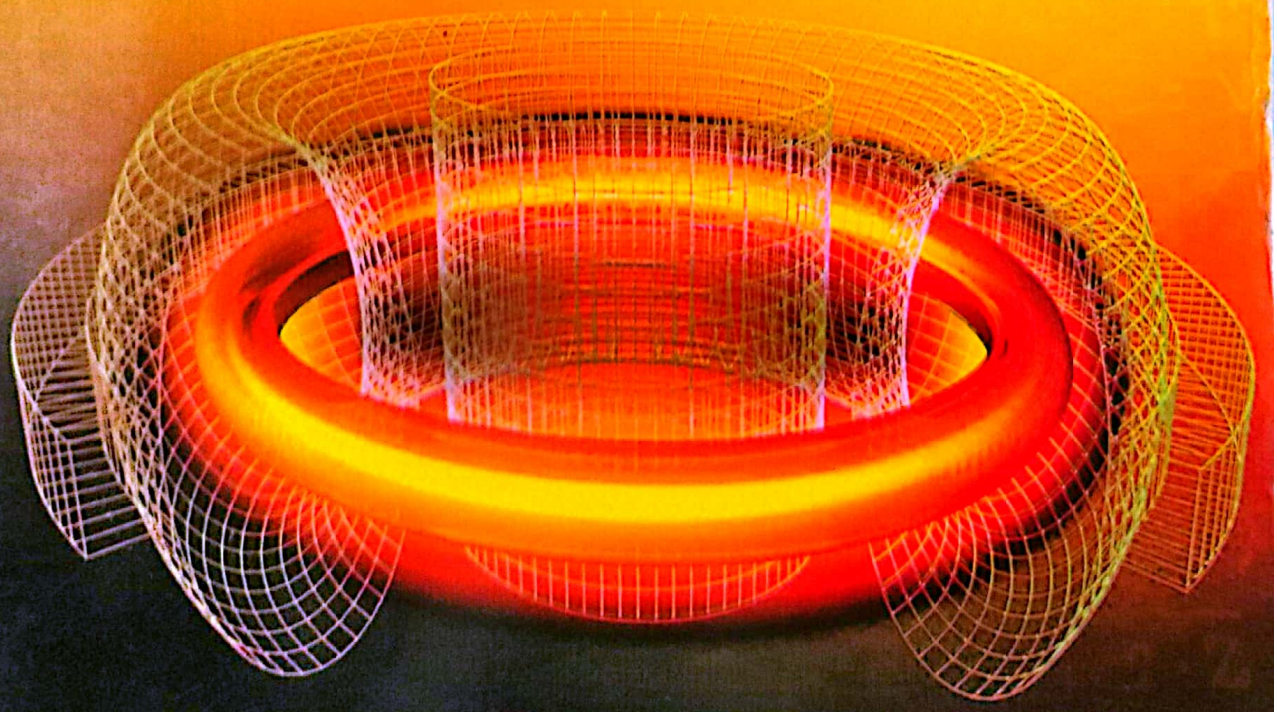
TITAS
MATH SERIES

CALCULUS I

- Prof. Dr. Fazlur Rahman
- Prof. Elias Hossain
- Prof. Hafizur Rahman
- Prof. Mydul Islam

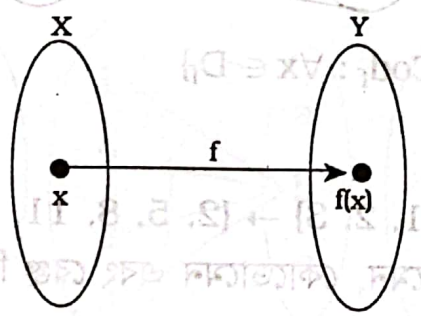


CamScanner

Chapter–1(A)
ফাংশন
FUNCTIONS

1. A. 1. ফাংশন-এর সংজ্ঞা (Definition of Function) : [NUH–02, 04, NUH(NM)–09, BSc(Pass)–06, 11, DUH–11, JUH–2004]

১৬৭৩ খৃষ্টাব্দে লিবনীজ প্রথম 'ফাংশন' শব্দটি ব্যবহার করেন এবং ১৬৯৩ খৃষ্টাব্দে তিনি ফাংশনের প্রথম সংজ্ঞা দেন। ১৮৩৭ খৃষ্টাব্দে ডিরিচলেট বাস্তব চলকের বাস্তব ফাংশনের সংজ্ঞা দেন, এই সংজ্ঞাটিকে ফাংশনের প্রথম আধুনিক সংজ্ঞা হিসাবে চিহ্নিত করা হয়। পরবর্তীতে বিভিন্ন গণিতবিদদের মিলিত প্রচেষ্টায় ফাংশনের আধুনিক সংজ্ঞার পূর্ণাঙ্গতা প্রকাশ পায়। নিম্নে ফাংশনের সংজ্ঞা দেওয়া হইল ঃ



সংজ্ঞা (Definition) : 'যদি X ও Y দুইটি অশূন্যক সেট এবং f এরূপ একটি নিয়ম হয় যে, প্রত্যেক $x \in X$ এর জন্য একটি অনন্য $y \in Y$ পাওয়া যায় তবে f কে X সেট হইতে Y সেটে একটি ফাংশন বলা হয়। ইহাকে $f : X \to Y$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। [If X and Y are two non-empty sets and f is such a rule that gives a unique $y \in Y$ for each $x \in X$ then f is called a function from the set X to the set Y. It is denoted by $f : X \to Y$]

$f : X \to Y$ ফাংশনে x এর f সম্পর্কিত উপাদান f(x) বা y কে x বিন্দুতে f এর মান (value) বা প্রতিবিম্ব (image) বলা হয়। উপরের সংজ্ঞায় x অনির্ভরশীল চলক (independent variable) এবং y বা f(x) নির্ভরশীল চলক (dependent variable)।

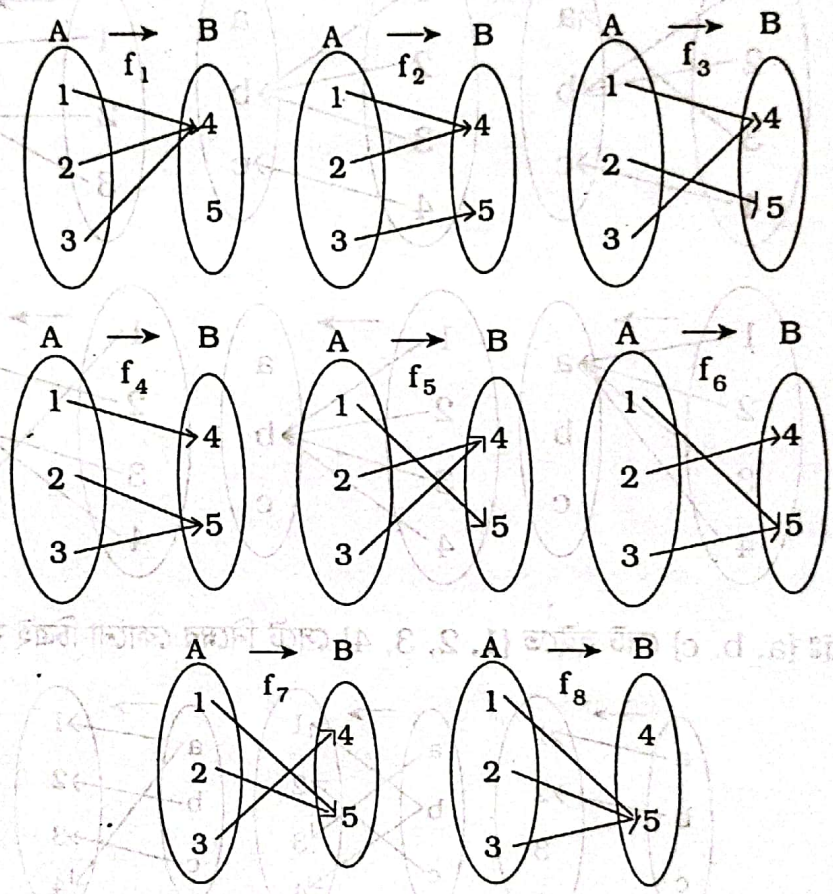
1.A.2. ফাংশনের ডোমেন, কোডোমেন এবং রেঞ্জ (Domain, Codomain and Range of function) ঃ [NUH–02, 04, NUH(NM)–06, 07, 08, 09, BSc(Pass)–06, 11, DUH–2012, RUH–2009, SJU–2004]

ধরি $f : X \to Y$ একটি ফাংশন। তাহা হইলে X কে f এর ডোমেন, Y কে f এর কোডোমেন বা কাউন্টার ডোমেন এবং Y সেটের অন্তর্গত সকল f সম্পর্কিত উপাদান

CamScanner

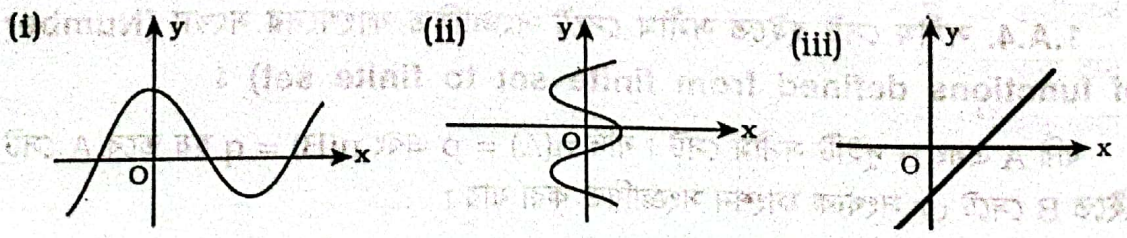
উদাহরণ–3. ধরি A = {1, 2, 3} এবং B = {4, 5}. তাহা হইলে A সেট হইতে B সেটে যতগুলো ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায় তাহা চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর। [Let A = {1, 2, 3} and B = {4, 5} then, express the functions as diagrams which are defined from the set A to B.]

সমাধান ঃ A সেট হইতে B সেটে $2^3 = 8$টি ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়। ফাংশনগুলো নিম্নে চিত্রের মাধ্যমে প্রদত্ত হইল।

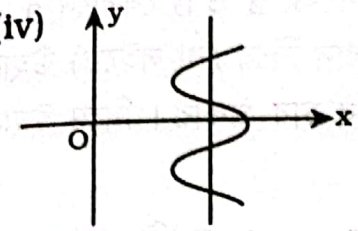


1.A.5. লেখচিত্র হইতে ফাংশনের ধারণা (Concept of functions from graph) : xy সমতলে কোনো লেখচিত্র y অক্ষের সমান্তরাল হইলে অথবা y অক্ষের সমান্তরাল কোনো সরলরেখা কোনো লেখচিত্রকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিলে ঐ লেখচিত্র {(x, f(x)) : y = f(x)} আকারের ফাংশন হইতে পারে না।

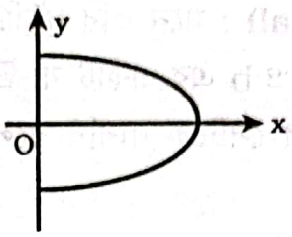
উদাহরণ–4. নিম্নের কোনো কোনো লেখচিত্র ফাংশন নয় তাহা ব্যাখ্যা কর।



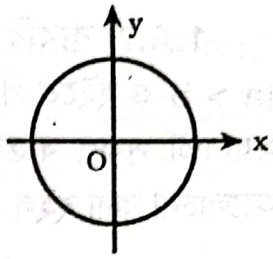
(iv)



(v)



(vi)



সমাধান ঃ xy সমতলে y অক্ষের সমান্তরাল যে কোনো সরলরেখা অথবা y অক্ষের সমান্তরাল কোনো সরলরেখা যদি কোনো লেখচিত্রকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করে তবে ঐ লেখচিত্র $\{(x, f(x)) : y = f(x)\}$ আকারের ফাংশন হইতে পারে না।

সুতরাং (i) এবং (iii) লেখচিত্র দুইটি ব্যতিত কোনো লেখচিত্রই ফাংশন নয়।

1.A.6. y = f(x) দ্বারা সংজ্ঞায়িত ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ (Domain and range of a function defined by y = f(x)) :

সংজ্ঞা ঃ x এর যে সমস্ত বাস্তব মানের জন্য $y = f(x)$ সূত্র বা সমীকরণটি সংজ্ঞায়িত বা সিদ্ধ হয় তাহার সেট যদি A হয় তবে A কে ঐ সূত্রের **ডোমেন** বলা হয়। [If A is the set of all real values of x such that the formula or equation $y = f(x)$ be defined or satisfied then A is called domain of the formula.]

সংজ্ঞা ঃ $y = f(x)$ সূত্রের ডোমেন A এর প্রত্যেক মান বা বিন্দু x এর সাপেক্ষে y বা f(x) সূত্রের যে সমস্ত মান পাওয়া যায় তাহার সেট যদি B হয় তবে B কে ঐ সূত্রের **রেঞ্জ** বলা হয়। [If B is the set of all values of y or f(x) corresponding each of the values or points x in domain A of the formula $y = f(x)$ then B is called range of the formula.]

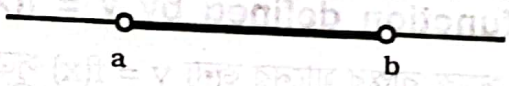
নির্দেশীকা ঃ (i) $y = f(x)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় করিতে বলা হইলে x এর যে সমস্ত মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হইবে তাহার সেটটিই ডোমেন হইবে অথবা যে সমস্ত বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত নয় ঐ সমস্ত বিন্দু সমূহের সেটকে $\mathbb{R}$ হইতে বর্জন করিলে ফাংশনের ডোমেন D_f পাওয়া যাইবে।

(ii) $y = f(x)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন D_f এর সমস্ত মানের জন্য y বা f(x) এর যে সমস্ত মান পাওয়া যায় তাহা হইল ফাংশনের রেঞ্জ R_f. অন্যভাবে $y = f(x)$ কে সমাধান করিয়া $x = g(y)$ আকারে পরিণত করিয়া ইহার D_g নির্ণয় করিলে ইহা R_f হইবে অর্থাৎ $D_g = R_f$ হইবে। তবে খেয়াল রাখিতে হইবে যদি $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনটি $\frac{0}{0}$ আকারের হয় তবে $x - a$ এর উৎপাদক বা উৎপাদক সমূহ f(x) হইতে বর্জন করিয়া যদি f(a) নির্ণয় করা যায় তবে R_f এ f(a) স্থান পাইবেনা। এই আকারের অন্য বিন্দুর জন্যও আগের মত অগ্রসর হইতে হইবে।

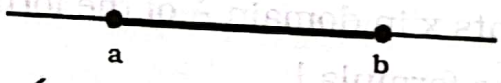
CamScanner

1.A.7. ব্যবধি (Interval) : মনে করি দুইটি বাস্তব সংখ্যা a ও b যেখানে $a < b$ ($a > b$ ও হইতে পারে)। a ও b এর একটি বা উভয়কে বাদ দিয়ে (বা লইয়ে) উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে ব্যবধি বলে। ব্যবধি চার প্রকার। নিম্নে ইহাদের আলোচনা করা হইল।

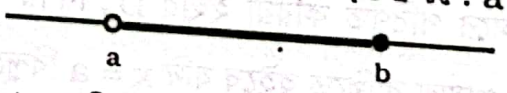
(i) খোলা ব্যবধি (Open interval) : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. a ও b কে বাদ দিয়ে উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে খোলা ব্যবধি বলে। ইহাকে (a, b) বা]a, b[প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। [Let a and b are two real numbers and $a < b$. The set of all real numbers between a and b excluding a and b is called open interval. It is denoted by the symbol (a, b) or]a, b[and is defined by $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.]



(ii) বদ্ধ ব্যবধি (Closed interval) : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. প্রান্তমান a ও b কে নিয়ে উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে বদ্ধ ব্যবধি বলে। ইহাকে [a, b] প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। [Let a and b are two real numbers and $a < b$. The set of all real numbers between a and b including the end values a and b is called closed interval. It is denoted by [a, b] and is defined by $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.]



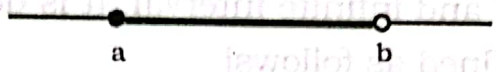
(iii) অর্ধখোলা ও অর্ধবদ্ধ ব্যবধি (Half open and half closed interval) : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. প্রান্তমান a কে বাদ দিয়ে এবং b কে নিয়ে উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে অর্ধখোলা ও অর্ধবদ্ধ ব্যবধি বলে। ইহাকে (a, b] প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। [Let a and b are two real numbers and $a < b$. The set of all real numbers between a and b excluding the end value a and including b is called half open and half closed interval. It is denoted by (a, b] and is defined by $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.]



(iv) অর্ধবদ্ধ ও অর্ধখোলা ব্যবধি (Half closed and half open interval) : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. প্রান্তমান a কে নিয়ে এবং b কে বাদ দিয়ে উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে অর্ধবদ্ধ ও অর্ধখোলা ব্যবধি বলে। ইহাকে [a, b) প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা

CamScanner

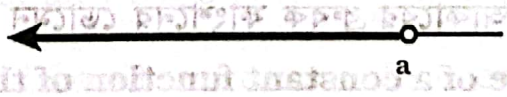
হয়। [Let a and b are two real numbers and $a < b$. The set of all real numbers between a and b including the end value a and excluding b is called half closed and half open interval. It is denoted by $[a, b)$ and is defined by $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$.]



1.A.8. অসীম ব্যবধি বা রশ্মি (Infinite interval or ray) : অসীম ব্যবধি বা রশ্মি দুই প্রকার। নিম্নে উহাদের আলোচনা করা হইল।

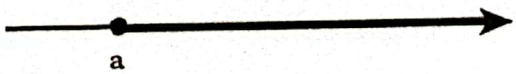
(i) খোলা এবং অসীম ব্যবধি (Open and infinite interval) : কোনো বাস্তব সংখ্যা a অপেক্ষা বৃহত্তর সকল বাস্তব সংখ্যা নিয়ে গঠিত ব্যবধিকে খোলা এবং অসীম ব্যবধি বলে। ইহাকে (a, ∞) প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। [The interval of all the real numbers which are greater than any real number a is called open and infinite interval. It is denoted by the symbol (a, ∞) and is defined by $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$.]

আবার, a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সকল বাস্তব সংখ্যা নিয়ে গঠিত ব্যবধিকে খোলা এবং অসীম ব্যবধি বলে। ইহাকে $(-\infty, a)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। [Again, the interval of all the real numbers which are smaller than a is called open and infinite interval. It is denoted by the symbol $(-\infty, a)$ and is defined by $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$.]



(ii) বদ্ধ এবং অসীম ব্যবধি (Closed and infinite interval) : কোনো বাস্তব সংখ্যা a সহ a হইতে বৃহত্তর সকল বাস্তব সংখ্যাকে নিয়ে গঠিত ব্যবধিকে বদ্ধ এবং অসীম ব্যবধি বলে। ইহাকে $[a, \infty)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হয়। [The interval of all the real numbers which are greater than any real number a including the number a is called closed and infinite interval. It is denoted by the symbol $[a, \infty)$ and is defined as follows.]

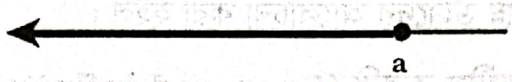
$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x\}$$



CamScanner

আবার, কোনো বাস্তব সংখ্যা a সহ a হইতে ক্ষুদ্রতর সকল বাস্তব সংখ্যাকে নিয়ে গঠিত ব্যবধিকে বদ্ধ এবং অসীম ব্যবধি বলে। ইহাকে $(-\infty, a]$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হয়। [Again, the interval of all the real numbers which are smaller than any real number a including the number a is called closed and infinite interval. It is denoted by the symbol $(-\infty, a]$ and is defined as follows]

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$



1.A.9. বাস্তব সংখ্যার পরম মান (Absolute value of real numbers) : যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা x এর মান শূন্য বা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে। কিন্তু x এর পরমমান সবসময়ই শূন্য বা ধনাত্মক হইবে। x এর পরম মানকে $|x|$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়। [The value of any real number x is zero or positive or negative. But absolute value of x is always zero or positive. The absolute value of x is denoted by $|x|$ and defined as follows]

$$|x| = \begin{cases} x \text{ যখন } x \geq 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \end{cases} \quad \text{অথবা } |x| = \begin{cases} 0 \text{ যখন } x = 0 \\ x \text{ যখন } x > 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$$

উদাহরণ ঃ $|0| = 0, |3| = 3, |-3| = -(-3) = 3.$

1.A.10. ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করার কিছু নিয়ম (Some rules to find domain and range) :

1. $f(x) = c$ আকারের ধ্রুবক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a constant function of the form $f(x) = c$] :

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর কেবলমাত্র মান c পাওয়া যায় [Here f(x) gives only the value c for all real values of x]

$\therefore D_f = \mathbb{R}$ এবং $R_f = \{c\}$

2. $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a function of the form $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$] :

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয় [Here f(x) gives real values for all real values of x.]

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$

$$\Rightarrow x = \frac{y-b}{a}$$

এখানে y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [Here x gives real values for all real values of y.]

$\therefore R_f = \mathbb{R}$

উদাহরণ–5. $f(x) = 3x + 5$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ বাহির কর। [Find domain and range of the function $f(x) = 3x + 5$.]

সমাধান ঃ এখানে $f(x) = 3x + 5$ ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$.

আবার $y = f(x) = 3x + 5$ হইলে $x = \dfrac{y-5}{3}$

এখানে y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x বাস্তব হয়। সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$.

3. $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$ $(a \neq 0)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a function of the form $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$ $(a \neq 0)$] :

এখানে $ax + b = 0$ বা $x = -\dfrac{b}{a}$ এর জন্য f(x) সংজ্ঞায়িত নয় এবং $x = -\dfrac{b}{a}$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয় অর্থাৎ f(x) সংজ্ঞায়িত হয়। [Here f(x) is not defined for $ax + b = 0$ or $x = -\dfrac{b}{a}$ and f(x) gives real values that is f(x) is defined for all real values of x except $x = -\dfrac{b}{a}$.]

$$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

আবার, $y = f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$ $(a \neq 0)$

$$\Rightarrow ax + b = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{y} - b\right)$$

এখানে $y = 0$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [Here x gives real values for all real values of y except $y = 0$]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

উদাহরণ–6. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ (ii) $f(x) = \frac{2}{x+3}$ (iii) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

$x = 2$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [$f(x)$ gives real values for all real values of x except $x = 2$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{1}{x-2}$

$\Rightarrow x - 2 = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{y} + 2$

$y = 0$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [x gives real values for all real values of y except $y = 0$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

(ii) $f(x) = \frac{2}{x+3}$

$x = -3$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [$f(x)$ gives real values for all real values of x except $x = -3$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{2}{x+3}$

$\Rightarrow x + 3 = \frac{2}{y}$

$\Rightarrow x = \frac{2}{y} - 3$

$y = 0$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [x gives real values for all real values of y except $y = 0$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

CamScanner

(iii) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

এখানে $2x + 1 = 0$ বা $x = -\frac{1}{2}$ এর জন্য f(x) সংজ্ঞায়িত নয় এবং $x = -\frac{1}{2}$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) is not defined for $2x + 1 = 0$ or $x = -\frac{1}{2}$ and f(x) gives real values for all real values of x except $x = -\frac{1}{2}$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{1}{2x+1}$

$\Rightarrow 2x + 1 = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} - 1\right)$

$y = 0$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [x gives real values for all real values of y except $y = 0$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

4. $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ $(a, c \neq 0)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a function of the form $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ $(a, c \neq 0)$] :

এখানে $cx + d = 0$ বা $x = -\frac{d}{c}$ এর জন্য f(x) সংজ্ঞায়িত নয়। এবং $x = -\frac{d}{c}$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) is not defined for $cx + d = 0$ or $x = -\frac{d}{c}$ and f(x) gives real values for all real values of x except $x = -\frac{d}{c}$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

$\Rightarrow cxy + dy = ax + b$

$\Rightarrow x(cy - a) = b - dy$

$\Rightarrow x = \frac{b - dy}{cy - a}$

এখানে $cy - a = 0$ বা $y = \frac{a}{c}$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [Here x gives real values for all real values of y except $cy - a = 0$ or $y = \frac{a}{c}$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$

উদাহরণ–7. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ **[NUH(NM)–2008]**

(ii) $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ **[NUH–2004]**

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

$x = -1$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [f(x) gives real values for all real values of x except $x = -1$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{x}{x+1}$

$\Rightarrow xy + y = x$

$\Rightarrow x = -\frac{y}{y-1}$

$y = 1$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [x gives real values for all real values of y except $y = 1$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{1\}$

(ii) $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

$2x + 1 = 0$ বা $x = -\frac{1}{2}$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [f(x) gives real values for all real values of x except $2x + 1 = 0$ or $x = -\frac{1}{2}$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

CamScanner

আবার, $y = f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

$\Rightarrow 2xy + y = x - 3$

$\Rightarrow x(2y-1) = -(y+3)$

$\Rightarrow x = -\frac{y+3}{2y-1}$

$y = \frac{1}{2}$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [x gives real values for all real values of y except $y = \frac{1}{2}$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

5. $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a function of the form $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$]:

এখানে $x = a$ এর জন্য f(x) সংজ্ঞায়িত নয় এবং $x = a$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) is not defined for $x = a$ and f(x) gives real values for all real values of x except $x = a$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{a\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$

$\Rightarrow y = x + a$ যেখানে $x \neq a$

$\Rightarrow x = y - a$ [$\because x \neq a$, সুতরাং $y \neq 2a$]

$\Rightarrow x = y - a,\ y \neq 2a$

এখানে $y = 2a$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for all real values of y except $y = 2a$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{2a\}$.

6. $f(x) = \frac{x - a}{x^2 - a^2}$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a function of the form $f(x) = \frac{x - a}{x^2 - a^2}$]:

এখানে $x = \pm a$ এর জন্য f(x) সংজ্ঞায়িত নয় এবং $x = \pm a$ ব্যতীত x এর অন্যান্য সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) is not defined for $x = \pm a$ and f(x) gives real values for all other real valves of x except $x = \pm a$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{-a, a\}$

আবার, $y = f(x) = \dfrac{x-a}{x^2-a^2}$

$= \dfrac{1}{x+a}$ যেখানে $x \neq a$

ইহা নির্দেশ করে [It is devoted] $y \neq 0, \dfrac{1}{2a}$

অর্থাৎ $y = 0, \dfrac{1}{2a}$ ব্যাতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x সংজ্ঞায়িত। [That is x is defined for all values of y except $y = 0, \dfrac{1}{2a}$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{1}{2a}\right\}$.

উদাহরণ-8. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find the domain and range of the following functions.]

(i) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ (ii) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

এখানে $x = 2$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values for all real values of x except $x = 2$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

আবার, $y = f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

$\Rightarrow y = x + 2$ যেখানে $x \neq 2$

$\Rightarrow x = y - 2, y \neq 4 \quad [\because x \neq 2]$

এখানে $y = 4$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for all real values of y except $y = 4$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{4\}$

(ii) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$

এখানে $x^2 - 9 = 0$ বা $x = \pm 3$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values for all real values of x except $x^2 - 9 = 0$ or $x = \pm 3$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

CamScanner

আবার, $y = f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{x+3}$ যেখানে $x \neq 3$

$\Rightarrow x + 3 = \frac{1}{y}$ যেখানে $x \neq 3$ বা $y \neq \frac{1}{6}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{y} - 3,\ y \neq \frac{1}{6}$

এখানে $y = \frac{1}{6}$ এবং 0 ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for all real values of y except $y = \frac{1}{6}$ and 0]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{6}\right\}$.

7. $f(x) = \sqrt{ax+b}$ $(a > 0)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a function of the form $f(x) = \sqrt{ax+b}$ $(a > 0)$] :

এখানে কেবলমাত্র $ax + b \geq 0$ বা $x \geq -\frac{b}{a}$ এর জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $ax + b \geq 0$ or $x \geq -\frac{b}{a}$]

$\therefore D_f = \left\{x : x \geq -\frac{b}{a}\right\}$

$= \left[-\frac{b}{a}, \infty\right)$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{ax+b}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $y \nless 0$ [The values of y in (1) are positive or zero that is $y \nless 0$]

(1) $\Rightarrow y^2 = ax + b$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow ax = y^2 - b,\quad y \nless 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{a}(y^2 - b),\quad y \nless 0$

এখানে $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for $y \geq 0$]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

নোট ঃ $\sqrt{x^2} = |x|$

অর্থাৎ বাস্তব ফিল্ডে $\sqrt{\ }$ এর মান বিদ্যমান থাকিলে উহা সর্বদা ধনাত্মক বা শূন্য হইবে।

যেমন $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$

এখানে $\sqrt{(-2)^2} = -2$ সত্য নয়।

উদাহরণ–9. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find the domain and range of the following functions.]

(i) $f(x) = \sqrt{3x-1}$ (ii) $f(x) = -\sqrt{x+1}$

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \sqrt{3x-1}$

এখানে কেবলমাত্র $3x - 1 \geq 0$ বা $x \geq \frac{1}{3}$ এর জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $3x - 1 \geq 0$ or $x \geq \frac{1}{3}$.]

$$\therefore D_f = \left\{x : x \geq \frac{1}{3}\right\}$$

$$= \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{3x-1}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $y \nless 0$ [The values of y in (1) are positive or zero that is $y \nless 0$]

(1) $\Rightarrow y^2 = 3x - 1$ যেখানে $y \nless 0$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3}(y^2 + 1), \ y \nless 0$$

এখানে $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for $y \geq 0$]

$$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$$

$$= [0, \infty)$$

(ii) $f(x) = -\sqrt{x+1}$

এখানে কেবলমাত্র $x + 1 \geq 0$ বা $x \geq -1$ এর জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $x + 1 \geq 0$ or $x \geq -1$.]

$$\therefore D_f = \{x : x \geq -1\}$$

$$= [-1, \infty)$$

আবার, $y = f(x) = -\sqrt{x+1}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান ঋণাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $y \not> 0$ [The values of y in (1) are negative or zero that is $y \not> 0$]

$(1) \Rightarrow y^2 = x + 1, y \not> 0$

$\Rightarrow x = y^2 - 1, y \not> 0$

এখানে $y \le 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined only for $y \le 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y \le 0\}$

$= (-\infty, 0]$

8. $f(x) = \sqrt{ax+b}$ $(a < 0)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a function of the form $f(x) = \sqrt{ax+b}$ $(a < 0)$] :

এখানে কেবলমাত্র $ax + b \ge 0$ বা $x \le -\frac{b}{a}$ এর জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $ax + b \ge 0$ or $x \le -\frac{b}{a}$]

$$\therefore D_f = \left\{x : x \le -\frac{b}{a}\right\}$$

$$= \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{ax+b}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $y \not< 0$ [The values of y in (1) are positive or zero that is $y \not< 0$.]

$(1) \Rightarrow y^2 = ax + b$ যেখানে $y \not< 0$

$\Rightarrow ax = y^2 - b,\ y \not< 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{a}(y^2 - b),\ y \not< 0$

এখানে কেবলমাত্র $y \ge 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined only for $y \ge 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y \ge 0\}$

$= [0, \infty)$

CamScanner

উদাহরণ–10. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = \sqrt{1-x}$ (ii) $f(x) = -\sqrt{1-2x}$

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \sqrt{1-x}$

এখানে কেবলমাত্র $1 - x \geq 0$ বা $x \leq 1$ এর জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [Here $f(x)$ gives real values only for $1 - x \geq 0$ or $x \leq 1$.]

$\therefore D_f = \{x : x \leq 1\}$

$= (-\infty, 1]$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{1-x}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $y \nless 0$ [The values of y in (1) are positive or zero that is $y \nless 0$.]

(1) $\Rightarrow y^2 = 1 - x$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x = 1 - y^2,\ y \nless 0$

এখানে $y \geq 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined only for $y \geq 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

(ii) $f(x) = -\sqrt{1-2x}$

এখানে $1 - 2x \geq 0$ বা $x \leq \frac{1}{2}$ এর জন্য কেবলমাত্র $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [Here $f(x)$ gives real values only for $1 - 2x \geq 0$ or $x \leq \frac{1}{2}$.]

$\therefore D_f = \left\{x : x \leq \frac{1}{2}\right\}$

$= \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

আবার, $y = f(x) = -\sqrt{1-2x}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান ঋনাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $y \ngtr 0$. [The values of y in (1) are negative or zero that is $y \ngtr 0$.]

(1) $\Rightarrow y^2 = 1 - 2x$ যেখানে $y \ngtr 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(1 - y^2),\ y \ngtr 0$

CamScanner

এখানে $y \le 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined only for $y \le 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y \le 0\}$

$= (-\infty, 0]$

9. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{ax+b}}$ $(a \ne 0)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a function of the form $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{ax+b}}$ $(a \ne 0)$] :

এখানে $ax + b > 0$ বা $x > -\dfrac{b}{a}$ (যখন $a > 0$) বা $x < -\dfrac{b}{a}$ (যখন $a < 0$) এর জন্য কেবলমাত্র f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $ax + b > 0$ or $x > -\dfrac{b}{a}$(when $a > 0$) or $x < -\dfrac{b}{a}$ (when $a < 0$).]

$\therefore a > 0$ এর জন্য $D_f = \left\{x : x > -\dfrac{b}{a}\right\}$

$= \left(-\dfrac{b}{a}, \infty\right)$

এবং $a < 0$ এর জন্য $D_f = \left\{x : x < -\dfrac{b}{a}\right\}$

$= \left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right)$

আবার, $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{ax+b}}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান ধনাত্মক হইবে অর্থাৎ $y \nless 0$ হইবে।

$(1) \Rightarrow y^2 = \dfrac{1}{ax+b}$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow ax + b = \dfrac{1}{y^2}, y \nless 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{y^2} - b\right), y \nless 0$

এখানে $y > 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined only for $y > 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$

$= (0, \infty)$

CamScanner

উদাহরণ–11. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find the domain and range of the following functions.]

(i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ (ii) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

এখানে $x + 1 > 0$ বা $x > -1$ এর জন্য কেবলমাত্র $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [Here $f(x)$ gives real values only for $x + 1 > 0$ or $x > -1$.]

$\therefore D_f = \{x : x > -1\}$

$= (-1, \infty)$

আবার, $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান কেবলমাত্র ধনাত্মক হইবে। [The values of y in (1) are only positive.]

$(1) \Rightarrow y^2 = \dfrac{1}{x+1}, \; y \nless 0$

$\Rightarrow x + 1 = \dfrac{1}{y^2}, \; y \nless 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{y^2} - 1, \; y \nless 0$

এখানে $y > 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত।

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$

$= (0, \infty)$.

(ii) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

এখানে $2 - x > 0$ বা $x < 2$ এর জন্য কেবলমাত্র $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [Here $f(x)$ gives real values only for $2 - x > 0$ or $x < 2$.]

$\therefore D_f = \{x : x < 2\}$

$= (-\infty, 2)$

আবার, $y = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান কেবলমাত্র ধনাত্মক হইবে।

CamScanner

$(1) \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2-x}$, $y \neq 0$

$\Rightarrow 2 - x = \frac{1}{y^2}$, $y \neq 0$

$\Rightarrow x = 2 - \frac{1}{y^2}$, $y \neq 0$

এখানে $y > 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত হইবে।

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$

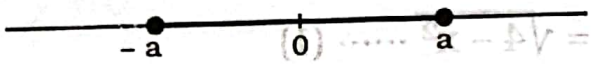
$= (0, \infty)$

10. $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a function of the form $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$] :

এখানে f(x) এর মান বাস্তব হইবে যদি $a^2 - x^2 \geq 0$ হয় [Here f(x) will be real if $a^2 - x^2 \geq 0$]

$\Rightarrow x^2 \leq a^2$

$\Rightarrow -a \leq x \leq a$



$\therefore D_f = \{x : -a \leq x \leq a\}$

$= [-a, a]$

আবার, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান ঋণাত্মক হইতে পারে না। [In (1) the value of y can not be negative.]

$(1) \Rightarrow y^2 = a^2 - x^2$, $y \nless 0$

$\Rightarrow x^2 = a^2 - y^2$, $y \nless 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{a^2 - y^2}$, $y \nless 0$

এখানে x সংজ্ঞায়িত হইবে যদি $a^2 - y^2 \geq 0$ এবং $y \nless 0$ হয়। [Here x will be defined if $a^2 - y^2 \geq 0$ and $y \nless 0$.]

$\Rightarrow y^2 \leq a^2$ কিন্তু $y \nless 0$

$\Rightarrow -a \leq y \leq a$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow 0 \leq y \leq a$

$\therefore R_f = \{y : 0 \leq y \leq a\}$

$= [0, a]$

CamScanner

উদাহরণ–12. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

[NUH(NM)–2006]

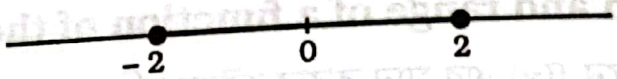
(i) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(ii) $y = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$

সমাধান **(i)** $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

এখানে f(x) এর মান বাস্তব হইবে যদি [Here the value of f(x) will be real if]

$4 - x^2 \geq 0$ হয়।



$\Rightarrow x^2 \leq 4$

$\Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

$\therefore D_f = \{x : -2 \leq x \leq 2\}$

$= [-2, 2]$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান ঋণাত্মক হয় না অর্থাৎ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য হইবে। [In (1) the value of y can not be negative, that is, the value of y will be positive or zero.]

(1) $\Rightarrow y^2 = 4 - x^2$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x^2 = 4 - y^2,\ y \nless 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{4 - y^2},\ y \nless 0$

এখানে x এর মান বিদ্যমান থাকিবে যদি $4 - y^2 \geq 0$ এবং $y \nless 0$ হয়। [Here the value of x will be exist if $4 - y^2 \geq 0$ and $y \nless 0$.]

$\Rightarrow y^2 - 4 \leq 0$ এবং $y \nless 0$

$\Rightarrow y^2 \leq 4$ এবং $y \nless 0$

$\Rightarrow -2 \leq y \leq 2$ এবং $y \nless 0$

$\Rightarrow 0 \leq y \leq 2$

$\therefore R_f = \{y : 0 \leq y \leq 2\}$

$= [0, 2]$

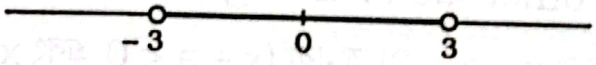
CamScanner

(ii) $y = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$

এখানে y এর মান বাস্তব হইবে যদি $9 - x^2 > 0$ হয়। [Here the value of y will be real if $9 - x^2 > 0$]

$$\Rightarrow x^2 < 9$$

$$\Rightarrow -3 < x < 3$$



$\therefore D_f = \{x : -3 < x < 3\}$

$= (-3, 3)$

আবার, $y = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$ ফাংশনে y এর মান ঋণাত্মক বা শূন্য হইবে না অর্থাৎ y এর মান ধনাত্মক হইবে। [Again, in the function $y = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$, the value of y can not be negative or zero, that is, the value of y will be positive.]

$\therefore\ y^2 = \dfrac{1}{9 - x^2}$ যেখানে $y \neq 0$

$\Rightarrow 9 - x^2 = \dfrac{1}{y^2}, y \neq 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{9 - \dfrac{1}{y^2}}, y \neq 0$

এখানে x এর মান বিদ্যমান থাকিবে যদি $9 - \dfrac{1}{y^2} \geq 0$ এবং $y \neq 0$ হয়। [Here the value of x will exist if $9 - \dfrac{1}{y^2} \geq 0$ and $y \neq 0$]

$\Rightarrow 9y^2 - 1 \geq 0$ এবং $y \neq 0$

$\Rightarrow y^2 - \dfrac{1}{9} \geq 0$ এবং $\neq 0$

$\Rightarrow y^2 \geq \dfrac{1}{9}$ এবং $y \neq 0$

$\Rightarrow \left(y \leq -\dfrac{1}{3}\right.$ বা $\left.y \geq \dfrac{1}{3}\right)$ এবং $y \neq 0$

$\Rightarrow y \geq \dfrac{1}{3}$

$\therefore R_f = \left\{y : y \geq \dfrac{1}{3}\right\} = \left[\dfrac{1}{3}, \infty\right)$

দ্রষ্টব্য ঃ নিম্নে দুইটি অসমতার সমাধান পদ্ধতি আলোচনাসহ কয়েকটি অসমতার সমাধান ছকে দেওয়া হইল।

CamScanner

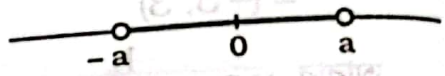
1.A.11. $x^2 - a^2 < 0$ অসমতার সমাধান (Solution of the inequality $x^2 - a^2 < 0$) :

এখানে $(x + a)(x - a) < 0$

দুইটি উৎপাদকের গুণফল ঋণাত্মক হইলে একটি উৎপাদক ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হইবে। [Product of two factors is negative when one factor is positive and the other factor is negative.]

$\therefore$ ($x + a > 0$ এবং $x - a < 0$) অথবা ($x + a < 0$ এবং $x - a > 0$) হইবে।

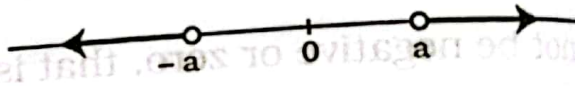
১ম ক্ষেত্রে ঃ $x + a > 0$ এবং $x - a < 0$



$\Rightarrow x > -a$ এবং $x < a$

$\Rightarrow -a < x < a$

২য় ক্ষেত্রে ঃ $x + a < 0$ এবং $x - a > 0$



$\Rightarrow x < -a$ এবং $x > a$

এখানে $x < -a$ এবং $x > a$ শর্তে x এ কোনো মান বিদ্যমান নাই।

$\therefore x^2 - a^2 < 0$ অসমতাটির সমাধান $-a < x < a$

[Here, there does not exists any value of x under the condition $x < -a$ and $x > a$. Therefore, the inequality $x^2 - a^2 < 0$ has the solution $-a < x < a$.]

1.A.12. $x^2 - a^2 > 0$ অসমতার সমাধান (Solution of the inequality $x^2 - a^2 > 0$) :

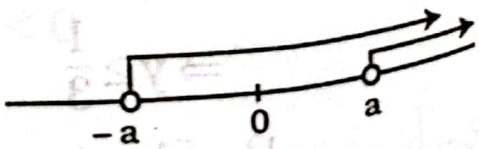
এখানে $(x + a)(x - a) > 0$

দুইটি উৎপাদকের গুণফল ধনাত্মক হইলে উভয় উৎপাদক ধনাত্মক অথবা উভয় উৎপাদক ঋণাত্মক হইবে। [Product of two factors is positive when both the factors either positive or negative.]

$\therefore$ ($x + a > 0$ এবং $x - a > 0$) অথবা ($x + a < 0$ এবং $x - a < 0$)

১ম ক্ষেত্রে ঃ $x + a > 0$ এবং $x - a > 0$

$\Rightarrow x > -a$ এবং $x > a$

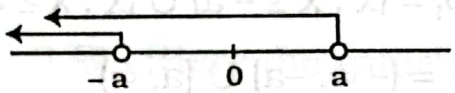


এখানে $x > -a$ এবং $x > a$ শর্তে $x > a$ হইবে।

CamScanner

২য় ক্ষেত্রে ঃ $x + a < 0$ এবং $x - a < 0$

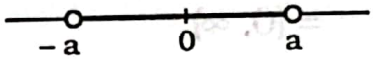
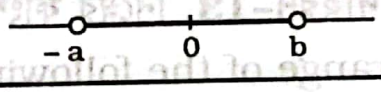
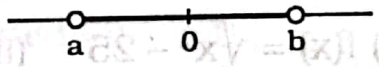
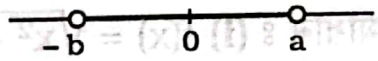
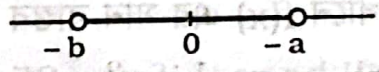
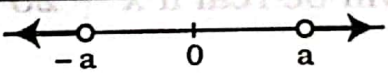
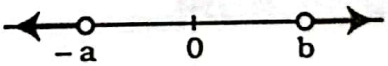
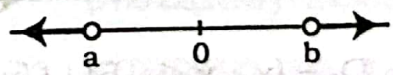
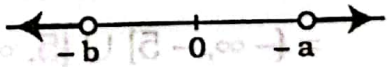
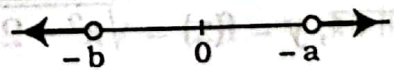
$\Rightarrow x < -a$ এবং $x < a$



এখানে $x < -a$ এবং $x < a$ শর্তে $x < -a$ হইবে।

$\therefore$ $x^2 - a^2 > 0$ অসমতাটির সমাধান ঃ $x < -a$ অথবা $x > a$

1.A.13. সংখ্যারেখায় অসমতার সমাধান (Solution of inequalities in real line) : $x^2 - a^2 < 0$ বা $x^2 - a^2 > 0$ অসমতার সমাধানের নিয়মে সমাধান করা যায় এইরূপ কয়েকটি অসমতার সমাধান ও সংখ্যারেখায় ইহার অবস্থান নিম্নের ছকে দেওয়া হইল। এখানে a ও b ধনাত্মক এবং $a < b$ ধরা হইয়াছে।

অসমতা	সমাধান	সংখ্যারেখা
$x^2 - a^2 < 0$	$-a < x < a$	
$(x + a)(x - b) < 0$	$-a < x < b$	
$(x - a)(x - b) < 0$	$a < x < b$	
$(x - a)(x + b) < 0$	$-b < x < a$	
$(x + a)(x + b) < 0$	$-b < x < -a$	
$x^2 - a^2 > 0$	$x < -a$ বা $x > a$	
$(x + a)(x - b) > 0$	$x < -a$ বা $x > b$	
$(x - a)(x - b) > 0$	$x < a$ বা $x > b$	
$(x - a)(x + b) > 0$	$x < -b$ বা $x > a$	
$(x + a)(x + b) > 0$	$x < -b$ বা $x > -a$	

নোট ঃ উৎপাদকদ্বয় অনুপাত আকারে থাকিলেও একইরূপ সমাধান হইবে।

11. $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a function of the form $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$] :

এখানে f(x) এর মান বাস্তব হইবে যদি $x^2 - a^2 \geq 0$ হয়। [Here the value of f(x) will be real if $x^2 - a^2 \geq 0$]

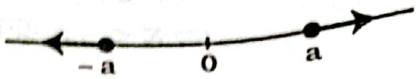
$$\Rightarrow x^2 \geq a^2$$

$$\Rightarrow x \leq -a \text{ বা } x \geq a$$

CamScanner

$\therefore D_f = \{x : x \le -a\} \cup \{x : x \ge a\}$

$= (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$



আবার, $y = f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান কেবলমাত্র ধনাত্মক বা শূন্য হইবে। [In (1), the value of y only be positive or zero.]

(1) $\Rightarrow y^2 = x^2 - a^2$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x^2 = y^2 + a^2,\ y \nless 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 + a^2},\ y \nless 0$

এখানে $y \ge 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত হইবে। [Here x is defined for $y \ge 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y \ge 0\}$

$= [0, \infty)$

উদাহরণ–13. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions.]

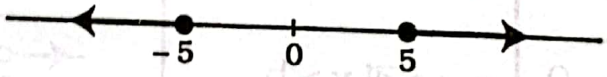
(i) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ (ii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ **[NUH(NM)–2007]**

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$

এখানে f(x) এর মান বাস্তব হইবে যদি $x^2 - 25 \ge 0$ হয়। [Here the value of f(x) will be real if $x^2 - 25 \ge 0$]

$\Rightarrow x^2 \ge 25$

$\Rightarrow x \le -5$ বা $x \ge 5$



$\therefore D_f = \{x : x \le -5\} \cup \{x : x \ge 5\}$

$= (-\infty, -5] \cup [5, \infty)$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান কেবলমাত্র ধনাত্মক বা শূন্য হইবে। [In (1), the value of y only be positive or zero.]

(1) $\Rightarrow y^2 = x^2 - 25$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 + 25},\ y \nless 0$

এখানে $y \ge 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for $y \ge 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y \ge 0\}$

$= [0, \infty)$

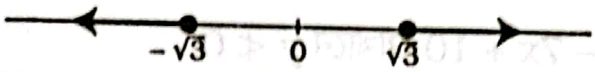
CamScanner

(ii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$

এখানে f(x) এর মান বাস্তব হইবে যদি $x^2 - 3 \geq 0$ হয়। [Here the value of f(x) will be real if $x^2 - 3 \geq 0$]

$$\Rightarrow x^2 \geq 3$$

$$\Rightarrow x \leq -\sqrt{3} \text{ বা } x \geq \sqrt{3}$$



$\therefore D_f = \{x : x \leq -\sqrt{3}\} \cup \{x : x \geq \sqrt{3}\}$

$= (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty)$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য হইবে। [In (1), the value of y will be positive or zero.]

(1) $\Rightarrow y^2 = x^2 - 3$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 + 3}, y \nless 0$

এখানে $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for $y \geq 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

উদাহরণ–14. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions.]

(i) $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ **[NUH–2010]**

(ii) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **[NUH(NM)–2008]**

(iii) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ **[NUH–02, 11, NUH(NM)–12, 14]**

(iv) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

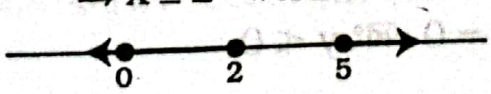
(v) $y = \sqrt{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$

সমাধান ঃ (i) $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

$= \sqrt{(x-2)(x-5)}$

এখানে y এর মান বাস্তব হইবে যদি $(x-2)(x-5) \geq 0$ হয়। [Here the value of y will be real if $(x-2)(x-5) \geq 0$.]

$$\Rightarrow x \leq 2 \text{ বা } x \geq 5$$



CamScanner

$\therefore D_f = \{x : x \le 2\} \cup \{x : x \ge 5\}$

$= (-\infty, 2] \cup [5, \infty)$

আবার, $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান সর্বদা ধনাত্মক বা শূন্য। [In (1), the value of y is always positive or zero.]

(1) $\Rightarrow y^2 = x^2 - 7x + 10$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x^2 - 7x + (10 - y^2) = 0,\ y \nless 0$

এখানে x এর মান বাস্তব এবং সংজ্ঞায়িত হইবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 এবং $y \nless 0$ হয়। [Here the value of x will be real and it be defined if the descriminent ≥ 0 and $y \nless 0$.]

$\Rightarrow 49 - 4(10 - y^2) \ge 0$ এবং $y \nless 0$ হয়।

$\Rightarrow 4y^2 + 9 \ge 0$ এবং $y \nless 0$

$\Rightarrow y \ge 0$, যা উভয় অসমতার জন্য সত্য। [Which is true for both the inequalities.]

$\therefore R_f = \{y : y \ge 0\}$

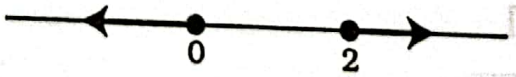
$= [0, \infty)$

(ii) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

এখানে y এর মান বাস্তব হইবে যদি $x^2 - 2x \ge 0$ হয়। [Here the value of y will be real if $x^2 - 2x \ge 0$.]

$$\Rightarrow x(x - 2) \ge 0$$

$$\Rightarrow x \le 0 \text{ বা } x \ge 2$$



$\therefore D_f = \{x : x \le 0\} \cup \{x : x \ge 2\}$

$= (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

আবার, $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান ঋণাত্মক হইবে না। [In (1), the value of y can not be negative.]

(1) $\Rightarrow y^2 = x^2 - 2x$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - y^2 = 0$ এবং $y \nless 0$

CamScanner

এখানে x এর মান বাস্তব ও সংজ্ঞায়িত হইবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 এবং $y \nless 0$ হয়। [Here the value of x will be real and it be defined if the descriminent ≥ 0 and $y \nless 0$.]

$\Rightarrow 4 + 4y^2 \geq 0$ এবং $y \nless 0$

$\Rightarrow y \geq 0$, যা উভয় অসমতার জন্য সত্য। [Which is true for both the inequalities.]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

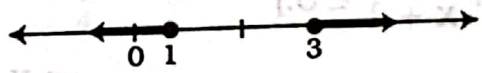
$= [0, \infty)$

(iii) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ ..... (1)

$= \sqrt{(x-1)(x-3)}$

এখানে y এর মান বাস্তব হইবে যদি $(x-1)(x-3) \geq 0$ হয়। [Here the value of y will be real if $(x-1)(x-3) \geq 0$]

$\Rightarrow x \leq 1$ বা $x \geq 3$



$\therefore D_f = \{x : x \leq 1\} \cup \{x : x \geq 3\}$

$= (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$

(1) এ y এর মান সর্বদা ধনাত্মক বা শূন্য। [In (1), the value of y is always positive or zero.]

$\therefore 0 \Rightarrow y^2 = x^2 - 4x + 3$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 - y^2 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(3 - y^2)}}{2}$$

$= 2 \pm \sqrt{1 + y^2}$ যেখানে $y \nless 0$

এখানে $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for $y \geq 0$]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\} = [0, \infty)$.

(iv) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ ..... (1)

এখানে x এর সকল মানের জন্য y এর মান বাস্তব হয়। [Here y will be real for all values of x]

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার (1) এ y এর মান ধনাত্মক হইবে। [In (1), the value of y will be positive.]

CamScanner

$(1) \Rightarrow y^2 = x^2 + 1$ যেখানে $y > 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 - 1},\ y > 0$

x সংজ্ঞায়িত হইবে যদি $y^2 - 1 \geq 0$ এবং $y > 0$ হয় [x will be defined if $y^2 - 1 \geq 0$ and $y > 0$]

$\Rightarrow (y \leq -1$ বা $y \geq 1)$ এবং $y > 0$

$\Rightarrow y \geq 1$

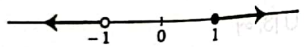
$\therefore R_f = \{y : y \geq 1\}$

$= [1, \infty)$

(v) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ ..... (1)

এখানে y এর মান বাস্তব হইবে যদি $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$ হয়। [The value of y will be real if $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$.]

$\Rightarrow x < -1$ বা $x \geq 1$



$\therefore D_f = \{x : x < -1\} \cup \{x : x \geq 1\}$

$= (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$

আবার (1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য হইবে। [Again, in (1), the value of y will be positive or zero.]

$(1) \Rightarrow y^2 = \dfrac{x-1}{x+1}$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow xy^2 + y^2 = x - 1,\ y \nless 0$

$\Rightarrow x(1 - y^2) = y^2 + 1,\ y \nless 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{y^2 + 1}{(1+y)(1-y)},\ y \nless 0$

এখানে $y = 1$ ব্যতীত $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for $y \geq 0$ except $y = 1$.]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\} - \{1\}$

$= [0, \infty) - \{1\}$

$= [0, 1) \cup (1, \infty)$

উদাহরণ-15. নিম্নের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions.]

(i) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$

(ii) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$ **[NUH(NM)-2007, DUH-2012]**

(iii) $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 3x + 2}$.

সমাধান ঃ (i) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$ ..... (1)

এখানে y এর মান বাস্তব হইবে যদি $x^2 - 4x > 0$ হয়। [Here the value of y will be real if $x^2 - 4x > 0$.]

$\Rightarrow x(x - 4) > 0$

$\Rightarrow x < 0$ বা $x > 4$

$\therefore D_f = \{x : x < 0\} \cup \{x : x > 4\}$

$= (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$

আবার (1) এ y এর মান অঋণাত্মক হইবে। [Again in (1) the value of y will be non-negative.]

$(1) \Rightarrow y^2 = \dfrac{1}{x^2 - 4x}$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x - \dfrac{1}{y^2} = 0,\ y \nless 0$

x এর মান বাস্তব ও সংজ্ঞায়িত হইবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 এবং $y \nless 0$ হয়। [x will be real and defined if the descriminent ≥ 0 and $y \nless 0$]

$\Rightarrow 16 + \dfrac{4}{y^2} \geq 0$ এবং $y \nless 0$

$\Rightarrow y > 0$, যা উভয় অসমতার জন্য সত্য। [Which is true for both the inequalities.]

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$

$= (0, \infty)$

(ii) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$

$= \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$

CamScanner

এখানে $x = 1$ বা $x = 3$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বাস্তব হয়। [Here the value of y is real for all real values of x except $x = 1$ or $x = 3$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$

আবার, $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 - \dfrac{1}{y} = 0$

এখানে x এর মান বাস্তব হইবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 হয়। [Here the value of x will be real if descriminent ≥ 0.]

$\Rightarrow 16 - 4\left(3 - \dfrac{1}{y}\right) \geq 0$

$\Rightarrow 4 + \dfrac{4}{y} \geq 0$

$\Rightarrow 1 + \dfrac{1}{y} \geq 0$

$\Rightarrow \dfrac{y+1}{y} \geq 0$

$\Rightarrow y \leq -1$ বা $y > 0$

$\therefore R_f = \{y : y \leq -1\} \cup \{y : y > 0\}$

$= (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$

(iii) $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 3x + 2}$

$= \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$

এখানে $x = 1$ বা $x = 2$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বাস্তব হয়। [Here the value of y is real for all real values of x except $x = 1$ or $x = 2$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

আবার, $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 3x + 2}$

$\Rightarrow x^2y - 3xy + 2y = x^2$

$\Rightarrow (y-1)x^2 - 3xy + 2y = 0$

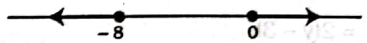
এখানে x এর মান বাস্তব হইবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 হয়। [Here the value of x will be real if descriminent ≥ 0.

$\Rightarrow 9y^2 - 4(y-1) \cdot 2y \geq 0$

$\Rightarrow y^2 + 8y \geq 0$

$\Rightarrow y(y+8) \geq 0$

$\Rightarrow y \leq -8$ বা $y \geq 0$



$\therefore R_f = \{y : y \leq -8\} \cup \{y : y \geq 0\}$

$= (-\infty, -8] \cup [0, \infty)$

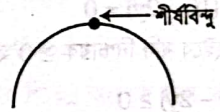
12. $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a function of the form $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.]

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হইবে।

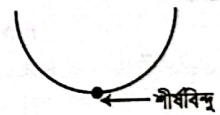
$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ প্যারাবোলার সমীকরণ যাহার অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল। সুতরাং প্যারাবোলার শীর্ষবিন্দু লঘিষ্ঠ বিন্দু বা গরিষ্ঠ বিন্দু হইবে।

$a < 0$ হইলে প্যারাবোলার আকার হইবে;



$a > 0$ হইলে প্যারাবোলার আকার হইবে;



$\therefore$ $a < 0$ এর জন্য $R_f = (-\infty,$ শীর্ষবিন্দুর কোটি$]$

এবং $a > 0$ এর জন্য $R_f =$ [শীর্ষবিন্দুর কোটি, ∞)

নোট ঃ নিশ্চায়ক ≥ 0 ধরেও রেঞ্জ নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ–16. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 5$ (ii) $y = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x$

সমাধান ঃ (i) $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 5$

CamScanner

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বাস্তব হইবে।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 10 = 2y$

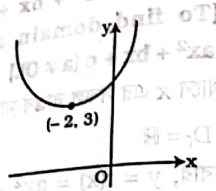
$\Rightarrow (x+2)^2 = 2y - 6$

$= 2(y-3)$

$\therefore$ প্যারাবোলায় শীর্ষবিন্দু $= (x+2=0, y-3=0)$

$= (x=-2, y=3)$

$= (-2, 3)$



$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর কোটি $= 3$

$\therefore R_f =$ [শীর্ষবিন্দুর কোটি, ∞)

$= [3, \infty)$

অন্যভাবে রেঞ্জ নির্ণয় :

$y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$

$\Rightarrow x^2 + 4x + (10 - 2y) = 0$

এখানে x এর মান বাস্তব হইবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 হয়।

$\Rightarrow 16 - 4(10 - 2y) \geq 0$

$\Rightarrow -24 + 8y \geq 0$

$\Rightarrow y \geq 3$

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \{y : y \geq 3\}$

$= [3, \infty)$

(ii) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

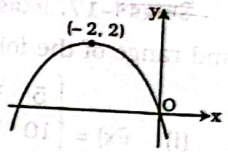
আবার, $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$ প্যারাবোলার সমীকরণ।

$\Rightarrow x^2 + 4x = -2y$

$\Rightarrow (x+2)^2 = -2(y-2)$

$\therefore$ প্যারাবোলার শীর্ষবিন্দু $= (x+2=0, y-2=0)$

$= (-2, 2)$



শীর্ষবিন্দুর কোটি $= 2$

$\therefore R_f = (-\infty,$ শীর্ষবিন্দুর কোটি]

$= (-\infty, 2]$

অন্যভাবে রেঞ্জ নির্ণয় :

$y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 2y = 0$

এখানে x এর মান বাস্তব হইবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 হয়।

$\Rightarrow 16 - 4 \cdot 2y \geq 0$

$\Rightarrow y \leq 2$

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \{y : y \leq 2\}$

$= (-\infty, 2]$

13. খন্ডিত ফাংশন এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a piece wise function.] :

যদি কোনো ফাংশন ডোমেনের বিভিন্ন অংশের জন্য ভিন্ন ভিন্নভাবে সংজ্ঞায়িত হয় তবে তাহাকে খন্ডিত ফাংশন বলা হয়।

$$y = \begin{cases} f_1(x) \text{ যখন } x < a \\ f_2(x) \text{ যখন } a \leq x < b \\ f_3(x) \text{ যখন } x \geq b \end{cases}$$ একটি খন্ডিত ফাংশন।

এখানে $x < a$, $a \leq x < b$ এবং $x \geq b$ ব্যবধিতে y এর মান সংজ্ঞায়িত। সুতরাং ব্যবধিগুলির সংযোগ (union) সেট ফাংশনটির ডোমেন হইবে।

$\therefore D_f = \{x : x < a\} \cup \{x : a \leq x < b\} \cup \{x : x \geq b\}$

$= (-\infty, a) \cup [a, b) \cup [b, \infty)$

$= (-\infty, \infty)$

$= \mathbb{R}$

আবার প্রত্যেক ব্যবধিতে বিদ্যমান সকল y এর মানের সেট রেঞ্জ হইবে। নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে খন্ডিত ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করা হইল।

CamScanner

উদাহরণ-17. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 10 & \text{যখন } 1 < x \le 2 \\ 15 & \text{যখন } 2 < x \le 3 \end{cases}$

(ii) $y = \begin{cases} 1-x & \text{যখন } -1 \le x < 1 \\ 0 & \text{যখন } 1 \le x \le 2 \\ x^2-4 & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$ **[NUH-2007]**

(iii) $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } 0 \le x \le 1/2 \\ 1 & \text{যখন } x = 1/2 \\ 1-x & \text{যখন } 1/2 < x < 1 \end{cases}$ **[RUH-2009]**

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 10 & \text{যখন } 1 < x \le 2 \\ 15 & \text{যখন } 2 < x \le 3 \end{cases}$

এখানে $0 < x < 1$, $1 < x \le 2$ এবং $2 < x \le 3$ ব্যবধিতে $f(x)$ এর মান সংজ্ঞায়িত।

$\therefore D_f = \{x : 0 < x < 1\} \cup \{x : 1 < x \le 2\} \cup \{x : 2 < x \le 3\}$

$= (0, 1) \cup (1, 2] \cup (2, 3]$

$= (0, 1) \cup (1, 3]$

আবার, $0 < x < 1$ ব্যবধিতে $f(x) = 5$

$1 < x \le 2$ ব্যবধিতে $f(x) = 10$

এবং $2 < x \le 3$ ব্যবধিতে $f(x) = 15$

$\therefore R_f = \{5, 10, 15\}$

(ii) $y = \begin{cases} 1-x & \text{যখন } -1 \le x < 1 \\ 0 & \text{যখন } 1 \le x \le 2 \\ x^2-4 & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$

এখানে $-1 \le x < 1$, $1 \le x \le 2$ এবং $x > 2$ ব্যবধিতে y এর মান সংজ্ঞায়িত।

$\therefore D_f = \{x : -1 \le x < 1\} \cup \{x : 1 \le x \le 2\} \cup \{x : x > 2\}$

$= [-1, 1) \cup [1, 2] \cup (2, \infty)$

$= [-1, \infty)$

আবার, $-1 \le x < 1$ ব্যবধিতে $y = 1 - x$ হইতে পাই $0 < y \le 2$

$1 \le x \le 2$ ব্যবধিতে $y = 0$

এবং $2 < x$ ব্যবধিতে $y = x^2 - 4$ হইতে পাই $0 < y$

$\therefore R_f = \{y : 0 < y \le 2\} \cup \{0\} \cup \{y : y > 0\}$

$= (0, 2] \cup \{0\} \cup (0, \infty)$

$= [0, \infty)$

(iii) প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } 0 \le x < 1/2 \\ 1 & \text{যখন } x = 1/2 \\ 1-x & \text{যখন } 1/2 < x < 1 \end{cases}$

এখানে $0 \le x < \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ এবং $\frac{1}{2} < x < 1$ এর জন্য $f(x)$ এর মান সংজ্ঞায়িত।

সুতরাং $D_f = \left\{x : 0 \le x < \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left\{x : \frac{1}{2} < x < 1\right\} = [0, 1)$

আবার, $0 \le x < \frac{1}{2}$ ব্যবধিতে $f(x) \in [0, 1/2)$

$x = \frac{1}{2}$ এর জন্য $f(x) = 1$

এবং $\frac{1}{2} < x < 1$ ব্যবধিতে $f(x) \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

সুতরাং $R_f = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \{1\} \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \{1\}$

14. পরম মান ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a absolute value function] :

পরম মান ফাংশনকে খন্ডিত ফাংশনে প্রকাশ করিয়া ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করিতে হয়। $a < b$ এর জন্য একটি পরমমান ফাংশনকে নিম্নরূপে খন্ডিত ফাংশনে প্রকাশ করা যায়।

$$f(x) = |x-a| + |x-b|$$

$x < a$ এর জন্য $f(x) = -(x-a) - (x-b) = a + b - 2x$

$a \le x < b$ এর জন্য $f(x) = (x-a) - (x-b) = b - a$

$b \le x$ এর জন্য $f(x) = (x-a) + (x-b) = 2x - a - b$

$\therefore$ খন্ডিত ফাংশন, $f(x) = \begin{cases} a+b-2x & \text{যখন } x < a \\ b-a & \text{যখন } a \le x < b \\ 2x-a-b & \text{যখন } b \le x \end{cases}$

CamScanner

উদাহরণ–18. নিম্নের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = |x+1| + |x-1|$ **[NUH(NM)–2005, 2009]**

(ii) $f(x) = |x-1| + |x+3|$ **[NUH–2008]**

(iii) $f(x) = \frac{x}{|x|}$ **[NUH–2012, 2015, 2018, DUH–1981, CUH–2007]**

সমাধান ঃ (i) $f(x) = |x+1| + |x-1|$

$x < -1$ এর জন্য $f(x) = -(x+1) - (x-1)$

$= -2x$

$-1 \le x < 1$ এর জন্য $f(x) = x + 1 - (x-1)$

$= 2$

$1 \le x$ এর জন্য $f(x) = x + 1 + x - 1$

$= 2x$

সুতরাং আমরা পাই, $y = f(x) = \begin{cases} -2x & \text{যখন } x < -1 \\ 2 & \text{যখন } -1 \le x < 1 \\ 2x & \text{যখন } 1 \le x \end{cases}$

$\therefore D_f = \{x : x < -1\} \cup \{x : -1 \le x < 1\} \cup \{x : 1 \le x\}$

$= (-\infty, -1) \cup [-1, 1) \cup [1, \infty) = \mathbb{R}$

আবার, $x < -1$ ব্যবধিতে $y > 2$

$-1 \le x < 1$ ব্যবধিতে $y = 2$

$1 \le x$ ব্যবধিতে $y \ge 2$

$\therefore R_f = \{y : y > 2\} \cup \{2\}$

$= (2, \infty) \cup \{2\}$

$= [2, \infty)$

(ii) $f(x) = |x-1| + |x+3|$

$= |x+3| + |x-1|$

$x < -3$ এর জন্য $f(x) = -(x+3) - (x-1) = -2x - 2$

$-3 \le x < 1$ এর জন্য $f(x) = (x+3) - (x-1) = 4$

$1 \le x$ এর জন্য $f(x) = (x+3) + (x-1) = 2x + 2$

সুতরাং আমরা পাই, $y = f(x) = \begin{cases} -2x-2 & \text{যখন } x < -3 \\ 4 & \text{যখন } -3 \le x < 1 \\ 2x+2 & \text{যখন } 1 \le x \end{cases}$

$\therefore D_f = \{x : x < -3\} \cup \{x : -3 \le x < 1\} \cup \{x : 1 \le x\}$

$= (-\infty, -3) \cup [-3, 1) \cup [1, \infty)$

$= \mathbb{R}$

আবার, $x < -3$ ব্যবধিতে $y > 4$

$-3 \le x < 1$ ব্যবধিতে $y = 4$

$1 \le x$ ব্যবধিতে $y \ge 4$

$\therefore R_f = \{y : y > 4\} \cup \{4\}$

$= [4, \infty)$

(iii) $f(x) = \frac{x}{|x|}$

$x < 0$ এর জন্য $f(x) = \frac{x}{-x} = -1$

$0 < x$ এর জন্য $f(x) = \frac{x}{x} = 1$ [$x = 0$ এর জন্য $f(x)$ বিদ্যমান নয়]

সুতরাং আমরা পাই, $y = f(x) = \begin{cases} -1 & \text{যখন } x < 0 \\ 1 & \text{যখন } 0 < x \end{cases}$

$\therefore D_f = \{x : x < 0\} \cup \{x : x > 0\}$

$= \mathbb{R} - \{0\}$ এবং $R_f = \{-1, 1\}$

15. সূচকীয় ফাংশন ও লগারিদিমিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of exponential function and logarithmic function] :

$y = a^x$ কে সূচকীয় ফাংশন বলা হয়।

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = a^x$

$\Rightarrow x = \log_a y$ লগারিদিমিক ফাংশন।

এখানে $y > 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$

$= (0, \infty)$

নোট ঃ $\log_a(0)$ বা $\log_a$ (ঋণাত্মক সংখ্যা) বিদ্যমান নয়।

CamScanner

উদাহরণ–19. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = e^x$

(ii) $f(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

সমাধান ঃ (i) $f(x) = e^x$

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = f(x) = e^x$

$\Rightarrow e^x = y$

$\Rightarrow x = ln\, y$

এখানে কেবলমাত্র $y > 0$ এর জন্য x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$

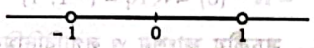
$= (0, \infty)$

(ii) $f(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

এখানে f(x) এর মান বিদ্যমান হইবে যদি

$\frac{1+x}{1-x} > 0$ হয়।

$\Rightarrow \frac{x+1}{x-1} < 0$



$\Rightarrow -1 < x < 1$

$\therefore D_f = \{x : -1 < x < 1\}$

$= (-1, 1)$

আবার, $y = f(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$\Rightarrow ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = y$

$\Rightarrow \frac{1+x}{1-x} = e^y$

$\Rightarrow 1 + x = e^y - xe^y$

$\Rightarrow x = \frac{e^y - 1}{e^y + 1}$

এখানে y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore R_f = \mathbb{R}$

উদাহরণ–20. $f(x) = ln\,(x-2)$ ফাংশনটির D_f এবং R_f নির্ণয় কর। [Find D_f and R_f of the function $f(x) = ln\,(x-2)$.]

সমাধান ঃ আমরা জানি লগারিদম শুধু ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত।

$\therefore f(x) = ln\,(x-2)$ এর মান বাস্তব হইবে যদি $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \{x : x > 2\} = (2, \infty)$

আবার ধরি $y = f(x) = ln\,(x-2) \Rightarrow x - 2 = e^y$

$\Rightarrow x = e^y + 2$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য e^y বাস্তব, ফলে $x = e^y + 2$ বাস্তব।

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$.

16. ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় [To find domain and range of a trigonometric function] :

(i) $y = \sin x$

x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $x = \sin^{-1} y$

এখানে x এর মান কেবলমাত্র $-1 \le y \le 1$ ব্যবধিতে বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \{y : -1 \le y \le 1\}$

$= [-1, 1]$

(ii) $y = \cos x$

সাইন ফাংশনের অনুরূপ, $D_f = \mathbb{R}$ এবং $R_f = [-1, 1]$

(iii) $y = \tan x$

এখানে $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ এর জন্য y এর মান বিদ্যমান নয়।

x এর এইমান সমূহ ব্যতীত অবশিষ্ট সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{\ldots -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$

আবার, $y = \tan x \Rightarrow x = \tan^{-1} y$

এখানে y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \mathbb{R}$

CamScanner

(iv) $y = \cot x$

এখানে $x = n\pi$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ এর জন্য y এর মান বিদ্যমান নয় এবং অবশিষ্ট সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{\cdots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\}$

আবার, $y = \cot x$

$\Rightarrow x = \cot^{-1} y$

এখানে y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \mathbb{R}$

(v) $y = \sec x$

এখানে $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ এর জন্য y এর মান বিদ্যমান নয় এবং অবশিষ্ট সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{\cdots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\right\}$

আবার, $y = \sec x$

$\Rightarrow x = \sec^{-1} y$

এখানে $-1 < y < 1$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \mathbb{R} - (-1, 1)$

$= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

(vi) $y = \operatorname{cosec} x$

এখানে $x = n\pi$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ এর জন্য y এর মান বিদ্যমান নয় এবং অবশিষ্ট সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{\cdots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\}$

আবার, $y = \operatorname{cosec} x$

$\Rightarrow x = \operatorname{cosec}^{-1} y$

এখানে $-1 < y < 1$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \mathbb{R} - (-1, 1)$

$= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

নোট ঃ বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ পরস্পর পরিবর্তন হইবে।

উদাহরণ-21. নিম্নলিখিত ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions.] :

(i) $f(x) = \sin 2x$, (ii) $f(x) = \cos 3x$ এবং (iii) $f(x) = \tan 4x$.

সমাধান ঃ (i). আমরা জানি সাইন অনুপাতের সর্বনিম্ন মান -1 এবং সর্বোচ্চ মান $+1$.

সুতরাং সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $f(x) = \sin 2x$ এর মান বাস্তব হইবে এবং এইমান -1 ও 1 সহ ইহাদের মধ্যবর্তী বাস্তব সংখ্যা হইবে। অর্থাৎ

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \le f(x) = \sin 2x \le 1$$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $R_f = [-1, 1]$

(ii) আমরা জানি, কোসাইন অনুপাতের সর্বনিম্ন মান -1 এবং সর্বোচ্চ মান $+1$.

সুতরাং সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $f(x) = \cos 3x$ এর মান বাস্তব হইবে এবং এইমান -1 ও 1 সহ ইহাদের মধ্যবর্তী বাস্তব সংখ্যা হইবে। অর্থাৎ

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \le f(x) = \cos 3x \le 1$$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $R_f = [-1, 1]$.

(iii) $f(x) = \tan 4x = \pm\infty$ হইলে ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

আবার $\tan 4x = \pm\infty$ হইলে পাই

$$4x = (2n+1)\frac{\pi}{2}; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$\Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{8}; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$\Rightarrow x = \cdots, \frac{-3\pi}{8}, \frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \cdots$$

x এর এই মানগুলি ব্যতীত অন্য সকল বাস্তব সংখ্যার সেট ডোমেন হইবে এবং রেঞ্জ হইবে সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \mathbb{R} - \left\{\cdots, \frac{-3\pi}{8}, \frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \cdots\right\}$

এবং রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$.

উদাহরণ-22. $f(x) = \sin x + \cos x$ ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the function $f(x) = \sin x + \cos x$.]

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = \sin x + \cos x$

$$= \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

CamScanner

$$= \sqrt{2}\left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

এখানে x এর সকল মানের জন্য f(x) এর মান বিদ্যমান।

∴ ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$

আবার, x এর সকল মানের জন্য $-1 \le \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$

বা, $-\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$

বা, $-\sqrt{2} \le f(x) \le \sqrt{2}$

∴ ফাংশনটির রেঞ্জ $R_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

উদাহরণ–23. $f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{x+1}\right)$ ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

[Find domain and range of the function $f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{x+1}\right)$.]

[NUH–2002]

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{x+1}\right)$

এখানে f(x) বিদ্যমান হইবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $-1 \le \frac{2x}{x+1} \le 1$ হয়।

$\Rightarrow -1 \le \frac{2x}{x+1}$	$\frac{2x}{x+1} \le 1$
$\Rightarrow -x - 1 \le 2x$	$2x \le x + 1$
$\Rightarrow -1 \le 3x$	$x \le 1$
$\Rightarrow -\frac{1}{3} \le x$	

$\therefore -1 < \frac{2x}{x+1} \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \le x \le 1$

সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$

এখন, $f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{x+1}\right)$ হইতে পাই

$$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{যখন } x = -1/3 \\ 0 & \text{যখন } x = 1 \end{cases}$$

$\therefore x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ এর জন্য $0 \le f(x) \le \pi$

সুতরাং ফাংশনটির রেঞ্জ $R_f = [0, \pi]$

উদাহরণ–24. দেখাও যে ফাংশন $f(x) = \frac{x}{\sin(1/x)}$ এর

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{\cdots -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{\pi}, 0, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \cdots\right\}$$

এবং $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$. **[NUH–2004, CUH–2007]**

সমাধান ঃ $x = 0$ অথবা $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ হইলে $f(x) = \frac{x}{\sin(1/x)}$ ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত হয়। [The function $f(x) = \frac{x}{\sin(1/x)}$ will be undefined when $x = 0$ or $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.]

এখন $\sin\frac{1}{x} = 0$ হইলে পাই,

$$\frac{1}{x} = n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{n\pi}, n \in \mathbb{Z} - \{0\} = \cdots, -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \cdots$$

সুতরাং $x = \cdots, -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{\pi}, 0, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \cdots$ এর জন্য ফাংশন অসংজ্ঞায়িত হয়। এই মানগুলি ডোমেনে এর সদস্য হইবে না। [The function is undefined for $x = \cdots, -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{\pi}, 0, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \cdots$. So they will be not in the domain]

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \mathbb{R} - \left\{\cdots, -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{\pi}, 0, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \cdots\right\}$

আবার, যেহেতু $x \ne 0$.

সুতরাং $f(x) \ne 0$

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

CamScanner

✪ এক নজরে কিছু বিশেষ আকারের ফাংশনের ডোমেন (D_f) ও রেঞ্জ (R_f) এর তালিকা ঃ

	বিশেষ আকারের ফাংশন	ডোমেন (D_f)	রেঞ্জ (R_f)
(i)	$f(x) = c$, c ধ্রুবক	$\mathbb{R}$	(c)
(ii)	$f(x) = ax + b\ (a \neq 0)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
(iii)	$f(x) = \frac{1}{ax+b}\ (a \neq 0)$	$\mathbb{R} - \left\{-\frac{b}{a}\right\}$	$\mathbb{R} - \{0\}$
(iv)	$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}\ (a \neq 0, c \neq 0)$	$\mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$
(v)	$f(x) = \frac{x^2-a^2}{x-a}$	$\mathbb{R} - \{a\}$	$\mathbb{R} - \{2a\}$
(vi)	$f(x) = \frac{x-a}{x^2-a^2}$	$\mathbb{R} - \{-a, a\}$	$\mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{2a}\right\}$
(vii)	$f(x) = \sqrt{ax+b}\ (a > 0)$	$\left[-\frac{b}{a}, \infty\right)$	$[0, \infty)$
(viii)	$f(x) = \sqrt{ax+b}\ (a < 0)$	$\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$	$[0, \infty)$
(ix)	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{ax+b}}\ (a > 0)$	$\left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$	$(0, \infty)$
(x)	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{ax+b}}\ (a < 0)$	$\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$	$(0, \infty)$
(xi)	$f(x) = \sqrt{a^2-x^2}$	$[-a, a]$	$[0, a]$
(xii)	$f(x) = \sqrt{x^2-a^2}$	$(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$	$[0, \infty)$
(xiii)	$f(x) = e^{ax}\ (a \neq 0)$	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$
(xiv)	$f(x) = \ln x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
(xv)	$f(x) = \sin x$ বা $f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
(xvi)	$f(x) = \sin\frac{1}{x}$ বা $f(x) = \cos\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$[-1, 1]$
(xvii)	$f(x) = \tan x$	$\mathbb{R} - \left\{\ldots -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \ldots\right\}$	$\mathbb{R}$
(xviii)	$f(x) = \cot x$	$\mathbb{R} - \{\ldots -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\}$	$\mathbb{R}$
(xix)	$f(x) = \sec x$	$\mathbb{R} - \left\{\ldots -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
(xx)	$f(x) = \operatorname{cosec} x$	$\mathbb{R} - \{\ldots -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

বিঃ দ্রঃ 1(C) অধ্যায়ে আরো অনেক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ সম্পর্কে চিত্রের সাহায্যে আলোচনা করা হইয়াছে।

Part–A : Brief / Quiz Questions with Answers
বিভাগ ক ঃ উত্তরসহ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন

1.A.1. ক্যালকুলাস কি? (What is Calculus?)

Ans : ক্যালকুলাস হইল গতি এবং পরিবর্তন সম্পর্কিত গণিত। ইহা একটি চলকের সম্পর্কে অপর চলকের পরিবর্তন সম্পর্কিত সুস্পষ্ঠ ধারণা দেয়।

1.A.2. ক্যালকুলাসের আবিষ্কারক কে? (Who are discoverer of Calculus?)

Ans : ইংলিশ গণিতবিদ স্যার আইজ্যাক নিউটন (Sir Isaac Newton : 1642–1727) এবং জার্মান গণিতবিদ গড়ফ্রেড লিবনীজ (Gottfried Leibnitz : 1646–1716) ক্যালকুলাসের আবিষ্কারক। সপ্তদশ শতকের শেষভাগে তাহারা পৃথকভাবে ক্যালকুলাস আবিষ্কার করেন।

1.A.3. ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। (Define function.)

[NUH–2015, 2017, NUH(NM)–2011]

Ans : যদি X ও Y দুইটি অশূন্যক সেট এবং f এইরূপ একটি নিয়ম হয় যে, প্রত্যেক $x \in X$ এর জন্য একটি অনন্য $y \in Y$ পাওয়া যায় তবে f কে X সেট হইতে Y সেটে একটি ফাংশন বলা হয়। ইহাকে $f : X \to Y$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.4. ফাংশনে অনির্ভরশীল চলক এবং নির্ভরশীল চলক বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by independent variable and dependent variable?)

Ans : $f : X \to Y$ ফাংশনে $x \in X$ কে অনির্ভরশীল চলক এবং y (বা f(x)) $\in Y$ কে নির্ভরশীল চলক বলা হয়।

1.A.5. কোনো বিন্দুতে ফাংশনের মান বা ইমেজ কাকে বলে? (What is called value or image of a function at a point?)

Ans : $f : X \to Y$ ফাংশনে $x \in X$ এর f সম্পর্কিত উপাদান f(x) বা y কে x বিন্দুতে f এর মান বা ইমেজ বলা হয়। Y সেটের সকল উপাদান ফাংশনের মান বা ইমেজ নাও হইতে পারে।

1.A.6. ধরি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 - 5x + 8$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটির মান বা ইমেজ কত? (Let the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is defined by a formula $f(x) = x^2 - 5x + 8$. What is the value or image of the function?)

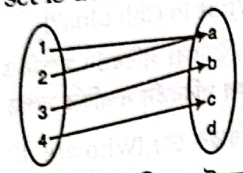
Ans : এখানে $f(x) = x^2 - 5x + 8$

$\therefore f(0) = 0^2 - 5.0 + 8 = 8$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটির মান বা ইমেজ 8.

CamScanner

1.A.7. সসীম সেট হইতে সসীম সেটে নিম্নের চিত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত ফাংশনের ইমেজ কোনোগুলি? (Which are images of the function from finite set to finite set is defined by the following figure?)



Ans : a, b, c প্রদত্ত ফাংশনটির ইমেজ কিন্তু d ইমেজ নয়।

1.A.8. ফাংশনের ডোমেন ও কোডোমেন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by domain and codomain of a function?)

[NUH-2011, NUH(NM)-2011, BSc(Pass)-2016]

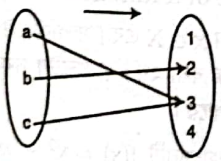
Ans : $f : X \to Y$ ফাংশনের X কে ডোমেন এবং Y কে কোডোমেন বা কাউন্টার ডোমেন বলে। সাধারণতঃ ডোমেনকে D_f এবং কোডোমেনকে Cod_f দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.9. ফাংশনের রেঞ্জ এর সংজ্ঞা দাও। (Define range of a function.)

[NUH-2010, NUH(NM)-2011]

Ans : $f : X \to Y$ ফাংশনের Y সেটের অন্তর্গত সকল f সম্পর্কিত উপাদান বা ইমেজ দ্বারা গঠিত উপসেটকে ফাংশনটির রেঞ্জ বলা হয়। ইহাকে R_f দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.10. নিম্নের চিত্র দ্বারা সসীম সেট হইতে সসীম সেটে সংজ্ঞায়িত ফাংশনের ডোমেন, কোডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। (Find domain, codomain and range of the function from finite set to finite set is defined by the following figure.)



Ans : প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $D_f = \{a, b, c\}$

কোডোমেন $Cod_f = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং রেঞ্জ $R_f = \{2, 3\}$.

1.A.11. যদি $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{2, 5, 8, 11, 15\}$ ফাংশনটি $f(x) = 3x + 2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় তবে R_f নির্ণয় কর। (If the function $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{2, 5, 8, 11, 15\}$ is defined by $f(x) = 3x + 2$, then find R_f.)

Ans : প্রদত্ত ফাংশনের ক্ষেত্রে, $R_f = \{f(0), f(1), f(2), f(3)\} = \{2, 5, 8, 11\}$

1.A.12. দেখাও যে $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 4, 8, 16\}$ ফাংশন নয়। (Show that $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 4, 8, 16\}$ is not function defined by $f(x) = x^2$.)

Ans : এখানে, $f(3) = 9 \notin \{0, 1, 4, 8, 16\}$

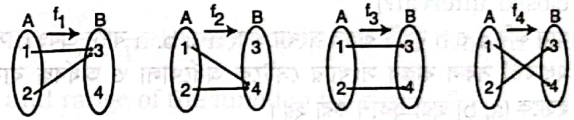
সুতরাং $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 4, 8, 16\}$ ফাংশন নয়।

1.A.13. ধরি A ও B দুইটি সসীম সেট যেখানে $n(A) = p$ এবং $n(B) = q$. A হইতে B তে কয়টি ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়? (Let A and B are finite sets where $n(A) = p$ and $n(B) = q$. How many are functions defined from A to B?)

Ans : যেহেতু A ও B সসীম সেটদ্বয়ের সদস্য সংখ্যা যথাক্রমে p ও q, সুতরাং A হইতে B তে q^p সংখ্যক ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়।

1.A.14. $A = \{1, 2\}$ সেট হইতে $B = \{3, 4\}$ সেটে সম্ভাব্য সকল ফাংশনগুলি চিত্রের মাধ্যমে দেখাও। (Show by figure all possible functions from the set $A = \{1, 2\}$ to the set $B = \{3, 4\}$.)

Ans : $A = \{1, 2\}$ সেট হইতে $B = \{3, 4\}$ সেটে $2^2 = 4$টি ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়। নিম্নে চিত্রের মাধ্যমে ফাংশনগুলি দেখানো হইল ঃ



1.A.15. $y = f(x)$ দ্বারা কি বোঝায়? (What is meant by $y = f(x)$?)

Ans : $y = f(x)$ দ্বারা বোঝায় একটি চলক x এর উপর অপর একটি চলক y নির্ভরশীল।

1.A.16. $y = f(x)$ একটি ফাংশন বলিতে কি বোঝায়? (What is meant by $y = f(x)$ is a function?)

Ans : যদি x এর উপর y এইরূপভাবে নির্ভরশীল হয় যে, x এর প্রত্যেক বাস্তব মান y এর ঠিক একটি বাস্তব মান নির্ণয় করে, তবে $\{(x, f(x)) : y = f(x)\}$ আকারের ফাংশনকে আমরা বলি, $y = f(x)$ একটি ফাংশন বা x এর ফাংশন y. অন্যভাবে ঃ $y = f(x)$ একটি ফাংশন বলিতে বোঝায়, $y = f(x)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : D_f \to R_f$ একটি ফাংশন।

1.A.17. যদি $\{(x, f(x)) : y = f(x)\}$ ফাংশন না হয়, তবে ইহাকে কি বলে? (If $\{(x, f(x)) : y = f(x)\}$ is not function, then what is called it?)

Ans : যদি $\{(x, f(x)) : y = f(x)\}$ ফাংশন না হয় তবে ইহাকে অন্বয় (relation) বলা হয়। এইক্ষেত্রে, $y = f(x)$ কে একটি অন্বয় বলা হয়।

CamScanner

1.A.18. $y = \sin x$ কি একটি ফাংশন? (Is $y = \sin x$ a function?)

Ans : $y = \sin x$ একটি ফাংশন। কারণ x এর প্রত্যেক বাস্তব মানের জন্য y এর অনন্য বাস্তব মান বিদ্যমান।

1.A.19. ব্যবধি কাকে বলে? (What is interval?)

Ans : মনে করি দুইটি বাস্তব সংখ্যা a ও b যেখানে $a < b$ ($a > b$ ও হইতে পারে) a ও b এর একটি বা উভয়কে বাদ দিয়ে (বা অন্তর্ভুক্ত করিয়া) উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে ব্যবধি বলে।

1.A.20. খোলা ব্যবধি কি? (What is the open interval?)

Ans : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. a ও b কে বাদ দিয়ে উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে খোলা ব্যবধি বলে। ইহাকে (a, b) বা]a, b[দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.21. বদ্ধ ব্যবধি কি? (What is the closed interval?)

Ans : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. a ও b কে অন্তর্ভুক্ত করিয়া উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে বদ্ধ ব্যবধি বলে। ইহাকে [a, b] দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.22. অর্ধখোলা ও অর্ধবদ্ধ ব্যববধি কি? (What is half open and half closed interval?)

Ans : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. a বাদে এবং b সহ উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে অর্ধখোলা ও অর্ধবদ্ধ ব্যবধি বলে। ইহাকে (a, b] দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.23. অর্ধবদ্ধ ও অর্ধখোলা ব্যবধি কি? (What is half closed and half open interval?)

Ans : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. a সহ এবং b বাদে উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে অর্ধবদ্ধ ও অর্ধখোলা ব্যবধি বলে।

1.A.24. $y = f(x)$ ফাংশনের ডোমেন কাকে বলে? (What is called domain of the function $y = f(x)$?)

Ans : x এর যে সমস্ত বাস্তব মানের জন্য $y = f(x)$ সূত্র বা সমীকরণটি সংজ্ঞায়িত বা সিদ্ধ হয় তাহার সেট যদি A হয় তবে A কে $y = f(x)$ ফাংশনের ডোমেন বলে। ইহাকে D_f দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.25. $y = f(x)$ ফাংশনের রেঞ্জ কাকে বলে? (What is called range of the function $y = f(x)$?)

Ans : $y = f(x)$ ফাংশনের ডোমেনের প্রত্যেক মান বা বিন্দুর সাপেক্ষে y এর যে সমস্ত বাস্তব মান পাওয়া যায় তাহার সেট যদি B হয় তবে B কে ফাংশনটির রেঞ্জ বলে। ইহাকে R_f দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.26. $y = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত? (What is the domain and range of the function $y = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$?)

Ans : a ও b এর যে কোনো বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$, কিন্তু ফাংশনটির রেঞ্জ a এর মানের উপর নির্ভরশীল। $a \neq 0$ হইলে রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$ এবং $a = 0$ হইলে রেঞ্জ $R_f = \{b\}$ হইবে।

1.A.27. $y = \dfrac{1}{x-1}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত? [What is the domain and range of the function $y = \dfrac{1}{x-1}$?]

Ans : প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ এবং রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

1.A.28. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ফাংশনের রেঞ্জ কত? [What is the range of the function $f(x) = \dfrac{1}{x}$?] **[NUH–2011, NUH(NM)–2015]**

Ans : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ফাংশনের ডোমেন $\mathbb{R} - \{0\}$ এর প্রত্যেক মান বা বিন্দুর সাপেক্ষে $y \in \mathbb{R} - \{0\}$ হইবে।

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

1.A.29. $f(x) = \dfrac{x}{x-4}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত? [What is the domain and range of the function $f(x) = \dfrac{x}{x-4}$?]

Ans : প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন $D_f - \mathbb{R} - \{4\}$ এবং রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

1.A.30. $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x-4}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত? [What is the domain and range of the function $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x-4}$?]

Ans : ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R} - \{4\}$ এবং রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R} - \{2 \cdot 4\} = \mathbb{R} - \{8\}$.

1.A.31. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত? [What is the domain and range of the function $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$?]

Ans : প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ এবং রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{1}{4}\right\}$.

1.A.32. $y = \sqrt{x-1}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। [Find the domain of the function $y = \sqrt{x-1}$] **[NUH–2012]**

Ans : $y = \sqrt{x-1}$ ফাংশনের ডোমেন $= \{x : x \geq 1\} = [1, \infty)$

CamScanner

1.A.33. $f(x) = \sqrt{2x-1}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত? [What is the domain and range of the function $f(x) = \sqrt{2x-1}$?]

Ans : ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ এবং রেঞ্জ $R_f = [0, \infty)$.

1.A.34. $y = \sqrt{1-x}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত? [What is the domain and range of the function $y = \sqrt{1-x}$?] **[NUH-2013]**

Ans : প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \{x : x \le 1\} = (-\infty, 1]$ এবং রেঞ্জ $R_f = [0, \infty)$.

1.A.35. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত? [What is the domain and range of the function $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$?]

Ans : প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \{x : x > -1\} = (-1, \infty)$ এবং রেঞ্জ $R_f = (0, \infty)$.

1.A.36. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত? [What is the domain and range of the function $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$?] **[NUH-2017]**

Ans : ডোমেন $D_f = \{x : x < 1\} = (-\infty, 1)$ এবং রেঞ্জ $R_f = (0, \infty)$.

1.A.37. $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত? [What is the domain and range of the function $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$?] **[NUH(NM)-2016, BSc(Pass)-2014]**

Ans : ফাংশনটির ডোমেন $D_f = [-a, a]$ এবং রেঞ্জ $R_f = [0, a]$

1.A.38. $y = \sqrt{16 - x^2}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত? [What is the domain and range of the function $y = \sqrt{16 - x^2}$?] **[NUH-2014, 2018]**

Ans : ডোমেন $D_f = [-4, 4]$ এবং রেঞ্জ $R_f = [0, 4]$.

1.A.39. $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত? [What is the domain and range of the function $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$?]

Ans : প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন $D_f = (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$ এবং রেঞ্জ $R_f = [0, \infty)$.

1.A.40. $y = \sqrt{x^2 - 16}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত? [What is the domain and range of the function $y = \sqrt{x^2 - 16}$?]

Ans : ডোমেন $D_f = (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$ এবং রেঞ্জ $R_f = [0, \infty)$.

1.A.41. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ এর ডোমেন লিখ। [Write down the domain of $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.] **[NUH(NM)-2012]**

Ans : $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ এর ডোমেন $= \{x : x^2 - 1 \ge 0\}$

$= \{x : x \le -1$ বা $x \ge 1\}$

$= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

1.A.42. $y = \ln x$ ফাংশনের ডোমেন কত? (What is the domain of the function $y = \ln x$?) **[NUH-2010, 2015, NUH(NM)-2013]**

Ans : এখানে $x > 0$ এর জন্য কেবলমাত্র y এর বাস্তব মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \{x : x > 0\} = (0, \infty)$

1.A.43. $y = e^{2x}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত? [What is the domain and range of the function $y = e^{2x}$?]

Ans : ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $R_f = (0, \infty)$.

1.A.44. $y = \sin x$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত? [What is the domain and range of the function $y = \sin x$?] **[NUH-2016]**

Ans : প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $R_f = [-1, 1]$.

1.A.45. $y = \tan x$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত? [What is the domain and range of the function $y = \tan x$?] **[DUH(Aff. Coll.)-2017]**

Ans : প্রদত্ত ফাংশন $y = \tan x$ এর ডোমেন

$D_f = \mathbb{R} - \left\{\ldots -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$ এবং রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$.

1.A.46. $y = 2\sin x + \cos x$ ফাংশনের ডোমেন কত? (What is the domain of the function $y = 2\sin x + \cos x$?)

Ans : যেহেতু x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য $y = 2\sin x + \cos x$ সিদ্ধ হয়, সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$.

1.A.47. $y = \cos x$ এর রেঞ্জ কত হইবে? [What is the range of $y = \cos x$?] **[NUH(NM)-2012]**

Ans : $y = \cos x$ এর রেঞ্জ $= [-1, 1]$

CamScanner

1.A.48. $y = \sec x$ ফাংশনের রেঞ্জ কত? [What is the range of the function $y = \sec x$?]

Ans : প্রদত্ত ফাংশনটির রেঞ্জ $R_f = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

1.A.49. $y = \operatorname{cosec} x$ ফাংশনের ডোমেন কত? [What is the domain of the function $y = \operatorname{cosec} x$?]

Ans : প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R} - \{\cdots \pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\}$

1.A.50. $y = \cot x$ ফাংশন এর ডোমেন ও রেঞ্জ কত? [What is the domain and range of the function $y = \cot x$?]

Ans : ডোমেন $D_f = \mathbb{R} - \{\cdots -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\}$ এবং রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$.

1.A.51. ফাংশন $f(x) = |x-2| + 3$ এর রেঞ্জ কত? [What is the range of $f(x) = |x-2| + 3$?] **[NUH(NM)–2013]**

Ans : $f(x) = |x-2| + 3$

$$= \begin{cases} -(x-2) + 3 \text{ যখন } x < 2 \\ x - 2 + 3 \text{ যখন } x \geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 5 - x \text{ যখন } x < 2 \\ x + 1 \text{ যখন } x \geq 2 \end{cases}$$

$\therefore$ ফাংশনটির রেঞ্জ $(R_f) = (3, \infty) \cup [3, \infty) = [3, \infty)$

1.A.52. $y = \frac{x}{|x|} : x \neq 0$ ফাংশনের রেঞ্জ কত? [What is the range of $y = \frac{x}{|x|} : x \neq 0$?] **[NUH(NM)–2017]**

Ans : $y = \frac{x}{|x|} : x \neq 0$

$$= \begin{cases} 1 \text{ যখন } x > 0 \\ -1 \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনটির রেঞ্জ $= \{-1, 1\}$.

1.A.53. $y = \frac{x}{(x+2)(x-3)}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। (Find the domain of the function $y = \frac{x}{(x+2)(x-3)}$.)

Ans : $x = -2$ এবং $x = 3$ ব্যতীত x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য y এর বাস্তব মান বিদ্যমান। সুতরাং $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$.

EXERCISE–1(A)

Part–B : Short Questions [বিভাগ খ ঃ সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন]

1. ধরি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{যখন } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{যখন } 0 \leq x \leq 2 \\ 5 & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$$

তাহা হইলে (i) $f(3/2)$ (ii) $f(-31)$ (iii) $f(\pi)$ (iv) $f(\sqrt{2})$ (v) $f(1)$ (vi) $f(10)$ (vii) $f(e)$ (viii) $f(1/2)$ (ix) $f(2)$ (x) $f(-\pi)$ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ (i) $\frac{13}{4}$ (ii) -32 (iii) 5 (iv) 3 (v) 2 (vi) 5 (vii) 5 (viii) $\frac{5}{4}$ (ix) 5 (x) $-(\pi + 1)$

2. ধরি $f : \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 + 2$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে R_f নির্ণয় কর। [Let the function $f : \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}$ is defined by the formula $f(x) = x^2 + 2$, then find R_f.]

উত্তর ঃ $R_f = \{2, 3, 6, 11, 18, 27\}$

3. দেখাও যে $f : \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ফাংশনটি $f(x) = x + 1$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। ফাংশনটির R_f নির্ণয় কর। [Show that $f : \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ is a function defined by $f(x) = x + 1$. Find R_f of the function.]

উত্তর ঃ $R_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

4. $f(x) = x + 3$ সূত্র দ্বারা বর্ণিত $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ফাংশনের R_f নির্ণয় কর। [Find R_f of the function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be defined by the formula $f(x) = x + 3$.]

উত্তর ঃ $R_f = \mathbb{N} - \{1, 2, 3\}$

5. নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত প্রত্যেকটি f ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the each of the functions which are defined as follows] :

(i) $f(x) = x + 5$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R}$; $R_f = \mathbb{R}$

(ii) $f(x) = \frac{1}{x - 5}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R} - \{5\}$; $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

CamScanner

(iii) $f(x) = -x^2 + 1$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R}$; $R_f = (-\infty, 1]$

(iv) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R} - \{\sqrt{2}\}$; $R_f = \mathbb{R} - \{2\sqrt{2}\}$

(v) $f(x) = x^3 + 5$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R}$; $R_f = \mathbb{R}$

(vi) $f(x) = \dfrac{x^2 - 36}{x + 6}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R} - \{-6\}$; $R_f = \mathbb{R} - \{-12\}$

(vii) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$; $R_f = (0, \infty)$

(viii) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ উত্তর ঃ $D_f = [1, \infty)$; $R_f = [0, \infty)$

(ix) $f(x) = -\sqrt{x + 3}$ উত্তর ঃ $D_f = [-3, \infty)$; $R_f = (-\infty, 0]$

(x) $f(x) = \dfrac{x}{x - 3}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$; $R_f = \mathbb{R} - \{1\}$

6. দেখাও যে $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$ এর $D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ এবং $R_f = (-\infty, -4] \cup (0, \infty)$

7. দেখাও যে $f(x) = \dfrac{x-5}{x-5}$ এর $D_f = \mathbb{R} - \{5\}$ এবং $R_f = \{1\}$

Part–C : Broad Questions [বিভাগ গ ঃ বড় প্রশ্ন]

1(i) দেখাও যে $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$ এর $D_f = \mathbb{R} - \{1, -2\}$ এবং $R_f = \mathbb{R}$.

(ii) দেখাও যে $f(x) = \dfrac{2}{x(x-1)}$ এর $D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

এবং $R_f = (-\infty, -8] \cup (0, \infty)$

2 (i) দেখাও যে $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$ এর $D_f = [-6, 6]$ এবং $R_f = [0, 6]$

(ii) দেখাও যে $f(x) = \sqrt{x^2 - 49}$ এর $D_f = [7, \infty) \cup (-\infty, -7]$ এবং $R_f = [0, \infty)$

3. ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর [Find domain and range] :

(i) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 12}$ উত্তর ঃ $D_f = (-\infty, 4] \cup [3, \infty)$, $R_f = [0, \infty)$

(ii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_f = [0, \infty)$

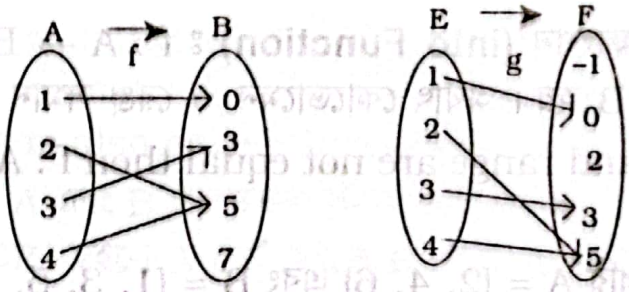
———×———

CamScanner

Chapter–1(B)
বিভিন্ন প্রকার ফাংশন
DIFFERENT TYPES OF FUNCTIONS

1.B.1. সমান ফাংশন (Equal Function) ঃ মনে করি $f : A \to B$ এবং $g : E \to F$. তাহা হইলে f এবং g ফাংশনদ্বয় সমান হইবে যদি (i) $D_f = D_g$ অর্থাৎ $A = E$ এবং (ii) $f(x) = g(x)$ হয় $\forall x \in A$ (বা $x \in E$). [Let $f : A \to B$ and $g : E \to F$. If (i) $D_f = D_g$ i.e. $A = E$ and (ii) $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$ (or $\forall x \in E$) then f and g are equal functions.]

উদাহরণ–1. দেখাও যে নিম্নের চিত্র দ্বারা বর্ণিত ফাংশন দুইটি সমান [Show that the two functions defined by the following figure are equal functions] :

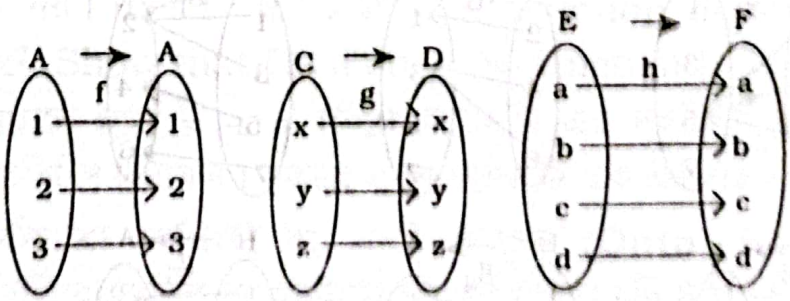


সমাধান ঃ এখানে $D_f = D_g$ অর্থাৎ $A = E$ এবং $f(x) = g(x)$ $\forall x \in A$ (বা E),

সুতরাং f এবং g সমান ফাংশন অর্থাৎ $f = g$.

1.B.2. অভেদ ফাংশন (Identity Function) ঃ $f : A \to A$ কে অভেদ ফাংশন বলা হইবে যদি ইহাকে $f(x) = x$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা যায়। [$f : A \to A$ is called identity function if it is defined by the formula $f(x) = x$]

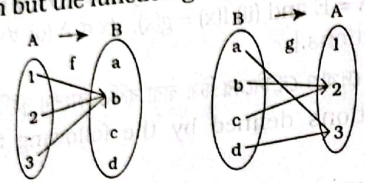
নিম্নের চিত্র দ্বারা বর্ণিত প্রত্যেকটি ফাংশনই অভেদ ফাংশন। [Each of the following functions defined by the following diagrams is identity function.]



1.B.3. ধ্রুবক ফাংশন (Constant Functions) ঃ $f : A \to B$ কে ধ্রুবক ফাংশন বলা হইবে যদি R_f এক উপাদানী সেট হয়। অন্যভাবে $f : A \to B$ কে ধ্রুবক ফাংশন বলা হইবে যদি $f(x) = c$; $\forall x \in A$ যেখানে $c \in B$. [If R_f is a set of one element then $f : A \to B$ is called constant function. Another way, if $f(x) = C$, $\forall x \in A$ where $C \in B$ then $f : A \to B$ is called constant function]

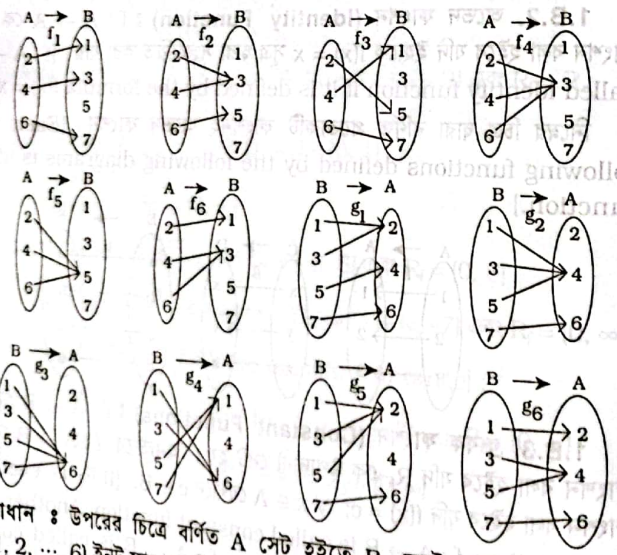
ধরি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সূত্র $f(x) = 5$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। এখানে f একটি ধ্রুবক ফাংশন। [Let the formula $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is defined by $f(x) = 5$. Here f is a constant function.]

নিম্নের চিত্রদ্বারা বর্ণিত $f : A \to B$ ফাংশনটি ধ্রুবক ফাংশন কিন্তু $g : B \to A$ ফাংশনটি ধ্রুবক নয়। [The function $f : A \to B$ defined by the following figure is a constant function but the function $g : B \to A$ is not constant.]



1.B.4. ইনটু ফাংশন (Into Function) ঃ $f : A \to B$ কে ইনটু ফাংশন বলা হইবে যদি $f(A) \neq B$ হয়। অর্থাৎ কোডোমেন ও রেঞ্জ সমান না হয়। [If $f(A) \neq B$ i.e. codomain and range are not equal then $f : A \to B$ is called into function.]

উদাহরণ-2. ধরি $A = \{2, 4, 6\}$ এবং $B = \{1, 3, 5, 7\}$. তাহা হইলে A সেট হইতে B সেটে এবং B সেট হইতে A সেটে নিম্নের কোন কোন ফাংশন ইনটু ফাংশন তাহা নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ উপরের চিত্রে বর্ণিত A সেট হইতে B সেটে প্রত্যেকটি ফাংশন f_i $(i = 1, 2, \cdots, 6)$ ইনটু ফাংশন। কিন্তু B সেট হইতে A সেটে বর্ণিত g_1 এবং g_6 ফাংশন দুইটি ছাড়া অন্য চারটি ফাংশনই ইনটু ফাংশন।

1.B.5. এক-এক ফাংশন (One-One or 1 – 1 Function) ঃ $f : A \to B$ কে এক-এক ফাংশন বলা হইবে যদি $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ যেখানে $a_1, a_2 \in \mathbf{A}$

অথবা $f : A \to B$ কে এক-এক ফাংশন বলা হইবে যদি

$f(a_1) \neq f(a_2) \Rightarrow a_1 \neq a_2$ যেখানে $a_1, a_2 \in \mathbf{A}$

অথবা $f : A \to B$ কে এক-এক ফাংশন বলা হইবে যদি A এর প্রত্যেক ভিন্ন উপাদানের f সম্পর্কিত উপাদান B তে ভিন্ন ভিন্ন হয়। এক-এক ফাংশনকে ইনজেকটিভ (injective) ফাংশনও বলা হয়।

[If $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ where $a_1, a_2 \in A$ then $f : A \to B$ is called one-one function.

Or, If $f(a_1) \neq f(a_2) \Rightarrow a_1 \neq a_2$ where $a_1, a_2 \in A$ then $f : A \to B$ is called one-one function.

Or, If f related elements in B of each of the different elements of A are different then $f : A \to B$ is called one-one function. One-one functions is also called injective function]

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ যদি A এবং B এর উভয়ে সসীম সেট হয় এবং A এর উপাদান সংখ্যা B এর চেয়ে বেশী হয় তাহা হইলে A সেট হইতে B সেটে সংজ্ঞায়িত কোনো ফাংশনই এক-এক হইতে পারে না।

উদাহরণ-3. ধরি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটি $f(x) = 2x + 3$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশন। তাহা হইলে দেখাও যে f একটি এক-এক ফাংশন। [Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a function defined by $f(x) = 2x + 3$. Then show that f is a one-one function.]

সমাধান ঃ ধরি $a, b \in \mathbb{R}$. তাহা হইলে $f(a) = 2a + 3$ এবং $f(b) = 2b + 3$.

এখন $f(a) = f(b) \Rightarrow 2a + 3 = 2b + 3 \Rightarrow 2a = 2b$

$\Rightarrow a = b \Rightarrow$ f এক-এক ফাংশন।

উদাহরণ-4. ধরি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটি $f(x) = x^2$ সূত্র দ্বারা বর্ণিত ফাংশন। দেখাও যে f এক-এক ফাংশন নয়। [Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a function defined by the formula $f(x) = x^2$. Show that f is a one-one function.]

সমাধান ঃ এখানে $f(2) = 4 = f(-2)$ অর্থাৎ $\mathbb{R}$ এর দুইটি ভিন্ন উপাদান 2 এবং –2 এর একই প্রতিবিম্ব বিদ্যমান। সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি এক এক নয়।

1.B.6. সার্বিক বা সর্বগ্রাহী বা অনটু ফাংশন (Onto Function) ঃ $f : A \to B$ কে সর্বগ্রাহী বা সার্বিক বা অনটু ফাংশন বলা হইবে যদি $f(A) = B$ হয়। অর্থাৎ রেঞ্জ ও কোডোমেন $(Cod_f = R_f)$ সমান হয়। সার্বিক ফাংশনকে সারজেকটিভ ফাংশনও বলা হয়। [If $f(A) = B$ i.e. codomain and range are equal $(cod_f = R_f)$ then $f : A \to B$ is called onto function. Onto function is also called surjective function.]

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ যদি A এবং B উভয়ে সসীম সেট হয় এবং B এর উপাদান সংখ্যা A এর চেয়ে বেশী হয় তবে A সেট হইতে B সেটে বর্ণিত কোন ফাংশনই সার্বিক হইবে না।

CamScanner

উদাহরণ-5. যদি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটি $f(x) = 3x - 4$ সূত্র দ্বারা বর্ণিত ফাংশন। দেখাও যে f একটি সার্বিক ফাংশন। [Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a function defined by the formula $f(x) = 3x - 4$. Show that f is a surjective function.]

সমাধান ঃ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = 3x - 4$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

এখানে ফাংশনটির $cod_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = f(x) = 3x - 4$

$\Rightarrow 3x = y + 4$

$\Rightarrow x = \frac{1}{3}(y + 4)$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore R_f = \mathbb{R}$

যেহেতু প্রদত্ত ফাংশনের $cod_f = R_f = \mathbb{R}$

সুতরাং ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন।

উদাহরণ–6. ধরি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটি $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশন। দেখাও যে f সার্বিক ফাংশন নয়। [Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a function defined by $f(x) = x^2 + 1$. Show that f is not surjective function.]

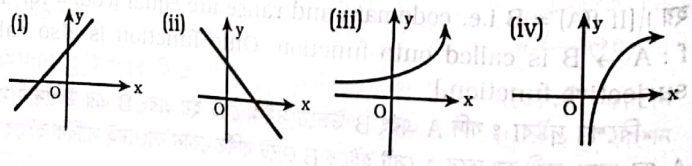
সমাধান ঃ এখানে রেঞ্জ $\mathbb{R}$ এর 0 উপাদান ডোমেন $\mathbb{R}$ এর কোন উপাদানের প্রতিবিম্ব বা f সম্পর্কিত উপাদান নয় কারণ $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$ এর কোন বাস্তব সমাধান বিদ্যমান নাই। সুতরাং প্রদত্ত f ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন নয়।

(2) যদি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনের লেখটি দেওয়া থাকে এবং x অক্ষ ও উহার সমান্তরাল প্রত্যেকটি সরলরেখা ঐ লেখচিত্রকে কমপক্ষে একটি বিন্দুতে ছেদ করে তবে ফাংশনের ঐ লেখচিত্রটি অনটু ফাংশনের লেখচিত্র হইবে।

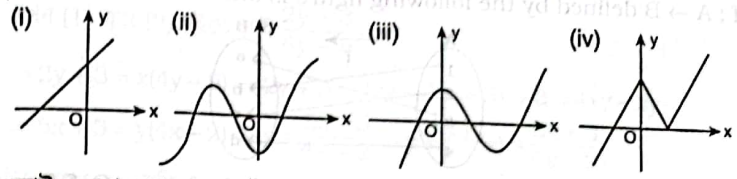
ফাংশনের গ্রাফ হইতে এক-এক এবং অনটু ফাংশনের ধারণা ঃ

(1) যদি xy সমতলে $\{(x, f(x)) : y = f(x)\}$ আকারের কোন ফাংশনের লেখচিত্র দেওয়া থাকে এবং যদি x অক্ষ অথবা উহার সমান্তরাল প্রত্যেকটি সরল রেখা ঐ লেখচিত্রটিকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ না করে তবে ঐ লেখচিত্র দ্বারা নির্দেশিত ফাংশনটি এক-এক ফাংশন হইবে।

নিম্নের লেখচিত্র দ্বারা নির্দেশিত $\{(x, f(x)) : y = f(x)\}$ আকারের ফাংশনের প্রত্যেকটি ফাংশনই এক-এক ফাংশন ঃ



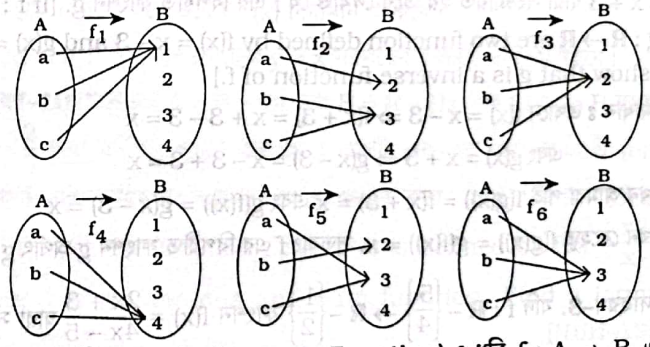
নিম্নের লেখচিত্র দ্বারা নির্দেশিত $\{(x, f(x)) : y = f(x)\}$ আকারের প্রত্যেকটি ফাংশনই অনটু ফাংশন ঃ



নোট ঃ কোন ফাংশন একই সঙ্গে এক-এক ও সার্বিক হইলে তাহাকে এক-এক ও সার্বিক ফাংশন বা বাইজেকটিভ (bijective) ফাংশন বলা হয়।

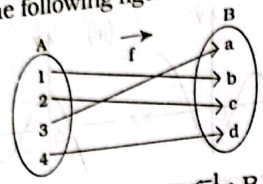
1.B.7. মেনি ওয়ান ফাংশন (Many One Function) ঃ $f : A \to B$ কে মেনি ওয়ান ফাংশন বলা হইবে যদি $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 \neq a_2$ যেখানে $a_1, a_2 \in A$. সুতরাং যে কোন মেনি ওয়ান ফাংশনের ডোমেনের কমপক্ষে দুইটি ভিন্ন উপাদানের একই প্রতিবিম্ব বিদ্যমান থাকিবে। অন্যভাবে কোন ফাংশন এক-এক না হইলে তাহা মেনি ওয়ান ফাংশন।.[If $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 \neq a_2$ where $a_1, a_2 \in A$ then $f : A \to B$ is called many one function. So there exist identical image at least two different elements in domain of any many one function. Another way, if the function is not one-one then it is many one function.]

ধরি $A = \{a, b, c\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4\}$. তাহা হইলে A সেট হইতে B সেটে নিম্নে চিত্র দ্বারা বর্ণিত প্রত্যেকটি ফাংশন মেনি ওয়ান ফাংশন। [Let $A = \{a, b, c\}$ and $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Then each of the functions defined by the following figure is many one function.]

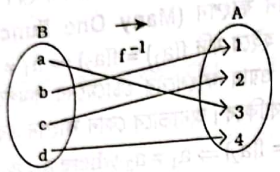


1.B.8. বিপরীত ফাংশন (Inverse Function) ঃ ধরি $f : A \to B$ একটি এক-এক এবং অনটু ফাংশন। তাহা হইলে একটি ফাংশন $f^{-1} : B \to A$ বিদ্যমান যদি প্রত্যেক $b \in B$ এর জন্য একটি অনন্য $f^{-1}(b) \in A$ বিদ্যমান থাকে। এইক্ষেত্রে f^{-1} কে f এর বিপরীত ফাংশন বলা হয়। [Let $f : A \to B$ is a one-one and onto function. If a unique $f^{-1}(b) \in A$ exist for each $b \in B$ then a function $f^{-1} : B \to A$ exist. In this case f^{-1} is called inverse function of f.]

নিম্নের চিত্র দ্বারা বর্ণিত $f : A \to B$ ফাংশনটি এক-এক এবং অনটু। [The function $f : A \to B$ defined by the following figure is one-one and onto.]



সুতরাং f এর বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান এবং $f^{-1} : B \to A$ কে নিম্নলিখিতভাবে চিত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়।



অন্যভাবে বিপরীত ফাংশন ঃ ধরি $f : A \to B$ এবং $g : B \to A$. তাহা হইলে ফাংশন g কে ফাংশন f এর বিপরীত ফাংশন বলা হইবে যদি $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ হয় যেখানে $f(x) \in B$ এবং $g(x) \in A$ এবং ইহাকে f^{-1} দ্বারা নির্দেশ করা হয়। অর্থাৎ $g = f^{-1}$. [Let $f : A \to B$ and $g : B \to A$. If $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ where $f(x) \in B$ and $g(x) \in A$ then the function g is called inverse function of f and it is denoted by f^{-1} i.e. $g = f^{-1}$.]

উদাহরণ–7. যদি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এবং $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনদ্বয় $f(x) = x - 3$ এবং $g(x) = x + 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় তবে দেখাও যে f এর বিপরীত ফাংশন g. [If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are two function defined by $f(x) = x - 3$ and $g(x) = x + 3$ then show that g is a inverse function of f.]

সমাধান ঃ এখানে $f(x) = x - 3 \Rightarrow f(x + 3) = x + 3 - 3 = x$

এবং $g(x) = x + 3 \Rightarrow g(x - 3) = x - 3 + 3 = x$

এখন আমরা পাই $f(g(x)) = f(x + 3) = x$ এবং $g(f(x)) = g(x - 3) = x$

এখন যেহেতু $f(g(x)) = g(f(x)) = x$. সুতরাং f এর বিপরীত ফাংশন g অর্থাৎ $g = f^{-1}$

উদাহরণ–8. যদি $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{4}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ফাংশন $f(x) = \frac{2x + 3}{4x - 5}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় তবে $y = f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর। [If $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{4}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ is defined by the formula $f(x) = \frac{2x + 3}{4x - 5}$ then find $y = f^{-1}(x)$.] **[NUH–1999]**

সমাধান ঃ সংজ্ঞানুসারে $f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow f(y) = x$ ..... (1) $[\because f^{-1}(x) = y]$

আবার $f(x) = \frac{2x + 3}{4x - 5} \Rightarrow f(y) = \frac{2y + 3}{4y - 5}$ ..... (2)

এখন (1) এবং (2) হইতে পাই $\frac{2y + 3}{4y - 5} = x$

$\Rightarrow 2y + 3 = x(4y - 5) \Rightarrow 2y + 3 = 4xy - 5x \Rightarrow 5x + 3 = 4xy - 2y$

$\Rightarrow 5x + 3 = y(4x - 2) \Rightarrow y = \frac{5x + 3}{4x - 2} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{5x + 3}{4x - 2}$

উদাহরণ–9. যদি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সূত্র $f(x) = 3x - 6$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় তবে $y = f^{-1}(x)$ বাহির কর। আরও $f(x)$ এবং $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর। [If the formula $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by $f(x) = 3x - 6$ then find $y = f^{-1}(x)$. Also sketch the graph of $f(x)$ and $f^{-1}(x)$]

সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = 3x - 6$

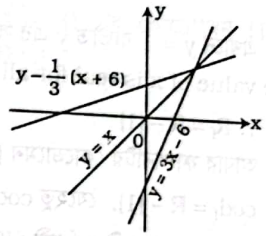
$\Rightarrow x = 3y - 6$ [x এবং y কে বিনিময় করিয়া]

$\Rightarrow 3y = x + 6$

$\Rightarrow y = \frac{1}{3}(x + 6)$

$\Rightarrow y = f^{-1}(x)$

$= \frac{1}{3}(x + 6)$



$f(x)$ এবং $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র

দ্রষ্টব্য ঃ (i) যদি $y = f(x)$ এর লেখচিত্রকে x অক্ষ বা x অক্ষের সমান্তরাল রেখা একাধিক বিন্দুতে ছেদ না করে তবে $f^{-1}(x)$ বিদ্যমান থাকিবে।

(ii) $f(x)$ এবং $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র $y = x$ সরলরেখার সাথে প্রতিসম হইবে।

উদাহরণ–10. মনে কর $A = \mathbb{R} - \{3\}$ এবং $B = \mathbb{R} - \{1\}$। ধর $f : A \to B$ ফাংশনটি $f(x) = \frac{x - 2}{x - 3}$ দ্বারা বর্ণিত। প্রমাণ কর যে, f একটি এক-এক এবং সর্বগ্রাহী (onto) ফাংশন। একটি ফর্মূলা বাহির কর যাহা f^{-1} কে সংজ্ঞায়িত করে। [Let $A = \mathbb{R} - \{3\}$ and $B = \mathbb{R} - \{1\}$. Let the function $f : A \to B$ is defined by $f(x) = \frac{x - 2}{x - 3}$. Prove that f is an one-one and onto function. Find a formula which defined f^{-1}.] **[NUH–1999]**

সমাধান ঃ এখানে, $A = \mathbb{R} - \{3\}$, $B = \mathbb{R} - \{1\}$ এবং $f(x) = \frac{x - 2}{x - 3}$.

f এক-এক [f is one-one] : ধরি $a, b, \in A$ (এখানে $a \neq 3, b \neq 3$)

$\therefore f(a) = \frac{a - 2}{a - 3}$ এবং $f(b) = \frac{b - 2}{b - 3}$

যদি $f(a) = f(b)$ হয় তবে $\frac{a-2}{a-3} = \frac{b-2}{b-3}$

$\Rightarrow (a-3)(b-2) = (a-2)(b-3)$

$\Rightarrow ab - 2a - 3b + 6 = ab - 3a - 2b + 6$

$\Rightarrow -2a - 3b = -3a - 2b \Rightarrow a = b$

যেহেতু $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

$\therefore$ f ফাংশনটি এক-এক। [f is one-one.]

f সর্বগ্রাহী [f is onto] : যদি $y = f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ হয় তবে $xy - 3y = x - 2$

$\Rightarrow x(y-1) = 3y - 2 \Rightarrow x = \frac{3y-2}{y-1}$

এখানে $y = 1$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [Here the value of x is real for all real values of y except $y = 1$]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{1\}$

আবার ফাংশনটির কোডোমেন [Again the codomain of the functions is]

$cod_f = \mathbb{R} - \{1\}$, যেহেতু $cod_f = R_f = \mathbb{R} - \{1\}$

সুতরাং f ফাংশনটি সর্বগ্রাহী। [So the function is onto.]

আবার $f : A \to B$ ফাংশনটি এক-এক ও সর্বগ্রাহী (onto), সুতরাং f এর একটি বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : B \to A$ থাকিবে। [Again, the function $f : A \to B$ is one-one and onto. So, f has an inverse function $f^{-1} : B \to A$.]

$y = \frac{x-2}{x-3}$ হইতে সমাধান করিয়া পাই $x = \frac{3y-2}{y-1}$

$\therefore f^{-1}(y) = \frac{3y-2}{y-1}$ বা $f^{-1}(x) = \frac{2-3x}{1-x}$

উদাহরণ-11. ধর $A = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $B = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$. ধর $f : A \to B$ ফাংশনটি $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। প্রমাণ কর যে, f একটি এক-এক এবং অনটু (onto) ফাংশন। একটি ফর্মূলা বাহির কর যাহা f^{-1} এর সংজ্ঞা দেয়। [Let $A = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $B = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Let the function $f : A \to B$ is defined by $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$. Prove the f is an one-one and onto function. Find a formula which defined f^{-1}.]

সমাধান ঃ এখানে $A = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $B = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ এবং $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$.

f এক-এক [f is one-one] : ধরি $a, b \in A$ $\left(\text{এখানে } a \neq -\frac{1}{2}, b \neq -\frac{1}{2}\right)$

$\therefore f(a) = \frac{a-3}{2a+1}$ এবং $f(b) = \frac{b-3}{2b+1}$

যদি $f(a) = f(b)$ হয় তবে [If $f(a) = f(b)$ then] $\frac{a-3}{2a+1} = \frac{b-3}{2b+1}$

$\Rightarrow (a-3)(2b+1) = (2a+1)(b-3)$

$\Rightarrow 2ab + a - 6b - 3 = 2ab - 6a + b - 3$

$\Rightarrow a - 6b = -6a + b$

$\Rightarrow 7a = 7b \Rightarrow a = b$

$\therefore f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ $\therefore$ f ফাংশনটি এক-এক।

f অনটু [f is onto] : প্রদত্ত ফাংশন $f : A \to B$ এর কোডোমেন [The co-domain of the given function $f : A \to B$ is]

$cod_f = B = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

$\Rightarrow 2xy + y = x - 3 \Rightarrow x = \frac{y+3}{1-2y}$

এখানে $y = \frac{1}{2}$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [The value of x will be real for all real values of y except $y = \frac{1}{2}$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

যেহেতু $cod_f = R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

সুতরাং f ফাংশনটি অনটু। [So the function f is onto.]

যেহেতু $f : A \to B$ ফাংশনটি এক-এক ও অনটু, সুতরাং f এর একটি বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : B \to A$ থাকিবে। [Since $f : A \to B$ is one-one and onto, so f has an inverse function $f^{-1} : B \to A$.]

$y = \frac{x-3}{2x+1}$ হইতে সমাধান করিয়া পাই $x = \frac{y+3}{1-2y}$

$\therefore f^{-1}(y) = \frac{y+3}{1-2y}$ বা $f^{-1}(x) = \frac{3+x}{1-2x}$.

উদাহরণ-12. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = (x+1)^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। আরও $f^{-1}(4)$ নির্ণয় কর। [The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is defined by $f(x) = (x+1)^2$. Find the domain and range of the function. Evaluate $f^{-1}(4)$.] **[NUH(NM)-2003]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশনটি $f(x) = (x+1)^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। [The given function is defined by $f(x) = (x+1)^2$.]

এখানে $D_f = cod_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = f(x) = (x+1)^2$

$\Rightarrow x + 1 = \pm\sqrt{y} \Rightarrow x = \pm\sqrt{y} - 1$

এখানে $R_f = \{y : y \geq 0\} = [0, \infty)$

যেহেতু $cod_f \neq R_f$, সুতরাং ফাংশনটি অনটু নয় অর্থাৎ f^{-1} বিদ্যমান নয়। [Since $cod_f \neq R_f$, so the function is not onto, that is, f^{-1} does not exist.]

অতএব $f^{-1}(4)$ বিদ্যমান নয়।

উদাহরণ–13. দেখাও যে $f(x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$ বর্ণিত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি এক-এক ও না, সর্বগ্রাহীও না। এই ফাংশনের ডোমেন ও কোডোমেন সংশোধন কর যেন ইহা এক-এক এবং সর্বগ্রাহী উভয়টি হয়। [Show that the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by $f(x) = \cos x \ \forall x \in \mathbb{R}$ is neither one- one nor onto. Modify the domain and co-domain of this function so that it may be both one- one and onto.

সমাধান ঃ এখানে $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এবং $f(x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$.

f এক-এক নয় ঃ আমরা জানি $0, 2\pi \in R$

এবং $f(0) = \cos 0 = 1$ ও $f(2\pi) = \cos 2\pi = 1$

$\therefore$ ডোমেনের দুইটি ভিন্ন উপাদান 0 ও 2π এর একই f প্রতিবিম্ব 1 কোডোমেনে বিদ্যমান। সুতরাং ভিন্ন উপাদানের ভিন্ন প্রতিবিম্ব না হওয়ায় f ফাংশনটি এক-এক না।

f সর্বগ্রাহী নয় ঃ আমরা জানি $x \in \mathbb{R}$ হইলে $-1 \leq \cos x \leq 1$. সুতরাং যদি $y \in$ কোডোমেন $\mathbb{R}$ এবং $y > 1$ ও $y < -1$ হয় তবে ডোমেন $\mathbb{R}$ এ এমন কোন উপাদান x নাই যেন $f(x) = \cos x = y$ হয়। ফলে f ফাংশনটি ইনটু হইবে কিন্তু সর্বগ্রাহী হইবে না।

২য় অংশ ঃ ধরি $A = \{x : x \in \mathbb{R}$ এবং $0 \leq x \leq \pi\}$

এবং $B = \{y : y \in \mathbb{R}$ এবং $-1 \leq y \leq 1\}$

এখন যদি f এর ডোমেন হিসাবে A কে এবং কোডোমেন হিসাবে B কে লই তাহা হইলে ফাংশন $f : A \to B$ যেখানে $f(x) = \cos x, \forall x \in A$, এক-এক ও সর্বগ্রাহী হইবে।

1.B.9. সীমাবদ্ধ ফাংশন (Bounded function) : মনে করি (a, b) ব্যবধিতে f(x) ফাংশন সংজ্ঞায়িত ও ইহার মান বিদ্যমান। f(x) কে সীমাবদ্ধ ফাংশন বলে যদি দুইটি বাস্তব সংখ্যা m, M থাকে যেন $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in (a, b)$ হয়। [Let the function f(x) is defined and values of it exist in the interval (a, b). If two real numbers m, M exist such that $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in (a, b)$ then f(x) is called bounded function.]

1.B.10. বৃদ্ধিপ্রাপ্ত ফাংশন (Increasing function) : ফাংশন f(x) কে কোন ব্যবধিতে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত ফাংশন বলে যদি x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে f(x) এর মানও বৃদ্ধি পায় অর্থাৎ $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. [If f(x) increases for the increasing values of x in any interval then function f(x) is called increasing function i.e. $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.]

উদাহরণ–14. দেখাও যে (0, 4) ব্যবধিতে $f(x) = x^3$ একটি বৃদ্ধিপ্রাপ্ত ফাংশন। [Show that $f(x) = x^3$ is a inereasing function in the interval (0, 4).]

সমাধান ঃ এখানে, $f(x) = x^3$

$f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2^3 = 8, f(3) = 27$

$1 > 0 \Rightarrow f(1) > f(0)$

$2 > 1 \Rightarrow f(2) = 8 > f(1) = 1$ ইত্যাদি।

$\therefore f(x) = x^3$, [0, 4] ব্যবধিতে একটি বৃদ্ধিপ্রাপ্ত ফাংশন।

1.B.11. হ্রাসপ্রাপ্ত ফাংশন (Decreasing function) : ফাংশন f(x) কে কোন ব্যবধিতে হ্রাসপ্রাপ্ত ফাংশন বলে যদি x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে f(x) এর মান হ্রাস পায় অর্থাৎ $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. [If f(x) decreases for the increasing values of x in any interval then function f(x) is called decreasing function i.e. $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.]

উদাহরণ–15. দেখাও যে $f(x) = \frac{1}{x^2}$ একটি (1, 4) ব্যবধিতে হ্রাসকৃত ফাংশন। [Show that $f(x) = \frac{1}{x^2}$ is a decreasing function in the interval (1, 4).]

সমাধান ঃ [1, 4] ব্যবধিতে $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$f(1) = 1, f(2) = \frac{1}{4}, f(3) = \frac{1}{9}, f(4) = \frac{1}{16}$

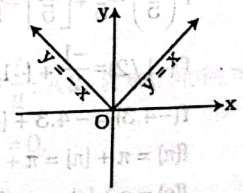
এখানে $2 > 1$ কিন্তু $f(2) = \frac{1}{4} < f(1) = 1$, $3 > 2$ কিন্তু $f(3) = \frac{1}{9} < f(2) = \frac{1}{4}$ ইত্যাদি।

$\therefore f(x) = \frac{1}{x^2}$, [1, 4] ব্যবধিতে একটি হ্রাসপ্রাপ্ত ফাংশন।

1.B.12. পরম মান ফাংশন (Absolute Value Function) ঃ

যদি $x \in \mathbb{R}$ হয় তবে

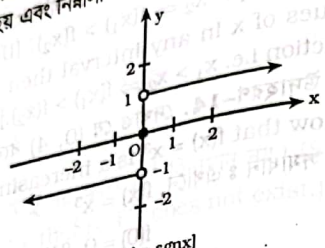
$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{যখন } x \geq 0 \\ -x & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$ কে



পরম মান ফাংশন বলা হয়। পরম বা সাংখিক মানের ফাংশন f এর ডোমেন এবং রেঞ্জ যথাক্রমে $D_f = \mathbb{R}$ এবং $R_f = [0, \infty)$.

1.B.13. সিগনাম ফাংশন (Signum Function) ঃ ধরি $x \in \mathbb{R}$. তাহা হইলে x এর সিগনামকে sgn x দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

$$\text{sgn } x = \begin{cases} -1 & \text{যখন } x < 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \\ 1 & \text{যখন } x > 0 \end{cases}$$



[y = f(x) = sgnx]

যদি f(x) = sgn x হয় তবে f কে সিগনাম ফাংশন বলা হয়।

সিগনাম ফাংশন f এর ডোমেন এবং রেঞ্জ $D_f = \mathbb{R}$ এবং $R_f = \{-1, 0, 1\}$.

[Let $x \in \mathbb{R}$. Then signum of x is denoted by sgn x and defined as follows

$$\text{sgn } x = \begin{cases} -1 & \text{যখন } x < 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \\ 1 & \text{যখন } x > 0 \end{cases}$$

If f(x) = sgn x then f is called signum function. Domain of the signum function is $D_f = \mathbb{R}$ and range is $R_f = \{-1, 0, 1\}$.]

1.B.14. সর্বোচ্চ পূর্ণ সাংখ্যিক ফাংশন (Greatest Integer Function) f(x) = [x] কে সর্বোচ্চ পূর্ণ সাংখ্যিক ফাংশন বলে যাহা নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়। [f(x) = [x] is called the greatest integer function which is defined as follows.] $[x] = n$ যদি $n \le x < n + 1$ হয় যেখানে $n \in \mathbb{Z}$.

সর্বোচ্চ পূর্ণ সাংখ্যিক ফাংশনকে স্টেপ ফাংশন (Step function) ও বলা হয়।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ [x] কে অনেক লেখক [[x]] দ্বারা প্রকাশ করে থাকেন।

উদাহরণ–16. যদি f(x) = x + [x] হয় তবে f(1), f(2.3), f(3/5), f(–1/2), f(–4.3), f(π) এবং f(e) নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে f(x) = x + [x].

সুতরাং $f(1) = 1 + [1] = 1 + 1 = 2$

$f(2.3) = 2.3 + [2.3] = 2.3 + 2 = 4.3$

$f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5} + \left[\frac{3}{5}\right] = \frac{3}{5} + 0 = \frac{3}{5}$

$f(-1/2) = \frac{-1}{2} + [-1/2] = \frac{-1}{2} - 1 = \frac{-3}{2}$

$f(-4.3) = -4.3 + [-4.3] = -4.3 - 5 = -9.3$

$f(\pi) = \pi + [\pi] = \pi + 3$

$f(e) = e + [e] = e + 2.$

উদাহরণ–17. ফাংশন f(x) = [x] এর ডোমেন, রেঞ্জ নির্ণয় কর এবং লেখচিত্র আঁক। [Find domain, range of the functions f(x) = [x] and sketch its graph.]

সমাধান ঃ $f(x) = [x] = 0$ যখন $0 \le x < 1$, $[x] = 1$ যখন $1 \le x < 2$, $[x] = 2$ যখন $2 \le x < 3$, $[x] = 3$ যখন $3 \le x < 4$

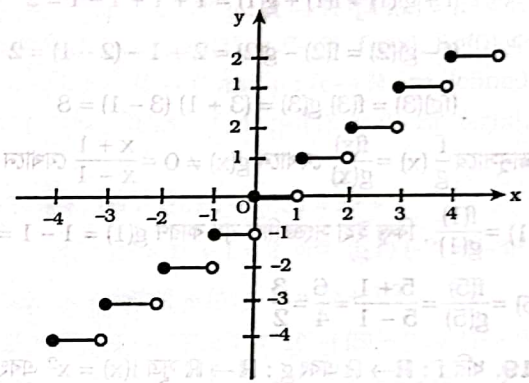
... ...

আবার $f(x) = [x] = -1$ যখন $-1 \le x < 0$, $[x] = -2$ যখন $-2 \le x < -1$, $[x] = -3$ যখন $-3 \le x < -2$, $[x] = -4$ যখন $-4 \le x < -3$

... ...

সুতরাং $D_f = \mathbb{R}$ এবং $R_f = \{\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\} = \mathbb{Z}$.

f(x) = [x] এর লেখচিত্র ঃ



ফাংশনের এলজাবরা (Algebra of Functions) ঃ ধরি $f : A \to \mathbb{R}$ এবং $g : A \to \mathbb{R}$ দুইটি বাস্তব মান বিশিষ্ট ফাংশন। তাহা হইলে ফাংশন

(i) f এবং g এর যোগ (sum) ফাংশনকে $f + g : A \to \mathbb{R}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়।

(ii) f এবং g এর বিয়োগ বা অন্তর (difference) কে $f - g : A \to \mathbb{R}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়।

(iii) f এবং g এর গুণ (product) ফাংশনকে $fg : A \to \mathbb{R}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং $(fg)(x) = f(x)\,g(x)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়।

(iv) f এবং g এর ভাগ (quotient) ফাংশনকে $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয় যেখানে $g(x) \neq 0$.

উপরের সংজ্ঞায়িত চারটি ফাংশনই বাস্তব মান বিশিষ্ট।

CamScanner

উদাহরণ-18. যদি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এবং $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সূত্র $f(x) = x + 1$ এবং $g(x) = x - 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় তাহা হইলে $f + g$, $f - g$, fg, $(f + g)(1)$, $(f - g)(2)$, $fg(3)$, $\frac{f}{g}(1)$ এবং $\frac{f}{g}(5)$ নির্ণয় কর। [If the formulas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are defined by $f(x) = x + 1$ and $g(x) = x - 1$ then find $f + g$, $f - g$, fg, $(f + g)(1)$, $(f - g)(2)$, $fg(3)$, $\frac{f}{g}(1)$ and $\frac{f}{g}(5)$.]

সমাধান ঃ এখানে $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x + 1 + x - 1 = 2x$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x + 1 - (x - 1) = 2$$

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x) = (x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$$

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 1 + 1 + 1 - 1 = 2$$

$$(f - g)(2) = f(2) - g(2) = 2 + 1 - (2 - 1) = 2$$

$$(fg)(3) = f(3)\,g(3) = (3 + 1)(3 - 1) = 8$$

আবার সংজ্ঞানুসারে $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ যেখানে $g(x) \neq 0 = \frac{x+1}{x-1}$ যেখানে $x - 1 \neq 0$

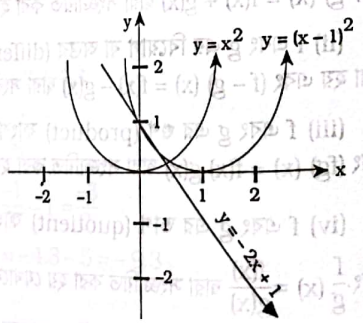
সুতরাং $\frac{f}{g}(1) = \frac{f(1)}{g(1)}$. কিন্তু ইহা সংজ্ঞায়িত নয় কারণ $g(1) = 1 - 1 = 0$

আবার $\frac{f}{g}(5) = \frac{f(5)}{g(5)} = \frac{5+1}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

উদাহরণ-19. ধরি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এবং $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সূত্র $f(x) = x^2$ এবং $g(x) = -2x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে $f(x)$, $g(x)$ এবং $(f + g)(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর। [Let the formulas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are defined by $f(x) = x^2$ and $g(x) = -2x + 1$. Then sketch the graph of $f(x)$, $g(x)$ and $(f + g)(x)$.]

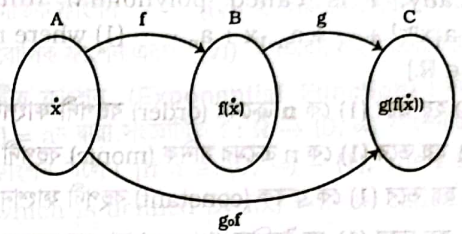
সমাধান ঃ সংজ্ঞানুসারে

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= x^2 - 2x + 1$$
$$= (x - 1)^2$$



এখানে $f(x)$ একটি প্যারাবোলা, $g(x)$ একটি সরলরেখা এবং $(f + g)(x)$ একটি প্যারাবোলার সমীকরণ নির্দেশ করে। ইহাদের লেখচিত্র প্রদত্ত হইল।

1.B.15. গুণজ ফাংশন (Composite Function) ঃ ধরি $f : A \to B$ এবং $g : B \to C$ যেখানে $R_f = B = D_g$. তাহা হইলে f এবং g এর গুণজ ফাংশনকে $g \circ f : A \to C$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। [Let $f : A \to B$ and $g : B \to C$ where $R_f = B = D_g$. Then composite function of f and g is denoted by $g \circ f : A \to C$ and defined by $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.]



উদাহরণ-20. ধরি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এবং $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সূত্র $f(x) = x^2$ এবং $g(x) = x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে $g \circ f(x)$, $g \circ f(1)$, $g \circ f(-3)$, $f \circ g(x)$, $f \circ g(0)$ এবং $f \circ g(5)$ নির্ণয় কর। [Let the formulas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are defined by $f(x) = x^2$ and $g(x) = x + 1$. Then find $g \circ f(x)$, $g \circ f(1)$, $g \circ f(-3)$, $f \circ g(x)$, $f \circ g(0)$ and $f \circ g(5)$.]

সমাধান ঃ এখানে $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$

$$(g \circ f)(1) = 1^2 + 1 = 2 \text{ এবং } (g \circ f)(-3) = (-3)^2 + 1 = 10$$

আবার এখানে $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$

$$(f \circ g)(0) = (0 + 1)^2 = 1 \text{ এবং } (f \circ g)(5) = (5 + 1)^2 = 36.$$

উদাহরণ-21. যদি $A = \{-3, -4, -5, 3, 4, 5\}$ এবং $f : A \to B \subset \mathbb{Z}$ ও $g : B \to \mathbb{Z}$ ফাংশন $f(x) = x - 3$ ও $g(y) = -y + 4$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে $g \circ f$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [If $A = \{-3, -4, -5, 3, 4, 5\}$ and the functions $f : A \to B \subset \mathbb{Z}$ and $g : B \to \mathbb{Z}$ be defined by $f(x) = x - 3$ and $g(y) = -y + 4$, then find the domain and the range of $g \circ f$.] **[RUH-2010]**

সমাধান ঃ এখানে $f : A \to B$ ও $g : B \to \mathbb{Z}$ ফাংশন $f(x) = x - 3$ ও $g(y) = -y + 4$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত, যেখানে $A = \{-3, -4, -5, 3, 4, 5\}$ এবং $B \subset \mathbb{Z}$.

$$\therefore g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x - 3) = -x + 3 + 4 = 7 - x$$

এখন $g \circ f(-3) = 10$, $g \circ f(-4) = 11$, $g \circ f(-5) = 12$

$$g \circ f(3) = 4,\ g \circ f(4) = 3 \text{ এবং } g \circ f(5) = 2$$

সুতরাং $g \circ f$ এর ডোমেন ঃ $\{-3, -4, -5, 3, 4, 5\} = A$

এবং $g \circ f$ এর রেঞ্জ ঃ $\{10, 11, 12, 4, 3, 2\}$.

1.B.16. বহুপদী ফাংশন (Polynomial Function) ঃ যে ফাংশনের নির্ভরশীল চলক বহুপদী তাকে বহুপদী ফাংশন বলা হয়। গাণিতীক ভাবে, ফাংশন f কে x এর বহুপদী ফাংশন বলা হইবে যদি $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ ..... (1) হয় যেখানে $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ এবং $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. [The function is called polynomial function whose dependent variable is polynomial. Mathematically, f is called polynomial function of x if $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ ..... (1) where $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$.]

যদি $a_0 \neq 0$ হয় তবে (1) কে n ক্রমের (order) বহুপদী ফাংশন বলা হয়।

যদি $a_0 = 1$ হয় তবে (1) কে n ক্রমের মনিক (monic) বহুপদী ফাংশন বলা হয়।

যদি $n = 0$ হয় তবে (1) কে ধ্রুবক (constant) বহুপদী ফাংশন বলা হয়।

যদি $n = 1$ হয় তবে (1) কে রৈখিক (linear) বা এক ক্রমের বহুপদী ফাংশন বলা হয়।

যদি $n = 2$ হয় তবে (1) কে দ্বিঘাতিক (quadratic) বা দুই ক্রমের বহুপদী ফাংশন বলা হয়।

যদি $f(x) = 0$ হয় তবে (1) কে অর্থাৎ $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a^n = 0$ ..... (2) কে n ক্রমের বহুপদী সমীকরণ বলা হয়।

যদি $f(a) = 0$ হয় তবে a কে বহুপদী ফাংশন (1) এর বা বহুপদী সমীকরণ (2) এর মূল (root) বা শূন্য (zero) বলা হয়।

1.B.17. মূলদীয় বহুপদী ফাংশন (Rational Polynomial Function) ঃ x এর মূলদীয় বহুপদী ফাংশন f কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ যেখানে $g(x)$ এবং $h(x)$ এর উভয়ে বহুপদী ফাংশন এবং $h(x) \neq 0$.

নিম্নের প্রত্যেকটি মূলদীয় বহুপদী ফাংশন।

(i) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 + 7x + 8}$ (ii) $g(x) = \frac{2x^3 + 8x + 6}{x^2 - 2x + 7}$

1.B.18. বীজগণিতীয় ফাংশন (Algebraic Function) ঃ কোন সংজ্ঞায়িত ডোমেনে একটি ফাংশন $y = f(x)$ কে বীজগণিতীয় ফাংশন বলা হইবে যদি ইহা নিম্নলিখিত আকারের সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

$$p_0(x)y^n + p_1(x)y^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(x)y + p_n(x) = 0$$

যেখানে $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_{n-1}(x), p_n(x)$ এর প্রত্যেকটি x এর বহুপদী।

যদি ফাংশনটিকে কোন ডোমেন দুইটি বহুপদী $p(x)$ এবং $q(x)$ এর ভাগফলে অর্থাৎ $\frac{p(x)}{q(x)}$ এ প্রকাশ করা যায় তবে ঐ ফাংশনটিকে মূলদীয় বীজগণিতীয় ফাংশন বলা হয়। অন্যথায়, ইহাকে অমূলদীয় বীজগণিতীয় ফাংশন বলা হয়।

1.B.19. ট্রান্সসেনডেন্টাল বা তুরীয় ফাংশন (Transcendental Function) ঃ যে ফাংশন বীজগণিতীয় নয় ঐ ফাংশনকে কোন সংজ্ঞায়িত ডোমেনে ট্রান্সসেনডেন্টাল বা তুরীয় ফাংশন বলে। এক একটি বিশেষ সংজ্ঞায়িত ডোমেনে নিম্নলিখিত ফাংশন সমূহ প্রাথমিক ট্রান্সসেনডেন্টাল ফাংশন হিসাবে পরিচিত ঃ

(i) সূচকীয় ফাংশন (ii) লগারিদিমিক ফাংশন

(iii) ত্রিকোণমিতিক ফাংশন (iv) ইনভারস্ ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

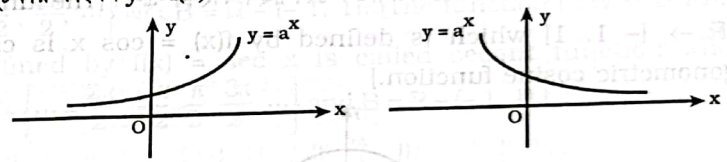
(v) হাইপারবোলিক ফাংশন এবং (vi) ইনভারস্ হাইপারবোলিক ফাংশন।

1.B.20. সূচকীয় ফাংশন (Exponential Function) ঃ যদি $a \in (0, \infty) - \{1\}$ হয়, তবে $f(x) = a^x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ফাংশনটিকে ভিত্তি a এর সাপেক্ষে সূচকীয় ফাংশন বলে। [If $a \in (0, \infty) - \{1\}$, then the function $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ which is defined by $f(x) = a^x$ is called exponential function with respect to base a.]

নিম্নের প্রত্যেকটি সূচকীয় ফাংশন।

(i) $f(x) = 2^x$ (ii) $g(x) = e^x$

সূচকীয় ফাংশন $y = f(x) = a^x$, $a \in (0, \infty) - \{1\}$ এর লেখচিত্র নিম্নে দেওয়া হইল।



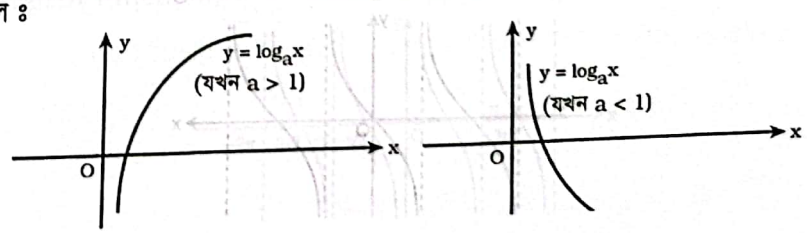
(যখন $a > 1$) (যখন $a < 1$)

1.B.21. লগারিদিমিক ফাংশন (Logarithmic Function) ঃ যদি $a \in (0, \infty) - \{1\}$ হয় তবে $f(x) = \log_a x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ফাংশনটিকে ভিত্তি a এর সাপেক্ষে লগারিদম ফাংশন বলে। [If $a \in (0, \infty) - \{1\}$ then the function $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ which is defined by $f(x) = \log_a x$ is called logarithmic function]

নিম্নের প্রত্যেকটি লগারিদিমিক ফাংশন।

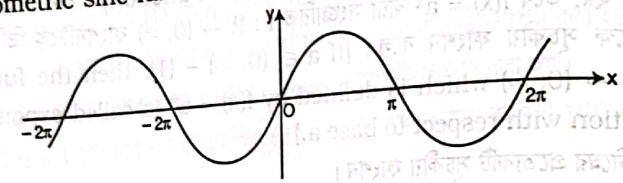
(i) $f(x) = \ln x = \log_e x$ (ii) $f(x) = \log_{10} x$

লগারিদিমিক ফাংশন $y = f(x) = \log_a x$, $a \in (0, \infty) - \{1\}$ এর লেখচিত্র নিম্নে দেওয়া হইল ঃ

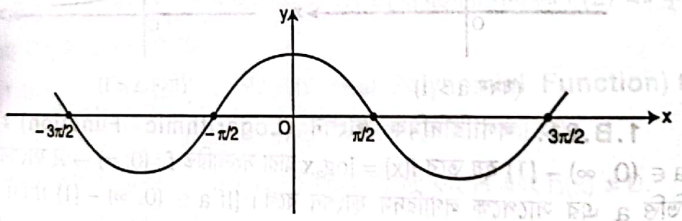


1.B.22. ত্রিকোণমিতিক বৃত্তীয় ফাংশন (Trigonometric Circular Function) ঃ ছয়টি ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের সংজ্ঞা, প্রত্যেকটির ডোমেন ও রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র নিম্নে দেওয়া হইল।

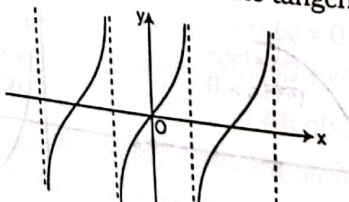
(i) সাইন ফাংশন (Sine Function) ঃ $f(x) = \sin x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক সাইন ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ which is defined by $f(x) = \sin x$ is called trigonometric sine function.]



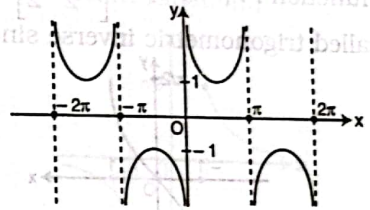
(ii) কোসাইন ফাংশন (Cosine Function) ঃ $f(x) = \cos x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক কোসাইন ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ which is defined by $f(x) = \cos x$ is called trigonometric cosine function.]



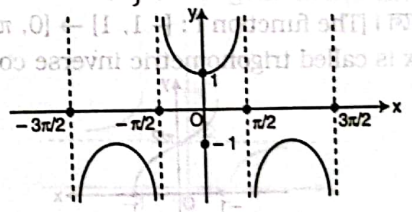
(iii) ট্যানজেন্ট ফাংশন (Tangent Function) ঃ $f(x) = \tan x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - \left\{\cdots -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\right\} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্ট ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} - \left\{\cdots -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\right\} \to \mathbb{R}$ which is defined by $f(x) = \tan x$ is called trigonometric tangent function.]



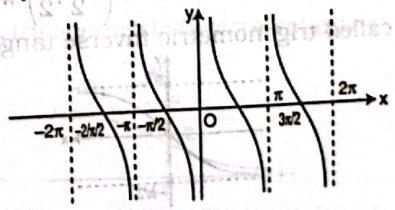
(iv) কোসেকান্ট ফাংশন (Cosecant Function) ঃ $f(x) = \operatorname{cosec} x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : A \to B$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক কোসেকান্ট ফাংশন বলে যেখানে $A = \mathbb{R} - \{\cdots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\}$ এবং $B = \mathbb{R} - (-1, 1)$. [The function $f : A \to B$ which is defined by $f(x) = \operatorname{cosec} x$ is called trigonometric cosecant function where $A = \mathbb{R} - \{\cdots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\}$ and $B = \mathbb{R} - (-1, 1)$.]



(v) সেকান্ট ফাংশন (Secant Function) ঃ $f(x) = \sec x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : A \to B$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক সেকান্ট ফাংশন বলে যেখানে $A = \mathbb{R} - \left\{\cdots -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\right\}$ এবং $B = \mathbb{R} - (-1, 1)$. [The function $f : A \to B$ which is defined by $f(x) = \sec x$ is called secant function where $A = \mathbb{R} - \left\{\cdots -\frac{2\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\right\}$ and $B = \mathbb{R} - (-1, 1)$.]

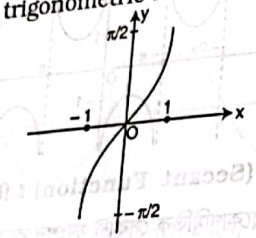


(vi) কোট্যানজেন্ট ফাংশন (Cotangent Function) ঃ $f(x) = \cot x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - \{\cdots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক কোট্যানজেন্ট ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} - \{\cdots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\} \to \mathbb{R}$ which is defined by $f(x) = \cot x$ is called trigonometric cotangent function.]



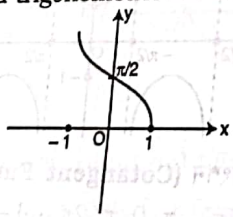
1.B.23. বিপরীত বা ইনভারস্ বৃত্তীয় ফাংশন (Inverse Circular Functions) ঃ ছয়টি ত্রিকোণমিতিক বিপরীত ফাংশন এর সংজ্ঞা এবং লেখচিত্র নিম্নে দেওয়া হইল।

(i) ইনভারস্ সাইন ফাংশন (Inverse Sine Function) ঃ $f(x) = \sin^{-1}x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক ইনভারস সাইন ফাংশন বলে। [The function $f : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ which is defined by $f(x) = \sin^{-1}x$ is called trigonometric inverse sine function.]

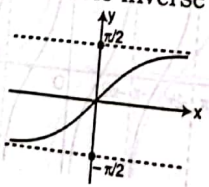


বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ আমরা জানি $a^{-1} = \frac{1}{a}$ কিন্তু $\sin^{-1}x \neq \frac{1}{\sin x}$ একইভাবে অন্য 5টি বিপরীত ফাংশনের জন্য একই নিয়ম প্রযোজ্য।

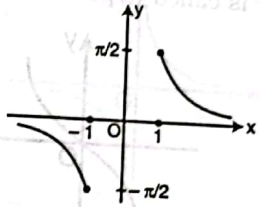
(ii) ইনভারস্ কোসাইন ফাংশন (Inverse Cosine Function) ঃ $f(x) = \cos^{-1}x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : [-1, 1] \to [0, \pi]$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক ইনভারস কোসাইন ফাংশন বলে। [The function $f : [-1, 1] \to [0, \pi]$ which is defined by $f(x) = \cos^{-1}x$ is called trigonometric inverse cosine function.]



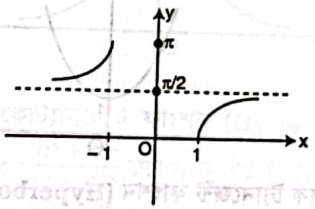
(iii) ইনভারস্ ট্যানজেন্ট ফাংশন (Inverse Tangent Function) ঃ $f(x) = \tan^{-1}x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক ইনভারস ট্যানজেন্ট ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ which is defined by $f(x) = \tan^{-1}x$ is called trigonometric inverse tangent function.]



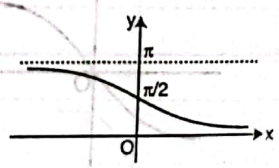
(iv) ইনভারস কোসেকান্ট ফাংশন (Inverse Cosecant Function) ঃ $f(x) = \text{cosec}^{-1}x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - (-1, 1) \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক ইনভারস কোসেকান্ট ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} - (-1, 1) \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ which is defined by $f(x) = \text{cosec}^{-1}x$ is called trigonometric inverse cosecant function.]



(v) ইনভারস সেকান্ট ফাংশন (Inverse Secant Function) ঃ $f(x) = \sec^{-1}x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - (-1, 1) \to [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক ইনভারস সেকান্ট ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} - (-1, 1) \to [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ which is defined by $f(x) = \sec^{-1}x$ is called trigonometric inverse secant function.]

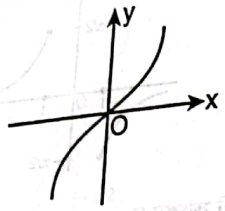


(vi) ইনভারস্ কোট্যানজেন্ট ফাংশন (Inverse Cotangent Function) ঃ $f(x) = \cot^{-1}x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক ইনভারস কোট্যানজেন্ট ফাংশন বলে। [The function $f : R \to (0, \pi)$ which is defined by $f(x) = \cot^{-1}x$ is called trigonometric inverse cotangent function.]

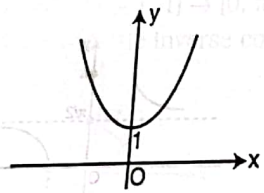


1.B.24. হাইপারবোলিক ফাংশন (Hyperbolic Function) : নিম্নে ছয়টি হাইপারবোলিক ফাংশনের সংজ্ঞা ও লেখচিত্র দেওয়া হইল ঃ

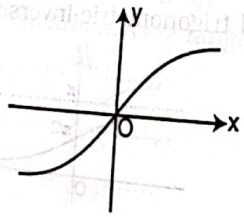
(i) হাইপারবোলিক সাইন ফাংশন (Hyperbolic sine Function) : $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটিকে হাইপারবোলিক সাইন ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ which is defined by $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ is called hyperbolic sine function.]



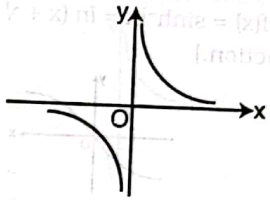
(ii) হাইপারবোলিক কোসাইন ফাংশন (Hyperbolic Cosine Function) : $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to [1, \infty)$ ফাংশনটিকে হাইপারবোলিক কোসাইন ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} \to [1, \infty)$ which is defined by $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ is called hyperbolic cosine function.]



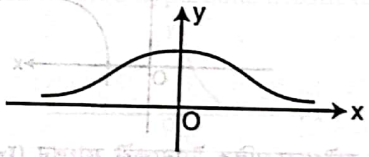
(iii) হাইপারবোলিক ট্যানজেন্ট ফাংশন (Hyperbolic Tangent Function) $f(x) = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটিকে হাইপারবোলিক ট্যানজেন্ট ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ which is defined by $f(x) = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ is called hyperbolic tangent function.]



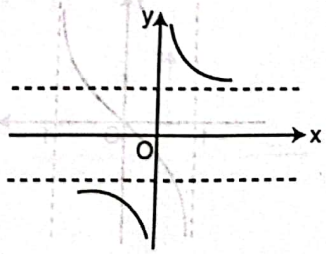
(iv) হাইপারবোলিক কোসেকান্ট ফাংশন (Hyperbolic Cosecant Function) : $f(x) = \operatorname{cosech} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ ফাংশনটিকে হাইপারবোলিক কোসেকান্ট ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ which is defined by $f(x) = \operatorname{cosech} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$ is called hyperbolic cosecant function.]



(v) হাইপারবোলিক সেকান্ট ফাংশন (Hyperbolic Secant Function) : $f(x) = \operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to (0, 1]$ ফাংশনটিকে হাইপারবোলিক সেকান্ট ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} \to (0, 1]$ which is defined by $f(x) = \operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ is called hyperbolic secant function.]



(vi) হাইপারবোলিক কোট্যানজেন্ট ফাংশন (Hyperbolic Cotangent Function) : $f(x) = \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - [-1, 1]$ ফাংশনটিকে হাইপারবোলিক কোট্যানজেন্ট ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - [-1, 1]$ which is defined by $f(x) = \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ is called hyperbolic cotangent function.]

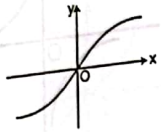


CamScanner

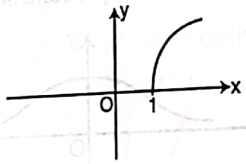
1.B.25. ইনভারস হাইপারবোলিক ফাংশন (Inverse Hyperbolic Function) :

নিম্নে ছয়টি ইনভারস হাইপারবোলিক ফাংশনের সংজ্ঞা এবং লেখচিত্র দেওয়া হইল ঃ

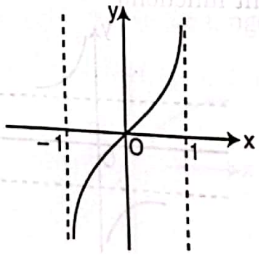
(i) ইনভারস হাইপারবোলিক সাইন ফাংশন (Inverse Hyperbolic Sine Function) : $f(x) = \sinh^{-1}x = ln\,(x + \sqrt{1 + x^2})$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটিকে ইনভারস হাইপারবোলিক সাইন ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ which is defined by $f(x) = \sinh^{-1}x = ln\,(x + \sqrt{1 + x^2})$ is called inverse hyperbolic sine function.]



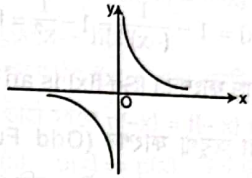
(ii) ইনভারস হাইপারবোলিক কোসাইন ফাংশন (Inverse Hyperbolic Cosine Function) : $f(x) = \cosh^{-1}x = ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ ফাংশনটিকে ইনভারস হাইপারবোলিক কোসাইন ফাংশন বলে। [The function $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ which is defined by $f(x) = \cosh^{-1}x = ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ is called inverse hyperbolic cosine function.]



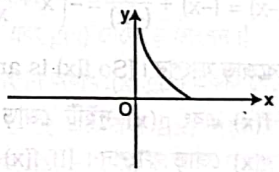
(iii) ইনভারস হাইপারবোলিক ট্যানজেন্ট ফাংশন (Inverse Hyperbolic Tangent Function) : $f(x) = \tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\,ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ ফাংশনটিকে ইনভারস হাইপারবোলিক ট্যানজেন্ট ফাংশন বলে। [The function $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ which is defined by $f(x) = \tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\,ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$ is called inverse hyperbolic tangent function.]



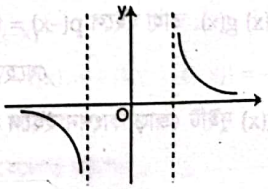
(iv) ইনভাস হাইপারবোলিক কোসেকান্ট ফাংশন (Inverse Hyperbolic Cosecant Function) : $f(x) = \text{cosech}^{-1}x = ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1 + x^2}{x^2}}\right)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ ফাংশনটিকে ইনভাস হাইপারবোলিক কোসেকান্ট ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ which is defined by $f(x) = \text{cosech}^{-1}x = ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1 + x^2}{x^2}}\right)$ is called inverse hyperbolic cosecant function.]



(v) ইনভারস হাইপারবোলিক সেকান্ট ফাংশন (Inverse Hyperbolic Secant Function) : $f(x) = \text{sech}^{-1}x = ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : (0, 1] \to [0, \infty)$ ফাংশনটিকে ইনভারস হাইপারবোলিক সেকান্ট ফাংশন বলে। [The function $f : (0, 1] \to [0, \infty)$ which is defined by $f(x) = \text{sech}^{-1}x = ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$ is called inverse hyperbolic secant function.]



(vi) ইনভারস হাইপারবোলিক কোট্যানজেন্ট ফাংশন (Inverse Hyperbolic Cotangent Function) : $f(x) = \coth^{-1}x = \frac{1}{2}\,ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - [-1, 1] \to \mathbb{R} - \{0\}$ ফাংশনটিকে ইনভারস হাইপারবোলিক কোট্যানজেন্ট ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} - [-1, 1] \to \mathbb{R} - \{0\}$ which is defined by $f(x) = \coth^{-1}x = \frac{1}{2}\,ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)$ is called inverse hyperbolic cotangent function.]



1.B.26. জোড় বা যুগ্ম ফাংশন (Even Function) ঃ

ফাংশন f(x) কে জোড় ফাংশন বলা হইবে যদি $f(-x) = f(x)$ হয়। [If $f(-x) = f(x)$ then f(x) is called even function]

উদাহরণ-22. দেখাও যে $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ একটি জোড় ফাংশন। [Show that $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ is an even function.] **[DUH-1985]**

সমাধান ঃ এখানে $f(-x) = 1 - \frac{1}{(-x)^2} = 1 - \frac{1}{x^2} = f(x)$.

সুতরাং f(x) একটি জোড় ফাংশন। [So f(x) is an even function.]

1.B.27. বেজোড় বা অযুগ্ম ফাংশন (Odd Function) ঃ

ফাংশন f(x) কে বেজোড় ফাংশন বলা হইবে যদি $f(-x) = -f(x)$ হয়। [If $f(-x) = -f(x)$ then f(x) is called odd function]

উদাহরণ-23. দেখাও যে $f(x) = x + \frac{1}{x}$ একটি বেজোড় ফাংশন। [Show that $f(x) = x + \frac{1}{x}$ is an odd function.] **[DUH-1985]**

সমাধান ঃ এখানে $f(-x) = (-x) + \frac{1}{(-x)} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

সুতরাং f(x) একটি বেজোড় ফাংশন। [So f(x) is an odd function.]

উপপাদ্য-1. যদি f(x) এবং g(x) দুইটি জোড় ফাংশন হয় তবে দেখাও যে f(x) + g(x) এবং f(x) g(x) জোড় ফাংশন। [If f(x) and g(x) are two even functions then show that f(x) + g(x) and f(x) g(x) are even function.]

প্রমাণ ঃ ধরি $h(x) = f(x) + g(x)$.

যেহেতু f(x) এবং g(x) জোড় ফাংশন সেহেতু $f(-x) = f(x)$ এবং $g(-x) = g(x)$.

তাহা হইলে $h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = h(x)$

সুতরাং h(x) একটি জোড় ফাংশন। অর্থাৎ f(x) + g(x) একটি জোড় ফাংশন।

আবার ধরি $p(x) = f(x)\,g(x)$. তাহা হইলে $p(-x) = f(-x)\,g(-x) = f(x)\,g(x) = p(x)$

যেহেতু f(x) এবং g(x) জোড় ফাংশন।

সুতরাং f(x) এবং g(x) দুইটি জোড় ফাংশন হইলে f(x) + g(x) এবং f(x) g(x) এর প্রত্যেকটি জোড় ফাংশন।

উপপাদ্য-2. যদি f(x) এবং g(x) বেজোড় ফাংশন হয়, তবে দেখাও যে (i) f(x) + g(x) বেজোড় ফাংশন (ii) f(x) g(x) জোড় ফাংশন। [If f(x) and g(x) are odd functions then show that (i) f(x) + g(x) is an odd function (ii) f(x) g(x) is an even function.]

প্রমাণ ঃ যেহেতু f(x) এবং g(x) বেজোড় ফাংশন সেহেতু

$f(-x) = -f(x)$ এবং $g(-x) = -g(x)$

(i) ধরি $h(x) = f(x) + g(x)$. তাহা হইলে $h(-x) = f(-x) + g(-x)$

$= -\{f(x) + g(x)\} = -h(x)$

$\Rightarrow$ h(x) একটি বেজোড় ফাংশন অর্থাৎ f(x) + g(x) একটি বেজোড় ফাংশন।

(ii) ধরি $p(x) = f(x)\,g(x)$. তাহা হইলে $p(-x) = f(-x)\,g(-x)$

$= \{-f(x)\}\{-g(x)\} = f(x)\,g(x) = p(x) \Rightarrow p(x)$ একটি জোড় ফাংশন

অর্থাৎ f(x) g(x) একটি জোড় ফাংশন।

উপপাদ্য-3. যদি f(x) জোড় ফাংশন এবং g(x) বেজোড় ফাংশন হয়, তবে দেখাও যে f(x) g(x) একটি বেজোড় ফাংশন। [If f(x) is an even function and g(x) is an odd function then show that f(x) g(x) is an odd function.]

প্রমাণ ঃ ধরি $h(x) = f(x)\,g(x)$. তাহা হইলে $h(-x) = f(-x)\,g(-x)$

$= -f(x)\,g(x) = -h(x)$

[যেহেতু f(x) জোড় ফাংশন এবং g(x) বেজোড় ফাংশন।]

$\Rightarrow$ h(x) একটি বেজোড় ফাংশন অর্থাৎ f(x) g(x) একটি বেজোড় ফাংশন।

উপপাদ্য-4. যদি $\forall\, x \in \mathbb{R}$ এর জন্য f(x) সংজ্ঞায়িত হয় তবে দেখাও যে f(x) + f(–x) জোড় ফাংশন এবং f(x) – f(–x) বেজোড় ফাংশন। [If f(x) is defined for $\forall\, x \in \mathbb{R}$ then show that f(x) + f(– x) is an even function and f(x) – f(– x) is an odd function.]

প্রমাণ ঃ ধরি $h(x) = f(x) + f(-x)$.

তাহা হইলে $h(-x) = f(-x) + f(x) = h(x)$

$\Rightarrow$ h(x) একটি জোড় ফাংশন

অর্থাৎ f(x) + f(–x) একটি জোড় ফাংশন

আবার ধরি $p(x) = f(x) - f(-x)$

তাহা হইলে $p(-x) = f(-x) - f(x) = -\{f(x) - f(-x)\} = -p(x)$

$\Rightarrow$ p(x) একটি বেজোড় ফাংশন

অর্থাৎ f(x) – f(–x) একটি বেজোড় ফাংশন।

1.B.28. পর্যায়ী ফাংশন (Periodic Function) : একটি ফাংশন f(x) কে উহার ডোমেন D_f এ একটি পর্যায়ী বা পর্যাবৃত্ত ফাংশন বলে যদি একটি যোগবোধক সংখ্যা T বিদ্যমান থাকে যেন $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in D_f$ হয়। **[RUH–1986]**

এখানে T এর সর্বনিম্ন মানকে পর্যায় বলে।

[A function f(x) is called periodic function in its domain D_f if a positive number T exists such that $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in D_f$.

Here the lowest value of T is called period.]

উদাহরণ–24. দেখাও যে $f(x) = \sin x$ একটি পর্যায়ী ফাংশন যাহার পর্যায় 2π.

[Show that $f(x) = \sin x$ is a periodic function whose period is 2π.]

সমাধান : এখানে $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x = f(x)$

সুতরাং f(x) একটি 2π পর্যায়ের পর্যায়ী ফাংশন।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : ইহা স্পষ্ট যে

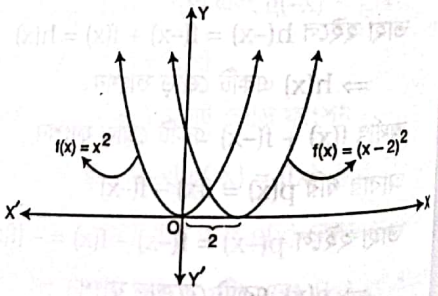
$$\sin x = \sin(2\pi + x) = \sin(4\pi + x) = \sin(6\pi + x) = \cdots$$

অর্থাৎ $f(x) = f(x + 2\pi) = f(x + 4\pi) = f(x + 6\pi) = \cdots$

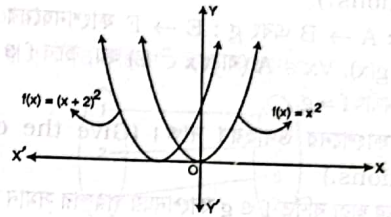
এখানে $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ এর মধ্যে সবচেয়ে ছোটটিকে f(x) এর পর্যায় বোঝায় অর্থাৎ প্রদত্ত ফাংশনটির পর্যায় 2π.

1.B.29. রূপান্তরিত ফাংশন (Translated function) : $y = f(x)$ একটি ফাংশন হইলে f(x) এর সাথে বা স্বাধীন চলক x এর সাথে কোনো ধনাত্মক ধ্রুবক সংখ্যা যোগ বা বিয়োগ বা গুণ করিয়া যে ফাংশন পাওয়া যায় তাহাকে রূপান্তরিত ফাংশন (Translated function) বলা হয়। নিম্নে চিত্রের মাধ্যমে কয়েকটি ফাংশন এবং রূপান্তরিত ফাংশন আলোচনা করা হইলো :

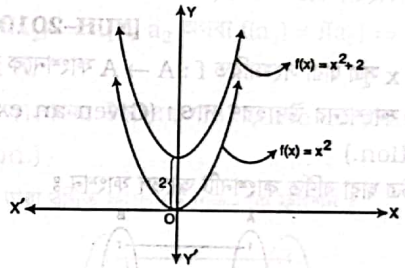
(i) $y = f(x)$ ফাংশন এবং এর রূপান্তরিত ফাংশন $y = f(x - c)$ এর ক্ষেত্রে $y = f(x - c)$ এর লেখচিত্র $y = f(x)$ এর লেখচিত্র হইতে c একক ডান দিকে সরে যাইবে। $f(x) = x^2$ ফাংশন এবং এর রূপান্তরিত ফাংশন $f(x) = (x - 2)^2$ কে নিম্নের চিত্রে দেখানো হইলো।



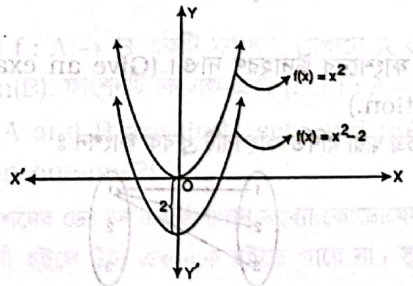
(ii) $y = f(x)$ ফাংশন এবং এর রূপান্তরিত ফাংশন $y = f(x + c)$ এর ক্ষেত্রে $y = f(x + c)$ এর লেখচিত্র $y = f(x)$ এর লেখচিত্র হইতে c একক বাম দিকে সরে যাইবে। $f(x) = x^2$ ফাংশন এবং এর রূপান্তরিত ফাংশন $f(x) = (x + 2)^2$ কে নিম্নের চিত্রে দেখানো হইলো।



(iii) $y = f(x)$ ফাংশন এবং এর রূপান্তরিত ফাংশন $y = f(x) + c$ এর ক্ষেত্রে $y = f(x) + c$ এর লেখচিত্র $y = f(x)$ এর লেখচিত্র হইতে c একক উপরের দিকে সরে যাইবে। $f(x) = x^2$ ফাংশন এবং এর রূপান্তরিত ফাংশন $f(x) = x^2 + 2$ কে নিম্নের চিত্রে দেখানো হইলো।



(iv) $y = f(x)$ ফাংশন এবং এর রূপান্তরিত ফাংশন $y = f(x) - c$ এর ক্ষেত্রে $y = f(x) - c$ এর লেখচিত্র $y = f(x)$ এর লেখচিত্র হইতে c একক নিচের দিকে সরে যাইবে। $f(x) = x^2$ ফাংশন এবং এর রূপান্তরিত ফাংশন $f(x) = x^2 - 2$ কে নিম্নের চিত্রে দেখানো হইলো।



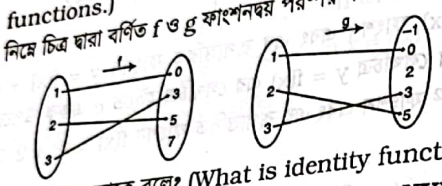
Part A : Brief/Quiz Questions with Answers
[বিভাগ ক ঃ উত্তরসহ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন]

1.B.1. সমান ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by equal functions?)

Ans : যদি $f : A \to B$ এবং $g : E \to F$ ফাংশনদ্বয়ের ক্ষেত্রে $D_f = D_g$ এবং $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$ (বা $\forall x \in E$) হয়, তবে f ও g কে সমান ফাংশন বলা হয়। অর্থাৎ $f = g$.

1.B.2. সমান ফাংশনের উদাহরণ দাও। (Give the example of equal functions.)

Ans : নিম্নে চিত্র দ্বারা বর্ণিত f ও g ফাংশনদ্বয় পরস্পর সমান ফাংশন ঃ

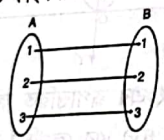


1.B.3. অভেদ ফাংশন কাকে বলে? (What is identity function?) **[NUH–2010, NUH(NM)–2014]**

Ans : $f(x) = x$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : A \to A$ ফাংশনকে অভেদ ফাংশন বলে।

1.B.4. অভেদ ফাংশনের উদাহরণ দাও। (Given an example of identity function.)

Ans : নিম্নে চিত্র দ্বারা বর্ণিত ফাংশনটি অভেদ ফাংশন ঃ

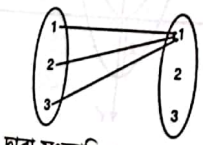


1.B.5. ধ্রুবক ফাংশন কাকে বলে? (What is constant function?) **[NUH–2011, 2015]**

Ans : কোন ফাংশনের রেঞ্জ R_f একউপাদানী সেট হইলে ফাংশনটিকে ধ্রুবক ফাংশন বলে।

1.B.6. ধ্রুবক ফাংশনের উদাহরণ দাও। (Give an example of constant function.)

Ans : নিম্নে চিত্র দ্বারা বর্ণিত ফাংশনটি ধ্রুবক ফাংশন ঃ



অথবা ঃ $f(x) = 5$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটি ধ্রুবক ফাংশন।

1.B.7. ইনটু ফাংশন কাকে বলে? (What is into function?)

Ans : কোন ফাংশনের কোডোমেন ও রেঞ্জ সমান না হইলে উহাকে ইনটু ফাংশন বলে।

1.B.8. ইনটু ফাংশনের উদাহরণ দাও। (Give an example of into function.)

Ans : নিম্নে চিত্র দ্বারা বর্ণিত ফাংশনটি ইনটু ফাংশন ঃ

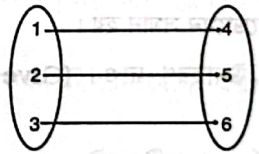
এখানে $Cod_f = \{4, 5, 6, 7\}$ এবং রেঞ্জ $= \{4, 5, 6\}$.

1.B.9. এক-এক বা ইনজেকটিভ ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। (Define one-one or injective function.) **[NUH–2012, 2014, 2018]**

Ans : $f : A \to B$ ফাংশনটিকে এক-এক বা ইনজেকটিভ ফাংশন বলা হইবে যদি $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ অথবা $f(a_1) \neq f(a_2) \Rightarrow a_1 \neq a_2$ হয়, যেখানে $a_1, a_2 \in A$.

1.B.10. এক-এক ফাংশনের উদাহরণ দাও। (Give an example of one-one function.)

Ans : নিম্নে চিত্র দ্বারা বর্ণিত ফাংশনটি এক-এক ফাংশন ঃ



অথবা ঃ $f(x) = 2x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি এক-এক ফাংশন।

1.B.11. মনে করি $f : A \to B$ একটি ফাংশন, যেখানে A ও B সসীম সেট এবং $n(A) > n(B)$. ফাংশনটি কি এক-এক? (Let $f : A \to A$ is a function, where A and B are finite sets and $n(A) > n(B)$. Is the function one-one?)

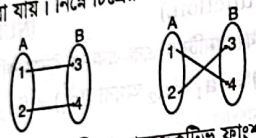
Ans : কোন ফাংশনের ডোমেন এর উপাদান সংখ্যা কোডোমেন এর উপাদান সংখ্যার চেয়ে বেশী হইলে উহা এক-এক হইতে পারে না। সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি এক-এক নয়।

1.B.12. মনে করি A ও B দুইটি সসীম সেট যেখানে $n(A) = r$ এবং $n(B) = s$ $(r \le s)$। A হইতে B তে কয়টি এক-এক ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়? (Let A and B are finite sets where $n(A) = r$ and $n(B) = s$ $(r \le s)$. How many are one-one functions defined from A to B?)

Ans : $n(A) = r$ এবং $n(B) = s$ $(r \le s)$ হইলে A সেট হইতে B সেটে ${}^sp_r$ সংখ্যক এক-এক ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়।

1.B.13. $A = \{1, 2\}$ সেট হইতে $B = \{3, 4\}$ সেটে সম্ভাব্য সকল এক-এক ফাংশনগুলি চিত্রের মাধ্যমে দেখাও। (Show by figure all possible one-one functions from the set $A = \{1, 2\}$ to the set $B = \{3, 4\}$.)

Ans : $A = \{1, 2\}$ সেট হইতে $B = \{3, 4\}$ সেট ${}^2p_2 = 2! = 2$টি এক-এক ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়। নিম্নে চিত্রের মাধ্যমে ইহা দেখানো হইল ঃ

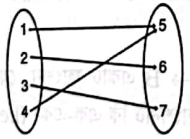


1.B.14. অনটু বা সার্বিক বা সর্বগ্রাহী বা সারজেকটিভ ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। (Define onto or surjective function.) **[NUH–14, NUH(NM)–16, DUH(Aff. Coll.)–17]**

Ans : $f : A \to B$ ফাংশনটিকে অনটু বা সার্বিক ফাংশন বলা হইবে যদি $f(A) = B$ হয় অর্থাৎ রেঞ্জ ও কোডোমেন সমান হয়।

1.B.15. অনটু ফাংশনের উদাহরণ দাও। (Give an example of onto function.) **[NUH–2017]**

Ans : নিম্নে চিত্র দ্বারা বর্ণিত ফাংশনটি অনটু ঃ



অথবা, $f(x) = x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটি অনটু ফাংশন।

1.B.16. যদি $f : A \to B$ একটি ফাংশন, যেখানে A ও B সসীম সেট এবং $n(A) < n(B)$. ফাংশনটি কি অনটু? (Let $f : A \to B$ is a function, where A and B are finite sets and $n(A) < n(B)$. Is the function onto?)

Ans : কোনো ফাংশনের কোডোমেন এর উপাদান সংখ্যা ডোমেন এর উপাদান সংখ্যার চেয়ে বেশী হইলে উহা অনটু হইতে পারে না।

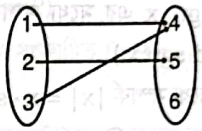
সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি অনটু নয়।

1.B.17. মেনি ওয়ান ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by many one function?)

Ans : কোন ফাংশন এক-এক না হইলে উহা মেনি ওয়ান ফাংশন হইবে।

1.B.18. মেনি ওয়ান ফাংশনের উদাহরণ দাও। (Give an example of many one function.)

Ans : নিম্নের চিত্র দ্বারা বর্ণিত ফাংশনটি মেনি ওয়ান ফাংশন ঃ



অথবা, $f(x) = |x|$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ফাংশনটি মেনি ওয়ান ফাংশন।

1.B.19. বিপরীত ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by inverse function?)

Ans : $f : A \to B$ এবং $g : B \to A$ দুইটি ফাংশন হইলে g কে f এর বিপরীত ফাংশন বলা হইবে যদি $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ হয় যেখানে $f(x) \in B$ এবং $g(x) \in A$.

1.B.20. একটি ফাংশন কখন বিপরীতযোগ্য হয়? [When a function is invertible?] **[NUH–2016]**

Ans : যদি ফাংশনটি এক-এক এবং অনটু হয় তবে উহা বিপরীতযোগ্য হইবে।

1.B.21. সাংখিক মানের ফাংশন বা পরম মান ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by absolute value function?) **[NUH(NM)–16]**

Ans : $y = |x| = \begin{cases} x \text{ যখন } x \ge 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$ কে সাংখিক মানের ফাংশন বা পরম মান ফাংশন বলে।

1.B.22. সাংখিক মানের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত? (What are the domain and range of absolute value function?)

Ans : $y = |x|$ সাংখিক মানের ফাংশনের ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $R_f = [0, \infty)$.

1.B.23. সিগনাম ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by signum function?)

Ans : $y = \text{sgn}\, x = \begin{cases} -1 & \text{যখন } x < 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \\ 1 & \text{যখন } x > 0 \end{cases}$ কে সিগনাম ফাংশন বলে।

1.B.24. সিগনাম ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত? (What are the domain and range of signum function?)

1.B.25. সাংখিক মানের ফাংশন ও সিগনাম ফাংশনের মধ্যে সম্পর্ক লিখ। (Write the relation between absolute value function and signum function.)

অথবা : $|x|$ ও $\text{sgn}\, x$ এর মধ্যে সম্পর্ক লিখ। (Write relation between $|x|$ and $\text{sgn}\, x$.)

Ans : $|x|$ ও $\text{sgn}\, x$ এর মধ্যে সম্পর্ক $|x| = x \cdot \text{sgn}\, x$

1.B.26. সর্বোচ্চ পূর্ণ সাংখিক ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by greatest integer function?)

Ans : যদি $[x] = n$ যেখানে $n \in \mathbb{Z}$ এবং $n \le x < n + 1$ হয় তবে $y = [x]$ কে সর্বোচ্চ পূর্ণ সাংখিক ফাংশন বলে।

অথবা : $y = [x]$ কে সর্বোচ্চ পূর্ণ সাংখিক ফাংশন বলা হইবে যদি $[x]$ দ্বারা x এর অনুর্ধ্ব বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা বোঝায় অর্থাৎ $[x]$ এইরূপ পূর্ণসংখ্যা যেখানে $x - 1 < [x] \le x$.

1.B.27. সর্বোচ্চ পূর্ণ সাংখ্যিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত?

Ans : সর্বোচ্চ পূর্ণ সাংখিক ফাংশনের ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $R_f = \mathbb{Z}$.

1.B.28. $\left[\frac{3}{2}\right]$ এর মান কত? [What is the value of $\left[\frac{3}{2}\right]$?]

Ans : $\left[\frac{3}{2}\right]$ এর মান 1.

1.B.29. $\left[-\frac{3}{2}\right]$ এর মান কত? [What is the value of $\left[-\frac{3}{2}\right]$?]

Ans : $\left[-\frac{3}{2}\right]$ এর মান -2.

1.B.30. সূচকীয় ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। (Define exponential function.)

Ans : যদি $a \in (0, \infty) - \{1\}$ হয়, তবে $f(x) = a^x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ কে ভিত্তি a এর সাপেক্ষে সূচকীয় ফাংশন বলে।

1.B.31. লগারিদিমিক ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। (Define logarithmic function.)

Ans : যদি $a \in (0, \infty) - \{1\}$ হয় তবে $f(x) = \log_a x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ কে ভিত্তি a এর সাপেক্ষে লগারিদিমিক ফাংশন বলা হয়।

1.B.32. ত্রিকোণমিতিক সাইন ফাংশন কাকে বলে? (What is trigonometric sine functon?)

Ans : $f(x) = \sin x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ কে ত্রিকোণমিতিক সাইন ফাংশন বলে।

1.B.33. ত্রিকোণমিতিক কোসাইন ফাংশন কাকে বলে? (What is trigonometric cosine function?)

Ans : $f(x) = \cos x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ কে ত্রিকোণমিতিক কোসাইন ফাংশন বলে।

1.B.34. ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is trigonometric tangent function?)

Ans : $f(x) = \tan x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - \left\{\cdots -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\right\} \to \mathbb{R}$ কে ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্ট ফাংশন বলে।

1.B.35. ত্রিকোণমিতিক কোট্যানজেন্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is trigonometric cotangent function?)

Ans : $f(x) = \cot x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - \{\cdots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\} \to \mathbb{R}$ কে ত্রিকোণমিতিক কোট্যানজেন্ট ফাংশন বলে।

1.B.36. ত্রিকোণমিতিক সেকান্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is trigonometric secant function.)

Ans : $f(x) = \sec x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : A \to B$ কে ত্রিকোণমিতিক সেকান্ট ফাংশন বলে যেখানে $A = \mathbb{R} - \left\{\cdots \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\right\}$ এবং $B = \mathbb{R} - (-1, 1)$.

1.B.37. ত্রিকোণমিতিক কোসেকান্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is trigonometric cosecant function?)

Ans : $f(x) = \text{cosec}\, x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : A \to B$ কে ত্রিকোণমিতিক কোসেকান্ট ফাংশন বলে যেখানে $A = \mathbb{R} - \{\cdots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\}$ এবং $B = \mathbb{R} - (-1, 1)$.

CamScanner

1.B.38. ইনভারস্ সাইন ফাংশন কাকে বলে? (What is inverse sine function?)

Ans : $f(x) = \sin^{-1} x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ কে ইনভারস্ সাইন ফাংশন বলে।

1.B.39. ইনভারস্ কোসাইন ফাংশন কাকে বলে? (What is inverse cosine function?)

Ans : $f(x) = \cos^{-1}x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : [-1, 1] \to [0, \pi]$ কে ইনভারস্ কোসাইন ফাংশন বলে।

1.B.40. ইনভারস্ ট্যানজেন্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is inverse tangent function?)

Ans : $f(x) = \tan^{-1}x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ কে ইনভারস্ ট্যানজেন্ট ফাংশন বলে।

1.B.41. ইনভারস্ কোট্যানজেন্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is inverse cotangent function?)

Ans : $f(x) = \cot^{-1} x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ কে ইনভারস্ কোট্যানজেন্ট ফাংশন বলে।

1.B.42. ইনভারস্ সেকান্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is inverse secant function?)

Ans : $f(x) = \sec^{-1}x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - (-1, 1) \to [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ কে ইনভারস্ সেকান্ট ফাংশন বলে।

1.B.43. ইনভারস্ কোসেকান্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is cosecant function?)

Ans : $f(x) = \text{cosec}^{-1} x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - (-1, 1) \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ কে ইনভারস্ কোসেকান্ট ফাংশন বলে।

1.B.44. হাইপারবোলিক সাইন ফাংশন কাকে বলে? (What is hyperbolic sine function?)

Ans : $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ কে হাইপারবোলিক সাইন ফাংশন বলে।

1.B.45. হাইপারবোলিক কোসাইন ফাংশন কাকে বলে? (What is hyperbolic cosine function?)

Ans : $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to [1, \infty)$ কে হাইপারবোলিক কোসাইন ফাংশন বলে।

1.B.46. হাইপারবোলিক ট্যানজেন্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is hyperbolic tangent function?)

Ans : $f(x) = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ কে হাইপারবোলিক ট্যানজেন্ট ফাংশন বলে।

1.B.47. হাইপারবোলিক কোট্যানজ্যান্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is hyperbolic cotangent function?)

Ans : $f(x) = \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - [-1, 1]$ কে হাইপারবোলিক কোট্যানজেন্ট ফাংশন বলে।

1.B.48. হাইপারবোলিক সেকান্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is hyperbolic secant function?)

Ans : $f(x) = \text{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to (0, 1]$ কে হাইপারবোলিক সেকান্ট ফাংশন বলে।

1.B.49. হাইপারবোলিক কোসেকান্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is hyperbolic cosecant function?)

Ans : $f(x) = \text{cosech} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ কে হাইপারবোলিক কোসেকান্ট ফাংশন বলে।

1.B.50. ইনভারস হাইপারবোলিক সাইন ফাংশন কাকে বলে? (What is inverse hyperbolic sine function?)

Ans : $f(x) = \sinh^{-1} x = ln\,(x + \sqrt{1 + x^2})$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ কে ইনভারস্ হাইপারবোলিক সাইন ফাংশন বলে।

1.B.51. ইনভারস্ হাইপারবোলিক কোসাইন ফাংশন কাকে বলে? (What is inverse hyperbolic cosine function?)

Ans : $f(x) = \cosh^{-1}x = ln\,(x + \sqrt{x^2 - 1})$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ কে ইনভারস্ হাইপারবোলিক কোসাইন ফাংশন বলে।

CamScanner

1.B.52. ইনভারস্ হাইপারবোলিক ট্যানজ্যান্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is inverse hyperbolic tangent function?)

Ans : $f(x) = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ কে ইনভারস্ হাইপারবোলিক ট্যানজ্যান্ট ফাংশন বলে।

1.B.53. ইনভারস্ হাইপারবোলিক কোট্যানজ্যান্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is inverse hyperbolic cotangent function?)

Ans : $f(x) = \coth^{-1} x = \frac{1}{2} ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - [-1, 1] \to \mathbb{R} - \{0\}$ কে ইনভারস্ হাইপারবোলিক কোট্যানজ্যান্ট ফাংশন বলে।

1.B.54. ইনভারস্ হাইপারবোলিক সেকান্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is inverse hyperbolic secant function?)

Ans : $f(x) = \text{sech}^{-1} x = ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : (0, 1] \to [0, \infty)$ কে ইনভারস্ হাইপারবোলিক সেকান্ট ফাংশন বলে।

1.B.55. ইনভারস্ হাইপারবোলিক কোসেকান্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is the inverse hyperbolic cosecant function?)

Ans : $f(x) = \text{cosech}^{-1} x = ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}\right)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ কে ইনভারস্ হাইপারবোলিক কোসেকান্ট ফাংশন বলে।

1.B.56. ফাংশনের লেখচিত্র হইতে এক-এক ফাংশনের ধারণা দাও। (Give the concept of one-one function from graph of the function.)

Ans : $y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্রকে x অক্ষ বা x অক্ষের সমান্তরাল প্রত্যেকটি সরলরেখা একাধিক বিন্দুতে ছেদ না করিলে ফাংশনটি এক-এক হইবে।

1.B.57. ফাংশনের লেখচিত্র হইতে অনটু ফাংশনের ধারণা দাও। (Give the concept of onto function from graph of the function.)

Ans : $y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্রকে x অক্ষ অথবা x অক্ষের সমান্তরাল প্রত্যেকটি সরলরেখা কমপক্ষে একটি বিন্দুতে ছেদ করিলে ফাংশনটি অনটু হইবে।

1.B.58. বহুপদী ফাংশন কি? (What is polynomial function?)

Ans : যদি $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ এবং $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ হয় তবে $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ কে x এর বহুপদী ফাংশন বলে।

1.B.59. মূলদীয় বহুপদী ফাংশন কি? (What is rational polynomial function?)

Ans : যদি $g(x)$ ও $h(x)$ উভয়ে বহুপদী ফাংশন হয় এবং $h(x) \neq 0$, তবে $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ কে x এর মূলদীয় বহুপদী ফাংশন বলে।

1.B.60. সীমাবদ্ধ ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। (Define bounded function.)

Ans : যদি দুইটি বাস্তব সংখ্যা m ও M বিদ্যমান থাকে যেন $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in (a, b)$ হয়, যেখানে (a, b) ব্যবধিতে f(x) ফাংশন সংজ্ঞায়িত ও ইহার মান বিদ্যমান, তবে f(x) কে সীমাবদ্ধ ফাংশন বলে।

1.B.61. ক্রমবর্ধমান বা বৃদ্ধিপ্রাপ্ত ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by increasing function?) **[NUH(NM)–2011]**

Ans : যদি x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে f(x) এর মানও বৃদ্ধি পায় তবে f(x) কে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত ফাংশন বলা হয়।

1.B.62. ক্রমহ্রাসমান বা হ্রাসকৃত ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by decreasing function?) **[NUH(NM)–2011]**

Ans : যদি x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে f(x) এর মান হ্রাস পায় তবে f(x) কে হ্রাসকৃত ফাংশন বলা হয়।

1.B.63. বৃদ্ধিপ্রাপ্ত ও হ্রাসকৃত ফাংশনের উদাহরণ দাও। (Give the examples of increasing and decreasing functions.)

Ans : $f(x) = 1 + x$ একটি বৃদ্ধিপ্রাপ্ত ফাংশন এবং $f(x) = 1 - x$ একটি হ্রাসকৃত ফাংশন।

1.B.64. জোড় বা যুগ্ম ফাংশন কাকে বলে? (What is even function?) **[NUH–2010, BSc(Pass)–2016]**

Ans : যদি $f(x) = f(-x)$ হয়, তবে f(x) ফাংশনকে জোড় ফাংশন বলে।

1.B.65. বেজোড় বা অযুগ্ম ফাংশন কাকে বলে? (What is odd function?) **[NUH–2010, BSc(Pass)–2016]**

Ans : যদি $f(x) = -f(-x)$ হয়, তবে f(x) ফাংশনকে বেজোড় ফাংশন বলে।

1.B.66. জোড় ও বেজোড় ফাংশনের উদাহরণ দাও। (Give the examples of even and odd functions.) **[NUH–2010]**

Ans : $f(x) = \cos x$ একটি জোড় ফাংশন এবং $f(x) = \sin x$ একটি বেজোড় ফাংশন।

CamScanner

1.B.67. $f(x) = x^5 + x$ ফাংশনটি জোড় না বিজোড় তাহা নির্ণয় কর। [Determine whether the function $f(x) = x^5 + x$ is odd or even.] **[NUH-2011, BSc(Pass)-2015]**

Ans : এখানে $f(x) = x^5 + x$

$\therefore f(-x) = -x^5 - x = -f(x)$

সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি বিজোড়।

1.B.68. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ ফাংশনটি জোড় না বিজোড় তাহা নির্ণয় কর। [Determine whether the function $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ is odd or even.]

Ans : এখানে $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

$\therefore f(-x) = 2^{-x} + 2^x = f(x)$

সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি জোড়।

1.B.69. পর্যায়ী ফাংশন ও পর্যায় বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by the periodic function and period?)

Ans : যদি $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in D_f$ হয় তবে $f(x)$ ফাংশনকে পর্যায়ী ফাংশন এবং T এর সর্বনিম্ন মানকে পর্যায় বলে।

1.B.70. পর্যায়ী ফাংশনের উদাহরণ দাও। [Give an example of a periodic function.]

Ans : $f(x) = \tan x$ একটি পর্যায়ী ফাংশন যাহার পর্যায়কাল π.

1.B.71. গুণোজ ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by composite function?)

Ans : ধরি $f : A \to B$ এবং $g : B \to C$ দুইটি ফাংশন যেখানে $R_f = B = D_g$, তাহা হইলে f ও g এর গুণোজ ফাংশনকে $g_of : A \to C$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় যাহা $(g_of)(x) = g(f(x))$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

1.B.72. $f(x) = x^2 + 1$ এবং $g(x) = x^3$ হইলে $fg(2)$ ও $f_og(2)$ কত? (If $f(x) = x^2 + 1$ and $g(x) = x^3$ then, what are $fg(2)$ and $f_og(2)$?)

Ans : $fg(2) = f(2).g(2) = 5.8 = 40$ এবং $f_og(2) = f(g(2)) = f(8) = 65$.

EXERCISE–1(B)

Part–B : Short Questions [বিভাগ খ ঃ সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন]

1. দেখাও যে নিম্নলিখিত f ফাংশনগুলো এক-এক এবং অনটু [Show that following functions f are one-one and onto.]

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সংজ্ঞায়িত $f(x) = x$ দ্বারা

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সংজ্ঞায়িত $f(x) = 3x + 2$ দ্বারা

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সংজ্ঞায়িত $f(x) = ax + b$ দ্বারা যেখানে $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$

(iv) $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ সংজ্ঞায়িত $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ দ্বারা

(v) $f : [0, \infty) \to [1, \infty)$ সংজ্ঞায়িত $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা

(vi) $f : [0, 2] \to [0, 2]$ সংজ্ঞায়িত $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ দ্বারা

(vii) $f : [0, \infty) \to [3, \infty)$ সংজ্ঞায়িত $f(x) = x^2 + 2x + 3$ দ্বারা

(viii) $f : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ সংজ্ঞায়িত $f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 3}$ দ্বারা

(ix) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সংজ্ঞায়িত $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{যখন } x \neq 5 \\ 10 & \text{যখন } x = 5 \end{cases}$

(x) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সংজ্ঞায়িত $f(x) = x^3$ দ্বারা।

2. দেখাও যে ঃ

(i) $f(x) = x + 1$ সূত্র দ্বারা বর্ণিত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি এক-এক এবং অনটু।

(ii) $f(x) = x^2$ সূত্রদ্বারা বর্ণিত $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ফাংশনটি এক-এক কিন্তু অনটু নয়।

(iii) $f(x) = |x|$ সূত্র দ্বারা বর্ণিত $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ফাংশনটি এক-এক নয় কিন্তু অনটু।

3. দেখাও যে ঃ

(i) $f(x) = x - 1$ সূত্রদ্বারা বর্ণিত $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{0, 1, 2, 3\}$ ফাংশনটি এক-এক এবং অনটু।

(ii) $f(x) = x^2$ সূত্র দ্বারা বর্ণিত $f : \{-1, 0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 4, 9\}$ ফাংশনটি এক-এক নয় কিন্তু অনটু।

(iii) $f(x) = x^3$ সূত্র দ্বারা বর্ণিত $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{-8, -1, 0, 1, 8\}$ ফাংশনটি এক-এক এবং অনটু।

(iv) $f(x) = x^2$ সূত্র দ্বারা বর্ণিত $f : \{-3, -2, -1, 0, 1\} \to \{0, 1, 4, 9, 16\}$ ফাংশনটি এক-একও নয় অনটুও নয়।

CamScanner

4. যদি $f(x) = |x-2|$ হয় তবে দেখাও যে

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{যখন } x \geq 2 \\ 2-x & \text{যখন } x < 2 \end{cases}$$

5. দেখাও যে $|x| = x \operatorname{sgn} x$

6. যদি $f(x) = [x]$ হয় তবে দেখাও যে $f(7/2) = 3$, $f(-5/2) = -3$, $f(2\pi) = 6$, $f(4e) = 10$, $f(\sqrt{11}) = 3$, $f(5-\sqrt{2}) = 3$

7. যদি $f(x) = x^2$ এবং $g(x) = x+5$ হয় তবে দেখাও যে $(f+g)x = x^2 + x + 5$ এবং $(f-g)x = x^2 - x - 5$ আরো $(f+g)(2)$ এবং $(f-g)(-3)$ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $(f+g)(2) = 11$ এবং $(f-g)(-3) = 7$

8. যদি $f(x) = |x|$ এবং $g(x) = \operatorname{sgn} x$ হয় তবে $(f+g)(-3)$ এবং $(f-g)(4)$ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $(f+g)(-3) = 2$ এবং $(f-g)(4) = 3$

9. যদি $f(x) = |x|$ এবং $g(x) = x^2$ হয় তবে $(fg)(3)$, $(f/g)(-2)$ এবং $(g/f)(0)$ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $(fg)(3) = 27$, $(f/g)(-2) = \frac{1}{2}$ এবং $(g/f)(0)$ সংজ্ঞায়িত নয়।

10. যদি $f = \{(0, 1), (1, 3), (2, 0), (3, 2)\}$ এবং $g = \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}$ হয় তবে $f \circ g$ এবং $g \circ f$ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $f \circ g = \{(0, 2), (1, 0), (2, 3), (3, 1)\}$ এবং

$g \circ f = \{(0, 2), (1, 0), (2, 3), (3, 1)\}$

11. যদি $f(x) = x^2$ এবং $g(x) = x^2 - x - 2$ হয় তবে দেখাও যে $(f \circ g)(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$ এবং $(g \circ f)(x) = x^4 - x^2 - 2$

12. যদি $f(x) = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ হয় তবে দেখাও যে,

(i) $(f \circ f)(x) = \sqrt[4]{x}$ (ii) $(f \circ f \circ f)(x) = \sqrt[8]{x}$ এবং (iii) $(f \circ f \circ f \circ \cdots \infty)(x) = 1$

13. যদি $f(x) = x^4$ হয় তবে দেখাও যে ইহার বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান নয়।

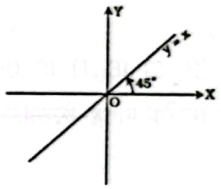
14. দেখাও যে $f(x) + f(-x)$ একটি জোড় ফাংশন এবং $f(x) - f(-x)$ একটি বেজোড় ফাংশন।

Chapter–1(C)
ফাংশনের লেখচিত্র
GRAPHS OF FUNCTIONS

কোনো সমতলে কোনো ফাংশনকে জ্যামিতিকভাবে স্থাপন করা গেলে ঐ ফাংশনকে দেখা যায় বা চেনা যায়। ফাংশনের জ্যামিতিকভাবে এই স্থাপনকে ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করা হইয়াছে বলা হয়।

উদাহরণ–1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে f এর লেখচিত্র অংকন কর। [The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is defined by $f(x) = x$. Then sketch the graph of f.]

সমাধান ঃ $f(x) = x \Rightarrow y = x$ একটি মূলবিন্দুগামী সরলরেখা। রেখাটির ঢাল = 1 অর্থাৎ রেখাটি x অক্ষের সহিত $\tan^{-1}(1) = 45^\circ$ কোণে আনত। রেখাটির অঙ্কন করা হইলো ঃ

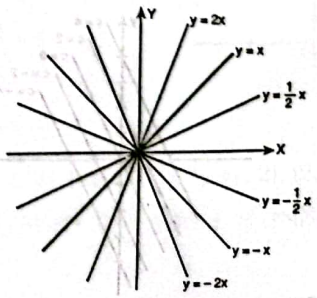


উদাহরণ–2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = mx$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে $m = \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$ এর জন্য f এর লেখচিত্র অংকন কর। [The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is defined by the formula $f(x) = mx$. Then draw the graph of f for $m = \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$.]

সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = mx$

$$m = \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2 \text{ এর জন্য } y = \pm\frac{1}{2}x,\ y = \pm x,\ y = \pm 2x$$

এখন, $y = \frac{1}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x$, $y = x$, $y = -x$, $y = 2x$ এবং $y = -2x$ মূলবিন্দুগামী $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1, 2, -2$ ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখাগুলি অংকন করি ঃ

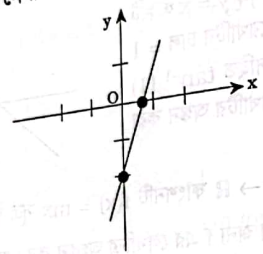


উদাহরণ–3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = 3x - 2$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে f এর লেখচিত্র অঙ্কন কর। [The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is defined by the formula $f(x) = 3x - 2$. Then draw the graph of f.]

সমাধান ঃ এখানে $D_f = \mathbb{R}$ এবং $R_f = \mathbb{R}$. প্রদত্ত সূত্রটি রৈখিক সূত্র। সুতরাং ফাংশনটির লেখচিত্র নির্ণয় করিতে $y = f(x) = 3x - 2$ সূত্রের উপর দুইটি বিন্দু জানা প্রয়োজন। এখন ঐ সূত্রের সাহায্যে x এবং y এর মানের তালিকাটি প্রস্তুত করি এবং

x	0	2/3
y	–2	0

এই তালিকার (0, –2) এবং (2/3, 0) বিন্দু দুইটি xy সমতলে স্থাপন এবং সংযোগ করিয়া বর্ধিত করিলে প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্রটি পাওয়া যাইবে। নিম্নে লেখচিত্র অঙ্কন করা হইল।



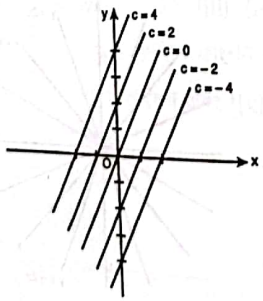
উদাহরণ–4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = 3x + c$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $c = 0, \pm 2, \pm 4$ এর জন্য f এর লেখচিত্র অংকন কর। [The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is defined by $f(x) = 3x + c$. Draw the graph of f for $c = 0, \pm 2, \pm 4$.]

সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = 3x + c$

$c = 0, \pm 2, \pm 4$ এর জন্য $y = 3x$, $y = 3x \pm 2$, $y = 3x \pm 4$

এখানে সরলরেখাগুলির নির্দিষ্ট ঢাল 3, কিন্তু y অক্ষের খন্ডিত অংশ যথাক্রমে 0, –2, 2, –4, 4.

এখন, $y = 3x$, $y = 3x - 2$, $y = 3x + 2$, $y = 3x - 4$, $y = 3x + 4$ সরলরেখাগুলি অংকন করি ঃ



উদাহরণ–5. $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x + 2$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে f এর লেখচিত্র অঙ্কন কর। [The function $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$ is defined by the formula $f(x) = x + 2$. Then sketch the graph of f.]

সমাধান ঃ এখানে $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

$f(x) = x + 2$ সূত্র ব্যবহার করিয়া পাই,

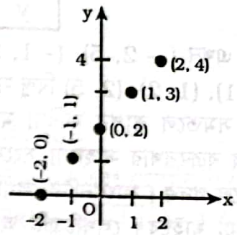
$f(-2) = -2 + 2 = 0,$

$f(-1) = -1 + 2 = 1$

$f(0) = 0 + 2 = 2$

$f(1) = 1 + 2 = 3$

$f(2) = 2 + 2 = 4.$



সুতরাং f এর লেখ $f^* = \{(-2, 0), (-1, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 4)\}$

এখন লেখ f এর উপাদান বা বিন্দুসমূহ xy সমতলে স্থাপন করিলে লেখচিত্র পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ–6. ধরি $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$ এবং $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ ফাংশন দুইটি একই সূত্র $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে উভয় ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর। [Let the two functions $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$ and $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ are defined by the same formula $f(x) = x^2 + 1$. Then draw the graph of both functions.]

সমাধান ঃ (প্রথম অংশ) ঃ এখানে $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

$$f(x) = x^2 + 1$$

সূত্র ব্যবহার করিয়া আমরা পাই

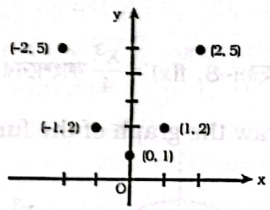
$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$

$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

$f(0) = 0^2 + 1 = 1$

$f(1) = 1^2 + 1 = 2$

$f(2) = 2^2 + 1 = 5$



অতএব f এর লেখ = $\{(-2, 5), (-1, 2), (0, 1), (1, 2), (2, 5)\}$.

এখন f এর বিন্দুসমূহ xy সমতলে স্থাপন করিলে f এর লেখচিত্রটি পাওয়া যাইবে।

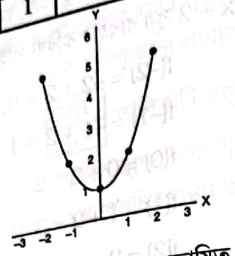
CamScanner

(দ্বিতীয় অংশ) ঃ এখানে $D_f = [-2, 2]$.

এখন $-2 \le x \le 2$ ব্যবধিতে $y = f(x) = x^2 + 1$ সূত্রের সাহায্যে x এবং y এর কিছু মানের একটি তালিকা প্রস্তুত করি।

x	−2	−1	0	1	2
y	5	2	1	2	5

এখন (−2, 5), (−1, 2), (0, 1), (1, 2), (2, 5) বিন্দু সমূহ xy সমতলে স্থাপন করিয়া মসৃন ভাবে বক্ররেখার সাহায্যে সংযোগ করিলে প্রদত্ত f ফাংশনটির লেখচিত্র পাওয়া যাইবে। লেখচিত্রটি অঙ্কন করা হইল।



উদাহরণ–7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 + a$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে $a = 0, \pm 2$ এর জন্য f এর লেখচিত্র অংকন কর। [The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is defined by the formula $f(x) = x^2 + a$. Then draw the graph of f for $a = 0, \pm 2$.]

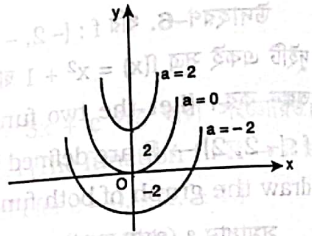
সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = x^2 + a$

$a = 0, \pm 2$ এর জন্য

$y = x^2$

$y = x^2 + 2$

$y = x^2 - 2$



এখানে, $y = x^2$ প্যারাবোলিক ফাংশন এবং $y = x^2 + 2$ ও $y = x^2 - 2$ যথাক্রমে 2 একক উপরে ও দিকে রূপান্তরিত প্যারাবোলিক ফাংশন নির্দেশ করে। লেখচিত্র অঙ্কন করা হইলো।

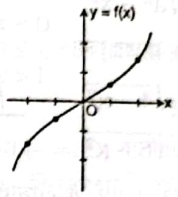
উদাহরণ–8. $f(x) = \frac{x^3}{4}$ ফাংশনের লেখচিত্র অংকন কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Draw the graph of the function $f(x) = \frac{x^3}{4}$ and find domain and range.] **[CUH–2008]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = \frac{x^3}{4}$ ..... (1)

(1) সূত্রের সাহায্যে x এবং y এর কিছু মানের একটি তালিকা প্রস্তুত করি।

x	0	1	−1	2	−2
f(x)	0	1/4	−1/4	2	−2

(1) ফাংশনটি ... $(-2, -2), \left(-1, -\frac{1}{4}\right), (0, 0), \left(1, \frac{1}{4}\right), (2, 2)$ ... বিন্দুগামী একটি বক্ররেখা নির্দেশ করে, যাহার লেখচিত্র অংকন করা হইল ঃ



লেখচিত্র হইতে পাই, ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$.

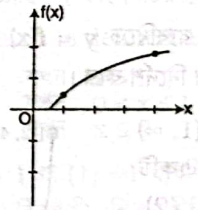
উদাহরণ–9. $f(x) = \sqrt{x-1}$ ফাংশনটির লেখচিত্র অঙকন কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Draw the graph of the function $f(x) = \sqrt{x-1}$ and find domain and range.] **[SJUH–2004]**

সমাধান ঃ $f(x) = \sqrt{x-1}$ ফাংশনটি $x - 1 \ge 0$ বা $x \ge 1$ এর জন্য বিদ্যমান।

$x \ge 1$ শর্তে x ও f(x) এর কিছু মানের একটি তালিকা তৈরী করি।

x	1	2	3	5
f(x)	0	1	$\sqrt{2}$	2

ফাংশনটি (1, 0) বিন্দু হইতে (2, 1), (3, $\sqrt{2}$), (5, 2) ... বিন্দুগামী এবং ক্রমবর্ধমান। ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন করা হইল।



লেখচিত্র হইতে পাই, ফাংশনটির ডোমেন $D_f = [1, \infty)$ এবং রেঞ্জ $R_f = [0, \infty)$.

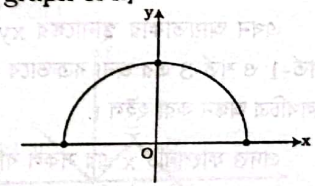
উদাহরণ–10. $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে f এর লেখচিত্র অংকন কর। [The function $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ is defined by $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Then draw the graph of f.]

সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

যখন $x = 0$ তখন $y = 1$

আবার, যখন $x = \pm 1$ তখন $y = 0$

সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি (−1, 0), (0, 1), (1, 0) বিন্দুগামী একটি অর্ধবৃত্ত হইবে। লেখচিত্র অঙ্কন করা হইল।



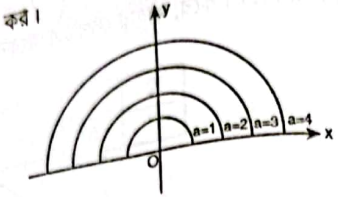
উদাহরণ–11. $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $a = 1, 2, 3, 4$ এর জন্য f এর লেখচিত্র অংকন কর।

সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$

$a = 1, 2, 3, 4$ এর জন্য

$y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = \sqrt{4 - x^2}$,

$y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = \sqrt{16 - x^2}$



এখানে ফাংশনগুলি যথাক্রমে 1, 2, 3, 4 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট অর্ধবৃত্ত প্রকাশ করে যাহারা x অক্ষের উপরে অবস্থিত। লেখচিত্র অংকন করা হইল।

উদাহরণ–12. নিম্নে বর্ণিত f ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Draw the graph of the following function f and find domain and range.]

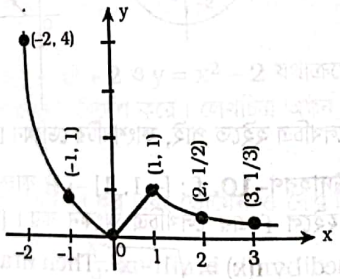
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } x < 0 \\ x & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \\ 1/x & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$$

[NUH–2006, 2010(Old), 2015, NUH(NM)–2011, DUH–1989]

সমাধান (শর্ত–1) ঃ $x < 0$ অর্থাৎ $(-\infty, 0)$ ব্যবধিতে $y = f(x) = x^2$ একটি (0, 0) প্রান্ত বিন্দুবিহীন এবং (–1, 1), (–2, 4) ... বিন্দুসমুহগামী প্যারাবোলার অংশ বিশেষের সমীকরণ নির্দেশ করে।

(শর্ত–2) ঃ $0 \le x \le 1$ ব্যবধিতে $y = f(x) = x$ একটি (0, 0) এবং (1, 1) প্রান্তবিন্দুধারী রেখাংশের সমীকরণ নির্দেশ করে।

(শর্ত–3) ঃ $x > 1$ অর্থাৎ $(1, \infty)$ ব্যবধিতে $y = f(x) = 1/x$ একটি (1, 1) বিন্দুবিহীন এবং (2, 1/2), (3, 1/3), ... বিন্দুসমুহগামী আয়তাকার হাইপারবোলার অংশ বিশেষের সমীকরণ নির্দেশ করে।



এখন আয়তাকার স্থানাঙ্কের xy সমতলে উপরে আলোচিত বিন্দুসমূহ স্থাপন করিয়া শর্ত-1 ও শর্ত-3 এর জন্য বক্রভাবে এবং শর্ত-2 এর জন্য সরলভাবে সংযোগ করিয়া f এর লেখচিত্র অঙ্কন করা হইল।

প্রদত্ত ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। সুতরাং $D_f = \mathbb{R}$. আবার লেখচিত্র হইতে ইহা স্পষ্ট যে y এর মান $[0, \infty)$ ব্যবধিতে বিদ্যমান। সুতরাং $R_f = [0, \infty)$.

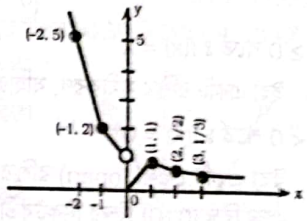
উদাহরণ–13. নিম্নে বর্ণিত f ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Draw the graph of the following function f and find domain and range.]

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{যখন } x < 0 \\ x & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \\ 1/x & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$$ **[NUH–05, 12, 17, NUH(NM)–10, DUH–86, 88, 06, KUH–05]**

সমাধান ঃ (শর্ত–1) : $x < 0$ বা $(-\infty, 0)$ ব্যবধিতে $f(x) = x^2 + 1$ একটি (0, 1) বিন্দুবিহীন এবং (– 1, 2), (– 2, 5), ... বিন্দুসমূহগামী প্যারাবোলার অংশ নির্দেশ করে।

(শর্ত–2) : $0 \le x \le 1$ ব্যবধিতে $f(x) = x$ একটি (0, 0) এবং (1, 1) প্রান্তবিন্দুধারী রেখাংশ নির্দেশ করে।

(শর্ত–3) : $x > 1$ বা $(1, \infty)$ ব্যবধিতে $f(x) = \frac{1}{x}$ একটি (1, 1) বিন্দু বিহীন এবং $\left(2, \frac{1}{2}\right), \left(3, \frac{1}{3}\right)$, ... বিন্দুসমূহগামী আয়তাকার হাইপারবোলার অংশ নির্দেশ করে।



ফাংশনটি অঙ্কন করা হইলো।

লেখচিত্র হইতে পাই, ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $R_f = [0, \infty)$.

উদাহরণ–14. নিম্নভাবে সংজ্ঞায়িত f ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। [Draw the graph of the function f which is defined as follows.]

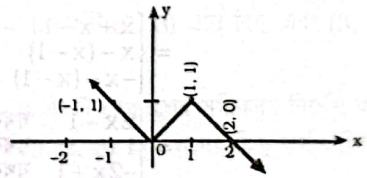
$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{যখন } x > 1 \\ x & \text{যখন } 0 < x \le 1 \\ -x & \text{যখন } x \le 0 \end{cases}$$ **[NUH–2010, DUH–1989]**

সমাধান ঃ (শর্ত–1) ঃ $x > 1$ বা $(1, \infty)$ ব্যবধিতে $y = f(x) = 2 - x$ একটি (1, 1) খোলা প্রান্ত বিন্দু এবং (2, 0) বিন্দুগামী রশ্মির সমীকরণ নির্দেশ করে।

(শর্ত–2) ঃ $0 < x \le 1$ বা $(0, 1]$ ব্যবধিতে $y = f(x) = x$ একটি (0, 0) খোলা প্রান্ত বিন্দু এবং (1, 1) প্রান্ত বিন্দু বিশিষ্ট রেখাংশের সমীকরণ নির্দেশ করে।

(শর্ত–3) ঃ $x \le 0$ বা $(-\infty, 0]$ ব্যবধিতে $y = f(x) = -x$ একটি (0, 0) প্রান্ত বিন্দু বিশিষ্ট এবং (–1, 1) বিন্দুগামী রশ্মির সমীকরণ নির্দেশ করে।

এখন উপরের আলোচিত তিন শর্তের বিন্দুসমূহ আয়তকার স্থানাঙ্কের সমতল xy এ স্থাপন করিয়া সরলভাবে সংযোগ করিলে ফাংশন f এর লেখচিত্র পাওয়া যাইবে।



উদাহরণ–15. $f(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Draw the graph of the function $f(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ and find domain and range.] **[KUH–2005]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(x + x) & \text{যখন } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}(-x + x) & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x & \text{যখন } x \geq 0 \\ 0 & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

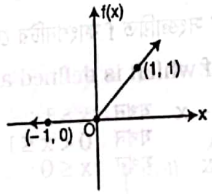
$x \geq 0$ শর্তে ঃ $f(x) = x$

ইহা একটি রশ্মির সমীকরণ, যাহার প্রান্ত বিন্দু (0, 0) এবং রশ্মিটি (1, 1) বিন্দুগামী।

$x < 0$ শর্তে ঃ $f(x) = 0$

ইহা একটি খোলা (open) রশ্মির সমীকরণ, যাহার খোলা প্রান্ত বিন্দু (0, 0) অর্থাৎ প্রান্ত বিন্দু (0, 0) বিন্দুর নিকটবর্তী এবং রশ্মিটি (– 1, 0) বিন্দুগামী।

প্রদত্ত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন করা হইল ঃ



লেখচিত্র হইতে পাই, ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $R_f = [0, \infty)$.

উদাহরণ–16. নিম্নলিখিতভাবে বর্ণিত f ফাংশনের লেখচিত্র অংকনসহ ইহার ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Draw the graph and find domain and range of the function f which is defined as follows]

$f(x) = |x| + |x-1|$. **[NUH–2016, NUH(NM)–2011, DUH–1992]**

সমাধান ঃ এখানে $y = f(x) = |x| + |x-1|$

$$= \begin{cases} x + x - 1 & \text{যখন } x \geq 1 \\ x - (x-1) & \text{যখন } 0 \leq x < 1 \\ -x - (x-1) & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x - 1 & \text{যখন } x \geq 1 \\ 1 & \text{যখন } 0 \leq x < 1 \\ -2x + 1 & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

(শর্ত–1) ঃ $x \geq 1$ শর্তে বা ব্যবধিতে $y = 2x - 1$ একটি রশ্মির সমীকরণ নির্দেশ করে যাহার প্রান্ত বিন্দু (1, 1). এখন এই রশ্মির উপর আরেকটি বিন্দু (2, 3) লই। এখন আয়তাকার স্থানাঙ্কের সমতল xy এ ঐ বিন্দু দুইটি স্থাপন করিয়া ন্যূনতম দূরত্ব পথে উহাদেরকে যোগ করিয়া উর্ধমুখী করিলে প্রথম শর্তের লেখচিত্র পাওয়া যাইবে।

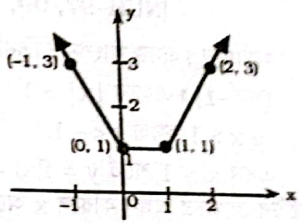
(শর্ত–2) ঃ $0 \leq x < 1$ শর্তে বা ব্যবধিতে $y = 1$ একটি (0, 1) প্রান্ত বিন্দু বিশিষ্ট একটি রেখাংশের সমীকরণ নির্দেশ করে যাহার অপর প্রান্ত (1, 1) এর আগের বিন্দু অর্থাৎ প্রান্ত বিন্দুটি খোলা। এই রেখাংশটি x অক্ষের সমান্তরাল।

এখন xy সমতলে (0, 1) এবং (1, 1) বিন্দুর সংযুক্ত রেখাংশ নির্ণয় করিয়া (1, 1) বিন্দুতে খোলা চিহ্ন ব্যবহার করিলে দ্বিতীয় শর্তের লেখচিত্র পাওয়া যাইবে।

(শর্ত–3) ঃ $x < 0$ শর্তে $y = -2x + 1$ একটি খোলা রশ্মির সমীকরণ নির্দেশ করে যাহার প্রান্ত বিন্দু (0, 1) বিন্দুর কাছাকাছি। এই রশ্মির উপর আরেকটি বিন্দু (–1, 3) লই।

এখন xy সমতলে এ দুই বিন্দুগামী রশ্মি নির্ণয় করিয়া (0, 1) প্রান্ত বিন্দুতে খোলা চিহ্ন ব্যবহার করিলে তৃতীয় শর্তের লেখচিত্র পাওয়া যাইবে।

প্রদত্ত ফাংশনের নির্ণেয় লেখচিত্র পার্শ্বে অঙ্কন করা হইল।



লেখচিত্র হইতে ইহা স্পষ্ট যে প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $R_f = [1, \infty)$.

উদাহরণ–17. নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত f ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। [Draw the graph of the function f which is defined as follows.]

$f(x) = |x+1| + |x-2|$. **[NUH–1997, 2003, 2011]**

সমাধান ঃ $y = f(x) = |x+1| + |x-2|$

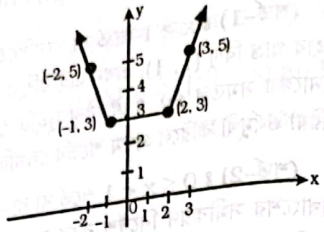
$$= \begin{cases} x + 1 + x - 2 & \text{যখন } x \geq 2 \\ x + 1 - (x-2) & \text{যখন } -1 \leq x < 2 \\ -(x+1) - (x-2) & \text{যখন } x < -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x - 1 & \text{যখন } x \geq 2 \\ 3 & \text{যখন } -1 \leq x < 2 \\ -2x + 1 & \text{যখন } x < -1 \end{cases}$$

(শর্ত–1) ঃ $x \geq 2$ ব্যবধিতে $y = 2x - 1$ একটি (2, 3) প্রান্ত বিন্দু এবং (3, 5) বিন্দুগামী একটি রশ্মির সমীকরণ নির্দেশ করে।

(শর্ত–2) ঃ $-1 \leq x < 2$ ব্যবধিতে $y = 3$ একটি রেখাংশের সমীকরণ নির্দেশ করে যাহার একপ্রান্ত বিন্দু (–1, 3) এবং অন্যপ্রান্ত বিন্দু (2, 3) এর আগের বিন্দু অর্থাৎ বিন্দুটি খোলা।

(শর্ত–3) ঃ $x < -1$ ব্যবধিতে $y = -2x + 1$ একটি $(-1, 3)$ খোলা প্রান্ত বিন্দু এবং $(-2, 5)$ বিন্দুগামী একটি রশ্মির সমীকরণ নির্দেশ করে।



উপরের আলোচিত বিন্দুসমূহ আয়তকার স্থানাঙ্কের সমতল xy এ স্থাপন করিলে সরলভাবে সংযোগ করিলে লেখচিত্র পাওয়া যায়।

উদাহরণ–18. নিম্নলিখিতভাবে বর্ণিত f ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Draw the graph and find domain and range of the function f which is defined as follows]

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{যখন } |x| > 1 \\ 1 + x & \text{যখন } -1 \le x \le 0 \\ 1 - x & \text{যখন } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

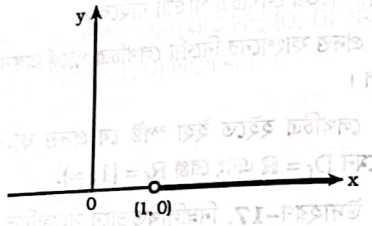
[NUH–97, 09, NU(NM)–04, 17, BSc(Pass)–06,11, 12, 14]

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশনটি তিনটি শর্তে তিনটি সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

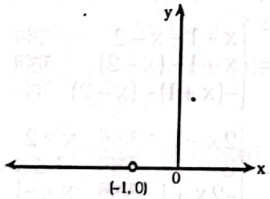
(শর্ত–1) ঃ এখানে $|x| > 1$

$\Rightarrow x > 1$ অথবা $x < -1$.

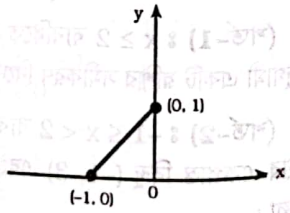
এখন $x > 1$ শর্তে $y = f(x) = 0$ সূত্রটির লেখচিত্র অঙ্কন করিলে x অক্ষের উপরস্থ (1, 0) প্রান্তবিন্দুহীন একটি ডানমুখী রশ্মি হইবে। ইহার লেখচিত্র অঙ্কন করা হইল।



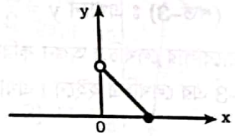
আবার $x < -1$ শর্তে $y = f(x) = 0$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করিলে x অক্ষের উপরস্থ (–1, 0) প্রান্ত বিন্দুহীন একটি বামমুখী রশ্মি হইবে। নিম্নে ইহার লেখচিত্র অঙ্কন করা হইল।



(শর্ত–2) ঃ $-1 \le x \le 0$ শর্তে $y = f(x) = 1 + x$ সূত্রটির লেখচিত্র একটি (– 1, 0) [যখন $x = -1$ তখন $y = 1 - 1 = 0$] এবং (0, 1) [যখন $x = 0$ তখন $y = 1$] প্রান্তবিন্দু বিশিষ্ট একটি রেখাংশ নির্দেশ করিবে। ইহার লেখচিত্র অঙ্কন করা হইল।

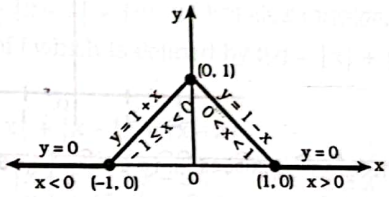


(শর্ত–3) ঃ $0 < x \le 1$ শর্তে $y = f(x) = 1 - x$ সূত্রটির লেখচিত্র একটি (0, 1) প্রান্তবিন্দুবিহীন এবং (1, 0) প্রান্তবিন্দু বিশিষ্ট রেখাংশ হইবে। ইহার লেখচিত্র অঙ্কন করা হইল।



উপরের চারটি লেখচিত্রের মিলিত লেখচিত্রই হইল f এর লেখচিত্র। নিম্নে তাহা দেখানো হইল।

লেখচিত্র হইতে স্পষ্ট যে x অক্ষের প্রত্যেক বিন্দুতে লেখচিত্র বিদ্যমান। সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন হইল সমস্ত বাস্তবসংখ্যার সেট অর্থাৎ $D_f = \mathbb{R}$. আবার লেখচিত্র হইতে ইহা স্পষ্ট যে [0, 1] ব্যবধির প্রত্যেক বিন্দুতে y এর মান বিদ্যমান। সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটির রেঞ্জ $R_f = [0, 1]$.



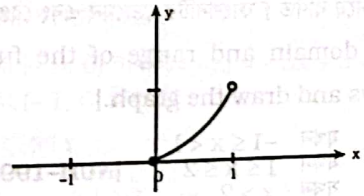
উদাহরণ–19. নিম্নে সংজ্ঞায়িত f ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর এবং লেখচিত্র অঙ্কন কর। [Find domain and range of the function f which is defined as follows and draw the graph.]

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } 0 \le x < 1 \\ x & \text{যখন } 1 \le x < 2 \\ (1/2)x^2 & \text{যখন } 2 \le x < \infty \end{cases}$$

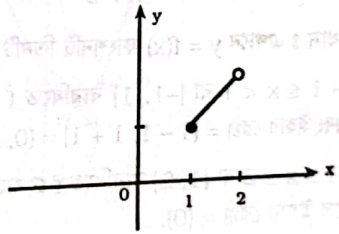
[DUH–1987]

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশনটি তিনটি শর্তে তিনটি সূত্রদ্বারা সংজ্ঞায়িত।

(শর্ত–1) ঃ এখানে $y = f(x) = x^2$ একটি প্যারাবোলার সমীকরণ নির্দেশ করে। এখন এই প্যারাবোলার লেখচিত্র অঙ্কন করিয়া ইহা হইতে $0 < x < 1$ ব্যবধির অংশটুকু চিহ্নিত করিলে শর্ত-1 এর লেখচিত্র হইবে। ইহা নিম্নে অঙ্কন করা হইল।

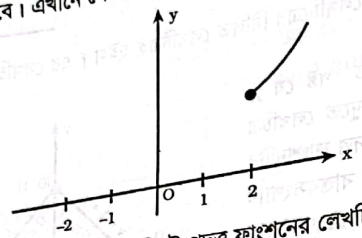


(শর্ত–2) ঃ এখানে $y = x$ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্দেশ করে। এখন এই সরলরেখার লেখচিত্র অঙ্কন করিয়া ইহা হইতে $1 \le x < 2$ ব্যবধির অংশটুকু চিহ্নিত করিলে শর্ত-2 এর লেখচিত্র হইবে। লেখচিত্র অঙ্কন করা হইল।

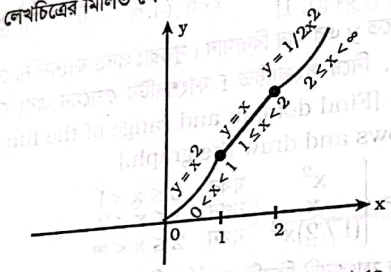


CamScanner

(শর্ত–3) ঃ এখানে $y = \frac{1}{2}x^2$ একটি প্যারাবোলার সমীকরণ নির্দেশ করে। এখন এই প্যারাবোলার লেখচিত্র অঙ্কন করিয়া ইহা হইতে $2 \le x < \infty$ ব্যবধির অংশটুকু চিহ্নিত করিলে শর্ত-3 এর লেখচিত্র হইবে। এখানে লেখচিত্রটি অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হইবে।



উপরের তিনটি লেখচিত্রের মিলিত লেখচিত্রই প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র হইবে।



লেখচিত্র হইতে স্পষ্ট যে প্রদত্ত ফাংশনটির মান $0 < x < \infty$ বা $(0, \infty)$ ব্যবধির প্রত্যেক বিন্দুতে বিদ্যমান এবং ঐ মান $0 < y < \infty$ বা $(0, \infty)$ ব্যবধির সমস্ত বিন্দু। সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন ঃ $D_f = [0, \infty)$ এবং রেঞ্জ ঃ $R_f = [0, \infty)$.

উদাহরণ–20. নিম্নে বর্ণিত f ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর এবং লেখচিত্র অঙ্কন কর। [Find domain and range of the function f which is defined as follows and draw the graph.]

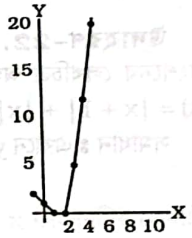
$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{যখন } -1 \le x < 1 \\ 0 & \text{যখন } 1 \le x \le 2 \\ x^2-4 & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$$ **[NUH–1995, BSc(Pass)–2010]**

সমাধান ঃ এখানে $y = f(x)$ ফাংশনটি তিনটি সূত্রদ্বারা সংজ্ঞায়িত।

(i) $-1 \le x < 1$ বা $[-1, 1]$ ব্যবধিতে f সরলরেখা নির্দেশ করে। এই ব্যবধিতে f নিম্নমুখী এবং ইহার রেঞ্জ $= (1-1, 1+1] = (0, 2]$.

(ii) $1 \le x \le 2$ বা $[1, 2]$ ব্যবধিতে f রেখাংশ নির্দেশ করে যাহা x অক্ষে অবস্থিত এবং ঐ ব্যবধিতে ইহার রেঞ্জ $= \{0\}$.

(iii) $x > 2$ বা $[2, \infty)$ ব্যবধিতে f প্যারাবোলার সমীকরণ নির্দেশ করে এবং ইহা উর্ধমুখী। ঐ ব্যবধিতে উহার রেঞ্জ $= (0, \infty)$.



সুতরাং f এর ডোমেন $D_f = [-1, 1) \cup [1, 2] \cup [2, \infty) = [-1, \infty)$ এবং রেঞ্জ $R_f = (0, 2] \cup \{0\} \cup (0, \infty) = (0, \infty)$.

উদাহরণ–21. $f(x) = |x| + |x-1| + |x-2|$ দ্বারা বর্ণিত f ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর। [Draw the graph of f which is defined by $f(x) = |x| + |x-1| + |x-2|$]

সমাধান ঃ এখানে $y = f(x) = |x| + |x-1| + |x-2|$

$$= \begin{cases} x+x-1+x-2 & \text{যখন } x \ge 2 \\ x+x-1-(x-2) & \text{যখন } 1 \le x < 2 \\ x-(x-1)-(x-2) & \text{যখন } 0 \le x < 1 \\ -x-(x-1)-(x-2) & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x-3 & \text{যখন } x \ge 2 \\ x+1 & \text{যখন } 1 \le x < 2 \\ -x+3 & \text{যখন } 0 \le x < 1 \\ -3x+3 & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

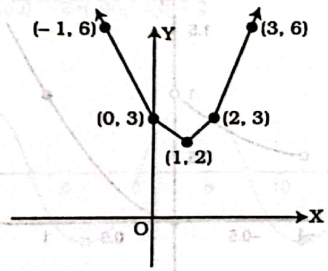
(শর্ত–1) : $x \ge 2$ বা $[2, \infty)$ ব্যবধিতে $y = 3x - 3$ একটি রশ্মি নির্দেশ করে যাহার প্রান্তবিন্দু (2, 3) এবং (3, 6) বিন্দুগামী।

(শর্ত–2) : $1 \le x < 2$ ব্যবধিতে $y = x + 1$ একটি (1, 2) প্রান্ত বিন্দু বিশিষ্ট এবং (2, 3) প্রান্ত বিন্দু বিহীন রেখাংশ নির্দেশ করে।

(শর্ত–3) : $0 \le x < 1$ ব্যবধিতে $y = -x + 3$ একটি (0, 3) প্রান্তবিন্দু বিশিষ্ট এবং (1, 2) প্রান্তবিন্দু বিহীন রেখাংশ নির্দেশ করে।

(শর্ত–4) : $x < 0$ বা $(-\infty, 0)$ ব্যবধিতে $f(x) = -3x + 3$ একটি রশ্মি নির্দেশ করে যাহার প্রান্তবিন্দু (0, 3) এবং (– 1, 6) বিন্দুগামী।

ফাংশনটি অঙ্কন করা হইলো ঃ



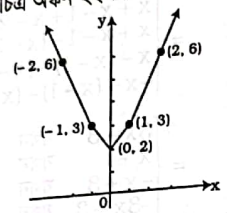
উদাহরণ–22. $f(x) = |x+1| + |x| + |x-1|$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত f ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর। [Draw the graph of f which is defined by $f(x) = |x+1| + |x| + |x-1|$.]

সমাধান ঃ এখানে $y = f(x) = |x+1| + |x| + |x-1|$

$$= \begin{cases} x+1+x+x-1 & \text{যখন } x \geq 1 \\ x+1+x-(x-1) & \text{যখন } 0 \leq x < 1 \\ x+1-x-(x-1) & \text{যখন } -1 \leq x < 0 \\ -(x+1)-x-(x-1) & \text{যখন } x < -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x & \text{যখন } x \geq 1 \\ x+2 & \text{যখন } 0 \leq x < 1 \\ -x+2 & \text{যখন } -1 \leq x < 0 \\ -3x & \text{যখন } x < -1 \end{cases}$$

নিম্নে প্রদত্ত f ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন হইল ঃ



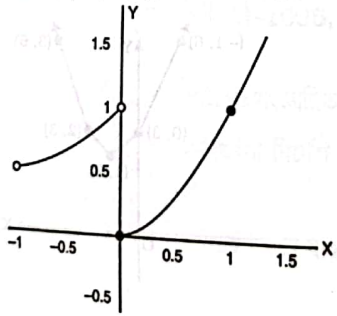
উদাহরণ–23. নিম্নে বর্ণিত f ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর এবং লেখচিত্র অংকন কর। [Find domain and range of the following function and draw the graph.]

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|x|}{2}} & \text{যখন } -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{যখন } 0 \leq x < 2 \end{cases}$$ **[DUH–1987; NUH–2003]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশনটি (–1, 0) এবং [0, 2) ব্যবধিতে সংজ্ঞায়িত। সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন $D_f = (-1, 0) \cup [0, 2) = (-1, 2)$.

আবার (–1, 0) ব্যবধিতে $f(x) = e^{-\frac{|x|}{2}}$ ঊর্ধ্বমুখী।

সুতরাং এই ব্যবধিতে রেঞ্জ = $(f(-1), f(0)) = (e^{-1/2}, 1)$



আবার [0, 2) ব্যবধিতে $f(x) = x^2$ ঊর্ধ্বমুখী।

সুতরাং এই ব্যবধিতে রেঞ্জ = $[f(0), f(2)] = (0, 4)$.

সুতরাং নির্ণেয় রেঞ্জ $R_f = (e^{-1/2}, 1) \cup [0, 4) = [0, 4)$

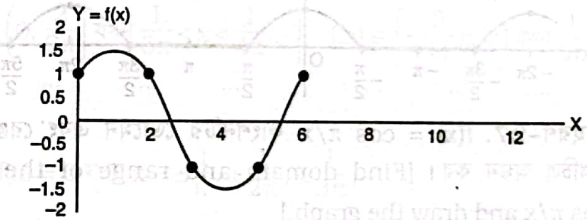
শর্ত অনুযায়ী ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন করা হইল।

উদাহরণ–24. $0 \leq x \leq 2\pi$ ব্যবধিতে $f(x) = \sin x + \cos x$ ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর। [Draw the graph of the function $f(x) = \sin x + \cos x$ in the interval $0 \leq x \leq 2\pi$.]

সমাধান ঃ

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
f(x)	1	$\sqrt{2}$	1	0	– 1	$-\sqrt{2}$	– 1	0	1

$f(x) = \sin x + \cos x$ ফাংশনের লেখচিত্র $0 \leq x \leq 2\pi$ ব্যবধিতে নিম্নে অঙ্কন করা হইল ঃ

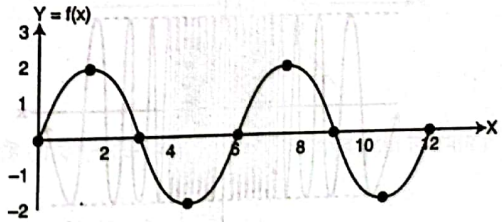


উদাহরণ–25. $f(x) = \sin x + \sin |x|$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর [Draw the graph of $f(x) = \sin x + \sin |x|$.]

সমাধান ঃ $y = f(x) = \sin x + \sin |x|$

$$= \begin{cases} \sin x + \sin x & \text{যখন } x \geq 0 \\ \sin x - \sin x & \text{যখন } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2\sin x & \text{যখন } x \geq 0 \\ 0 & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

নিম্নে প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করা হইল ঃ



উদাহরণ-26. $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}|\cos x|$ এর লেখচিত্র অংকন কর। [Draw the graph of $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}|\cos x|$] **[NUH(NM)-2008]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন

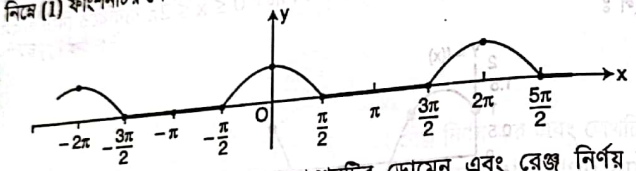
$$f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}|\cos x| \quad \ldots\ldots (1)$$

$\ldots -\frac{3\pi}{2} \le x \le -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2}, \ldots$ ব্যবধিতে $f(x) = 0$

আবার, $\ldots -\frac{5\pi}{2} < x < -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2} \ldots$ ব্যবধিতে

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x = \cos x$$

নিম্নে (1) ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন করা হইল ঃ



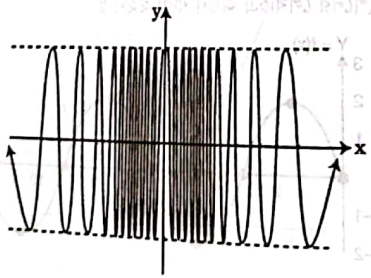
উদাহরণ-27. $f(x) = \cos \pi/x$ ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর এবং লেখচিত্র অঙ্কন কর। [Find domain and range of the function $f(x) = \cos \pi/x$ and draw the graph.]

সমাধান ঃ $y = f(x) = \cos \pi/x$ ফাংশনটি $x = 0$ ব্যতিত x এর অন্য সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। সুতরাং $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

আবার $|y| = |f(x)| = |\cos x\pi/x| \le 1$ অর্থাৎ $-1 \le y \le 1$

সুতরাং $R_f = [-1, 1]$

নিম্নে প্রদত্ত ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করা হইল ঃ



উদাহরণ-28. $f(x) = x \sin 1/x$ ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর এবং লেখচিত্র অঙ্কন কর। [Find domain and range of the function $f(x) = x \sin 1/x$ and draw the graph.] **[NUH-96, 02, NUH(NM)-06]**

সমাধান ঃ $y = f(x) = x \sin 1/x$ ফাংশনটি $x = 0$ ব্যতিত x এর অন্য সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত।

সুতরাং ফাংশনের ডোমেন $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

প্রদত্ত ফাংশনে x এর পরিবর্তে $-x$ বসাইলে মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। সুতরাং ফাংশনটি y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

x এর ধনাত্মক মানের জন্য ফাংশনের মান নিম্নরূপ হয় ঃ

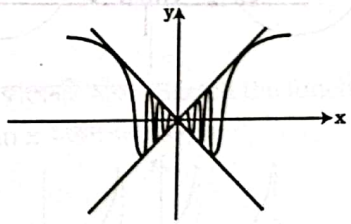
$f(x) \in (0, 1)$ যখন $\frac{1}{\pi} < x < \infty$	$f(x) \in \left[-\frac{2}{3\pi}, 0\right)$ যখন $\frac{1}{2\pi} < x < \frac{1}{\pi}$
$f(x) \in \left(0, \frac{2}{5\pi}\right]$ যখন $\frac{1}{3\pi} < x < \frac{1}{2\pi}$	$f(x) \in \left[-\frac{2}{7\pi}, 0\right)$ যখন $\frac{1}{4\pi} < x < \frac{1}{3\pi}$
$f(x) \in \left(0, \frac{2}{9\pi}\right]$ যখন $\frac{1}{5\pi} < x < \frac{1}{4\pi}$	$f(x) \in \left[-\frac{2}{11}\pi, 0\right)$ যখন $\frac{1}{6\pi} < x < \frac{1}{5\pi}$
... ...	... ...
... ...	... ...

আবার $f(x) = 0$ যখন $x = \pm\frac{1}{\pi}, \pm\frac{1}{2\pi}, \pm\frac{1}{3\pi}, \ldots$

ফাংশনের সকল মান বিবেচনা করিয়া পাই, $f(x) \in \left[-\frac{2}{3\pi}, 1\right), \forall x$

সুতরাং ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \left[-\frac{2}{3\pi}, 1\right)$

নিম্নে ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন করা হইল ঃ



চিত্র হইতে স্পষ্ট যে ফাংশনটির মান $\left[\frac{-2}{3\pi}, 1\right)$ ব্যবধির মধ্যে বিদ্যমান।

অর্থাৎ $\frac{-2}{3\pi} \le y < 1$. সুতরাং $R_f = \left[\frac{-2}{3\pi}, 1\right)$

CamScanner

উদাহরণ–29. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর এবং লেখচিত্র অঙ্কন কর। [Find domain and range of the function $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ and draw the graph.] **[NUH–2002]**

সমাধান ঃ $y = f(x) = \sin\frac{1}{x}$ ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দু ব্যতিত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত।

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

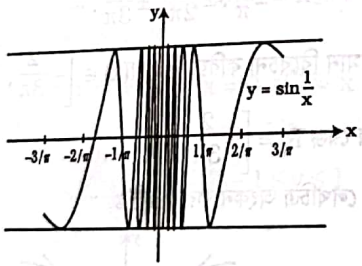
আবার $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$. ইহা হইতে পাই, $-1 \le y \le 1$

$\therefore R_f = [-1, 1]$

আবার $y = f(x) = \sin\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{n\pi},\ n \in \mathbb{Z} - \{0\}$

অর্থাৎ $x = \cdots, -\frac{1}{3\pi}, -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi} \cdots$ বিন্দুতে ফাংশনটি x অক্ষকে ছেদ করে। নিম্নে প্রদত্ত ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করা হইল ঃ



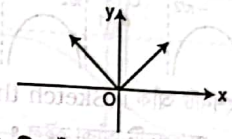
Part A : Brief / Quiz Questions with Answers
[বিভাগ ক ঃ উত্তরসহ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন]

1.C.1. ফাংশনের লেখচিত্র অংকন বলিতে কি বোঝায়? (What is mean by drawing a graph of a function?)

Ans : কোনো সমতলে কোনো ফাংশনকে জ্যামিতিকভাবে স্থাপন করা গেলে ঐ ফাংশনকে দেখা যায় বা চেনা যায়। ফাংশনের জ্যামিতিকভাবে এই স্থাপনকে ফাংশনের লেখচিত্র অংকন করা হইয়াছে বলা হয়।

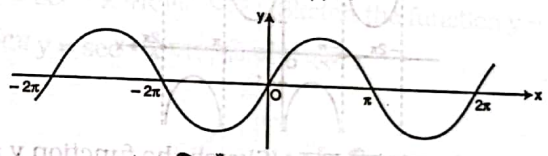
1.C.2. সাংখিক মানের ফাংশন $y = |x|$ এর লেখচিত্র আঁক। (Sketch the graph of absolute value function $y = |x|$.) **[NUH(NM)–2017]**

Ans : $y = |x|$ এর লেখচিত্র নিম্নে আঁকা হইল ঃ



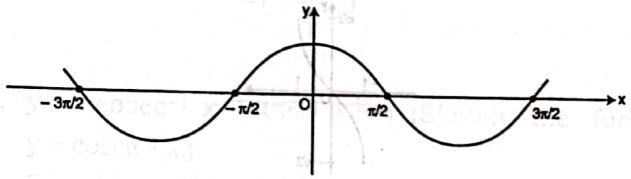
1.C.3. $y = \sin x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \sin x$.)

Ans : নিম্নে $y = \sin x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



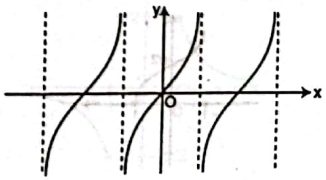
1.C.4. $y = \cos x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \cos x$.)

Ans : নিম্নের $y = \cos x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



1.C.5. $y = \tan x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \tan x$.)

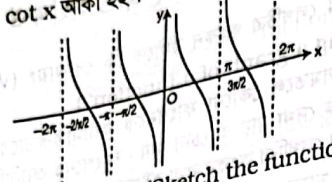
Ans : নিম্নে $y = \tan x$ অংকন করা হইল ঃ



CamScanner

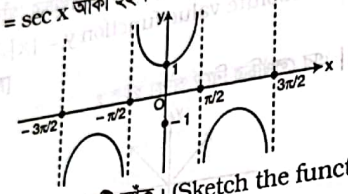
1.C.6. $y = \cot x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \cot x$.)

Ans : নিম্নে $y = \cot x$ আঁকা হইল ঃ



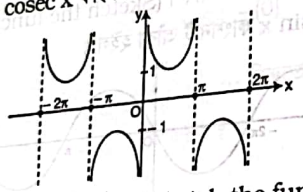
1.C.7. $y = \sec x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \sec x$.)

Ans : নিম্নে $y = \sec x$ আঁকা হইল ঃ



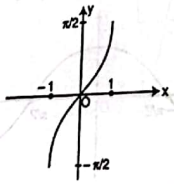
1.C.8. $y = \operatorname{cosec} x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \operatorname{cosec} x$.)

Ans : নিম্নের $y = \operatorname{cosec} x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



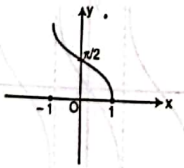
1.C.9. $y = \sin^{-1} x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \sin^{-1} x$.)

Ans : নিম্নে $y = \sin^{-1} x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



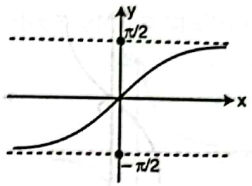
1.C.10. $y = \cos^{-1} x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \cos^{-1} x$.)

Ans : নিম্নের $y = \cos^{-1} x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



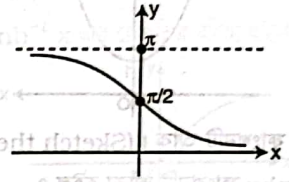
1.C.11. $y = \tan^{-1} x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \tan^{-1} x$.)

Ans : নিম্নে $y = \tan^{-1} x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



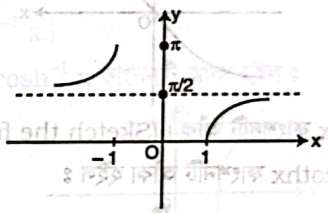
1.C.12. $y = \cot^{-1} x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the functions $y = \cot^{-1} x$.)

Ans : নিম্নে $y = \cot^{-1} x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



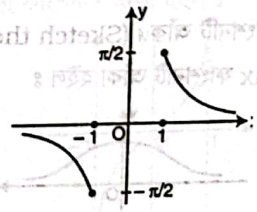
1.C.13. $y = \sec^{-1} x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \sec^{-1} x$.)

Ans : নিম্নে $y = \sec^{-1} x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



1.C.14. $y = \operatorname{cosec}^{-1} x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \operatorname{cosec}^{-1} x$.)

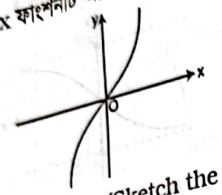
Ans : নিম্নে $y = \operatorname{cosec}^{-1} x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



CamScanner

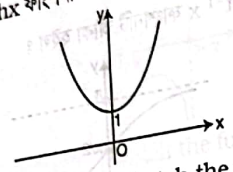
1.C.15. sinhx ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function y = sinhx.)

Ans : নিম্নে y = sinhx ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



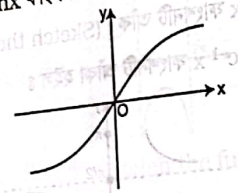
1.C.16. y = coshx ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function y = coshx.)

Ans : নিম্নে y = coshx ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



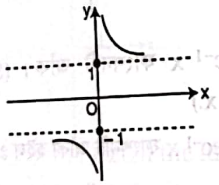
1.C.17. y = tanhx ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function y = tanhx.)

Ans : নিম্নে y = tanhx ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



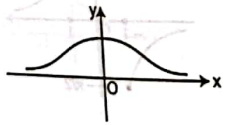
1.C.18. y = cothx ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function y = cothx.)

Ans : নিম্নে y = cothx ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



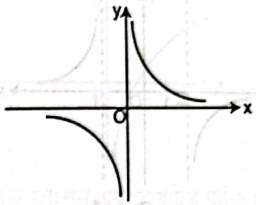
1.C.19. y = sechx ফাংশনটি আঁক। (Sketch the functions y = sechx.)

Ans : নিম্নে y = sechx ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



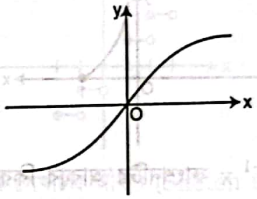
1.C.20. y = cosechx ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function y = cosechx.)

Ans : নিম্নে y = cosechx ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



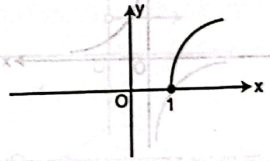
1.C.21. $y = \sinh^{-1} x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \sinh^{-1} x$.)

Ans : নিম্নে $y = \sinh^{-1} x$ এর লেখচিত্র আঁকা হইল ঃ



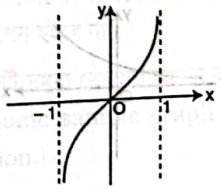
1.C.22. $y = \cosh^{-1} x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \cosh^{-1} x$.)

Ans : নিম্নে $y = \cosh^{-1} x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



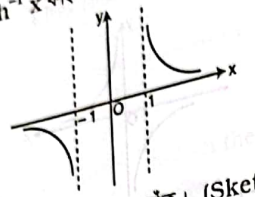
1.C.23. $y = \tanh^{-1} x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \tanh^{-1} x$.)

Ans : $y = \tanh^{-1} x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



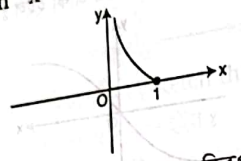
1.C.24. $y = \coth^{-1} x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \coth^{-1}x$.)

Ans : নিম্নে $y = \coth^{-1} x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



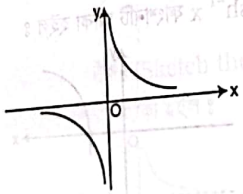
1.C.25. $y = \text{sech}^{-1} x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \text{sech}^{-1} x$.)

Ans : নিম্নে $y = \text{sech}^{-1} x$ ফাংশনটি আঁকা হইলে ঃ



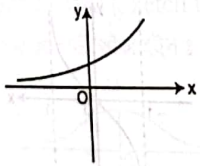
1.C.26. $y = \text{cosech}^{-1} x$ ফাংশনটির আকার কিরূপ হইবে? (What is the shape of the function $y = \text{cosech}^{-1} x$?)

Ans : $y = \text{cosech}^{-1} x$ ফাংশনটির আকার নিম্নরূপ হইবে ঃ



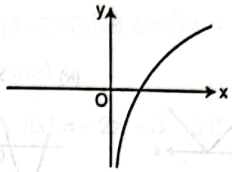
1.C.27. $y = a^x, a > 1$ সূচকীয় ফাংশনটি আঁক। (Sketch the exponential function $y = a^x, a > 1$.)

Ans : $y = a^x, a > 1$ সূচকীয় ফাংশনটি নিম্নে আঁকা হইল ঃ



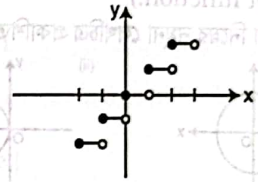
1.C.28. $y = \log_a x, a > 1$ লগারিদিমিক ফাংশনটি অংকন কর। (Sketeh the logarithmic functon $y = \log_a x, a > 1$.)

Ans : $y = \log_a x, a > 1$ লগারিদিমিক ফাংশনটি নিম্নে অংকন করা হইল ঃ



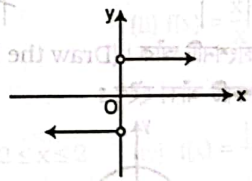
1.C.29. সর্বোচ্চ পূর্ণ সাংখ্যিক ফাংশন এর লেখচিত্র আঁক। (Sketch the graph of greatest integer function.)

Ans : সর্বোচ্চ পূর্ণ সাংখ্যিক ফাংশন নিম্নে আঁকা হইল ঃ



1.C.30. সিগনাম ফাংশনের লেখচিত্র আঁক। (Sketeh the graph of signum function.)

Ans : সিগনাম ফাংশনের লেখচিত্র নিম্নে আঁকা হইল ঃ



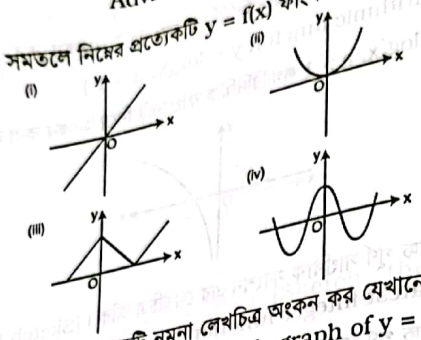
1.C.31. $y = f(x)$ এর লেখচিত্র হইতে ফাংশনের ধারণা দাও। (Give the concept of function from graph of $y = f(x)$.)

Ans : xy সমতলে $y = f(x)$ এর লেখচিত্র y অক্ষের সমান্তরাল হইলে অথবা y অক্ষের সমান্তরাল কোনো সরলরেখা লেখচিত্রকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিলে $y = f(x)$ ফাংশন হইবে না।

1.C.32. $y = f(x)$ এর কয়েকটি নমুনা লেখচিত্র অংকন কর যেখানে $y = f(x)$ ফাংশন হয়। (Drawing some sample graph of $y = f(x)$ such that $y = f(x)$ is function.)

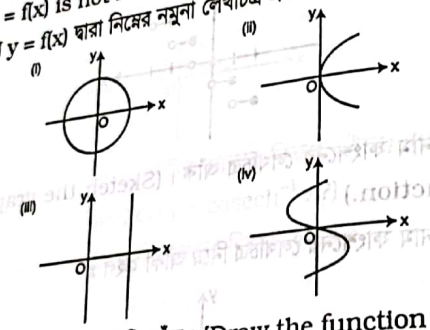
CamScanner

Ans : xy সমতলে নিম্নের প্রত্যেকটি y = f(x) ফাংশনের নমুনা লেখচিত্র ঃ



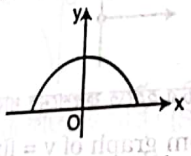
1.C.33. y = f(x) এর কয়েকটি নমুনা লেখচিত্র অংকন কর যেখানে y = f(x) ফাংশন না হয়। (Drawing some sample graph of y = f(x) such that y = f(x) is not function.)

Ans : যে y = f(x) দ্বারা নিম্নের নমুনা লেখচিত্র প্রকাশিত হয় উহারা ফাংশন নয়।



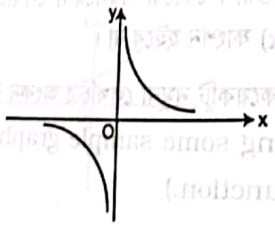
1.C.34. $y = \sqrt{1 - x^2}$ ফাংশনটি আঁক। [Draw the function $y = \sqrt{1 - x^2}$.]

Ans : নিম্নের প্রদত্ত ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



1.C.35. $y = \frac{1}{x}$ ফাংশনটি অংকন কর। [Draw the function $y = \frac{1}{x}$.]

Ans : নিম্নের প্রদত্ত ফাংশনটি অংকন করা হইল ঃ



EXERCISE–1(C)

Part–B : Short Questions [বিভাগ খ ঃ সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন]

1. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির প্রত্যেকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর (Draw each of the following functions) :

(i) $f(x) = 3x + 8$ (ii) $f(x) = -2x + 3$ (iii) $f(x) = x + 5, 0 \le x \le 2$

(iv) $f(x) = \sqrt{x}$ **[NUH–02, 04]** (v) $f(x) = a^x\ (a > 0)$ **[NUH–02, 04]**

(vi) $f(x) = e^{-x^2}$ **[NUH–04]**

(vii) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$ **[NUH(NM)–07, DUH–2012]**

(viii) $f(x) = \sqrt{x - 5} + 1$ **[NUH(NM)–2008]**

(ix) $f(x) = |x|$ **[BSc(Pass)–2008]**

(x) $f(x) = |x|^2 - 2|x|$ **[NUH(NM)–2006]**

2. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির প্রত্যেকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। (Draw each of the following functions and find domain and range.)

(i) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ (ii) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ যখন $x \ne -1$

$= -2$ যখন $x = -1$

(iii) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}, -2 \le x \le 2$ (iv) $f(x) = \frac{|x - 2|}{x - 2}$ **[NUH(NM)–07]**

3. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর এবং লেখচিত্র অঙ্কন কর [Find domain and range of the following functions and draw the graph.]

(i) $f(x) = 2x^2$ (ii) $f(x) = x^2 - 1$ (iii) $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}, \ 0 \le x \le \infty$

4. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির প্রত্যেকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর [Draw each of the following functions] :

(i) $f(x) = -|x - 1|$ (ii) $f(x) = -|x| + 1$ (iii) $f(x) = |x - 3|, 3 < x < \infty$

CamScanner

5. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির প্রত্যেকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর [Draw each of the following functions and find domain and range.]

(i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x < 0 \\ 2 & \text{যখন } x = 0 \\ 3 & \text{যখন } x > 0 \end{cases}$ উত্তর : $D_f = R$; $R_f = \{1, 2, 3\}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{যখন } x < -2 \\ 0 & \text{যখন } -2 \le x < 2 \\ 1 & \text{যখন } x \ge 2 \end{cases}$ উত্তর : $D_f = R$; $R_f = \{-1, 0, 1\}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{যখন } x < 0 \\ 2 & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \\ 2 & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$ উত্তর : $D_f = R$; $R_f = \{2\}$

6. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির প্রত্যেকটির ডোমেন এবং রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর [Draw each of the following functions and find domain and range.]

(i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন } 0 \le x < 2 \\ 2 & \text{যখন } 2 \le x \le 3 \end{cases}$ উত্তর : $D_f = [0, 3]$; $R_f = \{1, 2\}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{যখন } x < 0 \\ 2 & \text{যখন } 0 < x \end{cases}$ উত্তর : $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $R_f = \{-2, 2\}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{যখন } x \ge 2 \\ 1 & \text{যখন } -2 < x < 2 \\ 0 & \text{যখন } x \le -2 \end{cases}$ উত্তর : $D_f = R$; $R_f = \{0, 1\}$

7. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির প্রত্যেকটির ডোমেন এবং রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর [Draw each of the following functions and find domain and range.]

(i) $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } x > 2 \\ 1 & \text{যখন } 0 < x < 2 \\ -x & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$ উত্তর : $D_f = R - \{0, 2\}$; $R_f = (0, \infty)$

(ii) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{যখন } x < -1 \\ 2 & \text{যখন } -1 \le x \le 1 \\ 2x & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$ উত্তর : $D_f = R$, $R_f = R - (-2, 2)$

(iii) $f(x) = \begin{cases} -3x & \text{যখন } x \le 0 \\ 0 & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 3x & \text{যখন } 1 \le x \end{cases}$ উত্তর : $D_f = R$, $R_f = [0, \infty)$

8. ডোমেন এবং রেঞ্জ উল্লেখসহ নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির প্রত্যেকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর [Draw each of the following functions and find domain and range.]

(i) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } x \ge 1 \\ 1 & \text{যখন } -1 < x < 1 \\ x^2 & \text{যখন } x \le -1 \end{cases}$ উত্তর : $D_f = R$ এবং $R_f = [1, \infty)$

(ii) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{যখন } x \ge 1 \\ x^2 & \text{যখন } -1 < x < 1 \\ -2x & \text{যখন } x \le -1 \end{cases}$ উত্তর : $D_f = R$; $R_f = [0, 1) \cup [2, \infty)$

(iii) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{যখন } x > 1 \\ x^2 & \text{যখন } -1 \le x \le 1 \\ x^2 - 1 & \text{যখন } x < -1 \end{cases}$ উত্তর : $D_f = R$; $R_f = [0, \infty)$

9. নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর [Draw each of the following functions and find domain and range.]

(i) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{যখন } 1 < x \le 2 \\ 5 & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \\ -x^2 + 5 & \text{যখন } -2 \le x < 0 \end{cases}$

উত্তর : $D_f = [-2, 2]$; $R_f = [1, 7]$; $R_f = [-4, -1) \cup \{3\} \cup [4, \infty)$

(ii) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{যখন } x < 0 \\ x^2 & \text{যখন } 0 \le x \le 2 \\ 1 & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$ **[NUH(NM)-2006]**

উত্তর : $D_f = R$; $R_f = (-\infty, 4]$

(iii) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{যখন } x < 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \\ x + 2 & \text{যখন } x > 0 \end{cases}$ **[NUH(NM)-2003]**

উত্তর : $D_f = R$; $R_f = \{-1\} \cup \{0\} \cup (2, \infty)$

(iv) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{যখন } x \ne 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ **[BSc(Pass)-2007]**

উত্তর : $D_f = R$; $R_f = \{-1, 0, 1\}$

CamScanner

Part–C : Broad Questions [বিভাগ গ ঃ বড় প্রশ্ন]

1. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির প্রত্যেকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর [Draw each of the following functions.]

(i) $f(x) = |x-1| + |x+3|$ **[NUH–2008]**

(ii) $f(x) = |x-1| + |x-3|$ **[NUH–2004]**

2. নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর [Draw each of the following functions and find domain and range.]

(i) $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } 1 \le x \le 2 \\ 2 & \text{যখন } -1 < x < 1 \\ x^2+1 & \text{যখন } -3 \le x \le -1 \end{cases}$ উত্তর ঃ $D_f = [-3, 2]$; $R_f = [1, 10]$

(ii) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } x \ge 2 \\ 3 & \text{যখন } -1 \le x < 2 \\ 5-x^2 & \text{যখন } -2 \le x < -1 \end{cases}$ উত্তর ঃ $D_f = [-2, \infty)$, $R_f = [1, \infty)$.