CHAPTER–2(A)
সীমা
LIMIT

2.A.1. সীমার ধারণা (The idea about limit) : সীমা ক্যালকুলাসের মূল ভিত্তি। সীমা সম্পর্কে জ্ঞান লাভের জন্য চলক রাশির সীমা (Limit of a variable) এবং ফাংশনের সীমা (Limit of function) পর্যায়ক্রমে আলোচনা করবো। প্রথমে একটি উদাহরণ হিসেবে $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ফাংশনের জন্য সীমার ধারণা ব্যাখ্যা করা হলো ঃ

x এর মান ক্রমান্বয়ে 1.9, 1.99, 1.999, 1.9999, ... অথবা 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, ... বসিয়ে ফাংশনটি থেকে মান পাওয়া যায়। কিন্তু $x = 2$ হলে $f(x) = \frac{0}{0}$, যা অসংজ্ঞায়িত। অর্থাৎ $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মান নির্ণয় সম্ভব নয়। অথচ বাম দিক বা ডান দিক হতে 2 এর অতি নিকটবর্তী কোনো মান x এর পরিবর্তে বসালে $f(x)$ এর মান 4 এর নিকটবর্তী হয়। এক্ষেত্রে 2 কে চলক রাশি x এর সীমা এবং 4 কে ফাংশন $f(x)$ এর সীমা বলা হয়।

2.A.2. চলরাশির সীমা (Limit of a Variable) : কোনো স্বাধীন চলক একটি নির্দিষ্ট নিয়মানুযায়ী কতকগুলি মান গ্রহণের জন্য একটি নির্দিষ্ট সংখ্যার দিকে অগ্রসর হতে থাকলে ঐ সংখ্যাটিকে চলরাশির সীমা বলা হয়।

কোনো বাস্তব চলরাশি x বাস্তব অক্ষের কোনো নির্দিষ্ট a মানের দিকে কতকগুলি মান গ্রহণ কালে ধাবিত হতে থাকলে a কে x এর সীমা বলা হয় এবং ইহাকে $x \to a$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। x এর মান ক্রমশঃ বাস্তব অক্ষের a বিন্দুর বামদিক হতে অথবা ঐ বিন্দুর ডানদিক হতে a এর নিকটবর্তী হতে থাকলে উহাদের মধ্যকার দূরত্ব ক্ষুদ্রতর হয় অর্থাৎ $|x - a| < \delta$ হয় যেখানে $\delta > 0$ অতি ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যা পূর্বে জানা যেকোনো ক্ষুদ্র যোগবোধক সংখ্যার চেয়েও ক্ষুদ্র।

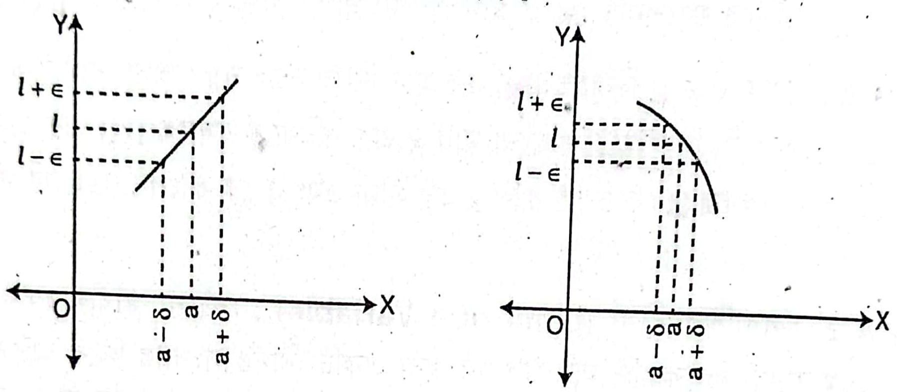
যদি বাস্তব অক্ষের a বিন্দুর ডান দিক হতে x চলক a এর দিকে ধাবিত হয় তখন ইহাকে $x \to a_+$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। একইভাবে যদি a এর বামদিক হতে x চলক a এর দিকে ধাবিত হয় তখন ইহাকে $x \to a_-$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

2.A.3. ফাংশনের সীমা (Limit of function) :

[NUH–2002, 2009, NUH(NM)–2009, SJUH–2004]

যদি একটি চলক x এর মান a এর উভয় দিক হতে (ডান বা বাম) অগ্রসর হয়ে a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় $f(x)$ এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর অতি নিকটবর্তী হয় তবে l কে $f(x)$ ফাংশনের সীমা বলা হয়। ইহাকে $\lim_{x \to a} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। [If the values of f(x) become arbitrarily close to a single number l as the values of a variable x approaches to a from both sides of a (Right or Left) then l is called the limit of the function f(x). It is denoted by $\lim_{x \to a} f(x) = l$.]

2.A.4. ($\delta - \varepsilon$) এর সাহায্যে ফাংশনের সীমা (Limit of functions using ($\delta - \varepsilon$)) : যদি প্রত্যেক সংখ্যা $\varepsilon > 0$ এর উপর নির্ভরশীল একটি ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা δ নির্ণয় করা যায় যে, $0 < |x - a| < \delta$ হলে $|f(x) - l| < \varepsilon$ হয় তবে l কে f(x) ফাংশনের সীমা বলা হয়। [If for each number $\varepsilon > 0$, there corresponds a small positive number δ such that $|f(x) - l| < \varepsilon$ when $0 < |x - a| < \delta$ then l is called the limit of the function f(x).]



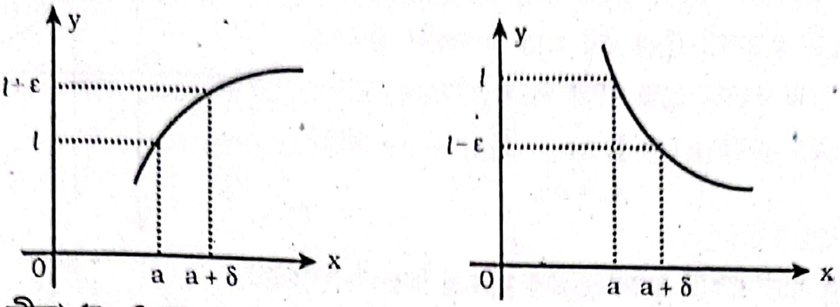
চিত্রে x এর মান a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর $(a - \delta)$ বা a অপেক্ষা বৃহত্তর $(a + \delta)$ মান হতে ক্রমশঃ a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় y বা f(x) প্রাপ্ত মানগুলি ক্রমশঃ একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর অতি নিকটবর্তী হয়।

$$\therefore \lim_{x \to a} f(x) = l$$

2.A.5. একদিকবর্তী লিমিট (One-sided Limits) : নিম্নে একদিকবর্তী লিমিট (One-sided Limits) অর্থাৎ ডান সীমা [Right Hand Limit or R. H. L.] এবং বাম সীমা [Left Hand Limit or L. H. L.] আলোচনা করা হলো ঃ

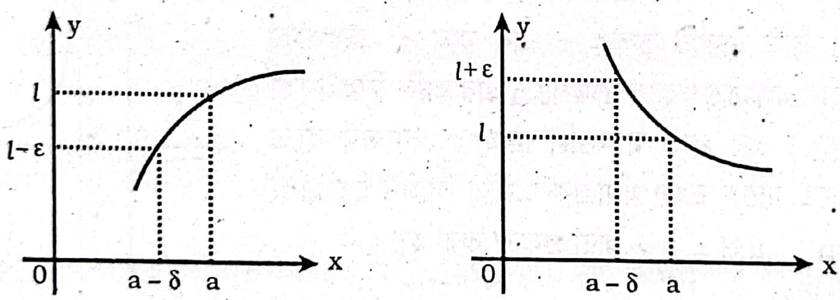
(i) ডান সীমা (Right Hand Limit or R. H. L.) : যদি একটি চলক x এর মান a এর ডান দিক হতে অগ্রসর হয়ে a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় f(x) এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর অতি নিকটবর্তী হয় তবে l কে f(x) ফাংশনের ডান সীমা বলা হয়। ইহাকে $\lim_{x \to a_+} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। [If the values of f(x) become arbitrarily close to a single number l as the values of a variable x approaches to a from right side of a then l is called right hand limit of the function f(x). It is denoted by $\lim_{x \to a_+} f(x) = l$]

এক্ষেত্রে যদি কোনো ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা ε এর জন্য এরূপ একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ নির্ণয় করা সম্ভব হয় তবে $|f(x) - l| < \varepsilon$ হবে যখন $a < x < a + \delta$ হয়।



(ii) বাম সীমা (Left Hand Limit or L. H. L.) : যদি একটি চলক x এর মান a এর বাম দিক হতে অগ্রসর হয়ে a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় f(x) এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর অতি নিকটবর্তী হয় তবে l কে f(x) ফাংশনের বামসীমা বলা হয়। ইহাকে $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। [If the values of f(x) become arbitrarily close to a single number l as the values of a variable x approaches to a from left side of a then l is called left hand limit of the function f(x). It is denoted by $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = l$]

এক্ষেত্রে যদি কোনো ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা ε এর জন্য এরূপ একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ নির্ণয় করা সম্ভব হয় তবে $f(x) - l| < \varepsilon$ হবে যখন $a - \delta < x < a$ হয়।



সীমা এর সংজ্ঞাকে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to a_+} f(x) = l = \lim_{x \to a_-} f(x).$$

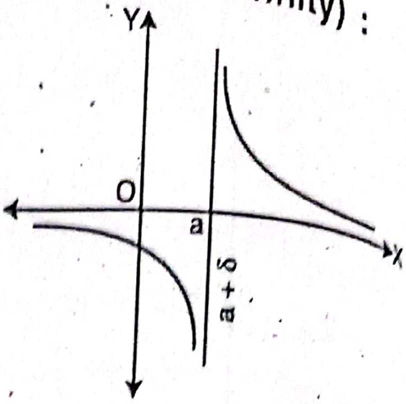
বিঃ দ্রঃ লিমিট এবং একদিকবর্তী লিমিটের মধ্যে সম্পর্ক ঃ

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to a_+} f(x) = l = \lim_{x \to a_-} f(x).$$

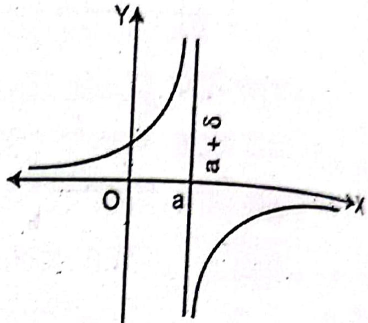
2.A.6. + ∞ এবং – ∞ এর অর্থ বা তাৎপর্য (Meaning of + ∞ and – ∞) : কোনো চলকের মান সীমাহীন ভাবে বৃদ্ধি পেয়ে পূর্বে জানা বৃহত্তম সংখ্যা অপেক্ষা বড় হলে, উহাকে + ∞ চিহ্ন বা ধনাত্মক অসীম বলা হয়।

আবার সীমাহীনভাবে হ্রাস পেয়ে পূর্বে জানা ক্ষুদ্র সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়ে আরও ক্ষুদ্রতর দিকে অগ্রসর হয়, তবে উহাকে – ∞ চিহ্ন বা ঋনাত্মক অসীম বলা হয়। প্রকৃত পক্ষে + ∞ এবং – ∞ কোনো সংখ্যা নয়, শুধু প্রতীক মাত্র।

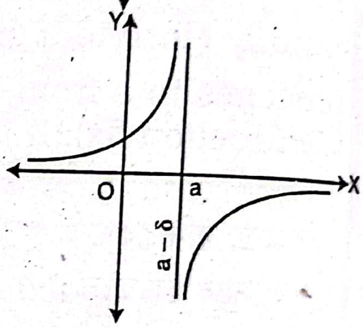
2.A.7. অসীম লিমিট (Infinite Limit and Limit at infinity) :



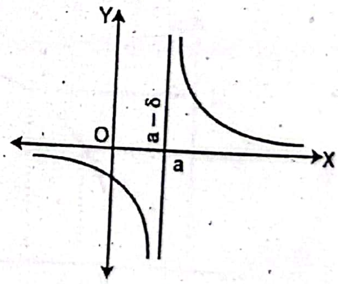
(i) যদি একটি চলক x এর মান a অপেক্ষা বৃহত্তর মানগুলি গ্রহণ করে ক্রমশঃ a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় f(x) এর প্রাপ্ত মানগুলি ক্রমশঃ বৃহত্তর হতে বৃহত্তর হতে থাকে তখন ধনাত্মক অসীম লিমিট হয় এবং একে $\lim_{x\to a_+} f(x) = \infty$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।



(ii) যদি একটি চলক x এর মান a অপেক্ষা বৃহত্তর মানগুলি গ্রহণ করে ক্রমশঃ a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় f(x) এর প্রাপ্ত মানগুলি ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর হতে ক্ষুদ্রতর হতে থাকে তখন ঋণাত্মক অসীম লিমিট হয় এবং একে $\lim_{x\to a_+} f(x) = -\infty$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।



(iii) যদি একটি চলক x এর মান a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর মানগুলি গ্রহণ করে ক্রমশঃ a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় f(x) এর প্রাপ্ত মানগুলি ক্রমশঃ বৃহত্তর হতে বৃহত্তর হতে থাকে তখন ধনাত্মক অসীম লিমিট হয় এবং একে $\lim_{x\to a_-} f(x) = \infty$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।



(iv) যদি একটি চলক x এর মান a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতম মানগুলি গ্রহণ করে ক্রমশঃ a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় f(x) এর প্রাপ্ত মানগুলি ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর হতে ক্ষুদ্রতর হতে থাকে তখন ধনাত্মক অসীম লিমিট হয় এবং একে $\lim_{x\to a_-} f(x) = -\infty$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

2.A.8. $\lim_{x\to a} f(x)$ এবং f(a) এর মধ্যকার পার্থক্য [Differenc between $\lim_{x\to a} f(x)$ and f(a)] :

[BSc(Pass)–2008]

যদি x এর মান a এর উভয় দিক হতে (ডান বা বাম) অগ্রসর হয়ে a এর অতি নিকটবর্তী হয়, তখন f(x) এর মানকে $\lim_{x\to a} f(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, অর্থাৎ $x = a$ বিন্দুতে f(x) এর সীমাস্থ মানকে $\lim_{x\to a} f(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

আবার $x = a$ বিন্দুতে f(x) এর মানকে f(a) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনের মান f(a) এবং সীমাস্থমান $\lim_{x\to a} f(x)$।

[When the value of x reaches very near to a from both sides of a (right or left) then the value of f(x) is denoted by $\lim_{x \to a} f(x)$, that is, the limitting value of f(x) at x = a is denoted by $\lim_{x \to a} f(x)$.

Again, the value of f(x) at x = a is denoted by f(a).

So at x = a the functional value is f(a) and the limitting value is $\lim_{x \to a} f(x)$.]

2.A.9. $\lim_{x \to \infty} f(x) = l_1$ এবং $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l_2$ এর ব্যাখ্যা (explanation) : **[NUH-2003]**

x এর মান সীমাহীন ভাবে বৃদ্ধি পেয়ে পূর্বে জানা বৃহত্তম সংখ্যা অপেক্ষা বড় হওয়ায় যদি f(x) এর মান l_1 এর অতি নিকটবর্তী হয় তবে ইহাকে $\lim_{x \to \infty} f(x) = l_1$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

আবার x এর মান সীমাহীন ভাবে হ্রাস পেয়ে পূর্বে জানা ক্ষুদ্র সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হওয়ায় যদি f(x) এর মান l_2 এর অতি নিকটবর্তী হয় তবে ইহাকে $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l_2$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

[$\lim_{x \to \infty} f(x) = l_1$ denote the value of f(x) is very near to l_1 when x increases infinitely and greater than any known large number. Again, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l_2$ denote the value of f(x) is very near to l_2 when x decreases infinitely and smaller than any known small numbers.]

2.A.10. ফাংশনের সীমার অস্তিত্ব (Existence of limit of function) : **[DUHAC-2021]**

x এর সকল মানের জন্য f(x) ফাংশন সিদ্ধ হলে, ডান দিক এবং বাম দিক হতে মান একটি নির্দিষ্ট মান a এর জন্য সমান হবে।

প্রমাণ ঃ মনেকরি $\lim_{x \to a} f(x) = l$ সিদ্ধ হয়। সীমার সংজ্ঞা অনুযায়ী যেকোনো ধনাত্মক সংখ্যা $\varepsilon > 0$ এর জন্য অপর একটি সংখ্যা $\delta > 0$ পাওয়া যাবে যেন

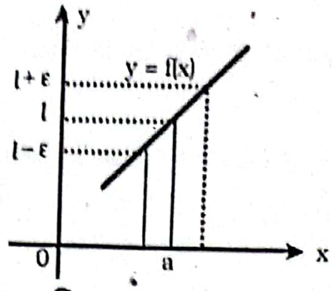
$$|f(x) - l| < \varepsilon \text{ যেখানে } 0 < |x - a| < \delta$$

অর্থাৎ $|f(x) - l| < \varepsilon$ যেখানে $0 < (x - a) < \delta$ এবং $0 < (a - x) < \delta$

সুতরাং $\lim_{x \to a_+} f(x) = l$ এবং $\lim_{x \to a_-} f(x) = l$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a_+} f(x) = \lim_{x \to a_-} f(x) = l$$

অতএব $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর সীমা l. অর্থাৎ $\lim_{x \to a} f(x) = l$.



উপপাদ্য–1. যদি $\lim_{x \to a} f(x)$ বিদ্যমান হয়, তবে দেখাও যে ইহা অবশ্যই অনন্য। [If $\lim_{x \to a} f(x)$ exists, then show that it must be unique.] **[RUH–2009]**

প্রমাণ ঃ ধরি $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ এবং $\lim_{x \to a} f(x) = l_2$

এখন, প্রমাণ করতে হবে, $l_1 = l_2$

সংজ্ঞানুসারে, যেকোনো ক্ষুদ্র সংখ্যা $\varepsilon > 0$ এর জন্য এরূপ $\delta > 0$ পাই যেন

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{এবং } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned}
\therefore |l_1 - l_2| &= |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \\
&\le |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| \\
&\Rightarrow |l_1 - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\Rightarrow |l_1 - l_2| < \varepsilon
\end{aligned}$$

কিন্তু ε একটি ইচ্ছামূলক ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা, সুতরাং আমরা পাই,

$$|l_1 - l_2| = 0 \Rightarrow l_1 = l_2$$

অর্থাৎ $\lim_{x \to a} f(x)$ অনন্য।

2.A.11. সীমার মৌলিক উপপাদ্য (Fundamental Theorem on Limit) :

উপপাদ্য–2. প্রমাণ কর যে বিভিন্ন নির্দিষ্ট চলকের সীমার মানের বীজগণিতীয় সমষ্টি উহাদের সীমাস্থ মানের বীজগণিতীয় সমষ্টির সমান। [Prove that the limit of an algebraic sum of fixed variables is equal to the algebraic sum of the limits.]

অর্থাৎ যদি $\lim_{x \to a} f(x) = l$, $\lim_{x \to a} \phi(x) = m$, $\lim_{x \to a} \psi(x) = n \cdots$ হয়,

তবে প্রমাণ কর $\lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} \phi(x) \pm \lim_{x \to a} \psi(x) \pm \cdots = l \pm m \pm n \pm \cdots$

[NUH–2005, BSc (Pass)–2007]

প্রমাণ ঃ প্রথম দুইটি সীমা বিবেচনা করে পাই,

যদি ক্ষুদ্র ধনাত্মক ε এর মানের জন্য অধিকতর ক্ষুদ্রতর সংখ্যা δ_1 এবং δ_2 হয়, তখন

$$|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ যখন } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ এবং}$$

$$|\phi(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ যখন } 0 < |x - a| < \delta_2$$

অপর ক্ষুদ্র সংখ্যা δ যা δ_1 এবং δ_2 হতে অধিক ক্ষুদ্রতর

সেক্ষেত্রে $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ যখন $0 < |x - a| < \delta$

$$|f(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ যখন } 0 < |x - a| < \delta$$

$$\therefore |f(x) + \phi(x) - (l + m)| \leq |f(x) - l| + |\phi(x) - m|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ যখন } 0 < |x - a| < \delta$$

সুতরাং $\lim\limits_{x \to a} \{f(x) + \phi(x)\} = l + m$ ...... (i)

অনুরূপে $\lim\limits_{x \to a} \{f(x) - \phi(x)\} = l - m$ ...... (ii)

(i) ও (ii) নং একত্রে আমরা পাই $\lim\limits_{x \to a} \{f(x) \pm \phi(x)\} = l \pm m$

একইভাবে একাধিক ফাংশনের সীমার ক্ষেত্রে

$$\lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} \phi(x) \pm \lim_{x \to a} \psi(x) \pm \cdots = l \pm m \pm n \pm \cdots$$

উপপাদ্য–3. প্রমাণ কর সীমার মানের গুণফল উহাদের সীমাস্থ মানের গুণফলের সমান।

[Prove that the limit of a product is the product of the limits]

অর্থাৎ যদি $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, $\lim\limits_{x \to a} \phi(x) = m$, $\lim\limits_{x \to a} \psi(x) = n$ ... ইত্যাদি হয়, তবে

$$\lim_{x \to a} \{f(x).\ \phi(x).\ \psi(x) \cdots\}$$

$$= \lim_{x \to a} f(x).\ \lim_{x \to a} \phi(x).\ \lim_{x \to a} \psi(x) \cdots = l.\ m.\ n \cdots$$

প্রমাণ ঃ যেকোনো দুইটি ফাংশনের জন্য

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ এবং $\lim\limits_{x \to a} \psi(x) = m$

ধরি $f(x) = l + \eta_1(x)$ এবং $\psi(x) = m + \eta_2(x)$ ...... (i)

যেখানে $\lim\limits_{x \to a} \eta_1(x) = 0$ এবং $\lim\limits_{x \to a} \eta_2(x) = 0$ ...... (ii)

যদি ক্ষুদ্র ধনাত্মক ε এর মানের জন্য অপর দুইটি ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা δ_1 এবং δ_2 হয়, তবে $|\eta_1(x)| < \sqrt{\varepsilon}$ যেখানে $0 < |x - a| < \delta_1$ এবং $|\eta_2(x)| < \sqrt{\varepsilon}$ যেখানে $0 < |x - a| < \delta_2$. অপর ক্ষুদ্র সংখ্যা δ যাহা δ_1 এবং δ_2 অপেক্ষা অধিক ক্ষুদ্রতর।

সেক্ষেত্রে $|\eta_1(x)\,\eta_2(x)| < \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$ যেখানে $0 < |x-a| < \delta$

অর্থাৎ $\lim_{x\to a} \eta_1(x)\,\eta_2(x) = 0$ ...... (iii)

(i) নং সমীকরণ হতে $\lim_{x\to a} f(x)\,\psi(x) = \lim_{x\to a} \{l + \eta_1(x)\}\{m + \eta_2(x)\}$

$= \lim_{x\to a} \{lm + l\eta_2(x) + m\eta_1(x) + \eta_1(x)\,\eta_2(x)\}$

$= lm$ [(ii) ও (iii) নং হতে]

$\therefore \lim_{x\to a} f(x)\,\phi(x) = lm$

অনুরূপে একাধিক নির্দিষ্ট সংখ্যক ফাংশনের ক্ষেত্রে

$$\lim_{x\to a} f(x).\,\phi(x).\,\psi(x) \cdots = l.\,m.\,n \cdots$$

উপপাদ্য–4. প্রমাণ কর সীমার অনুপাত উহাদের সীমাস্থ মানের অনুপাতের সমান যেখানে হরের লিমিট শূন্য নয়। [Prove that the limit of a quotient is the quotient of the limits provided the limit of denominator is not zero.]

প্রমাণ ঃ ধরি $\lim_{x\to a} f(x) = l$ যেখানে $|f(x) - l| < \varepsilon$ যখন $0 < |x-a| < \delta_1$

$\lim_{x\to a} \phi(x) = m.\ (m \neq 0)$ যেখানে $|\phi(x) - m| < \varepsilon$ যখন $0 < |x-a| < \delta_2$

এক্ষেত্রে ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা ε এর জন্য ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক সংখ্যা δ_1 এবং δ_2.

এখানে $\left|\dfrac{f(x)}{\phi(x)} - \dfrac{l}{m}\right| = \left|\dfrac{mf(x) - l\phi(x)}{m\phi(x)}\right|$

$= \dfrac{|m(f(x) - l) - l(\phi(x) - m)|}{|m|\ |\phi(x)|} \leq \dfrac{|m|\ |f(x) - l| + |l|\ |\phi(x) - m|}{|m|\ |\phi(x)|}$

$< \dfrac{|m|\ \varepsilon + |l|\ \varepsilon}{|m|\ |m|}$ যেহেতু $|\phi(x)| > |m|$

$= \dfrac{|m| + |l|}{m^2}\,\varepsilon$

সুতরাং $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\phi(x)} = \dfrac{l}{m}$ যেখানে $m \neq 0$.

উপপাদ্য–5. (সেন্ডুইস উপপাদ্য) মুক্ত ব্যবধিতে দুইটি ফাংশনের একই সীমা মানের মধ্যবর্তী কোনো ফাংশন সেই মানকে সিদ্ধ করবে।

মনেকরি x এর সকল মানের জন্য $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

যখন $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$ তখন $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

2.A.12. সীমাস্থ মানের সারণী তালিকা (Lists of limiting values) :

সারণী–1

	$\lim \lvert g \rvert$ এর মান	$\lim \frac{1}{\lvert g \rvert}$ এর মান
1	0	$+\infty$
2	$+\infty$	0

সারণী–2

	$\lim f$ এর মান	$\lim g$ এর মান	$\lim(f+g)$ এর মান
1	c	$+\infty$	$+\infty$
2	c	$-\infty$	$-\infty$
3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
5	$+\infty$	$-\infty$	অনির্ণেয় বা সমাধান যোগ্য নয়

সরণী–3

	$\lim \lvert f \rvert$ এর মান	$\lim \lvert g \rvert$ এর মান	$\lim \lvert fg \rvert$ এর মান
1	$c \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$
2	0	$+\infty$	অনির্ণেয় বা সমাধান যোগ্য নয়
3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

সারণী–4

	$\lim \lvert f \rvert$ এর মান	$\lim \lvert g \rvert$ এর মান	$\lim \frac{\lvert f \rvert}{\lvert g \rvert}$ এর মান
1	$c \neq 0$	0	$+\infty$
2	0	0	অর্নিণেয় বা সমাধান যোগ্য নয়
3	c	$+\infty$	0
4	$+\infty$	c	$+\infty$
5	$+\infty$	$+\infty$	অর্নিণেয় বা সমাধান যোগ্য নয়।

উদাহরণ–1. $(\delta - \varepsilon)$ সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ কর [Use the $(\delta - \varepsilon)$ definition to prove that] $\lim_{x \to 2} (3x + 4) = 10$ **[DUH-1992]**

সমাধান ঃ প্রমাণ করতে হবে যেকোনো ক্ষুদ্র সংখ্যা $\varepsilon > 0$ এর উপর নির্ভরশীল অপর একটি ক্ষুদ্রতর সংখ্যা $\delta > 0$ বিদ্যমান থাকবে যাতে [It will be proved that there exists a small number $\delta > 0$ which is dependent of a small number $\varepsilon > 0$ such that]

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 10| < \varepsilon \text{ যেখানে } f(x) = 3x + 4$$

এখন $|f(x) - 10| = |3x + 4 - 10| = |3(x-2)| = 3.\ |x-2|$

$$< 3\delta \quad [\because |x-2| < \delta]$$

$\Rightarrow |f(x) - 10| < \varepsilon$. যেখানে $3\delta = \varepsilon$ বা $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$

সুতরাং $\varepsilon > 0$ এর উপর নির্ভরশীল $\delta > 0$ বিদ্যমান যাতে [So there exists a $\delta > 0$ which is dependent on $\varepsilon > 0$.]

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 10| < \varepsilon \text{ অর্থাৎ } \lim_{x \to 2} (3x + 4) = 10.$$

উদাহরণ–2. $(\delta - \varepsilon)$ সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ কর [Use the $(\delta - \varepsilon)$ definition to prove that] $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$ **[NUH–10, NUH(NM)–09, 16]**

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ এবং $|x - 3| < \delta$ যেখানে $\delta > 0$.

$$\therefore |f(x) - 6| = \left|\frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6\right| = |x + 3 - 6| = |x - 3|$$

$$\Rightarrow |f(x) - 6| < \delta \Rightarrow |f(x) - 6| < \varepsilon \quad \text{যেখানে } \varepsilon = \delta$$

সুতরাং $\varepsilon > 0$ এর উপর নির্ভরশীল $\delta > 0$ বিদ্যমান যাতে [So there exists a $\delta > 0$ which is dependent on $\varepsilon > 0$.]

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 6| < \varepsilon \quad \therefore \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$

উদাহরণ–3. $(\delta - \varepsilon)$ সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ কর যে [Use the $(\delta - \varepsilon)$ definition to prove that] :

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$$ **[BSc(Pass)–2009, 2014, DUHAC–2019]**

সমাধান ঃ ধরি, $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ এবং $|x-2| < \delta$ যেখানে $\delta > 0$.

এখন, $|f(x) - 4| = \left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right|$

$= |x+2-4|$

$= |x-2| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$ যেখানে $\varepsilon = \delta > 0$

$\therefore$ ক্ষুদ্র সংখ্যা $\varepsilon > 0$ এর উপর নির্ভরশীল অপর একটি ক্ষুদ্রতর সংখ্যা $\delta > 0$ বিদ্যমান যেখানে [Therefore, there exists a small number $\delta > 0$ which is dependent on a small number $\varepsilon > 0$ where]

$|x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon.$

$\therefore \lim\limits_{x\to2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4.$

উদাহরণ–4. $(\delta - \varepsilon)$ সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ কর [Use the $(\delta - \varepsilon)$ definition to prove that.] $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$ **[NUH–11, 14, 16, 18, NUH(NM)–10, 12, BSc(Pass)–10, 16, DUH–80]**

সমাধান ঃ ধরি, $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$, প্রমাণ করতে হবে, যেকোনো ক্ষুদ্র সংখ্যা $\varepsilon > 0$ এর উপর নির্ভরশীল এমন একটি সংখ্যা $\delta > 0$ পাওয়া যাবে যাতে [Let $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$. We shall prove that there exists a number $\delta > 0$ which is dependent on a small number $\varepsilon > 0$ such that]

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon$$

এখন যেহেতু $x \to 1$ সেহেতু $|x-1| < \delta$ যেখানে δ পূর্বে জানা যেকোনো যোগবোধক ক্ষুদ্রতম সংখ্যার চেয়েও ক্ষুদ্র। তাহলে [Now since $x \to 1$ so $|x-1| < \delta$ where δ is smaller than any known positive small number. So]

$$|x-1| < \delta < 1.$$

এখন $|f(x) - 3| = \left|\frac{x^3-1}{x-1} - 3\right| = |x^2 + x + 1 - 3|$

$= |x^2 + x - 2| = |(x-1)^2 + 3(x-1)|$

$\leq |x-1|^2 + 3|x-1|$ $\quad [\because |a+b| \leq |a| + |b|]$

$< |x-1| + 3|x-1|$ $\quad [\because |x-1| < 1]$

$\therefore |f(x) - 3| < 4|x - 1|$

$\Rightarrow |f(x) - 3| < 4\delta$ $\qquad [\because |x - 1| < \delta]$

$\Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon$ যেখানে $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$

সুতরাং $\varepsilon > 0$ এর উপর নির্ভরশীল $\delta > 0$ বিদ্যমান যাতে [So depending on $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$.]

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3.$$

উদাহরণ–5. $(\delta - \varepsilon)$ সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ কর। [Use the $(\delta - \varepsilon)$ definition to prove that] $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 3x + 7) = 9$. **[DUHAC–21, BSc(Pass)–08]**

সমাধান ঃ ধরি, $f(x) = x^3 - 3x + 7$ এবং $|x - 2| < \delta, \delta > 0$

এখন যেহেতু $x \to 2$ সেহেতু $|x - 2| < \delta$ যেখানে δ পূর্বে জানা যেকোনো যোগবোধক ক্ষুদ্রতম সংখ্যার চেয়েও ক্ষুদ্র। [Now since $x \to 2$ so $|x - 2| < \delta$ where δ is smaller than any known positive small number. So]

তাহলে $|x - 2| < \delta < 1$.

এখন $|f(x) - 9| = |x^3 - 3x + 7 - 9| = |x^3 - 3x - 2|$

$$= |(x - 2)^3 + 6(x - 2)^2 + 9(x - 2)|$$

$$\leq |x - 2|^3 + 6|x - 2|^2 + 9|x - 2|$$

$$< |x - 2| + 6|x - 2| + 9|x - 2| \qquad [\because |x - 2| <$$

$\therefore |f(x) - 9| < 16|x - 2|$

$\Rightarrow |f(x) - 9| < 16\,\delta \Rightarrow |f(x) - 9| < \varepsilon$ যেখানে $\delta = \dfrac{\varepsilon}{16}$.

সুতরাং $\varepsilon > 0$ এর উপর নির্ভরশীল $\delta > 0$ বিদ্যমান যাতে [So depending on $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$.]

$$|x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 9| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \to 2} (x^3 - 3x + 7) = 9.$$

উদাহরণ–6. নিম্নে বর্ণিত $f(x)$ ফাংশনটির জন্য

(a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ এবং (b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ নির্ণয় কর।

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 2x & \text{যখন } -1/2 \leq x < 0 \\ 1 - 2x & \text{যখন } 0 \leq x < 1/2 \\ -1 + 2x & \text{যখন } x > 1/2 \end{cases}$$

[NUH–2006, DUH–19

সমাধান ঃ (a) $x = 0$ বিন্দুতে

ডান সীমা $= \lim_{x \to 0_+} f(x) = \lim_{x \to 0_+} (1 - 2x) = 1 - 0 = 1$

বাম সীমা $= \lim_{x \to 0_-} f(x) = \lim_{x \to 0_-} (1 + 2x) = 1 + 0 = 1$

যেহেতু $x = 0$ বিন্দুতে ডান সীমা = বাম সীমা = 1

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

(b) $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে

ডান সীমা $= \lim_{x \to \frac{1}{2}+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}+} (-1 + 2x) = -1 + 1 = 0$

বাম সীমা $= \lim_{x \to \frac{1}{2}-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}-} (1 - 2x) = 1 - 1 = 0$

যেহেতু $\lim_{x \to \frac{1}{2}+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}-} f(x) = 0$

$\therefore \lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = 0$.

উদাহরণ–7. $\lim_{x \to 0} f(x)$ নির্ণয় কর যেখানে $f(x) = \begin{cases} (1 + 2x)^{1/x} & \text{যখন } x \neq 0 \\ e^2 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

সমাধান ঃ $x = 0$ বিন্দুতে

ডান সীমা $= \lim_{x \to 0_+} f(x) = \lim_{x \to 0_+} (1 + 2x)^{1/x}$

$= \lim_{x \to 0_+} \{(1 + 2x)^{1/2x}\}^2 = e^2$

বাম সীমা $= \lim_{x \to 0_-} f(x) = \lim_{x \to 0_-} (1 + 2x)^{1/x}$

$= \lim_{x \to 0_-} \{(1 + 2x)^{1/2x}\}^2 = e^2$.

যেহেতু $x = 0$ বিন্দুতে ডান সীমা = বাম সীমা $= e^2$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = e^2$

উদাহরণ–8. ধরি, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|x|}{2}} & \text{যখন } -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{যখন } 0 \le x < 2 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ কি বিদ্যমান? উত্তরের সঠিকতা প্রতিপাদন কর। [Does the $\lim_{x \to 0} f(x)$? Justify your answer.] **[DUHAC–2021]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|x|}{2}} & \text{যখন } -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{যখন } 0 \le x < 2 \end{cases}$

এখানে $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} x^2 = 0$

এবং $\lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_-} e^{-\frac{|x|}{2}} = e^0 = 1$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0_-} f(x)$, সুতরাং $\lim\limits_{x\to 0_-} f(x)$ বিদ্যমান নয়।

উদাহরণ–9. দেখাও যে $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ বিদ্যমান নয়। [Show that $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ does not exist.]

সমাধান ঃ বামসীমা $= \lim\limits_{x\to 0_-} \frac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0_-} \frac{x}{-x} = \lim\limits_{x\to 0_-} (-1) = -1$

ডানসীমা $= \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0_+} (1) = 1$

এখন যেহেতু বামসীমা ≠ ডানসীমা সেহেতু $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ বিদ্যমান নয়।

উদাহরণ–10. সীমার বিদ্যমানতা পরীক্ষা কর [Test the existence of the limit] :

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$$ **[NUH–1997, 2001]**

সমাধান ঃ বামসীমা $= \lim\limits_{x\to 1_-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1_-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$

ডানসীমা $= \lim\limits_{x\to 1_+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1_+} \frac{x-1}{x-1} = 1$

যেহেতু বামসীমা ≠ ডানসীমা, কাজেই $\lim\limits_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ বিদ্যমান নয়।

উদাহরণ–11. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ নির্ণয় কর যেখানে [Find $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ and $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ where]

$$f(x) = |x+1| + |x-2|$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|x|}{2}}, & \text{যখন } -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{যখন } 0 \leq x < 2 \end{cases}$

এখানে $\lim_{x \to 0_+} f(x) = \lim_{x \to 0_+} x^2 = 0$

এবং $\lim_{x \to 0_-} f(x) = \lim_{x \to 0_-} e^{-\frac{|x|}{2}} = e^0 = 1$

যেহেতু $\lim_{x \to 0_+} f(x) \neq \lim_{x \to 0_-} f(x)$, সুতরাং $\lim_{x \to 0_-} f(x)$ বিদ্যমান নয়।

উদাহরণ-9. দেখাও যে $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$ বিদ্যমান নয়। [Show that $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$ does not exist.]

সমাধান ঃ বামসীমা $= \lim_{x \to 0_-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0_-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \to 0_-} (-1) = -1$

ডানসীমা $= \lim_{x \to 0_+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0_+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0_+} (1) = 1$

এখন যেহেতু বামসীমা $\neq$ ডানসীমা সেহেতু $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$ বিদ্যমান নয়।

উদাহরণ-10. সীমার বিদ্যমানতা পরীক্ষা কর [Test the existence of the limit] :

$$\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x-1} \qquad \textbf{[NUH-1997, 2001]}$$

সমাধান ঃ বামসীমা $= \lim_{x \to 1_-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \to 1_-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$

ডানসীমা $= \lim_{x \to 1_+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \to 1_+} \frac{x-1}{x-1} = 1$

যেহেতু বামসীমা $\neq$ ডানসীমা, কাজেই $\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ বিদ্যমান নয়।

উদাহরণ-11. $\lim_{x \to -1} f(x)$ এবং $\lim_{x \to 2} f(x)$ নির্ণয় কর যেখানে [Find $\lim_{x \to -1} f(x)$ and $\lim_{x \to 2} f(x)$ where]

$$f(x) = |x+1| + |x-2|$$

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = |x + 1| + |x - 2|$

$\lim_{x \to -1} f(x)$ নির্ণয় ঃ

বামসীমা $= \lim_{x \to -1_-} f(x)$

$= \lim_{x \to -1_-} |x + 1| + |x - 2|$

$= \lim_{x \to -1_-} (x + 1) - (x - 2)$

$= \lim_{x \to -1_-} (1 - 2x) = 1 - 2(-1) = 3$

ডানসীমা $= \lim_{x \to -1_+} f(x)$

$= \lim_{x \to -1_+} |x + 1| + |x - 2|$

$= \lim_{x \to -1_+} (x + 1) - (x - 2) = 3$

যেহেতু বামসীমা = ডানসীমা = 3, কাজেই $\lim_{x \to -1} f(x) = 3$

$\lim_{x \to 2} f(x)$ নির্ণয় ঃ

বামসীমা $= \lim_{x \to 2_-} f(x)$

$= \lim_{x \to 2_-} |x + 1| + |x - 2|$

$= \lim_{x \to 2_-} (x + 1) - (x - 2) = 3$

ডানসীমা $= \lim_{x \to 2_+} f(x)$

$= \lim_{x \to 2_+} |x + 1| + |x - 2|$

$= \lim_{x \to 2_+} (x + 1) + (x - 2)$

$= \lim_{x \to 2_+} (2x - 1) = 4 - 1 = 3$

যেহেতু বামসীমা = ডানসীমা = 3, কাজেই $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$.

উদাহারণ–12. যদি $f(x) = [x]$, যেখানে $[x]$ সর্বোচ্চ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা প্রকাশ করে কিন্তু x এর চেয়ে বড় নয়। তাহলে দেখাও যে, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ বিদ্যমান নয়। [If $f(x) = [x]$, where $[x]$ represents the greatest integer not greater than x. Then show that $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ does not exist.] **[DUH–2010]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = [x]$

এখানে $[x]$ সর্বোচ্চ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা প্রকাশ করে কিন্তু x এর চেয়ে বড় নয়।

বামসীমা $= \lim\limits_{x \to 1_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1_-} [x] = [1-] = 0$

ডানসীমা $= \lim\limits_{x \to 1_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1_+} [x] = [1_+] = 1$

যেহেতু বামসীমা ≠ ডানসীমা, কাজেই $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ বিদ্যমান নয়।

উদাহরণ–13. দেখাও যে [Show that] : $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$

সমাধান ঃ $\left|x \sin \frac{1}{x}\right| = |x| \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq |x| \quad \left[\because \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1\right]$

$$\Rightarrow \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x|$$

$$\therefore \left|\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}\right| \leq \left|\lim_{x \to 0} x\right| = 0$$

সুতরাং $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$

উদাহরণ–14. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{e^{\tan x} - 1}{e^{\tan x} + 1}$ এর সীমাস্থমান কি বিদ্যমান? [Does the limit of $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{e^{\tan x} - 1}{e^{\tan x} + 1}$ exist?] **[CUH–2007]**

সমাধান ঃ $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{e^{\tan x} - 1}{e^{\tan x} + 1} \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ আকার}\right]$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{e^{\tan x}(1 - e^{-\tan x})}{e^{\tan x}(1 + e^{-\tan x})}$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - e^{-\tan x}}{1 + e^{-\tan x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

সুতরাং $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{e^{\tan x} - 1}{e^{\tan x} + 1}$ বিদ্যমান।

বিভাগ-ক ঃ অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্ন ও উত্তর

Part–A : Brief/Quiz Questions and Answer

2.A.1. ফাংশনের সীমা বলতে কী বুঝ? (What do you mean by the limit of a function?)

Ans : যদি একটি চলক x এর মান a এর উভয় দিক হতে (ডান বা বাম) অগ্রসর হয়ে a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় f(x) এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর অতি নিকটবর্তী হয়, তবে l কে x = a বিন্দুতে f(x) ফাংশনের সীমা বলে। ইহাকে $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

2.A.2. (δ – ε) এর সাহায্যে ফাংশনের সীমার সংজ্ঞা দাও। (Define limit of function using (δ – ε).)

[NUH–12, 17, NUH(NM)–19, 21, BSc(Pass)–18]

Ans : যদি পূর্ব নির্ধারিত কোনো ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা ε এর উপর নির্ভরশীল অপর একটি ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা δ নির্ণয় করা যায় যেন $|f(x) - l| < \varepsilon$ যখন $0 < |x - a| < \delta$, তবে l কে x = a বিন্দুতে f(x) ফাংশনের সীমা বলে।

2.A.3. ফাংশনের ডানসীমা কী? (What is the right limit of a function?)

[NUH(NM)–2011]

Ans : যদি একটি চলক x এর মান a এর ডান দিক হতে অগ্রসর হয়ে a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় f(x) এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর অতি নিকটবর্তী হয়, তবে l কে x = a বিন্দুতে f(x) ফাংশনের ডানসীমা বলে। ইহাকে $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

2.A.4. ফাংশনের বামসীমা কী? (What is left limit of a function?)

[NUH(NM)–2011, 2015]

Ans : যদি একটি চলক x এর মান a এর বামদিক হতে অগ্রসর হয়ে a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় f(x) এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর অতি নিকটবর্তী হয়, তবে l কে x = a বিন্দুতে f(x) ফাংশনের বামসীমা বলে। ইহাকে $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

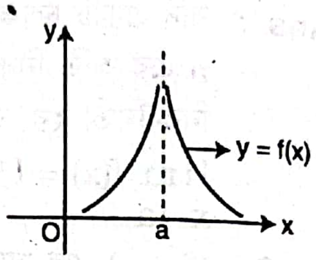
2.A.5. ফাংশনের সীমার অস্তিত্ব বলতে কী বুঝ? (What do you mean by existence of limit of function?) **[NUH(NM)–2014, 2018]**

Ans : যদি $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = l$ হয়, তবে x = a বিন্দুতে ফাংশনের সীমার অস্তিত্ব আছে যেখানে $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = l$.

আবার $\lim\limits_{x\to a+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a-} f(x)$ হলে $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনের সীমার অস্তিত্ব নাই।

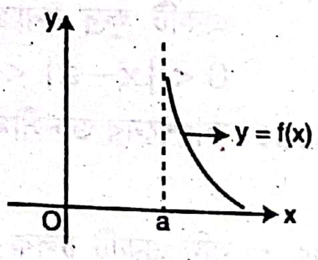
2.A.6. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ দ্বারা কী বোঝায়? (What is meant by $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$?)

Ans : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ দ্বারা বোঝায়, যখন x এর মান a এর বাম বা ডান দিক হতে a এর অতি নিকটবর্তী হয়, তখন $f(x)$ এর মান অসীমিতভাবে বৃহৎ হতে বৃহত্তর হয়।



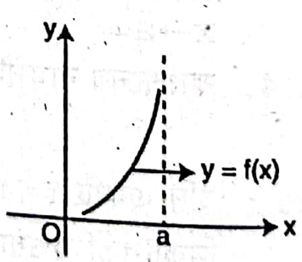
2.A.7. $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \infty$ দ্বারা কী বোঝায়? (What is meant by $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \infty$?)

Ans : $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \infty$ দ্বারা বোঝায়, যখন x এর মান a এর ডান দিক হতে, a এর অতি নিকটবর্তী হয়, তখন $f(x)$ এর মান অসীমিতভাবে বৃহৎ হতে বৃহত্তর হয়।



2.A.8. $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \infty$ দ্বারা কী বোঝায়? (What is meant by $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \infty$?)

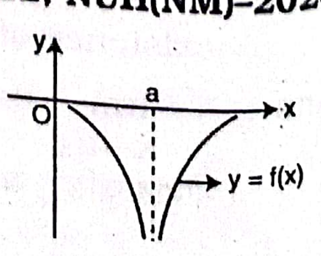
Ans : $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \infty$ দ্বারা বোঝায়, যখন x এর মান a এর বামদিক হতে a এর অতিনিকটবর্তী হয়, তখন $f(x)$ এর মান অসীমিতভাবে বৃহৎ হতে বৃহত্তর হয়।



2.A.9. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ দ্বারা কী বোঝায়?
(What is meant by $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$?)

[NUH–2012, NUH(NM)–2020]

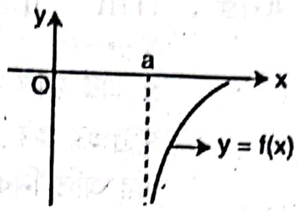
Ans : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ দ্বারা বোঝায়, যখন x এর মান a এর বাম বা ডান দিক হতে a এর অতি নিকটবর্তী হয়, তখন $f(x)$ এর মান অসীমিতভাবে ক্ষুদ্র হতে ক্ষুদ্রতর হয়।



2.A.10. $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = -\infty$ দ্বারা কী বোঝায়?

(What is meant by $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = -\infty$?)

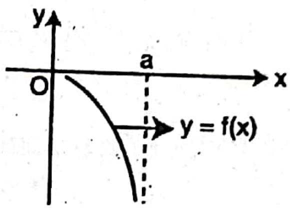
Ans : $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = -\infty$ দ্বারা বোঝায়, যখন x এর মান a এর ডান দিক হতে a এর অতি নিকটবর্তী হয়, তখন f(x) এর মান অসীমিতভাবে ক্ষুদ্র হতে ক্ষুদ্রতর হয়।



2.A.11. $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = -\infty$ দ্বারা কী বোঝায়?

(What is meant by $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = -\infty$?)

Ans : $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = -\infty$ দ্বারা বোঝায়, যখন x এর মান a এর বাম দিক হতে a এর অতি নিকটবর্তী হয়, তখন f(x) এর মান অসীমিতভাবে ক্ষুদ্র হতে ক্ষুদ্রতর হয়।



2.A.12. সীমা নির্ণয় কর (Find limits) : (i) $\lim\limits_{x \to a+} \frac{1}{x-a}$ (ii) $\lim\limits_{x \to a-} \frac{1}{x-a}$

Ans : (i) $\lim\limits_{x \to a+} \frac{1}{x-a} = \infty$ (ii) $\lim\limits_{x \to a-} \frac{1}{x-a} = -\lim\limits_{x \to a-} \frac{1}{a-x} = -\infty$

2.A.13. মান কত? (What is the value?)

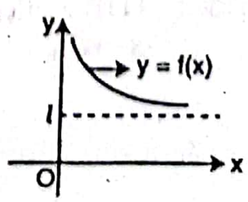
(i) $\lim\limits_{x \to a+} \frac{1}{(x-a)^2}$ (ii) $\lim\limits_{x \to a-} \frac{1}{(x-a)^2}$

Ans : (i) $\lim\limits_{x \to a+} \frac{1}{(x-a)^2} = \infty$

(ii) $\lim\limits_{x \to a-} \frac{1}{(x-a)^2} = \lim\limits_{x \to a-} \frac{1}{(a-x)^2} = \infty.$

2.A.14. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$ দ্বারা কী বোঝায়? (What is meant by $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$?)

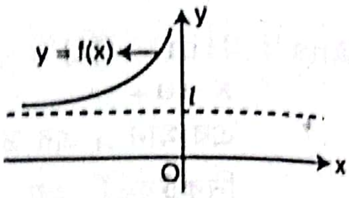
Ans : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$ দ্বারা বোঝায়, যখন x এর মান সীমাহীনভাবে বৃদ্ধি পেয়ে পূর্বে জানা বৃহত্তম সংখ্যা অপেক্ষা বড় হয়, তখন f(x) এর মান l এর অতি নিকটবর্তী হয়।



2.A.15. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ দ্বারা কী বোঝায়?

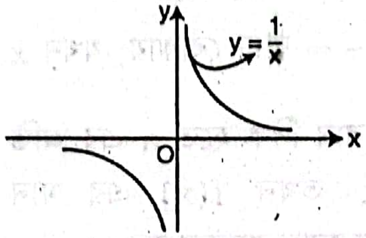
(What is meant by $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$?)

Ans : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ দ্বারা বোঝায়, যখন x এর মান সীমাহীনভাবে ক্ষুদ্র হতে ক্ষুদ্রতর হয়, তখন f(x) এর মান l এর অতি নিকটবর্তী হয়।



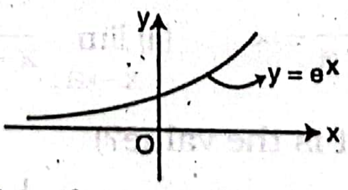
2.A.16. মান কত? (What is the value?) (i) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ (ii) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$

Ans : (i) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ (ii) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$



2.A.17. মান কত? (What is the value?) (i) $\lim_{x \to \infty} e^x$ (ii) $\lim_{x \to -\infty} e^x$

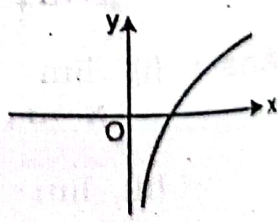
Ans : (i) $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$ (ii) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$



2.A.18. মান কত? (What is the value?) $\lim_{x \to \infty} \ln x$

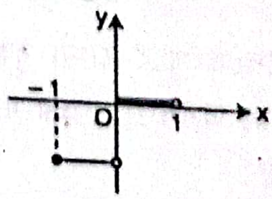
Ans : এখানে x এর মান সীমাহীনভাবে বৃহৎ হতে বৃহত্তর হলে $\ln x$ এর মানও বৃহৎ হতে বৃহত্তম হয়।

$\therefore \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty.$



2.A.19. মান কত? (What is the value?) $\lim_{x \to 0_+} [x]$ এবং $\lim_{x \to 0_-} [x]$

Ans : $\lim_{x \to 0_+} [x] = 0$ এবং $\lim_{x \to 0_-} [x] = -1$



2.A.20. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ হলে $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$ কত?

Ans : $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ হলে $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

2.A.21. $\lim_{x\to a} f(x) = c$ (ধ্রুবক) এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ হলে $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$ কত?

Ans : $\lim_{x\to a} f(x) = c$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ হলে $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)| = \infty$

2.A.22. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ হলে $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$ কত?

Ans : $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ হলে $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \infty$

2.A.23. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ হলে $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$ কত?

Ans : $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ হলে $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$ অনির্ণেয় আকার হবে।

2.A.24. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ হলে $f(x) \cdot g(x)$ কত?

Ans : $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ হলে $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x)$ অনির্ণেয় আকার হবে।

2.A.25. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ হলে $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ কত?

Ans : $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ হলে $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ অনির্ণেয় আকার হবে।

2.A.26. $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$ এর মান কত? **[NUH-2021]**

Ans : $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. (–1 হতে 1 এর মধ্যবর্তী কোনো মান) = 0.

2.A.27. স্যান্ডউইচ বা স্কুইজিং উপপাদ্যের বর্ণনা দাও। (State the sandwich or squeezing theorem.)

Ans : যদি x এর সমস্ত মানের জন্য $g(x) \le f(x) \le h(x)$

এবং $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$ হয় তবে $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ হবে।

2.A.28. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ও $f(a)$ দ্বারা কি বোঝায়? (What are meant by $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ and $f(a)$?) **[NUH–2014, 2018]**

Ans : $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ দ্বারা বোঝায় $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর সীমাস্থমান এবং $f(a)$ দ্বারা বোঝায় $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মান।

2.A.29. $f(x)$ ফাংশনের উদাহরণ দাও যেখানে সীমাস্থমান বিদ্যমান কিন্তু ফাংশনের মান বিদ্যমান নয়। (Give an example of $f(x)$ where limitting value exists but functional value does not exist.)

Ans : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ফাংশনটির $x = 0$ বিন্দুতে সীমাস্থমান বিদ্যমান অর্থাৎ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (বিদ্যমান) কিন্তু ঐ বিন্দুতে ফাংশনের মান বিদ্যমান নয় অর্থাৎ $f(0)$ বিদ্যমান নয়।

2.A.30. $f(x)$ ফাংশনের উদাহরণ দাও যেখানে ফাংশনের মান বিদ্যমান কিন্তু সীমাস্থমান বিদ্যমান নয়। (Give an example of $f(x)$ where functional value exists but limitting value does not exist.)

Ans : $f(x) = [x]$ ফাংশনটির $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনের মান বিদ্যমান অর্থাৎ $f(0) = 0$ (বিদ্যমান) কিন্তু ঐ বিন্দুতে সীমাস্থমান বিদ্যমান নয়, কারণ $\lim\limits_{x \to 0+} [x] = 0$ এবং $\lim\limits_{x \to 0-} [x] = -1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} [x]$ বিদ্যমান নয়।

2.A.31. $f(x)$ ফাংশনের উদাহরণ দাও যেখানে $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনের মান ও সীমাস্থমান উভয়ে বিদ্যমান। (Give an example of $f(x)$ where functional value and limitting value both exist at $x = 0$.)

Ans : $f(x) = |x|$ ফাংশনটির $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনের মান ও সীমাস্থমান বিদ্যমান। অর্থাৎ $f(0) = 0$ এবং $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ (বিদ্যমান)।

EXERCISE–2(A)

বিভাগ-খ ঃ সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন

Part–B : Short Questions

মান নির্ণয় কর [Find the value] :

1. $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 2x + 1)$

2. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x}{x + 1}$

3. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{x^2 - 1}$

4. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{x^3 - \frac{\pi^3}{8}}{x - \frac{\pi}{2}}$

5. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^2 + 7}{3x^2 - x}$

7. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{3x^4 + x}}{x^2 - 8}$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4 + x} - 2}{x}$

9. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{e^{2x}}$ **[DUH–1990]**

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^n - 1}{x}$ **[DUH–1983]**

11. $\lim\limits_{x \to 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}}$

12. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$

13. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$

14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$

15. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4}{e^x}$

16. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$

18. $\lim\limits_{x \to 0_+} x^{1/x}$

19. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x}$

20. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{1/x}$

21. একটি ফাংশন f(x) কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হইল [A function is defined as follows.]

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{যখন } x < 3 \\ 5 & \text{যখন } x = 3 \\ 2(5 - x) & \text{যখন } x > 3 \end{cases}$$

(a) $\lim\limits_{x \to 3_+} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x \to 3_-} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ নির্ণয় কর।

22. যদি $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } x > 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \\ -x & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x \to 0_-}$ এবং (c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ নির্ণয় কর।

23. যদি $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ হয়, তবে $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x)$ নির্ণয় কর।

24. যদি $f(x) = \dfrac{1 + 2^{1/x}}{3 + 2^{1/x}}$ হয়, তবে $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান আছে?

25. উদাহরণসহ f(x) এর অবস্থাগুলি ব্যাখ্যা কর।

(i) f(a) অস্তিত্বহীন কিন্তু $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ এর অস্তিত্ব আছে।

(ii) f(a) এবং $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ উভয়ের অস্তিত্ব আছে কিন্তু উহারা অসমান।

26. যদি একটি ফাংশন f কে f(x) = [x] দ্বারা বর্ণনা করা যায় যখন [x] দ্বারা x এর মানে বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা বুঝায়, যাহা x হতে বৃহত্তর নয়। তবে প্রমাণ কর ঃ

$\lim\limits_{x \to 1_+} f(x) = 1$ এবং $\lim\limits_{x \to 1_-} f(x) = 0$.

27. দেখাও যে $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ বিদ্যমান নয়।

যেখানে $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x| + x^2} & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

28. দেখাও যে $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ বিদ্যমান নয়। যেখানে $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{7 - x} & \text{যখন } x < 2 \\ 7 - x & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$

29. দেখাও যে $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ বিদ্যমান। যেখানে $f(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{6 - x} & \text{যখন } x > 3 \\ 6 - x & \text{যখন } x < 3 \end{cases}$

30. যদি f(x) = x − [x] হয় তবে দেখাও যে $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ বিদ্যমান নয়।

31. দেখাও যে $\lim\limits_{x \to 1_+} \left([x] + \dfrac{|x - 1|}{x - 1} + 2 \right) = 4$

32. দেখাও যে $\lim\limits_{x \to 5_-} \dfrac{x}{[x]} \neq \lim\limits_{x \to 5_+} \dfrac{x}{[x]}$

22. যদি $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } x > 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \\ -x & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0_-}$ এবং (c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ নির্ণয় কর।

23. যদি $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ হয়, তবে $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to 0_-} f(x)$ নির্ণয় কর।

24. যদি $f(x) = \frac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}$ হয়, তবে $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান আছে?

25. উদাহরণসহ f(x) এর অবস্থাগুলি ব্যাখ্যা কর।

(i) f(a) অস্তিত্বহীন কিন্তু $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ এর অস্তিত্ব আছে।

(ii) f(a) এবং $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ উভয়ের অস্তিত্ব আছে কিন্তু উহারা অসমান।

26. যদি একটি ফাংশন f কে f(x) = [x] দ্বারা বর্ণনা করা যায় যখন [x] দ্বারা x এর মানে বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা বুঝায়, যাহা x হতে বৃহত্তর নয়। তবে প্রমাণ কর ঃ

$\lim\limits_{x\to 1_+} f(x) = 1$ এবং $\lim\limits_{x\to 1_-} f(x) = 0.$

27. দেখাও যে $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ বিদ্যমান নয়।

যেখানে $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|+x^2} & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

28. দেখাও যে $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ বিদ্যমান নয়। যেখানে $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{7-x} & \text{যখন } x < 2 \\ 7-x & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$

29. দেখাও যে $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ বিদ্যমান। যেখানে $f(x) = \begin{cases} \frac{9}{6-x} & \text{যখন } x > 3 \\ 6-x & \text{যখন } x < 3 \end{cases}$

30. যদি $f(x) = x - [x]$ হয় তবে দেখাও যে $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ বিদ্যমান নয়।

31. দেখাও যে $\lim\limits_{x\to 1_+}\left([x] + \frac{|x-1|}{x-1} + 2\right) = 4$

32. দেখাও যে $\lim\limits_{x\to 5_-} \frac{x}{[x]} \neq \lim\limits_{x\to 5_+} \frac{x}{[x]}$

33. দেখাও যে $\lim_{x\to 0} 1 - x + [x] - [1 - x]$ বিদ্যমান নয়।

34. $\lim_{x\to 0} f(x)$ এর বিদ্যমানতা আলোচনা কর।

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|x|}{2}}, -1 < x < 0 \\ x^2, 0 \le x < 2 \end{cases}$$ [DUH-1987]

বিভাগ-গ ঃ বড় প্রশ্ন
Part–C : Broad Questions

(δ – ε) সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ কর [Use the (δ – ε) definition to prove that] :

1. $\lim_{x\to 4} (2x - 2) = 6$

2. (i) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ [NUH-1999]

(ii) $\lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$ [NUH-03, KUH-05, BSc(Pass)-11]

3. $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = 8$

4. $\lim_{x\to 3} x^3 - 2x^2 + 1 = 10$

5 (i) $\lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{4}$ [DUH-1983]

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{x + 1}{2x + 1} = 1$ [NUH(NM)-2002]

6. $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x} & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ এর জন্য $\lim_{x\to 0} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান আছে? যদি বিদ্যমান থাকে, তবে নির্ণয় কর।

7. যদি $f(x) = \frac{x^2}{(x - 1)(x - 2)}$ হয় তবে প্রমাণ কর।

(a) $\lim_{x\to 1_+} f(x) = -\infty$ এবং $\lim_{x\to 1_-} f(x) = \infty$

(b) $\lim_{x\to 2_+} f(x) = \infty$ এবং $\lim_{x\to 2_-} f(x) = -\infty$

8. দেখাও যে $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{|x| + x^2}$ বিদ্যমান নয়।

9. যদি $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x-1} & \text{যখন } x \neq 1 \\ 1 & \text{যখন } x = 1 \end{cases}$ হয় তবে দেখাও যে $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ বিদ্যমান নয় কিন্তু $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to -5} f(x)$ বিদ্যমান।

10. (i) দেখাও যে $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ এর সীমা বিদ্যমান নয়। [NUH–2002]

(ii) দেখাও যে $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ বিদ্যমান নয়। [NUH(NM)–2004]

ANSWER–2(A) : Part–B

1.	0	2.	$\frac{3}{4}$	3.	$-\frac{1}{2}$
4.	$\frac{3\pi^2}{4}$	5.	4	6.	$\frac{5}{3}$
7.	$\sqrt{3}$	8.	$\frac{1}{4}$	9.	0
10.	n	11.	$\frac{1}{e}$	12.	$\frac{1}{e}$
13.	1	14.	$\frac{1}{2}$	15.	0
16.	e	17.	$\frac{1}{2}$	18.	0
19.	1	20.	1	21.	4, 4, 4
22.	0, 0, 0	23.	0, 0	24.	বিদ্যমান নাই
34.	বিদ্যমান নাই				

Part–C

6. বিদ্যমান, 0.

———x———