $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$, $f'(x)<0 \longrightarrow f(x)$ es decreciente.

En $(-2,0)$, $f'(x)>0 \longrightarrow f(x)$ es creciente.

f) $x=-2\rightarrow f(-2)=\dfrac{-1}{4}\rightarrow\left(-2,\dfrac{-1}{4}\right)$ es un mínimo.

No presenta máximos.

77. Página 260

a) $\text{Dom}\, y=\mathbb{R}$

$y'=3x^2-6x+2$

$y''=6x-6=0\rightarrow x=1$

En $(-\infty,1)$, $y''<0\longrightarrow$ Función convexa.

En $(1,+\infty)$, $y''>0\longrightarrow$ Función cóncava.

En $x=1$ presenta un punto de inflexión.

b) $\text{Dom}\, y=\mathbb{R}-\{-2\}$

$y'=\dfrac{4}{(x+2)^2}$

$y''=\dfrac{-8}{(x+2)^3}\neq 0$ en $\mathbb{R}\rightarrow$ No presenta puntos de inflexión.

En $(-\infty,-2)$, $y''>0\longrightarrow$ Función cóncava.

En $(-2,+\infty)$ $y''<0\longrightarrow$ Función convexa.

c) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 - 16x$ $\qquad$ $y'' = 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{16}{12}} = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

En $\left(-\infty, -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ presenta puntos de inflexión.

d) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$y' = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$ $\qquad$ $y'' = \dfrac{12x^2 + 4x}{(x^2-1)^3} \neq 0 \text{ en } \mathbb{R} \rightarrow$ No presenta puntos de inflexión.

En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $(1, 1)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

78. Página 260

a) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

$y' = e^x(2x + x^2)$ $\qquad$ $y'' = \dfrac{12x^2 + 4}{(x^2-1)^3} \neq 0 \rightarrow$ No presenta puntos de inflexión.

En $\left(-\infty, -2-\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+\sqrt{2}, +\infty\right)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $\left(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $x = -2 \pm \sqrt{2}$ presenta puntos de inflexión.

b) $\text{Dom } y = (0, +\infty) - \{1\}$

$y' = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ $\qquad$ $y'' = \dfrac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} = 0 \rightarrow \ln x = 2 \rightarrow x = e^2$

En $(0, 1) \cup (e^2, +\infty)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $(1, e^2)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $x = e^2$ presenta un punto de inflexión.

c) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

$y' = 1 - \cos x$ $\qquad$ $y'' = \text{sen } x = 0 \rightarrow x = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

En $(2k'\pi, 2k'\pi + \pi)$ con $k' \in \mathbb{Z}$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $((2k'-1)\pi, 2k'\pi)$ con $k' \in \mathbb{Z}$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ presenta puntos de inflexión.

d) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$

$y' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-16}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-16}}$

$y'' = \dfrac{-16}{(x^2-16)\sqrt{x^2-16}} < 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.

79. Página 260

$\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

$f(x) = 3x^2 - 18x + 18 = 0 \rightarrow x = 3 \pm \sqrt{3}$

En $\left(-\infty, 3-\sqrt{3}\right) \cup \left(3+\sqrt{3}, +\infty\right)$, $f'(x) > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $\left(3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}\right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

$f''(x) = 6x - 18 = 0 \rightarrow x = 3$

En $(-\infty, 3)$, $f''(x) < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $(3, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

$x = 3 \rightarrow f(3) = 0 \rightarrow (3, 0)$ es punto de inflexión.

$\left.\begin{array}{l} f'(3) = -9 \rightarrow m = -9 \\ y = -9x + n \rightarrow 0 = -9 \cdot 3 + n \rightarrow n = 27 \end{array}\right\} \rightarrow y = -9x + 27$ es la recta tangente a $f(x)$ que pasa por el punto (3, 0).

80. Página 260

$\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{ax} + xa\,e^{ax} = e^{ax}(1+ax) = 0 \rightarrow 1 + ax = 0 \rightarrow x = -\dfrac{1}{a} = -2 \rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

En $(-\infty, -2)$, $f'(x) < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $(-2, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow$ Función creciente.

$f''(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(1 + \dfrac{x}{4}\right) = 0 \rightarrow x = -4$

En $(-\infty, -4)$, $f''(x) < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $(-4, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

$f''(-2) > 0 \rightarrow \left(-2, \dfrac{-2}{e}\right)$ es un mínimo.

81. Página 260

$\text{Dom}\, f = (0, +\infty)$

$f'(x) = 1 + \dfrac{a}{x} = 0 \rightarrow x = -a = 3 \rightarrow a = -3 \rightarrow f(x) = x - 3\ln x$

En $(-\infty, 3)$, $f'(x) < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $(3, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow$ Función creciente.

$f''(x) = \dfrac{3}{x^2} > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es cóncava en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

$f''(3) > 0 \rightarrow \left(3, 3(1-\ln 3)\right)$ es un mínimo.

82. Página 260

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 2x + a = 0 \rightarrow f'(2) = 8 + a = 0 \rightarrow a = -8 \\ f(2) = b - 12 = 0 \rightarrow b = 12 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow x = 2,\ x = -\frac{4}{3}$$

En $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup (2, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

$$f''(x) = 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

En $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, $f''(x) < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$, $f''(x) > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

$f''(2) = 10 > 0 \rightarrow (2, 0)$ es un mínimo.

83. Página 260

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow f''(x) = 6x + 2a = 0 \rightarrow x = \frac{-a}{3} = \frac{4}{3} \rightarrow a = -4 \\ f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0 \rightarrow f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \rightarrow b = -3 - 2a = 5 \\ f(1) = 1 - 4 + 5 + c = 2 + c = 0 \rightarrow c = -2 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5 = 0 \rightarrow x = 1,\ x = \frac{5}{3}$$

En $(-\infty, 1) \cup \left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$, $f'(x) > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $\left(1, \frac{5}{3}\right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

$$f''(x) = 6x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

En $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$, $f''(x) < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$, $f''(x) > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

84. Página 261

a) • $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \to x^2 - 2x - 8 = 0 \to \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases} \to (4, 0), (-2, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$f(0) = -8 \to (0, -8)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

Como *f*(*x*) es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 2x - 8) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2x - 8) = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = 2x - 2 = 0 \to x = 1$

En el intervalo $(1, +\infty)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

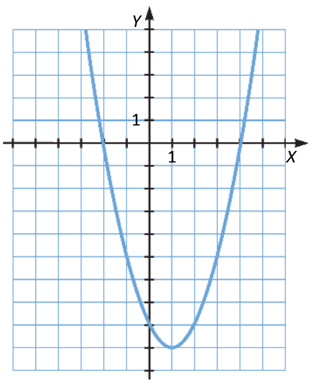
En el intervalo $(-\infty, 1)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

La función decrece a la izquierda de $x = 1$ y crece a la derecha $\to x = 1$ es un mínimo:

$f(1) = -9 \to (1, -9)$ es un mínimo.

• Concavidad y convexidad:

$f''(x) = 2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \to$ La función es cóncava en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.



b) • $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \to x^3 - x^2 = x^2(x - 1) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \to (0, 0), (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$f(0) = 0 \to (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

Como *f*(*x*) es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x^2) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - x^2) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=0\rightarrow 3x^2-2x=x(3x-2)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

En $(-\infty,\ 0)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$, $f'(x)>0\rightarrow f(x)$ es creciente.

En el intervalo $\left(0,\frac{2}{3}\right)$, $f'(x)<0\rightarrow f(x)$ es decreciente.

La función decrece a la izquierda de $x=\frac{2}{3}$ y crece a la derecha $\rightarrow$ $x=\frac{2}{3}$ es un mínimo:

$f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{27}\rightarrow\left(\frac{2}{3},-\frac{4}{27}\right)$ es un mínimo.

La función crece a la izquierda de $x=0$ y decrece a la derecha $\rightarrow x=0$ es un máximo:

$f(0)=0\rightarrow(0,0)$ es un máximo.

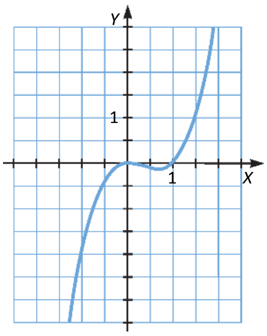
- Concavidad y convexidad:

$$f''(x)=6x-2=0\rightarrow x=\frac{1}{3}$$

En el intervalo $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$, $f''(x)>0\rightarrow f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$, $f''(x)<0\rightarrow f(x)$ es convexa.

$f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{27}\rightarrow\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{27}\right)$ es punto de inflexión.



c) - $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$f(x)=0\rightarrow 2x^3=0\rightarrow x=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte con el eje X.

$f(0)=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x^3\right)=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x^3\right)=+\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x)=0 \to 6x^2=0 \to x=0$

  En $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente $\to f(x)$ no tiene máximos ni mínimos.

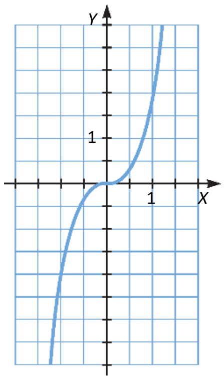
- Concavidad y convexidad:

  $f''(x)=12x=0 \to x=0$

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) > 0 \to f(x)$ es cóncava.

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) < 0 \to f(x)$ es convexa.

  $f(0)=0 \to (0,0)$ es punto de inflexión.



d) • $\text{Dom} f=\mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x)=0 \to x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x^2-x-2)=(x-1)(x+1)(x-2)=0 \to \begin{cases} x=2 \\ x=\pm 1 \end{cases} \to (2,0),(-1,0),(1,0)$ son los puntos de corte con el eje X.

  $f(0)=2 \to (0,2)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-2x^2-x+2)=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-2x^2-x+2)=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x)=0 \to 3x^2-4x-1=0 \to x=\dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}$

  En $\left(-\infty,\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2+\sqrt{7}}{3},+\infty\right)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

  En el intervalo $\left(\dfrac{2-\sqrt{7}}{3},\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

  La función crece a la izquierda de $x=\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}$ y decrece a la derecha $\to$ $x=\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}$ es un máximo.

  La función decrece a la izquierda de $x=\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$ y crece a la derecha $\to$ $x=\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$ es un mínimo.

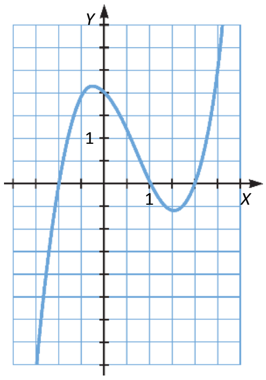
- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = 6x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}$

  En el intervalo $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

  En el intervalo $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

  $x = \frac{2}{3}$ es punto de inflexión.



e) - $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^3}{2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

  $f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{2}\right) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{2}\right) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = 0 \rightarrow \frac{3x^2}{2} = 0 \rightarrow x = 0$

  En $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente $\rightarrow f(x)$ no tiene ni máximos ni mínimos.

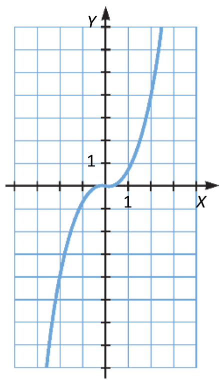
- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = 3x = 0 \rightarrow x = 0$

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

  $f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es punto de inflexión.



f) • $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow (1, 0), (2, 0)$ son los puntos de corte con el eje X.

$f(0) = 1 \rightarrow (0, 1)$ es el punto de corte con el eje Y.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{2} \right) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{2} \right) = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = x - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

En el intervalo $\left(\frac{3}{2}, +\infty \right)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

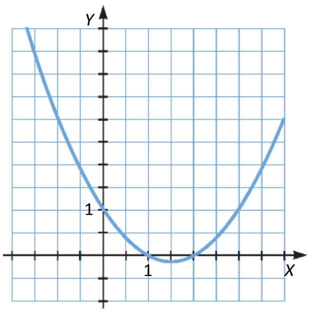
En el intervalo $\left(-\infty, \frac{3}{2} \right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

La función decrece a la izquierda de $x = \frac{3}{2}$ y crece a la derecha $\rightarrow$ $x = \frac{3}{2}$ es un mínimo:

$f\left(\frac{3}{2} \right) = -\frac{1}{8} \rightarrow \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{8} \right)$ es un mínimo.

• Concavidad y convexidad:

$f''(x) = 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es cóncava en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.



g) • $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow -x^2 + \frac{9}{4} = 0 \rightarrow x = \pm\frac{3}{2} \rightarrow \left(-\frac{3}{2}, 0 \right), \left(\frac{3}{2}, 0 \right)$ son los puntos de corte con el eje X.

$f(0) = \frac{9}{4} \rightarrow \left(0, \frac{9}{4} \right)$ es el punto de corte con el eje Y.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) = -\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = -2x = 0 \to x = 0$

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

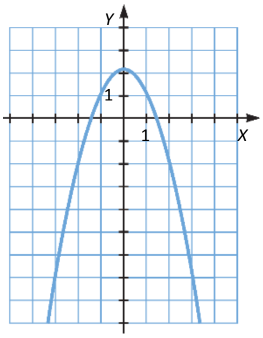
  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

  La función crece a la izquierda de $x = 0$ y decrece a la derecha $\to x = 0$ es un máximo:

  $f(0) = \frac{9}{4} \to \left(0, \frac{9}{4}\right)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = -2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \to$ La función es convexa en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.



85. Página 261

a) • Dom $y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $y = 0 \to x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \to \begin{cases} x = 4 \\ x = \pm 1 \end{cases} \to (4, 0), (-1, 0), (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  $x = 0 \to y = 4 \to (0, 4)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como *y* es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 - 4x^2 - x + 4\right) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 - 4x^2 - x + 4\right) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = 0 \to 3x^2 - 8x - 1 = 0 \to x = \frac{4 \pm \sqrt{19}}{3}$

  En $\left(-\infty, \frac{4 - \sqrt{19}}{3}\right) \cup \left(\frac{4 + \sqrt{19}}{3}, +\infty\right)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

  En el intervalo $\left(\frac{4 - \sqrt{19}}{3}, \frac{4 + \sqrt{19}}{3}\right)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

  La función crece a la izquierda de $x = \frac{4 - \sqrt{19}}{3}$ y decrece a la derecha $\to x = \frac{4 + \sqrt{19}}{3}$ es un máximo.

  La función decrece a la izquierda de $x = \frac{4 + \sqrt{19}}{3}$ y crece a la derecha $\to x = \frac{4 + \sqrt{19}}{3}$ es un mínimo.

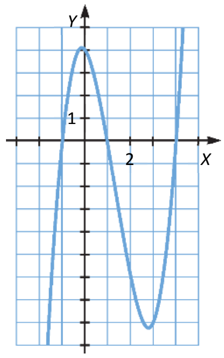
- Concavidad y convexidad:

  $y'' = 6x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3}$

  En el intervalo $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Es cóncava.

  En el intervalo $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Es convexa.

  $x = \frac{4}{3}$ es punto de inflexión.



b) • Dom $y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  No se pueden encontrar por Ruffini los puntos de corte con el eje *X*.

  $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como *y* es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 - 6x^2 + 12x + 4\right) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 - 6x^2 + 12x + 4\right) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow y' = 3(x-2)^2 \rightarrow x \neq 0 \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función siempre creciente.

  No presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

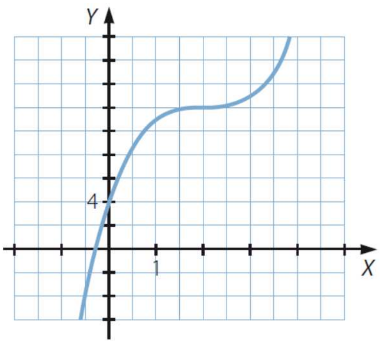
  $y'' = 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$

  En el intervalo $(2, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Es cóncava.

  En el intervalo $(-\infty; 2)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Es convexa.

  En $x = 2$ presenta un punto de inflexión.

Por último, como en $(-\infty, 2)$ la función es creciente, la imagen de 0 es positiva y $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 - 6x^2 + 12x + 4\right) = -\infty$, hay un punto de corte en $(-\infty, 0)$.



c) • Dom $y = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow x^3 + 3x = x(x^2 + 3) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

Como *y* es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 3x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 3x) = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$y' = 0 \rightarrow 3x^2 + 3 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

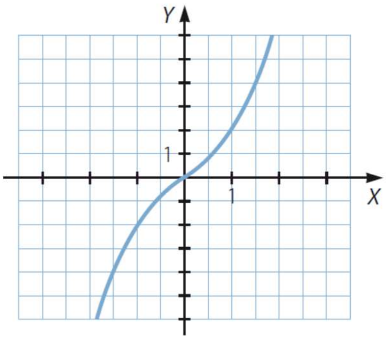
• Concavidad y convexidad:

$y'' = 6x = 0 \rightarrow x = 0$

En el intervalo $(0, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Es cóncava.

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Es convexa.

En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.



d) • Dom $y = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{7} \\ x = \pm 1 \end{cases} \rightarrow (-\sqrt{7}, 0), (\sqrt{7}, 0), (-1, 0), (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$x = 7 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 7)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

Como *y* es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 - 8x^2 + 7) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - 8x^2 + 7) = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$y' = 0 \rightarrow 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

En $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $x = -2$ y en $x = 2$ presenta dos mínimos y en $x = 0$, un máximo.

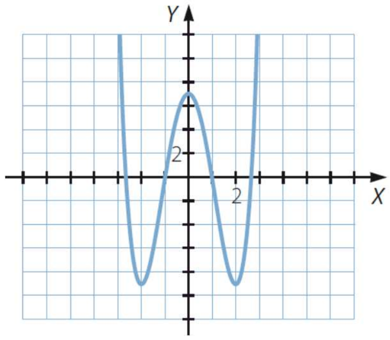
- Concavidad y convexidad:

$y'' = 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

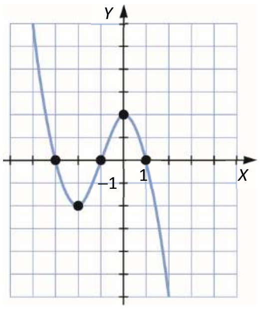
En $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{4}{3}}, +\infty\right)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Es cóncava.

En el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Es convexa.

En $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ presenta puntos de inflexión.



86. Página 261



Como es una función polinómica, es continua en todo $\mathbb{R}$.

Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \rightarrow$ En el intervalo $(-\infty, -2)$ es decreciente.

Como corta al eje *X* en (–3, 0) y en (–1, 0) → En el intervalo $(-2, 0)$ es creciente.

Como vuelve a cortar al eje *X* en (1, 0) y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ → En el intervalo $(0, -\infty)$ es decreciente.

Por tanto, en el punto (–2, 2) tiene un mínimo, y en el punto (0, 2) tiene un máximo.

Además, en algún punto del intervalo $(-2, 0)$ debe tener un punto de inflexión donde pase de cóncava a convexa.

87. Página 261

a) $f'(x) = 3x^2 + a = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-a}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow a = -4$

b) $f(x) = x^3 - 4x$

$f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases} \rightarrow (0, 0), (-2, 0), (2, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow$ (0, 0) es el punto de corte con el eje *Y*.

La función es positiva en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ y negativa en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.

c) $f'(x)=0 \to 3x^2-4=0 \to x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

En $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{4}{3}},+\infty\right)$, $f'(x)>0 \to f(x)$ es creciente.

En el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{4}{3}},\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$, $f'(x)<0 \to f(x)$ es decreciente.

$f''(x)=6x=0 \to x=0$

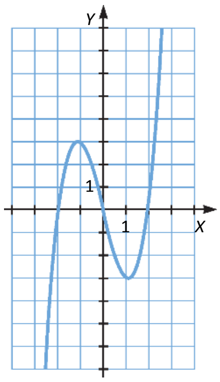
En el intervalo $(0,+\infty)$, $f''(x)>0 \to f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x)<0 \to f(x)$ es convexa.

d) En $x=-\sqrt{\frac{4}{3}}$ tiene un máximo. En $x=\sqrt{\frac{4}{3}}$ tiene un mínimo.

En $x=0$ tiene un punto de inflexión.

e)



El recorrido de la función es todo $\mathbb{R}$.

88. Página 261

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ $f''(x)=6x+2a$

Tiene un extremo relativo en $x=2$ $\to f'(2)=0 \to 12+4a+b=0$

Tiene un punto de inflexión en $x=0$ $\to f''(0)=0 \to 2a=0 \to a=0 \to b=-12$

Pasa por el punto $(1,-5)$ $\to f(1)=1+a+b+c=-5 \to 1-12+c=-5 \to c=6$

Por tanto, la función es: $f(x)=x^3-12x+6$

Para obtener su representación gráfica, analizamos sus características:

- $\text{Dom } f=\mathbb{R}$
- Cortes con los ejes:

  $f(x)=0 \to x^3-12x+6=0 \to$ Las soluciones de esta ecuación son los puntos de corte con el eje *X*.

  $f(0)=6 \to (0,6)$ es el punto de corte con el eje *Y*.
- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-12x+6\right)=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-12x+6\right)=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x)=0 \rightarrow 3x^2-12=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm 2$

  En el intervalo $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$, $f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

  En el intervalo $(-2, 2)$, $f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

  En $x=-2$ presenta un máximo, y en $x=2$ un mínimo.

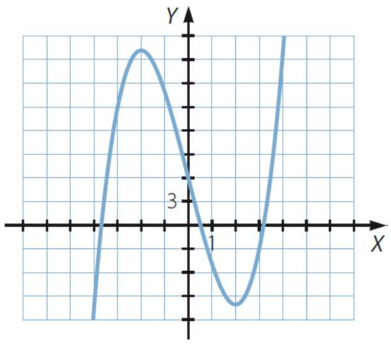
- Concavidad y convexidad:

  $f''(x)=6x=0 \rightarrow x=0$

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x)>0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x)<0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

  En $x=0$ presenta un punto de inflexión.



89. Página 261

a) $x^2-1=0 \rightarrow x=\pm 1 \rightarrow \text{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

$f(x)=0 \rightarrow \dfrac{3x^2}{x^2-1}=0 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x=0 \rightarrow f(0)=0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

b) La función es positiva en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y negativa en el intervalo $(-1,1)$.

c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2}{x^2-1}=\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2}{x^2-1}=\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2}{x^2-1}=3\\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2}{x^2-1}=3\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y=3.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

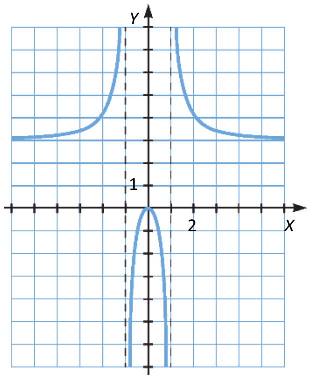
d) $f'(x)=\dfrac{-6x}{(x^2-1)^2}=0 \rightarrow x=0$

En $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$, $f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(0,1)\cup(1,+\infty)$, $f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

e) En $x = 0$ presenta un máximo.

La gráfica aproximada sería:



90. Página 261

a) $x+1=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow \text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$f(x)=0 \rightarrow \dfrac{-x^2}{x+1}=0 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x = 0 \longrightarrow f(0) = 0 \longrightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

b) La función es positiva en el intervalo $(-\infty, -1)$ y negativa en el intervalo $(-1, +\infty)$.

c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{-x^2}{x+1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-x^2}{x+1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x^2}{x+1} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x^2}{x^2+x} = -1 \rightarrow m = -1 \\ \lim\limits_{x\to \infty} (f(x)-mx) = \lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{-x^2}{x+1}+x\right) = \lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 1 \rightarrow n = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y = -x+1.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

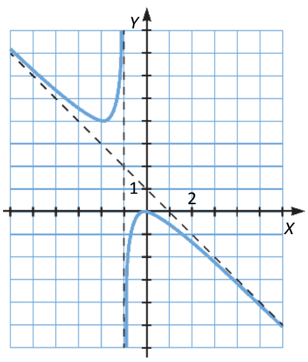
d) $f'(x) = \dfrac{-x(x+2)}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

En $(-2,-1) \cup (-1,0)$, $f'(x) > 0 \longrightarrow f(x)$ es creciente.

En $(-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$, $f'(x) < 0 \longrightarrow f(x)$ es decreciente.

En $x = -2$, la función tiene un mínimo, y en $x = 0$ un máximo.

e)



91. Página 261

a) $x^2-4=0 \rightarrow x=\pm 2 \rightarrow \text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

$f(x)=0 \rightarrow \dfrac{x^3}{x^2-4}=0 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x=0 \rightarrow f(0)=0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

$\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3}{x^2-4}=\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=-2$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3}{x^2-4}=\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3}{x^2-4}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{x^2-4}=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{x^3-4x}=1\rightarrow m=1\\ \lim\limits_{x\to \infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-4}-x\right)=\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{4x}{x^2-4}\right)=0\rightarrow n=0\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y=x.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

b) $f'(x)=\dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}=0 \rightarrow \begin{cases} x=0\\ x=\pm 2\sqrt{3}\end{cases}$

En $(-\infty,-2\sqrt{3})\cup(2\sqrt{3},+\infty)$, $f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(-2\sqrt{3},-2)\cup(-2,2)\cup(2,2\sqrt{3})$, $f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $x=-2\sqrt{3}$, la función tiene un máximo, y en $x=2\sqrt{3}$ un mínimo.

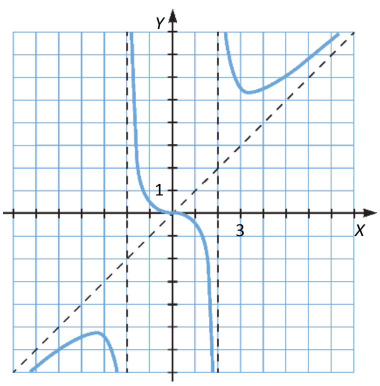
c) $f''(x)=\dfrac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}=0 \rightarrow x=0$

En $(-\infty,-2)\cup(0,2)$, $f''(x)<0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

En $(-2,0)\cup(2,+\infty)$, $f''(x)>0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

En $x=0$ presenta un punto de inflexión.

d)



92. Página 261

a) • $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

• Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow \dfrac{x^2 - 1}{x} = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow (-1, 0), (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje X.

No tiene punto de corte con el eje Y porque no está definida en $x = 0$.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 1}{x} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} (y - mx) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 - 1}{x} - x \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{-1}{x} \right) = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y = x.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

• Crecimiento y decrecimiento:

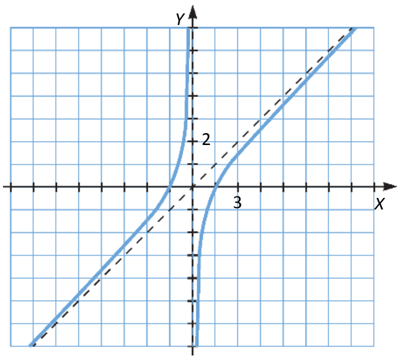
$y' = \dfrac{x^2 + 1}{x^2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

• Concavidad y convexidad:

$y'' = -\dfrac{2}{x^3} \neq 0 \rightarrow$ No tiene puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y'' > 0 \rightarrow$ La función es cóncava.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $y'' < 0 \rightarrow$ La función es convexa.



b) • $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x}{x^2-1}=\infty \to$$ Asíntota vertical en $x=-1$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2-1}=\infty \to$$ Asíntota vertical en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=0\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=0\end{array}\right\}\to$$ Asíntota horizontal en $y=0$.

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y'=\frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2}<0\ \forall x\in\mathbb{R}\to$$ La función es decreciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

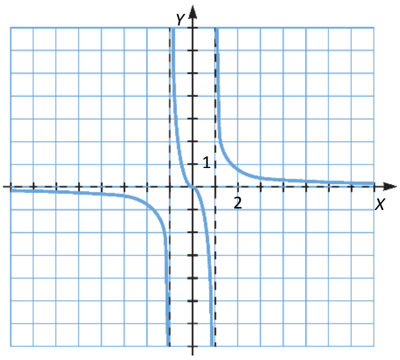
- Concavidad y convexidad:

$$y''=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=0\to x=0$$

En $(-\infty,-1)\cup(0,1)$, $y''<0\to$ La función es convexa.

En $(-1,0)\cup(1,+\infty)$, $y''>0\to$ La función es cóncava.

En $x=0$ tiene un punto de inflexión.



c) - Dom $y=\mathbb{R}-\{0\}$

- Cortes con los ejes:

$y=0\to\dfrac{4-x^2}{x}=0\to x=\pm2\to(-2,0),(2,0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$x=0\to y=0\to(0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4-x^2}{x}=\infty\to$$ Asíntota vertical en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4-x^2}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4-x^2}{x}=-\infty\end{array}\right\}\to$$ No tiene asíntotas horizontales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4-x^2}{x^2}=-1\to m=-1\\ \lim\limits_{x\to\infty}(y-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-x^2}{x}+x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4}{x}\right)=0\to n=0\end{array}\right\}\to \text{Asíntota oblicua en } y=-x.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

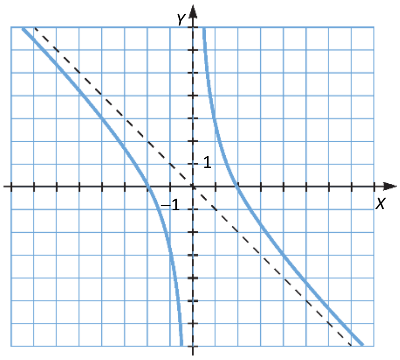
$y'=\dfrac{-\left(x^2+4\right)}{x^2}<0\ \forall x\in\mathbb{R}\to$ La función es decreciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$y''=\dfrac{8}{x^3}\neq 0\to$ No tiene puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y''<0 \to$ La función es convexa.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $y''>0 \to$ La función es cóncava.



d) - Dom $y=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

- Cortes con los ejes:

$f(x)=0\to\dfrac{x^3}{x^2-1}=0\to x=0\to(0,0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x=0\to y=0\to(0,0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^3-x}=1\to m=1\\ \lim\limits_{x\to\infty}(y-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)=0\to n=0\end{array}\right\}\to \text{Asíntota oblicua en } y=x.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

En $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $x = -\sqrt{3}$, la función tiene un máximo, y en $x = \sqrt{3}$ un mínimo.

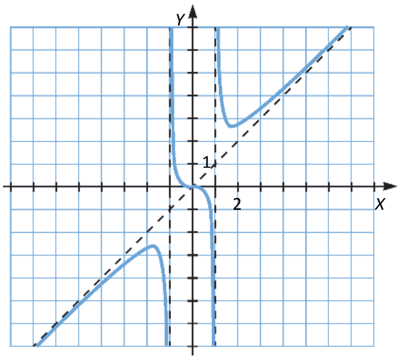
- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0 \rightarrow x = 0$$

En $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$, $y'' < 0 \rightarrow$ La función es convexa.

En $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ La función es cóncava.

En $x = 0$ tiene un punto de inflexión.



93. Página 261

a) - $1 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow \dfrac{x^2-4}{1-x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (-2, 0), (2, 0)$ son los puntos de corte con el eje X.

$x = 0 \rightarrow y = -4 \rightarrow (0, -4)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-4}{1-x^2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -1$.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-4}{1-x^2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-4}{1-x^2} = -1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-4}{1-x^2} = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = -1.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{-6x}{(x^2-1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

En $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

En $(0,1)\cup(1,+\infty)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

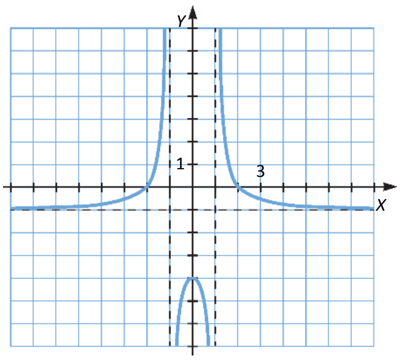
En $x = 0$ presenta un máximo.

- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{6(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} \neq 0 \rightarrow \text{ No hay puntos de inflexión.}$$

En $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, $y'' > 0 \longrightarrow$ Función cóncava.

En el intervalo $(-1, 1)$, $y'' < 0 \longrightarrow$ Función convexa.



b) • $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow \text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow \dfrac{1-x^2}{x^2-4} = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow (-1,0),(1,0)$ son los puntos de corte con el eje X.

$x = 0 \rightarrow y = -\dfrac{1}{4} \rightarrow \left(0,-\dfrac{1}{4}\right)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1-x^2}{x^2-4} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -2$.

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-x^2}{x^2-4} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1-x^2}{x^2-4} = -1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1-x^2}{x^2-4} = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = -1.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas, ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow +\infty$ y cuando $x \longrightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{6x}{(x^2-4)^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

En $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$, $y'<0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $(0,2)\cup(2,+\infty)$, $y'>0 \rightarrow$ Función creciente.

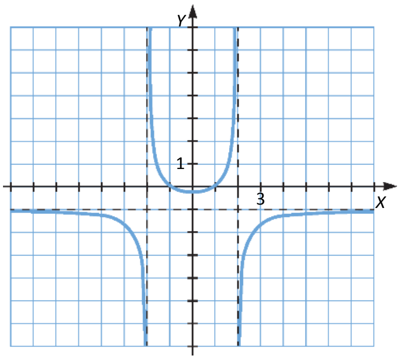
En $x=0$ presenta un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

$$y''=\frac{-6(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}\neq 0 \rightarrow \text{ No hay puntos de inflexión.}$$

En $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$, $y''<0 \rightarrow$ Función convexa.

En el intervalo (–2, 2), $y''>0 \rightarrow$ Función cóncava.



c) • $x^2-1=0 \rightarrow x=\pm 1 \rightarrow \text{Dom } y=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

- Cortes con los ejes:

$y=0 \rightarrow \frac{x^2-4}{x^2-1}=0 \rightarrow x=\pm 2 \rightarrow (-2,0),(2,0)$ son los puntos de corte con el eje X.

$x=0 \rightarrow y=4 \rightarrow (0,4)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-4}{x^2-1}=\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4}{x^2-1}=\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2-4}{x^2-1}=1\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2-4}{x^2-1}=1\end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y=1.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y'=\frac{6x}{(x^2-1)^2}=0 \rightarrow x=0$$

En $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$, $y'<0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $(0,1)\cup(1,+\infty)$, $y'>0 \rightarrow$ Función creciente.

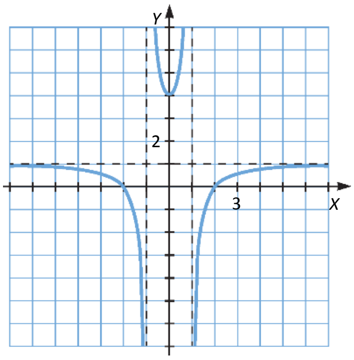
En $x=0$ presenta un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{-6\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3} \neq 0 \rightarrow$$ No hay puntos de inflexión.

En $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $(-1,1)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.



d) • $4-x^2=0 \rightarrow x=\pm 2 \rightarrow \text{Dom } y = \mathbb{R}-\{-2,2\}$

- Cortes con los ejes:

$y=0 \rightarrow \frac{1-x^2}{4-x^2}=0 \rightarrow x=\pm 1 \rightarrow (-1,0),(1,0)$ son los puntos de corte con el eje X.

$x=0 \rightarrow y=\frac{1}{4} \rightarrow \left(0,\frac{1}{4}\right)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to -2} \frac{1-x^2}{4-x^2}=\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=-2$.

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{1-x^2}{4-x^2}=\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1-x^2}{4-x^2}=1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1-x^2}{4-x^2}=1 \end{array}\right\} \rightarrow$$ Asíntota horizontal en $y=1$.

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{-6x}{\left(x^2-4\right)^2}=0 \rightarrow x=0$$

En $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $(0,2)\cup(2,+\infty)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

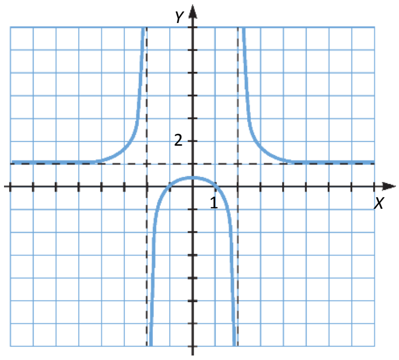
En $x=0$ presenta un máximo.

- Concavidad y convexidad:

$y'' = \dfrac{6(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} \neq 0 \rightarrow$ No hay puntos de inflexión.

En $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$, $y''>0 \longrightarrow$ Función cóncava.

En el intervalo $(-2,2)$, $y''<0 \longrightarrow$ Función convexa.



94. Página 261

a) • $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-2\}$

- Cortes con los ejes:

$y=0 \rightarrow \dfrac{x}{x+2} = 0 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x}{x+2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=-2$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x+2} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+2} = 1\end{array}\right\} \rightarrow$ Asíntota horizontal en $y=1$.

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow +\infty$ y cuando $x \longrightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

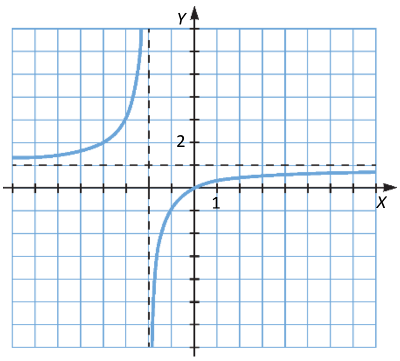
$y' = \dfrac{2}{(x+2)^2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$y'' = \dfrac{-4}{(x+2)^3} \neq 0 \rightarrow$ No hay puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, -2)$, $y''>0 \longrightarrow$ Función cóncava.

En el intervalo $(-2, +\infty)$, $y''<0 \longrightarrow$ Función convexa.



b) • Dom $y = \mathbb{R} - \{-2\}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{x+2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2}{x+2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -2$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x+2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x+2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2+2x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} (y - mx) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x+2} - x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{-2x}{x+2}\right) = -2 \rightarrow n = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y = x - 2.$$

  No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $$y' = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

  En $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

  En $(-4, -2) \cup (-2, 0)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

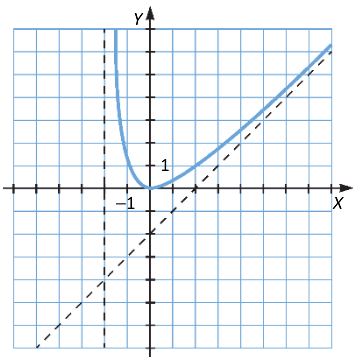
  En $x = -4$, la función tiene un máximo, y en $x = 0$, un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

  $$y'' = \frac{8}{(x+2)^3} \neq 0 \rightarrow \text{No hay puntos de inflexión.}$$

  En el intervalo $(-\infty, -2)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

  En el intervalo $(-2, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.



c) • Dom $y = \mathbb{R} - \{-2\}$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^3}{x+2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3}{x+2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x+2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x+2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2 + 2x} = \infty \rightarrow$ No hay asíntotas oblicuas.

Tiene dos ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x+2} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x+2} = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

En el intervalo $(-\infty, -3)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $(-3, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $x = -3$, la función tiene un mínimo.

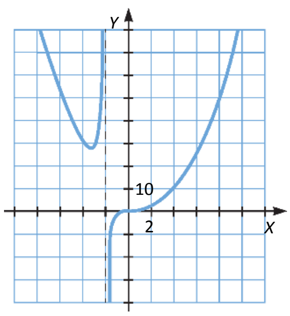
- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{2x(x^2 + 6x + 12)}{(x+2)^3} = 0 \rightarrow x = 0$$

En el intervalo $(-2, 0)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $x = 0$, la función tiene un punto de inflexión.



d) • Dom $y = \mathbb{R} - \{-2\}$

• Cortes con los ejes:

$y = 0 \to \dfrac{x^3}{(x+2)^2} = 0 \to x = 0 \to (0,0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x = 0 \to y = 0 \to (0,0)$ es el punto de corte con el eje Y.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3}{(x+2)^2} = \infty \to$ Asíntota vertical en $x = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3}{(x+2)^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{(x+2)^2} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{x(x+2)^2} = 1 \to m = 1 \\ \lim\limits_{x\to \infty} (y - mx) = \lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^3}{(x+2)^2} - x\right) = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-4x^2 - 4x}{(x+2)^2} = -4 \to n = -4 \end{array}\right\} \to \text{Asíntota oblicua en } y = x - 4.$$

No tiene ramas parabólicas porque tiene asíntotas oblicuas.

• Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{x^2(x+6)}{(x+2)^3} = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$$

En $(-\infty, -6) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

En el intervalo $(-6, -2)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

En $x = -6$ la función tiene un máximo.

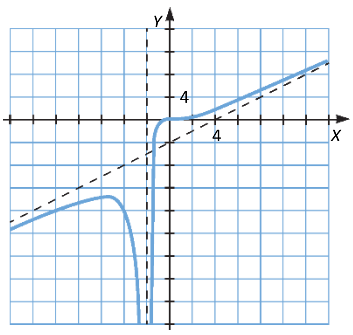
• Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{24x}{(x+2)^4} = 0 \to x = 0$$

En $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$, $y'' < 0 \to$ Función convexa.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $y'' > 0 \to$ Función cóncava.

En $x = 0$, la función tiene un punto de inflexión.



95. Página 262

a) • $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

• Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow \dfrac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

No tiene punto de corte con el eje Y porque no está definida para $x = 0$.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-1}{x^2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

• Crecimiento y decrecimiento:

$y' = \dfrac{-x+2}{x^3} = 0 \rightarrow x = 2$

En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $(0, 2)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $x = 2$ presenta un máximo.

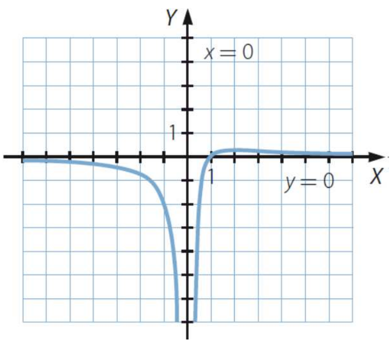
• Concavidad y convexidad:

$y'' = \dfrac{2x-6}{x^4} = 0 \rightarrow x = 3$

En $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En el intervalo $(3, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $x = 3$ presenta un punto de inflexión.



b) • $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow \text{Dom } y = \mathbb{R} - \{3\}$

• Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow \dfrac{x-2}{x-3} = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x = 0 \rightarrow y = \dfrac{2}{3} \rightarrow \left(0, \dfrac{2}{3}\right)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x-3}=\infty \to$$ Asíntota vertical en $x=3$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x-3}=1\to$$ Asíntota horizontal en $y=1$.

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

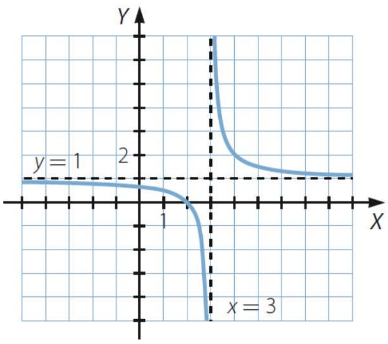
$$y'=\frac{-1}{(x-3)^2}<0\to$$ La función es decreciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$$y''=\frac{2}{(x-3)^3}\neq 0\to$$ No presenta puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, 3)$, $y''<0\to$ Función convexa.

En el intervalo $(3, +\infty)$, $y''>0\to$ Función cóncava.



c) • $x+1=0\to x=-1\to \text{Dom } y=\mathbb{R}-\{-1\}$

- Cortes con los ejes:

$y=0\to\frac{x^2}{x+1}=0\to x=0\to(0,0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x=0\to y=0\to(0,0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2}{x+1}=\infty\to$$ Asíntota vertical en $x=-1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1}=+\infty\\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x+1}=-\infty\end{array}\right\}\to$$ No tiene asíntotas horizontales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x}=1\to m=1\\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}=-1\to n=-1\end{array}\right\}\to$$ Asíntota oblicua en $y=x-1$.

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

En $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$, $y'>0 \to$ Función creciente.

En $(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$, $y'<0 \to$ Función decreciente.

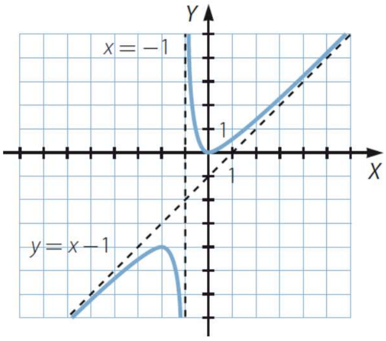
En $x=-2$ presenta un máximo, y en $x=0$ un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{2}{(x+1)^3} \neq 0 \to \text{ No presenta puntos de inflexión.}$$

En el intervalo $(-\infty, -1)$, $y''<0 \to$ Función convexa.

En el intervalo $(-1, +\infty)$, $y''>0 \to$ Función cóncava.



d) - $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$$y=0 \to \frac{x}{x^2+1} = 0 \to x=0 \to (0,0) \text{ es el punto de corte con el eje } X.$$

$x=0 \to y=0 \to (0,0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \to \text{ Asíntota horizontal en } y=0.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{-x^2+1}{(x+1)^2} = 0 \to x = \pm 1$$

En $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, $y'<0 \to$ Función decreciente.

En el intervalo $(-1,1)$, $y'>0 \to$ Función creciente.

En $x=1$ presenta un máximo y en $x=-1$, un mínimo.

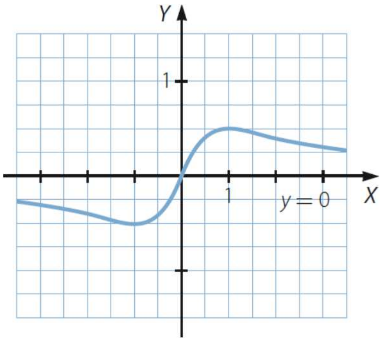
- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = 0 \to x(2x^2 - 6) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

En $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$, $y'' < 0 \to$ Función convexa.

En $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, $y'' > 0 \to$ Función cóncava.

En $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$ presenta puntos de inflexión.

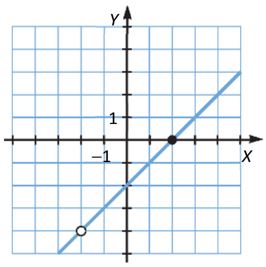


96. Página 262

a) $x + 2 = 0 \to x = -2 \to \text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-2\} \to a = -2$

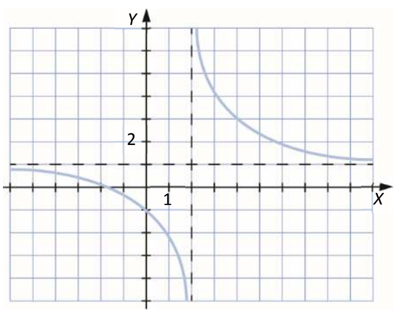
b) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2} \to \frac{0}{0} \to \lim\limits_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} (x-2) = -4 \to$ No tiene asíntota vertical en $x = -2$.

c)



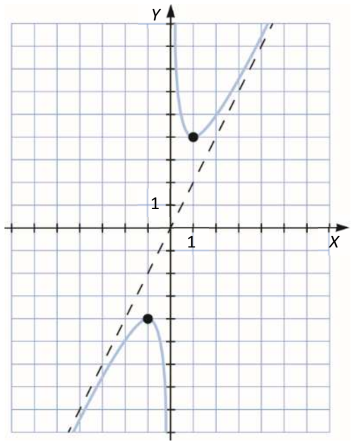
97. Página 262

Respuesta abierta. Por ejemplo:



98. Página 262

Respuesta abierta. Por ejemplo:



99. Página 262

a) • $2-x\geq 0\rightarrow x\leq 2\rightarrow \text{Dom } y=(-\infty,2]$

• Cortes con los ejes:

$y=0\rightarrow\sqrt{2-x}=0\rightarrow x=2\rightarrow(2,0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x=0\rightarrow y=\sqrt{2}\rightarrow\left(0,\sqrt{2}\right)$ es el punto de corte con el eje Y.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}=+\infty\rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2-x}}{x}=0\rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

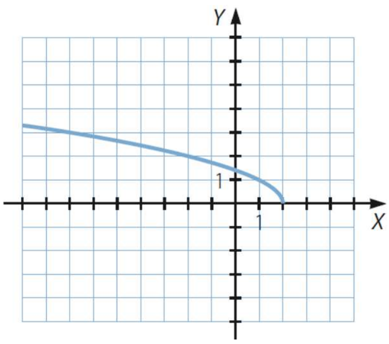
Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}=+\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$y'=\dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}}<0\rightarrow$ Función siempre decreciente.

• Concavidad y convexidad:

$y''=\dfrac{-1}{2(2-x)\sqrt{2-x}}<0\rightarrow$ Función siempre convexa.



b) • $1-\frac{x^2}{25}\geq 0 \rightarrow x\in[-5,5]\rightarrow \text{Dom } y=[-5,5]$

- Cortes con los ejes:

  $\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}=0\rightarrow x^2-25=0\rightarrow x=\pm 5\rightarrow(-5,0),(5,0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  $x=0\rightarrow y=2\rightarrow(0,2)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $$y'=\frac{-4x}{10\sqrt{25-x^2}}=0\rightarrow x=0$$

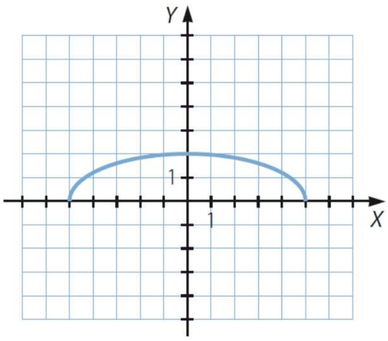
  En el intervalo (–5, 0), $y'>0\rightarrow$ Función creciente.

  En el intervalo (0, 5), $y'<0\rightarrow$ Función decreciente.

  En $x=0$ presenta un máximo.

- Concavidad y convexidad:

  $y''=\frac{-100}{10(25-x^2)\sqrt{25-x^2}}<0\rightarrow$ Función convexa.



c) • $x^2-9\geq 0\rightarrow x\in(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)\rightarrow \text{Dom } y=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$

- Cortes con los ejes:

  $\sqrt{x^2-9}=0\rightarrow x=\pm 3\rightarrow(-3,0),(3,0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  No tiene punto de corte con el eje *Y* porque no está definida en $x=0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-9}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-9}=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}=1\rightarrow m=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-9}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-9}{\sqrt{x^2-9}+x}=0\rightarrow n=0\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota oblicua } y=x.$$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}=1\rightarrow m=-1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-9}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-9}{\sqrt{x^2-9}-x}=0\rightarrow n=0\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota oblicua } y=-x.$$

- Crecimiento y decrecimiento:

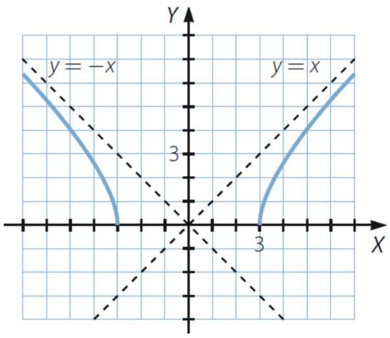
$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} = 0 \rightarrow x = 0$$

En el intervalo $(-\infty, -3)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $(3, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{-9}{(x^2-9)\sqrt{x^2-9}} < 0 \rightarrow \text{ Función siempre convexa.}$$



d) • $x+3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \rightarrow x \in [-3, +\infty) \rightarrow \text{Dom } y = [-3, +\infty)$

- Cortes con los ejes:

$-\sqrt{x+3} = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow (-3, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x = 0 \rightarrow y = -\sqrt{3} \rightarrow \left(0, -\sqrt{3}\right)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\sqrt{x+3}\right) = -\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-\sqrt{x+3}}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

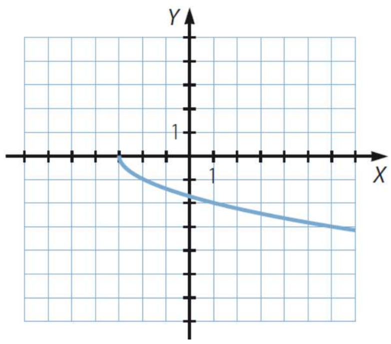
$$\lim_{x \to +\infty} \left(-\sqrt{x+3}\right) = -\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{-1}{2\sqrt{x+3}} < 0 \rightarrow \text{ Función siempre decreciente.}$$

- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{-1}{4(x+3)\sqrt{x+3}} > 0 \rightarrow \text{ Función siempre cóncava.}$$



100. Página 262

a) $x^2+3x\geq 0\rightarrow x\in(-\infty,-3]\cup[0,+\infty)\rightarrow \text{Dom}\,f=(-\infty,-3]\cup[0,+\infty)$

Cortes con el eje *X*: $\sqrt{x^2+3x}-x=0\rightarrow x=0\rightarrow(0,0)$

Corte con el eje *Y*: $x=0\rightarrow f(0)=0\rightarrow(0,0)$

b) No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\dfrac{3}{2}\rightarrow$ Asíntota horizontal en $y=\dfrac{3}{2}$.

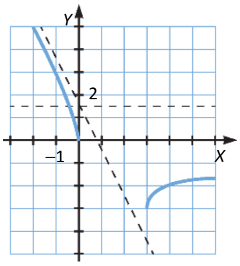
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-2\\ \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}\rightarrow$ Tiene asíntota oblicua en $y=-2x+\dfrac{3}{2}$.

c) $f'(x)=\dfrac{2x+3-2\sqrt{x^2+3x}}{2\sqrt{x^2+3x}}\neq 0\ \forall x\in\text{Dom f}\rightarrow$ No tiene máximos ni mínimos.

En el intervalo $(-\infty,-3)$, $f'(x)<0\rightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $(0,+\infty)$, $f'(x)>0\rightarrow$ Función creciente.

d)



101. Página 262

a) $x^2+3x\geq 0\rightarrow x\in(-\infty,-3]\cup[0,+\infty)\rightarrow \text{Dom}\,f=(-\infty,-3]\cup[0,+\infty)$

Cortes con el eje *X*: $\sqrt{x^2+3x}-2x=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}\rightarrow(0,0),(1,0)$

Corte con el eje *Y*: $x=0\rightarrow f(0)=0\rightarrow(0,0)$

b) No tiene asíntotas verticales.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-2x\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-3x^2}{\sqrt{x^2+3x}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x}{3}=-\infty\end{array}\right\}\rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}-2x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-3x^2}{x\left(\sqrt{x^2+3x}+2x\right)}=-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}\rightarrow$ Asíntota oblicua en $y=-x+\dfrac{3}{2}$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}-2x}{x}=-3\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+3x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}-x}=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}\rightarrow$ Asíntota oblicua en $y=-3x-\dfrac{3}{2}$.

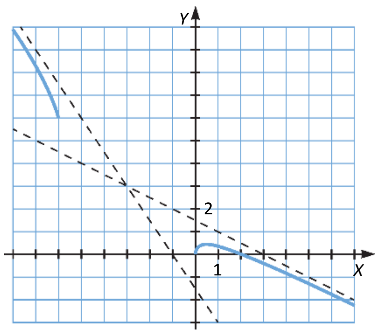
c) $f'(x)=\dfrac{2x+3-4\sqrt{x^2+3x}}{2\sqrt{x^2+3x}}=0\rightarrow x=\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}$

En $(-\infty,-3)\cup\left(\sqrt{3}-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$, $f'(x)<0\longrightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $\left(0,\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}\right)$, $f'(x)>0\longrightarrow$ Función creciente.

En $x=\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}$ $f(x)$ tiene un máximo.

d)



102. Página 262

Gráfica 1: $f(x)=\sqrt{25-x^2}$

Gráfica 2: $g(x)=-3\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}$

Gráfica 3: $h(x)=\sqrt{x-1}$

Gráfica 4: $j(x)=\sqrt{x^2-4}$

103. Página 262

a) • $\text{Dom } y=\mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $xe^x=0\rightarrow x=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $x=0\rightarrow y=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^x\right)=+\infty\rightarrow$ No tiene asíntota horizontal.

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{e^{-x}}\right)\rightarrow\dfrac{\infty}{\infty}\rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{e^{-x}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{-e^{-x}}\right)=0\rightarrow$ Asíntota horizontal en $y=0$.

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^x}{x}=+\infty\rightarrow$ No hay asíntotas oblicuas.

  Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^x\right)=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = e^x(1+x) = 0 \rightarrow x = -1$

  En el intervalo $(-\infty, -1)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

  En el intervalo $(-1, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

  En $x = -1$ presenta un mínimo.

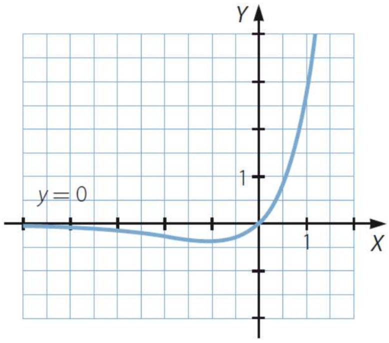
- Concavidad y convexidad:

  $y'' = e^x(1+x) + e^x = 0 \rightarrow x = -2$

  En el intervalo $(-\infty, -2)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

  En el intervalo $(-2, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

  En $x = -2$ presenta un punto de inflexión.



b) • $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $y = 0 \rightarrow \dfrac{e^{-x}+e^x}{2} = 0 \rightarrow \dfrac{1}{e^x} + e^x \neq 0 \rightarrow$ No tiene puntos de corte con el eje X.

  $x = 0 \rightarrow y = \dfrac{1+1}{2} = 1 \rightarrow (0, 1)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}+e^x}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}+e^x}{2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}+e^x}{2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}+e^x}{2x} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No hay asíntotas oblicuas.}$$

  Tiene ramas parabólicas:

  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}+e^x}{2} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}+e^x}{2} = +\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = \dfrac{-e^{-x}+e^x}{2} = 0 \rightarrow e^{-x} = e^x \rightarrow -x = x \rightarrow x = 0$

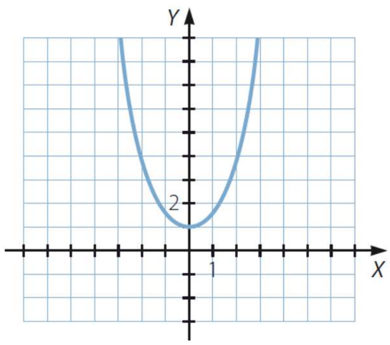
  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

  En $x = 0$ presenta un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

  $y'' = \dfrac{e^{-x}+e^x}{2} > 0 \rightarrow$ Función siempre cóncava.



c) • Dom $y = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$3x^2e^{-x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2e^{-x}) = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} (3x^2e^{-x}) = +\infty \rightarrow$ No hay asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2e^{-x}}{x} = -\infty \rightarrow$ No tiene asíntota oblicua.

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x^2e^{-x}) = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$y' = e^{-x}(6x - 3x^2) = 0 \rightarrow 3x(2-x) \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo (0, 2), $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $x = 0$ presenta un mínimo y en $x = 2$ un máximo.

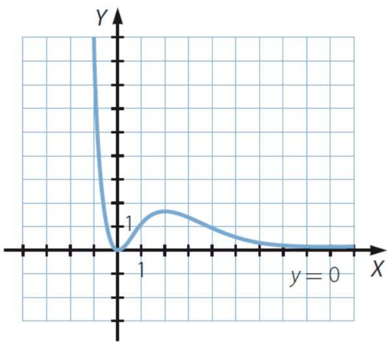
• Concavidad y convexidad:

$y'' = e^{-x}(3x^2 - 12x + 6) = 0 \rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$

En $(-\infty, 2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2}, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $x = 2 \pm \sqrt{2}$ presenta dos puntos de inflexión.



d) • Dom $y = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$\frac{x^2 - 1}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow (1,0), (-1,0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{e^{x^2}}\right)=0\to$ Asíntota horizontal en $y=0$.

  No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $$y'=\frac{2x-(x^2-1)2x}{e^{x^2}}=\frac{4x-2x^3}{e^{x^2}}=0\to x(4-2x^2)=0\to\begin{cases}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

  En $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(0,\sqrt{2})$, $y'>0\longrightarrow$ Función creciente.

  En $(-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2},+\infty)$, $y'<0\longrightarrow$ Función decreciente.

  En $x=\pm\sqrt{2}$ presenta dos máximos y en $x=0$, un mínimo.

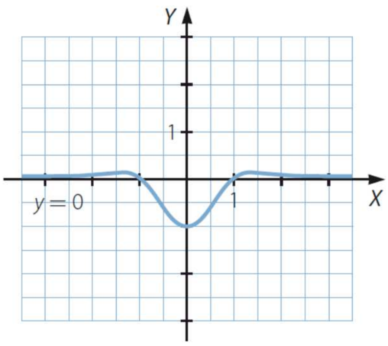
- Concavidad y convexidad:

  $$y''=\frac{4x^4-14x^2+4}{e^{x^2}}=0\to\begin{cases}x=\pm 0,56\\x=\pm 1,78\end{cases}$$

  En $(-\infty;-3,17)\cup(-0,56;0,56)\cup(3,17;+\infty)$, $y''>0\longrightarrow$ Función cóncava.

  En $(-3,17;-0,56)\cup(0,56;3,17)$, $y''<0\longrightarrow$ Función convexa.

  En $x=\pm 3,17$ y en $x=\pm 0,56$ presenta puntos de inflexión.



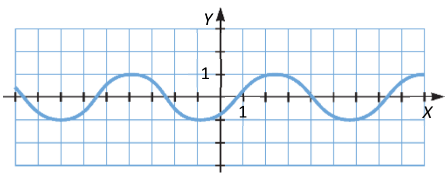
e) - $\text{Dom } y=\mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $sen\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0\to x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}\to\left\{\left(k\pi+\dfrac{\pi}{4},0\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  $x=0\to y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\to\left(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

  Es la función $sen\,x$ trasladada $\dfrac{\pi}{4}$ hacia la derecha.



f) • Dom $y = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$x^2 - sen^2 x = 0 \rightarrow x = sen\, x \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 - sen^2 x) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 - sen^2 x}{x} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 - sen^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x - 2\, sen\, x \cos x}{1} = \infty \rightarrow$ No tiene asíntota oblicua.

Tiene dos ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - sen^2 x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - sen^2 x) = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$y' = -2\, sen\, x \cos x + 2x = 0 \rightarrow x = 0$

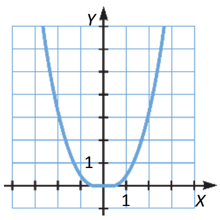
En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $x = 0$ presenta un mínimo.

• Concavidad y convexidad:

$y'' = 2\, sen^2 x - 2\cos^2 x + 2 \geq 0 \rightarrow$ Función siempre cóncava.



104. Página 262

a) • Dom $y = (0, +\infty)$

• Cortes con los ejes:

$x \ln x = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

No tiene punto de corte con el eje *Y* porque no está definida para $x = 0$.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to 0^+} (x \ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to+\infty} (x \ln x) = +\infty \rightarrow$ No hay asíntotas horizontales

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x \ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntota oblicua.

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to+\infty} (x \ln x) = +\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$y' = \ln x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{e}$

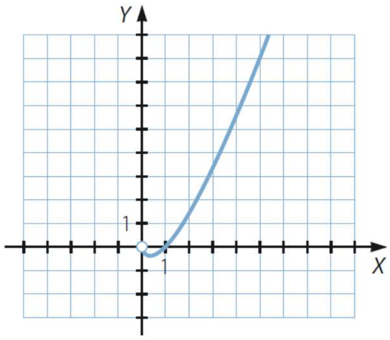
En $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $x = \dfrac{1}{e}$ presenta un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

$y'' = \dfrac{1}{x} > 0 \rightarrow$ Función siempre cóncava.



b) - $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$\log_2(x^2+1) = 0 \rightarrow x^2 + 1 = 1 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\log_2(x^2+1)\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\log_2(x^2+1)\right) = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_2(x^2+1)}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\log_2(x^2+1)\right) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\log_2(x^2+1)\right) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$y' = \dfrac{2x}{\ln 2(x^2+1)} = 0 \rightarrow x = 0$

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $x = 0$ presenta un mínimo.

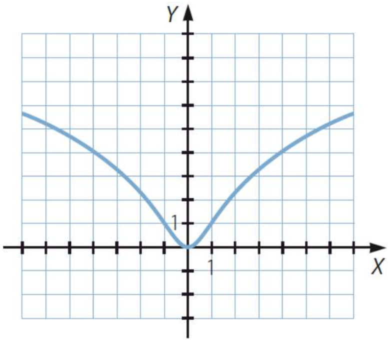
- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{2-2x^2}{\ln 2(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $y'' < 0$ → Función convexa.

En $(-1, 1)$, $y'' > 0$ → Función cóncava.

En $x = \pm 1$ presenta dos puntos de inflexión.



c) • $\text{Dom}\ y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$\ln\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No hay asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2} - x\right) = -\ln 2 = -0{,}69 \rightarrow n = -0{,}69\end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y = x - 0{,}69.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{x} = 1 \rightarrow m = -1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2} + x\right) = -\ln 2 = -0{,}69 \rightarrow n = -0{,}69\end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y = -x - 0{,}69.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntotas oblicuas.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{2\left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)}{e^x + e^{-x}} = 0 \to e^x - \frac{1}{e^x} = 0 \to e^{2x} = 1 \to x = 0$$

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

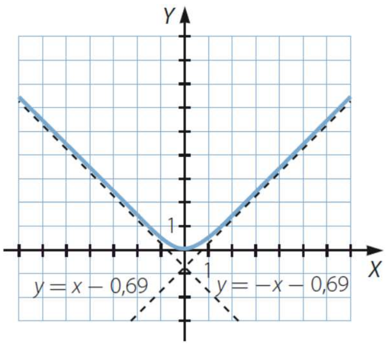
En el intervalo $(0, +\infty)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

En $x = 0$ presenta un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{4}{e^{-2x} + 2 + e^{2x}} > 0 \to \text{Función cóncava}$$

No presenta puntos de inflexión.



d) - $\text{Dom } y = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

- Cortes con los ejes:

$\frac{x}{\ln x} = 0 \to x = 0 \to$ No tiene puntos de corte con el eje X porque no está definida para $x = 0$.

No tiene punto de corte con el eje Y porque no está definida para $x = 0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0 \to$ No tiene asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x}{\ln x} = \infty \to$ Asíntota vertical en $x = 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty \to$ No hay asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x \ln x} = 0 \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \to \ln x = 1 \to x = e$$

En $(0, 1) \cup (1, e)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

En el intervalo $(e, +\infty)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

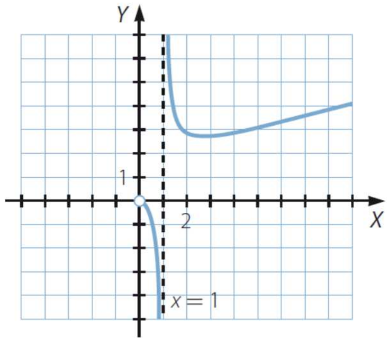
En $x = e$ presenta un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

$$y''=\frac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}=0\rightarrow \ln x=2\rightarrow x=e^2$$

- En $(0,1)\cup(e^2,+\infty)$, $y''<0$ ⟶ Función convexa.
- En $(1,e^2)$, $y''>0$ ⟶ Función cóncava.

En $x=e^2$ presenta un punto de inflexión.



105. Página 262

a) • $\text{Dom}\, y=\mathbb{R}-\{0\}$

- Cortes con los ejes:

$e^{\frac{2}{x}}\neq 0\rightarrow$ No tiene puntos de corte con el eje X.

No tiene punto de corte con el eje Y porque no está definida en $x=0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{2}{x}}=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{2}{x}}=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota vertical en } x=0.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{2}{x}}=1\\ \lim\limits_{x\to -\infty} e^{\frac{2}{x}}=1\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y=1.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

- Crecimiento y decrecimiento:

$y'=-2\cdot\frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}<0\rightarrow$ Función decreciente en todo su dominio.

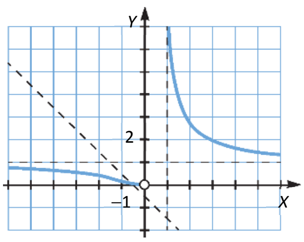
- Concavidad y convexidad:

$$y''=\frac{4xe^{\frac{2}{x}}+4e^{\frac{2}{x}}}{x^4}=0\rightarrow x=-1$$

En $(-1,0)\cup(0,+\infty)$, $y''>0$ ⟶ Función cóncava.

En $(-\infty,-1)$, $y''<0$ ⟶ Función convexa.

En $x=-1$ presenta un punto de inflexión.



b) • Dom $y = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$\frac{1}{2}x^2 \cdot e^{-x} = 0 \to x = 0 \to (0,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \to y = 0 \to (0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No hay asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{-x} = +\infty\end{array}\right\} \to \text{Asíntota horizontal en } y = 0.$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x \cdot e^{-x} = -\infty \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{-x} = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{2xe^{-x} - x^2e^{-x}}{2} \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

En el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

En el intervalo $(0, 2)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

En $x = 0$ presenta un mínimo y en $x = 2$ un máximo.

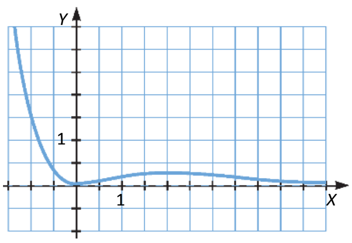
• Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{-4xe^{-x} + x^2e^{-x} + 2e^{-x}}{2} = 0 \to x = 2 \pm \sqrt{2}$$

En $\left(-\infty, 2-\sqrt{2}\right) \cup \left(2+\sqrt{2}, +\infty\right)$, $y'' > 0 \to$ Función cóncava.

En $\left(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right)$, $y'' < 0 \to$ Función convexa.

En $x = 2 \pm \sqrt{2}$ presenta dos puntos de inflexión.



c) • Dom $y = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$2x \cdot e^{-x} = 0 \to x = 0 \to (0,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \to y = 0 \to (0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No hay asíntotas verticales.

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\cdot e^{-x} = 0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2x\cdot e^{-x} = -\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = 0.$$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{-x} = -\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

  Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x\cdot e^{-x} = -\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = -2xe^{-x} + 2e^{-x} = -2e^{-x}(x-1) = 0 \rightarrow x = 1$

  En el intervalo $(1, +\infty)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

  En el intervalo $(-\infty, 1)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

  En $x = 1$ presenta un máximo.

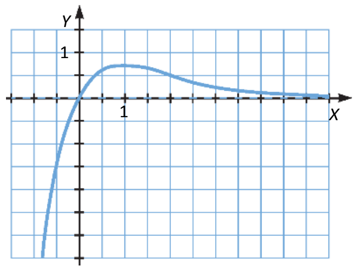
- Concavidad y convexidad:

  $y'' = 2xe^{-x} - 4e^{-x} = 2e^{-x}(x-2) = 0 \rightarrow x = 2$

  En $(2, +\infty)$, $y'' > 0 \longrightarrow$ Función cóncava.

  En $(-\infty, 2)$, $y'' < 0 \longrightarrow$ Función convexa.

  En $x = 2$ presenta un punto de inflexión.



d) • $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $(x-2)^2\cdot e^x = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

  $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No hay asíntotas verticales.

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \left[(x-2)^2\cdot e^x\right] = +\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left[(x-2)^2\cdot e^x\right] = 0\end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = 0.$$

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-2)^2\cdot e^x}{x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

  Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[(x-2)^2\cdot e^x\right] = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = -2xe^x + x^2e^x = xe^x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0\\ x = 2\end{cases}$

  En el intervalo $(0, 2)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

  En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

  En $x = 0$ presenta un máximo y en $x = 2$ un mínimo.

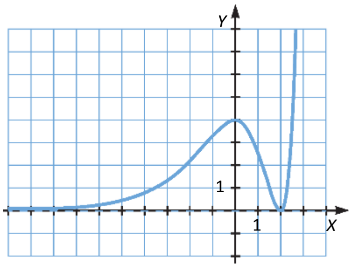
- Concavidad y convexidad:

$$y'' = x^2e^x - 2e^x = e^x\left(x^2-2\right) = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

En $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $x = \pm\sqrt{2}$ presenta un punto de inflexión.



106. Página 263

a) $f(0) = a \cdot 0 - 2^0 = -1 \rightarrow$ El punto (0, –1) pertenece a la gráfica de la función para todo valor del parámetro *a*.

b) $a < 0 \rightarrow f'(x) = a - 2^x \ln 2 < 0 \rightarrow$ La función es decreciente.

c) $f(2) = 0 \rightarrow 2a - 2^2 = 2a - 4 = 0 \rightarrow a = 2 \rightarrow f(x) = 2x - 2^x$

$$f'(x) = 2 - 2^x \ln 2 = 0 \rightarrow 2^x = \frac{2}{\ln 2} \rightarrow x = \log_2\left(\frac{2}{\ln 2}\right)$$

En $\left(-\infty, \log_2\left(\frac{2}{\ln 2}\right)\right)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.   En $\left(\log_2\left(\frac{2}{\ln 2}\right), +\infty\right)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $x = \log_2\left(\frac{2}{\ln 2}\right)$ presenta un máximo.

107. Página 263

a) $f\left(\sqrt{2}\right) = 1 \rightarrow a + \ln\left(\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1\right) = a + \ln 1 = a \rightarrow a = 1 \rightarrow f(x) = 1 + \ln\left(x^2 - 1\right)$

b) $x^2 - 1 > 0 \rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow$ $\text{Dom} f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-}\left(1+\ln\left(x^2-1\right)\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left(1+\ln\left(x^2-1\right)\right) = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota vertical en } x = -1 \text{ y en } x = 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\ln\left(x^2-1\right)\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\ln\left(x^2-1\right)\right) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No hay asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\ln\left(x^2-1\right)}{x} = 0 \rightarrow \text{No hay asíntotas oblicuas.}$$

Hay dos ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\ln\left(x^2-1\right)\right) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\ln\left(x^2-1\right)\right) = +\infty$

c) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}=0\rightarrow x=0\notin \text{Dom} f$

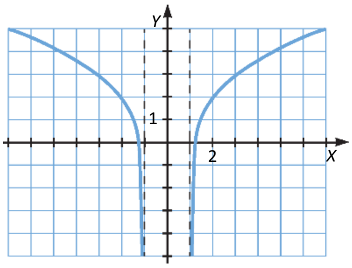
En el intervalo $(-\infty, -1)$, $y'<0\rightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $(1, +\infty)$, $y'>0\rightarrow$ Función creciente.

No presenta máximos ni mínimos.

$f''(x)=\dfrac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}<0\rightarrow$ La función es convexa en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

d)



108. Página 263

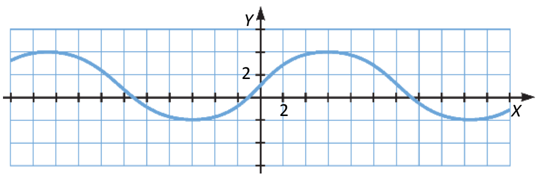
a) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3\rightarrow 1+a\cdot sen\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1+a\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3\rightarrow a=2\sqrt{2}\rightarrow f(x)=1+2\sqrt{2}\cdot sen\left(\dfrac{x}{4}\right)$

b) Podemos obtener la gráfica de la función a partir de la función $sen\, x$.

$sen\left(\dfrac{x}{2}\right)$ es una dilatación en el eje *X* de la función $sen\, x$, que recorre los mismos valores pero el «doble de lento», es decir, tendrá período 4π y está acotada entre –1 y 1.

$2\sqrt{2}\cdot sen\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ es una dilatación en el eje *Y* de la gráfica anterior. Ahora estará acotada entre $-2\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2}$:

Por último, la función $f(x)=1+2\sqrt{2}\cdot sen\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ es una traslación de una unidad hacia arriba de la gráfica anterior:



109. Página 263

a) • $\text{Dom} f=\mathbb{R}$

• Continuidad:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(4x+x^2)=5=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+3)=f(1)\rightarrow$ Es continua en $x=1$ y, por tanto, es continua en $\mathbb{R}$.

• Cortes con los ejes:

$f(x)=0\rightarrow 4x+x^2=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=-4\end{cases}\rightarrow$ (0, 0) y (–4, 0) son los puntos de corte con el eje *X*.

$f(0)=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Las funciones de los dos trozos son polinómicas; por lo tanto, no tienen asíntotas.

  Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x+x^2\right)=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x)=\begin{cases}4+2x & \text{si} \quad x<1\\ 2 & \text{si} \quad 1<x\end{cases}\to f'(x)=0\to x=-2$

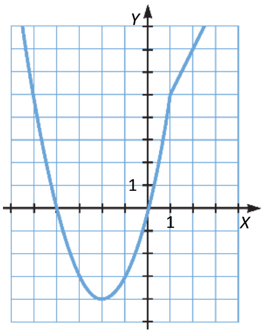
  En $(-2,1)\cup(1,+\infty)$, $f'(x)>0\to f(x)$ es creciente.

  En el intervalo $(-\infty,-2)$, $f'(x)<0\to f(x)$ es decreciente.

  En $x=-2$ presenta un mínimo.

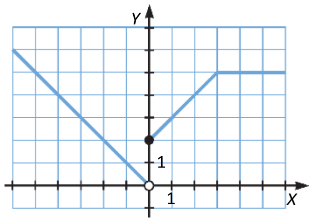
- Concavidad y convexidad:

  $f''(x)=\begin{cases}2 & \text{si} \quad x<1\\ 0 & \text{si} \quad 1<x\end{cases}\to$ La función es cóncava en el primer tramo.



b) $\text{Dom} f=\mathbb{R}-\{3\}$

Las funciones de los distintos tramos de la función son lineales. Representamos las diferentes funciones en sus respectivos dominios:



c) - $\text{Dom} f=\mathbb{R}$

- Continuidad:

  $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\sqrt{2-x}=2=\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\left(6-x^2\right)=f(-2)\to$ La función es continua en $x=-2$ y, por lo tanto, es continua en $\mathbb{R}$.

- Cortes con los ejes:

  $f(x)=0\to 6-x^2=0\to x=\pm\sqrt{6}\to\left(\sqrt{6},0\right)$ es el punto de corte con el eje X.

  $f(0)=0\to(0,6)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Tiene dos ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}=+\infty$ $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6-x^2\right)=-\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}} & \text{si } x<-2\\ -2x & \text{si } -2<x\end{cases}\to f'(x)=0\to x=0$

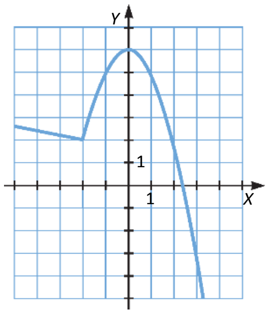
  En el intervalo (–2, 0), $f'(x)>0\longrightarrow f(x)$ es creciente.

  En $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$, $f'(x)<0\longrightarrow f(x)$ es decreciente.

  En $x=-2$ presenta un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{4\sqrt{2-x}\,(2-x)} & \text{si } x<-2\\ -2 & \text{si } -2<x\end{cases}\to f''(x)<0\to$ La función es convexa en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.



d) • $\text{Dom } f=\mathbb{R}$

- Continuidad:

  Cada una de las tres funciones son continuas en sus respectivos dominios. Veamos si son continuas en $x=-1$ y en $x=2$:

  $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\left(x^2+3x\right)=-2=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(x^3-1\right)=f(-1)\to$ Es continua en $x=-1$.

  $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(x^3-1\right)=7=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{7}{x-1}=f(2)\to$ Es continua en $x=2$.

  La función es continua en todo su dominio.

- Cortes con los ejes:

  $f(x)=0\to\begin{cases}x^2+3x=x(x+3)=0\to x=-3\\ x^3-1=0\to x=1\end{cases}\to(-3,0),(1,0)$ son los puntos de corte con el eje X.

  $f(0)=-1\to(0,-1)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7}{x-1}=0\to$ Asíntota horizontal en $y=0$.

  Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+3x\right)=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{si } x<-1\\ 3x^2 & \text{si } -1<x<2\\ \dfrac{-7}{(x-1)^2} & \text{si } 2<x\end{cases} \rightarrow \begin{cases}2x+3=0\rightarrow x=-\dfrac{3}{2}\\ 3x^2=0\rightarrow x=0\end{cases}$$

En $\left(-\frac{3}{2},-1\right)\cup(-1,0)\cup(0,2)$ $f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup(2,+\infty)$, $f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $x=-\frac{3}{2}$ presenta un mínimo.

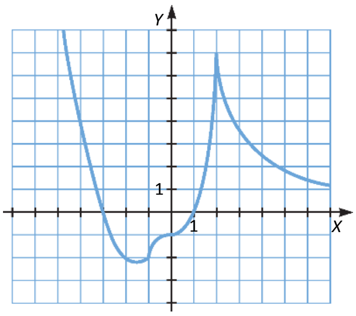
- Concavidad y convexidad:

$$f''(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x<-1\\ 6x & \text{si } -1<x<2\\ \dfrac{14}{(x-1)^3} & \text{si } 2<x\end{cases} \rightarrow 6x=0\rightarrow x=0$$

En $(-\infty,-1)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$, $f''(x)>0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $(-1,0)$, $f''(x)<0 \rightarrow$ Función convexa

En $x=0$ y en $x=-1$ presenta puntos de inflexión.



e) - $\text{Dom} f=\mathbb{R}$

- Continuidad:

Cada una de las dos funciones son continuas en sus respectivos dominios, veamos si son continuas en $x=0$:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2-3\cos x)=-1=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2^{-x+1}-3\right)=-1=f(0)\rightarrow$ La función es continua en su dominio.

- Cortes con los ejes:

$f(x)=0\rightarrow 2-3\cos x=0\rightarrow x=\arccos\left(\frac{2}{3}\right)\rightarrow\left(\arccos\left(\frac{2}{3}\right),0\right)$ son los puntos de corte con el eje X.

$f(0)=-1\rightarrow(0,-1)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

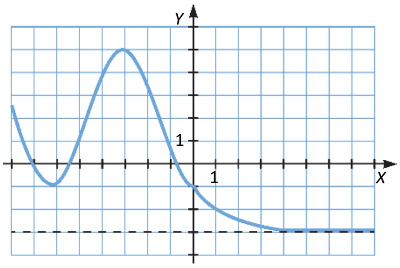
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2^{-x+1}-3\right)=-3\rightarrow$ Asíntota horizontal en $y=-3$.

Podemos representar la función $-3\cos x$ como una dilatación de la función $-\cos x$, y la función $2-3\cos x$, como una traslación de la anterior.

Si consideramos $g(x)=2^{-x+1}-3$:

$g'(x)=-2^{-x+1}\ln 2<0\rightarrow$ **$g(x)$** es siempre decreciente.

$g''(x)=2^{-x+1}(\ln 2)^2>0\rightarrow$ **$g(x)$** es siempre cóncava.



110. Página 263

a)
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(ax+3)=3-a=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(bx^2+5\right)=b+5\rightarrow b=-a-2\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(bx^2+5\right)=b+5=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(2\sqrt{x+3}+a\right)=4+a\rightarrow b=a-1\end{array}\right\}\rightarrow a=-\frac{1}{2}, b=-\frac{3}{2}$$

Entonces:

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+3 & \text{si} \quad x\le -1\\ -\frac{3}{2}x^2+5 & \text{si} \quad -1<x\le 1\\ 2\sqrt{x+3}+\frac{1}{2} & \text{si} \quad 1<x\end{cases}$$

b) La primera función es una recta con pendiente $m=-\frac{1}{2}$ y ordenada en el origen $n=3$.

La segunda función es una parábola hacia abajo con vértice (0, 5).

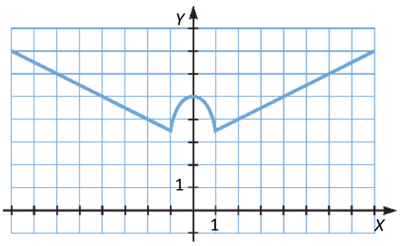
Si llamamos $g(x)=2\sqrt{x+3}+\frac{1}{2}$:

$g(x)$ tiene una rama parabólica:

$$\lim_{x\to +\infty} g(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(2\sqrt{x+3}+\frac{1}{2}\right)=+\infty$$

$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+3}}>0\rightarrow$ **$g(x)$** es creciente y no tiene máximos ni mínimos.

$g''(x)=\frac{-1}{2(x+3)\sqrt{x+3}}<0\rightarrow$ **$g(x)$** es convexa en su dominio.



111. Página 263

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(x^2+ax+a-1\right) = 3+3a = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(\log_2(x-1)) = 0 \to a=-1 \to f(x)=\begin{cases} x^2-x-2 & \text{si} \quad x<2 \\ \log_2(x-1) & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

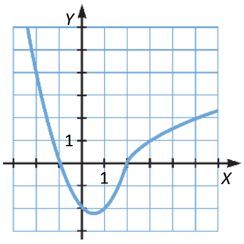
La función del primer tramo es una parábola hacia arriba con vértice en $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ que corta al eje X en los puntos (–1, 0) y (2, 0), y al eje Y en el punto (0, –2).

Si llamamos $g(x)$ a la función del segundo tramo:

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty}(\log_2(x-1)) = +\infty \to$ Rama parabólica.

$g'(x) = \dfrac{1}{(x-1)\ln 2} > 0 \ \forall x \in \text{Dom}\, g \to$ Función siempre creciente.

$g''(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2 \ln 2} < 0 \to$ Función convexa en todo su dominio.



La imagen o recorrido de la función será el intervalo $\left(-\frac{9}{4}, +\infty\right)$.

112. Página 263

a) Las funciones de cada tramo son continuas y derivables en sus respectivos dominios. Estudiamos la continuidad en $x=0$:

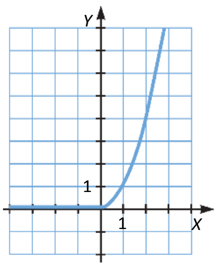
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(a\cdot \operatorname{sen} x + b) = b = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x^2-ax\right) = 0 \to b=0$$

Usamos la definición de derivada para estudiar la derivabilidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\dfrac{a\cdot\operatorname{sen} h-(a\operatorname{sen} 0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\dfrac{a\cdot\operatorname{sen} h}{h} = \lim_{h\to 0^-}\dfrac{a\cdot\cos h}{1} = a \\ \lim_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\dfrac{h^2-ah-0}{h} = \lim_{h\to 0^+}(h-a) = -a \end{array}\right\} \to a=-a \to a=0$$

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\leq 0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0<x \end{cases}$$

b)



113. Página 263

a) La función del primer tramo es una función irracional que no tiene asíntotas. Estudiamos las asíntotas oblicuas de la función del segundo tramo:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-mx}=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x-m}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2mx}{x-m}\right)=2m\end{array}\right\}\to \text{Asíntota oblicua en } y=2x+2m\to 2m=6\to m=3.$$

b) $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{2-x} & \text{si } x\le 1\\ \dfrac{2x^2}{x-3} & \text{si } 1<x\end{cases}$

- $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{3\}$
- Continuidad:

  Estudiamos la continuidad en $x = 1$:

  $$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(1-\sqrt{2-x}\right)=0\neq\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{2x^2}{x-3}=-1\to \text{No es continua en } x=1.$$

- Cortes con los ejes:

  $1-\sqrt{2-x}=0\to x=1\to(1,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $f(0)=1-\sqrt{2}\to\left(0,1-\sqrt{2}\right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x^2}{x-3}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{2x^2}{x-3}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{Asíntota vertical en } x=3.$$

  Por el apartado a), sabemos que $y = 2x + 6$ es una asíntota oblicua cuando $x\to+\infty$; veamos qué sucede cuando $x\to-\infty$:

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{2-x}\right)=+\infty\to$ No hay asíntotas horizontales.

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\sqrt{2-x}}{x}=0\to$ No tiene asíntotas oblicuas.

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\sqrt{2-x}}{x}=0\to$ No tiene asíntotas oblicuas.

  Hay una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{2-x}\right)=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} & \text{si } x\le 1\\ \dfrac{2x(x-6)}{(x-3)^2} & \text{si } x>1\end{cases}\to f'(0)\to x=6$$

  En $(-\infty,1)\cup(6,+\infty)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

  En $(1,3)\cup(3,6)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

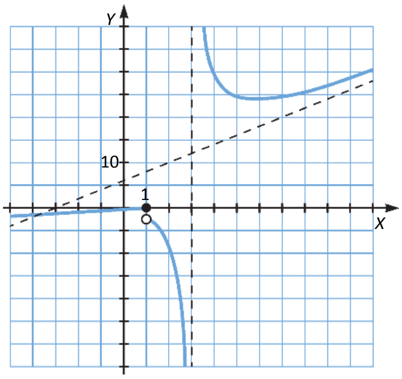
  En $x = 6$ hay un mínimo: $f(6)=24\to(6,24)$

- Concavidad y convexidad:

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{2-x}\,(2-x)} & \text{si} \quad x\le 1\\ \dfrac{36}{(x-3)^3} & \text{si} \quad x>1\end{cases} \rightarrow f''(0)\neq 0 \rightarrow \text{No hay puntos de inflexión.}$$

En $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

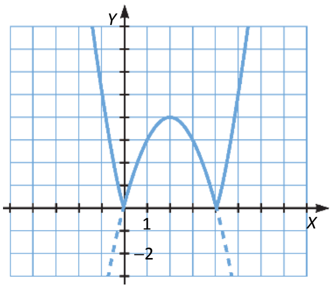
En $(1,3)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.



$\text{Im} f=(-\infty,0)\cup(24,+\infty)$

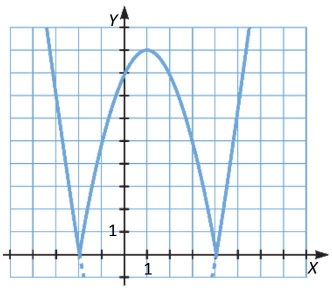
114. Página 263

La función que está dentro del valor absoluto es una parábola hacia abajo con vértice en el punto $V(2,4)$ que corta a los ejes en los puntos (0,0) y (4,0). Por lo tanto, debemos representar la función que está dentro del valor absoluto, y realizar una simetría respecto del eje *X* de los puntos que quedan por debajo del eje *X*.



115. Página 263

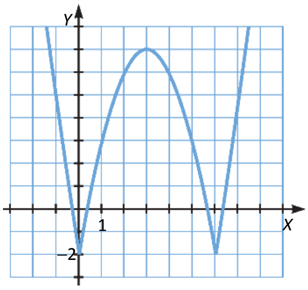
a) La función de dentro del valor absoluto es una parábola hacia arriba con vértice en el punto $V(1,-9)$ que corta a los ejes en los puntos (–2, 0), (4, 0) y (0, –8). Por lo tanto, debemos representar la función de dentro del valor absoluto, y realizar una simetría respecto del eje *X* de los puntos que quedan por debajo del eje *X*.



b) Podemos expresar la función *f*(*x*) como una función a trozos:

$$f(x)=\begin{cases}6x-x^2-2 & \text{si} \quad x\in[0,6]\\ x^2-6x-2 & \text{si} \quad x\in(-\infty,0)\cup(6,+\infty)\end{cases}$$

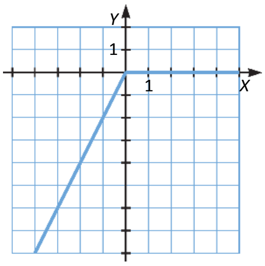
La función del primer tramo es una parábola hacia abajo con vértice en el punto $V(3,7)$ que corta a los ejes en los puntos $\left(3-\sqrt{7},0\right)$, $\left(3+\sqrt{7},0\right)$ y $(0,-2)$. La función del segundo tramo es una parábola hacia arriba con vértice en el punto $V(3,-11)$ que corta a los ejes en los puntos $\left(3-\sqrt{11},0\right)$, $\left(3+\sqrt{11},0\right)$ y $(0,-2)$. Por lo tanto, representamos cada función en su respectivo dominio.



c) Podemos expresar la función *f*(*x*) como una función a trozos:

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{si} \quad x\le 0\\ 0 & \text{si} \quad 0<x\end{cases}$$

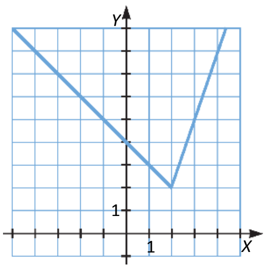
La función del primer tramo es una recta con pendiente 2 que pasa por el origen de coordenadas. La segunda es la función nula. Representamos cada función en su respectivo dominio.



d) Podemos expresar la función *f*(*x*) como una función a trozos:

$$f(x)=\begin{cases}4-x & \text{si} \quad x\le 2\\ 3x-4 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

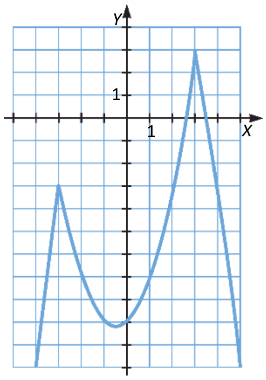
La función del primer tramo es una recta con pendiente –1 que pasa por el punto (0, 4). La segunda es una recta de pendiente 3 y que pasa por (0, –4). Representamos cada función en su respectivo dominio.



e) Podemos expresar la función $f(x)$ como una función a trozos:

$$f(x)=\begin{cases} x+9-x^2 & \text{si} \quad x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty) \\ x-9+x^2 & \text{si} \quad x\in(-3,3) \end{cases}$$

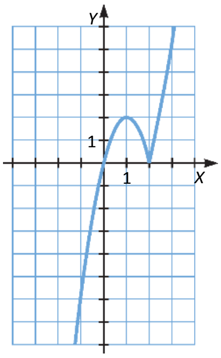
La función del primer tramo es una parábola hacia abajo con vértice $V\left(\frac{1}{2},\frac{37}{4}\right)$ y corta los ejes en los puntos $\left(\frac{1+\sqrt{37}}{2},0\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{37}}{2},0\right)$ y $(0,9)$. La del segundo tramo es una parábola hacia arriba con vértice $V\left(\frac{-1}{2},\frac{-37}{4}\right)$ y corta a los ejes en los puntos $\left(\frac{-1+\sqrt{37}}{2},0\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{37}}{2},0\right)$ y $(0,-9)$. Representamos cada función en su respectivo dominio.



f) Podemos expresar la función $f(x)$ como una función a trozos:

$$f(x)=\begin{cases} 4x-2x^2 & \text{si} \quad x<2 \\ 2x^2-4x & \text{si} \quad 2\le x \end{cases}$$

La función del primer tramo es una parábola hacia abajo con vértice $V(1,2)$ y corta los ejes en los puntos (0, 0) y (2, 0). La del segundo tramo es una parábola hacia arriba con vértice $V(1,-2)$ y corta los ejes en los puntos (0, 0) y (2, 0). Representamos cada función en su dominio.



116. Página 263

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+5x+6 & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2-5x+6 & \text{si} \quad 0<x \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{h^2+5h+6-(6)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{h^2+5h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}(h+5)=5 \\ \lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{h^2-5h+6-(6)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{h^2-5h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}(h-5)=-5 \end{array}\right\}\rightarrow$$ La función no es derivable en $x=0$.

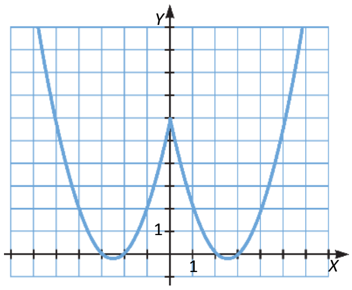
b) $f'(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si} \quad x<0 \\ 2x-5 & \text{si} \quad 0<x \end{cases} \rightarrow f'(0)=0 \rightarrow \begin{cases} 2x+5=0 \rightarrow x = \dfrac{-5}{2} \\ 2x-5=0 \rightarrow x = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

En $\left(-\infty, \frac{-5}{2}\right) \cup \left(0, \frac{5}{2}\right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $\left(\frac{-5}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $x = \pm\frac{5}{2}$ presenta dos mínimos.

c)



117. Página 263

a) Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$:

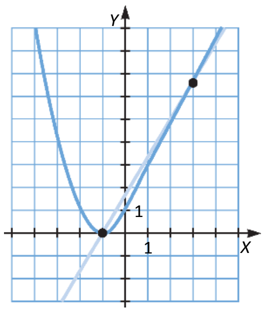
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{1+a\sqrt{h+1}\cdot \ln(h+1)-(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}\left[a\dfrac{\ln(h+1)}{h}\right] = \lim\limits_{h\to 0^-}\left[a\dfrac{\frac{1}{h+1}}{1}\right] = a \\ \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{(h+1)^2-(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h^2+2h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}(h+2) = 2 \end{array}\right\} \rightarrow a = 2$$

Es decir, $f(x)$ es derivable en $x = 0$ si $a = 2$.

b) La función es continua en [–1, 3] y derivable en (–1, 3). Entonces, existe $c \in (-1, 3)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = \frac{1+4\ln 4 - 0}{4} = \frac{1+4\ln 4}{4}$$

c)



Por el teorema de Lagrange, existe $c \in (-1, 3)$ tal que la tangente en la curva en $x = c$ es paralela a la recta que une los puntos (–1, 0) y (3, 1 + 4 ln 4).

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 264

Respuesta abierta.

2. Página 264

30 puntos, ya que conocemos los dos extremos.

3. Página 264

No, existen infinitas funciones que pasan por dos puntos dados del plano. Por ejemplo, hay infinitas funciones polinómicas que pasan por dos puntos dados.

4. Página 264

La ecuación general de una función polinómica de grado *n* es: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Como tenemos que hallar $n + 1$ coeficientes, necesitaremos $n + 1$ puntos.