A new brand PDF to Word

Ultra-Precision text recognition,High-Fidelity layout restoration

Restore a picture-formatted document to a high-quality Word document.You can recognize text, restore fonts, font sizes, stamps, tables, pictures, and be consistent with the source file.Multi-language recognition processing is supported.

You can edit the text and the table directly in the recognized document , thus greatly improve office efficiency.Come and try it!

	New version	Past Versions
Restore fonts	Yes	No
Restore font size	Yes	No
Restore stamps	Yes	No
Restore tables	Yes	No
Restore pictures	Yes	No
Preview the results	Yes	No
Edit freely	Yes	No

দ্বিতীয় অধ্যায় [CHAPTER TWO]
দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ [SECTION TWO]
ফাংশনের লেখচিত্র, ডোমেন এবং রেঞ্জ
[GRAPH, DOMAIN AND RANGE OF A FUNCTION]

2-2.1. ভূমিকা [Introduction] :

লেখচিত্র হইল ফাংশনের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা। $y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র অংকনের জন্য O বিন্দুতে পরস্পর ছেদী লম্ব দুইটি সরলরেখা XOX' এবং YOY' লই। O কে মূলবিন্দু, XOX' কে x অক্ষ এবং YOY' কে y অক্ষ বলা হয়।

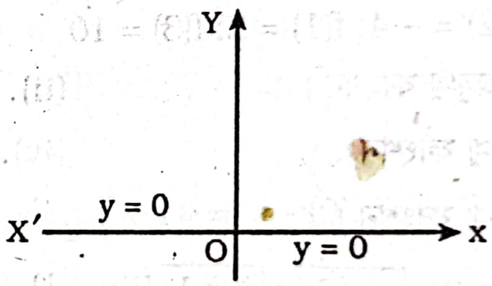
$y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র অংকনের জন্য $a \le x \le b$ ব্যবধিতে স্বাধীন চলক x এবং অধীন চলক y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করিতে হয়। অতঃপর তালিকার সীমিত সংখ্যক বিন্দুগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করিতে হয়। প্রাপ্ত বিন্দুগুলোকে সরলরেখা অথবা বক্ররেখা দ্বারা যুক্ত করিলে $y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র পাওয়া যায়।

বিঃ দ্রঃ সরল রেখার লেখচিত্র অংকনের জন্য কমপক্ষে দুইটি বিন্দু এবং বক্ররেখার লেখচিত্র অংকনের জন্য কমপক্ষে তিনটি বিন্দুর প্রয়োজন হয়।

2-2.2. নিম্নে কতকগুলো প্রয়োজনীয় এবং পরিচিত সমীকরণ সম্পর্কে আলোচনা করা হইল, যাহা লেখচিত্র অংকনে সহায়ক হইবে।

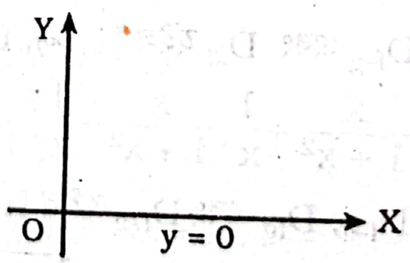
(i). $y = f(x) = 0$ এর লেখচিত্র অংকন :

সমাধান : $y = 0$ এর লেখচিত্র x অক্ষ। কারণ x অক্ষের উপর $y = 0$ হয়।



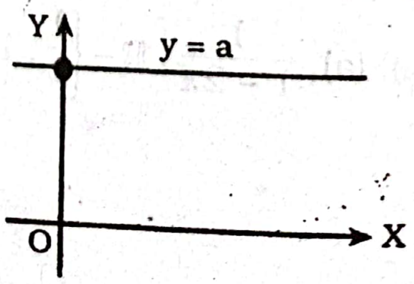
(ii). $y = f(x) = 0,\ x \ge 0$ এর লেখচিত্র অংকন :

সমাধান : $x \ge 0$ ব্যবধিতে $y = 0$ এর লেখচিত্র x অক্ষের ধনাত্মক দিক।

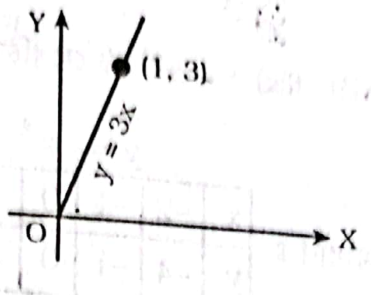


(iii). $y = f(x) = a$ এর লেখচিত্র অংকন :

সমাধান : $y = a$ সরল রেখাটি $(0, a)$ বিন্দুগামী এবং x অক্ষের সমান্তরাল।



(iv). $y = f(x) = 3x$ রেখার লেখচিত্র অংকন ঃ



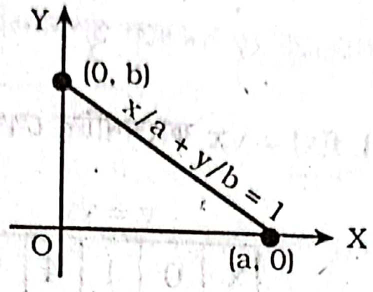
সমাধান ঃ

$y = 3x$

x	0	1	2
y	0	3	6

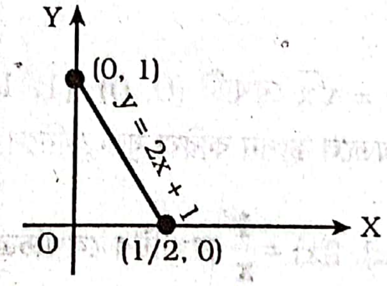
$y = 3x$ সরল রেখাটি (0, 0), (1, 3) বিন্দুগামী।

(v). $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরল রেখার লেখচিত্র অংকন ঃ



সমাধান ঃ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরল রেখাটি (a, 0) এবং (0, b) বিন্দুগামী।

(vi). $f(x) = -2x + 1$ রেখার লেখচিত্র অংকন ঃ



সমাধান ঃ ধরি $y = -2x + 1$

বা $2x + y = 1$

বা $\frac{x}{1/2} + \frac{y}{1} = 1$ সরল রেখাটি $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ এবং (0, 1) বিন্দুগামী।

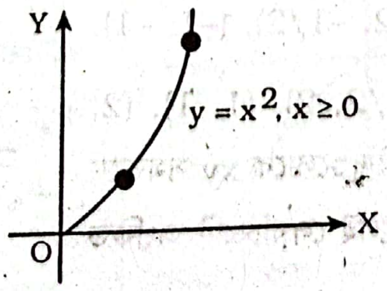
(vii). $f(x) = x^2$, $x \geq 0$ এর লেখচিত্র অংকন ঃ

সমাধান ঃ

$y = x^2, x \geq 0$

x	0	1	2
y	0	1	4

$y = x^2$ বক্ররেখাটি (0, 0), (1, 1), (2, 4) বিন্দুগামী। এই বন্দুগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করিয়া যুক্ত করিলেই লেখচিত্রটি অংকিত হয়।



দ্বিতীয় অধ্যায় [CHAPTER TWO]
দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ [SECTION TWO]
ফাংশনের লেখচিত্র, ডোমেন এবং রেঞ্জ
[GRAPH, DOMAIN AND RANGE OF A FUNCTION]

2-2.1. ভূমিকা [Introduction] ঃ

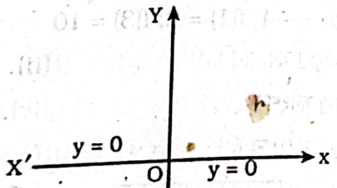
লেখচিত্র হইল ফাংশনের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা। $y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র অংকনের জন্য O বিন্দুতে পরস্পর ছেদী লম্ব দুইটি সরলরেখা XOX' এবং YOY' লই। O কে মূলবিন্দু, XOX' কে x অক্ষ এবং YOY' কে y অক্ষ বলা হয়।

$y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র অংকনের জন্য $a \le x \le b$ ব্যবধিতে স্বাধীন চলক x এবং অধীন চলক y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করিতে হয়। অতঃপর তালিকার সীমিত সংখ্যক বিন্দুগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করিতে হয়। প্রাপ্ত বিন্দুগুলোকে সরলরেখা অথবা বক্ররেখা দ্বারা যুক্ত করিলে $y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র পাওয়া যায়।

বিঃ দ্রঃ সরল রেখার লেখচিত্র অংকনের জন্য কমপক্ষে দুইটি বিন্দু এবং বক্ররেখার লেখচিত্র অংকনের জন্য কমপক্ষে তিনটি বিন্দুর প্রয়োজন হয়।

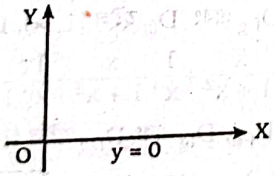
2-2.2. নিম্নে কতকগুলো প্রয়োজনীয় এবং পরিচিত সমীকরণ সম্পর্কে আলোচনা করা হইল, যাহা লেখচিত্র অংকনে সহায়ক হইবে।

(i). $y = f(x) = 0$ এর লেখচিত্র অংকন ঃ



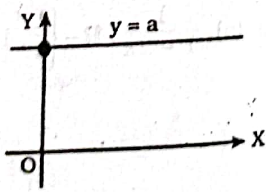
সমাধান ঃ $y = 0$ এর লেখচিত্র x অক্ষ। কারণ x অক্ষের উপর $y = 0$ হয়।

(ii). $y = f(x) = 0, x \ge 0$ এর লেখচিত্র অংকন ঃ



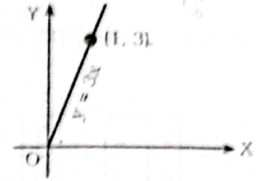
সমাধান ঃ $x \ge 0$ ব্যবধিতে $y = 0$ এর লেখচিত্র x অক্ষের ধনাত্মক দিক।

(iii). $y = f(x) = a$ এর লেখচিত্র অংকন ঃ



সমাধান ঃ $y = a$ সরল রেখাটি $(0, a)$ বিন্দুগামী এবং x অক্ষের সমান্তরাল।

(iv). $y = f(x) = 3x$ রেখার লেখচিত্র অংকন ঃ



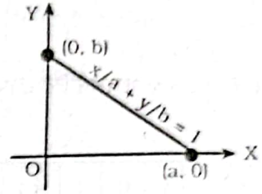
সমাধান ঃ

$y = 3x$

x	0	1	2
y	0	3	6

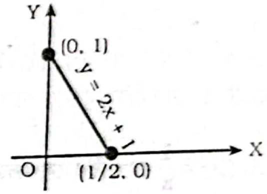
$y = 3x$ সরল রেখাটি $(0, 0), (1, 3)$ বিন্দুগামী।

(v). $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরল রেখার লেখচিত্র অংকন ঃ



সমাধান ঃ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরল রেখাটি $(a, 0)$ এবং $(0, b)$ বিন্দুগামী।

(vi). $f(x) = -2x + 1$ রেখার লেখচিত্র অংকন ঃ



সমাধান ঃ ধরি $y = -2x + 1$

বা $2x + y = 1$

বা $\frac{x}{1/2} + \frac{y}{1} = 1$ সরল রেখাটি $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ এবং $(0, 1)$ বিন্দুগামী।

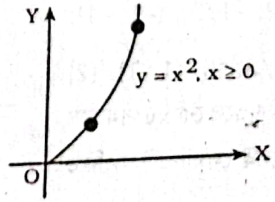
(vii). $f(x) = x^2, x \ge 0$ এর লেখচিত্র অংকন ঃ

সমাধান ঃ

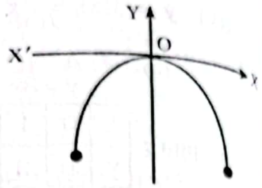
$y = x^2, x \ge 0$

x	0	1	2
y	0	1	4

$y = x^2$ বক্ররেখাটি $(0, 0), (1, 1), (2, 4)$ বিন্দুগামী। এই বিন্দুগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করিয়া যুক্ত করিলেই লেখচিত্রটি অংকিত হয়।



(viii). $f(x) = -x^2$ এর লেখচিত্র অংকন ঃ



সমাধান ঃ

$y = -x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	−4	−1	0	−1	−4

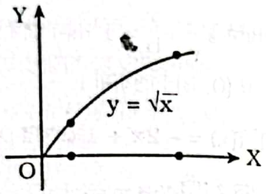
$y = -x^2$ রেখাটি (−2, −4), (−1, −1), (0, 0), (1, −1) এবং (2, −4) বিন্দু... এই বিন্দুগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করিয়া যুক্ত করিলেই উপরের লেখচিত্রটি অংকিত...

(ix). $f(x) = \sqrt{x}$ ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন ঃ [NUH-20...

সমাধান ঃ

$y = \sqrt{x}$

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3



$y = \sqrt{x}$ রেখাটি (0, 0), (1, 1), (4, 2) এবং (9, 3) বিন্দুগামী। এই বিন্দুগু... xy সমতলে স্থাপন করিয়া যুক্ত করিলে উপরের লেখচিত্রটি অংকিত হয়।

(x). $f(x) = \frac{1}{x}$ রেখাটির লেখচিত্র অংকন ঃ

সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = \frac{1}{x}$

$\therefore f(0) = \frac{1}{0}$ অনির্ণেয়।

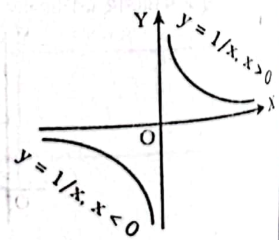
$y = 1/x;\ x < 0$

x	−2	−1	−1/2	−1/3
y	−1/2	−1	−2	−3

$y = 1/x;\ x > 0$

x	1/3	1/2	1	2
y	3	2	1	1/2

$y = \frac{1}{x}$ রেখাটি (−2, −1/2), (−1, −1), (−1/2, −2) এবং (1/2, 2), (1, 1), (2, 1/2) বিন্দুগামী। এই বিন্দুগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করিয়া যুক্ত করিলেই লেখচিত্রটি অংকিত হয়।



(xi). $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ফাংশনের লেখচিত্র অংকন ঃ

সমাধান ঃ মনেকরি $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$

$\therefore f(0) = \frac{1}{0}$ যাহা অনির্ণেয়।

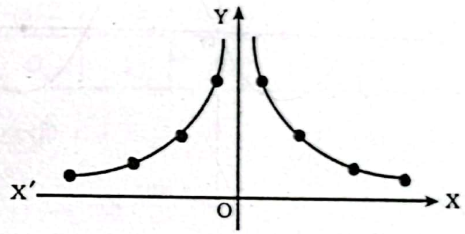
$y = 1/x^2,\ x < 0$

x	−3	−2	−1	−1/2
y	1/9	1/4	1	4

$y = 1/x^2,\ x > 0$

x	1/2	1	2	3
y	4	1	1/4	1/9

$y = \frac{1}{x^2}$ রেখাটি (−3, 1/9), (−2, 1/4), (−1, 1), (−1/2, 4) এবং (1/2, 4), (1, 1), (2, 1/4), (3, 1/9) বিন্দুগামী। এই বিন্দুগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করিয়া যুক্ত করিলেই নিম্নের লেখচিত্র অংকিত হয়।

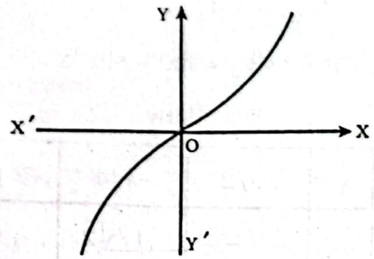


(xii). $f(x) = x^3$ ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন ঃ

সমাধান ঃ ধরি $y = x^3$

x	−2	−1	0	1	2
y	−8	−1	0	1	8

$\therefore y = x^3$ রেখাটি (−2, −8), (−1, −1), (0, 0), (1, 1) এবং (2, 8) বিন্দুগামী। এই বিন্দুগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করিয়া যুক্ত করিলে লেখচিত্র অংকিত হয়।



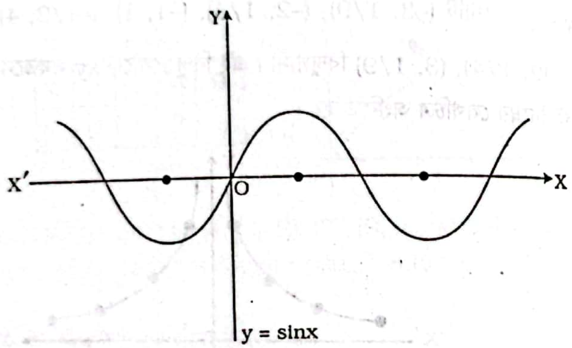
বিঃ দ্রঃ অনুরূপভাবে $f(x) = x^5$ এর লেখচিত্র অংকন করা যায়।

(xiii). f(x) = sinx এর লেখচিত্র অংকন ঃ

সমাধান ঃ ধরি $y = \sin x$

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y	0	−1	0	1	0	−1	0

$\therefore$ $y = \sin x$ রেখাটি ... $(-\pi, 0)$, $(-\pi/2, -1)$, $(0, 0)$, $(\pi/2, 1)$, $(\pi, 0)$, $(3\pi/2, -1)$ এবং $(2\pi, 0)$ ... বিন্দুগামী। এই বিন্দুগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করিয়া যুক্ত করিলে নিম্নের লেখচিত্রটি অংকিত হয়।



এখানে $D_f = \mathbf{R}$ এবং $R_f = [-1, 1]$

$y = \sin x$ ফাংশনটি এক-এক নয়।

বিঃ দ্রঃ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে $y = \sin x$ ফাংশনটি এক-এক।

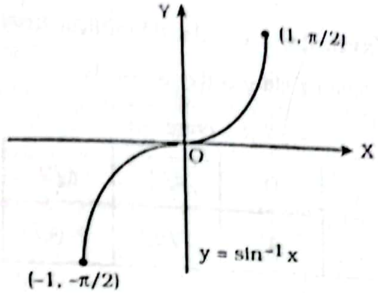
(xiv). $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **ব্যবধিতে $f(x) = \sin^{-1}x$ ফাংশনের লেখচিত্র অংকন ঃ**

সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = \sin^{-1}x$

বা $x = \sin y$

y	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
x	−1	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	1

$\therefore$ $y = \sin^{-1}x$ রেখাটি $\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, -\frac{\pi}{4}\right)$, $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\right)$ এবং $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ বিন্দুগামী। এই বিন্দুগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করিয়া যুক্ত করিলে লেখচিত্রটি অংকিত হয়।



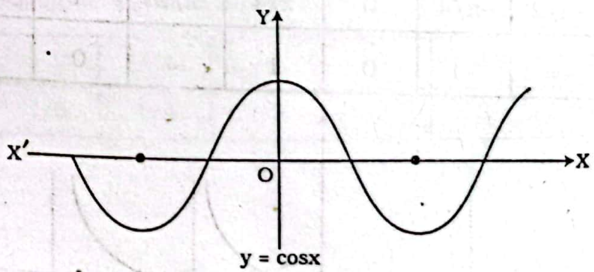
$\therefore D_f = [-1, 1]$ এবং $R_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(xv). f(x) = cosx ফাংশনের লেখচিত্র অংকন ঃ

সমাধান ঃ ধরি $y = \cos x$

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y	−1	0	1	0	−1	0	1

$\therefore$ $y = \cos x$ রেখটি $(-\pi, -1)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $(0, 1)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $(\pi, -1)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ এবং $(2\pi, 1)$ বিন্দুগামী। এই বিন্দুগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করিয়া যুক্ত করিলে নিম্নের লেখচিত্রটি অংকিত হয়।



এখানে $D_f = \mathbf{R}$ এবং $R_f = [-1, 1]$

এইক্ষেত্রে $f(x) = \cos x$ ফাংশন এক-এক নয়।

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে $f(x) = \cos x$ ফাংশন এক-এক।

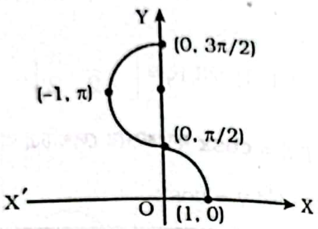
(xvi). $f(x) = \cos^{-1}x$ এর লেখচিত্র অংকন ঃ

সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = \cos^{-1}x$

বা $x = \cos y$

y	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	1	$1/\sqrt{2}$	0	-1	0	1

$y = \cos^{-1}x$ রেখাটি $(1, 0)$, $(1/\sqrt{2}, \pi/4)$, $(0, \pi/2)$, $(-1, \pi)$ এবং $(0, 3\pi/2)$ বিন্দুগামী। এই বিন্দুগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করিয়া যুক্ত করিলে লেখচিত্রটি অংকিত হয়।



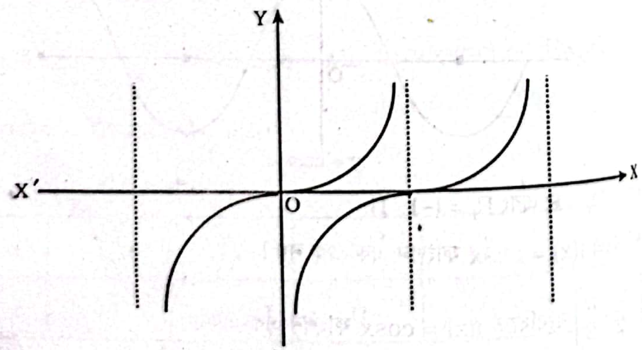
(xvii). $f(x) = \tan x$ এর লেখচিত্র অংকন ঃ

সমাধান ঃ ধরি $y = \tan x$

এখানে $D_f = \mathbf{R} - \left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots\right\}$ এবং $R_f = (-\infty, \infty)$

$y = \tan x$

x	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
y	$-\infty$	-1	0	1	∞	0	∞



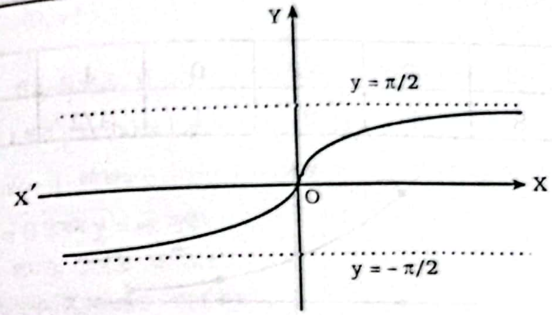
y = tanx

(xviii). $f(x) = \tan^{-1}x$ এর লেখচিত্র অংকন ঃ

সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = \tan^{-1}x$

$\therefore x = \tan y$

y	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
x	$-\infty$	-1	0	1	∞



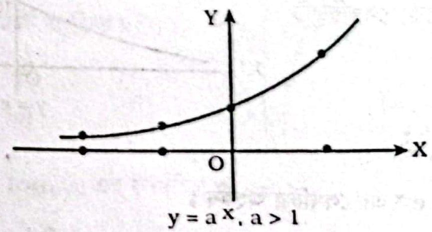
এখানে $D_f = (-\infty, \infty)$ এবং $R_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(xix). $f(x) = a^x$, $a > 1$ এর লেখচিত্র অংকন ঃ **[NUH–2002]**

সমাধান ঃ মনেকরি $y = f(x) = a^x$, $a > 1$

যেহেতু $a > 1$, কাজেই $a = 2 > 1$ ধরিয়া প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অংকনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি।

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	1/8	1/4	1/2	1	2	4



এখানে $D_f = (-\infty, \infty)$ এবং $R_f = (0, \infty)$.

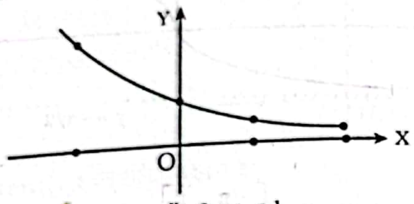
(xx). $f(x) = a^x; 0 < a < 1$ এর লেখচিত্র অংকন ঃ [NUH-2004]

সমাধান ঃ মনেকরি $y = f(x) = a^x, 0 < a < 1$

যেহেতু $0 < a < 1$ কাজেই $a = \frac{1}{2}$ বিবেচনা করিয়া প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অংকনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি।

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	−3	−2	−1	0	1	2
y	8	4	2	1	1/2	1/4



$y = a^x, 0 < a < 1$

এখানে $D_f = (-\infty, \infty)$ এবং $R_f = (0, \infty)$.

(xxi). $f(x) = e^x$ এর লেখচিত্র অংকন ঃ

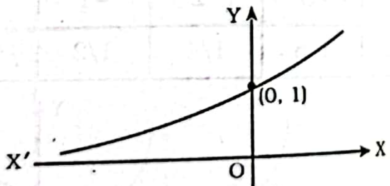
সমাধান ঃ মনেকরি $y = f(x) = e^x$

যেহেতু $2 < e < 3$ কাজেই $y = e^x$ ফাংশনটি একমুখী বৃদ্ধি প্রাপ্ত।

যখন $x = 0$ তখন $y = e^0 = 1$. কাজেই রেখাটি (0, 1) বিন্দুগামী।

যখন $x = -\infty$ তখন $y = 0$.

সুতরাং – ve x অক্ষ প্রদত্ত রেখার অসীমতট। ডানদিকে লেখচিত্রটি অংকিত হইল।



$y = e^x$

এখানে $D_f = (-\infty, \infty)$

এবং $R_f = (0, \infty)$.

(xxii). $f(x) = e^{-x}$ এর লেখচিত্র অংকন ঃ

সমাধান ঃ মনেকরি $y = f(x) = e^{-x}$

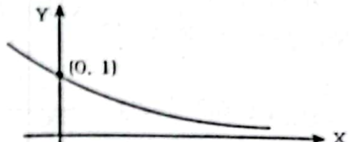
যখন $x = 0$ তখন $y = e^0 = 1$. সুতরাং রেখাটি (0, 1) বিন্দুগামী।

যখন $x = \infty$ তখন $y = e^{-\infty} = 0$.

সুতরাং + ve x অক্ষ প্রদত্ত রেখার অসীমতট।

$\therefore y = e^{-x}$ ফাংশনটি হ্রাস প্রাপ্ত।

ডানদিকে লেখচিত্রটি অংকিত হইল।



$y = e^{-x}$

এখানে $D_f = (-\infty, \infty)$

এবং $R_f = (0, \infty)$

(xxiii). $f(x) \log_a x, 0 < a < 1$ এর লেখচিত্র অংকন ঃ

সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = \log_a x, 0 < a < 1.$

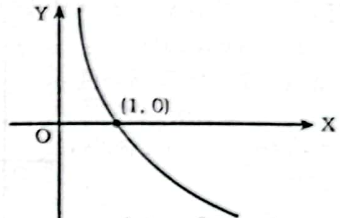
যেহেতু $a^0 = 1$ কাজেই $y = \log_a 1 = 0$. সুতরাং রেখাটি (1, 0) বিন্দুগামী।

যখন $x = 0$ তখন $y = \infty$. সুতরাং + ve y অক্ষ প্রদত্ত রেখার অসীমতট।

$y = \log_a x$ ফাংশনটি হ্রাসপ্রাপ্ত। ডানদিকে লেখচিত্রটি অংকিত হইল।

এখানে $D_f = (0, \infty)$

এবং $R_f = (-\infty, \infty)$



$y = \log_a x, 0 < a < 1$

(xxiv). $f(x) = \log_a x, a > 1$ এর লেখচিত্র অংকন ঃ

সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = \log_a x, a > 1$

যেহেতু $a^0 = 1$ কাজেই $y = \log_a 1 = 0$. সুতরাং রেখাটি (1, 0) বিন্দুগামী।

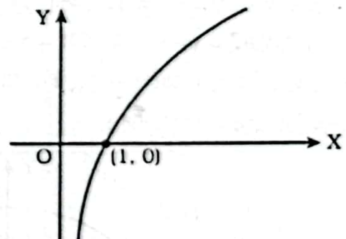
যখন $x = 0$ তখন $y = -\infty$. সুতরাং –ve y অক্ষ হইল প্রদত্ত রেখার অসীমতট।

$y = \log_a x, a > 1$ রেখাটি বৃদ্ধিপ্রাপ্ত।

ডানদিকে লেখচিত্রটি অংকিত হইল।

এখানে $D_f = (0, \infty)$

এবং $R_f = (-\infty, \infty)$



$y = \log_a x, a > 1$

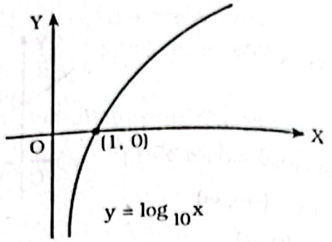
(xxv). $f(x) = \log_{10} x$ এর লেখচিত্র অংকন ঃ

সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = \log_{10} x$

যেহেতু $10^0 = 1$ কাজেই $y = \log_{10} 1 = 0$. সুতরাং রেখাটি (1, 0) বিন্দুগামী।

যখন $x = 0$ তখন $y = -\infty$. সুতরাং –ve y অক্ষ হইল প্রদত্ত রেখার অসীমতট।

$\therefore$ $y = \log_{10}x$ রেখাটি বৃদ্ধিপ্রাপ্ত। ডানদিকে রেখাটির লেখচিত্র অংকন করা হইল।



এখানে $D_f = (0, \infty)$

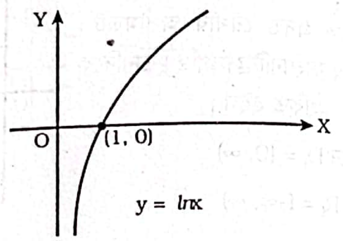
এবং $R_f = (-\infty, \infty)$.

(xxvi). $f(x) = \ln x$ এর লেখচিত্র অংকন ঃ

সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = \ln x$.

যেহেতু $e^0 = 1$ কাজেই $y = \ln 1 = 0$. সুতরাং রেখাটি (1, 0) বিন্দুগামী।

যখন $x = 0$ তখন $y = \ln 0 = -\infty$. সুতরাং –ve y অক্ষ প্রদত্ত রেখার অসীমতট। $\therefore$ $y = \ln x$ রেখাটি বৃদ্ধিপ্রাপ্ত। ডানদিকে রেখাটির লেখচিত্র অংকন করা হইল।



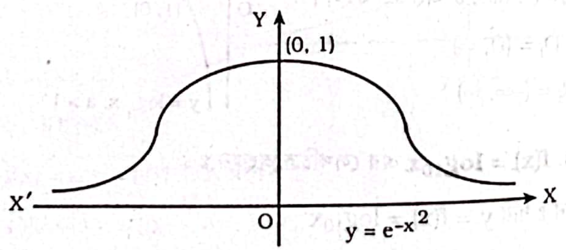
এখানে $D_f = (0, \infty)$

এবং $R_f = (-\infty, \infty)$.

(xxvii). $f(x) = e^{-x^2}$ এর লেখচিত্র অংকন ঃ [NUH-2004]

সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = e^{-x^2}$

যখন $x = 0$ তখন $y = e^0 = 1$. সুতরাং রেখাটি (0, 1) বিন্দুগামী। যখন $x = \pm\infty$ তখন $y = e^{-\infty} = 0$. কাজেই – ve x অক্ষ এবং + ve x অক্ষ প্রদত্ত রেখাটির অসীমতট। রেখাটি y অক্ষের সাথে প্রতিসম। অর্থাৎ y অক্ষের ডানে এবং বামে দেখিতে এক রকম। নিচে রেখাটির লেখচিত্র অংকন করা হইল।



এখানে $D_f = (-\infty, \infty)$ এবং $R_f = (0, 1)$.

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

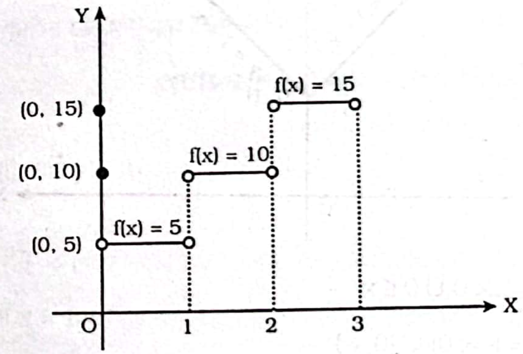
উদাহরণ-1 ঃ নিম্নলিখিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর ঃ

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 10 & \text{যখন } 1 < x \leq 2 \\ 15 & \text{যখন } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [DUH-1980]

সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = \begin{cases} 5 & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 10 & \text{যখন } 1 < x \leq 2 \\ 15 & \text{যখন } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

প্রদত্ত ফাংশনটি তিন খন্ডে সংজ্ঞায়িত, রেখার প্রথম খণ্ড (0, 5) বিন্দুগামী এবং x অক্ষের সমান্তরাল $0 < x < 1$ ব্যবধিতে অবস্থান করে। দ্বিতীয় খন্ড (0, 10) বিন্দুগামী এবং x অক্ষের সমান্তরাল $1 < x \leq 2$ ব্যবধিতে অবস্থান করে, তৃতীয় খন্ড (0, 15) বিন্দুগামী এবং x অক্ষের সমান্তরাল $2 < x \leq 3$ ব্যবধিতে অবস্থান করে।



এখানে $D_f = 0 < x < 1 \cup 1 < x \leq 2 \cup 2 < x \leq 3$

$= (0, 1) \cup (1, 2] \cup (2, 3]$

$= (0, 3] - \{1\}$

এবং $R_f = \{5, 10, 15\}$.

উদাহরণ-2 : নিম্নলিখিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর :

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{যখন } x \geq 0 \\ 1-x & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি $y = f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{যখন } x \geq 0 \\ 1-x & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$

প্রদত্ত ফাংশনটি দুই খন্ডে সংজ্ঞায়িত। লেখচিত্র অংকনের জন্য x এবং y এর মান গুলোর তালিকা তৈরী করি।

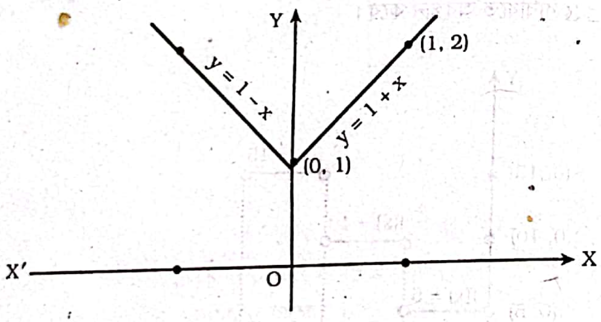
$y = 1+x; x \geq 0$

x	0	1	2
y	1	2	3

$y = 1-x; x < 0$

x	-2	-1	-.1
y	3	2	1.1

$y = 1 + x$ রেখাটি (0, 1), (1, 2), (2, 3) বিন্দুগামী এবং $y = 1 - x$ রেখাটি (-.1, 1.1), (-1, 2), (-2, 3) বিন্দুগামী। নিম্নে লেখচিত্রটি অংকন করা হইল।



এখানে $D_f = x < 0 \cup 0 \leq x$

$= (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$

$= (-\infty, \infty)$

আবার $x \geq 0$ ব্যবধিতে $f(x) \in [1, \infty)$

$x < 0$ ব্যবধিতে $f(x) \in (1, \infty)$

$\therefore R_f = [1, \infty) \cup (1, \infty) = [1, \infty)$.

উদাহরণ-3 : (i). নিম্নবর্ণিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{যখন } |x| > 1 \\ 1+x & \text{যখন } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{যখন } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [NUS–1997]

(ii). নিম্নবর্ণিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর :

$$f(x) = \begin{cases} 3+2x & \text{যখন } -3/2 \leq x < 0 \\ 3-2x & \text{যখন } 0 \leq x \leq 3/2 \\ 3+2x & \text{যখন } 3/2 \leq x \end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(iii). নিম্নবর্ণিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর :

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{যখন } x < 0 \\ x & \text{যখন } 0 \leq x \leq 1 \\ 1/x & \text{যখন } 1 < x \end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

[NUH–2005, DUH–1986, 1988, NUS–1996]

সমাধান : (i). ধরি $y = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{যখন } x > 1 \text{ এবং } x < -1 \\ 1+x & \text{যখন } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{যখন } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

প্রদত্ত ফাংশনটি তিনখন্ডে সংজ্ঞায়িত। প্রথম খন্ড $y = 0$ এর লেখচিত্র x অক্ষ। ইহার এলাকা $x > 1$ এবং $x < -1$.

অপর দুই খন্ডের লেখচিত্রের জন্য x এবং y এর মান গুলোর তালিকা তৈরী করি।

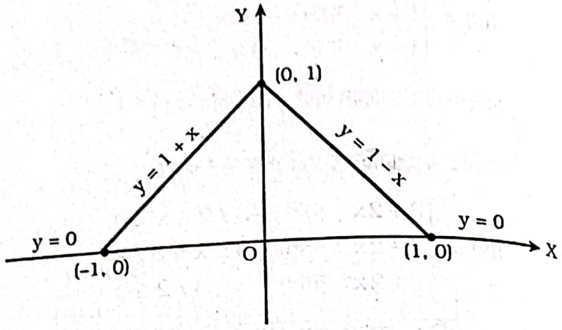
$y = 1+x, -1 \leq x \leq 0$

x	-1	-1/2	0
y	0	1/2	1

$y = 1-x, 0 < x \leq 1$

x	1/4	1/2	1
y	3/4	1/2	0

উপরোক্ত তালিকার মানগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করিয়া যুক্ত করিলেই নিম্নের লেখচিত্রটি অংকিত হয়।



এখানে $D_f = x < -1 \cup 1 < x \cup -1 \le x \le 0 \cup 0 < x \le 1$

$= (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \cup [-1, 0] \cup (0, 1]$

$= (-\infty, \infty)$

এবং $R_f = \{0\} \cup [0, 1] \cup \{0\} = [0, 1]$.

সমাধান ঃ (ii). ধরি $y = f(x) = \begin{cases} 3 + 2x & \text{যখন } -3/2 \le x < 0 \\ 3 - 2x & \text{যখন } 0 \le x < 3/2 \\ 3 + 2x & \text{যখন } 3/2 \le x \end{cases}$

ফাংশনটি তিনখন্ডে সংজ্ঞায়িত। ইহার লেখচিত্র অংকনের জন্য x এবং y এর মানগু
তালিকা তৈরী করি।

$y = 3 + 2x, -3/2 \le x < 0$

x	−3/2	−1	−1/2
y	0	1	2

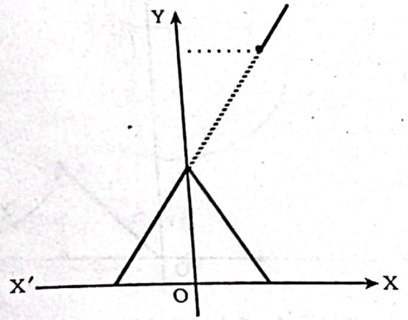
$y = 3 - 2x, 0 \le x < 3/2$

x	0	1/2	3/2
y	3	2	0

$y = 3 + 2x, 3/2 \le x$

x	3/2	2	3
y	6	7	9

উপরের তালিকার মানগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করিয়া যুক্ত করিলেই নিম্নের লেখচিত্র অংকিত হয়।



এখানে $D_f = -3/2 \le x\ 0 \cup 0 \le x < 3/2 \cup 3/2 \le x$

$= [-3/2, 0) \cup [0, 3/2) \cup [3/2, \infty)$

$= [-3/2, \infty)$

এবং $R_f = [0, 3) \cup (0, 3] \cup [6, \infty)$

$= [0, 3] \cup [6, \infty)$.

সমাধান ঃ (iii). মনেকরি $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{যখন } x < 0 \\ x & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \\ 1/x & \text{যখন } 1 < x \end{cases}$

প্রদত্ত ফাংশনটি তিনখন্ডে সংজ্ঞায়িত। লেখচিত্র অংকনের জন্য x এবং y এর মানগু
তালিকা তৈরী করি।

$y = x^2 + 1, x < 0$

x	−1	−1/2	−1/4
y	2	5/4	17/16

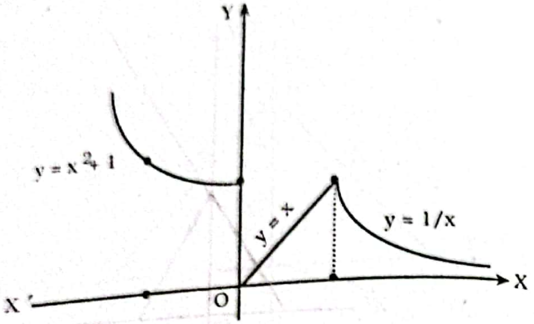
$y = x, 0 \le x \le 1$

x	0	1/2	1
y	0	1/2	1

$y = 1/x, 1 < x$

x	4/3	2	3
y	3/4	1/2	1/

উপরের তালিকায় মানগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করিয়া যুক্ত করিলেই নিম্নের লেখচিত্র অংকিত হয়।



এখানে $D_f = x < 0 \cup 0 \le x \le 1 \cup 1 < x$

$= (-\infty, 0) \cup [0, 1] \cup (1, \infty)$

$= (-\infty, \infty)$

এবং $R_f = (1, \infty) \cup [0, 1] \cup (0, 1)$

$= [0, \infty)$.

উদাহরণ-4(i) ঃ নিম্নে বর্ণিত ফাংশনের লেখচিত্র অংকন কর এবং উহার ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} \; ; x \neq 0 \\ 0 \; ; x = 0 \end{cases}$$ **[NU(Pass)-200**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে [Given that]

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} \; ; x \neq 0 \text{ অর্থাৎ } x < 0 \text{ অথবা } x > 0 \\ 0 \; ; x = 0 \end{cases}$$

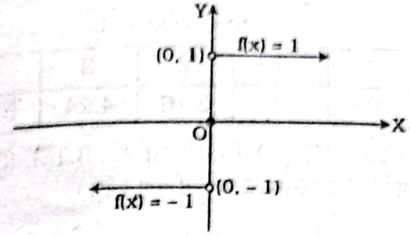
যদি $x < 0$ হয়, তবে $f(x) = \dfrac{x}{|x|} = \dfrac{x}{-x} = -1$

যদি $x > 0$ হয়, তবে $f(x) = \dfrac{x}{|x|} = \dfrac{x}{x} = 1$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -1 \text{ যখন } x < 0 \\ 1 \text{ যখন } x > 0 \\ 0 \text{ যখন } x = 0 \end{cases}$$

প্রদত্ত ফাংশনটি তিনখন্ডে সংজ্ঞায়িত, রেখার প্রথম খন্ড $(0, -1)$ বিন্দুগামী এ x অক্ষের সমান্তরাল, $-\infty < x < 0$ ব্যবধিতে অবস্থান করে।

রেখার দ্বিতীয় খন্ড $(0, 1)$ বিন্দুগামী এবং x অক্ষের সমান্তরাল $0 < x < \infty$ ব্যবধিতে অবস্থান করে। তৃতীয় খন্ড হইল মূলবিন্দু $(0, 0)$.



এখানে $D_f = -\infty < x < 0 \cup 0 < x < \infty \cup \{0\}$

$= (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \cup \{0\}$

$= (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

এবং $R_f = \{-1, 0, 1\}$.

উদাহরণ-4(ii) ঃ নিম্নবর্ণিত ফাংশনগুলোর লেখচিত্র অংকন কর ঃ

(ক) $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$ (খ) $\phi(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$ **[NUH(NM)–2007]**

সমাধান-(ক) ঃ দেওয়া আছে $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$ ... (1)

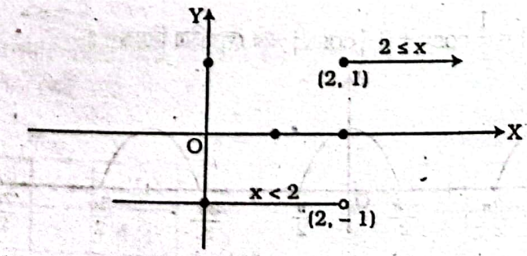
যখন $x < 2$ তখন $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2} = \dfrac{-(x-2)}{x-2} = -1$

যখন $x \ge 2$ তখন $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2} = \dfrac{x-2}{x-2} = 1$

$$\therefore (1) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -1 \text{ যখন } x < 2 \\ 1 \text{ যখন } x \ge 2 \end{cases}$$

প্রদত্ত ফাংশনটি দুইখন্ডে সংজ্ঞায়িত, রেখার প্রথম খন্ড $(2, -1)$ বিন্দুগামী এবং x অক্ষের সমান্তরাল $-\infty < x < 2$ ব্যবধিতে অবস্থান করে।

দ্বিতীয় খন্ড $(2, 1)$ বিন্দুগামী এবং x অক্ষের সমান্তরাল $2 \le x < \infty$ ব্যবধিতে অবস্থান করে।



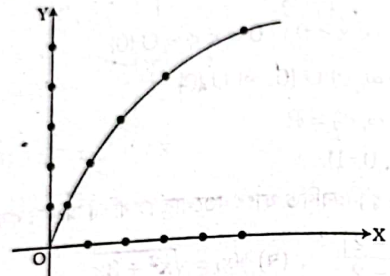
সমাধান-(খ) ঃ দেওয়া আছে $\phi(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$

লেখচিত্র অংকনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা তৈরী করি।

$$\phi(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$$

x	0	1	2	3	4	5
y	0	2	3.16	4.24	5.29	6.32

$\phi(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$ রেখাটি (0, 0), (1, 2), (2, 3.16), (3, 4.24), (4, 5.29), (5, 6.32) ... বিন্দুগামী। নিম্নে লেখচিত্র অংকন করা হইল।



উদাহরণ-(iii) ঃ নিম্নবর্ণিত ফাংশনগুলোর লেখচিত্র অংকন কর ঃ

(ক) $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}|\cos x|$

(খ) $f(x) = \sqrt{x-5} + 1$ **[NUH(NM)-20**

সমাধান-(ক) ঃ আমরা জানি $\left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right), \ldots$ ব্যবধিতে $\cos x < 0$ এবং $|\cos x| = -\cos x$. কাজেই এই সকল ব্যবধিতে

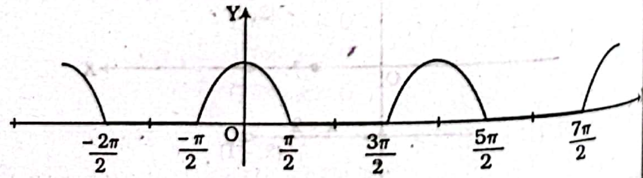
$$f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}|\cos x| = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos x = 0$$

আবার $\left(\frac{-5\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}\right), \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right), \ldots$ ব্যবধিতে $\cos x > 0$

$|\cos x| = \cos x$

কাজেই এই সকল ব্যবধিতে $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x = \cos x.$

সুতরাং $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}|\cos x|$ এর লেখচিত্র নিম্নরূপ ঃ



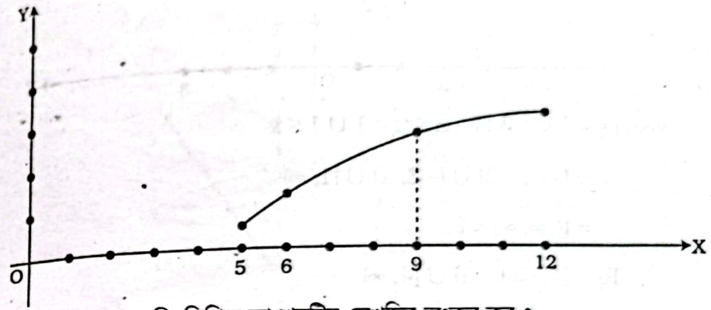
সমাধান-(খ) ঃ দেওয়া আছে $f(x) = \sqrt{x-5} + 1$

প্রদত্ত রেখার লেখচিত্র অংকনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা তৈরী করি।

$$f(x) = \sqrt{x-5} + 1;\ x \geq 5$$

x	5	6	9	12
y	1	2	3	3.65

উপরের তালিকার মানগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করিয়া যুক্ত করিলে নিম্নের লেখচিত্র অংকিত হয়।



উদাহরণ-4(iv) ঃ নিম্নলিখিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর ঃ

$$f(x) = |x-1| + |x+3|$$

ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। **[NUH-2008]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন

$$f(x) = |x-1| + |x+3|$$

$$= \begin{cases} -(x-1)-(x+3) & \text{যখন } x < -3 \\ -(x-1)+x+3 & \text{যখন } -3 \leq x < 1 \\ x-1+x+3 & \text{যখন } 1 \leq x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2x-2 & \text{যখন } x < -3 \\ 4 & \text{যখন } -3 \leq x < 1 \\ 2x+2 & \text{যখন } 1 \leq x \end{cases}$$

প্রদত্ত ফাংশনটি তিন খন্ডে সংজ্ঞায়িত। লেখচিত্র অংকনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা তৈরী করি।

$y = -2x - 2,\ x < -3$

x	−5	−4	−3.1
y	8	6	4.2

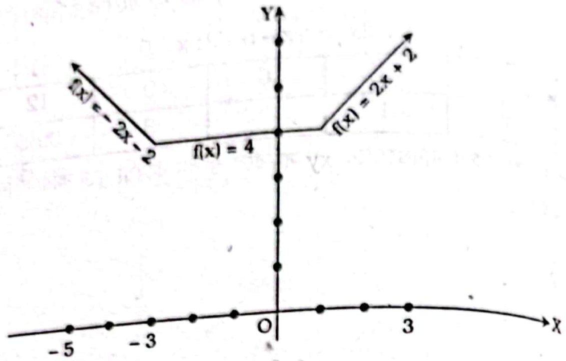
$y = 4,\ -3 \leq x < 1$

x	−3	.99
y	4	4

$y = 2x + 2,\ x \geq 1$

x	1	2	3
y	4	6	8

উপরের মানগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করিয়া যুক্ত করিলে নিম্নের লেখচিত্র অংকিত হয়।



এখন $D_f = x < -3 \cup -3 \le x < 1 \cup 1 \le x$

$= (-\infty, -3) \cup [-3, 1) \cup [1, \infty)$

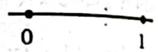
$= (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

$R_f = (4, \infty) \cup \{4\} \cup [4, \infty)$

$= [4, \infty)$.

উদাহরণ–4(প) ঃ $y = |x| + |x-1|$ ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর। ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [DUS-1...]

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $y = |x| + |x-1| \cdots (1)$



যখন $x < 0$ তখন $x - 1 < 0$ এইক্ষেত্রে

$(1) \Rightarrow y = -x - (x-1) = -2x + 1$.

আবার যখন $0 \le x < 1$ তখন $x - 1 < 0$ এইক্ষেত্রে

$(1) \Rightarrow y = x - (x-1) = 1$

পুনরায় যখন $x \ge 1$ তখন $x - 1 \ge 0$ এইক্ষেত্রে

$(1) \Rightarrow y = x + x - 1 = 2x - 1$

সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটিকে নিম্নলিখিত আকারে প্রকাশ করা যায়।

$$y = \begin{cases} -2x+1 & \text{যখন } x < 0 \\ 1 & \text{যখন } 0 \le x < 1 \\ 2x-1 & \text{যখন } x \ge 1 \end{cases}$$

প্রদত্ত ফাংশনটি তিন খন্ডে সংজ্ঞায়িত। লেখচিত্র অংকনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা তৈরী করি।

$y = -2x + 1, x < 0$

x	−2	−1	−1/10
y	5	3	6/5

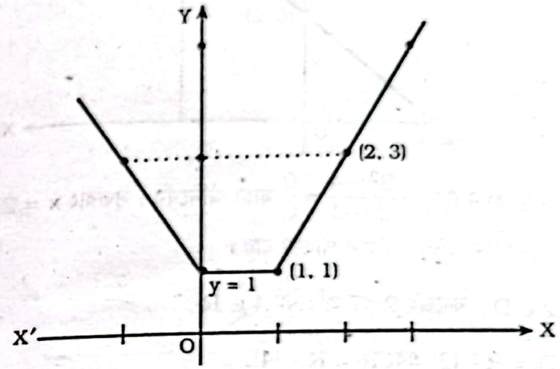
$y = 1, 0 \le x < 1$

x	0	.9
y	1	1

$y = 2x - 1, 1 \le x$

x	1	2	3
y	1	3	5

উপরের মানগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করিয়া যুক্ত করিলে নিম্নের লেখচিত্র অংকিত হয়।



এখানে $D_f = x < 0 \cup 0 \le x < 1 \cup 1 \le x$

$= (-\infty, 0) \cup [0, 1) \cup [1, \infty)$

$= (-\infty, \infty)$

এবং $R_f = (1, \infty) \cup \{1\} \cup [1, \infty)$

$= [1, \infty)$.

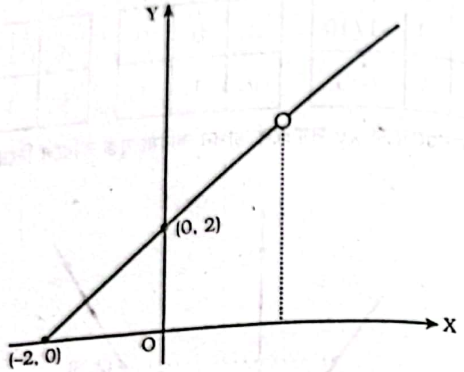
উদাহরণ–5 ঃ $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ ফাংশনের লেখচিত্র অংকন কর। উপরোক্ত ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$ যদি $x \ne 2$.

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অংকনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা তৈরী করি।

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	0	1	2	3	অনির্ণেয়	5	6

উপরোক্ত তালিকার মানগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করিয়া যুক্ত করিলে ... লেখচিত্রটি অংকিত হয়।



যখন $x = 2$ তখন $f(2) = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$ যাহা অনির্ণেয়। সুতরাং $x = 2$ ব্যতিত x ... সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান পাওয়া যায়।

যেহেতু $2 \notin D_f$, কাজেই 2 এর প্রতিবিম্ব $4 \notin R_f$

সুতরাং $D_f = \mathbf{R} - \{2\}$ এবং $R_f = \mathbf{R} - \{4\}$.

উদাহরণ–6 ঃ (i). নিম্নলিখিত ফাংশনের লেখচিত্র মোটামোটিভাবে অংকন কর ঃ

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|/2} & \text{যখন } -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{যখন } 0 \le x < 2 \end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ বাহির কর। [DUH-19..]

(ii). নিম্নলিখিত ফাংশনটির মোটামোটিভাবে লেখচিত্র অংকন কর ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{যখন } x \ne 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

[DUH–1984, NUS–1994, 19..]

সমাধান ঃ (i). মনেকরি $y = f(x) = \begin{cases} e^{-|x|/2} & \text{যখন } -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{যখন } 0 \le x < 2 \end{cases}$

প্রদত্ত রেখার লেখচিত্র অংকনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা তৈরী করি।

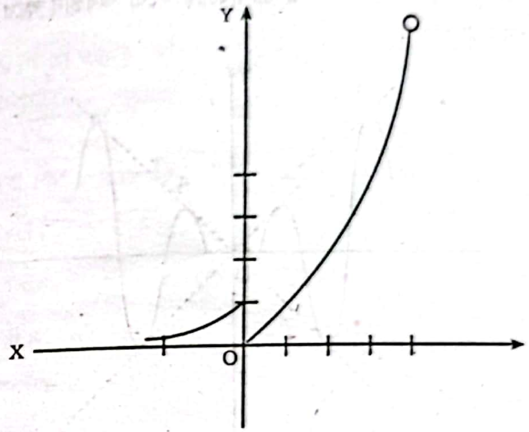
$y = e^{-|x|/2}, -1 < x < 0$

x	–.8	–.6	–.2
y	$e^{-.4}$	$e^{-.3}$	$e^{-.1}$

$y = x^2, 0 \le x < 2$

x	0	1	3/2
y	0	1	9/4

উপরের তালিকার মান গুলোকে xy সমতলে স্থাপন করিয়া যুক্ত করিলে নিম্নের লেখচিত্র অংকিত হয়।



এখানে $D_f = -1 < x < 0 \cup 0 \le x < 2$

$= (-1, 0) \cup [0, 2)$

$= (-1, 2)$

এবং $R_f = (e^{-1/2}, 1) \cup [0, 4)$

$= [0, 4).$

সমাধান ঃ (ii). প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{যখন } x \ne 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

মনেকরি $y = f(x) = x\sin\frac{1}{x}, x \ne 0.$

$\Rightarrow |y| = \left|x\sin\frac{1}{x}\right| = |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|.1$ যেহেতু $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$

$\Rightarrow |y| \le |x|$

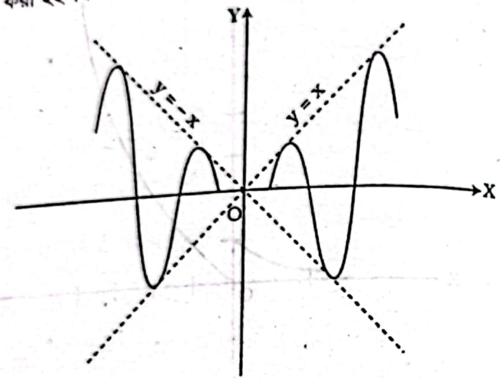
$\Rightarrow |y| = |x|$ অথবা $|y| < |x|$

$\Rightarrow |y| = |x|$. [গ্রহণ করি]

$\Rightarrow y = x$ অথবা $y = -x$

মূলবিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন হওয়া সত্ত্বেও মূলবিন্দুতে উহার লেখচিত্র অংকন ক... না। কারণ শূন্যকে ধারন করে এইরূপ যে কোন ব্যবধিতে ফাংশনটি অসীমভাবে দুল...

বক্ররেখাটি $y = x$ এবং $y = -x$ রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থান করে। নিম্নে ফে... লেখচিত্র অংকন করা হইল।



এখানে $D_f = \mathbf{R} - \{0\} \cup \{0\}$ এবং $R_f = \mathbf{R} - \{0\} \cup \{0\}$

$= \mathbf{R}$ $\qquad\qquad = \mathbf{R}$

2-2.3. সাইক্লোয়েড বলিতে কি বুঝ?

যদি একটি বৃত্ত, সমতলের উপর সরলরেখা বরাবর ঘুরিয়া ঘুরিয়া (গড়িয়ে নয়) চ... বৃত্তের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু যে পথ তৈরী করে, তবে এই পথকে সাইক্লোয়েড বল... বৃত্তটিকে উৎপাদনকারী বৃত্ত বলা হয়।

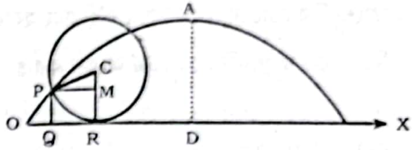
উদাহরণ-7 : সাইক্লোয়েড (Cycloid) এর লেখচিত্র অংকন কর :

সমাধান : মনেকরি a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ঠ উৎপাদনকারী বৃত্তের কেন্দ্র C এবং বৃত্তটি OX রেখার উপর দিয়া ঘুরিয়া ঘুরিয়া চলিতেছে। ধরি $P(x, y)$ বিন্দু সাইক্লোয়েডটি উৎপন্ন করিয়াছে এবং সর্বপ্রথম P বিন্দুটি O এর সাথে সমাপতিত ছিল। এখানে O মূলবিন্দু এবং ORX রেখা x অক্ষ।

ধরি $\angle PCM = \theta$. যেহেতু বৃত্তটি ঘুরিয়া ঘুরিয়া চলে

কাজেই $OR = PR$ বৃত্তচাপ।

বা $OR = a\theta$



এখন $\Delta\ PCM$ হইতে পাই

$$\frac{PM}{PC} = \sin\theta$$

বা $PM = a\sin\theta$.

যেহেতু P বিন্দুর স্থানাংক (x, y). সুতরাং

$$x = OQ = OR - QR = OR - PM$$

বা $x = a\theta - a\sin\theta \Rightarrow x = a(\theta - \sin\theta)$

এবং $y = PQ = MR = CR - CM$

বা $y = a - a\cos\theta \Rightarrow y = a(1 - \cos\theta)$

সুতরাং $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ হইল সাইক্লোয়েড এর প্যারামিটারযুক্ত সমীকরণ।

এখানে A সাইক্লোয়েডের শীর্ষবিন্দু। স্পষ্টতঃই A বিন্দুতে $y = a(1 - \cos\theta)$ গরিষ্ঠ।

$\cos\theta$ লঘিষ্ঠ হইলেই $y = a(1 - \cos\theta)$ গরিষ্ঠ হইবে।

$\therefore \cos\theta$ এর লঘিষ্ঠ মান -1 অর্থাৎ $\cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi$

যখন $\theta = \pi$, তখন $AD = y = a(1 - \cos\pi) = 2a$

যখন $\theta = \pi$, তখন $OD = x = a(\pi - \sin\pi) = a\pi$

$\therefore$ সাইক্লোয়েডের শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক $A(a\pi, 2a)$.

প্রশ্নমালা [EXERCISE]–2(2)

1(i). ধরি $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ফাংশনটি নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{যখন } x \in Q^c \\ 1 & \text{যখন } x \in Q \end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন, রেঞ্জ নির্ণয় কর এবং ইহার লেখচিত্র অংকন কর।

(ii). নিম্নলিখিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর ঃ

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{যখন } x < 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \\ 1 & \text{যখন } x > 0 \end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(iii). নিম্ন বর্ণিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর ঃ

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x < 1 \\ 2 & \text{যখন } x = 1 \\ 0 & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$$

(iv). $y = [x]$ ফাংশনের লেখচিত্র অংকন কর, যখন $[x]$ দ্বারা x এর মানের বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা বুঝায় যাহা x হইতে বৃহত্তর নয়। ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

2(i). নিম্নবর্ণিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } x \geq 0 \\ -x & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(ii). নিম্নবর্ণিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর ঃ

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{যখন } x \leq 0 \\ x & \text{যখন } 0 < x < 1 \end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(iii). নিম্নলিখিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } -3 \leq x \leq 3 \\ 6 - x & \text{যখন } 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(iv). নিম্নবর্ণিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর ঃ

$$f(x) = \begin{cases} 3 + 2x & \text{যখন } x \leq 0 \\ 3 - 2x & \text{যখন } x > 0 \end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(v). নিম্ন বর্ণিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } x < 1 \\ 2 - x & \text{যখন } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(vi). নিম্নলিখিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ x & \text{যখন } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(vii). নিম্নলিখিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{যখন } x > 0 \end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

3(i). নিম্নলিখিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর ঃ

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{যখন } x \leq 0 \\ x & \text{যখন } 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। **[NUH–2010, DUH–1989]** (ii). নিম্নলিখিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর ঃ

$$f(x)=\begin{cases}1+x & \text{যখন } -1\le x<0\\ 1-x & \text{যখন } 0\le x\le 1\\ 0 & \text{যখন } 1<x\end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। **[NUH-2009, NU(Pass)-200**

(iii). নিম্নলিখিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর ঃ

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{যখন } x<0\\ 1/2 & \text{যখন } x=0\\ x-1 & \text{যখন } x>0\end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(iv). নিম্নলিখিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর ঃ

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{যখন } x<1\\ 2 & \text{যখন } x=1\\ x & \text{যখন } x>1\end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(v). একটি ফাংশন f(x) কে নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হইল ঃ

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{যখন } 0<x<1/2\\ 1 & \text{যখন } x=1/2\\ 1-x & \text{যখন } 1/2<x<1\end{cases}$$

ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর। ইহার ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(vi). নিম্নলিখিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর ঃ

$$f(x)=\begin{cases}2x+6 & \text{যখন } -3\le x\le 0\\ 6 & \text{যখন } 0<x<2\\ 2x-6 & \text{যখন } 2\le x\le 5\end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

৪

(vii). নিম্নলিখিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর ঃ

$$f(x)=\begin{cases}3 & \text{যখন } -3\le x<-1\\ 3x-3 & \text{যখন } 0<x\le 1\\ -6x-3 & \text{যখন } -1\le x\le 0\end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(viii). নিম্ন বর্ণিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর ঃ

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{যখন } 0\le x<1\\ 2 & \text{যখন } x=1\\ 2-x & \text{যখন } 1<x<2\end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(ix). নিম্নলিখিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর ঃ

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{যখন } x<1\\ 1+x & \text{যখন } x>1\\ 3/2 & \text{যখন } x=1\end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(x). নিম্নলিখিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর ঃ

$$f(x)=\begin{cases}1/x & \text{যখন } x<0\\ 0 & \text{যখন } x=0\\ -1/x & \text{যখন } x>0\end{cases}$$

(xi). নিম্নবর্ণিত ফাংশনটির লেখচিত্র আঁক ঃ

$$f(x)=\begin{cases}1-x & \text{যখন } -1\le x<1\\ 0 & \text{যখন } 1\le x\le 2\\ x^2-4 & \text{যখন } x>2\end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ উল্লেখ কর। **[NUH-2007, NUS-1995]**

(xii). নিম্ন বর্ণিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর ঃ

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{যখন } 0<x<1\\ x & \text{যখন } 1\le x<2\\ x^2/4 & \text{যখন } 2\le x\end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। **[DUS-1987]** (xiii). নিম্নলিখিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } x < 0 \\ x & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \\ 1/x & \text{যখন } 1 < x \end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। **[NUH-2006, DUS-199**

4. নিম্নবর্ণিত ফাংশনগুলোর ডোমেন, রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র অংকন কর :

(i). $f(x) = |x|$ যখন $-5 \le x \le 5$.

(ii). $f(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ যখন $-5 \le x \le 5$

(iii). $f(x) = x + |x|$ যখন $-2 \le x \le 2$

(iv). $f(x) = |x+1| + |x|$

(v). $f(x) = |x+1| + |x-1|$ **[NUH-2003, NUS-199**

(vi). $f(x) = |x+1| + |x-2|$

(vii). $f(x) = |x| + |x-1| + |x-2|$

(viii). $f(x) = |x+1| + |x| + |x-1|$

5(i). $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ ফাংশনের লেখচিত্র অংকন কর। উপরোক্ত ফাংশনের ডোমেন এ রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(ii). নিম্নলিখিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4} & \text{যখন } x \ne 4 \\ 2 & \text{যখন } x = 4 \end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(iii). নিম্নবর্ণিত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x-4} & \text{যখন } x \ne 4 \\ 3 & \text{যখন } x = 4 \end{cases}$$

6. নিম্নবর্ণিত ফাংশনগুলোর ডোমেন, রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র অংকন কর :

(i). $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ **[NUH-2002]** (ii). $f(x) = \cos\frac{\pi}{x}$

(iii). $f(x) = \sin^2\frac{1}{x}$ (iv). $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{যখন } x < 0 \\ \ln x & \text{যখন } 1 \le x \end{cases}$

উত্তরমালা [ANSWERS]

1(i). $D_f = \mathbf{R}$, $R_f = \{-1, 1\}$ (ii). $D_f = \mathbf{R}$, $R_f = \{-1, 0, 1\}$

(iii). $D_f = \mathbf{R}$, $R_f = \{0, 1, 2\}$

(iv). $D_f = \mathbf{R}$, $R_f = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$

2(i). $D_f = \mathbf{R}$, $R_f = [0, \infty)$ (ii). $D_f = (-\infty, 1)$, $R_f = [0, \infty)$

(iii). $D_f = [-3, 6]$, $R_f = [-3, 3]$ (iv). $D_f = \mathbf{R}$, $R_f = (-\infty, 3]$

(v). $D_f = (-\infty, 2]$, $R_f = (-\infty, 1]$ (vi). $D_f = (0, 2)$, $R_f = (0, 2)$

(vii). $D_f = \mathbf{R}$, $R_f = [0, \infty)$

3(i). $D_f = \mathbf{R}$, $R_f = \mathbf{R}$ (ii). $D_f = [-1, \infty)$, $R_f = [0, 1]$

(iii). $D_f = \mathbf{R}$, $R_f = \mathbf{R}$ (iv). $D_f = \mathbf{R}$, $R_f = [1, \infty)$

(v). $D_f = (0, 1)$, $R_f = (0, 1/2) \cup \{1\}$

(vi). $D_f = [-3, 6]$, $R_f = [-2, 6]$ (vii). $D_f = [-3, 1]$, $R_f = [-3, 3]$

(viii). $D_f = [0, 2)$, $R_f = [0, 1) \cup \{2\}$

(ix). $D_f = \mathbf{R}$, $R_f = (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$

(x). $D_f = [-1, \infty)$, $R_f = [0, \infty)$ (xii). $D_f = (0, \infty)$, $R_f = (0, \infty)$.

(xiii). $D_f = \mathbf{R}$, $R_f = [0, \infty)$

4(i). $D_f = [-5, 5)$, $R_f = [0, 5]$ (ii). $D_f = [-5, 5]$, $R_f = [0, 5]$

(iii). $D_f = [-2, 2]$, $R_f = [0, 4]$ (iv). $D_f = \mathbf{R}$, $R_f = [1, \infty)$

(v). $D_f = \mathbf{R}$, $R_f = [2, \infty)$ (vi). $D_f = \mathbf{R}$, $R_f = [3, \infty)$

(vii). $D_f = \mathbf{R}$, $R_f = (2, \infty)$ (viii). $D_f = \mathbf{R}$, $R_f = [2, \infty)$

5(i). $D_f = \mathbf{R} - \{1\}$, $R_f = \mathbf{R} - \{2\}$ (ii). $D_f = \mathbf{R}$, $R_f = \mathbf{R} - \{8\}$.

6(i). $D_f = \mathbf{R} - \{0\}$, $R_f = [-1, 1]$ (ii). $D_f = \mathbf{R} - \{0\}$, $R_f = [-1, 1]$

(iii). $D_f = \mathbf{R} - \{0\}$, $R_f = [0, 1]$ (iv). $D_f = \mathbf{R} - (0, 1)$, $R_f = [0, \infty)$.

———×———