তৃতীয় অধ্যায় [CHAPTER THREE]

প্রথম পরিচ্ছেদ [SECTION ONE]

ফাংশনের সীমা

[LIMIT OF A FUNCTION]

3.1.1. ভূমিকা [Introduction] ঃ

ডিফারেনসিয়াল ক্যালকুলাস ও গণিতের বিভিন্ন শাখার ক্রম বিকাশের ক্ষেত্রে ফাংশনের সীমা একটি মূল ধারণা। ফাংশনের সীমাকে ডিফারেনসিয়াল ক্যালকুলাসের ভিত্তি হিসেবে গণ্য করা হয়। গণিত শাস্ত্র ও বিজ্ঞানের অন্যান্য শাখার বিভিন্ন সমস্যার সমাধানে সীমার প্রয়োগ সর্বজন স্বীকৃত। এই অধ্যায়ে চলক রাশির সীমা এবং ফাংশনের সীমা সম্পর্কে আলোচনা করা হইবে।

গণিত শাস্ত্রে শুন্য দ্বারা ভাগ করা অসংজ্ঞায়িত [Indeterminate]

উদাহরণ স্বরূপ ঃ $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ ... (1)

(1) নং এ $x = 5$ স্থাপন করিলে $f(5) = \frac{0}{0}$ হয়, যা অসংজ্ঞায়িত। অর্থাৎ $x = 5$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের মান বিদ্যমান নাই।

কিন্তু x এর মান 5 না ধরিয়া যদি 5 এর অতি নিকটবর্তী কোন মান ধরা হয়, যেমন (1) নং এ পর্যায়ক্রমে $x = 4.999$ এবং $x = 5.001$ স্থাপন করা হয়, তবে

$$(1) \Rightarrow f(4.999) = \frac{(4.999)^2 - 5^2}{4.999 - 5} = \frac{(4.999 - 5)(4.999 + 5)}{4.999 - 5}$$

বা $f(4.999) = 4.999 + 5 = 9.999$

$$\text{এবং } f(5.001) = \frac{(5.001)^2 - 5^2}{5.001 - 5} = \frac{(5.001 - 5)(5.001 + 5)}{5.001 - 5}$$

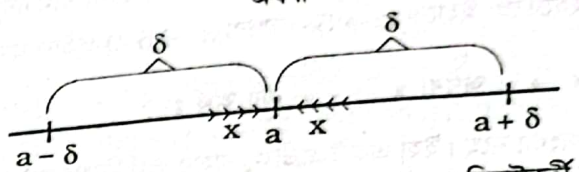
বা $f(5.001) = 5.001 + 5 = 10.001$ হয়।

উপরের উদাহরণ হইতে ইহা প্রতিয়মান হয় যে, x এর মান 5 এর অতি নিকটবর্তী ধরি- $f(x)$ এর মান ও 10 এর খুব নিকটবর্তী পাওয়া যায়। অতএব $x = 5$ এর জন্য $f(x)$ অনি- হইলেও 5 এর নিকটবর্তী মানগুলোতে $f(x)$ এর সসীম মান পাওয়া যায়।

3-1.2. চলক রাশির সীমা [Limit of a Variable] ঃ

একটি নির্দিষ্ট নিয়মানুসারে কোন স্বাধীন চলক x কতকগুলো মান গ্রহন করিয়া একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা a এর দিকে অগ্রসর হইয়া যদি a এর অতি নিকটবর্তী হয়, তবে a কে x এর সীমা বলা হয়। ইহাকে $x \to a$ অথবা $\lim x = a$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

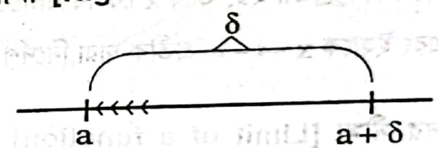
অথবা



একটি বাস্তব সংখ্যা x ক্রমশ একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা a এর এত নিকটবর্তী হয় যে, $x - a$ এর পরম মান ক্রমশ কমিতে কমিতে শেষ পর্যন্ত উহা যে কোন পূর্ব নির্ধারিত অতি ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা δ হইতেও ক্ষুদ্রতর হয়, অর্থাৎ $|x - a| < \delta$ হয়, তবে a কে x এর সীমা বলা হয়। ইহাকে $x \to a$ অথবা $\lim x = a$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

x এর মান a হইতে সামান্য বড় অথবা সামান্য ছোট হইবে কিন্তু $x = a$ হইবে না। ইহাকে $x \to a$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

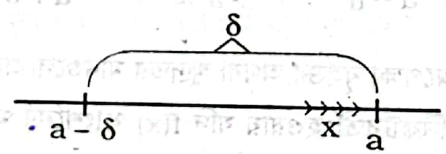
3.1.3. ডানহাতি সীমা [Right hand limit] ঃ



যদি $a < x < a + \delta$ ব্যবধিতে x এর মান a অপেক্ষা বড় হইয়া ডানদিক হইতে ক্রমশ a এর দিকে অগ্রসর হইয়া a এর অতি নিকটবর্তী হয়, তবে ইহাকে ডানহাতি সীমা বলা হয়। ইহাকে $x \to a+$ অথবা $x \to a+0$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

উদাহরণ ঃ 5.01, 5.001, 5.0001, ... এই সংখ্যাগুলো ডানদিক হইতে ক্রমশ 5 এর দিকে অগ্রসর হইতেছে; ইহাকে $x \to 5+$ অথবা $x \to 5 + 0$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

3-1.4. বামহাতি সীমা [Left hand limit] ঃ

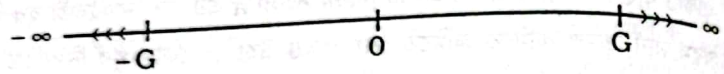


যদি $a - \delta < x < a$ ব্যবধিতে x এর মান a অপেক্ষা ছোট হইয়া বামদিক হইতে ক্রমশ a এর দিকে অগ্রসর হইয়া a এর অতি নিকটবর্তী হয়, তবে ইহাকে বামহাতি সীমা বলা হয়। ইহাকে $x \to a -$ অথবা $x \to a - 0$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

উদাহরণ ঃ 4.9, 4.99, 4.999, ... এই সংখ্যাগুলো বামদিক হইতে ক্রমশ 5 এর দিকে অগ্রসর হইতেছে; ইহাকে $x \to 5-$ অথবা $x \to 5\text{–}0$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

3-1.5. $x \to \infty$ অথবা $x \to -\infty$ এর অর্থ ঃ

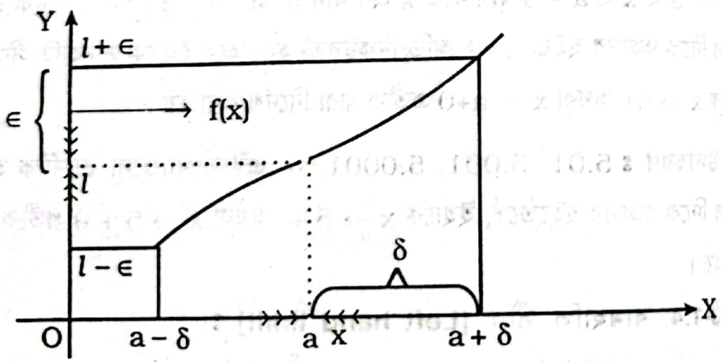
∞ কোন সংখ্যা নহে। ইহা একটি প্রতীক, যাহার অর্থ নিম্নের বর্ণনা হইতে বুঝা যাইবে।



যদি x এর ধারাবাহিক মানগুলো সীমাহীনভাবে বৃদ্ধি পাইয়া প্রদত্ত বৃহত্তম ধনাত্মক সংখ্যা G অপেক্ষে বৃহত্তর হয়, তবে x কে যোগবোধক অসীমের দিকে ধাবমান একটি চলক বলা হয় এবং ইহাকে $x \to \infty$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

অনুরূপভাবে যদি x এর ধারাবাহিক মানগুলো সীমাহীনভাবে হ্রাস পাইয়া প্রদত্ত ক্ষুদ্রতম ঋণাত্মক সংখ্যা – G অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে x কে বিয়োগবোধক অসীমের দিকে ধাবমান একটি চলক বলা হয় এবং ইহাকে $x \to -\infty$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

3-1.6. ফাংশনের সীমা [Limit of a function] ঃ



x চলকরাশি a অপেক্ষা বৃহত্তর অথবা ক্ষুদ্রতর মানগুলো গ্রহন করিয়া ক্রমশ a এর দিকে অগ্রসর হইয়া a এর নিকটবর্তী হওয়ায় যদি f(x) ফাংশনের মানগুলো একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা

l এর নিকটবর্তী হয়, তবে l কে f(x) ফাংশনের সীমা বলা হয়। ইহাকে $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

নোট ঃ ∀ = For all [সকলের জন্য অথবা যে কোনটির জন্য]; ∃ = There exists বিদ্যমান।

3-1.7 ($\delta - \in$) এর সাহায্যে ফাংশনের সীমা ঃ

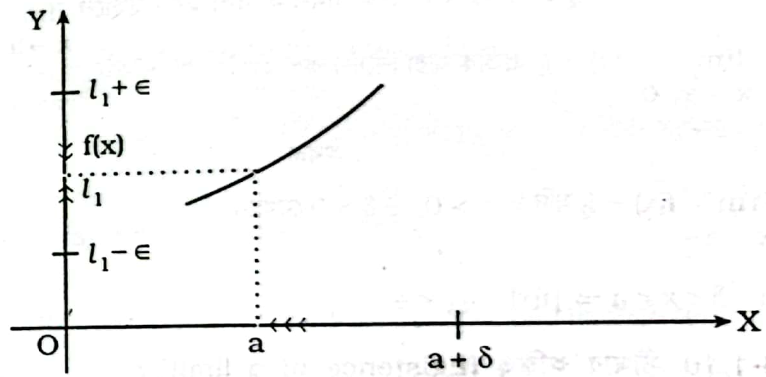
যদি যে কোন ক্ষুদ্র $\in > 0$ এর উপর নির্ভরশীল এমন একটি ক্ষুদ্র $\delta > 0$ নির্ণয় করা যায় যে, $|x - a| < \delta$ হইলে $|f(x) - l| < \in$ হয়, তবে l কে f(x) ফাংশনের সীমা বলা হয়।

অথবা

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ যদি $\forall \in > 0, \exists \delta > 0$ যেখানে

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \in.$$

3-1.8. ফাংশনের ডানসীমা [Right hand limit of a function] ঃ



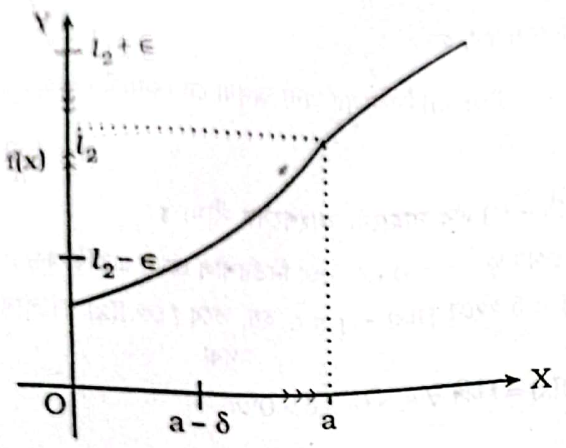
x চলকরাশি a অপেক্ষা বৃহত্তর মানগুলো গ্রহণ করিয়া ক্রমশ a এর দিকে অগ্রসর হইয়া a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় যদি f(x) ফাংশনের মানগুলো একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক l_1 এর নিকটবর্তী হয়, তবে l_1 কে f(x) ফাংশনের ডানসীমা বলা হয়। ইহাকে $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = l_1$ অথবা $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = l_1$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

অথবা

$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = l_1$ যদি $\forall \in > 0, \exists \delta > 0$ যেখানে

$$a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - l_1| < \in.$$

৩-১-৯. ফাংশনের বামসীমা [Left hand limit of a function] :



x চলকরাশি a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর মানগুলো গ্রহণ করিয়া ক্রমশ a এর দিকে অগ্রসর হইয়া a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় যদি f(x) ফাংশনের মানগুলো একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক l_2 এর নিকটবর্তী হয়, তবে l_2 কে f(x) ফাংশনের বামসীমা বলা হয়। ইহাকে $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = l_2$

অথবা $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = l_2$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

অথবা

$\lim\limits_{x\to a-} f(x) = l_2$ যদি $\forall \in > 0,\ \exists\, \delta > 0$ যেখানে

$a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x) - l_2| < \in$.

3-1.10. সীমার অস্তিত্ব [Existence of a limit] :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ এর সীমামান বিদ্যমান থাকিবে, যদি

(i). $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ এর মান সসীম হয়,

(ii). $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x)$.

অথবা

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ এর সীমামান বিদ্যমান থাকিবে যদি

(i). $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0+} f(a+h)$ এবং

$\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{h\to 0-} f(a+h)$ এর মান সসীম হয়।

(ii). $\lim\limits_{h\to 0+} f(a+h) = \lim\limits_{h\to 0-} f(a+h)$.

3-1.11. সীমা বিদ্যমান নাই [Limit does not exist] :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ এর মান বিদ্যমান থাকিবে না যদি

(i). $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ এর সসীম হয়

কিন্তু (ii). $\lim\limits_{x\to a+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a-} f(x)$.

অথবা

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ এর অস্তিত্ব নাই যদি

(i). $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \infty$ এবং $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \infty$ হয়

তবে এইক্ষেত্রে ফাংশনের সীমা বিদ্যমান নাই, কারণ ডানসীমা এবং বামসীমার মান সসীম নহে।

3-1.12. f(a) এবং $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ এর অর্থ :

সমাধান : f(x) ফাংশনে x = a স্থাপন করিয়া যে মান পাওয়া যায়, ইহাই f(a).

x এর মান a এর খুব নিকটবর্তী কোন সংখ্যা হইলে কিন্তু x = a না হইলে f(x) এর যে মান পাওয়া যায়, ইহাই হইল $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

3-1.13. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = l_1$ এবং $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = l_2$ এর অর্থ :

x চলকরাশি সর্বদা ধনাত্মক মানগুলো গ্রহণ করিয়া সীমাহীনভাবে বৃদ্ধি পাইতে থাকিলে যদি f(x) ফাংশনের মান একটি নির্দিষ্ট সসীম রাশি l_1 এর এত নিকটবর্তী হয় যে, $f(x) - l_1$ এর পরম মান যে কোন কল্পনাধীন ক্ষুদ্র সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে l_1 কে f(x) এর সীমাস্থ মান বলা হয়, যখন $x \to \infty$ এবং ইহাকে $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = l_1$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

[N. U. H-2003]

আবার x চলকরাশি সর্বদা ঋণাত্মক মানগুলো গ্রহণ করিয়া সংখ্যামানে সীমাহীনভাবে বৃদ্ধি পাইতে থাকিলে যদি f(x) ফাংশনের মান একটি নির্দিষ্ট সসীম রাশি l_2 এর এত নিকটবর্তী হয় যে, $f(x) - l_2$ এর পরমমান যে কোন কল্পনাধীন ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে l_2 কে f(x) ফাংশনের সীমাস্থ মান বলা হয় যখন $x \to -\infty$ এবং ইহাকে $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l_2$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়। [N. U. H-2003]

3-1.14. সীমার মৌলিক উপপাদ্য [Basic Limit theorems] ঃ

উপপাদ্য-1 ঃ যদি f(x) এবং g(x) ফাংশন দুইটি a বিন্দুর প্রতিবেশে সংজ্ঞায়িত হয় $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = m$ দ্বারা, [N. U. H-2005]

তবে $\lim_{x\to a} (f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = l + m.$

প্রমাণ ঃ যেহেতু $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = m.$

কাজেই যে কোন ক্ষুদ্র $\in > 0$ এর জন্য বিদ্যমান আছে ক্ষুদ্র $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ যেখানে

$$|f(x) - l| < \frac{\in}{2} \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta_1 \cdots (1)$$

এবং $|g(x) - m| < \frac{\in}{2}$ যখন $0 < |x-a| < \delta_2 \cdots (2)$

বিবেচনা করি $\delta > 0$ যাহা $\delta < \delta_1$ এবং $\delta < \delta_2$ এইক্ষেত্রে (1) নং এবং (2) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায়

$$|f(x) - l| < \frac{\in}{2} \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta \cdots (3)$$

এবং $|g(x) - m| < \frac{\in}{2}$ যখন $0 < |x-a| < \delta \cdots (4)$

এখন $|f(x) + g(x) - (l+m)| = |f(x) - l + g(x) - m|$

$$\Rightarrow |f(x) + g(x) - (l+m)| \le |f(x) - l| + |g(x) - m| < \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2}$$

যখন $0 < |x-a| < \delta$; (3) নং এবং (4) নং দ্বারা।

$$\Rightarrow |f(x) + g(x) - (l+m)| < \in \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta$$

সুতরাং $\lim_{x\to a} (f+g)(x) = l + m.$

উপপাদ্য-2 ঃ যদি f(x) এবং g(x) ফাংশন দুইটি a বিন্দুর প্রতিবেশে সংজ্ঞায়িত হয় $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = m$ দ্বারা

তবে $\lim_{x\to a} (f-g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = l - m.$

প্রমাণ ঃ যেহেতু $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = m$

কাজেই যে কোন ক্ষুদ্র $\in > 0$ এর জন্য বিদ্যমান আছে ক্ষুদ্র $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ যেখানে

$$|f(x) - l| < \frac{\in}{2} \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta_1 \cdots (1)$$

এবং $|g(x) - m| < \frac{\in}{2}$ যখন $0 < |x-a| < \delta_2 \cdots (2)$

বিবেচনা করি $\delta > 0$ যাহা $\delta < \delta_1$ এবং $\delta < \delta_2$ এইক্ষেত্রে (1) নং এবং (2) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায়

$$|f(x) - l| < \frac{\in}{2} \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta \cdots (3)$$

এবং $|g(x) - m| < \frac{\in}{2}$ যখন $0 < |x-a| < \delta \cdots (4)$

এখন $|f(x) - g(x) - (l-m)| = |f(x) - l + m - g(x)|$

$$\Rightarrow |f(x) - g(x) - (l-m)| \le |f(x) - l| + |m - g(x)| < \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2}$$

যখন $0 < |x-a| < \delta$; (3) নং এবং (4) নং দ্বারা।

$$\Rightarrow |f(x) - g(x) - (l-m)| < \in \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta$$

সুতরাং $\lim_{x\to a} (f-g)(x) = l - m.$

উপপাদ্য-3 ঃ যদি f(x) এবং g(x) ফাংশন দুইটি a বিন্দুর প্রতিবেশে সংজ্ঞায়িত হয় $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = m$ দ্বারা, তবে $\lim_{x\to a} f(x)\,g(x) = lm.$

প্রমাণ ঃ $\lim_{x\to a} f(x)\,g(x) = lm$ এর জন্য দেখাইতে হইবে

$$|f(x)\,g(x) - lm| < \in \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta.$$

$$|f(x)\,g(x) - lm| = |f(x)\,g(x) - mf(x) + mf(x) - lm|$$

এখন $|f(x)\,g(x) - lm| \le |f(x)\,g(x) - mf(x)| + |mf(x) - lm|$

$\Rightarrow |f(x)\,g(x) - lm| \le |f(x)|\,|g(x) - m| + |m|\,|f(x) - l| \cdots (1)$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ কাজেই $\in = 1$ এর জন্য বিদ্যমান আছে ক্ষুদ্র $\delta_1 > 0$ যেখানে

$|f(x) - l| < 1$ যখন $0 < |x-a| < \delta_1 \cdots (2)$

এখন $|f(x)| = |f(x) - l + l| \le |f(x) - l| + |l| < 1 + |l|$; (2) নং দ্বারা।

$\Rightarrow |f(x)| < 1 + |l|$ যখন $0 < |x-a| < \delta_1$.

পুনরায় যেহেতু $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m$ কাজেই যে কোন ক্ষুদ্র $\in > 0$ এর জন্য বিদ্যমান আছে ক্ষুদ্র $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ এবং বিবেচনা করি $\delta > 0$ যাহা $\delta < \delta_1$, $\delta < \delta_2$ যেখানে

$$|f(x) - l| < \frac{\in}{2|m|} \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta \cdots (3)$$

$$|g(x) - m| < \frac{\in}{2(1 + |l|)} \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta \cdots (4)$$

এবং $|f(x)| < 1 + |l|$ যখন $0 < |x-a| < \delta \cdots (5)$

এখন (3), (4) এবং (5) নং এর সাহায্যে (1) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায়

$$|f(x)\,g(x) - lm| < (1 + |l|)\frac{\in}{2(1 + |l|)} + |m|\frac{\in}{2|m|}$$

যখন $0 < |x-a| < \delta$

$\Rightarrow |f(x)\,g(x) - lm| < \in$, যখন $0 < |x-a| < \delta$

সুতরাং $\lim\limits_{x\to a} f(x)\,g(x) = lm$.

উপপাদ্য–4 ঃ যদি f(x) এবং g(x) ফাংশন দুইটি a বিন্দুর প্রতিবেশে সংজ্ঞায়িত হয় $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m$ দ্বারা, তবে $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$ যখন $m \ne 0$.

প্রমাণ ঃ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$ এর জন্য দেখাইতে হইবে

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| < \in \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta$$

এখন $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{l}{m}\right| = \left|\dfrac{f(x)}{m} - \dfrac{l}{m} + \dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x)}{m}\right|$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| \le \left|\frac{f(x)}{m} - \frac{l}{m}\right| + \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{m}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| \le \left|\frac{1}{m}(f(x) - l)\right| + \left|\frac{f(x)}{mg(x)}(m - g(x))\right|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| \le \frac{1}{|m|}|f(x) - l| + \frac{|f(x)|}{|m|\,|g(x)|}|m - g(x)| \cdots (1)$$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ কাজেই $\in = 1 > 0$ এর জন্য বিদ্যমান আছে ক্ষুদ্র $\delta_1 > 0$ যেখানে $|f(x) - l| < 1$. যখন $0 < |x-a| < \delta_1$

এখন $|f(x)| = |f(x) - l + l| \le |f(x) - l| + |l| < 1 + |l|$

$\Rightarrow |f(x)| < 1 + |l|$ যখন $0 < |x-a| < \delta_1 \cdots (2)$

আবার যেহেতু $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m$ কাজেই $\in = \dfrac{|m|}{2} > 0$ এর জন্য বিদ্যমান আছে ক্ষুদ্র $\delta_2 > 0$ যেখানে

$$|g(x) - m| < \frac{|m|}{2} \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta_2$$

এখন $|m| = |m - g(x) + g(x)| \le |m - g(x)| + |g(x)|$

$\Rightarrow |m| < \dfrac{|m|}{2} + |g(x)|$, যখন $0 < |x-a| < \delta_2$

$\Rightarrow |g(x)| > \dfrac{|m|}{2}$ যখন $0 < x - a| < \delta_2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{|g(x)|} < \dfrac{2}{|m|}$ যখন $0 < |x-a| < \delta_2 \cdots (3)$

বিবেচনা করি $\delta > 0$ যাহা $\delta < \delta_1$ এবং $\delta < \delta_2$. এইক্ষেত্রে (2) নং এবং (3) নং ক নিম্নরূপে লিখা যায়

$|f(x)| < 1 + |l|$ যখন $0 < |x-a| < \delta \cdots (4)$

এবং $\dfrac{1}{|g(x)|} < \dfrac{2}{|m|}$ যখন $0 < |x-a| < \delta \cdots (5)$

$$\therefore (1) \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| < \frac{1}{|m|}|f(x) - l| + \frac{(1 + |l|).2}{|m|^2}|g(x) - m| \cdots (6$$

আবার যেহেতু $\lim_{x \to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x \to a} g(x) = m$ কাজেই যে কোন ক্ষুদ্র $\in > 0$ এর জন্য বিদ্যমান আছে ক্ষুদ্র $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ এবং বিবেচনা করি $\delta > 0$ যাহা $\delta < \delta_1$ এবং $\delta < \delta_2$ যেখানে

$$|f(x) - l| < \frac{|m| \in}{2} \text{ যখন } 0 < |x - a| < \delta$$

এবং $|g(x) - m| < \dfrac{|m|^2 \in}{4(1 + |l|)}$ যখন $0 < |x - a| < \delta$

$$\therefore (6) \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| < \frac{1}{|m|} \cdot \frac{|m| \in}{2} + \frac{2(1 + |l|)}{|m|^2} \cdot \frac{|m|^2 \in}{4(1 + |l|)}$$

যখন $0 < |x - a| < \delta$.

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| < \in \text{ যখন } 0 < |x - a| < \delta$$

সুতরাং $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$.

উপপাদ্য-5 : যদি $\lim_{x \to a} f(x)$ বিদ্যমান হয়, তবে ইহা অবশ্যই অনন্য। [If $\lim_{x \to a} f(x)$ exists then it must be unique.]

প্রমাণ : মনেকরি যদি সম্ভব হয় $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ এবং $\lim_{x \to a} f(x) = l_2$.

তবে ধরি $\in = |l_1 - l_2| > 0$ এর জন্য বিদ্যমান আছে ক্ষুদ্র $\delta > 0$ যেখানে

$$|f(x) - l_1| < \frac{\in}{2} \text{ যখন } 0 < |x - a| < \delta \cdots (1)$$

এবং $|f(x) - l_2| < \dfrac{\in}{2}$ যখন $0 < |x - a| < \delta \cdots (2)$

এখন $|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2|$

$$\Rightarrow |l_1 - l_2| \le |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2| < \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2};$$

যখন $0 < |x - a| < \delta$. (1) নং এবং (2) নং দ্বারা।

$$\Rightarrow |l_1 - l_2| < \in$$

$\Rightarrow |l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$ ইহা অসম্ভব।

সুতরাং $l_1 = l_2$. অর্থাৎ $\lim_{x \to a} f(x)$ এর সীমা মান অনন্য।

3-1.15. লক্ষনীয় :

(i). $x > a$ কে $x \to a+$ এবং $x < a$ কে $x \to a-$ ধরিয়া ফাংশনের সীমা নির্ণয় করিতে হয়।

(ii). যদি $\lim_{x \to a} f(x)$ এর সীমা নির্ণয় করার সময় দেখা যায় যে, $f(x)$ এর লব এবং হরে সাধারন উৎপাদক $x - a$ থাকে, তবে লব এবং হর উভয়কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করিতে হয়। কারণ $x \to a$ এর অর্থ $x - a \to 0$ কিন্তু $x - a \ne 0$. কাজেই এই রকম উৎপাদক দ্বারা ভাগ করা সম্ভব।

(iii). $\lim_{x \to 0+} \dfrac{1}{x} = \infty$ এবং $\lim_{x \to 0-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

(iv). $\lim_{x \to 0+} e^{1/x} = e^{\infty} = \infty$ এবং $\lim_{x \to 0-} e^{1/x} = e^{-\infty} = 0$.

(v). $\lim_{x \to 0+} e^{-1/x} = e^{-\infty} = 0$ এবং $\lim_{x \to 0-} e^{-1/x} = e^{\infty} = \infty$

(vi). যেহেতু θ এর সকল মানের জন্য $-1 \le \sin\theta \le 1$

কাজেই $-1 \le \sin(1/h) \le 1$.

কিন্তু $\lim_{h \to 0} \sin\dfrac{1}{h} =$ (-1 এবং 1 এর মধ্যবর্তী কোন অনির্দিষ্ট সংখ্যা অর্থাৎ নির্দিষ্ট মান নির্ণয় করা গেল না। অর্থাৎ অনির্ণেয়।)

(vii). $\lim_{h \to 0} h \sin\dfrac{1}{h} = \lim_{h \to 0} h \lim_{h \to 0} \sin\dfrac{1}{h}$.

$= 0 \times (-1$ এবং 1 মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা)

$= 0$.

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ–1 : (i). যদি $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ হয়, তবে দেখাও যে $x = 3$ বিন্দুতে $f(x)$ এর ডানসীমা এবং বাম সীমার মান একই এবং $x = 3$ বিন্দুতে $f(x)$ এর সীমা বিদ্যমান।

(ii). যদি $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ হয় তবে $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ এর মান [যদি থাকে] নির্ণয় কর।

সমাধান : (i). প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ ... (1)

$$\lim_{x\to 3+} f(x) = \lim_{x\to 3+} \frac{x^2-5x+6}{x-3};\ \text{(1) নং দ্বারা।}$$

$$= \lim_{x\to 3+} \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} (x-2) = 3-2 = 1$$

$$\lim_{x\to 3-} f(x) = \lim_{x\to 3-} \frac{x^2-5x+6}{x-3};\ \text{(1) নং দ্বারা।}$$

$$= \lim_{x\to 3-} \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3-} (x-2) = 3-2 = 1.$$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 3+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3-} f(x) = 1$, কাজেই $x = 3$ বিন্দুতে $f(x)$ এর সীমা মান বিদ্যমান আছে।

সুতরাং $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1$.

সমাধান : (ii). প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ ... (1)

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} \frac{x^2-4}{x-2};\ \text{(1) নং দ্বারা}$$

$$= \lim_{x\to 2+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+} (x+2) = 2+2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} \frac{x^2-4}{x-2};\ \text{(1) নং দ্বারা।}$$

$$= \lim_{x\to 2-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2-} (x+2) = 2+2 = 4.$$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-} f(x) = 4$

সুতরাং $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$.

উদাহরণ–2 : যদি $f(x) = \begin{cases} 1+2x & \text{যখন } -1/2 \le x < 0 \\ 1-2x & \text{যখন } 0 \le x < 1/2 \\ -1+2x & \text{যখন } x > 1/2 \end{cases}$

তবে $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to 1/2} f(x)$ এর মান [যদি থাকে] নির্ণয় কর।

[ঢাঃ বিঃ সঃ '86]

সমাধান : প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} 1+2x & \text{যখন } -1/2 \le x < 0 \\ 1-2x & \text{যখন } 0 \le x < 1/2 \\ -1+2x & \text{যখন } x > 1/2 \end{cases}$

যখন $x > 0$ তখন $f(x) = 1-2x$ কাজেই

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (1-2x) = 1-2(0) = 1-0 = 1$$

যখন $x < 0$ তখন $f(x) = 1+2x$ কাজেই

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} (1+2x) = 1+2(0) = 1+0 = 1$$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 1$. সুতরাং $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

যখন $x > 1/2$ তখন $f(x) = -1+2x$ কাজেই

$$\lim_{x\to (1/2)+} f(x) = \lim_{x\to (1/2)+} (-1+2x) = -1+2\left(\frac{1}{2}\right) = -1+1 = 0$$

যখন $x < 1/2$ তখন $f(x) = 1-2x$ কাজেই

$$\lim_{x\to (1/2)-} f(x) = \lim_{x\to (1/2)-} (1-2x) = 1-2\left(\frac{1}{2}\right) = 1-1 = 0.$$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to (1/2)+} f(x) = \lim\limits_{x\to (1/2)-} f(x) = 0$

সুতরাং $\lim\limits_{x\to 1/2} f(x) = 0$.

97

উদাহরণ-3 ঃ একটি ফাংশন f(x) নিম্ন লিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } x < 1 \\ 3 & \text{যখন } x = 1 \\ x^2+1 & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান?

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } x < 1 \\ 3 & \text{যখন } x = 1 \\ x^2+1 & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$

যখন $x > 1$ তখন $f(x) = x^2 + 1$ কাজেই

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} (x^2+1) = 1^2 + 1 = 2$$

যখন $x < 1$ তখন $f(x) = x^2$ কাজেই

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} x^2 = 1^2 = 1$$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1-} f(x)$.

সুতরাং $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ এর মান বিদ্যমান নাই।

উদাহরণ–4 ঃ যদি $f(x) = \dfrac{2x}{1-x}$ হয়, তবে

(i). $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

(ii). $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর। [ঢাঃ বিঃ '86]

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \dfrac{2x}{1-x}$

(i). $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{2x}{1-x} = \dfrac{2}{0-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{2x}{1-x} = \dfrac{2}{0+} = \infty$.

(ii). $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x}{1-x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x}{x(1/x-1)}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1/x-1} = \frac{2}{0-1} = -2$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{1-x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{x(1/x-1)}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{1/x-1} = \frac{2}{0-1} = -2.$$

উদাহরণ–5 ঃ যদি $f(x) = \dfrac{3x+|x|}{7x-5|x|}$ হয়, তবে $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান?

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \dfrac{3x+|x|}{7x-5|x|}$

যখন $x > 0$ তখন $|x| = x$ কাজেই

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{3x+|x|}{7x-5|x|} = \lim_{x\to 0+} \frac{3x+x}{7x-5x}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{4x}{2x} = \lim_{x\to 0+} 2 = 2.$$

আবার যখন $x < 0$ তখন $|x| = -x$ কাজেই

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{3x+|x|}{7x-5|x|} = \lim_{x\to 0-} \frac{3x-x}{7x-5(-x)}$$

$$= \lim_{x\to 0-} \frac{2x}{12x} = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0-} f(x)$

সুতরাং $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ এর মান বিদ্যমান নাই।

৭৩

উদাহরণ–6 ঃ যদি $f(x) = [x] + \frac{|x-1|}{x-1} + 3$ হয়, তবে $\lim_{x\to 1+} f(x)$ এবং $\lim_{x\to 1-} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর এবং $\lim_{x\to 1} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান?

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = [x] + \frac{|x-1|}{x-1} + 3$

আমরা জানি $[x] = x$ এর মানের বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা $\not> x$.

যখন $x > 1$ তখন $[x] = 1$ এবং $|x-1| = x-1$ কাজেই

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+}\left([x] + \frac{|x-1|}{x-1} + 3\right)$$

$$= \lim_{x\to 1+} [x] + \lim_{x\to 1+} \frac{|x-1|}{x-1} + \lim_{x\to 1+} 3.$$

$$= [1+] + \lim_{x\to 1+} \frac{x-1}{x-1} + 3$$

$$= 1 + \lim_{x\to 1+} (1) + 3 = 1 + 1 + 3 = 5.$$

যখন $x < 1$ তখন $[x] = 0$ এবং $|x-1| = -(x-1)$ কাজেই

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-}\left([x] + \frac{|x-1|}{x-1} + 3\right)$$

$$= \lim_{x\to 1-} [x] + \lim_{x\to 1-} \frac{|x-1|}{x-1} + \lim_{x\to 1-} 3$$

$$= [1-] + \lim_{x\to 1-} \frac{-(x-1)}{x-1} + 3$$

$$= 0 + \lim_{x\to 1-} (-1) + 3 = 0 - 1 + 3 = 2.$$

যেহেতু $\lim_{x\to 1+} f(x) \neq \lim_{x\to 1-} f(x)$

সুতরাং $\lim_{x\to 1} f(x)$ এর মান বিদ্যমান নাই।

উদাহরণ–7 ঃ (i). যদি $f(x) = \begin{cases} e^{-|x|/2} & \text{যখন } -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{যখন } 0 \le x < 2 \end{cases}$ **[ঢাঃ বিঃ '87]**

তবে $\lim_{x\to 0} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান?

(ii). যদি $f(x) = \frac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}}$ হয় তবে $\lim_{x\to 0} f(x)$ এর বিদ্যমানতা আলোচনা কর।

সমাধান ঃ (i). প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} e^{-|x|/2} & \text{যখন } -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{যখন } 0 \le x < 2 \end{cases}$

যখন $x > 0$ তখন $f(x) = x^2$ কাজেই

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x^2 = 0$$

যখন $x < 0$ তখন $f(x) = e^{-|x|/2}$ কাজেই

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} e^{-|x|/2} = \lim_{x\to 0-} e^{x/2} = e^0 = 1$$

যেহেতু $|x| = -x$ যদি $x < 0$.

যেহেতু $\lim_{x\to 0+} f(x) \neq \lim_{x\to 0-} f(x)$

সুতরাং $\lim_{x\to 0} f(x)$ এর মান বিদ্যমান নাই।

সমাধান ঃ (ii). প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \frac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}}$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{xe^{1/x}}{e^{1/x}(e^{-1/x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{x}{e^{-1/x}+1} = \frac{0}{e^{-\infty}+1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}} = \lim_{x\to 0-} x \lim_{x\to 0-} \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$$

$$= 0 . \frac{e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}} = 0 . \frac{0}{1+0} = 0$$

যেহেতু $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = 0$. কাজেই $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর সীমা বিদ্যমান।

সুতরাং $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

উদাহরণ–8 : (i). যদি $f(x) = \begin{cases} \tan(x/2) & \text{যখন } x < \pi/2 \\ 3 - \pi/2 & \text{যখন } x = \pi/2 \\ \dfrac{x^3 - \pi^3/8}{x - \pi/2} & \text{যখন } x > \pi/2 \end{cases}$

তবে $\lim\limits_{x \to (\pi/2)+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to (\pi/2)-} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x \to (\pi/2)} f(x)$ এর মান [যদি থাকে] নির্ণয় কর।

(ii). যদি $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

তবে $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান?

সমাধান : (i). প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} \tan(x/2) & \text{যখন } x < \pi/2 \\ 3 - \pi/2 & \text{যখন } x = \pi/2 \\ \dfrac{x^3 - \pi^3/8}{x - \pi/2} & \text{যখন } x > \pi/2 \end{cases}$

যখন $x > \pi/2$ তখন $f(x) = \dfrac{x^3 - \pi^3/8}{x - \pi/2}$ কাজেই

$$\lim_{x \to (\pi/2)+} f(x) = \lim_{x \to (\pi/2)+} \frac{x^3 - (\pi/2)^3}{x - \pi/2}$$

$$= \lim_{x \to (\pi/2)+} \frac{(x - \pi/2)(x^2 + x\pi/2 + \pi^2/4)}{x - \pi/2}$$

$$= \lim_{x \to (\pi/2)+} \left(x^2 + x\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{2^2} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} = \frac{3\pi^2}{4}$$

যখন $x < \pi/2$ তখন $f(x) = \tan\dfrac{x}{2}$ কাজেই

$$\lim_{x \to (\pi/2)-} f(x) = \lim_{x \to (\pi/2)-} \left(\tan\frac{x}{2} = \tan\frac{\pi}{4} = 1\right)$$

যেহেতু $\lim\limits_{x \to (\pi/2)+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to (\pi/2)-} f(x)$

সুতরাং $\lim\limits_{x \to (\pi/2)} f(x)$ এর মান বিদ্যমান নাই।

সমাধান : (ii). প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

যখন $x \neq 0$ অর্থাৎ $x > 0$ তখন $f(x) = x^2 \cos\dfrac{1}{x}$ কাজেই

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} x^2 \cos\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0+} x^2 \lim_{x \to 0+} \cos\frac{1}{x}$$

$= 0 \times (-1$ এবং 1 এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা)

$= 0$, যেহেতু $-1 \leq \cos(1/x) \leq 1$.

আবার যখন $x \neq 0$ অর্থাৎ $x < 0$ তখন $f(x) = x^2 \cos\dfrac{1}{x}$ কাজেই

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} x^2 \cos\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0-} x^2 . \lim_{x \to 0-} \cos\frac{1}{x}$$

$= 0 \times (-1$ এবং 1 এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা)

$= 0.$

যেহেতু $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0$

কাজেই $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর সীমা বিদ্যমান। সুতরাং $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0.$

উদাহরণ–9 : (i). (δ-ϵ) সংজ্ঞার সাহায্যে দেখাও যে

$$\lim_{x \to 3} 2x^3 - 3x^2 - 18x + 29 = 2.$$

(ii). (δ- ϵ) সংজ্ঞার সাহায্যে দেখাও যে $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$ এবং δ এর মান নির্ণয় কর যখন $\epsilon = 1$. [ঢাঃ বিঃ সঃ '80]

(iii). (δ- ϵ) সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ কর : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \dfrac{1}{4}$. [ঢাঃ বিঃ সঃ '83]

সমাধান : (i). ধরি $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 18x + 29 \cdots (1)$

যেহেতু $x \to 3$ কাজেই মনেকরি $|x - 3| < \delta$ যখন $\delta > 0 \cdots (2)$

এখন $|f(x) - 2| = |2x^3 - 3x^2 - 18x + 29 - 2|$; (1) নং দ্বারা।

$\Rightarrow |f(x) - 2| = |2x^3 - 3x^2 - 18x + 27|$

$\Rightarrow |f(x) - 2| = |2(x^3 - 9x^2 + 27x - 27) + 15x^2 - 72x + 81|$

$\Rightarrow |f(x) - 2| = |2(x-3)^3 + 15(x^2 - 6x + 9) + 18x - 54|$

$\Rightarrow |f(x) - 2| = |2(x-3)^3 + 15(x-3)^2 + 18(x-3)|$

$\Rightarrow |f(x) - 2| < |2(x-3) + 15(x-3) + 18(x-3)|$; যেহেতু $|x-3| < 1$

$\Rightarrow |f(x) - 2| < |35(x-3)|$

$\Rightarrow |f(x) - 2| < 35|x-3| < 35\delta$; (2) নং দ্বারা।

$\Rightarrow |f(x) - 2| < 35\delta.$

$\Rightarrow |f(x) - 2| < \epsilon$ যখন $\epsilon = 35\delta.$

অতএব যে কোন ক্ষুদ্র $\epsilon > 0$ এর উপর নির্ভরশীল এমন একটি ক্ষুদ্র $\delta > 0$ বিদ্যমান যাহাতে $|x-3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \epsilon$

সুতরাং $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$

অর্থাৎ $\lim\limits_{x \to 3} 2x^3 - 3x^2 - 18x + 29 = 2.$ প্রমাণিত।

সমাধান : (ii). ধরি $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ ... (1)

যেহেতু $x \to 1$ কাজেই ধরি $|x - 1| < \delta$ যখন $\delta > 0$ ... (2)

এখন $|f(x) - 3| = \left|\dfrac{x^3 - 1}{x - 1} - 3\right|$; (1) নং দ্বারা।

$\Rightarrow |f(x) - 3| = \left|\dfrac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} - 3\right|$

$\Rightarrow |f(x) - 3| = |x^2 + x + 1 - 3|$

$\Rightarrow |f(x) - 3| = |x^2 - 2x + 1 + 3x - 3|$

$\Rightarrow |f(x) - 3| = |(x-1)^2 + 3(x-1)|$

$\Rightarrow |f(x) - 3| < |(x-1) + 3(x-1)|$; যেহেতু $|x - 1| < \delta < 1.$

$\Rightarrow |f(x) - 3| < |4(x-1)|$

$\Rightarrow |f(x) - 3| < 4|x - 1| < 4\delta$; (2) নং দ্বারা।

$\Rightarrow |f(x) - 3| < 4\delta$

$\Rightarrow |f(x) - 3| < \epsilon$ যখন $\epsilon = 4\delta$

অতএব যে কোন ক্ষুদ্র $\epsilon > 0$ এর উপর নির্ভরশীল এমন একটি ক্ষুদ্র $\delta > 0$ বিদ্যমান যাহাতে $|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \epsilon$

সুতরাং $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3.$

অর্থাৎ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 3.$ প্রমাণিত।

দ্বিতীয় অংশ : আমাদের আছে $\epsilon = 4\delta$

যখন $\epsilon = 1$ তখন $4\delta = 1$, বা $\delta = \dfrac{1}{4}.$

সমাধান : (iii). ধরি $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 2x - 3}$ ... (1)

যেহেতু $x \to 1$ কাজেই মনেকরি $|x - 1| < \delta$ যখন $\delta > 0$ ... (2)

এখন $\left|f(x) - \dfrac{1}{4}\right| = \left|\dfrac{x - 1}{x^2 + 2x - 3} - \dfrac{1}{4}\right|$; (1) নং দ্বারা।

$\Rightarrow \left|f(x) - \dfrac{1}{4}\right| = \left|\dfrac{x - 1}{(x-1)(x+3)} - \dfrac{1}{4}\right|$

$\Rightarrow \left|f(x) - \dfrac{1}{4}\right| = \left|\dfrac{1}{x + 3} - \dfrac{1}{4}\right|$

$\Rightarrow \left|f(x) - \dfrac{1}{4}\right| = \left|\dfrac{4 - x - 3}{4(x + 3)}\right| = \left|\dfrac{1 - x}{4(x + 3)}\right|$

$\Rightarrow \left|f(x) - \dfrac{1}{4}\right| = \dfrac{|x - 1|}{|4(x + 3)|} = \dfrac{|x - 1|}{4|x + 3|} < \dfrac{|x - 1|}{4}$

যেহেতু $\dfrac{1}{|x + 3|} < 1$

$\Rightarrow \left|f(x) - \dfrac{1}{4}\right| < \dfrac{|x - 1|}{4} < \dfrac{\delta}{4}$; (2) নং দ্বারা।

$\Rightarrow \left|f(x) - \dfrac{1}{4}\right| < \dfrac{\delta}{4}$

$\Rightarrow \left|f(x) - \dfrac{1}{4}\right| < \epsilon$ যখন $\epsilon = \dfrac{\delta}{4}.$

অতএব যে কোন ক্ষুদ্র $\epsilon > 0$ এর উপর নির্ভরশীল এমন একটি ক্ষুদ্র $\delta > 0$ বিদ্যমান যাহাতে $|x - 1| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - \dfrac{1}{4}\right| < \epsilon$

সুতরাং $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{4}$

অর্থাৎ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{4}$.

বিবিধ উদাহরণ-10 : যদি $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$ তবে দেখাও যে

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন } |x|<1 \\ 1/2 & \text{যখন } |x|=1. \\ 0 & \text{যখন } |x|>1 \end{cases}$$

সমাধান : দেওয়া আছে $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$ ... (1)

যদি $|x| < 1$ হয় তবে $x^2 < 1$

যেহেতু $x^2 < 1$ কাজেই $(x^2)^2$ এর মান, $(x^2)^3$ এর মান, ... ক্রমশ ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর হয়।

এইক্ষেত্রে $(x^2)^n = x^{2n} \to 0$ যখন $n \to \infty$

$\therefore (1) \Rightarrow f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{1}{1+0} = 1$

এবং যদি $|x| = 1$ হয় তবে $x^2 = 1$

এইক্ষেত্রে $(x^2)^n = x^{2n} = 1$

$\therefore (1) \Rightarrow f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

আবার যদি $|x| > 1$ হয় তবে $x^2 > 1$

যেহেতু $x^2 > 1$ কাজেই $(x^2)^2$ এর মান, $(x^2)^3$ এর মান ... ক্রমশ বৃদ্ধি পায়।

এইক্ষেত্রে $(x^2)^n = x^{2n} \to \infty$ যখন $n \to \infty$

$\therefore (1) \Rightarrow f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{1}{1+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$

সুতরাং $f(x)$ কে নিম্নরূপে লিখা যায়

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন } |x|<1 \\ 1/2 & \text{যখন } |x|=1. \\ 0 & \text{যখন } |x|>1 \end{cases}$$

[প্রমাণিত]

প্রশ্নমালা [EXERCISE]–3(A)

1(i). যদি $f(x) = \frac{2x+8}{x^2+x-12}$ হয় তবে $x = -4$ বিন্দুতে $f(x)$ এর সীমা কি বিদ্যমান?

(ii). যদি $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2}$ হয় তবে $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ এর ডানসীমা এবং বামসীমার মান নির্ণয় কর। $x = 2$ বিন্দুতে কি $f(x)$ এর সীমা বিদ্যমান?

(iii). যদি $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ হয় তবে $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ এর মান [যদি থাকে] নির্ণয় কর।

2(i). যদি $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } x>0 \\ 0 & \text{যখন } x=0 \\ -x & \text{যখন } x<0 \end{cases}$

হয়, তবে $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ এর মান [যদি থাকে] নির্ণয় কর।

(ii). একটি ফাংশন $f(x)$ কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হইল :

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{যখন } x \ge 0 \\ 2-3x & \text{যখন } x<0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ নির্ণয় কর।

(iii). একটি ফাংশন $f(x)$ কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হইল :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{যখন } x<3 \\ 5 & \text{যখন } x=3 \\ 2(5-x) & \text{যখন } x>3 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 3+} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to 3-} f(x)$ নির্ণয় কর।

(iv). যদি $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{যখন } x>0 \\ 1/2 & \text{যখন } x=0 \\ x+1 & \text{যখন } x<0 \end{cases}$

হয়, তবে $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ নির্ণয় কর।

(v). একটি ফাংশন f(x) নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{যখন } x \le 1 \\ 3-x & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 1} f(x)$ এর মান [যদি থাকে] নির্ণয় কর।

(vi). একটি ফাংশন $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 1+2x & \text{যখন } -1/2 \le x < 0 \\ 1-2x & \text{যখন } 0 \le x \le 1/2 \\ -1+2x & \text{যখন } 1/2 < x \end{cases}$$

দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। f^{-1} নির্ণয় কর [যদি থাকে]; যদি না থাকে তবে কারণ দর্শাও। $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 1/2} f(x)$ নির্ণয় কর। f এর ছবি আঁক এবং f^{-1} [যদি থাকে] এর ছবি আঁক। [ঢাঃ বিঃ সঃ '91]

3(i). একটি ফাংশন f(x) কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হইল ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{যখন } x > 0 \\ 1 & \text{যখন } x = 0 \\ 1+x & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ এর মান [যদি থাকে] নির্ণয় কর।

(ii). একটি ফাংশন f(x) কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হইল ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } x > 1 \\ 2 & \text{যখন } x = 1 \\ x & \text{যখন } x < 1 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 1+} f(x)$ এবং $\lim_{x\to 1-} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

(iii). একটি ফাংশন f(x) কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হইল ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } x < 1 \\ 3 & \text{যখন } x = 1 \\ x^2+2 & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$$

প্রমাণ করা যে $\lim_{x\to 1} f(x)$ এর সীমা বিদ্যমান নাই।

(iv). নিম্নের ফাংশনটির লেখচিত্র আঁক ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } x < 1 \\ x & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \\ 1/x & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। $\lim_{x\to 0} f(x)$ ও $\lim_{x\to 1} f(x)$ নির্ণয় কর।

[ঢাঃ বিঃ সঃ '89]

4(i). যদি $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

(a). $\lim_{x\to 1+} f(x) = -\infty$ এবং $\lim_{x\to 1-} f(x) = \infty$

(b). $\lim_{x\to 2+} f(x) = \infty$ এবং $\lim_{x\to 2-} f(x) = -\infty$

(c). $\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$

(ii). যদি $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ হয়, তবে

(a). $\lim_{x\to 1+} f(x)$ এবং $\lim_{x\to 1-} f(x)$ নির্ণয় কর।

(b). $\lim_{x\to -1+} f(x)$ এবং $\lim_{x\to -1-} f(x)$ নির্ণয় কর।

(c). $\lim_{x\to \infty} f(x)$ এবং $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ নির্ণয় কর।

5(i). যদি $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ হয়, তবে $\lim_{x\to 0} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান?

(ii). $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ হইলে দেখাও যে $\lim_{x\to 0} f(x)$ বিদ্যমান নয়।

(iii). যদি $f(x) = \dfrac{|x-a|}{x-a}$ হয়, তবে $\lim_{x\to a+} f(x)$ এবং $\lim_{x\to a-} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

(iv). যদি $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-4|}{x-4} & \text{যখন } x \neq 4 \\ 0 & \text{যখন } x = 4 \end{cases}$

তবে $\lim_{x\to 4+} f(x)$ এবং $\lim_{x\to 4-} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

6(i). যদি একটি ফাংশন f কে $f(x) = [x]$ দ্বারা বর্ণনা করা হয়, যখন $[x]$ দ্বারা x এর মানের বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা বুঝায় যাহা x হইতে বৃহত্তর নয়, তবে প্রমাণ কর যে $\lim_{x\to 1+} f(x) = 1$ এবং $\lim_{x\to 1-} f(x) = 0$.

(ii). যদি $f(x) = x - [x]$ হয় তবে $n \in \mathbf{N}$ এর জন্য দেখাও যে

$\lim_{x\to n+} f(x) = 0$ এবং $\lim_{x\to n-} f(x) = 1$.

(iii). দেখাও যে $\lim_{x\to 5} \frac{x}{[x]}$ বিদ্যমান নয়।

(iv). যদি $f(x) = \left[\frac{x}{3}\right]$ হয়, তবে $\lim_{x\to 3} f(x)$ এবং $\lim_{x\to 3-} f(x)$ নির্ণয় কর।

(v). যদি $f(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$ হয় তবে $\lim_{x\to 3/2} f(x)$ এর মান [যদি থাকে] নির্ণয় কর।

(vi). একটি ফাংশন f(x) নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} [x+1/2] & \text{যখন } x > 1/2 \\ 0 & \text{যখন } x = 1/2 \\ 2x & \text{যখন } x < 1/2 \end{cases}$$

$\lim_{x\to(1/2)+} f(x)$, $\lim_{x\to(1/2)-} f(x)$ এবং $\lim_{x\to(1/2)} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

7(i). যদি একটি ফাংশন f কে $f(x) = \frac{1}{1+e^{-1/x}}$ দ্বারা বর্ণনা করা হয়, তবে

$\lim_{x\to 0+} f(x)$ এবং $\lim_{x\to 0-} f(x)$ নির্ণয় কর।

(ii). যদি $f(x) = \frac{e^{1/x}}{e^{1/x}+1}$ হয়, তবে $\lim_{x\to 0} f(x)$ এর মান [যদি থাকে] নির্ণয় কর।

(iii). $f(x) = \frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}$ হইলে দেখাও যে $\lim_{x\to 0} f(x)$ এর মান বিদ্যমান নাই।

(iv). যদি $f(x) = \frac{e^{1/x}-e^{-1/x}}{e^{1/x}+e^{-1/x}}$ হয় তবে $\lim_{x\to 0} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান?

(v). যদি $f(x) = \frac{1}{3+e^{1/(x-2)}}$ হয়, তবে $\lim_{x\to 2} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান?

(vi). $\lim_{x\to\pi/2} \frac{e^{\tan x}-1}{e^{\tan x}+1}$ এর সীমার বিদ্যমানতা আলোচনা কর।

(vii). $\lim_{x\to 0} \frac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}$ এর সীমার বিদ্যমানতা আলোচনা কর।

(viii). $\lim_{x\to\infty} \frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$ এর সীমার বিদ্যমানতা আলোচনা কর।

8(i). যদি $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ হয়, তবে $\lim_{x\to 1+} f(x)$ এবং $\lim_{x\to 1-} f(x)$ নির্ণয় কর।

(ii). $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ এর সীমার বিদ্যমানতা আলোচনা কর।

(iii). প্রমাণ কর $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$

(iv). যদি $f(x) = \sqrt{x}\cos\frac{1}{x}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

(v). দেখাও যে $\lim_{x\to 0} f(x)$ বিদ্যমান নয় যেখানে $f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$.

[N. U. H-2004]

9. নিম্ন বর্ণিত সীমা সমূহকে $(\delta - \epsilon)$ সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ কর ঃ

(i). $\lim_{x\to 2} 3x+4 = 10$ (ii). $\lim_{x\to 4} 2x-2 = 6$

(iii). $\lim_{x\to 2} x^2-3x+5 = 3$ (iv). $\lim_{x\to 2} x^3-3x+7 = 9$

(v). $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=2a$ (vi). $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

[N. U. H-2003]

(vii). $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{x-2}=8$ (viii). $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$

(ix). $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$ (x). $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{4x^2-1}{2x-1}=2$.

(xi). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{2x+1}=1$

বিবিধ–10 : (i). উদাহরণসহ f(x) এর নিম্নলিখিত অবস্থগুলো ব্যাখ্যা কর :

(a). f(a) এবং $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ উভয়ের অস্তিত্ব আছে এবং উহারা সমান।

(b). f(a) এবং $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ উভয়ের অস্তিত্ব আছে কিন্তু উহারা অসমান।

(c). f(a) এবং $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ উভয়েই অস্তিত্বহীন।

(d). f(a) এর অস্তিত্ব আছে কিন্তু $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ অস্তিত্বহীন।

(e). f(a) অস্তিত্বহীন কিন্তু $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ এর অস্তিত্ব আছে।

(ii). কোন বিন্দুতে একটি ফাংশনের সীমার অস্তিত্ব আছে যদিও ঐ বিন্দুতে ফাংশন অস্তিত্বহীন, উদাহরণ দ্বারা সত্যতা প্রমান কর। [রাঃ বিঃ '79]

(iii). যদি $f(x)=\begin{cases}(1+2x)^{1/x} & \text{যখন } x\neq 0\\ e^2 & \text{যখন } x=0\end{cases}$

তবে $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

(iv). প্রমাণ কর : $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

(v). প্রমাণ কর $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$

উত্তরমালা [ANSWERS]

1(i). $\lim\limits_{x\to -4} f(x)=-\frac{2}{7}$

(ii). $\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=1, \lim\limits_{x\to 2-} f(x)=1, \lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$

(iii). $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$

2(i). $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=0, \lim\limits_{x\to 0-} f(x)=0, \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

(ii). $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=-2, \lim\limits_{x\to 0-} f(x)=2$

(iii). $\lim\limits_{x\to 3+} f(x)=4, \lim\limits_{x\to 3-} f(x)=4$

(iv). $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=-1, \lim\limits_{x\to 0-} f(x)=1$

(v). $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ এর মান বিদ্যমান নাই।

3(i). $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

(ii). $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=1, \lim\limits_{x\to 1-} f(x)=1$

4(ii) (a). $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=-\infty; \lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\infty$

(b). $\lim\limits_{x\to -1+} f(x)=-\infty; \lim\limits_{x\to -1-} f(x)=\infty$

(c). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0; \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$

5(i). $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ এর মান বিদ্যমান নাই।

(iii). $\lim_{x\to a+} f(x) = 1;\ \lim_{x\to a-} f(x) = -1$

(iv). $\lim_{x\to 4} f(x) = 1;\ \lim_{x\to 4-} f(x) = -1$

6(iv). $\lim_{x\to 3+} f(x) = 1;\ \lim_{x\to 3-} f(x) = 0$

(v). $\lim_{x\to 3/2} f(x) = 0$

(vi). $\lim_{x\to (1/2)+} f(x) = 1;\ \lim_{x\to (1/2)-} f(x) = 1;\ \lim_{x\to 1/2} f(x) = 1$

7(i). $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1;\ \lim_{x\to 0-} f(x) = 0$

(ii). $\lim_{x\to 0} f(x)$ এর মান বিদ্যমান নাই। (iv). $\lim_{x\to 0} f(x)$ এর মান বিদ্যমান নাই।

(v). $\lim_{x\to 2} f(x)$ এর মান বিদ্যমান নাই। (vi). সীমা মান বিদ্যমান নাই।

(vii). সীমা মান বিদ্যমান নাই। (viii). 1

8(i). $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0;\ \lim_{x\to 0-} f(x) = 0$

(ii). $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

10 (a). $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$; (b). $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{যখন } x \neq 0 \\ 4 & \text{যখন } x = 4 \end{cases}$

(c). $f(x) = \frac{1}{x-3}$ (d). $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{যখন } x > 1 \\ 5 & \text{যখন } x = 1 \\ x-2 & \text{যখন } x < 1 \end{cases}$

(e). $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ (iii). $\lim_{x\to 0} f(x) = e^2$.

———×———