A new brand PDF to Word

Ultra-Precision text recognition,High-Fidelity layout restoration

Restore a picture-formatted document to a high-quality Word document.You can recognize text, restore fonts, font sizes, stamps, tables, pictures, and be consistent with the source file.Multi-language recognition processing is supported.

You can edit the text and the table directly in the recognized document , thus greatly improve office efficiency.Come and try it!

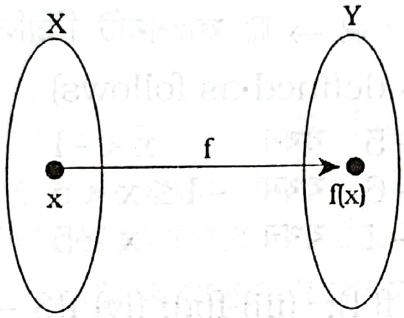
	New version	Past Versions
Restore fonts	Yes	No
Restore font size	Yes	No
Restore stamps	Yes	No
Restore tables	Yes	No
Restore pictures	Yes	No
Preview the results	Yes	No
Edit freely	Yes	No

Chapter–1(A)
ফাংশন
FUNCTIONS

1. A. 1. ফাংশন-এর সংজ্ঞা (Definition of Function) :

[NUH–02, 04, NUH(NM)–09, BSc(Pass)–06, JUH–2004]

১৬৭৩ খৃষ্টাব্দে লিবনীজ প্রথম 'ফাংশন' শব্দটি ব্যবহার করেন এবং ১৬৯৩ খৃষ্টাব্দে তিনি ফাংশনের প্রথম সংজ্ঞা দেন। ১৮৩৭ খৃষ্টাব্দে ডিরিচলেট বাস্তব চলকের বাস্তব ফাংশনের সংজ্ঞা দেন, এই সংজ্ঞাটিকে ফাংশনের প্রথম আধুনিক সংজ্ঞা হিসাবে চিহ্নিত করা হয়। পরবর্তীতে বিভিন্ন গণিতবিদদের মিলিত প্রচেষ্টায় ফাংশনের আধুনিক সংজ্ঞার পূর্ণাঙ্গতা প্রকাশ পায়। নিম্নে ফাংশনের সংজ্ঞা দেওয়া হইল ঃ



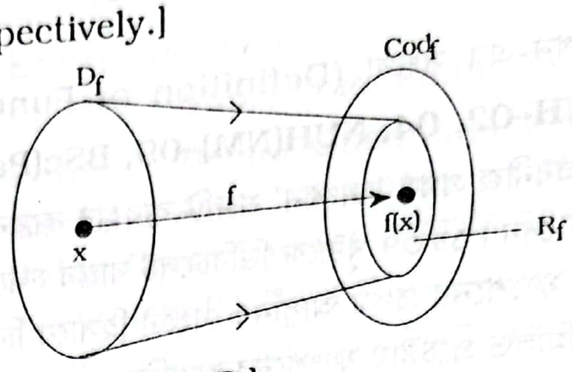
সংজ্ঞা **(Definition) :** 'যদি X ও Y দুইটি অশূন্যক সেট এবং f এরূপ একটি নিয়ম হয় যে, প্রত্যেক $x \in X$ এর জন্য একটি অনন্য $y \in Y$ পাওয়া যায় তবে f কে X সেট হইতে Y সেটে একটি ফাংশন বলা হয়। ইহাকে $f : X \to Y$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। [If X and Y are two non-empty sets and f is such a rule that gives a unique $y \in Y$ for each $x \in X$ then f is called a function from the set X to the set Y. It is denoted by $f : X \to Y$]

$f : X \to Y$ ফাংশনে x এর f সম্পর্কিত উপাদান f(x) বা y কে x বিন্দুতে f এর মান (value) বা প্রতিবিম্ব (image) বলা হয়। উপরের সংজ্ঞায় x অনির্ভরশীল চলক (independent variable) এবং y বা f(x) নির্ভরশীল চলক (dependent variable)।

1.A.2. ফাংশনের ডোমেন, কোডোমেন এবং রেঞ্জ (Domain, Codomain and Range of function) ঃ

[NUH–02, 04, NUH(NM)–06, 07, 08, 09, BSc(Pass)–06, RUH–2009, SJU–2004]

ধরি $f : X \to Y$ একটি ফাংশন। তাহা হইলে X কে f এর ডোমেন, Y কে f এর কোডোমেন বা কাউন্টার ডোমেন এবং Y সেটের অন্তর্গত সকল f সম্পর্কিত উপাদান বা প্রতিবিম্ব নিয়ে যে উপসেট গঠিত তাহাকে ফাংশনটির রেঞ্জ বলা হয়। f এর ডোমেন, কোডোমেন এবং রেঞ্জকে যথাক্রমে D_f, Cod_f এবং R_f দ্বারা প্রকাশ করা হয়। [Let $f : X \to Y$ is a function. Then X is called domain of f, Y is called codomain or counter domain of f and the subset in Y of all f related elements or image is called range of the function. Domain, Codomain and Range of f are denoted by D_f, Cod_f and R_f respectively.]



এখানে $R_f = \{f(x) \in Cod_f : \forall x \in D_f\}$

অর্থাৎ $R_f \subseteq Cod_f$.

উদাহরণ–1. ধরি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত (Let the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is defined as follows) :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{যখন} \quad x < -1 \\ 3x-6 & \text{যখন} \quad -1 \le x < 5 \\ 4x-1 & \text{যখন} \quad x \ge 5 \end{cases}$$

(i) $f(-3/2)$; (ii) $f(4)$; (iii) $f(\pi)$; (iv) $f(3-\sqrt{10})$, (v) $f(\sqrt{5}+3)$ মানগুলি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ (i) $-\frac{3}{2} \in (-\infty, -1)$

সুতরাং $f(-3/2) = 2.(-3/2) + 5 = 2$ [$f(x) = 2x + 5$ সূত্র হইতে]

(ii) $4 \in [-1, 5)$

সুতরাং $f(4) = 3.4 - 6 = 6$ [$f(x) = 3x - 6$ সূত্র হইতে]

(iii) $\pi \in [-1, 5)$

সুতরাং $f(\pi) = 3\pi - 6$ [$f(x) = 3x - 6$ সূত্র হইতে]

(iv) $3 - \sqrt{10} \in [-1, 5)$

সুতরাং $f(3-\sqrt{10}) = 3(3-\sqrt{10}) - 6$

$= 3 - 3\sqrt{10}$ [$f(x) = 3x - 6$ সূত্র হইতে]

(v) $\sqrt{5} + 3 \in [5, \infty)$

সুতরাং $f(\sqrt{5}+3) = 4(\sqrt{5}+3) - 1$

$= 4\sqrt{5} + 11$ [$f(x) = 4x - 1$ সূত্র হইতে]

উদাহরণ–2. $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{2, 5, 8, 11, 15\}$ ফাংশনটি $f(x) = 3x + 2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হইলে ডোমেন, কোডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [The function $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{2, 5, 8, 11, 15\}$ is defined by $f(x) = 3x + 2$ then find domain, codomain and range.]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{2, 5, 8, 11, 15\}$

ফাংশনটি $f(x) = 3x + 2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

$\therefore D_f = \{0, 1, 2, 3\}$

$Cod_f = \{2, 5, 8, 11, 15\}\}$

এবং $R_f = \{f(0), f(1), f(2), f(3)\}$

$= \{2, 5, 8, 11\}$.

উদাহরণ–3. $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হইলে R_f নির্ণয় কর। [If the function $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$ is defined by $f(x) = x^2$ then find R_f]

সমাধান ঃ $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

$\therefore R_f = \{f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)\}$

$= \{4, 1, 0, 1, 4\}$

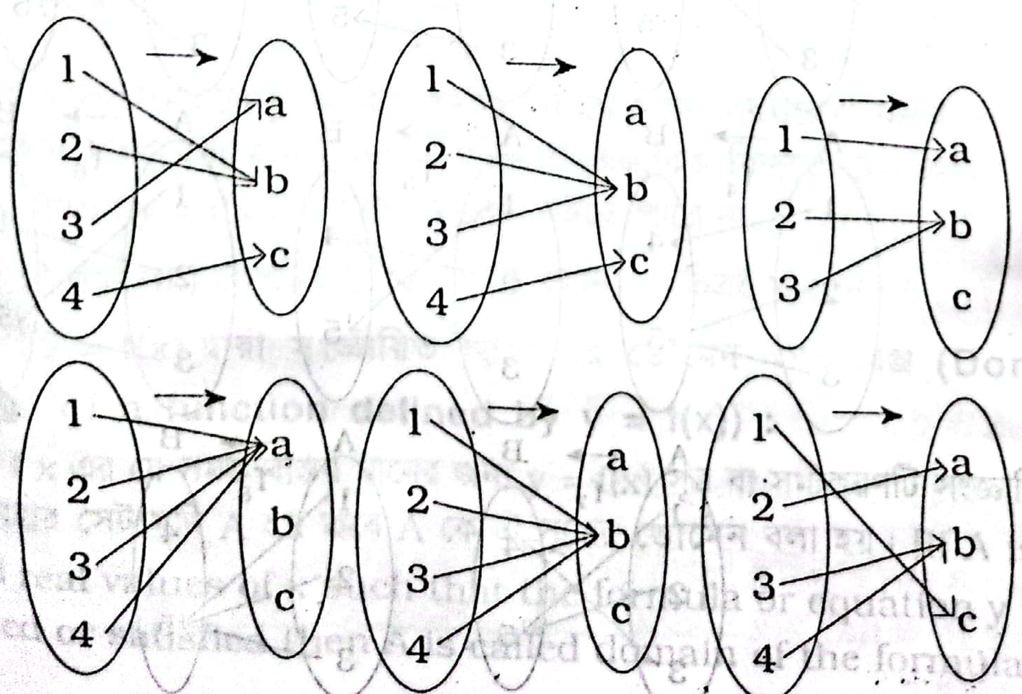
$= \{4, 1, 0\}$

1.A.3. সসীম সেট হইতে সসীম সেটে চিত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত ফাংশন (Function defined by graph from finite set to finite set) ঃ

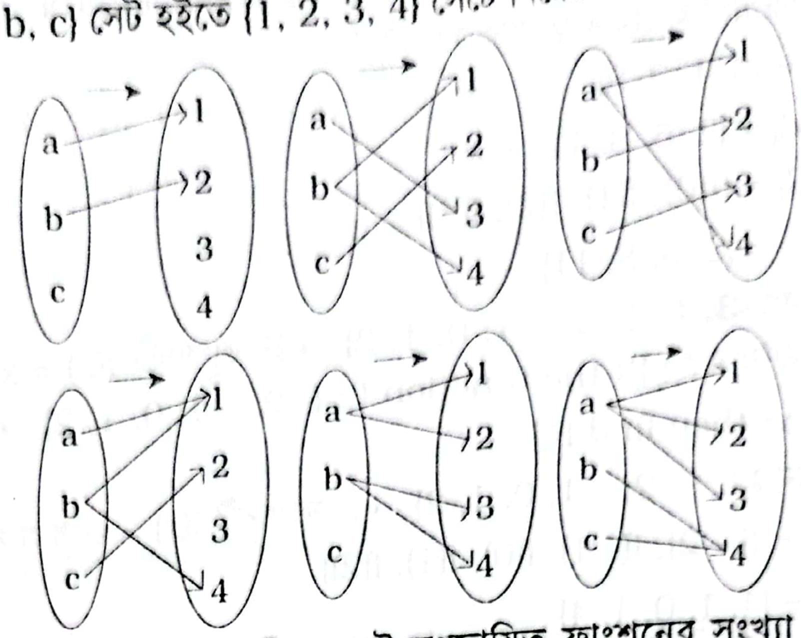
যদি A সেটের প্রত্যেকটি উপাদান অনন্যভাবে B সেটের উপাদানের সাথে '→' প্রতীকের দ্বারা অথবা অন্য কোন সুবিধাজনক প্রতীকের সাহায্যে চিত্রের মাধ্যমে সম্পর্কিত করা যায় তবে ঐ সম্পর্কের প্রত্যেকটি A সেট হইতে B সেটে সংজ্ঞায়িত ফাংশন হিসাবে চিহ্নিত করা হয়।

উদাহরণ–4. $\{1, 2, 3, 4\}$ সেট হইতে $\{a, b, c\}$ সেটে সংজ্ঞায়িত ফাংশন চিত্রের মাধ্যমে লিখ। [Write the functions as diagrams which are defined from the set $\{1, 2, 3, 4\}$ to the set $\{a, b, c\}$.]

সমাধান ঃ নিম্নের প্রত্যেকটি চিত্রই $\{1, 2, 3, 4\}$ সেট হইতে $\{a, b, c\}$ সেটে সংজ্ঞায়িত ফাংশন।



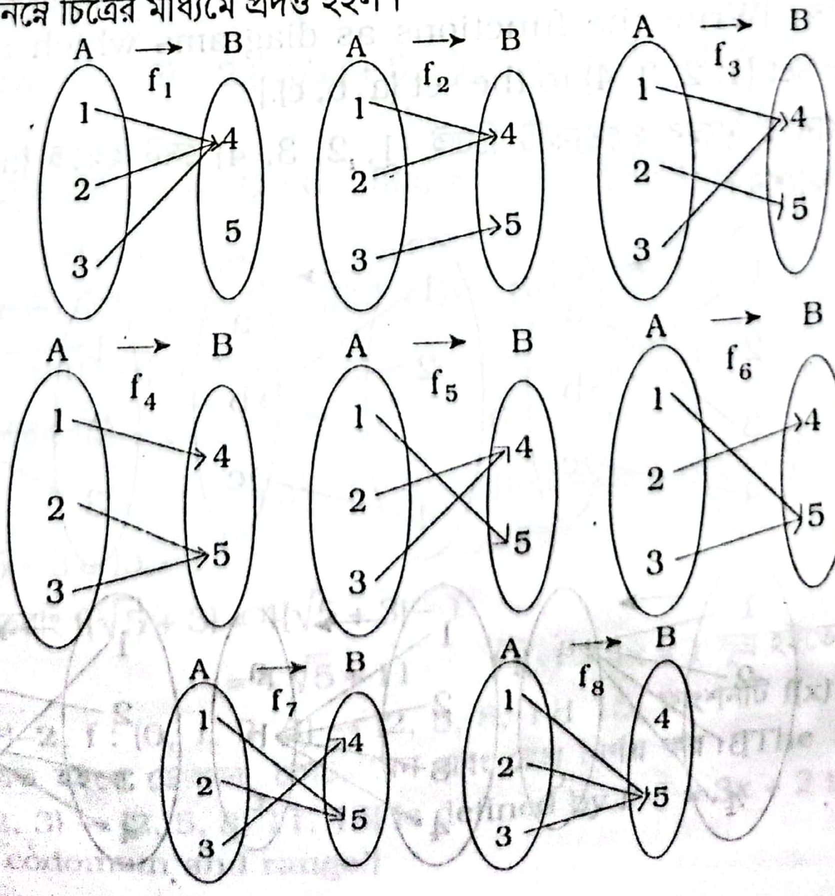
বিঃ দ্রঃ {a, b, c} সেট হইতে {1, 2, 3, 4} সেটে নিম্নের কোন চিত্রই ফাংশন নয়।



1.A.4. সসীম সেট হইতে সসীম সেটে সংজ্ঞায়িত ফাংশনের সংখ্যা (Number of functions defined from finite set to finite set) ঃ ধরি A এবং B দুইটি সসীম সেট। যদি $n(A) = p$ এবং $n(B) = q$ হয় তবে A সেট হইতে B সেটে q^p সংখ্যক ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়।

উদাহরণ–5. ধরি $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{4, 5\}$. তাহা হইলে A সেট হইতে B সেটে যতগুলো ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায় তাহা চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর। [Let $A = \{1, 2, 3\}$ and $B = \{4, 5\}$ then, express the functions as diagrams which are defined from the set A to B.]

সমাধান ঃ A সেট হইতে B সেটে $2^3 = 8$টি ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়। ঐ ফাংশনগুলো নিম্নে চিত্রের মাধ্যমে প্রদত্ত হইল।



1.A.5. ফাংশনের লেখ (Graph of a Function) ঃ ধরি $f : A \to B$ একটি ফাংশন। তাহা হইলে f এর লেখকে f^* দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়। $f^* = \{(a, b) : a \in A, f(a) = b\}$, ইহা স্পষ্ট যে $f : A \to B$ ফাংশনের লেখ $f^* \subset A \times B$.

উদাহরণ–6. ধরি $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$ একটি ফাংশন যাহা $f(x) = x^2 + x + 1$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে f এর লেখ নির্ণয় কর অর্থাৎ f^* নির্ণয় কর।

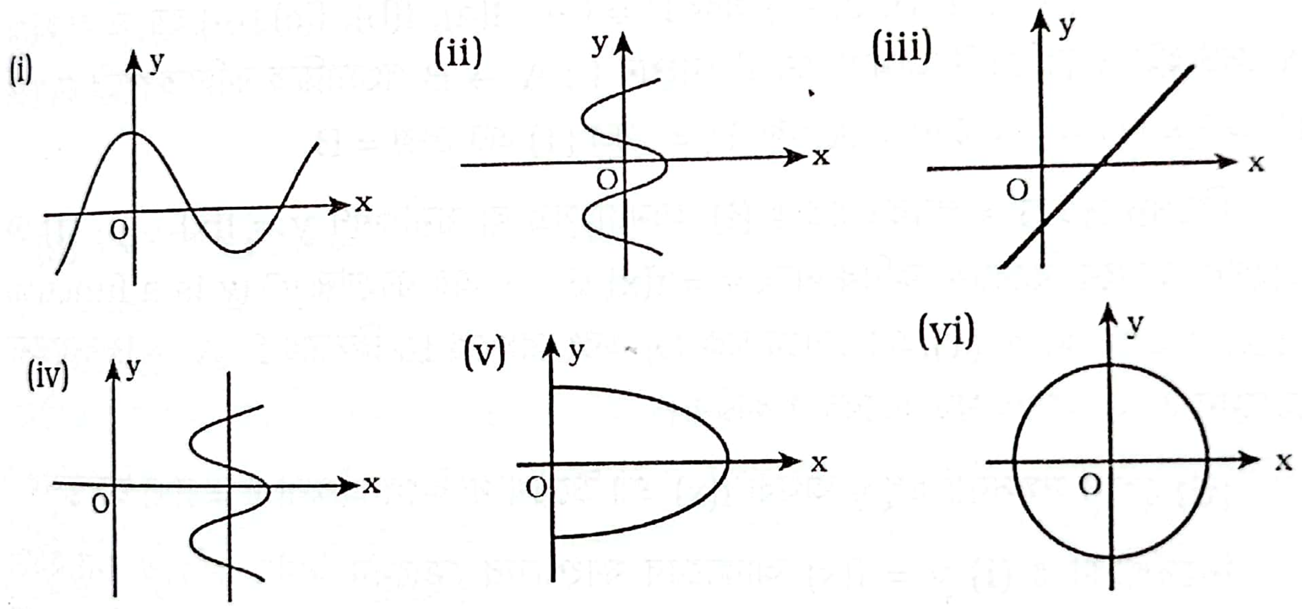
সমাধান ঃ এখানে $f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1 \qquad f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$

$$f(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7 \qquad f(3) = 3^2 + 3 + 1 = 13$$

সুতরাং f এর লেখ $f^* = \{(0, 1), (1, 3), (2, 7), (3, 13)\}$.

1.A.6. লেখচিত্র হইতে ফাংশনের ধারণা (Concept of functions from graph) : xy সমতলে কোন লেখচিত্র y অক্ষের সমান্তরাল হইলে অথবা y অক্ষের সমান্তরাল কোন সরলরেখা কোন লেখচিত্রকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিলে ঐ লেখচিত্র $\{(x, f(x)) : y = f(x)\}$ আকারের ফাংশন হইতে পারে না।

উদাহরণ–7. নিম্নের কোন কোন লেখচিত্র ফাংশন নয় তাহা ব্যাখ্যা কর।



সমাধান ঃ xy সমতলে y অক্ষের সমান্তরাল যে কোন সরলরেখা অথবা y অক্ষের সমান্তরাল কোন সরলরেখা যদি কোন লেখচিত্রকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করে তবে ঐ লেখচিত্র $\{(x, f(x)) : y = f(x)\}$ আকারের ফাংশন হইতে পারে না।

সুতরাং (i) এবং (iii) লেখচিত্র দুইটি ব্যতিত কোন লেখচিত্রই ফাংশন নয়।

1.A.7. y = f(x) দ্বারা সংজ্ঞায়িত ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ (Domain and range of a function defined by y = f(x)) :

সংজ্ঞা ঃ x এর যে সমস্ত বাস্তব মানের জন্য $y = f(x)$ সূত্র বা সমীকরণটি সংজ্ঞায়িত বা সিদ্ধ হয় তাহার সেট যদি A হয় তবে A কে ঐ সূত্রের ডোমেন বলা হয়। [If A is the set of all real values of x such that the formula or equation $y = f(x)$ be defined or satisfied then A is called domain of the formula.]

সংজ্ঞা : $y = f(x)$ সূত্রের ডোমেন A এর প্রত্যেক মান বা বিন্দু x এর সাপেক্ষে y বা f(x) সূত্রের যে সমস্ত মান পাওয়া যায় তাহার সেট যদি B হয় তবে B কে ঐ সূত্রের রেঞ্জ বলা হয়। [If B is the set of all values of y or f(x) corresponding each of the values or points x in domain A of the formula $y = f(x)$ then B is called range of the formula.]

উপপাদ্য–1. যদি $y = f(x)$ সূত্রের ডোমেন A এবং রেঞ্জ B হয় তবে দেখাও যে A সেট হইতে B সেটে একটি ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়। [If A is domain and B is range of the formula $y = f(x)$ then show that a function is defined from the set A into the set B.]

প্রমাণ : ধরি $y = f(x)$ ...... (1)

সূত্র বা সমীকরণটি x এর ··· , a, b, c, ··· বাস্তব মান বা বিন্দু সমূহের জন্য সংজ্ঞায়িত এবং ধরি x ঐ বাস্তব মান বা বিন্দু সমূহে y বা f(x) এর বাস্তব মান সমূহ হইল যথাক্রমে ··· , f(a), f(b), f(c), ···

যদি $A = \{\cdots, a, b, c, \cdots\}$ এবং $B = \{\cdots, f(a), f(b), f(c), \cdots\}$ হয়, তাহা হইলে A সেট হইতে B সেটে আমরা একটি ফাংশন $f : A \to B$ সংজ্ঞায়িত করিতে পারি যেখানে D_f = সূত্র (1) এর ডোমেন = A এবং R_f = সূত্র (1) এর রেঞ্জ = B.

বিশেষ দ্রষ্টব্য : পরবর্তীতে : **(i)** আমরা সূত্র বা সমীকরণ $y = f(x)$ ...... (1) কে ফাংশন হিসাবে বিবেচনা করিব এবং $y = f(x)$ কে "x এর ফাংশন y" (y is a function of x) পড়িব। আরো (1) এর ডোমেনকে D_f এবং রেঞ্জকে R_f হিসাবে $f : A \to B$ ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জের মত বিবেচনা করিব।

(ii) কোন সমস্যায় শুধু y অথবা f(x) এর উল্লেখ থাকিলে আমরা $y = f(x)$ কে বুঝিব।

নির্দেশীকা : **(i)** $y = f(x)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় করিতে বলা হইলে x এর যে সমস্ত মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হইবে তাহার সেটটিই ডোমেন হইবে অথবা যে সমস্ত বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত নয় ঐ সমস্ত বিন্দু সমূহের সেটকে $\mathbb{R}$ হইতে বর্জন করিলে ফাংশনের ডোমেন D_f পাওয়া যাইবে।

(ii) $y = f(x)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন D_f এর সমস্ত মানের জন্য y বা f(x) এর যে সমস্ত মান পাওয়া যায় তাহা হইল ফাংশনের রেঞ্জ R_f. অন্যভাবে $y = f(x)$ কে সমাধান করিয়া $x = g(y)$ আকারে পরিণত করিয়া ইহার D_g নির্ণয় করিলে ইহা R_f হইবে অর্থাৎ $D_g = R_f$ হইবে। তবে খেয়াল রাখিতে হইবে যদি $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনটি $\frac{0}{0}$ আকারের হয় তবে $x - a$ এর উৎপাদক বা উৎপাদক সমূহ f(x) হইতে বর্জন করিয়া যদি f(a) নির্ণয় করা যায় তবে R_f এ f(a) স্থান পাইবেনা। এই আকারের অন্য বিন্দুর জন্যও আগের মত অগ্রসর হইতে হইবে।

1.A.8. বাস্তব সংখ্যার ক্রম (Order of real numbers) : দুইটি বাস্তব সংখ্যা a ও b এর মধ্যে নিম্নের যে-কোন একটি সম্পর্ক বিদ্যমান থাকিবে।

(i) $a < b$ অথবা (ii) $a = b$ অথবা (iii) $a > b$

মন্তব্য ঃ আমরা গণিতে প্রায়ই লিখি $a \geq b$. ইহার অর্থ এই যে হয় $a > b$ অথবা $a = b$. এক সাথে কখনই দুইটি শর্ত খাটে না।

1.A.9. ব্যবধি (Interval) : মনে করি দুইটি বাস্তব সংখ্যা a ও b যেখানে $a < b$ ($a > b$ ও হইতে পারে)। a ও b এর একটি বা উভয়কে বাদ দিয়ে (বা লইয়ে) উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে ব্যবধি বলে। ব্যবধি চার প্রকার। নিম্নে ইহাদের আলোচনা করা হইল।

(i) খোলা ব্যবধি (Open interval) : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. a ও b কে বাদ দিয়ে উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে খোলা ব্যবধি বলে। ইহাকে (a, b) বা $]a, b[$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। [Let a and b are two real numbers and $a < b$. The set of all real numbers between a and b excluding a and b is called open interval. It is denoted by the symbol (a, b) or $]a, b[$ and is defined by $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.]

(ii) বদ্ধ ব্যবধি (Closed interval) : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. প্রান্তমান a ও b কে নিয়ে উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে বদ্ধ ব্যবধি বলে। ইহাকে $[a, b]$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। [Let a and b are two real numbers and $a < b$. The set of all real numbers between a and b including the end values a and b is called closed interval. It is denoted by $[a, b]$ and is defined by $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.]

(iii) অর্ধখোলা ও অর্ধবদ্ধ ব্যবধি (Half open and half closed interval) : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. প্রান্তমান a কে বাদ দিয়ে এবং b কে নিয়ে উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে অর্ধখোলা ও অর্ধবদ্ধ ব্যবধি বলে। ইহাকে $(a, b]$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। [Let a and b are two real numbers and $a < b$. The set of all real numbers between a and b excluding the end value a and including b is called half open and half closed interval. It is denoted by $(a, b]$ and is defined by $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.]

(iv) অর্ধবদ্ধ ও অর্ধখোলা ব্যবধি (Half closed and half open interval) : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. প্রান্তমান a কে নিয়ে এবং b কে বাদ দিয়ে উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে অর্ধবদ্ধ ও অর্ধখোলা ব্যবধি বলে। ইহাকে $[a, b)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। [Let a and b are two real numbers and $a < b$. The set of all real numbers between a and b including the end value a and excluding b is called half closed and half open interval. It is denoted by $[a, b)$ and is defined by $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.]

1.A.10. অসীম ব্যবধি বা রশ্মি (Infinite interval or ray) : অসীম ব্যবধি বা রশ্মি দুই প্রকার। নিম্নে উহাদের আলোচনা করা হইল।

(i) খোলা এবং অসীম ব্যবধি (Open and infinite interval) : কোন বাস্তব সংখ্যা a অপেক্ষা বৃহত্তর সকল বাস্তব সংখ্যা নিয়ে গঠিত ব্যবধিকে খোলা এবং অসীম ব্যবধি বলে। ইহাকে (a, ∞) প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। [The interval of all the real numbers which are greater than any real number a is called open and infinite interval. It is denoted by the symbol (a, ∞) and is defined by $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$.]

আবার, a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সকল বাস্তব সংখ্যা নিয়ে গঠিত ব্যবধিকে খোলা এবং অসীম ব্যবধি বলে। ইহাকে $(-\infty, a)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। [Again, the interval of all the real numbers which are smaller than a is called open and infinite interval. It is denoted by the symbol $(-\infty, a)$ and is defined by $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$.]

(ii) বদ্ধ এবং অসীম ব্যবধি (Closed and infinite interval) : কোন বাস্তব সংখ্যা a সহ a হইতে বৃহত্তর সকল বাস্তব সংখ্যাকে নিয়ে গঠিত ব্যবধিকে বদ্ধ এবং অসীম ব্যবধি বলে। ইহাকে $[a, \infty)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হয়। [The interval of all the real numbers which are greater than any real number a including the number a is called closed and infinite interval. It is denoted by the symbol $[a, \infty)$ and is defined as follows.]

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

আবার, কোন বাস্তব সংখ্যা a সহ a হইতে ক্ষুদ্রতর সকল বাস্তব সংখ্যাকে নিয়ে গঠিত ব্যবধিকে বদ্ধ এবং অসীম ব্যবধি বলে। ইহাকে $(-\infty, a]$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হয়। [Again, the interval of all the real numbers which are smaller than any real number a including the number a is called closed and infinite interval. It is denoted by the symbol $(-\infty, a]$ and is defined as follows]

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

1.A.11. বাস্তব সংখ্যার পরম মান (Absolute value of real numbers) : যে-কোন বাস্তব সংখ্যা x এর মান শূন্য বা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে। কিন্তু x এর পরমমান সবসময়ই শূন্য বা ধনাত্মক হইবে। x এর পরম মানকে $|x|$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়। [The value of any real number x is zero or positive or negative. But absolute value of x is always zero or positive. The absolute value of x is denoted by $|x|$ and defined as follows]

$$|x| = \begin{cases} x \text{ যখন } x \geq 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \end{cases} \quad \text{অথবা } |x| = \begin{cases} 0 \text{ যখন } x = 0 \\ x \text{ যখন } x > 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$$

উদাহরণ ঃ $|0| = 0$, $|3| = 3$, $|-3| = -(-3) = 3$.

উপপাদ্য–2. x, α ও δ প্রত্যেকেই ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হইলে দেখাও যে $|x-\alpha| \leq \delta$ যদি এবং কেবল যদি $\alpha - \delta \leq x \leq \alpha + \delta$ হয়। [If all x, α and δ are real numbers then show that $|x-\alpha| \leq \delta$ if and only if $\alpha - \delta \leq x \leq \alpha + \delta$.]

প্রমাণ ঃ প্রথমে মনে করি $|x-\alpha| \leq \delta$. তাহা হইলে বাস্তব সংখ্যার পরম মানের সংজ্ঞানুসারে $(x-\alpha) \geq 0$ হইলে পাই

$$|x-\alpha| = x-\alpha$$

এবং $(x-\alpha) < 0$ হইলে $|x-\alpha| = -(x-\alpha)$

$\therefore |x-\alpha| \leq \delta$ শর্ত হইতে পাই

$x-\alpha \leq \delta$ এবং $-(x-\alpha) \leq \delta$

$\Rightarrow x \leq \alpha + \delta$ এবং $x-\alpha \geq -\delta$

$\Rightarrow x \leq \alpha + \delta$ এবং $x \geq \alpha - \delta$

$\Rightarrow \alpha - \delta \leq x$ ......(1)

এবং $x \leq \alpha + \delta$ ...... (2)

(1) ও (2) হইতে পাই $\alpha - \delta \leq x \leq \alpha + \delta$

বিপরীতক্রমে মনে করি $\alpha - \delta \le x \le \alpha + \delta$

$$\Rightarrow \alpha - \delta \le x \text{ এবং } x \le \alpha + \delta$$

$$\Rightarrow -\delta \le x - \alpha \text{ এবং } x - \alpha \le \delta$$

$$\Rightarrow \delta \ge -(x - \alpha) \text{ এবং } x - \alpha \le \delta$$

$$\therefore x - \alpha \le \delta \cdots\cdots (3) \text{ এবং } -(x - \alpha) \le \delta \cdots\cdots (4)$$

(3) ও (4) কে একত্র করিয়া পাই $|x - \alpha| \le \delta$

নোট–1. $\alpha = 0$ হইলে পাই $|x| \le \delta$ বা $-\delta \le x \le \delta$

নোট–2. $|x - \alpha| < \delta$ হইলে $\alpha - \delta < x < \alpha + \delta$

✪ ছাত্র-ছাত্রীদের পাঠদানকালে লক্ষ্য করিয়াছি যে ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ বাহির করা তাহাদের নিকট এক দুরুহ ব্যাপার। তাই তাহাদের কষ্ট লাঘবের জন্য ডোমেন ও রেঞ্জ বাহির করার কিছু নিয়ম এবং প্রত্যেক নিয়মের কিছু সমস্যা সহজভাবে সমাধান করিয়া দেওয়া হইল।

1.A.12. ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করার কিছু নিয়ম (Some rules to find domain and range) :

1. f(x) = c আকারের ধ্রুবক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a constant function of the form f(x) = c] :

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর কেবলমাত্র মান c পাওয়া যায় [Here f(x) gives only the value c for all real values of x]

$\therefore D_f = \mathbb{R}$ এবং $R_f = \{c\}$

2. f(x) = ax + b (a ≠ 0) আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a function of the form f(x) = ax + b (a ≠ 0)] :

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয় [Here f(x) gives real values for all real values of x.]

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = f(x) = ax + b \quad (a \ne 0)$

$$\Rightarrow x = \frac{y - b}{a}$$

এখানে y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [Here x gives real values for all real values of y.]

$\therefore R_f = \mathbb{R}$

উদাহরণ–8. $f(x) = 3x + 5$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ বাহির কর। [*Find domain and range of the function f(x) = 3x + 5.*]

সমাধান ঃ এখানে $f(x) = 3x + 5$ ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$.

আবার $y = f(x) = 3x + 5$ হইলে $x = \frac{y-5}{3}$

এখানে y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x বাস্তব হয়। সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$.

3. $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ $(a \neq 0)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a function of the form $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ $(a \neq 0)$] :

এখানে $ax + b = 0$ বা $x = -\frac{b}{a}$ এর জন্য f(x) সংজ্ঞায়িত নয় এবং $x = -\frac{b}{a}$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয় অর্থাৎ f(x) সংজ্ঞায়িত হয়। [Here f(x) is not defined for $ax + b = 0$ or $x = -\frac{b}{a}$ and f(x) gives real values that is f(x) is defined for all real values of x except $x = -\frac{b}{a}$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{b}{a}\right\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{1}{ax+b}$ $(a \neq 0)$

$\Rightarrow ax + b = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{y} - b\right)$

এখানে $y = 0$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [Here x gives real values for all real values of y except $y = 0$]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

উদাহরণ-9. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ (ii) $f(x) = \frac{2}{x+3}$ (iii) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

$x = 2$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [f(x) gives real values for all real values of x except $x = 2$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{1}{x-2}$

$\Rightarrow x - 2 = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{y} + 2$

$y = 0$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [x gives real values for all real values of y except $y = 0$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

(ii) $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$

$x = -3$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [f(x) gives real values for all real values of x except $x = -3$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$

আবার, $y = f(x) = \dfrac{2}{x+3}$

$\Rightarrow x + 3 = \dfrac{2}{y}$

$\Rightarrow x = \dfrac{2}{y} - 3$

$y = 0$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [x gives real values for all real values of y except $y = 0$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

(iii) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$

এখানে $2x + 1 = 0$ বা $x = -\dfrac{1}{2}$ এর জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত নয় এবং $x = -\dfrac{1}{2}$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) is not defined for $2x + 1 = 0$ or $x = -\dfrac{1}{2}$ and f(x) gives real values for all real values of x except $x = -\dfrac{1}{2}$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

আবার, $y = f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$

$\Rightarrow 2x + 1 = \dfrac{1}{y}$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{y} - 1\right)$

$y = 0$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [x gives real values for all real values of y except $y = 0$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

4. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (a, c ≠ 0) আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a function of the form $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a, c \neq 0)$] :

এখানে $cx + d = 0$ বা $x = -\dfrac{d}{c}$ এর জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত নয়। এবং $x = -\dfrac{d}{c}$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [Here $f(x)$ is not defined for $cx + d = 0$ or $x = -\dfrac{d}{c}$ and $f(x)$ gives real values for all real values of x except $x = -\dfrac{d}{c}$.]

$$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

আবার, $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

$$\Rightarrow cxy + dy = ax + b$$
$$\Rightarrow x(cy - a) = b - dy$$
$$\Rightarrow x = \frac{b - dy}{cy - a}$$

এখানে $cy - a = 0$ বা $y = \dfrac{a}{c}$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [Here x gives real values for all real values of y except $cy - a = 0$ or $y = \dfrac{a}{c}$.]

$$\therefore R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

উদাহরণ–10. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ **[NUH(NM)–2008]**

(ii) $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$ **[NUH–2004]**

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

$x = -1$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [$f(x)$ gives real values for all real values of x except $x = -1$.]

$$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

আবার, $y = f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

$$\Rightarrow xy + y = x$$
$$\Rightarrow x = -\frac{y}{y-1}$$

$y = 1$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [x gives real values for all real values of y except $y = 1$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{1\}$

(ii) $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$

$2x + 1 = 0$ বা $x = -\dfrac{1}{2}$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [f(x) gives real values for all real values of x except $2x + 1 = 0$ or $x = -\dfrac{1}{2}$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

আবার, $y = f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$

$\Rightarrow 2xy + y = x - 3$

$\Rightarrow x(2y - 1) = -(y + 3)$

$\Rightarrow x = -\dfrac{y+3}{2y-1}$

$y = \dfrac{1}{2}$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [x gives real values for all real values of y except $y = \dfrac{1}{2}$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

5. $f(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় **[To find domain and range of a function of the form $f(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$.]:**

এখানে $x = a$ এর জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত নয় এবং $x = a$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) is not defined for $x = a$ and f(x) gives real values for all real values of x except $x = a$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{a\}$

আবার, $y = f(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$

$\Rightarrow y = x + a$ যেখানে $x \neq a$

$\Rightarrow x = y - a$ $\quad [\because x \neq a,$ সুতরাং $y \neq 2a]$

$\Rightarrow x = y - a, \; y \neq 2a$

এখানে $y = 2a$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for all real values of y except $y = 2a$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{2a\}$.

উদাহরণ-11. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find the domain and range of the following functions.]

(i) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ (ii) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$

সমাধান ঃ **(i)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

এখানে $x = 2$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values for all real values of x except $x = 2$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

আবার, $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

$\Rightarrow y = x + 2$ যেখানে $x \neq 2$

$\Rightarrow x = y - 2, \ y \neq 4 \quad [\because x \neq 2]$

এখানে $y = 4$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for all real values of y except $y = 4$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{4\}$

(ii) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$

এখানে $x^2 - 9 = 0$ বা $x = \pm 3$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values for all real values of x except $x^2 - 9 = 0$ or $x = \pm 3$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

আবার, $y = f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$

$\Rightarrow y = \dfrac{1}{x + 3}$ যেখানে $x \neq 3$

$\Rightarrow x + 3 = \dfrac{1}{y}$ যেখানে $x \neq 3$ বা $y \neq \dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{y} - 3, \ y \neq \dfrac{1}{6}$

এখানে $y = \dfrac{1}{6}$ এবং 0 ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for all real values of y except $y = \dfrac{1}{6}$ and 0]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{1}{6}\right\}$.

6. $f(x) = \sqrt{ax + b}$ $(a > 0)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a function of the form $f(x) = \sqrt{ax+b}$ $(a > 0)$] :

এখানে কেবলমাত্র $ax + b \geq 0$ বা $x \geq -\frac{b}{a}$ এর জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়।

[Here f(x) gives real values only for $ax + b \geq 0$ or $x \geq -\frac{b}{a}$]

$$\therefore D_f = \left\{x : x \geq -\frac{b}{a}\right\}$$
$$= \left[-\frac{b}{a}, \infty\right)$$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{ax + b}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $y \not< 0$ [The values of y in (1) are positive or zero that is $y \not< 0$]

$(1) \Rightarrow y^2 = ax + b$ যেখানে $y \not< 0$

$\Rightarrow ax = y^2 - b, \quad y \not< 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{a}(y^2 - b), \quad y \not< 0$

এখানে $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for $y \geq 0$]

$$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$$
$$= [0, \infty)$$

নোট ঃ $\sqrt{x^2} = |x|$

অর্থাৎ বাস্তব ফিল্ডে $\sqrt{\ }$ এর মান বিদ্যমান থাকিলে উহা সর্বদা ধনাত্মক বা শূন্য হইবে।

যেমন $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$

এখানে $\sqrt{(-2)^2} = -2$ সত্য নয়।

উদাহরণ–12. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find the domain and range of the following functions.]

(i) $f(x) = \sqrt{3x - 1}$ (ii) $f(x) = -\sqrt{x + 1}$

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \sqrt{3x - 1}$

এখানে কেবলমাত্র $3x - 1 \geq 0$ বা $x \geq \frac{1}{3}$ এর জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $3x - 1 \geq 0$ or $x \geq \frac{1}{3}$.]

$$\therefore D_f = \left\{x : x \geq \frac{1}{3}\right\}$$
$$= \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{3x - 1}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $y \nless 0$ [The values of y in (1) are positive or zero that is $y \nless 0$]

$(1) \Rightarrow y^2 = 3x - 1$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{3}(y^2 + 1),\ y \nless 0$

এখানে $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for $y \geq 0$]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$
$= [0, \infty)$

(ii) $f(x) = -\sqrt{x + 1}$

এখানে কেবলমাত্র $x + 1 \geq 0$ বা $x \geq -1$ এর জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $x + 1 \geq 0$ or $x \geq -1$.]

$\therefore D_f = \{x : x \geq -1\}$
$= [-1, \infty)$

আবার, $y = f(x) = -\sqrt{x + 1}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান ঋণাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $y \ngtr 0$ [The values of y in (1) are negative or zero that is $y \ngtr 0$]

$(1) \Rightarrow y^2 = x + 1,\ y \ngtr 0$

$\Rightarrow x = y^2 - 1,\ y \ngtr 0$

এখানে $y \leq 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined only for $y \leq 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y \leq 0\}$
$= (-\infty, 0]$

7. $f(x) = \sqrt{ax + b}$ (a < 0) আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a function of the form $f(x) = \sqrt{ax + b}$ (a < 0)] :

এখানে কেবলমাত্র $ax + b \geq 0$ বা $x \leq -\frac{b}{a}$ এর জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $ax + b \geq 0$ or $x \leq -\frac{b}{a}$]

$$\therefore D_f = \left\{x : x \leq -\frac{b}{a}\right\} = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{ax + b}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $y \nless 0$ [The values of y in (1) are positive or zero that is $y \nless 0$.]

$(1) \Rightarrow y^2 = ax + b$ যেখানে $y \not< 0$

$\Rightarrow ax = y^2 - b, \ y \not< 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{a}(y^2 - b), \ y \not< 0$

এখানে কেবলমাত্র $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined only for $y \geq 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

উদাহরণ–13. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = \sqrt{1 - x}$ (ii) $f(x) = -\sqrt{1 - 2x}$

সমাধান ঃ **(i)** $f(x) = \sqrt{1 - x}$

এখানে কেবলমাত্র $1 - x \geq 0$ বা $x \leq 1$ এর জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $1 - x \geq 0$ or $x \leq 1$.]

$\therefore D_f = \{x : x \leq 1\}$

$= (-\infty, 1]$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{1 - x}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $y \not< 0$ [The values of y in (1) are positive or zero that is $y \not< 0$.]

$(1) \Rightarrow y^2 = 1 - x$ যেখানে $y \not< 0$

$\Rightarrow x = 1 - y^2, \ y \not< 0$

এখানে $y \geq 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined only for $y \geq 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

(ii) $f(x) = -\sqrt{1 - 2x}$

এখানে $1 - 2x \geq 0$ বা $x \leq \frac{1}{2}$ এর জন্য কেবলমাত্র f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $1 - 2x \geq 0$ or $x \leq \frac{1}{2}$.]

$\therefore D_f = \left\{x : x \leq \frac{1}{2}\right\}$

$= \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

আবার, $y = f(x) = -\sqrt{1 - 2x}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান ঋণাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $y \not> 0$. [The values of y in (1) are negative or zero that is $y \not> 0$.]

$(1) \Rightarrow y^2 = 1 - 2x$ যেখানে $y \not> 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(1 - y^2),\ y \not> 0$

এখানে $y \leq 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined only for $y \leq 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y \leq 0\}$

$= (-\infty, 0]$

8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{ax + b}}$ **আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a function of the form** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{ax + b}}$**]:**

এখানে $ax + b > 0$ বা $x > -\frac{b}{a}$ (যখন $a > 0$) বা $x < -\frac{b}{a}$ (যখন $a < 0$) এর জন্য কেবলমাত্র f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $ax + b > 0$ or $x > -\frac{b}{a}$ (when $a > 0$) or $x < -\frac{b}{a}$ (when $a < 0$).]

$\therefore a > 0$ এর জন্য $D_f = \left\{x : x > -\frac{b}{a}\right\}$

$= \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$

এবং $a < 0$ এর জন্য $D_f = \left\{x : x < -\frac{b}{a}\right\}$

$= \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$

আবার, $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{ax + b}}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান ধনাত্মক হইবে অর্থাৎ $y \not\leq 0$ হইবে।

$(1) \Rightarrow y^2 = \dfrac{1}{ax + b}$ যেখানে $y \not\leq 0$

$\Rightarrow ax + b = \frac{1}{y^2},\ y \not\leq 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{y^2} - b\right),\ y \not\leq 0$

এখানে $y > 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined only for $y > 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$

$= (0, \infty)$

উদাহরণ-14. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find the domain and range of the following functions.]

(i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ (ii) $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

সমাধান : (i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

এখানে $x + 1 > 0$ বা $x > -1$ এর জন্য কেবলমাত্র $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [Here $f(x)$ gives real values only for $x + 1 > 0$ or $x > -1$.]

$\therefore D_f = \{x : x > -1\}$
$= (-1, \infty)$

আবার, $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান কেবলমাত্র ধনাত্মক হইবে। [The values of y in (1) are only positive.]

$(1) \Rightarrow y^2 = \frac{1}{x+1}, \; y \nleq 0$

$\Rightarrow x + 1 = \frac{1}{y^2}, \; y \nleq 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{y^2} - 1, \; y \nleq 0$

এখানে $y > 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত।

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$
$= (0, \infty)$.

(ii) $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

এখানে $2 - x > 0$ বা $x < 2$ এর জন্য কেবলমাত্র $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [Here $f(x)$ gives real values only for $2 - x > 0$ or $x < 2$.]

$\therefore D_f = \{x : x < 2\}$
$= (-\infty, 2)$

আবার, $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান কেবলমাত্র ধনাত্মক হইবে।

$(1) \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2-x}, \; y \nleq 0$

$\Rightarrow 2 - x = \frac{1}{y^2}, \; y \nleq 0$

$\Rightarrow x = 2 - \frac{1}{y^2}, \; y \nleq 0$

এখানে $y > 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত হইবে।

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$

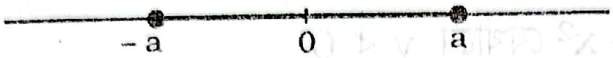
$= (0, \infty)$

9. $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a function of the form $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$] :

এখানে f(x) এর মান বাস্তব হইবে যদি $a^2 - x^2 \geq 0$ হয় [Here f(x) will be real if $a^2 - x^2 \geq 0$]

$$\Rightarrow x^2 \leq a^2$$

$$\Rightarrow -a \leq x \leq a$$



$\therefore D_f = \{x : -a \leq x \leq a\}$

$= [-a, a]$

আবার, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান ঋণাত্মক হইতে পারে না। [In (1) the value of y can not be negative.]

$(1) \Rightarrow y^2 = a^2 - x^2,\ y \not< 0$

$\Rightarrow x^2 = a^2 - y^2,\ y \not< 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{a^2 - y^2},\ y \not< 0$

এখানে x সংজ্ঞায়িত হইবে যদি $a^2 - y^2 \geq 0$ এবং $y \not< 0$ হয়। [Here x will be defined if $a^2 - y^2 \geq 0$ and $y \not< 0$.]

$$\Rightarrow y^2 \leq a^2 \text{ কিন্তু } y \not< 0$$

$$\Rightarrow -a \leq y \leq a \text{ যেখানে } y \not< 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq y \leq a$$

$\therefore R_f = \{y : 0 \leq y \leq a\}$

$= [0, a]$

উদাহরণ-15. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

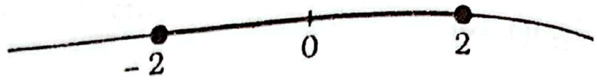
(i) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(ii) $y = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$ **[NUH(NM)–2006]**

সমাধান (i) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

এখানে f(x) এর মান বাস্তব হইবে যদি [Here the value of f(x) will be real if]

$4 - x^2 \geq 0$ হয়।



$\Rightarrow x^2 \leq 4$

$\Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

$\therefore D_f = \{x : -2 \leq x \leq 2\}$

$= [-2, 2]$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান ঋণাত্মক হয় না অর্থাৎ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য হইবে। [In (1) the value of y can not be negative, that is, the value of y will be positive or zero.]

(1) $\Rightarrow y^2 = 4 - x^2$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x^2 = 4 - y^2, \ y \nless 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{4 - y^2}, \ y \nless 0$

এখানে x এর মান বিদ্যমান থাকিবে যদি $4 - y^2 \geq 0$ এবং $y \nless 0$ হয়। [Here the value of x will be exist if $4 - y^2 \geq 0$ and $y \nless 0$.]

$\Rightarrow y^2 - 4 \leq 0$ এবং $y \nless 0$

$\Rightarrow y^2 \leq 4$ এবং $y \nless 0$

$\Rightarrow -2 \leq y \leq 2$ এবং $y \nless 0$

$\Rightarrow 0 \leq y \leq 2$

$\therefore R_f = \{y : 0 \leq y \leq 2\}$

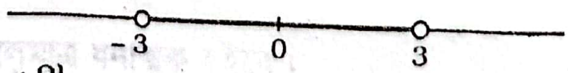
$= [0, 2]$

(ii) $y = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$

এখানে y এর মান বাস্তব হইবে যদি $9 - x^2 > 0$ হয়। [Here the value of y will be real if $9 - x^2 > 0$]

$\Rightarrow x^2 < 9$

$\Rightarrow -3 < x < 3$



$\therefore D_f = \{x : -3 < x < 3\}$

$= (-3, 3)$

আবার, $y = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$ ফাংশনে y এর মান ঋণাত্মক বা শূন্য হইবে না অর্থাৎ y এর মান ধনাত্মক হইবে। [Again, in the function $y = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$, the value of y can not be negative or zero, that is, the value of y will be positive.]

$\therefore y^2 = \frac{1}{9-x^2}$ যেখানে $y \neq 0$

$\Rightarrow 9 - x^2 = \frac{1}{y^2}, y \neq 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{9 - \frac{1}{y^2}}\ , y \neq 0$

এখানে x এর মান বিদ্যমান থাকিবে যদি $9 - \frac{1}{y^2} \geq 0$ এবং $y \neq 0$ হয়। [Here the value of x will exist if $9 - \frac{1}{y^2} \geq 0$ and $y \neq 0$]

$\Rightarrow 9y^2 - 1 \geq 0$ এবং $y \neq 0$

$\Rightarrow y^2 - \frac{1}{9} \geq 0$ এবং $\neq 0$

$\Rightarrow y^2 \geq \frac{1}{9}$ এবং $y \neq 0$

$\Rightarrow \left(y \leq -\frac{1}{3}\right.$ বা $\left.y \geq \frac{1}{3}\right)$ এবং $y \neq 0$

$\Rightarrow y \geq \frac{1}{3}$

$\therefore R_f = \left\{y : y \geq \frac{1}{3}\right\} = \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$

দ্রষ্টব্য ঃ নিম্নে দুইটি অসমতার সমাধান পদ্ধতি আলোচনাসহ কয়েকটি অসমতার সমাধান ছকে দেওয়া হইল ঃ

1.A.13. $x^2 - a^2 < 0$ অসমতার সমাধান (Solution of the inequality $x^2 - a^2 < 0$) :

এখানে $(x + a)(x - a) < 0$

দুইটি উৎপাদকের গুণফল ঋণাত্মক হইলে একটি উৎপাদক ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হইবে। [Product of two factors is negative when one factor is positive and the other factor is negative.]

$\therefore$ ($x + a > 0$ এবং $x - a < 0$) অথবা ($x + a < 0$ এবং $x - a > 0$) হইবে।

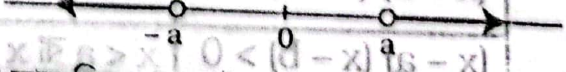
১ম ক্ষেত্রে ঃ $x + a > 0$ এবং $x - a < 0$

$\Rightarrow x > -a$ এবং $x < a$

$\Rightarrow -a < x < a$

২য় ক্ষেত্রে ঃ $x + a < 0$ এবং $x - a > 0$

$\Rightarrow x < -a$ এবং $x > a$



এখানে $x < -a$ এবং $x > a$ শর্তে x এ কোন মান বিদ্যমান নাই।

$\therefore x^2 - a^2 < 0$ অসমতাটির সমাধান $-a < x < a$

[Here, there does not exists any value of x under the condition $x < -a$ and $x > a$. Therefore, the inequality $x^2 - a^2 < 0$ has the solution $-a < x < a$.]

1.A.14. $x^2 - a^2 > 0$ অসমতার সমাধান (Solution of the inequality $x^2 - a^2 > 0$) :

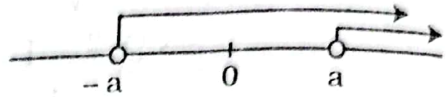
এখানে $(x + a)(x - a) > 0$

দুইটি উৎপাদকের গুণফল ধনাত্মক হইলে উভয় উৎপাদক ধনাত্মক অথবা উভয় উৎপাদক ঋণাত্মক হইবে। [Product of two factors is positive when both the factors either positive or negative.]

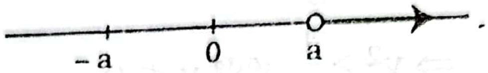
$\therefore$ ($x + a > 0$ এবং $x - a > 0$) অথবা ($x + a < 0$ এবং $x - a < 0$)

১ম ক্ষেত্রে ঃ $x + a > 0$ এবং $x - a > 0$

$\Rightarrow x > -a$ এবং $x > a$

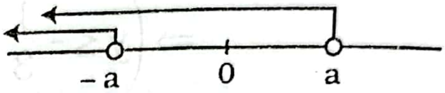


এখানে $x > -a$ এবং $x > a$ শর্তে $x > a$ হইবে।

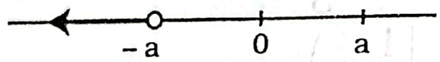


২য় ক্ষেত্রে ঃ $x + a < 0$ এবং $x - a < 0$

$\Rightarrow x < -a$ এবং $x < a$

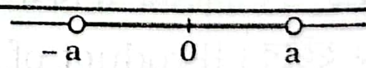
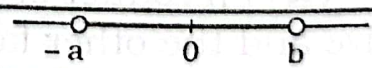
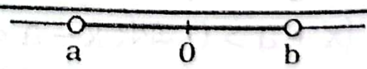
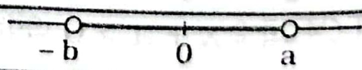
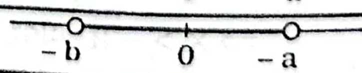
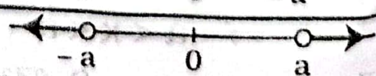
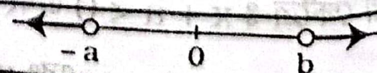
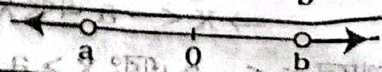
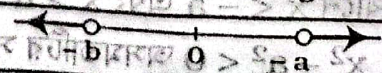
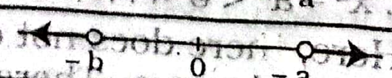


এখানে $x < -a$ এবং $x < a$ শর্তে $x < -a$ হইবে।



$\therefore$ $x^2 - a^2 > 0$ অসমতাটির সমাধান ঃ $x < -a$ অথবা $x > a$

1.A.15. সংখ্যারেখায় অসমতার সমাধান (Solution of inequalities in real line) : $x^2 - a^2 < 0$ বা $x^2 - a^2 > 0$ অসমতার সমাধানের নিয়মে সমাধান করা যায় এইরূপ কয়েকটি অসমতার সমাধান ও সংখ্যারেখায় ইহার অবস্থান নিম্নের ছকে দেওয়া হইল। এখানে a ও b ধনাত্মক এবং $a < b$ ধরা হইয়াছে।

অসমতা	সমাধান	সংখ্যারেখা
$x^2 - a^2 < 0$	$-a < x < a$	
$(x + a)(x - b) < 0$	$-a < x < b$	
$(x - a)(x - b) < 0$	$a < x < b$	
$(x - a)(x + b) < 0$	$-b < x < a$	
$(x + a)(x + b) < 0$	$-b < x < -a$	
$x^2 - a^2 > 0$	$x < -a$ বা $x > a$	
$(x + a)(x - b) > 0$	$x < -a$ বা $x > b$	
$(x - a)(x - b) > 0$	$x < a$ বা $x > b$	
$(x - a)(x + b) > 0$	$x < -b$ বা $x > a$	
$(x + a)(x + b) > 0$	$x < -b$ বা $x > -a$	

নোট ঃ উৎপাদকদ্বয় অনুপাত আকারে থাকিলেও একইরূপ সমাধান হইবে।

10. $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a function of the form $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$] :

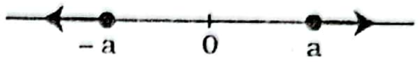
এখানে $f(x)$ এর মান বাস্তব হইবে যদি $x^2 - a^2 \geq 0$ হয়। [Here the value of $f(x)$ will be real if $x^2 - a^2 \geq 0$]

$$\Rightarrow x^2 \geq a^2$$

$$\Rightarrow x \leq -a \text{ বা } x \geq a$$

$\therefore D_f = \{x : x \leq -a\} \cup \{x : x \geq a\}$

$= (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$



আবার, $y = f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান কেবলমাত্র ধনাত্মক বা শূন্য হইবে। [In (1), the value of y only be positive or zero.]

$(1) \Rightarrow y^2 = x^2 - a^2$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x^2 = y^2 + a^2, \; y \nless 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 + a^2}, \; y \nless 0$

এখানে $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত হইবে। [Here x is defined for $y \geq 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

উদাহরণ–16. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions.]

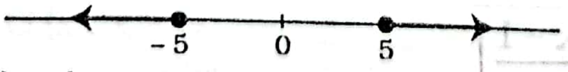
(i) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ (ii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ **[NUH(NM)–2007]**

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$

এখানে $f(x)$ এর মান বাস্তব হইবে যদি $x^2 - 25 \geq 0$ হয়। [Here the value of $f(x)$ will be real if $x^2 - 25 \geq 0$]

$$\Rightarrow x^2 \geq 25$$

$$\Rightarrow x \leq -5 \text{ বা } x \geq 5$$



$\therefore D_f = \{x : x \leq -5\} \cup \{x : x \geq 5\}$

$= (-\infty, -5] \cup [5, \infty)$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান কেবলমাত্র ধনাত্মক বা শূন্য হইবে। [In (1), the value of y only be positive or zero.]

$(1) \Rightarrow y^2 = x^2 - 25$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 + 25}, \; y \nless 0$

এখানে $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for $y \geq 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

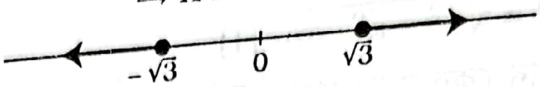
$= [0, \infty)$

(ii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$

এখানে f(x) এর মান বাস্তব হইবে যদি $x^2 - 3 \geq 0$ হয়। [Here the value of f(x) will be real if $x^2 - 3 \geq 0$]

$$\Rightarrow x^2 \geq 3$$

$$\Rightarrow x \leq -\sqrt{3} \text{ বা } x \geq \sqrt{3}$$



$\therefore D_f = \{x : x \leq -\sqrt{3}\} \cup \{x : x \geq \sqrt{3}\}$

$= (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty)$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য হইবে। [In (1), the value of y will be positive or zero.]

$(1) \Rightarrow y^2 = x^2 - 3$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 + 3}, y \nless 0$

এখানে $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for $y \geq 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

উদাহরণ–**17.** নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions.]

(i) $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ **[NUH–2010]**

(ii) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **[NUH(NM)–2008]**

(iii) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

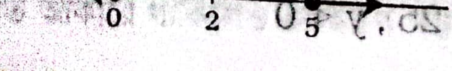
(iv) $y = \sqrt{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$

সমাধান ঃ (i) $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

$= \sqrt{(x-2)(x-5)}$

এখানে y এর মান বাস্তব হইবে যদি $(x-2)(x-5) \geq 0$ হয়। [Here the value of y will be real if $(x-2)(x-5) \geq 0$.]

$$\Rightarrow x \leq 2 \text{ বা } x \geq 5$$



$\therefore D_f = \{x : x \le 2\} \cup \{x : x \ge 5\}$

$= (-\infty, 2] \cup [5, \infty)$

আবার, $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান সর্বদা ধনাত্মক বা শূন্য। [In (1), the value of y is always positive or zero.]

$(1) \Rightarrow y^2 = x^2 - 7x + 10$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x^2 - 7x + (10 - y^2) = 0, \; y \nless 0$

এখানে x এর মান বাস্তব এবং সংজ্ঞায়িত হইবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 এবং $y \nless 0$ হয়। [Here the value of x will be real and it be defined if the descriminent ≥ 0 and $y \nless 0$.]

$\Rightarrow 49 - 4(10 - y^2) \ge 0$ এবং $y \nless 0$ হয়।

$\Rightarrow 4y^2 + 9 \ge 0$ এবং $y \nless 0$

$\Rightarrow y \ge 0$, যা উভয় অসমতার জন্য সত্য। [Which is true for both the inequalities.]

$\therefore R_f = \{y : y \ge 0\}$

$= [0, \infty)$

(ii) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

এখানে y এর মান বাস্তব হইবে যদি $x^2 - 2x \ge 0$ হয়। [Here the value of y will be real if $x^2 - 2x \ge 0$.]

$$\Rightarrow x(x - 2) \ge 0$$

$$\Rightarrow x \le 0 \text{ বা } x \ge 2$$

$\therefore D_f = \{x : x \le 0\} \cup \{x : x \ge 2\}$

$= (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

আবার, $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান ঋণাত্মক হইবে না। [In (1), the value of y can not be negative.]

$(1) \Rightarrow y^2 = x^2 - 2x$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - y^2 = 0$ এবং $y \nless 0$

এখানে x এর মান বাস্তব ও সংজ্ঞায়িত হইবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 এবং $y \nless 0$ হয়। [Here the value of x will be real and it be defined if the descriminent ≥ 0 and $y \nless 0$.]

$\Rightarrow 4 + 4y^2 \geq 0$ এবং $y \nless 0$

$\Rightarrow y \geq 0$, যা উভয় অসমতার জন্য সত্য। [Which is true for both the inequalities.]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

(iii) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ ...... (1)

এখানে x এর সকল মানের জন্য y এর মান বাস্তব হয়। [Here y will be real for all values of x]

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার (1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য হইবে। [In (1), the value of y will be positive or zero.]

$(1) \Rightarrow y^2 = x^2 + 1$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 - 1}$, $y \nless 0$

x সংজ্ঞায়িত হইবে যদি $y^2 - 1 \geq 0$ এবং $y \nless 0$ হয় [x will be defined if $y^2 - 1 \geq 0$ and $y \nless 0$]

$\Rightarrow (y \leq -1$ বা $y \geq 1)$ এবং $y \nless 0$

$\Rightarrow y \geq 1$

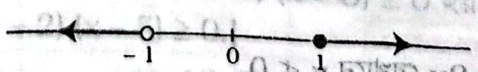
$\therefore R_f = \{y : y \geq 1\}$

$= [1, \infty)$

(iv) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ ...... (1)

এখানে y এর মান বাস্তব হইবে যদি $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$ হয়। [The value of y will be real if $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$.]

$\Rightarrow x < -1$ বা $x \geq 1$



$\therefore D_f = \{x : x < -1\} \cup \{x : x \geq 1\}$

$= (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$

আবার (1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য হইবে। [Again, in (1), the value of y will be positive or zero.]

$(1) \Rightarrow y^2 = \frac{x-1}{x+1}$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow xy^2 + y^2 = x - 1, \ y \nless 0$

$\Rightarrow x(1 - y^2) = y^2 + 1, \ y \nless 0$

$\Rightarrow x = \frac{y^2 + 1}{(1 + y)(1 - y)}, \ y \nless 0$

এখানে $y = 1$ ব্যতীত $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for $y \geq 0$ except $y = 1$.]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\} - \{1\}$

$= [0, \infty) - \{1\}$

$= [0, 1) \cup (1, \infty)$

উদাহরণ–18. নিম্নের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions.]

(i) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$ (ii) $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$ **[NUH(NM)–2007]**

(iii) $y = f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2}$.

সমাধান ঃ (i) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$ ...... (1)

এখানে y এর মান বাস্তব হইবে যদি $x^2 - 4x > 0$ হয়। [Here the value of y will be real if $x^2 - 4x > 0$.]

$\Rightarrow x(x - 4) > 0$

$\Rightarrow x < 0$ বা $x > 4$

$\therefore D_f = \{x : x < 0\} \cup \{x : x > 4\}$

$= (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$

আবার (1) এ y এর মান অঋণাত্মক হইবে। [Again in (1) the value of y will be non-negative.]

$(1) \Rightarrow y^2 = \frac{1}{x^2 - 4x}$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x - \frac{1}{y^2} = 0, \ y \nless 0$

x এর মান বাস্তব ও সংজ্ঞায়িত হইবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 এবং $y \nless 0$ হয়। [x will be real and defined if the descriminent ≥ 0 and $y \nless 0$]

$\Rightarrow 16 + \frac{4}{y^2} \geq 0$ এবং $y \nless 0$

$\Rightarrow y > 0$, যা উভয় অসমতার জন্য সত্য। [Which is true for both the inequalities.]

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$

$= (0, \infty)$

(ii) $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$

$= \frac{1}{(x-1)(x-3)}$

এখানে $x = 1$ বা $x = 3$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বাস্তব হয়। [Here the value of y is real for all real values of x except $x = 1$ or $x = 3$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$

আবার, $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 - \frac{1}{y} = 0$

এখানে x এর মান বাস্তব হইবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 হয়। [Here the value of x will be real if descriminent ≥ 0.]

$$\Rightarrow 16 - 4\left(3 - \frac{1}{y}\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow 4 + \frac{4}{y} \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{y} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{y+1}{y} \geq 0$$

$\Rightarrow y \leq -1$ বা $y > 0$

$\therefore R_f = \{y : y \leq -1\} \cup \{y : y > 0\}$

$= (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$

(iii) $y = f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2}$

$= \frac{x^2}{(x-1)(x-2)}$

এখানে $x = 1$ বা $x = 2$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বাস্তব হয়। [Here the value of y is real for all real values of x except $x = 1$ or $x = 2$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

আবার, $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 3x + 2}$

$\Rightarrow x^2y - 3xy + 2y = x^2$

$\Rightarrow (y - 1)\,x^2 - 3xy + 2y = 0$

এখানে x এর মান বাস্তব হইবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 হয়। [Here the value of x will be real if descriminent ≥ 0.

$$\Rightarrow 9y^2 - 4(y - 1)\cdot 2y \geq 0$$
$$\Rightarrow y^2 + 8y \geq 0$$
$$\Rightarrow y\,(y + 8) \geq 0$$
$$\Rightarrow y \leq -8 \text{ বা } y \geq 0$$

$\therefore R_f = \{y : y \leq -8\} \cup \{y : y \geq 0\}$

$= (-\infty, -8] \cup [0, \infty)$

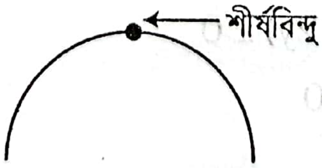
11. $f(x) = ax^2 + bx + c$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a function of the form $f(x) = ax^2 + bx + c$.]

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হইবে।

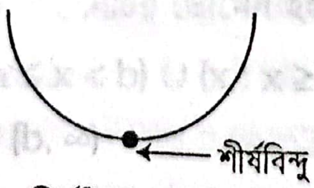
$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ প্যারাবোলার সমীকরণ যাহার অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল। সুতরাং প্যারাবোলার শীর্ষবিন্দু লঘিষ্ঠ বিন্দু বা গরিষ্ঠ বিন্দু হইবে।

$a < 0$ হইলে প্যারাবোলার আকার হইবে;



$a > 0$ হইলে প্যারাবোলার আকার হইবে;



$\therefore$ $a < 0$ এর জন্য $R_f = (-\infty$, শীর্ষবিন্দুর কোটি]

এবং $a > 0$ এর জন্য $R_f =$ [শীর্ষবিন্দুর কোটি, $\infty)$

নোট ঃ নিশ্চায়ক ≥ 0 ধরেও রেঞ্জ নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ–19. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$ (ii) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$

সমাধান ঃ (i) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বাস্তব হইবে।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 10 = 2y$

$\Rightarrow (x+2)^2 = 2y - 6$

$= 2(y-3)$

$\therefore$ প্যারাবোলায় শীর্ষবিন্দু $= (x + 2 = 0, y - 3 = 0)$

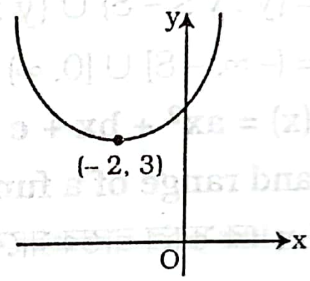
$= (x = -2, y = 3)$

$= (-2, 3)$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর কোটি $= 3$

$\therefore R_f =$ [শীর্ষবিন্দুর কোটি, ∞)

$= [3, \infty)$



অন্যভাবে রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

$y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$

$\Rightarrow x^2 + 4x + (10 - 2y) = 0$

এখানে x এর মান বাস্তব হইবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 হয়।

$\Rightarrow 16 - 4(10 - 2y) \geq 0$

$\Rightarrow -24 + 8y \geq 0$

$\Rightarrow y \geq 3$

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \{y : y \geq 3\}$

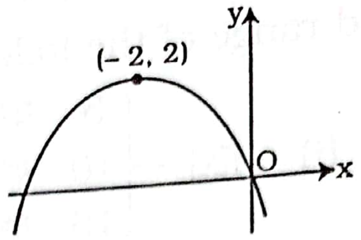
$= [3, \infty)$

(ii) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$ প্যারাবোলার সমীকরণ।



$\Rightarrow x^2 + 4x = -2y$

$\Rightarrow (x+2)^2 = -2(y-2)$

$\therefore$ প্যারাবোলার শীর্ষবিন্দু $= (x+2=0, y-2=0)$

$= (-2, 2)$

শীর্ষবিন্দুর কোটি $= 2$

$\therefore R_f = (-\infty,$ শীর্ষবিন্দুর কোটি$]$

$= (-\infty, 2]$

অন্যভাবে রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 2y = 0$$

এখানে x এর মান বাস্তব হইবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 হয়।

$$\Rightarrow 16 - 4\cdot 2y \geq 0$$

$$\Rightarrow y \leq 2$$

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \{y : y \leq 2\}$

$= (-\infty, 2]$

12. খন্ডিত ফাংশন এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a piece wise function.] :

যদি কোন ফাংশন ডোমেনের বিভিন্ন অংশের জন্য ভিন্ন ভিন্নভাবে সংজ্ঞায়িত হয় তবে তাহাকে খন্ডিত ফাংশন বলা হয়।

$$y = \begin{cases} f_1(x) \text{ যখন } x < a \\ f_2(x) \text{ যখন } a \leq x < b \\ f_3(x) \text{ যখন } x \geq b \end{cases}$$ একটি খন্ডিত ফাংশন।

এখানে $x < a$, $a \leq x < b$ এবং $x \geq b$ ব্যবধিতে y এর মান সংজ্ঞায়িত। সুতরাং ব্যবধিগুলির সংযোগ (union) সেট ফাংশনটির ডোমেন হইবে।

$\therefore D_f = \{x : x < a\} \cup \{x : a \leq x < b\} \cup \{x : x \geq b\}$

$= (-\infty, a) \cup [a, b) \cup [b, \infty)$

$= (-\infty, \infty)$

$= \mathbb{R}$

আবার প্রত্যেক ব্যবধিতে বিদ্যমান সকল y এর মানের সেট রেঞ্জ হইবে। নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে খন্ডিত ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করা হইল।

উদাহরণ-20. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 10 & \text{যখন } 1 < x \leq 2 \\ 15 & \text{যখন } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

(ii) $y = \begin{cases} 1 - x & \text{যখন } -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{যখন } 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$ [NUH–2007]

(iii) $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 & \text{যখন } x = 1/2 \\ 1 - x & \text{যখন } 1/2 < x < 1 \end{cases}$ [RUH–2009]

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 10 & \text{যখন } 1 < x \leq 2 \\ 15 & \text{যখন } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

এখানে $0 < x < 1$, $1 < x \leq 2$ এবং $2 < x \leq 3$ ব্যবধিতে f(x) এর মান সংজ্ঞায়িত।

$\therefore D_f = \{x : 0 < x < 1\} \cup \{x : 1 < x \leq 2\} \cup \{x : 2 < x \leq 3\}$

$= (0, 1) \cup (1, 2] \cup (2, 3]$

$= (0, 1) \cup (1, 3]$

আবার, $0 < x < 1$ ব্যবধিতে $f(x) = 5$

$1 < x \leq 2$ ব্যবধিতে $f(x) = 10$

এবং $2 < x \leq 3$ ব্যবধিতে $f(x) = 15$

$\therefore R_f = \{5, 10, 15\}$

(ii) $y = \begin{cases} 1 - x & \text{যখন } -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{যখন } 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$

এখানে $-1 \leq x < 1$, $1 \leq x \leq 2$ এবং $x > 2$ ব্যবধিতে y এর মান সংজ্ঞায়িত।

$\therefore D_f = \{x : -1 \leq x < 1\} \cup \{x : 1 \leq x \leq 2\} \cup \{x : x > 2\}$

$= [-1, 1) \cup [1, 2] \cup (2, \infty)$

$= [-1, \infty)$

আবার, $-1 \leq x < 1$ ব্যবধিতে $y = 1 - x$ হইতে পাই $0 < y \leq 2$

$1 \leq x \leq 2$ ব্যবধিতে $y = 0$

এবং $2 < x$ ব্যবধিতে $y = x^2 - 4$ হইতে পাই $0 < y$

$\therefore R_f = \{y : 0 < y \le 2\} \cup \{0\} \cup \{y : y > 0\}$

$= (0, 2] \cup \{0\} \cup (0, \infty)$

$= [0, \infty)$

(iii) প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } 0 \le x < 1/2 \\ 1 & \text{যখন } x = 1/2 \\ 1-x & \text{যখন } 1/2 < x < 1 \end{cases}$

এখানে $0 \le x < \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ এবং $\frac{1}{2} < x < 1$ এর জন্য f(x) এর মান সংজ্ঞায়িত।

সুতরাং $D_f = \left\{x : 0 \le x < \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left\{x : \frac{1}{2} < x < 1\right\} = [0, 1)$

আবার, $0 \le x < \frac{1}{2}$ ব্যবধিতে $f(x) \in [0, 1/2)$

$x = \frac{1}{2}$ এর জন্য $f(x) = 1$

এবং $\frac{1}{2} < x < 1$ ব্যবধিতে $f(x) \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

সুতরাং $R_f = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \{1\} \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \{1\}$

13. পরম মান ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a absolute value function] :

পরম মান ফাংশনকে খন্ডিত ফাংশনে প্রকাশ করিয়া ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করিতে হয়। $a < b$ এর জন্য একটি পরমমান ফাংশনকে নিম্নরূপে খন্ডিত ফাংশনে প্রকাশ করা যায়।

$$f(x) = |x - a| + |x - b|$$

$x < a$ এর জন্য $f(x) = -(x - a) - (x - b) = a + b - 2x$

$a \le x < b$ এর জন্য $f(x) = (x - a) - (x - b) = b - a$

$b \le x$ এর জন্য $f(x) = (x - a) + (x - b) = 2x - a - b$

$\therefore$ খন্ডিত ফাংশন, $f(x) = \begin{cases} a + b - 2x & \text{যখন } x < a \\ b - a & \text{যখন } a \le x < b \\ 2x - a - b & \text{যখন } b \le x \end{cases}$

উদাহরণ-21. নিম্নের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$ **[NUH(NM)-2005, 2009]**

(ii) $f(x) = |x - 1| + |x + 3|$ **[NUH-2008]**

(iii) $f(x) = \frac{x}{|x|}$ **[NUH-2012, DUH-1981, CUH-2007]**

সমাধান ঃ (i) $f(x) = |x+1| + |x-1|$

$x < -1$ এর জন্য $f(x) = -(x+1) - (x-1)$

$= -2x$

$-1 \leq x < 1$ এর জন্য $f(x) = x + 1 - (x - 1)$

$= 2$

$1 \leq x$ এর জন্য $f(x) = x + 1 + x - 1$

$= 2x$

সুতরাং আমরা পাই, $y = f(x) = \begin{cases} -2x & \text{যখন } x < -1 \\ 2 & \text{যখন } -1 \leq x < 1 \\ 2x & \text{যখন } 1 \leq x \end{cases}$

$\therefore D_f = \{x : x < -1\} \cup \{x : -1 \leq x < 1\} \cup \{x : 1 \leq x\}$

$= (-\infty, -1) \cup [-1, 1) \cup [1, \infty) = \mathbb{R}$

আবার, $x < -1$ ব্যবধিতে $y > 2$

$-1 \leq x < 1$ ব্যবধিতে $y = 2$

$1 \leq x$ ব্যবধিতে $y \geq 2$

$\therefore R_f = \{y : y > 2\} \cup \{2\}$

$= (2, \infty) \cup \{2\}$

$= [2, \infty)$

(ii) $f(x) = |x-1| + |x+3|$

$= |x+3| + |x-1|$

$x < -3$ এর জন্য $f(x) = -(x+3) - (x-1) = -2x - 2$

$-3 \leq x < 1$ এর জন্য $f(x) = (x+3) - (x-1) = 4$

$1 \leq x$ এর জন্য $f(x) = (x+3) + (x-1) = 2x + 2$

সুতরাং আমরা পাই, $y = f(x) = \begin{cases} -2x-2 & \text{যখন } x < -3 \\ 4 & \text{যখন } -3 \leq x < 1 \\ 2x+2 & \text{যখন } 1 \leq x \end{cases}$

$\therefore D_f = \{x : x < -3\} \cup \{x : -3 \leq x < 1\} \cup \{x : 1 \leq x\}$

$= (-\infty, -3) \cup [-3, 1) \cup [1, \infty)$

$= \mathbb{R}$

আবার, $x < -3$ ব্যবধিতে $y > 4$

$-3 \leq x < 1$ ব্যবধিতে $y = 4$

$1 \leq x$ ব্যবধিতে $y \geq 4$

$\therefore R_f = \{y : y > 4\} \cup \{4\}$

$= [4, \infty)$

(iii) $f(x) = \frac{x}{|x|}$

$x < 0$ এর জন্য $f(x) = \frac{x}{-x} = -1$

$0 < x$ এর জন্য $f(x) = \frac{x}{x} = 1$ [$x = 0$ এর জন্য $f(x)$ বিদ্যমান নয়]

সুতরাং আমরা পাই, $y = f(x) = \begin{cases} -1 & \text{যখন } x < 0 \\ 1 & \text{যখন } 0 < x \end{cases}$

$\therefore D_f = \{x : x < 0\} \cup \{x : x > 0\}$
$= \mathbb{R} - \{0\}$ এবং $R_f = \{-1, 1\}$

14. সূচকীয় ফাংশন ও লগারিদিমিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of exponential function and logarithmic function] :

$y = a^x$ কে সূচকীয় ফাংশন বলা হয়।

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = a^x$

$\Rightarrow x = \log_a y$ লগারিদিমিক ফাংশন।

এখানে $y > 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$
$= (0, \infty)$

নোট ঃ $\log_a (0)$ বা $\log_a$ (ঋণাত্মক সংখ্যা) বিদ্যমান নয়।

উদাহরণ–**22.** নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = e^x$

(ii) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

সমাধান ঃ (i) $f(x) = e^x$

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = f(x) = e^x$

$\Rightarrow e^x = y$

$\Rightarrow x = \ln y$

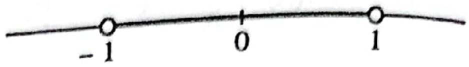
এখানে কেবলমাত্র $y > 0$ এর জন্য x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$
$= (0, \infty)$

(ii) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

এখানে f(x) এর মান বিদ্যমান হইবে যদি

$$\frac{1+x}{1-x} > 0 \text{ হয়।}$$



$$\Rightarrow \frac{x+1}{x-1} < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 1$$

$\therefore D_f = \{x : -1 < x < 1\}$

$= (-1, 1)$

আবার, $y = f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = y$$

$$\Rightarrow \frac{1+x}{1-x} = e^y$$

$$\Rightarrow 1 + x = e^y - xe^y$$

$$\Rightarrow x = \frac{e^y - 1}{e^y + 1}$$

এখানে y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore R_f = \mathbb{R}$

উদাহরণ–23. $f(x) = \ln(x-2)$ ফাংশনটির D_f এবং R_f নির্ণয় কর। [Find D_f and R_f of the function $f(x) = \ln(x-2)$.]

সমাধান ঃ আমরা জানি লগারিদম শুধু ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত।

$\therefore f(x) = \ln(x-2)$ এর মান বাস্তব হইবে যদি $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \{x : x > 2\} = (2, \infty)$

আবার ধরি $y = f(x) = \ln(x-2) \Rightarrow x - 2 = e^y$

$$\Rightarrow x = e^y + 2$$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য e^y বাস্তব, ফলে $x = e^y + 2$ বাস্তব।

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$.

15. ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a trigonometric function] :

(i) $y = \sin x$

x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $x = \sin^{-1} y$

এখানে x এর মান কেবলমাত্র $-1 \le y \le 1$ ব্যবধিতে বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \{y : -1 \le y \le 1\}$
$= [-1, 1]$

(ii) $y = \cos x$

সাইন ফাংশনের অনুরূপ, $D_f = \mathbb{R}$ এবং $R_f = [-1, 1]$

(iii) $y = \tan x$

এখানে $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ এর জন্য y এর মান বিদ্যমান নয়।
x এর এইমান সমূহ ব্যতীত অবশিষ্ট সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{\cdots -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\right\}$

আবার, $y = \tan x \Rightarrow x = \tan^{-1} y$

এখানে y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \mathbb{R}$

(iv) $y = \cot x$

এখানে $x = n\pi$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ এর জন্য y এর মান বিদ্যমান নয় এবং অবশিষ্ট সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{\cdots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\}$

আবার, $y = \cot x$
$\Rightarrow x = \cot^{-1} y$

এখানে y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \mathbb{R}$

(v) $y = \sec x$

এখানে $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ এর জন্য y এর মান বিদ্যমান নয় এবং অবশিষ্ট সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{\cdots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\right\}$

আবার, $y = \sec x$
$\Rightarrow x = \sec^{-1} y$

এখানে $-1 < y < 1$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \mathbb{R} - (-1, 1)$
$= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

(vi) $y = \operatorname{cosec} x$

এখানে $x = n\pi$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ এর জন্য y এর মান বিদ্যমান নয় এবং অবশিষ্ট সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{\cdots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\}$

আবার, $y = \operatorname{cosec} x$

$\Rightarrow x = \operatorname{cosec}^{-1} y$

এখানে $-1 < y < 1$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \mathbb{R} - (-1, 1)$

$= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

নোট ঃ বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ পরস্পর পরিবর্তন হইবে।

উদাহরণ–24. নিম্নলিখিত ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions.] :

(i) $f(x) = \sin 2x$, (ii) $f(x) = \cos 3x$ এবং (iii) $f(x) = \tan 4x$.

সমাধান ঃ (i). আমরা জানি সাইন অনুপাতের সর্বনিম্ন মান -1 এবং সর্বোচ্চ মান $+1$. সুতরাং সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $f(x) = \sin 2x$ এর মান বাস্তব হইবে এবং এইমান -1 ও 1 সহ ইহাদের মধ্যবর্তী বাস্তব সংখ্যা হইবে। অর্থাৎ

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \le f(x) = \sin 2x \le 1$$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $R_f = [-1, 1]$

(ii) আমরা জানি, কোসাইন অনুপাতের সর্বনিম্ন মান -1 এবং সর্বোচ্চ মান $+1$. সুতরাং সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $f(x) = \cos 3x$ এর মান বাস্তব হইবে এবং এইমান -1 ও 1 সহ ইহাদের মধ্যবর্তী বাস্তব সংখ্যা হইবে। অর্থাৎ

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \le f(x) = \cos 3x \le 1$$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $R_f = [-1, 1]$.

(iii) $f(x) = \tan 4x = \pm\infty$ হইলে ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

আবার $\tan 4x = \pm\infty$ হইলে পাই

$$4x = (2n+1)\frac{\pi}{2}; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$\Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{8}; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$\Rightarrow x = \cdots, \frac{-3\pi}{8}, \frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \cdots$$

x এর এই মানগুলি ব্যতীত অন্য সকল বাস্তব সংখ্যার সেট ডোমেন হইবে এবং রেঞ্জ হইবে সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \mathbb{R} - \left\{\cdots, \frac{-3\pi}{8}, \frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \cdots\right\}$

এবং রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$.

উদাহরণ–25. $f(x) = \sin x + \cos x$ ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the function $f(x) = \sin x + \cos x$.]

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = \sin x + \cos x$

$$= \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

এখানে x এর সকল মানের জন্য $f(x)$ এর মান বিদ্যমান।

$\therefore$ ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$

আবার, x এর সকল মানের জন্য $-1 \le \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$

বা, $-\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$

বা, $-\sqrt{2} \le f(x) \le \sqrt{2}$

$\therefore$ ফাংশনটির রেঞ্জ $R_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

উদাহরণ–26. $f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{x+1}\right)$ ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

[Find domain and range of the function $f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{x+1}\right)$.]

[NUH–2002]

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{x+1}\right)$

এখানে $f(x)$ বিদ্যমান হইবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $-1 \le \frac{2x}{x+1} \le 1$ হয়।

$\Rightarrow -1 \le \frac{2x}{x+1}$	$\frac{2x}{x+1} \le 1$
$\Rightarrow -x-1 \le 2x$	$2x \le x+1$
$\Rightarrow -1 \le 3x$	$x \le 1$
$\Rightarrow -\frac{1}{3} \le x$	

$\therefore -1 < \frac{2x}{x+1} \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \le x \le 1$

সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$

এখন, $f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{x+1}\right)$ হইতে পাই $f(x) = \begin{cases} \pi \text{ যখন } x = -1/3 \\ 0 \text{ যখন } x = 1 \end{cases}$

$\therefore x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ এর জন্য $0 \le f(x) \le \pi$

সুতরাং ফাংশনটির রেঞ্জ $R_f = [0, \pi]$

উদাহরণ–27. দেখাও যে ফাংশন $f(x) = \frac{x}{\sin(1/x)}$ এর

$D_f = \mathbb{R} - \left\{\cdots -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{\pi}, 0, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \cdots\right\}$ এবং $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

[NUH–2004, CUH–2007]

সমাধান : $x = 0$ অথবা $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ হইলে $f(x) = \frac{x}{\sin(1/x)}$ ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত হয়। [The function $f(x) = \frac{x}{\sin(1/x)}$ will be undefined when $x = 0$ or $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.]

এখন $\sin\frac{1}{x} = 0$ হইলে পাই

$$\frac{1}{x} = n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{n\pi}, n \in \mathbb{Z} - \{0\} = \cdots, -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \ldots$$

সুতরাং $x = \cdots, -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{\pi}, 0, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \ldots$ এর জন্য ফাংশন অসংজ্ঞায়িত হয়। এ মানগুলি ডোমেনে এর সদস্য হইবে না। [The function is undefined for $x = \ldots -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{\pi}, 0, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \ldots$. So they will be not in the domain]

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \mathbb{R} - \left\{\cdots, -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{\pi}, 0, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \cdots\right\}$

আবার, যেহেতু $x \neq 0$. সুতরাং $f(x) \neq 0$

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

1(C) অধ্যায়ে শিক্ষার্থীদের সুবিধার্থে আরো অনেক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ সম্পর্কে চিত্রের সাহায্যে আলোচনা করা হইয়াছে। লেখচিত্র থেকে অতি সহজেই ডোমেন ও রেঞ্জ সম্পর্কে ধারণা করা যায়।

Solved Brief/Quiz Questions (সমাধানকৃত অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

Part–A : Brief Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

1.A.1. ক্যালকুলাস কি? (What is Calculus?)

Ans : ক্যালকুলাস হইল গতি এবং পরিবর্তন সম্পর্কিত গণিত। ইহা একটি চলকের সম্পর্কে অপর চলকের পরিবর্তন সম্পর্কিত সুস্পষ্ঠ ধারণা দেয়।

1.A.2. ক্যালকুলাসের আবিষ্কারক কে? (Who are discoverer of Calculus?)

Ans : ইংলিশ গণিতবিদ স্যার আইজ্যাক নিউটন (Sir Isaac Newton : 1642–1727) এবং জার্মান গণিতবিদ গড়ফ্রেড লিবনীজ (Gottfried Leibnitz : 1646–1716) ক্যালকুলাসের আবিষ্কারক। সপ্তদশ শতকের শেষভাগে তাহারা স্বাধীনভাবে ক্যালকুলাস আবিষ্কার করেন।

1.A.3. ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। (Define function.) **[NUH(NM)–2011]**

Ans : যদি X ও Y দুইটি অশূন্যক সেট এবং f এইরূপ একটি নিয়ম হয় যে, প্রত্যেক $x \in X$ এর জন্য একটি অনন্য $y \in Y$ পাওয়া যায় তবে f কে X সেট হইতে Y সেটে একটি ফাংশন বলা হয়। ইহাকে $f : X \to Y$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.4. ফাংশনে অনির্ভরশীল চলক এবং নির্ভরশীল চলক বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by independent variable and dependent variable?)

Ans : $f: X \to Y$ ফাংশনে $x \in X$ কে অনির্ভরশীল চলক এবং y (বা $f(x)$) $\in Y$ কে নির্ভরশীল চলক বলা হয়।

1.A.5. কোন বিন্দুতে ফাংশনের মান বা ইমেজ কাকে বলে? (What is called value or image of a function at a point?)

Ans : $f: X \to Y$ ফাংশনে $x \in X$ এর f সম্পর্কিত উপাদান $f(x)$ বা y কে x বিন্দুতে f এর মান বা ইমেজ বলা হয়। Y সেটের সকল উপাদান ফাংশনের মান বা ইমেজ নাও হইতে পারে।

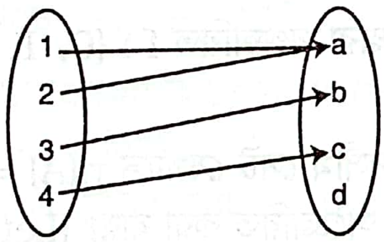
1.A.6. ধরি $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 - 5x + 8$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটির মান বা ইমেজ কত? (Let the function $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is defined by a formula $f(x) = x^2 - 5x + 8$. What is the value or image of the function?)

Ans : এখানে $f(x) = x^2 - 5x + 8$

$\therefore f(0) = 0^2 - 5.0 + 8 = 8$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটির মান বা ইমেজ ৪.

1.A.7. সসীম সেট হইতে সসীম সেটে নিম্নের চিত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত ফাংশনের ইমেজ কোনগুলি? (Which are images of the function from finite set to finite set is defined by the following figure?)



Ans : a, b, c প্রদত্ত ফাংশনটির ইমেজ কিন্তু d ইমেজ নয়।

1.A.8. ফাংশনের ডোমেন ও কোডোমেন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by domain and codomain of a function?)

[NUH–2011, NUH(NM)–2011]

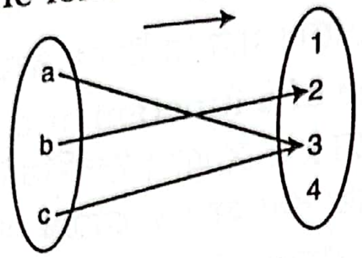
Ans : $f: X \to Y$ ফাংশনের X কে ডোমেন এবং Y কে কোডোমেন বা কাউন্টার ডোমেন বলে। সাধারণতঃ ডোমেনকে D_f এবং কোডোমেনকে Cod_f দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.9. ফাংশনের রেঞ্জ এর সংজ্ঞা দাও। (Define range of a function.)

[NUH–2010, NUH(NM)–2011]

Ans : $f: X \to Y$ ফাংশনের Y সেটের অন্তর্গত সকল f সম্পর্কিত উপাদান বা ইমেজ দ্বারা গঠিত উপসেটকে ফাংশনটির রেঞ্জ বলা হয়। ইহাকে R_f দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.10. নিম্নের চিত্র দ্বারা সসীম সেট হইতে সসীম সেটে সংজ্ঞায়িত ফাংশনের ডোমেন, কোডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। (Find domain, codomain and range of the function from finite set to finite set is defined by the following figure.)



Ans : প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $D_f = \{a, b, c\}$

কোডোমেন $Cod_f = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং রেঞ্জ $R_f = \{2, 3\}$.

1.A.11. যদি $f : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 5, 8, 11, 15\}$ ফাংশনটি $f(x) = 3x + 2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় তবে R_f নির্ণয় কর। (If the function $f : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 5, 8, 11, 15\}$ is defined by $f(x) = 3x + 2$, then find R_f.)

Ans : প্রদত্ত ফাংশনের ক্ষেত্রে, $R_f = \{f(0), f(1), f(2), f(3)\} = \{2, 5, 8, 11\}$

1.A.12. দেখাও যে $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 4, 8, 16\}$ ফাংশন নয়। (Show that $f : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 4, 8, 16\}$ is not function defined by $f(x) = x^2$.)

Ans : এখানে, $f(3) = 9 \notin \{0, 1, 4, 8, 16\}$

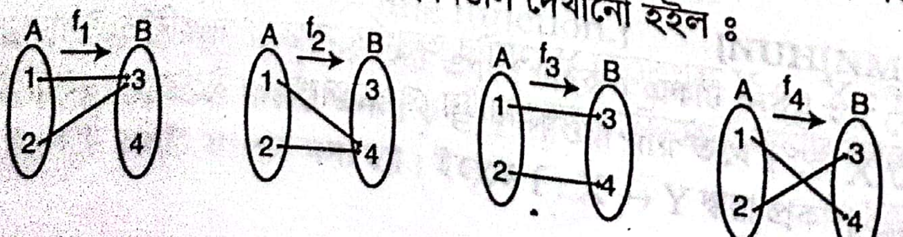
সুতরাং $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 4, 8, 16\}$ ফাংশন নয়।

1.A.13. ধরি A ও B দুইটি সসীম সেট যেখানে $n(A) = p$ এবং $n(B) = q$. A হইতে B তে কয়টি ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়? (Let A and B are finite sets where $n(A) = p$ and $n(B) = q$. How many are functions defined from A to B?)

Ans : যেহেতু A ও B সসীম সেটদ্বয়ের সদস্য সংখ্যা যথাক্রমে p ও q, সুতরাং A হইতে B তে q^p সংখ্যক ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়।

1.A.14. $A = \{1, 2\}$ সেট হইতে $B = \{3, 4\}$ সেটে সম্ভাব্য সকল ফাংশনগুলি চিত্রের মাধ্যমে দেখাও। (Show by figure all possible functions from the set $A = \{1, 2\}$ to the set $B = \{3, 4\}$.)

Ans : $A = \{1, 2\}$ সেট হইতে $B = \{3, 4\}$ সেটে $2^2 = 4$টি ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়। নিম্নে চিত্রের মাধ্যমে ফাংশনগুলি দেখানো হইল :



1.A.15. $y = f(x)$ দ্বারা কি বোঝায়? (What is meant by $y = f(x)$?)

Ans : $y = f(x)$ দ্বারা বোঝায় একটি চলক x এর উপর অপর একটি চলক y নির্ভরশীল।

1.A.16. $y = f(x)$ একটি ফাংশন বলিতে কি বোঝায়? (What is meant by $y = f(x)$ is a function?)

Ans : যদি x এর উপর y এইরূপভাবে নির্ভরশীল হয় যে, x এর প্রত্যেক বাস্তব মান y এর ঠিক একটি বাস্তব মান নির্ণয় করে, তবে $\{(x, f(x)) : y = f)x)\}$ আকারের ফাংশনকে আমরা বলি, $y = f(x)$ একটি ফাংশন বা x এর ফাংশন y.
অন্যভাবে ঃ $y = f(x)$ একটি ফাংশন বলিতে বোঝায়, $y = f(x)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : D_f \rightarrow R_f$ একটি ফাংশন।

1.A.17. যদি $\{(x, f(x) : y = f(x)\}$ ফাংশন না হয়, তবে ইহাকে কি বলে? (If $\{x, f(x)) : y = f(x)\}$ is not function, then what is called it?)

Ans : যদি $\{(x, f(x)) : y = f(x)\}$ ফাংশন না হয় তবে ইহাকে অন্বয় (relation) বলা হয়। এইক্ষেত্রে, $y = f(x)$ কে একটি অন্বয় বলা হয়।

1.A.18. $y = \sin x$ কি একটি ফাংশন? (Is $y = \sin x$ a function?)

Ans : $y = \sin x$ একটি ফাংশন। কারণ x এর প্রত্যেক বাস্তব মানের জন্য y এর অনন্য বাস্তব মান বিদ্যমান।

1.A.19. $y = \sin^{-1} x$ কি ফাংশন? (Is $y = \sin^{-1} x$ function?)

Ans : $[-1, 1]$ সেট হইতে $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ সেটে $y = \sin^{-1} x$ ফাংশন।

1.A.20. $y = f(x)$ ফাংশনের ডোমেন কাকে বলে? (What is called domain of the function $y = f(x)$?)

Ans : x এর যে সমস্ত বাস্তব মানের জন্য $y = f(x)$ সূত্র বা সমীকরণটি সংজ্ঞায়িত বা সিদ্ধ হয় তাহার সেট যদি A হয় তবে A কে $y = f(x)$ ফাংশনের ডোমেন বলে। ইহাকে D_f দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.21. $y = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$ ফাংশনের ডোমেন কত? (What is the domain of the function $y = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$?)

Ans : যেহেতু x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য $y = ax + b$ সিদ্ধ হয়, সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$.

1.A.22. $y = 2x^2 + x + 5$ ফাংশনের ডোমেন কত? (What is the domain of the function $y = 2x^2 + x + 5$?)

Ans : যেহেতু x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য $y = 2x^2 + x + 5$ সিদ্ধ হয়, সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন, $D_f = \mathbb{R}$.

1.A.23. $y = a_0 x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_n$ ফাংশনের ডোমেন কত? (What is the domain of the function $y = a_0 x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_n$?)

Ans : যেহেতু x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য y এর বাস্তব মান বিদ্যমান, সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$.

1.A.24. $y = \cos x$ ফাংশনের ডোমেন কত? (What is domain of the function $y = \cos x$?)

Ans : যেহেতু x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য $y = \cos x$ সিদ্ধ হয়, সুতরাং $D_f = \mathbb{R}$.

1.A.25. $y = \sin 5x$ ফাংশনের ডোমেন কত? (What is the domain of the function $y = \sin 5x$?)

Ans : যেহেতু x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য $y = \sin 5x$ সিদ্ধ, সুতরাং $D_f = \mathbb{R}$.

1.A.26. $y = 2 \sin x + \cos x$ ফাংশনের ডোমেন কত? (What is the domain of the function $y = 2 \sin x + \cos x$?)

Ans : যেহেতু x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য $y = 2 \sin x + \cos x$ সিদ্ধ হয়; সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$.

1.A.27. $y = e^{5x}$ ফাংশনের ডোমেন কত? (What is the domain of the functions $y = e^{5x}$?)

Ans : এখানে x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য y এর বাস্তব মান বিদ্যমান, সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন, $D_f = \mathbb{R}$.

1.A.28. $y = 2^{-x}$ ফাংশনের ডোমেন কত? (What is the domain of the function $y = 2^{-x}$?)

Ans : এখানে x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য y এর বাস্তব মান বিদ্যমান, সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন, $D_f = \mathbb{R}$.

1.A.29. $y = \dfrac{1}{x-1}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। (Find domain of the function $y = \dfrac{1}{x-1}$.)

Ans : $x = 1$ ব্যতীত x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য y এর বাস্তব মান বিদ্যমান। সুতরাং $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

1.A.30. $y = \dfrac{x}{(x+2)(x-3)}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। (Find the domain of the function $y = \dfrac{x}{(x+2)(x-3)}$.)

Ans : $x = -2$ এবং $x = 3$ ব্যতীত x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য y এর বাস্তব মান বিদ্যমান। সুতরাং $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$.

1.A.31. $y = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। (Find the domain of the function $y = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$.)

Ans : $x = 4$ ব্যতীত x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য y এর বাস্তব মান বিদ্যমান। সুতরাং $D_f = \mathbb{R} - \{4\}$.

.A.32. ব্যবধি কাকে বলে? (What is interval?)

Ans : মনে করি দুইটি বাস্তব সংখ্যা a ও b যেখানে $a < b$ ($a > b$ ও হইতে পারে) a ও b এর একটি বা উভয়কে বাদ দিয়ে (বা অন্তর্ভুক্ত করিয়া) উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে ব্যবধি বলে।

1.A.33. খোলা ব্যবধি কি? (What is the open interval?)

Ans : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. a ও b কে বাদ দিয়ে উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে খোলা ব্যবধি বলে। ইহাকে (a, b) বা $]a, b[$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.34. বদ্ধ ব্যবধি কি? (What is the closed interval?)

Ans : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. a ও b কে অন্তর্ভুক্ত করিয়া উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে বদ্ধ ব্যবধি বলে। ইহাকে $[a, b]$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.35. অর্ধখোলা ও অর্ধবদ্ধ ব্যববধি কি? (What is half open and half closed interval?)

Ans : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. a বাদে এবং b সহ উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে অর্ধখোলা ও অর্ধবদ্ধ ব্যবধি বলে। ইহাকে $(a, b]$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.36. অর্ধবদ্ধ ও অর্ধখোলা ব্যবধি কি? (What is half closed and half open interval?)

Ans : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. a সহ এবং b বাদে উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে অর্ধবদ্ধ ও অর্ধখোলা ব্যবধি বলে।

1.A.37. $y = \sqrt{x}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। (Find domain of the function $y = \sqrt{x}$.)

Ans : এখানে $x \geq 0$ এর জন্য কেবলমাত্র y এর বাস্তব মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \{x : x \geq 0\} = [0, \infty)$

1.A.38. $y = \sqrt{2x - 1}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। (Find domain of the function $y = \sqrt{2x - 1}$.)

Ans : এখানে $2x - 1 \geq 0$ বা $x \geq \frac{1}{2}$ এর জন্য কেবলমাত্র y এর বাস্তব মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$

1.A.39. $y = \sqrt{1 - x}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। (Find the domain of the function $y = \sqrt{1 - x}$.)

Ans : এখানে $1 - x \geq 0$ বা $x \leq 1$ এর জন্য কেবলমাত্র y এর বাস্তব মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \{x : x \leq 1\} = (-\infty, 1]$

1.A.40. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। (Find the domain of the function $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}$.)

Ans : এখানে $x + 1 > 0$ বা $x > -1$ এর জন্য কেবলমাত্র y এর বাস্তব মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \{x : x > -1\} = (-1, \infty)$

A.41. $y = \frac{1+x}{\sqrt{3-x}}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। (Find the domain of the function $y = \frac{1+x}{\sqrt{3-x}}$.)

Ans : এখানে $3 - x > 0$ বা $x < 3$ এর জন্য কেবলমাত্র y এর বাস্তব মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \{x : x < 3\}$
$= (-\infty, 3)$

[NUH-2010]

.A.42. $y = ln\, x$ ফাংশনের ডোমেন কত? (What is the domain of the function $y = ln\, x$?)

Ans : এখানে $x > 0$ এর জন্য কেবলমাত্র y এর বাস্তব মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \{x : x > 0\} = (0, \infty)$

[NUH-2012]

1.A.43. $y = \sqrt{x-1}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর । [Find the domain of the function $y = \sqrt{x-1}$]

Ans : $y = \sqrt{x-1}$ ফাংশনের ডোমেন $= \{x : x \geq 1\}$
$= [1, \infty)$

1.A.44. $y = f(x)$ ফাংশনের রেঞ্জ কাকে বলে? (What is called range of the function $y = f(x)$?)

Ans : $y = f(x)$ ফাংশনের ডোমেনের প্রত্যেক মান বা বিন্দুর সাপেক্ষে y এর যে সমস্ত বাস্তব মান পাওয়া যায় তাহার সেট যদি B হয় তবে B কে ফাংশনটির রেঞ্জ বলে। ইহাকে R_f দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.45. $f(x) = \frac{1}{x}$ ফাংশনের রেঞ্জ কত? (What is the range of the function $f(x) = \frac{1}{x}$?)

Ans : $f(x) = \frac{1}{x}$ ফাংশনের ডোমেন $\mathbb{R} - \{0\}$ এর প্রত্যেক মান বা বিন্দুর সাপেক্ষে $y \in \mathbb{R} - \{0\}$ হইবে।

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

[NUH-2011]

.A.46. $y = \sin x$ ফাংশনের রেঞ্জ কত? (What is the range of the function $y = \sin x$?)

Ans : $y = \sin x$ ফাংশনের ডোমেন $\mathbb{R}$ এর প্রত্যেক মান বা বিন্দুর সাপেক্ষে $-1 \leq y \leq 1$ হইবে।

$\therefore R_f = \{y : -1 \leq y \leq 1\} = [-1, 1]$.

A.47. $y = \cos x$ এর রেঞ্জ কত হইবে? [What is the range of $y = \cos x$?]

[NUH(NM)-2012]

Ans : $y = \cos x$ এর রেঞ্জ $= [-1, 1]$

A.48. $y = \tan x$ এর রেঞ্জ কত হইবে? [What is the range of $y = \tan x$?]

Ans : $y = \tan x$ এর রেঞ্জ $= \mathbb{R}$

1.A.49. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ এর ডোমেন লিখ। [Write down the domain of $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.] **[NUH(NM)–2012]**

Ans : $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ এর ডোমেন $= \{x : x^2 - 1 \geq 0\}$

$= \{x : x \leq -1$ বা $x \geq 1\}$

$= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

1.A.50. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ এর ডোমেন কত? [What is the domain of $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$?]

Ans : $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ এর ডোমেন $= \{x : 1 - x^2 \geq 0\}$

$= \{x : x \geq -1$ এবং $x \leq 1\}$

$= \{x : -1 \leq x \leq 1\}$

$= [-1, 1]$

EXERCISE–1(A)

Part–A : Brief Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

1. ফাংশন ও সম্পর্কের মধ্যে পার্থক্য কি? [What is the difference between a function and a relation]?
2. ডোমেনের সকল মানের জন্য কোন্ ফাংশনের রেঞ্জ একই হয়?
3. ফাংশন বর্ণনা করতে ডোমেন জরুরী না রেঞ্জ জরুরী?
4. একটি ফাংশণের উদাহরণ দাও যার ডোমেন ও রেঞ্জ একই?
5. $y = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর।

Part–B : Short Questions (সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

1. ধরি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{যখন} \quad x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{যখন} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 5 & \text{যখন} \quad x > 2 \end{cases}$$

তাহা হইলে (i) $f(3/2)$ (ii) $f(-31)$ (iii) $f(\pi)$ (iv) $f(\sqrt{2})$ (v) $f(1)$ (vi) $f(10)$ (vii) $f(e)$ (viii) $f(1/2)$ (ix) $f(2)$ (x) $f(-\pi)$ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ (i) $\frac{13}{4}$ (ii) -32 (iii) 5 (iv) 3 (v) 2

2. ধরি $f : \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 + 2$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে R_f নির্ণয় কর। [Let the function $f : \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}$ is defined by the formula $f(x) = x^2 + 2$, then find R_f.]

উত্তর : $R_f = \{2, 3, 6, 11, 18, 27\}$

3. দেখাও যে $f : \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ফাংশনটি $f(x) = x + 1$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। ফাংশনটির R_f নির্ণয় কর। [Show that $f : \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ is a function defined by $f(x) = x + 1$. Find R_f of the function.]

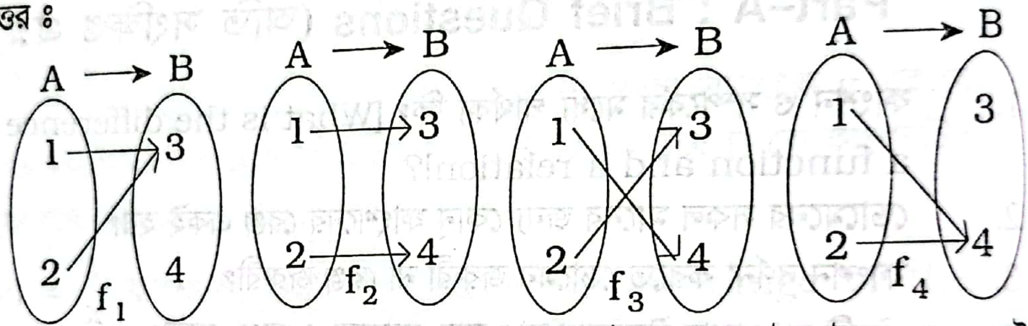
উত্তর : $R_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

4. $f(x) = x + 3$ সূত্র দ্বারা বর্ণিত $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ফাংশনের R_f নির্ণয় কর। [Find R_f of the function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be defined by the formula $f(x) = x + 3$.]

উত্তর : $R_f = \mathbb{N} - \{1, 2, 3\}$

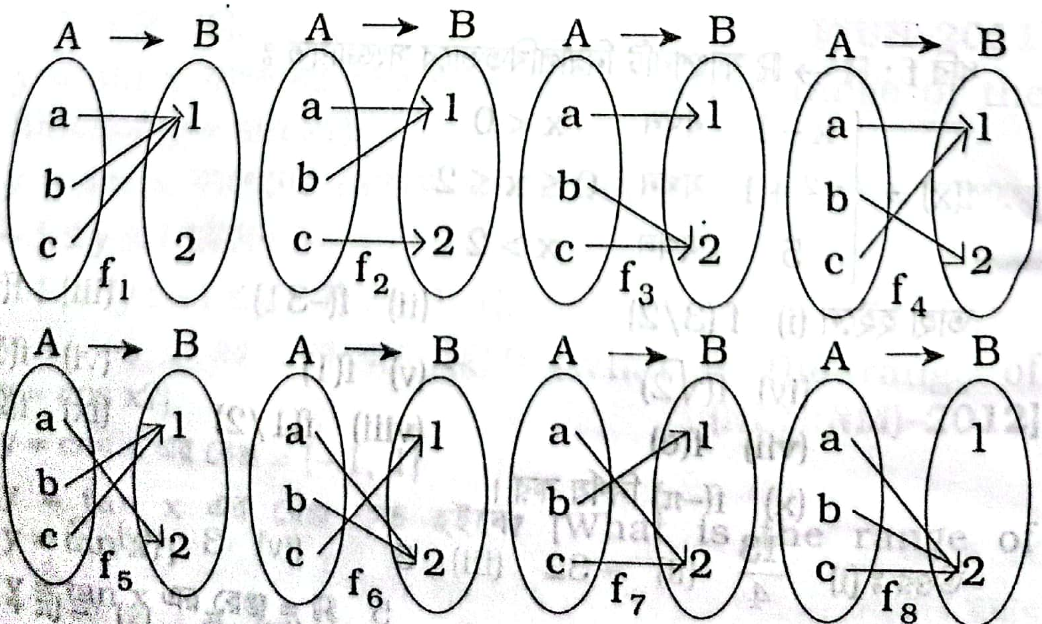
5. ধরি $A = \{1, 2\}$ এবং $B = \{3, 4\}$. তাহা হইলে A সেট হইতে B সেটে যতগুলি ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায় তাহা চিত্রের সাহায্যে দেখাও। [Let $A = \{1, 2\}$ and $B = \{3, 4\}$. Show the functions using diagram from the set A to B.]

উত্তর :



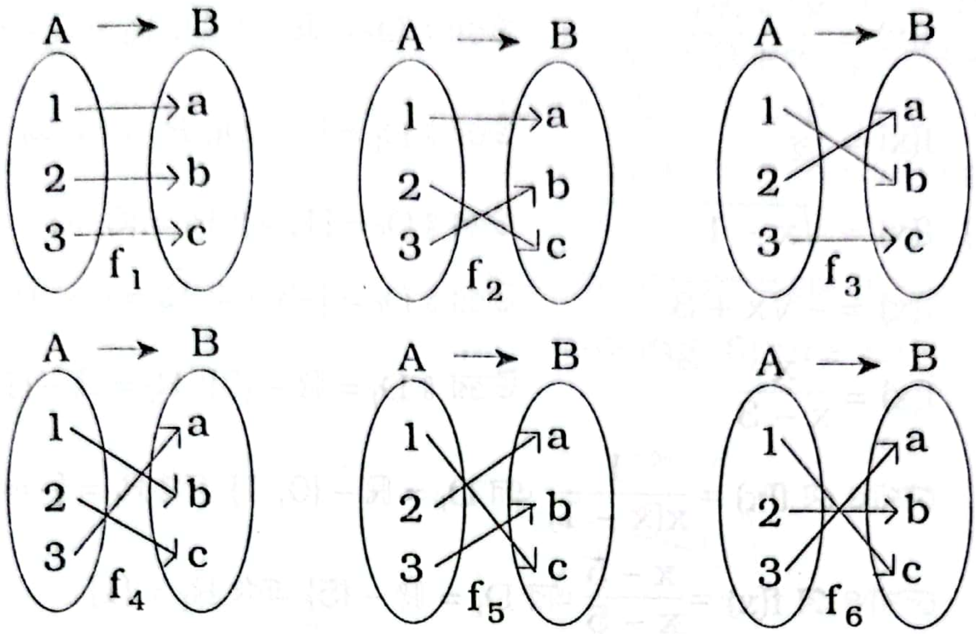
6. ধরি $A = \{a, b, c\}$ এবং $B = \{1, 2\}$. তাহা হইলে A সেট হইতে B সেটে যতগুলি ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায় তাহা চিত্রের সাহায্যে উল্লেখ কর। [Let $A = \{a, b, c\}$ and $B = \{1, 2\}$. Show that functions using graph from the set A to B.]

উত্তর :



7. ধরি $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{a, b, c\}$. তাহা হইলে A সেট হইতে B সেটে যতগুলি ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায় যাহাদের কোডোমেন ও রেঞ্জ সমান তাহা চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

উত্তর ঃ



8. নিম্নলিখিত ফাংশন সমূহের প্রত্যেকটির লেখ নির্ণয় কর।

(i) $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত $f(x) = x - 1$ সূত্র দ্বারা।

উত্তর ঃ $f^* = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$

(ii) $f : \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত $f(x) = x^2$ সূত্র দ্বারা।

উত্তর ঃ $f^* = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$

(iii) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত $f(x) = x^3 + 1$ সূত্র দ্বারা।

উত্তর ঃ $f^* = \{(1, 2), (2, 9), (3, 28), (4, 65), (5, 126), \ldots\ldots\}$

(iv) $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to [0, \infty)$ ফাংশনটি $f(x) = |x|$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

উত্তর ঃ $f^* = \{(-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$

(v) $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{N}$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত $f(x) = x^2 + x + 2$ সূত্র দ্বারা।

উত্তর ঃ $f^* = \{(0, 2), (1, 4), (2, 8), (3, 14)\}$.

9. নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত প্রত্যেকটি f ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the each of the functions which are defined as follows] :

(i) $f(x) = x + 5$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R}$; $R_f = \mathbb{R}$

(ii) $f(x) = \dfrac{1}{x - 5}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R} - \{5\}$; $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

(iii) $f(x) = -x^2 + 1$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R}$; $R_f = (-\infty, 1]$

(iv) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R} - \{\sqrt{2}\}$; $R_f = \mathbb{R} - \{2\sqrt{2}\}$

(v) $f(x) = x^3 + 5$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R}$; $R_f = \mathbb{R}$

(vi) $f(x) = \dfrac{x^2 - 36}{x + 6}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R} - \{-6\}$; $R_f = \mathbb{R} - \{-12\}$

(vii) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$; $R_f = (0, \infty)$

(viii) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ উত্তর ঃ $D_f = [1, \infty)$; $R_f = [0, \infty)$

(ix) $f(x) = -\sqrt{x + 3}$ উত্তর ঃ $D_f = [-3, \infty)$; $R_f = (-\infty, 0]$

(x) $f(x) = \dfrac{x}{x - 3}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$; $R_f = \mathbb{R} - \{1\}$

10. দেখাও যে $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$ এর $D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ এবং $R_f = (-\infty, -4] \cup (0, \infty)$

11. দেখাও যে $f(x) = \dfrac{x - 5}{x - 5}$ এর $D_f = \mathbb{R} - \{5\}$ এবং $R_f = \{1\}$

Part–C (Broad Questions) (বড় প্রশ্ন)

1. দেখাও যে $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$ এর $D_f = \mathbb{R} - \{1, -2\}$ এবং $R_f = \mathbb{R}$.

2. দেখাও যে $f(x) = \dfrac{2}{x(x-1)}$ এর $D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ এবং $R_f = (-\infty, -8] \cup (0, \infty)$

3 (i) দেখাও যে $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$ এর $D_f = [-6, 6]$ এবং $R_f = [0, 6]$

(ii) দেখাও যে $f(x) = \sqrt{x^2 - 49}$ এর $D_f = [7, \infty) \cup (-\infty, -7]$ এবং $R_f = [0, \infty)$

4. ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর [Find domain and range] :

(i) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ উত্তর ঃ $D_f = (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$, $R_f = [0, \infty)$

[NUH–2002, 2011, NUH(NM)–2012]

(ii) $f(x) = \cos^{-1}\left(\dfrac{2x}{1 + x}\right)$ উত্তর ঃ $D_f = \left[-\dfrac{1}{3}, 1\right]$, $R_f = [0, \pi]$ **[NUH–2002]**

—x—