তৃতীয় অধ্যায় [CHAPTER THERE]
তৃতীয় পরিচ্ছেদ [SECTION THREE]
অন্তরীকরণযোগ্যতা
[DIFFERENTIABILITY]

3-3.1. অন্তরীকরণযোগ্যতা [Differentiability] ঃ

মনেকরি f(x) ফাংশন $[a, b] \subset \mathbf{R}$ বদ্ধ ব্যবধিতে সংজ্ঞায়িত এবং $a < c < b$. তবে $x = c$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনকে অন্তরীকরণযোগ্য বলা হইবে যদি

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \text{ বিদ্যমান থাকে,}$$

অর্থাৎ ডান $f'(c) = \lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$,

বাম $f'(c) = \lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$ এর মান সসীম

এবং ডান $f'(c)$ = বাম $f'(c)$ হয়।

নোট ঃ ডান $f'(c)$ কে $Rf'(c)$ এবং বাম $f'(c)$ কে $Lf'(c)$ ধরিব।

3-3.2. উপপাদ্য ঃ যদি $x = a$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য হয়, তবে ঐ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন হইবে।

প্রমাণ ঃ যেহেতু $x = a$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য, কাজেই

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ একটি সসীম রাশি।}$$

এখন
$$\lim_{h \to 0} [f(a+h) - f(a)] = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times h$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times \lim_{h \to 0} h$$
$$= f'(a) \times 0$$
$$= 0$$

$$\therefore \lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a).$$

সুতরাং $x = a$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

3-3.3. $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হইলে ঐ বিন্দুতে ফাংশ... অন্তরীকরণযোগ্য হইতে পারে আবার নাও হইতে পারে। দুইটি উদাহরণের সাহায্যে ... সত্যতা যাচাই কর।

উদাহরণ-1 : $x = 1$ বিন্দুতে $f(x) = x^2 + 5$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন এবং অন্তরী... যোগ্য।

প্রথমতঃ $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা :

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} (x^2+5) = 1+5 = 6$$

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} (x^2+5) = 1+5 = 6$$

এবং $f(1) = 1^2 + 5 = 6$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} f(x) = f(1)$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

দ্বিতীয়তঃ $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা :

$$Rf'(1) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{(1+h)^2 + 5 - 6}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0+} (2+h) = 2 + 0 = 2.$$

এবং $$Lf'(1) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{(1+h)^2 + 5 - 6}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0-} (2+h) = 2 + 0 = 2$$

যেহেতু $Rf'(1) = Lf'(1) = 2$

অর্থাৎ $f'(1)$ বিদ্যমান এবং $f'(1) = 2$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য।

বিঃ দ্রঃ উপরে উল্লেখিত উদাহরণটি লক্ষ্য করিলে দেখা যায় যে $x = 1$ বিন্দুতে f... ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন এবং ঐ বিন্দুতে ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য।

উদাহরণ-2 : যদি $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } 0 \le x < 1/2 \\ 1 - x & \text{যখন } 1/2 \le x < 1 \end{cases}$

হয়, তবে $x = 1/2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন কিন্তু ঐ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়। **[N. U. H-2006]**

প্রথমতঃ $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা :

$$\lim_{x\to (1/2)+} f(x) = \lim_{x\to (1/2)+} (1 - x) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to (1/2)-} f(x) = \lim_{x\to (1/2)-} x = \frac{1}{2}.$$

যখন $x = \frac{1}{2}$ তখন $f(x) = 1 - x$, কাজেই $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to (1/2)+} f(x) = \lim\limits_{x\to (1/2)-} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$

সুতরাং $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

দ্বিতীয়তঃ $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা :

$$Rf'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(1/2 + h) - f(1/2)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1 - (1/2 + h) - 1/2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{(-h)}{h} = \lim_{h\to 0+} (-1) = -1$$

$$Lf'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(1/2 + h) - f(1/2)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{(1/2 + h) - 1/2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0-} (1) = 1.$$

যেহেতু $Rf'\left(\frac{1}{2}\right) \neq Lf'\left(\frac{1}{2}\right)$. সুতরাং $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

বিঃ দ্রঃ উপরোক্ত উদাহরণটি লক্ষ্য করিলে দেখা যায় যে $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন কিন্তু উক্ত বিন্দুতে ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ-1 : একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{যখন } 0 \le x < 3 \\ 4 & \text{যখন } x = 3 \\ 5 & \text{যখন } 3 < x \le 4 \end{cases}$$

$x = 3$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরীকরণযোগ্যতা যাচাই কর।

[বিঃ এস্‌সিঃ এগ্রিঃ সঃ '81]

সমাধান : প্রথমতঃ $x = 3$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা :

$$\lim_{x \to 3+} f(x) = \lim_{x \to 3+} 5 = 5$$

$$\lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3-} 0 = 0$$

যখন $x = 3$ তখন $f(x) = 4$, কাজেই $f(3) = 4$

যেহেতু $\lim_{x \to 3+} f(x) \neq \lim_{x \to 3-} f(x) \neq f(3)$

সুতরাং $x = 3$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন।

দ্বিতীয়তঃ $x = 3$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা :

$$Rf'(3) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{5-4}{h} = \frac{1}{0+} = \infty \text{ অনির্ণেয়।}$$

$$Lf'(3) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{0-4}{h} = \frac{-4}{0-} = \infty \text{ অনির্ণেয়।}$$

সুতরাং $x = 3$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

উদাহরণ-2 : যদি $f(x) = \begin{cases} 5x - 4 & \text{যখন } 0 < x \le 1 \\ 4x^2 - 3x & \text{যখন } 1 < x < 2 \end{cases}$

হয়, তবে $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা এবং $f'(x)$ এর অস্তিত্বের আলোচনা কর।

[ঢাঃ বিঃ '87]

সমাধান : প্রথমতঃ $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা :

যখন $x > 1$ তখন $f(x) = 4x^2 - 3x$, কাজেই

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (4x^2 - 3x) = 4 - 3 = 1$$

যখন $x < 1$ তখন $f(x) = 5x - 4$, কাজেই

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (5x - 4) = 5 - 4 = 1$$

যখন $x = 1$ তখন $f(x) = 5x - 4$, কাজেই $f(1) = 5.1 - 4 = 1$

যেহেতু $\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1-} f(x) = f(1)$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

দ্বিতীয়তঃ $x = 1$ বিন্দুতে $f'(x)$ এর অস্তিত্বের আলোচনা :

যখন $x = 1$ তখন $f(x) = 5x - 4$, কাজেই $f(1) = 5 - 4 = 1$

$$Rf'(1) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{4(1+h)^2 - 3(1+h) - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{5h + 4h^2}{h} = \lim_{h \to 0+} (5 + 4h) = 5 + 0 = 5$$

$$Lf'(1) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{5(1+h) - 4 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0-} \frac{5h}{h} = \lim_{h \to 0-} (5) = 5$$

যেহেতু $Rf'(1) = Lf'(1) = 5$; কাজেই $f'(1) = 5$.

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f'(x)$ এর অস্তিত্ব আছে।

উদাহরণ-3 : $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ফাংশনটি $(0, 3)$ ব্যবধিতে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ x & \text{যখন } 1 \le x < 2 \\ x^3/4 & \text{যখন } 2 \le x < 3 \end{cases}$$

তবে $x = 1$ এবং $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরক সহগ আছে কিনা তাহা যাচাই কর।

সমাধান : প্রথমতঃ $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরীকরণ সম্পর্কে আলোচনা :

যখন $x = 1$ তখন $f(x) = x$, কাজেই $f(1) = 1$

যখন $x > 1$ তখন $f(x) = x$, কাজেই

$$Rf'(1) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1+h-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0+} (1) = 1$$

যখন $x < 1$ তখন $f(x) = x^2$, কাজেই

$$Lf'(1) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0-} (2+h) = 2 + 0 = 2$$

যেহেতু $Rf'(1) \neq Lf'(1)$, কাজেই $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরক সহগ নাই।

দ্বিতীয়তঃ $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরক সহগ সম্পর্কে আলোচনা :

যখন $x = 2$ তখন $f(x) = \frac{x^3}{4}$, কাজেই $f(2) = \frac{2^3}{4} = 2$

যখন $x > 2$ তখন $f(x) = \frac{x^3}{4}$ কাজেই

$$Rf'(2) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{(2+h)^3/4 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{(2+h)^3 - 8}{4h} = \lim_{h\to 0+} \frac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 8}{4h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{12h + 6h^2 + h^3}{4h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h(12 + 6h + h^2)}{4h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{(12 + 6h + h^2)}{4} = \frac{12 + 0 + 0}{4} = 3$$

যখন $x < 2$ তখন $f(x) = x$ কাজেই

$$Lf'(2) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{2+h-2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0-} (1) = 1$$

যেহেতু $Rf'(2) \neq Lf'(2)$, কাজেই $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরক সহগ নাই।

উদাহরণ-4 : যদি $f(x) = |x - 2|$ হয়, তবে $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতা পরীক্ষা কর। **[ঢাঃ বিঃ '86]**

সমাধান : দেওয়া আছে $f(x) = |x - 2| \cdots (1)$

যখন $x \geq 2$ তখন (1) নং হইতে পাই $f(x) = x - 2$

যখন $x < 2$ তখন (1) নং হইতে পাই $f(x) = -(x - 2)$

$\therefore$ (1) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায় $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{যখন } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{যখন } x < 2 \end{cases}$

প্রথমতঃ $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা :

যখন $x > 2$ তখন $f(x) = x - 2$, কাজেই

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} (x - 2) = 2 - 2 = 0$$

যখন $x < 2$ তখন $f(x) = -x + 2$, কাজেই

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (-x + 2) = -2 + 2 = 0$$

যখন $x = 2$ তখন $f(x) = x - 2$, কাজেই $f(2) = 2 - 2 = 0$

যেহেতু $\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2-} f(x) = f(2)$

সুতরাং $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

দ্বিতীয়তঃ $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা :

যখন $x = 2$ তখন $f(x) = x - 2$, কাজেই $f(2) = 2 - 2 = 0$

যখন $x > 2$ তখন $f(x) = x - 2$ কাজেই

$$Rf'(2) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{(2+h) - 2 - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0+} (1) = 1$$

যখন $x < 2$ তখন $f(x) = -x + 2$, কাজেই

$$Lf'(2) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-(2+h)+2-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{(-h)}{h} = \lim_{h\to 0-} (-1) = -1$$

যেহেতু $Rf'(2) \neq Lf'(2)$

সুতরাং $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

উদাহরণ-5(i) : যদি $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

হয়, তবে $f'(0)$ এর মান নির্ণয় কর। [ঢাঃ বিঃ '8..]

(ii). $x = \pi/2$ বিন্দুতে নিম্নলিখিত ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্য... আলোচনা কর :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x < 0 \\ 1 + \sin x & \text{যখন } 0 \le x < \pi/2 \\ 2 + (x - \pi/2)^2 & \text{যখন } x \ge \pi/2 \end{cases}$$

[N. U. H. '02, '03, '05, N. U. '02, '04, ঢাঃ বিঃ '84; চঃ বিঃ '...]

(iii). যদি $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

হয়, তবে দেখাও যে x এর সকল মানের জন্য $f(x)$ অন্তরীকরণযোগ্য কিন্তু $x = 0$ বিন্দু... $f'(x)$ অবিচ্ছিন্ন নয়।

সমাধান (i) : প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

যখন $x = 0$ তখন $f(x) = 0$, কাজেই $f(0) = 0$

যখন $x > 0$ তখন $f(x) = x^2 \cos(1/x)$, কাজেই

$$Rf'(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h^2 \cos(1/h) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} h \cos\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0+} h \lim_{h\to 0+} \cos\frac{1}{h}$$

$= 0 \times (-1$ এবং 1 এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা$) = 0$

যখন $x < 0$ তখন $f(x) = x^2 \cos(1/x)$, কাজেই

$$Lf'(0) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{h^2\cos(1/h) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} h \cos\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0-} h \lim_{h\to 0-} \cos\frac{1}{h}$$

$= 0 \times (-1$ এবং 1 এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা$) = 0$

যেহেতু $Rf'(0) = Lf'(0) = 0$; সুতরাং $f'(0) = 0$.

সমাধান (ii) : প্রদত্ত ফাংশন

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x < 0 \\ 1 + \sin x & \text{যখন } 0 \le x < \pi/2 \\ 2 + (x - \pi/2)^2 & \text{যখন } x \ge \pi/2 \end{cases}$$

প্রথমতঃ $x = \pi/2$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা :

যখন $x > \pi/2$ তখন $f(x) = 2 + (x - \pi/2)^2$, কাজেই

$$\lim_{x\to(\pi/2)+} f(x) = \lim_{x\to(\pi/2)+} \left\{2 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right\}$$

$$= 2 + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 2 + 0 = 2$$

যখন $x < \pi/2$ তখন $f(x) = 1 + \sin x$, কাজেই

$$\lim_{x\to(\pi/2)-} f(x) = \lim_{x\to(\pi/2)-} [1 + \sin x] = 1 + \sin\frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2$$

যখন $x = \frac{\pi}{2}$ তখন $f(x) = 2 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$

কাজেই $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 2 + 0 = 2$

যেহেতু $\lim_{x\to(\pi/2)+} f(x) = \lim_{x\to(\pi/2)-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

সুতরাং $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

দ্বিতীয়তঃ $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে f(x) এর অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা :

যখন $x = \frac{\pi}{2}$ তখন $f(x) = 2 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$

কাজেই $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 2 + 0 = 2$

যখন $x > \frac{\pi}{2}$ তখন $f(x) = 2 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$, কাজেই

$$Rf'(\pi/2) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(\pi/2+h) - f(\pi/2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{2 + (\pi/2 + h - \pi/2)^2 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0+} h = 0$$

যখন $x < \frac{\pi}{2}$ তখন $f(x) = 1 + \sin x$, কাজেই

$$Lf'(\pi/2) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(\pi/2+h) - f(\pi/2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{1 + \sin(\pi/2 + h) - 2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{(1 - h^2/2! + h^4/4! - \cdots) - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{-h^2/2! + h^4/4! - \cdots}{h} = \lim_{h\to 0-} \left[-\frac{h}{2!} + \frac{h^3}{4!} - \cdots\right] = 0$$

যেহেতু $Rf'(\pi/2) = Lf'(\pi/2)$

সুতরাং $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য।

সমাধান (iii) : প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

যখন $x \neq 0$ তখন $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, কাজেই

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\frac{1}{x} \cdot \frac{(-1)}{x^2}$$

বা $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$.

সুতরাং $x > 0$ এবং $x < 0$ এর জন্য f(x) ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য।

এখন x = 0 বিন্দুতে f(x) এর অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা :

যখন $x = 0$ তখন $f(x) = 0$, কাজেই $f(0) = 0$

যখন $x > 0$ যখন $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, কাজেই

$$Rf'(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h^2 \sin(1/h) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} h \sin\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0+} h \lim_{h\to 0+} \sin\frac{1}{h}$$

$= 0 \times$ (-1 এবং 1 এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা) $= 0$.

যখন $x < 0$ তখন $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, কাজেই

$$Lf'(0) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{h^2 \sin(1/h) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} h \sin\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0-} h \lim_{h\to 0-} \sin\frac{1}{h}$$

$= 0 \times$ (-1 এবং 1 এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা) $= 0$

যেহেতু $Rf'(0) = Lf'(0)$; কাজেই $f'(0) = 0$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য।

$\therefore x > 0, x < 0$ এবং $x = 0$ এর জন্য অর্থাৎ x এর সকল মানের জন্য f(x) ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য।

দ্বিতীয়তঃ $x=0$ বিন্দুতে $f'(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা ঃ

প্রথম অংশ হইতে পাই

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin(1/x)-\cos(1/x) & \text{যখন } x\neq 0\\ 0 & \text{যখন } x=0\end{cases}$$

যখন $x>0$ তখন $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, কাজেই

$$\lim_{x\to0+} f'(x)=\lim_{x\to0+}\left[2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to0+} 2x\sin\frac{1}{x}-\lim_{x\to0+}\cos\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0+}2x\lim_{x\to0+}\sin\frac{1}{x}-\lim_{x\to0+}\cos\frac{1}{x}$$

$=0\times(-1$ এবং 1 এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা$)-\lim\limits_{x\to0+}\cos\frac{1}{x}$

$=0-$ ইহার মান বিদ্যমান নাই।

যখন $x<0$ তখন $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, কাজেই

$$\lim_{x\to0-} f'(x)=\lim_{x\to0-}\left[2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to0-}2x\sin\frac{1}{x}-\lim_{x\to0-}\cos\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0-}2x\lim_{x\to0-}\sin\frac{1}{x}-\lim_{x\to0-}\cos\frac{1}{x}$$

$=0\times(-1$ এবং 1 এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা$)-\lim\limits_{x\to0-}\cos\frac{1}{x}$

$=0-$ ইহার মান বিদ্যমান নাই।

যখন $x=0$ তখন $f'(x)=0$, কাজেই $f'(0)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to0+} f'(x)=\lim\limits_{x\to0-} f'(x)\neq f'(0)$.

সুতরাং $x=0$ বিন্দুতে $f'(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন নয়।

প্রশ্নমালা [EXERCISE]–3(C)

1. একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{যখন } 0\le x<1/2\\ 1 & \text{যখন } x=1/2\\ 2 & \text{যখন } 1/2<x\le1\end{cases}$$

দেখাও যে $x=\frac{1}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ বিচ্ছিন্ন এবং $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান বিদ্যমান নাই।

2(i). যদি $f(x)=\begin{cases}a+x & \text{যখন } x\ge0\\ a-x & \text{যখন } x<0\end{cases}$

হয়, তবে $x=0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরীকরণযোগ্যতা পরীক্ষা কর। [রাঃ বিঃ '81]

(ii). যদি $f(x)=\begin{cases}x & \text{যখন } x\le1\\ 2x-1 & \text{যখন } x>1\end{cases}$

হয়, তবে $x=1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা কর। [চঃ বিঃ '81]

(iii). একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{যখন } 0<x<1\\ 2-x & \text{যখন } 1\le x\le2\end{cases}$$

দেখাও যে $x=1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন কিন্তু উক্ত বিন্দুতে $f'(x)$ বিদ্যমান নহে। [জাঃ বিঃ '08, ঢাঃ বিঃ সঃ '76]

(iv). লেখচিত্রসহ নিম্নলিখিত ফাংশনটির $x=1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণ যোগ্যতা, আলোচনা কর ঃ

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{যখন } 0<x\le1\\ x^2-x+1 & \text{যখন } x>1\end{cases}$$ [ঢাঃ বিঃ সঃ '85]

(v). যদি $f(x)=\begin{cases}x & \text{যখন } x\ge0\\ -x & \text{যখন } x<0\end{cases}$

হয়, তবে দেখাও যে $x=0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন কিন্তু অন্তরীকরণযোগ্য নয়। [রাঃ বিঃ '85]

(vi). যদি $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{যখন } x \le 1 \\ 3x-2 & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$

হয়, তবে $x = 1$ বিন্দুতে কি $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্ন অন্তরক আছে?

(vii). যদি $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x \le 1 \\ x & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$

হয়, তবে $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরীকরণযোগ্যতা যাচাই কর। [ঢাঃ বিঃ '82; চঃ বিঃ '82]

3(i). একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{যখন } -2 \le x \le 0 \\ x & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 3-x & \text{যখন } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$x = 0$ এবং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা কর।

(ii). যদি $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } x \le 0 \\ x & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 1/x & \text{যখন } x \ge 1 \end{cases}$

হয়, তবে $x = 0$ এবং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা কর। [জাঃ বিঃ 2003]

(iii). $x = 0$ ও $x = 1$ বিন্দু গুলোতে ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতা যাচাই কর ঃ

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{যখন } x \le 0 \\ x & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{যখন } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

ফাংশনটির চিত্র আঁক। [ঢাঃ বিঃ সঃ '88]

(iv). $f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{যখন } x < 0 \\ x & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \\ 1/x & \text{যখন } 1 < x \end{cases}$

দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের লেখচিত্র অংকন কর। f এর ডোমেন এবং রেঞ্জ বাহির কর। $x = 0$ এবং $x = 1$ বিন্দুতে f এর অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরীকরণযোগ্যতা নির্ণয় কর। [জাঃ বিঃ সঃ '93, '04]

(v). একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{যখন } x \le 0 \\ x & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{যখন } 1 \le x \le 2 \\ 2x-x^2 & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$$

তবে দেখাও যে $x = 1$ এবং $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন কিন্তু এই বিন্দুগুলোতে $f'(x)$ বিদ্যমান নহে। [ঢাঃ বিঃ সঃ '82; চঃ বিঃ সঃ '82]

4(i). যদি $f(x) = |x-1|$ হয়, তবে $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতা পরীক্ষা কর।

(ii). দেখাও যে $f(x) = |x|$ ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন কিন্তু ঐ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(iii). যদি $f(x) = |x| + |x-1|$ হয়, তবে $x = 0$ এবং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরীকরণযোগ্যতা যাচাই কর।

[জাঃ বিঃ সঃ '05, ঢাঃ বিঃ সঃ '82, '85]

(iv). যদি $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{যখন } x \ge 0 \\ -\sqrt{|x|} & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$

হয়, তবে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরীকরণযোগ্যতা যাচাই কর।

[ঢাঃ বিঃ সঃ '81]

5(i). যদি $f(x) = \begin{cases} x\cos(1/x) & \text{যখন } x \ne 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

হয়, তবে দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন হইবে কিন্তু অন্তরীকরণযোগ্য নহে।

(ii). একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{যখন } x \ne 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$$

হয়, তবে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরীকরণযোগ্যতা পরীক্ষা কর।

[জাঃ বিঃ '03, ঢাঃ বিঃ সঃ '84; ঢাঃ বিঃ '85]

(iii). যদি $f(x) = \begin{cases} (x-a)\sin(1/(x-a)) & \text{যখন } x \neq a \\ 0 & \text{যখন } x = a \end{cases}$

হয়, তবে $x = a$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরীকরণযোগ্যতা ন...
কর।

(iv). যদি $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{যখন } |x| \leq 1 \\ \sin \pi x & \text{যখন } |x| > 1 \end{cases}$

হয়, তবে প্রত্যেক বিন্দুতে f(x) এর অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতা ন...
কর। [ঢাঃ বিঃ ...]

(v). যদি $f(x) = \begin{cases} x + x^{4/3}\sin(1/x) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

তবে $f'(0)$ নির্ণয় কর যদি বিদ্যমান থাকে। [ঢাঃ বিঃ সঃ ...]

(vi). যদি $f(x) = \begin{cases} x + (x/3)\sin(\ln x^2) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

হয়, তবে দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হইবে কিন্তু $f'(x)$ বিদ্য...
নহে।

(vii). বিদ্যমান থাকিলে $f'(1)$ নির্ণয় কর যেখানে,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{যখন } x \neq 1 \\ 2 & \text{যখন } x = 1 \end{cases}$$ [জাঃ বিঃ ...]

উত্তরমালা [ANSWERS]

2(i). অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(ii). অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(iv). অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(vi). $x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন অন্তরক আছে।

(vii). অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

3(i). $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।
$x = 1$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(ii). $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।
$x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(iii). $x = 0$ বিন্দুতে বিচ্ছি, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।
$x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(iv). $D_f = \mathbf{R}$, $R_f = [0, \infty)$
$x = 0$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।
$x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

4(i). অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(iii). $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।
$x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(iv). অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

5(ii). অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(iii). অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(iv). $x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।
$x = -1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(v). $f'(0) = 1$. (vii) $f'(1)$ বিদ্যমান এবং $f'(1) = 1$.