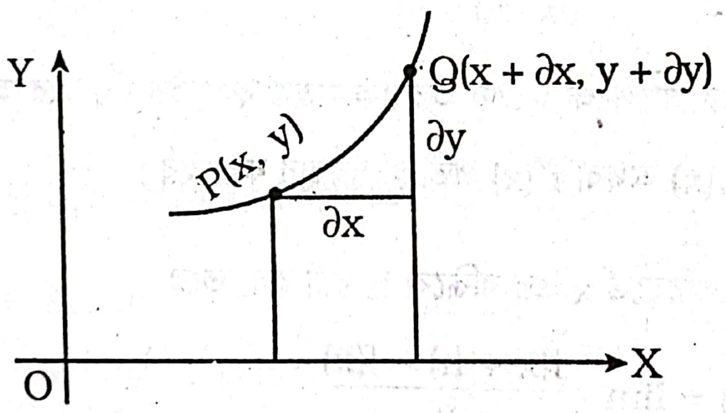
# চতুর্থ অধ্যায় [CHAPTER FOUR]
## দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ [SECTION TWO]
## অন্তরীকরণ
## [DIFFERENTIATION]

### 4.2.1. ভূমিকা [Introduction] ঃ

অন্তরীকরণ বা ডিফারেনসিয়াল হইল ডিফারেনসিয়াল ক্যালকুলাসের একটি গুরুত্বপূর্ণ প্রক্রিয়া। এই প্রক্রিয়াটিতে স্বাধীন চলক x এর বৃদ্ধির ফলে অধীন চলক y এর বৃদ্ধি নির্ণয় করিয়া ইহাদের মধ্যে একটি সম্পর্ক স্থাপন করাই হইল ডিফারেনসিয়াল ক্যালকুলাসের মুখ্য বিষয়।

$y = f(x)$ যদি x এর ফাংশন হয় এবং x এর সাথে অবিচ্ছিন্নভাবে y পরিবর্তিত হয়, তবে x এর বৃদ্ধিকে $\partial x$ অথবা h এবং y এর বৃদ্ধিকে $\partial y$ অথবা k দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

মনেকরি $y = f(x)$ বক্ররেখার উপর $P(x, y)$ এবং $Q(x + \partial x, y + \partial y)$ দুইটি নিকটবর্তী বিন্দু।




যদি x এর বৃদ্ধি $\partial x$ এবং y এর বৃদ্ধি $\partial y$ হয়, তবে $(x, y)$ বিন্দুতে x এবং y এর বৃদ্ধি দ্বয়ের অনুপাত $\frac{\partial y}{\partial x}$. এখন $\partial x \to 0$ হইলে যদি $\frac{\partial y}{\partial x}$ এর একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায়, তবে $\lim\limits_{\partial x \to 0} \frac{\partial y}{\partial x}$ কে $y = f(x)$ ফাংশনের অন্তরক সহগ [Differential Coefficient] বলা হয় এবং $\lim\limits_{\partial x \to 0} \frac{\partial y}{\partial x}$ কে $\frac{dy}{dx}$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

অর্থাৎ $\lim\limits_{\partial x \to 0} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{dx}$ কে x এর সাপেক্ষে y এর অন্তরক সহগ বলা হয়।

**বিঃ দ্রঃ** ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয়ের প্রক্রিয়াকে অন্তরীকরণ [Differentiation] বলা হয়।

**4.2.2. অন্তরক সহগের সাধারন সংজ্ঞা [General definition of differential Coefficient] ঃ**

মনেকরি $y = f(x) \cdots (1)$ একটি ফাংশন। যদি x এর ক্ষুদ্র পরিবর্তন $\partial x$ এবং y এর ক্ষুদ্র পরিবর্তন $\partial y$ হয়, তবে $y + \partial y = f(x + \partial x) \cdots (2)$

এখন (2) নং হইতে (1) নং কে বিয়োগ করিয়া পাই

$$\partial y = f(x + \partial x) - f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{f(x + \partial x) - f(x)}{\partial x}$$

উভয় পক্ষে $\lim\limits_{\partial x \to 0}$ গ্রহণ করিয়া পাই

$$\lim_{\partial x \to 0} \frac{\partial y}{\partial x} = \lim_{\partial x \to 0} \frac{f(x + \partial x) - f(x)}{\partial x}$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx} = \lim_{\partial x \to 0} \frac{f(x + \partial x) - f(x)}{\partial x} \cdots (1)$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে y এর অন্তরক সহগ বলা হয়। y এর অন্তরক সহগ বুঝাইতে $\frac{dy}{dx}$ ছাড়াও $\frac{d}{dx} f(x)$ অথবা $f'(x)$ প্রতীক ব্যবহার করা হয়।

যদি $\partial x$ এর পরিবর্তে x এর বৃদ্ধিকে h ধরা হয়, তবে

$$(1) \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

সুতরাং $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরক সহগ $f'(a)$ হইলে

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

**4.2.3. কতক গুলো প্রাথমিক ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় ঃ**

**(i). সংজ্ঞার সাহায্যে cf(x) এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ মনেকরি $y = cf(x)$. এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \cdots (1)$$

এখন f(x) এর পরিবর্তে cf(x) স্থাপন করিয়া পাই

$$\frac{d}{dx}\{cf(x)\} = \lim_{h \to 0} \frac{cf(x + h) - cf(x)}{h}$$

$$\text{বা } \frac{d}{dx}\{cf(x)\} = \lim_{h \to 0} \frac{c\{f(x + h) - f(x)\}}{h}$$

$$\text{বা } \frac{d}{dx}\{cf(x)\} = c \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$\text{বা } \frac{d}{dx}\{cf(x)\} = c \frac{d}{dx}\{f(x)\}; \text{ (1) নং দ্বারা।}$$

**(ii). যদি u এবং v উভয়েই x এর ফাংশন হয়, তবে u + v এবং u − v এর অন্তরক সহগ নির্ণয় ঃ**

সমাধান ঃ মনেকরি $y = u + v \cdots (1)$

যেহেতু y হইল x এর ফাংশন, কাজেই x এর বৃদ্ধি $\partial x$ এর জন্য y, u এবং v এর বৃদ্ধি যথাক্রমে $\partial y$, $\partial u$ এবং $\partial v$.

$$\therefore y + \partial y = u + \partial u + v + \partial v \cdots (2)$$

(2) নং হইতে (1) নং কে বিয়োগ করিয়া পাই

$$\partial y = \partial u + \partial v$$

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

উভয় পক্ষে $\lim\limits_{\partial x \to 0}$ গ্রহণ করিয়া পাই

$$\lim_{\partial x \to 0} \frac{\partial y}{\partial x} = \lim_{\partial x \to 0} \frac{\partial u}{\partial x} + \lim_{\partial x \to 0} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$\text{বা } \frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}; \quad \text{(1) নং দ্বারা।}$$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় $\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$.

**(iii). uv এর অন্তরক সহগ নির্ণয় ঃ**

সমাধান ঃ মনেকরি u এবং v উভয়েই x এর ফাংশন এবং $y = uv \cdots (1)$

যেহেতু y হইল x এর ফাংশন, কাজেই x এর বৃদ্ধি $\partial x$ এর জন্য y, u এবং v এর যথাক্রমে $\partial y$, $\partial u$ এবং $\partial v$. তাহা হইলে

$$y + \partial y = (u + \partial u)(v + \partial v)$$

$$\text{বা } y + \partial y = uv + u\partial v + v\partial u + \partial u \partial v \cdots (2)$$

(2) নং হইতে (1) নং কে বিয়োগ করিয়া পাই

$$\partial y = u\partial v + v\partial u + \partial u\,\partial v$$

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} + \partial u\frac{\partial v}{\partial x} \cdots (3)$$

$\partial x \to 0$ হইলে $\partial u \to 0$ হয়; (3) নং এর উভয় পক্ষে সীমা গ্রহণ করিয়া পাই

$$\lim_{\partial x\to 0} \frac{\partial y}{\partial x} = \lim_{\partial x\to 0}\left[u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} + \partial u\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx} = u\lim_{\partial x\to 0}\frac{\partial v}{\partial x} + v\lim_{\partial x\to 0}\frac{\partial u}{\partial x} + \lim_{\partial u\to 0}\partial u.\lim_{\partial x\to 0}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + 0.\frac{dv}{dx}$$

$$\text{বা } \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

∴ দুইটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরক সহগ = ১ম ফাংশন × ২য় ফাংশনের অন্তরক সহগ + ২য় ফাংশন × ১ম ফাংশনের অন্তরক সহগ

অনুসীদ্ধান্ত ঃ $\frac{d}{dx}(uvw) = uv\frac{dw}{dx} + vw\frac{du}{dx} + wu\frac{dv}{dx}.$

**(iv). $\frac{u}{v}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় ঃ**

সমাধান ঃ মনেকরি u এবং v উভয়েই x এর ফাংশন এবং $y = \frac{u}{v} \cdots (1)$

যেহেতু y হইল x এর ফাংশন, কাজেই x এর বৃদ্ধির জন্য y, u এবং v এর যথাক্রমে $\partial y$, $\partial u$ এবং $\partial v$. তাহা হইলে

$$y + \partial y = \frac{u + \partial u}{v + \partial v} \cdots (2)$$

(2) নং হইতে (1) নং কে বিয়োগ করিয়া পাই

$$\partial y = \frac{u + \partial u}{v + \partial v} - \frac{u}{v}$$

$$\text{বা } \partial y = \frac{uv + v\partial u - uv - u\partial v}{v(v + \partial v)}$$

$$\text{বা } \partial y = \frac{v\partial u - u\partial v}{v(v + \partial v)}$$

$$\text{বা } \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}}{v(v + \partial v)} \cdots (3)$$

$\partial x \to 0$ হইলে $\partial v \to 0$ হয়; (3) নং এর উভয় পক্ষে সীমা গ্রহণ করিয়া পাই

$$\lim_{\partial x\to 0}\frac{\partial y}{\partial x} = \lim_{\partial x\to 0}\frac{v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}}{v(v + \partial v)}$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v(v + 0)}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}; \quad \text{(1) নং দ্বারা।}$$

**(v). মূল নিয়মে $x^n$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় ঃ**

সমাধান ঃ মনেকরি $y = f(x) = x^n$

তাহা হইলে $f(x + h) = (x + h)^n$

এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x + h)^n - x^n}{h}$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{x^n(1 + h/x)^n - x^n}{h} = x^n\lim_{h\to 0}\frac{(1 + h/x)^n - 1}{h}$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx} = x^n\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\left(1 + {}^nc_1\frac{h}{x} + {}^nc_2\frac{h^2}{x^2} + \cdots + \frac{h^n}{x^n}\right) - 1\right]$$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx} = x^n\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{nh}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{h^2}{x^2} + \cdots + \frac{h^n}{x^n}\right]$$

বা $\frac{dy}{dx} = x^n \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{n}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{h}{x^2} + \dots + \frac{h^{n-1}}{x^n}\right]$

বা $\frac{dy}{dx} = x^n\left[\frac{n}{x} + 0\right] = nx^{n-1}$

অর্থাৎ $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.

**(vi). মূল নিয়মে $e^x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় ঃ**

সমাধান ঃ মনেকরি $y = f(x) = e^x$, তাহা হইলে $f(x + h) = e^{x+h}$.

এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

বা $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h}$

বা $\frac{dy}{dx} = e^x \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\left(1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots\right) - 1\right]$

বা $\frac{dy}{dx} = e^x \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots\right]$

বা $\frac{dy}{dx} = e^x \lim\limits_{h\to 0}\left[1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots\right] = e^x[1 + 0]$

অর্থাৎ $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$.

**(vii). মূল নিয়মে $a^x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় ঃ**

সমাধান ঃ মনেকরি $y = f(x) = a^x$, তাহা হইলে $f(x + h) = a^{x+h}$

এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

বা $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{a^x.a^h - a^x}{h} = a^x \lim\limits_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h}$

বা $\frac{dy}{dx} = a^x \lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{h\ln a} - 1}{h} = a^x \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[e^{h\ln a} - 1\right]$

বা $\frac{dy}{dx} = a^x \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\left\{1 + \frac{h\ln a}{1!} + \frac{h^2(\ln a)^2}{2!} + \frac{h^3(\ln a)^3}{3!} + \dots\right\} - 1\right]$

বা $\frac{dy}{dx} = a^x \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{h\ln a}{1!} + \frac{h^2(\ln a)^2}{2!} + \frac{h^3(\ln a)^3}{3!} + \dots\right]$

বা $\frac{dy}{dx} = a^x \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{\ln a}{1!} + \frac{h(\ln a)^2}{2!} + \frac{h^2(\ln a)^3}{3!} + \dots\right]$

বা $\frac{dy}{dx} = a^x[\ln a + 0] = a^x \ln a$.

অর্থাৎ $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$.

**(viii). মূল নিয়মে $\ln x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় ঃ**

সমাধান ঃ মনেকরি $y = f(x) = \ln x$, তাহা হইলে $f(x + h) = \ln(x + h)$.

এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

বা $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\frac{x+h}{x} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$

বা $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{h}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3} - \dots\right]$

বা $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \frac{h^2}{3x^3} - \dots\right]$

বা $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - 0$

সুতরাং $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$.

বিঃ দ্রঃ $\log_a x = \log_a e.\ \ln x$.

**(ix). মূল নিয়মে $\log_a x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় ঃ**

সমাধান ঃ মনেকরি $y = f(x) = \log_a x = \log_a e.\ \ln x$. তাহা হইলে $f(x + h) = \log_a e.\ \ln(x + h)$. এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(x + h) - f(x)]$$

বা $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to0} \frac{1}{h} [\log_a e \ ln(x + h) - \log_a e \ ln x]$

বা $\frac{dy}{dx} = \log_a e \lim_{h\to0} \frac{1}{h} ln \frac{x+h}{x} = \log_a e \lim_{h\to0} \frac{1}{h} ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$

বা $\frac{dy}{dx} = \log_a e \lim_{h\to0} \frac{1}{h}\left[\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \ldots\right]$

বা $\frac{dy}{dx} = \log_a e \lim_{h\to0} \left[\frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \frac{h^2}{3x^3} - \ldots\right] = \log_a e\left[\frac{1}{x} - 0\right]$

সুতরাং $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e.$

**(x). মূল নিয়মে sinx এর অন্তরক সহগ নির্ণয় ঃ**

সমাধান ঃ মনেকরি $y = f(x) = \sin x$. তাহা হইলে $f(x + h) = \sin(x + h)$.

এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

বা $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to0} \frac{1}{h} 2\cos\frac{x+h+x}{2} \sin\frac{x+h-x}{2}$

বা $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to0} \frac{2}{h}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}.$

বা $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \lim_{h\to0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = \cos(x + 0).1$

সুতরাং $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x.$

**(xi). মূল নিয়মে cosx এর অন্তরক সহগ নির্ণয় ঃ**

সমাধান ঃ মনেকরি $y = f(x) = \cos x$, তাহা হইলে $f(x + h) = \cos(x + h)$.

এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

বা $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to0} \frac{1}{h} 2\sin\frac{x+h+x}{2} \sin\frac{x-x-h}{2}$



বা $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to0} \frac{2}{h}\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{-h}{2}\right)$

বা $\frac{dy}{dx} = -\lim_{h\to0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)\lim_{h\to0}\frac{\sin(h/2)}{h/2} = -\sin(x + 0).1$

সুতরাং $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x.$

**(xii). সংজ্ঞার সাহায্যে tanx এর অন্তরক সহগ নির্ণয় ঃ**

সমাধান ঃ মনেকরি $y = f(x) = \tan x$, তাহা হইলে $f(x + h) = \tan(x + h)$

এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h}$$

বা $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to0} \frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}\right]$

বা $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to0} \frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{\cos(x+h)\cos x}\right]$

বা $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to0} \frac{\sin(x+h-x)}{h\cos(x+h)\cos x} = \lim_{h\to0} \frac{\sin h}{h\cos(x+h)\cos x}$

বা $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to0} \frac{\sin h}{h} \lim_{h\to0} \frac{1}{\cos(x+h).\cos x} = 1.\frac{1}{\cos(x+0)\cos x}$

সুতরাং $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x.$

**(xiii). অনুরূপভাবে cotx এর অন্তরক সহগ নির্ণয় করা যায়।**

$\therefore \frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x.$

**(xiv). মূল নিয়মে secx এর অন্তরক সহগ নির্ণয় ঃ**

সমাধান ঃ মনেকরি $y = f(x) = \sec x$, তাহা হইলে $f(x + h) = \sec(x + h)$.

এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h}$$

বা $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}\right] = \lim_{h\to0} \frac{1}{h}\left[\frac{\cos x - \cos(x+h)}{\cos(x+h)\cos x}\right]$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{2\sin((x+x+h)/2)\sin((x+h-x)/2)}{\cos(x+h)\cos x}$$

বা $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{h} \cdot \frac{\sin(x+h/2)\sin(h/2)}{\cos(x+h)\cos x}$

বা $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \lim_{h\to 0} \sin\left(x+\frac{h}{2}\right) \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cos(x+h)}$

বা $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x} \cdot 1 \cdot \sin x \cdot \frac{1}{\cos(x+0)} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$

সুতরাং $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x.$

**(xv). অনুরূপভাবে cosecx এর অন্তরক সহগ নির্ণয় করা যায়।**

$\therefore \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x.$

**(xvi). মূল নিয়মে $\sin^{-1}x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় ঃ**

সমাধান ঃ মনেকরি $y = f(x) = \sin^{-1}x$, তাহা হইলে $f(x+h) = \sin^{-1}(x+h)$

এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin^{-1}(x+h)-\sin^{-1}x}{h}$$

ধরি $\sin^{-1}x = y$ তবে $x = \sin y$

এবং $\sin^{-1}(x+h) = y+k$ তবে $x+h = \sin(y+k)$

বিয়োগ করিয়া পাই

$$\sin^{-1}(x+h) - \sin^{-1}x = k \text{ এবং } h = \sin(y+k) - \sin y$$

যদি $h \to 0$ হয়, তবে $k \to 0$ হয়।

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{\sin(y+k)-\sin y} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{2\cos(y+k/2)\sin(k/2)}$$

বা $\frac{dy}{dx} = \lim_{k\to 0} \frac{1}{\cos(y+k/2)} \lim_{k\to 0} \frac{k/2}{\sin(k/2)} = \frac{1}{\cos(y+0)} \cdot 1$

বা $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

সুতরাং $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$



**(xvii). অনুরূপভাবে $\cos^{-1}x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় করা যায়।**

$\therefore \frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$

**(xviii). মূল নিয়মে $\tan^{-1}x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় ঃ**

সমাধান ঃ মনেকরি $y = f(x) = \tan^{-1}x$, তাহা হইলে $f(x+h) = \tan^{-1}(x+h)$.

এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\tan^{-1}(x+h)-\tan^{-1}x}{h}$$

ধরি $\tan^{-1}x = y$ তবে $x = \tan y$

এবং $\tan^{-1}(x+h) = y+k$ তবে $x+h = \tan(y+k)$

বিয়োগ করিয়া পাই

$$\tan^{-1}(x+h) - \tan^{-1}x = k \text{ এবং } h = \tan(y+k) - \tan y$$

যদি $h \to 0$ হয়, তবে $k \to 0$ হইবে

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{\tan(y+k)-\tan y} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{\frac{\sin(y+k)}{\cos(y+k)} - \frac{\sin y}{\cos y}}$$

বা $\frac{dy}{dx} = \lim_{k\to 0} \frac{k\cos(y+k)\cos y}{\sin(y+k)\cos y - \cos(y+k)\sin y}$

বা $\frac{dy}{dx} = \lim_{k\to 0} \frac{k\cos(y+k)\cos y}{\sin(y+k-y)} = \lim_{k\to 0} \frac{k\cos(y+k)\cos y}{\sin k}$

বা $\frac{dy}{dx} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{\sin k} \lim_{k\to 0} \cos(y+k)\cos y = 1.\cos(y+0)\cos y = \frac{1}{\sec^2 y}$

বা $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$

সুতরাং $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}.$

**(xix). অনুরূপভাবে $\cot^{-1}x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় করা যায়।**

$\therefore \frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = \frac{-1}{1+x^2}.$

**(xx). মূল নিয়মে $sec^{-1}x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় ঃ**

সমাধান ঃ মনেকরি $y = f(x) = sec^{-1}x$, তাহা হইলে $f(x+h) = sec^{-1}(x+h)$

এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{sec^{-1}(x+h) - sec^{-1}x}{h}$$

যদি $sec^{-1}x = y$ তবে $x = secy$

এবং $sec^{-1}(x+h) = y + k$ তবে $x + h = sec(y+k)$

বিয়োগ করিয়া পাই

$sec^{-1}(x+h) - sec^{-1}x = k$ এবং $h = sec(y+k) - secy$

যদি $h \to 0$ হয়, তবে $k \to 0$ হয়

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{sec(y+k) - secy} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{1/cos(y+k) - 1/cosy}$$

বা $$\frac{dy}{dx} = \lim_{k\to 0} \frac{kcos(y+k).cosy}{cosy - cos(y+k)} = \lim_{k\to 0} \frac{kcos(y+k)cosy}{2sin(y+k/2).\ sin(k/2)}$$

বা $$\frac{dy}{dx} = \lim_{k\to 0} \frac{k/2}{sin(k/2)} \lim_{k\to 0} cos(y+k)cosy \lim_{k\to 0} \frac{1}{sin(y+k/2)}$$

বা $$\frac{dy}{dx} = 1.\ cos(y+0)cosy.\ \frac{1}{sin(y+0)} = cosy.\ coty$$

বা $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{secy.\ tany} = \frac{1}{secy\sqrt{tan^2y}} = \frac{1}{secy\sqrt{sec^2y - 1}}$$

সুতরাং $$\frac{d}{dx}(sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

**(xxi). অনুরূপভাবে $cosec^{-1}x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় করা যায়।**

$$\therefore \frac{d}{dx}(cosec^{-1}x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$



## উদাহরণমালা [EXAMPLES]

**উদাহরণ-1 ঃ** নিম্নলিখিত ফাংশন গুলোকে মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

(i). $x^3 + 2x$ (ii). $x + \sqrt{x^2+1}$. [রাঃ বিঃ '88]

**সমাধান ঃ (i).** মনেকরি $y = f(x) = x^3 + 2x$

তাহা হইলে $f(x+h) = (x+h)^3 + 2(x+h)$

এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 + 2(x+h) - x^3 - 2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2x + 2h - x^3 - 2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 + 2)$$

$$= 3x^2 + 0 + 0 + 2 = 3x^2 + 2.$$

**সমাধান ঃ (ii).** ধরি $y = f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

তাহা হইলে $f(x+h) = x + h + \sqrt{(x+h)^2 + 1}$

এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x + h + \sqrt{(x+h)^2+1} - x - \sqrt{x^2+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h + \sqrt{x^2 + 2xh + h^2 + 1} - \sqrt{x^2+1}}{h}$$

$$\frac{(x^2+1+2xh+h^2)^{1/2}-(x^2+1)^{1/2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[(x^2+1)^{1/2}\left(1+\frac{2xh+h^2}{x^2+1}\right)^{1/2} - (x^2+1)^{1/2}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} 1 + \lim_{h\to 0}\sqrt{x^2+1}\,\frac{1}{h}\left[\left(1+\frac{2xh+h^2}{x^2+1}\right)^{1/2} - 1\right].$$

$$= 1+\sqrt{x^2+1}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2xh+h^2}{x^2+1} + \frac{(1/2)(1/2-1)}{2!}\left(\frac{2xh+h^2}{x^2+1}\right)^2+\cdots\right\}-1\right]$$

$$= 1+\sqrt{x^2+1}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{h(2x+h)}{2(x^2+1)}-\frac{1}{8}\,\frac{h^2(2x+h)^2}{(x^2+1)^2}+\cdots\right]$$

$$= 1+\sqrt{x^2+1}\lim_{h\to 0}\left[\frac{2x+h}{2(x^2+1)}-\frac{1}{8}\,\frac{h(2x+h)^2}{(x^2+1)^2}+\cdots\right]$$

$$= 1+\sqrt{x^2+1}\left[\frac{2x+0}{2(x^2+1)}-0\right]$$

$$= 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

**উদাহরণ-2 :** নিম্নলিখিত ফাংশন গুলোকে মূল নিয়মে $x$ এর সাপেক্ষে অন্তরক নির্ণয় কর :

(i). $e^{\sqrt{x}}$ (ii). $e^{\tan^{-1}x}$

**সমাধান :** (i). মনেকরি $y = f(x) = e^{\sqrt{x}}$, তাহা হইলে $f(x+h) = e^{\sqrt{x+h}}$.

এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{\sqrt{x+h}}-e^{\sqrt{x}}}{h} \quad\cdots (1)$$

ধরি $\sqrt{x} = z$ এবং $\sqrt{x+h} = z+k$

বিয়োগ করিয়া পাই $\sqrt{x+h}-\sqrt{x} = k$



যদি $h\to 0$ হয় তবে $k\to 0$ হয়

$$(1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{k\to 0}\frac{e^{z+k}-e^z}{k}\cdot\frac{k}{h}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{e^z e^k - e^z}{k}\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{1/2}-x^{1/2}}{h}$$

$$= e^z\lim_{k\to 0}\frac{e^k-1}{k}\lim_{h\to 0}\frac{x^{1/2}(1+h/x)^{1/2}-x^{1/2}}{h}$$

$$= e^z\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left[\left(1+k+\frac{k^2}{2!}+\frac{k^3}{3!}+\cdots\right)-1\right] \times x^{1/2}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/2}-1\right]$$

$$= e^z\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left[k+\frac{k^2}{2!}+\frac{k^3}{3!}+\cdots\right] \times x^{1/2}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{h}{x}+\frac{(1/2)(1/2-1)}{2!}\,\frac{h^2}{x^2}+\cdots\right)-1\right]$$

$$= e^z\lim_{k\to 0}\left[1+\frac{k}{2!}+\frac{k^2}{3!}+\cdots\right]\times x^{1/2}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{h}{2x}-\frac{h^2}{8x^2}+\cdots\right]$$

$$= e^z[1+0]\,x^{1/2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{2x}-\frac{h}{8x^2}+\cdots\right]$$

$$= e^z.\,x^{1/2}\left[\frac{1}{2x}-0\right] = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.$$

**সমাধান :** (ii). মনেকরি $y = f(x) = e^{\tan^{-1}x}$, তাহা হইলে

$$f(x+h) = e^{\tan^{-1}(x+h)}$$

এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{\tan^{-1}(x+h)}-e^{\tan^{-1}x}}{h} \quad\cdots (1)$$

ধরি $\tan^{-1}x = z$ তবে $x = \tan z$

এবং $\tan^{-1}(x + h) = z + k$ তবে $x + h = \tan(z + k)$

বিয়োগ করিয়া পাই $h = \tan(z + k) - \tan z$

যদি $h \to 0$ হয়, তবে $k \to 0$ হয়।

$$(1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{k\to0} \frac{e^{z+k} - e^z}{k} \cdot \frac{k}{h}$$

$$= \lim_{k\to0} \frac{e^z e^k - e^z}{k} \lim_{k\to0} \frac{k}{\tan(z+k) - \tan z}$$

$$= e^z \lim_{k\to0} \frac{e^k - 1}{k} \lim_{k\to0} \frac{k}{\frac{\sin(z+k)}{\cos(z+k)} - \frac{\sin z}{\cos z}}$$

$$= e^z \lim_{k\to0} \frac{1}{k}\left[\left(1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \dots\right) - 1\right] \times \lim_{k\to0} \frac{k\cos(z+k)\cos z}{\sin(z+k)\cos z - \cos(z+k)\sin z}$$

$$= e^z \lim_{k\to0} \frac{1}{k}\left[k + \frac{k^2}{2!} + \dots\right] \times \lim_{k\to0} \frac{k\cos(z+k)\cos z}{\sin(z+k-z)}$$

$$= e^z \lim_{k\to0} \left[1 + \frac{k}{2!} + \dots\right] \times \lim_{k\to0} \frac{k\cos(z+k)\cos z}{\sin k}$$

$$= e^z (1 + 0) \times \lim_{k\to0} \frac{k}{\sin k} \lim_{k\to0} \cos(z+k)\cos z$$

$$= e^z . 1. \cos z. \cos z = e^z . \cos^2 z = \frac{e^z}{\sec^2 z}$$

$$= \frac{e^z}{1 + \tan^2 z} = \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1 + x^2}.$$

**উদাহরণ-3 ঃ** নিম্নলিখিত ফাংশন গুলোর মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে অন্তরক নির্ণয় কর ঃ

(i). $\tan^2 2x$ (ii). $\sin^{-1}x^2$

**সমাধান ঃ (i).** মনেকরি $y = f(x) = \tan^2 2x$, তাহা হইলে

$f(x + h) = \tan^2 2(x + h) = \tan^2 (2x + 2h)$.



এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\tan^2(2x+2h) - \tan^2 2x}{h} \dots (1)$$

ধরি $\tan 2x = z$ এবং $\tan(2x + 2h) = z + k$

বিয়োগ করিয়া পাই $\tan(2x + 2h) - \tan 2x = k$

যদি $h \to 0$ হয় তবে $k \to 0$ হয়

$$(1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{k\to0} \frac{(z+k)^2 - z^2}{k} \cdot \frac{k}{h};$$

$$= \lim_{k\to0} \frac{z^2 + 2kz + k^2 - z^2}{k} \lim_{h\to0} \frac{\tan(2x+2h) - \tan 2x}{h}$$

$$= \lim_{k\to0} \frac{2kz + k^2}{k} \lim_{h\to0} \frac{1}{h}\left[\frac{\sin(2x+2h)}{\cos(2x+2h)} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right]$$

$$= \lim_{k\to0} (2z + k). \lim_{h\to0} \frac{1}{h}\left[\frac{\sin(2x+2h)\cos 2x - \cos(2x+2h)\sin 2x}{\cos(2x+2h)\cos 2x}\right]$$

$$= (2z + 0) \lim_{h\to0} \frac{\sin(2x + 2h - 2x)}{h.\cos(2x+2h)\cos 2x}.$$

$$= 2z \lim_{h\to0} \frac{\sin 2h}{h\cos(2x+2h)\cos 2x}$$

$$= 2z \lim_{h\to0} \frac{\sin 2h}{2h} . 2 \lim_{h\to0} \frac{1}{\cos(2x+2h)\cos 2x}$$

$$= 2z.1.2 \frac{1}{\cos(2x+0)(\cos 2x)} = \frac{4z}{\cos^2 2x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\tan^2 2x) = 4\tan 2x. \sec^2 2x.$$

**সমাধান ঃ (ii).** মনেকরি $y = f(x) = \sin^{-1}x^2$, তাহা হইলে

$$f(x + h) = \sin^{-1}(x + h)^2$$

এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\sin^{-1}(x+h)^2 - \sin^{-1}x^2}{h}$$

ধরি $\sin^{-1}x^2 = y$ তবে $x^2 = \sin y$

এবং $\sin^{-1}(x+h)^2 = y + k$ তবে $(x+h)^2 = \sin(y+k)$

বিয়োগ করিয়া পাই $\sin^{-1}(x+h)^2 - \sin^{-1}x^2 = k$

এবং $\sin(y+k) - \sin y = (x+h)^2 - x^2$

বা $\sin(y+k) - \sin y = 2xh + h^2$

যদি $h \to 0$ হয়, তবে $k \to 0$ হয়।

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{k}{h}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{k}{\sin(y+k) - \sin y} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{k}{2\cos(y + k/2)\sin(k/2)} \lim_{h\to 0} (2x + h)$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{k/2}{\sin(k/2)} \cdot \lim_{k\to 0} \frac{1}{\cos(y + k/2)} \cdot (2x + 0)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x^2) = 1 \cdot \frac{1}{\cos y} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

**উদাহরণ–4 ঃ** নিম্নলিখিত ফাংশন গুলোর মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে অন্তরক সহ[গ] নির্ণয় কর ঃ

(i). $ln(\cos x)$ [ঢাঃ বিঃ '81; চঃ বিঃ সঃ '82; জাঃ বিঃ সঃ '99, '0[…]

(ii). $\log_{10}(\sin^{-1}x)$ [চঃ বিঃ '8[…]

**সমাধান ঃ (i).** মনেকরি $y = f(x) = ln(\cos x)$

তাহা হইলে $f(x+h) = ln\{\cos(x+h)\}$

এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ln\{\cos(x+h)\} - ln(\cos x)}{h} \ldots (1)$$

ধরি $\cos x = z$ এবং $\cos(x+h) = z + k$

বিয়োগ করিয়া পাই $\cos(x+h) - \cos x = k$

যদি $h \to 0$ হয় তবে $k \to 0$ হয়



$$\therefore (1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{k\to 0} \frac{ln(z+k) - ln z}{k} \frac{k}{h}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{1}{k} ln \frac{z+k}{z} \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{1}{k} ln\left(1 + \frac{k}{z}\right) \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(x + h/2).\sin(-h/2)}{h}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\left[\frac{k}{z} - \frac{k^2}{2z^2} + \cdots\right] \lim_{h\to 0} \frac{-\sin(h/2)}{h/2} \lim_{h\to 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

$$= \lim_{k\to 0} \left[\frac{1}{z} - \frac{k}{2z^2} + \cdots\right](-1).\sin(x + 0)$$

$$= -\left(\frac{1}{z} - 0\right)\sin x = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\{ln(\cos x)\} = -\tan x.$$

**সমাধান ঃ (ii).** ধরি $y = f(x) = \log_{10}(\sin^{-1}x) = ln(\sin^{-1}x)\log_{10}e$

তবে $f(x+h) = \log_{10}\{\sin^{-1}(x+h)\} = ln\{\sin^{-1}(x+h)\log_{10}e$

এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{ln\{\sin^{-1}(x+h)\}\log_{10}e - ln(\sin^{-1}x)\log_{10}e}{h} \ldots (1)$$

ধরি $\sin^{-1}x = z$ এবং $\sin^{-1}(x+h) = z + k$

বিয়োগ করিয়া পাই $\sin^{-1}(x+h) - \sin^{-1}x = k$

যদি $h \to 0$ হয়, তবে $k \to 0$ হয়

$$(1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \log_{10}e \lim_{k\to 0} \frac{ln(z+k) - ln z}{k} \cdot \frac{k}{h};$$

$$= \log_{10}e \lim_{k\to 0} \frac{1}{k} ln\left(\frac{z+k}{z}\right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin^{-1}(x+h) - \sin^{-1}x}{h} \ldots (2)$$

এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n \cos(bx+bh) - x^n \cos bx}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n \{\cos(bx+bh) - \cos bx\} + \cos bx\{(x+h)^n - x^n\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (x+h)^n \lim_{h\to 0} \frac{\cos(bx+bh) - \cos bx}{h}$$

$$+ \cos bx \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \cdots (1)$$

এখন $\lim_{h\to 0} \frac{\cos(bx+bh) - \cos bx}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(bx+bh/2)\sin(-bh/2)}{h}$

$$= -\lim_{h\to 0} \sin\left(bx + \frac{bh}{2}\right) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(bh/2)}{bh/2} . b$$

$$= -\sin(bx+0).\ 1.\ b = -b\sin bx \cdots (2)$$

এবং $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + {}^nc_1\, x^{n-1}h + {}^nc_2\, x^{n-2}\, h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{{}^nc_1\, x^{n-1}\, h + {}^nc_2\, x^{n-2}\, h^2 + \cdots + h^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} [{}^nc_1\, x^{n-1} + {}^nc_2\, x^{n-2}\, h + \cdots + h^{n-1}]$$

$$= {}^nc_1\, x^{n-1} + 0$$

$$= nx^{n-1} \cdots (3)$$

(2) নং এবং (3) নং এর সাহায্যে (1) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায়

$$\frac{dy}{dx} = (x+0)^n (-b\sin bx) + nx^{n-1} \cos bx$$

$$\frac{d}{dx}(x^n \cos bx) = -bx^n \sin bx + nx^{n-1} \cos bx.$$

উদাহরণ-6 : মূল নিয়মে $\frac{e^{2x}}{lnx}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনেকরি $y = f(x) = \frac{e^{2x}}{lnx}$, তাহা হইলে $f(x+h) = \frac{e^{2(x+h)}}{ln(x+h)}$.

এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{e^{2x+2h}}{ln(x+h)} - \frac{e^{2x}}{lnx}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{e^{2x+2h}.\,lnx - e^{2x}\,ln(x+h)}{ln(x+h).\,lnx}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{lnx(e^{2x+2h} - e^{2x}) - e^{2x}\{ln(x+h) - lnx\}}{h\,ln(x+h).lnx}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{2x+2h} - e^{2x}}{h\,ln(x+h)} - \frac{e^{2x}}{lnx}\lim_{h\to 0} \frac{ln(x+h) - lnx}{h\,ln(x+h)}$$

$$= e^{2x}\lim_{h\to 0} \frac{e^{2h}-1}{h}.\lim_{h\to 0} \frac{1}{ln(x+h)}$$

$$- \frac{e^{2x}}{lnx}\lim_{h\to 0} \frac{ln(x+h) - lnx}{h}\lim_{h\to 0} \frac{1}{ln(x+h)} \cdots (1)$$

এখন $\lim_{h\to 0} \frac{e^{2h}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\left(1 + \frac{2h}{1!} + \frac{(2h)^2}{2!} + \cdots\right) - 1\right]$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[2h + \frac{2^2 h^2}{2!} + \cdots\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[2 + \frac{2^2 h}{2!} + \cdots\right] = 2 + 0$$

$$= 2 \cdots (2)$$

এবং $\lim_{h\to 0} \frac{ln(x+h) - lnx}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \cdots\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \frac{h^2}{3x^3} - \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{x} - 0 \cdots (3)$$

(2) নং এবং (3) নং এর সাহায্যে (1) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায়

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x}.2\,\frac{1}{ln(x+0)} - \frac{e^{2x}}{lnx}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{ln(x+0)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{2x}}{lnx}\right) = \frac{2e^{2x}}{lnx} - \frac{e^{2x}}{x(lnx)^2}.$$

উদাহরণ-7 : মূল নিয়মে $x^x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনেকরি $y = f(x) = x^x = e^{lnx^x} = e^{xlnx}$

তাহা হইলে $f(x+h) = e^{(x+h)\,ln(x+h)}$

এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{(x+h)\,ln(x+h)} - e^{xlnx}}{h} \cdots (1)$$

ধরি $xlnx = z$ এবং $(x+h)\,ln(x+h) = z + k$

বিয়োগ করিয়া পাই $(x+h)\,ln(x+h) - xlnx = k$

যদি $h \to 0$ হয় তবে $k \to 0$ হয়

$$\therefore (1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{k\to 0} \frac{e^{z+k} - e^z}{k}\frac{k}{h}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{e^z.e^k - e^z}{k}\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\,ln(x+h) - xlnx}{h}$$

$$\frac{x\{ln(x+h) - lnx\} + h\,ln(x+h)}{h}$$



$$= e^z \lim_{k\to 0} \frac{e^k - 1}{k} \lim_{h\to 0} \frac{ln(x+h) - lnx}{h} + \lim_{h\to 0} ln(x+h)$$

$$= e^z\left[\lim_{k\to 0} \frac{e^k - 1}{k} . x \lim_{h\to 0} \right.$$

এখন $\lim_{k\to 0} \frac{e^k - 1}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\left[\left(1 + k + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \cdots\right) - 1\right]$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\left[k + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} \cdots\right]$$

$$= \lim_{k\to 0} \left[1 + \frac{k}{2!} + \frac{k^2}{3!} + \cdots\right] = 1 + 0$$

$$= 1 \cdots (3)$$

এবং $\lim_{h\to 0} \frac{ln(x+h) - lnx}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} ln\Big(1$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \cdots\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \frac{h^2}{3x^3} - \cdots\right] = \frac{1}{x} - 0$$

$$= \frac{1}{x} \cdots (4)$$

(3) নং এবং (4) নং এর সাহায্যে (2) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায়

$$\frac{dy}{dx} = e^z\left[1.x.\frac{1}{x} + ln(x+0)\right]$$

$$\frac{d}{dx}(x^x) = e^{xlnx}[1 + lnx] = e^{lnx^x}[1 + lnx] = x^x[1 + lnx].$$

**উদাহরণ–8 :** মূল নিয়মে $\sin(lnx)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

**সমাধান :** ধরি $y = f(x) = \sin(lnx)$. তবে $f(x+h) = \sin\{ln(x+h)\}$

এখন অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\{ln(x+h)\} - \sin(lnx)}{h}$$



ধরি $lnx = z$ এবং $ln(x+h) = z + k$

বিয়োগ করিয়া পাই $ln(x+h) - lnx = k$

যদি $h \to 0$ হয় তবে $k \to 0$ হয়।

$$\therefore (1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{k\to 0} \frac{\sin(z+k) - \sin z}{k} . \frac{k}{h};$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\sin(z+k) - \sin z}{k} \lim_{h\to 0} \frac{ln(x+h) - lnx}{h} \cdots (2)$$

এখন $\lim_{k\to 0} \frac{\sin(z+k) - \sin z}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{2\cos(z + k/2).\sin(k/2)}{k}$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\sin(k/2)}{k/2} \lim_{k\to 0} \cos\left(z + \frac{k}{2}\right) = 1.\cos z$$

$$= \cos(lnx) \cdots (3)$$

এবং $\lim_{h\to 0} \frac{ln(x+h) - lnx}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \cdots\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \frac{h^2}{3x^3} - \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{x} - 0 \cdots (4)$$

(3) নং এবং (4) নং এর সাহায্যে (2) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায়

$$\frac{dy}{dx} = \cos(lnx).\frac{1}{x} = \frac{\cos(lnx)}{x}$$

**উদাহরণ–9 :** মূল নিয়মে $x = a$ বিন্দুতে $e^{\sin x}$ ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[চঃ বিঃ '84]**

**সমাধান :** ধরি $y = f(x) = e^{\sin x}$ তবে $f(x+h) = e^{\sin(x+h)}$

$\therefore f(a) = e^{\sin a}$ এবং $f(a+h) = e^{\sin(a+h)}$

$$\therefore f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{\sin(a+h)} - e^{\sin a}}{h} \cdots (1)$$

## প্রশ্নমালা [EXERCISE]–4(B)

নিম্নলিখিত ফাংশন গুলোকে মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

1(i). $x^2 + 2x$ [ঢাঃ বিঃ '80] (ii). $5x^3 + \frac{1}{x}$

(iii). $\sqrt{x}$ (iv). $\sqrt{x^2 + a^2}$

(v). $\frac{1}{x^2 + 1}$ [রাঃ বিঃ '70] (vi). $\frac{1}{\sqrt{x}}$

(vii). $x^{1/n}$ (viii). $x^3 + 2x$

2(i). $e^{5x+7}$ (ii) $e^{\sin x}$ [চঃ বিঃ '84]

(iii). $e^{\tan x}$ (iv). $e^{\sqrt{\tan x}}$

(v). $e^{\cos x}$ (vi). $e^{\sin \sqrt{x}}$

(vii). $e^{\sin^{-1}x}$

3(i). $\tan 2x$ (ii). $\tan x^2$

(iii). $\sin x^2$ (iv). $\sin(ax + b)$

(v). $\cos(ax + b)$ (vi). $\sqrt{\cos x}$

4(i). $\log_{10}x$ (ii) $ln(\sin x)$

(iii). $ln\left(\sin \frac{x}{a}\right)$ (iv). $ln(\sin^{-1}x)$

5(i). $x\sin x$ (ii). $x^3 \sin x$

(iii). $x^n \sin ax$ (iv). $x^2 \tan x$

(v). $x ln x$ (vi). $x ln(\cos x)$

6(i). $\frac{\sin x}{x}$ (ii). $\frac{\cos x}{ln x}$

(iii). $\frac{\tan x}{xe^x}$ 7. $x^{\sin x}$

8. $\cos(ln x)$

9(i). সংজ্ঞার সাহায্যে $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে cosx এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

(ii). মূল নিয়মে $x = \frac{\pi}{4}$ বিন্দুতে cotx এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

(iii). মূল নিয়মে $x = 0$ বিন্দুতে $\sin^{-1}x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

(iv). $f(x) = \tan x$ হইলে মূল নিয়মে $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

(v). যদি $f(x) = ln(\cos x)$ হয় তবে মূল নিয়মে $f'(0)$ এর মান নির্ণয় কর।

1(i). $2x+2$

(ii). $15x^2 - \frac{1}{x^2}$

(iii). $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

(iv). $\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

(v). $\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

(vi). $\frac{-1}{2x^{3/2}}$

(vii). $\frac{x^{1/n-1}}{n}$

(viii). $3x^2+2$

2(i). $5e^{5x+7}$

(ii). $\cos x.\ e^{\sin x}$

(iii). $\sec^2 x.\ e^{\tan x}$

(iv). $\frac{e^{\sqrt{\tan x}} \sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$

(v). $-e^{\cos x} \sin x$

(vi). $\frac{e^{\sin\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

(vii). $\frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$

3(i). $2\sec^2 2x$

(ii). $2x \sec^2 x^2$

(iii). $2x \cos x^2$

(iv). $a\cos(ax+b)$

(v). $-a\sin(ax+b)$

(vi). $\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

4(i). $\frac{\log_{10}e}{x}$

(ii). $\cot x$

(iii). $\frac{1}{a}\cot\frac{x}{a}$

(iv). $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\ \sin^{-1}x}$

5(i). $x\cos x + \sin x$

(ii). $x^3\cos x + 3x^2 \sin x$

(iii). $ax^n \cos ax + nx^{n-1} \sin ax$

(iv). $x^2\sec^2 x + 2x\tan x$

(v). $1 + \ln x$

(vi). $-x\tan x + \ln(\cos x)$.

6(i). $\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$

(ii). $\frac{-\sin x}{\ln x} - \frac{\cos x}{x(\ln x)^2}$

(iii). $\frac{\sec^2 x}{xe^x} - \frac{(x+1)\tan x}{x^2 e^x}$

7. $x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x.\ \ln x\right]$

8(i). $-1$

(ii). $-2$

(iii). 1

(iv). 2

(v). 0.