



جامعة حلب

كلية الهندسة الكهربائية واللكترونية
قسم التحكم الآلي والأتمتة الصناعية

التحكم بتجربة العربية والنواص المخبرية

إشراف :

د. باسم فارس د. أسعد كعдан

عمل الطالبان :

أحمد عبد الحى فارس كردي



ملخص عن البحث

هذا البحث يعرض نتائج تطبيق بعض منهجيات التحكم على تجربة العربية والنواص المخبرية، وذلك بنمط عمل Upright Stabilization، لموازنة النواص في الوضع العلوي متضمناً ما يلى:

1. دراسة النظام الفيزيائي للوصول إلى أقرب نموذج يحاكي النظام الحقيقي.
 2. دراسة استقرار النظام في الحلقة المفتوحة وإجراء التحليلات الزمنية والترددية.
 3. تصميم وتنفيذ متحكم تناصي-تكاملـي-تفاضـلي (PID) ومعايرته على النموذج اللاخطـي.
 4. تصميم منظم-تربيعي خطـي (LQR) وتطبيقه على النموذج اللاخطـي.
 5. تصميم مرشح أهـلي Kalman-Filter لتقدير متـدولـاتـ الـحالـةـ الغـيرـ مقـاسـةـ اـعـتمـادـاـ عـلـ قـيـاسـ مـوـضـعـ العـرـةـ فـقـطـ.
 6. تصميم متـحكمـ تـرـبعـيـ خـطـيـ غـوـصـيـ (LQG).
 7. المـقارـنةـ بـيـنـ المـتـركـعـاتـ وـتـلـخـيـصـ النـتـائـجـ.

استخدام المواد القابلة لالتحميل:

يوجد ملفات داعمة لهذه الأطروحة متوفرة على الإنترنت، وهي 54 مجلد، بمجموع 102 ملفاً، متعلقة بالتصميم والتحليل والمحاكاة لنظام التحكم المدمج، يمكن تحميلها من أحد الرابطين:

<https://github.com/FaresKordiHUSCARL/GraduationProject>

<https://github.com/Ahmad-Abdulhai/GraduationProject>

لستخدام ملفات.m و slx. وغيرها من الملفات الخاصة ببرنامج Matlab، يجب أن يملك القارئ Matlab & Simulink version R2015a أو أحدث منها.

تم إنشاء وختبار جميع الملفات على Windows10 وعلى نظام تشغيل Matlab & Simulink R2015a دون أي مشاكل تذكر.



الحمد لله حمد الشاكرين، وصلواته على سيد المرسلين، محمد النبي الأمي وآلـه الطاهرين وسلام تسليماً كثيراً، اللهم علمنا ما ينفعنا وانفعنا بما علمتنا وزدنا علماً ينفعنا، وانفع بنا، اللهم افتح بخير واختـم بـخـير واجعل عاقبة أمورنا والـمسـلمـين إلى خـير.

يأتي مشروعـنا هذا كـحتـيلـة لما تم تـشـرـرـه وـحـصـادـه من عـلـومـ مـخـتـلـفـةـ عـلـىـ مـدارـ خـمـسـ سـنـوـاتـ منـ نـوـابـخـ ومـبـدـعـيـ كلـيـةـ الـهـنـدـسـةـ الـكـهـرـبـائـيـةـ وـالـإـلـكـتـرـوـنيـةـ فـيـ جـامـعـةـ حـلـبـ.ـ ويـشـرـفـنـاـ أـنـ نـبـدـأـ هـذـاـ عـلـمـ بـكـلـمـاتـ الشـكـرـ وـالـامـتـنـانـ لـجـمـيعـ الـمـعـلـمـينـ وـالـمـهـنـدـسـينـ وـالـأـصـدـقـاءـ الـذـيـنـ سـاـهـمـواـ فـيـ بـنـاءـ رـحـلـتـنـاـ التـعـلـيمـيـةـ وـالـعـمـلـيـةـ،ـ إـذـ كـانـوـ دـائـمـاـ مـصـدـرـ إـلـهـامـ وـإـرـشـادـ وـنـخـصـ بـالـذـكـرـ مـنـهـمـ:

د.محمد أسعد كعдан

د. باسم فارس

د.عبد القادر جوخدار

د. عماد الروح

م.زكي حمامـةـ

م. داليا قـسـ حـنـاـ

م.أيـهمـ القـاسـمـ

م.أـحمدـ تـسـقـيـةـ

د. عـلـىـ جـزـمـاتـيـ

م. عـروـبـةـ قـرـمـوـطـهـ

أـعـبـدـ الرـحـمـنـ بـالـقـلـ

م. فـخرـ الدـيـنـ عـبـدـ الـقـادـرـ

وأعرب شـكريـ لـهـ عـلـىـ العـائـلـةـ نـعـمـةـ،ـ إـذـ لـاـ شـكـ أـنـ الـفـضـلـ الـأـكـبـرـ يـعـودـ إـلـىـ وـالـدـيـنـ،ـ وـأـهـلـنـاـ الـذـيـنـ ضـحـواـ مـنـ أـجـلـنـاـ وـكـانـوـ عـوـنـاـ لـنـاـ فـيـ جـمـيعـ مـرـاحـلـ هـذـاـ عـلـمـ،ـ لـقـدـ كـنـتـمـ مـصـدـرـ قـوـتـنـاـ وـرـكـائـزـ ثـبـاتـنـاـ،ـ وـمـاـ كـانـ لـنـاـ هـذـاـ دـوـنـ دـعـمـكـمـ وـتـشـجـيـعـكـمـ،ـ إـنـ شـكـرـنـاـ لـنـ يـوـفـيـكـمـ،ـ حـقـاـ سـعـيـتـمـ فـكـانـ السـعـيـ مـشـكـوـرـاـ،ـ وـسـبـقـىـ مـمـتـيـنـ لـكـمـ مـاـ دـامـتـ السـمـاـوـاتـ وـالـأـرـضـ.

فهرس المحتويات

8	مقدمة
8	1. نظرة عامة:
8	2. أنماط تشغيل تجربة العربية والنواص وتطبيقاتها:
10	3. خطوات تصميم نظام التحكم:
11	الفصل الثاني
11	مكونات تجربة العربية والنواص المذكورة
11	1. نظرة عامة:
12	2. المكونات العادي للتجربة:
16	3. المكونات البرمجية للتجربة:
18	4. ضبط إعدادات المحاكاة وتشغيل التجربة.
24	الفصل الثالث
24	النموذج الرياضية وتعريف النظام
24	1. نظرة عامة:
25	2. النموذج الرياضي:
28	1. استنتاج معادلات الحالة من معادلات الحركة للنظام:
30	2. استنتاج احتكاك العربية (Cart friction)
34	3. استنتاج عزم العطالة (Moment of inertia)
35	4. محاكاة نموذج النظام: Simulink
38	3. تعريف البارامترات الفيزيائية للنظام:
41	4. التقرير الخطي لنظام العربية والنواص:
41	1. استنتاجتابع النقل لنظام العربية والنواص:
44	2. تمثيل النموذج الخطي لنظام العربية والنواص في فراغ الحالة:
49	5. النموذج في المجال الزمني المقطعي (Discrete-time model)
53	6. نمذجة الدسارات والمشغلات:

58.....	7. طرق مختلفة للنمذجة الرياضية:
62.....	الفصل الرابع
62.....	تحليل النظام في المجالين الزمني والتردد़ي
62.....	1. نظرة عامة:
64.....	2. المجال الزمني:
65.....	1. النظام من المرتبة الأولى:
67.....	2. النظام من المرتبة الثانية:
70.....	3. خواص الاستجابة لتابع القفزة الواحدية:
73.....	2. المجال التردد़ي:
73.....	1. مخطط بود أو المنحني اللوغاريتمي Bode:
75.....	2. مخطط نايكوبيست أو المنحني القطبي Nyquist:
77.....	3. هامش الربح والصفحة:
79.....	3. تحليل النموذج الخطى لتجربة العربة والنواص:
84.....	الفصل الخامس
84.....	منهجيات تصميم المتحكم
84.....	1. نظرة عامة:
85.....	2. المتحكم النساسي التكاملي التفاضلي PID:
85.....	1. بنية متحكم PID:
88.....	2. تصميم وتوليف متحكم PID لنظام العربة والنواص:
94.....	3. التنفيذ العملى لمتحكم PID على تجربة العربة والنواص:
96.....	3. المتحكم الغوصى التربيعى الخطى LQG:
96.....	1. مفاهيم أساسية في مسألة التحكم الأمثل:
99.....	2. المنظم التربيعى الخطى LQR:
116.....	3. المُقدّر التربيعى الخطى LQE (Kalman Filter)
131.....	ملخص النتائج والآفاق المستقبلية

131	1. نظرة عامة:
132	2. ملخص النتائج:
133	3. الآفاق المستقبلية والتوصيات:
134	المراجع

مقدمة

1. نظرة عامة:

يؤتم علم التحكم الذي بدراسة خواص الأنظمة الميكانيكية والكهربائية والكهروميكانيكية والحرارية والكيميائية وغيرها من الأنظمة العملية وذلك لمعرفة سلوك هذه النظم بحيث يمكن توقع استجابتها بالنسبة لإشارات دخل مختلفة وتعديل سلوكها عن طريق متحكم أو منظم يغير من خواص هذه الأنظمة بحيث تصبح استجابتها قريبة من الاستجابة المرغوبة.

بعد نظام العربية والنواص مثلاً شائعاً في كتب أنظمة التحكم والأبحاث العلمية ويستخدم كتجربة مخبرية في الكثير من الجامعات وهو حقل تجارب لتطبيق العديد من منهجيات التحكم.

التجربة المدروسة هي نظام ذو درجة حرارة، يتكون من عربة مقادمة بواسطة مدرك، وهي تتحرك حرقة انسحابيه على طول سكة أفقية، مثبت عليها نواص من أحد طرفيه يدور بشكل حر على محوره. تأتي أهمية تجربة النواص المقلوب من كونه غير مستقر في حلقة المفتوحة، أي أن النواس ببساطة سوف يجنح عن وضع الاستقرار القلق في حال لم تدرك العربة لموازنته، بالإضافة إلى أن ديناميک النظام لا خطى، وظيفة نظام التحكم هي أن يوازن النواس المقلوب وذلك بتطبيق قوة على العربة.

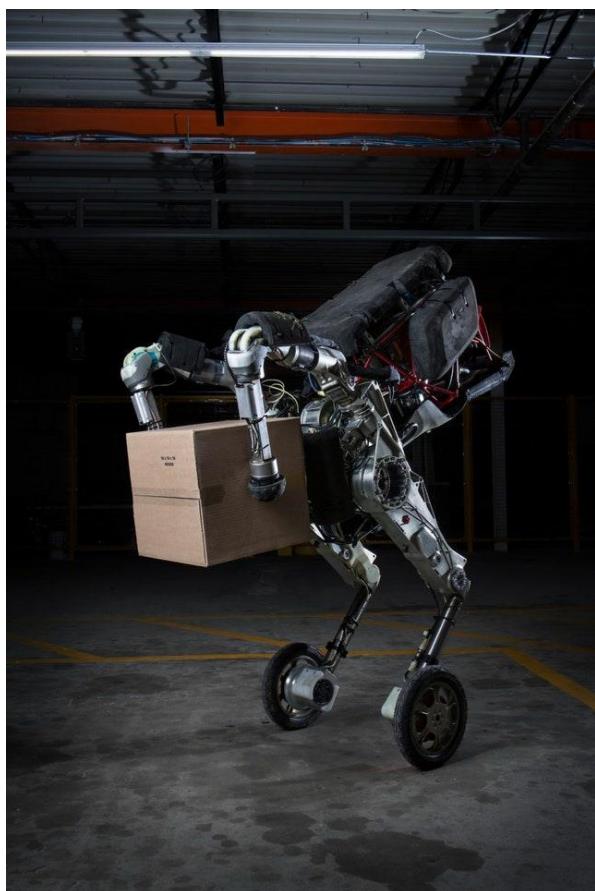
2. أنماط تشغيل تجربة العربية والنواص وتطبيقاتها:

طرق تشغيل النواس يمكن أن تقسم إلى قسمين، الأولى هي مشكلة التحكم بالرافعة (Crane-control)، والهدف منها هو تدريب الرافعة إلى الموضع المرغوب مع أقل اهتزاز ممكن على العمل (ذراع النواس)، والأخرى هي اتزان النواس المقلوب في الموضع العلوي، منهجية التحكم بالرافعة مطروقة جداً في التطبيقات الصناعية حيث أن حركة الحمل مهمة بسبب وزنه في بعض التطبيقات ولحساسيته في تطبيقات أخرى، ولهذه المهمة صعوبة خاصة عندما تكون الروافع مثبتة على السفن وهنا يجب أن يؤخذ تأثير الأمواج بعين الاعتبار.

الثانية هي مهمة النواس المقلوب (Inverted-pendulum) وذلك للتحكم بالازان الذاتي، والتي تعرض في إطلاق الصاروخ، الروبوتات ذاتية التوازن، وتطبيقات التحكم، علاوة على ذلك، تتضمن تطبيقات النواس التأرجح للأعلى (Swing-up) والتي تتصف بأن يتآرجح النواس بشكل حر للوصول إلى الموضع الشاقولي العلوي.

يوجد بين الطريقتين السابقتين لتشغيل التجربة فرق جوهري، يكمن في الاستقرار. تجربة الرافعه مستقرة بدون تطبيق متحكم، بسبب خسارة الطاقة بالاحتكاك ومقاومة الهواء مما يؤدي دائمًا إلى أن ينتهي الأمر بالنواص في نقطة التزان في الأسفل، بينما تجربة النواص المقلوب غير مستقرة بشكل عام في الحلقة المفتوحة، عندما ترك بدون متحكم لن يكون النواص قادرًا على البقاء في الأعلى.

بعض التطبيقات الواقعية لتجربة العربة والنواص



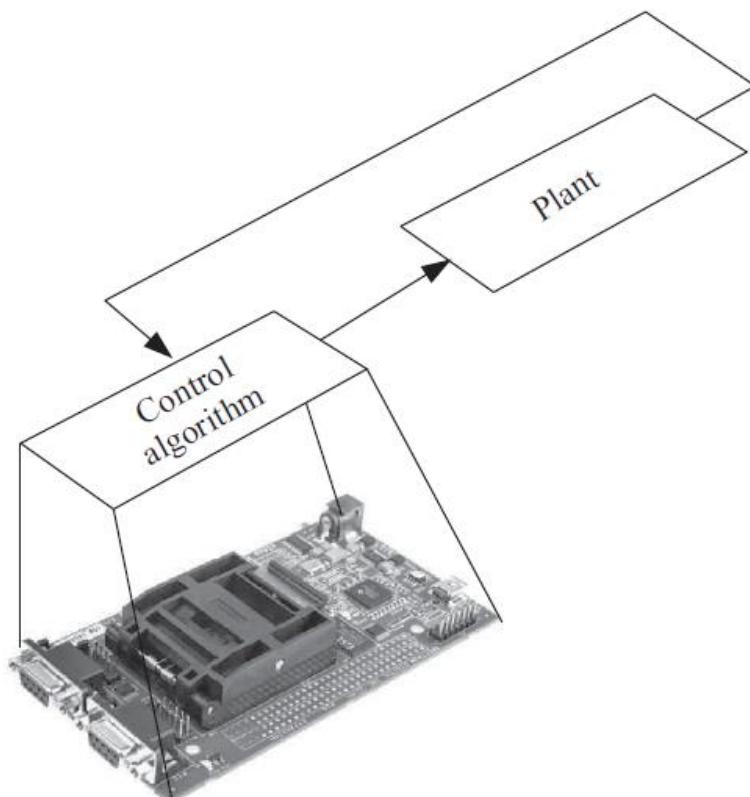
3. خطوات تصميم نظام التحكم:

كل نظام كهربائي أو ميكانيكي يحتوي خوارزمية تحكم، تُشغل بشكل أساسي على معالج رقمي، يدعى "النظام المدمج". نظام التحكم المدمج هو النظام الذي تطبق عليه الخوارزمية لإجراء التحكم في الزمن الحقيقي باستخدام التغذية العكسية، وهو يعرض الرابط بين التكنولوجيا الرقمية الحديثة ونظريات التحكم.

غالبية أنظمة التحكم المعاصرة تطبق بشكل أساسي على معالجات مصغرة (Microcontrollers) وهي أجهزة حساسية تملك الأجزاء الوظيفية التالية (معالج مركزي، ذاكرة، أجهزة دخل\خرج، ومعمرات ملائمة) مجمعة في شريحة واحدة.

تقسم مراحل تصميم نظام التحكم المدمج إلى ثلاثة خطوات أساسية:

- .1. تصميم المتحكم المدمج.
- .2. محاكاة منهجية التحكم.
- .3. التطبيق العملي.



الفصل الثاني

مكونات تجربة العربة والنواس المدبرية

1. نظرة عامة:

تحتوي تجربة العربة والنواس: عربة تتحرك على سكة بطول متز واحد، للعربة محور مثبت عليه النواس وهو قابل للدوران بشكل حر، يمكن للعربة أن تدرك للأمام والخلف مسبباً تأرجح النواس.

تأتي حركة العربة من سحب الحزام باتجاهين بواسطة محرك تيار مستمر مثبت في نهاية السكة، بتطبيق جهد على المحرك تتحكم بالقوة والاتجاه الذي تسحب به العربة، قيمة القوة المطبقة تعتمد على جهد التحكم، الجهد هنا هو إشارة التحكم، المتغيرين الذين تم قراءتهم من التجربة (باستخدام Optical - encoders) هما موضع النواس (زاوية) وموضع العربة على السكة، مهمة المتتحكم هنا هي تغيير جهد المحرك اعتماداً على هذين المتغيرين، وذلك لتحقيق متطلبات التحكم.

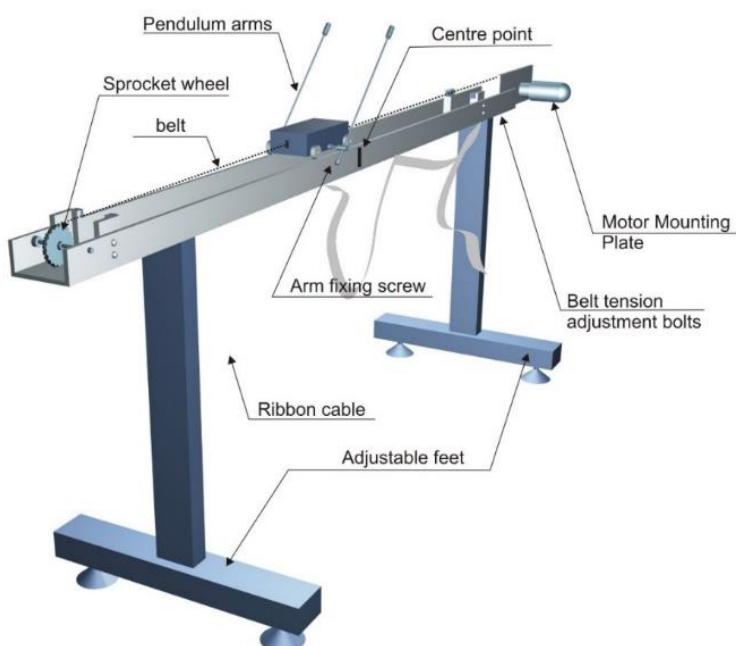
تكون التجربة من أربع عناصر رئيسية:

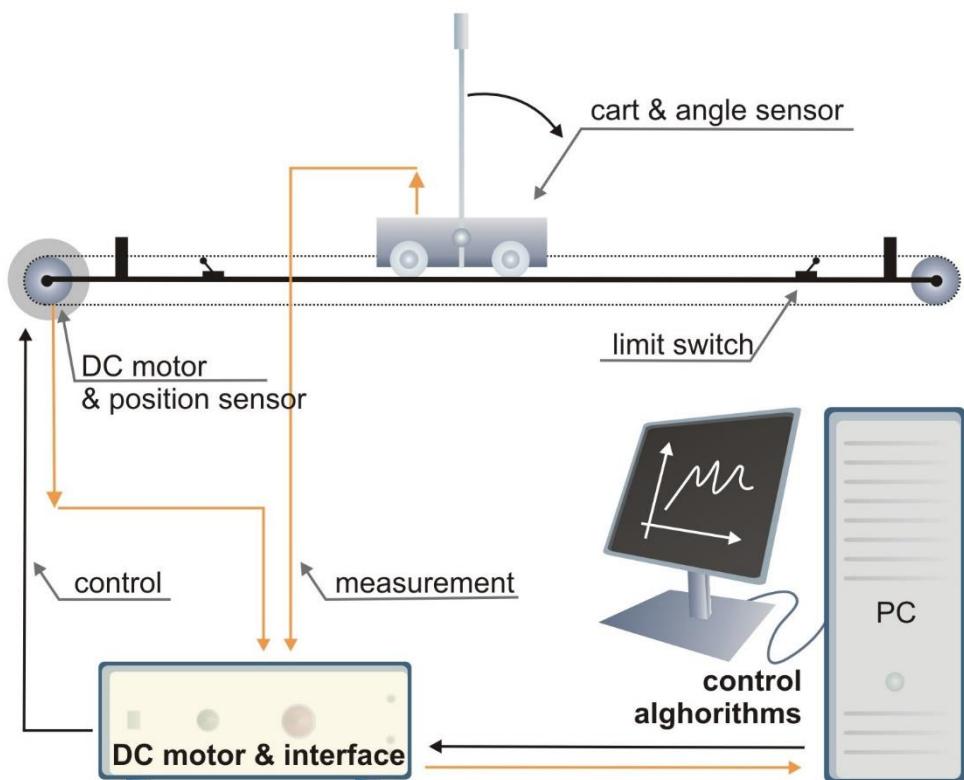
1. حاسب التجربة مع كرت الملائمة (PCI1711).

2. المجموعة الفيزيائية للعربة والنواس.

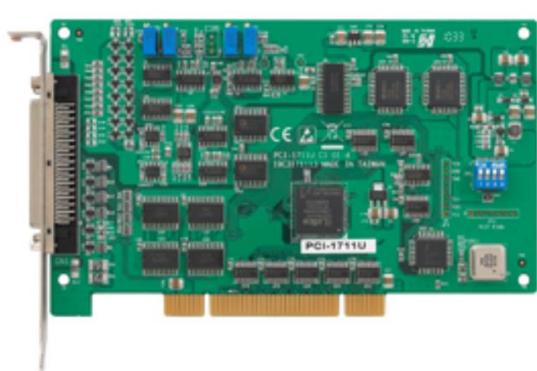
3. وحدة التغذية.

4. خوارزمية التحكم.



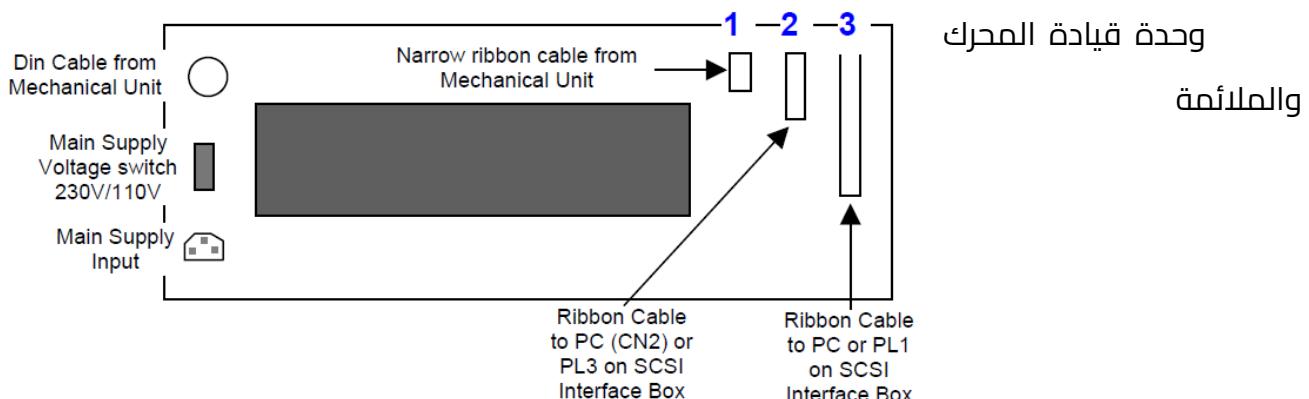


2. المكونات المادية للتجربة:

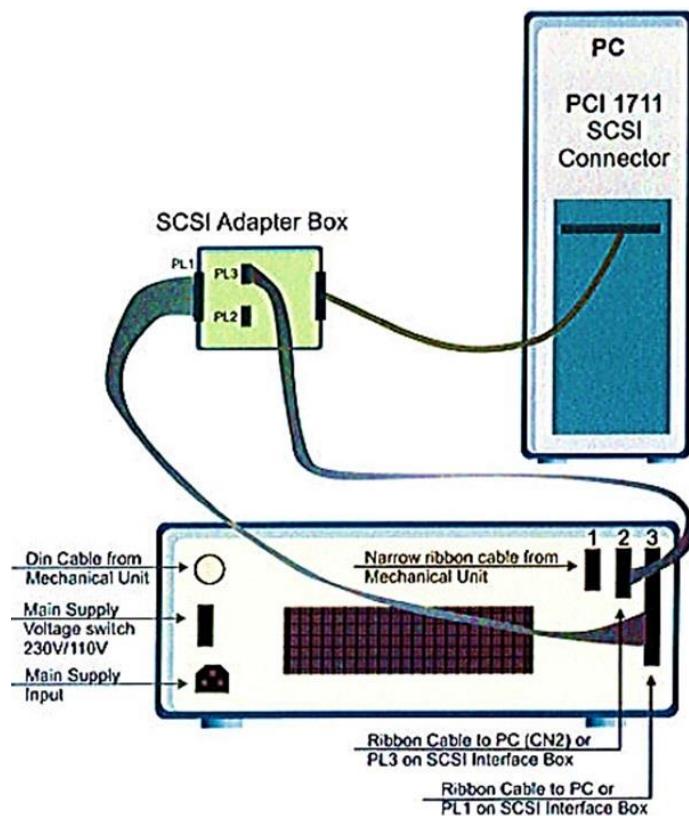


ا. حاسب التجربة مع كرت الملائمة (Advantech_PCI1711_card) والذي يحتوي على شريحة FPGA، ويطلب مكان تركيب للكرت على Motherboard، شريحة هي توظف للملائمة بين الحاسب والبيئة الخارجية.

بـ. وحدة الملائمة (SCSI Adapter box)، وأسلك التوصيل (ribbon cable)، مع وحدة التغذية.



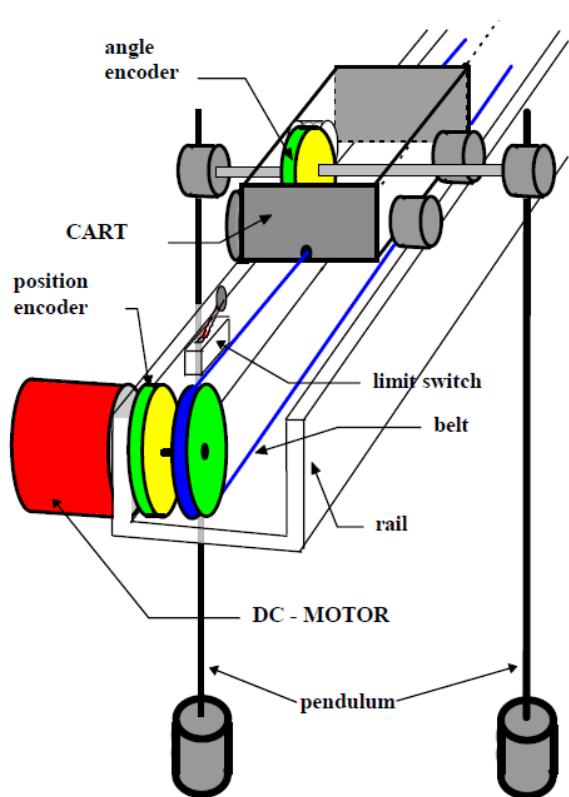
يمكن توصيل بورت PCI بوحدة القيادة تبعاً للمخطط.



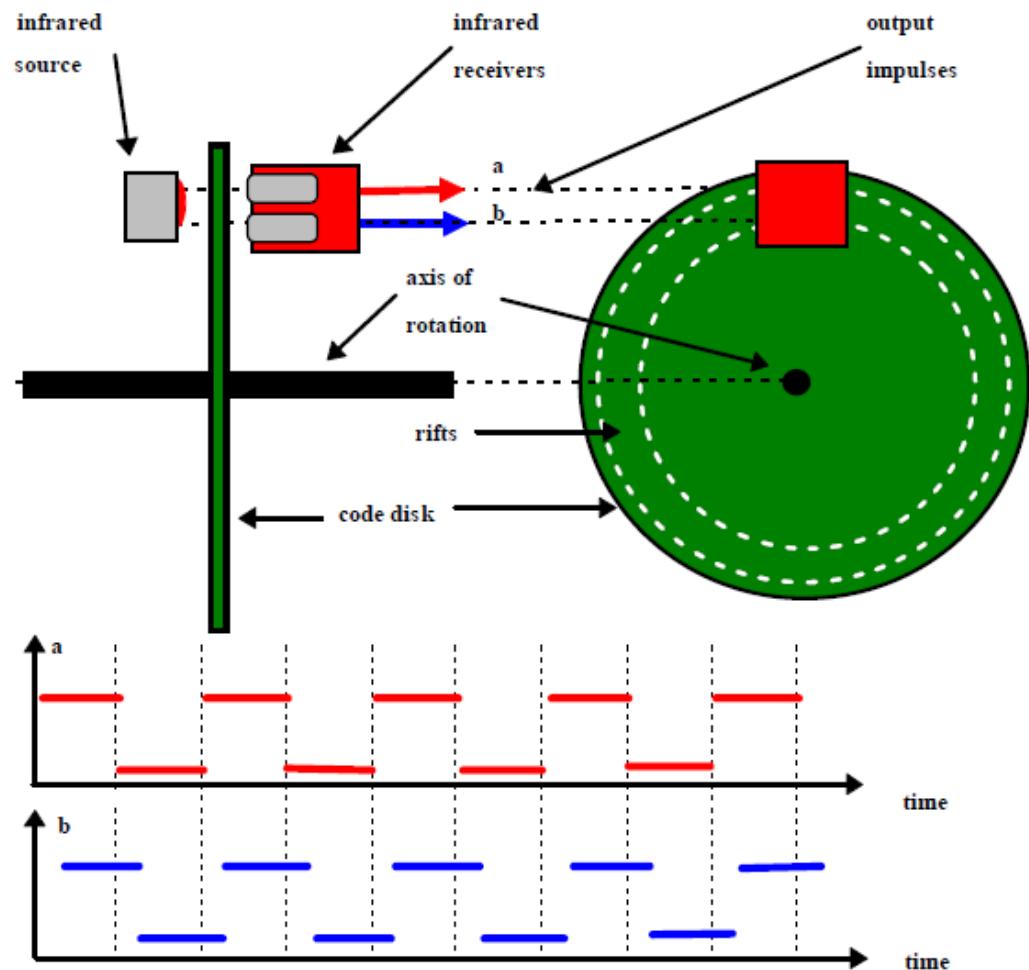
III. المجموعة الفيزيائية للعربة والنواس:

يسين الشكل الجزء الميكانيكي والحساسات لنظام العربة والنواس.

يحتوي نظام العربة والنواس على حساسات لقياس موضع العربة وزاوية النواس.



إن آلية تحديد اتجاه الدوران في Optical_encoder تعمل وفق الآلية التالية:
 ينفذ الضوء من منبعين (A, B) خلال حلقتين من الثقوب على القرص، ويبلغ عددهما 512 ثقب في كل حلقة، هذه الثقوب يوجد بينها إزاحة في الطور، لذا فإن الخرج الكهربائي من المستقبلات الضوئية يكون عبارة عن موجات مرتعنة مع ازياح في الطور، هذا الفرق في الطور يسمح بتحديد اتجاه الدوران.



إذا دار النواص دورة كاملة 2π هذا يقابل 512 ثقب على قرص الحساس، أي 2048 عدمة، وفي حالة العريضة، فعندما يدور المحرك دورة كاملة، تسير العريضة مسافة معينة يمكن حسابها بالعلقة:

$$\text{طول القوس المقابل للزاوية} = \frac{1}{2} \times \text{القطر} \times \text{الزاوية}$$

$$S = r * \varphi$$

نعلم بالقياس أن نصف قطر القرص المثبت على محور المدرك هو 2.48 cm ومنه فإن العربة تسير بمقدار $2\pi * 2.48 = 15.6 \text{ cm}$ بعد كل دورة مدرك، يمكن معرفة المسافة التي تسيرها العربة بطريقة أخرى، وذلك بلف خيط على قرص المدرك، ومن ثم قياس طول هذا الخيط.

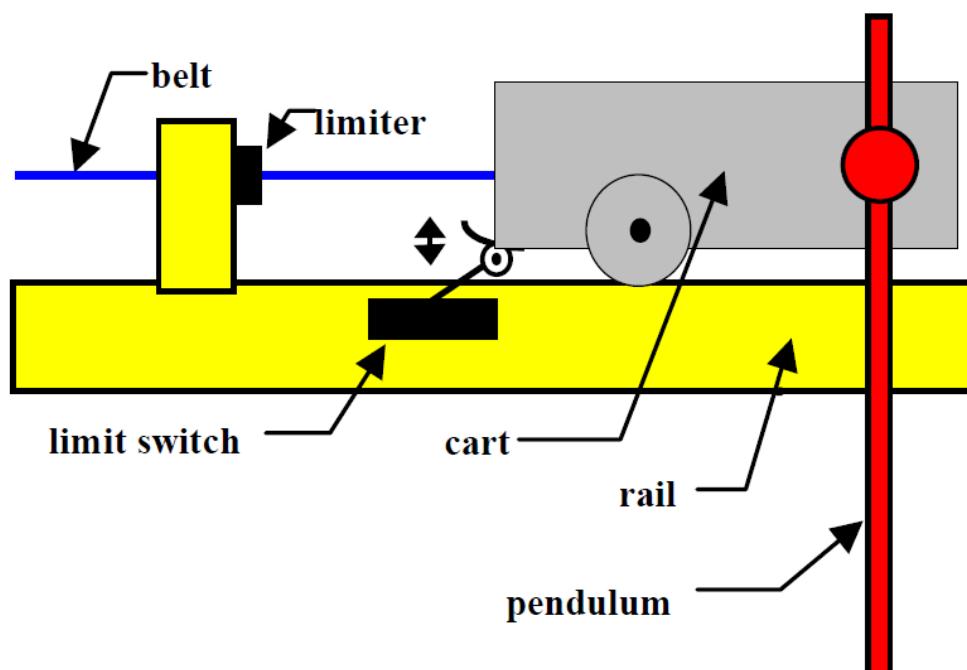
ملاحظة: عند استخدام Incremental_encoder، بعد كل تجربة يجب الانتباه لنقل العربة إلى مركز



السكة، وأن يتوقف النواس عن التأرجح، قبل البدء بتجربة أخرى، وذلك لإعادة ضبط الحساس على الموضع الصفرى.

تنقل إشارة التحكم من الحاسوب إلى المبدل الرقمي التشابهـي DAC الذي تمتلكه شريحة الملائمة PCI، خرج المبدل يوصل إلى دخل مضخم الطاقة (Power_Amplifier)، والذي يقود مدرك التيار المستمر (DC_Motor)، وحدة الملائمة للمشفر ومضخم الطاقة موجودة في صندوق التحكم للناسوس الرقمي، كما يزود الصندوق بمفتاحين: مفتاح الطاقة الأساسية (Start)، ومفتاح قطع التغذية عن المدرك (Stop).

في نهاية السكة توجد مفاتيح نهاية الشوط (Limit_Switches) التي تقوم بقطع الطاقة عن المدرك عندما تصل العربة إلى نهاية السكة.



يُعمل المدرك على جهد DC 24V وباستطاعة 52Watt قادر على أن يدور بسرعة 4,000 rpm، تتم تغذية هذا المدرك بثلاثة أسلاك (موجب، سالب، وأرضي). [\[PDF\]](#)

Ø 42 mm 22 to 52 Watts 52 W Part number 82850002



- Usable power : 20 to 50 W
- For high-power drive applications
- Sintered bronze bearings lubricated for life
- Power supply via 2 output leads
- Optional 1 or 2-channel encoder
- Optional EMC filter

3. المكونات البرمجية للتجربة:

لتشغيل تجربة العربية والنواص، وللقيام ببرنامجه التحكم في الزمن الحقيقي بشكل آلي، يتطلب ذلك أن تكون البرامج التالية مثبتة مسبقاً على الحاسوب: (جميعها تعمل في بيئة Windows)

MATLAB .1

Simulink .2

Control Tool box .3

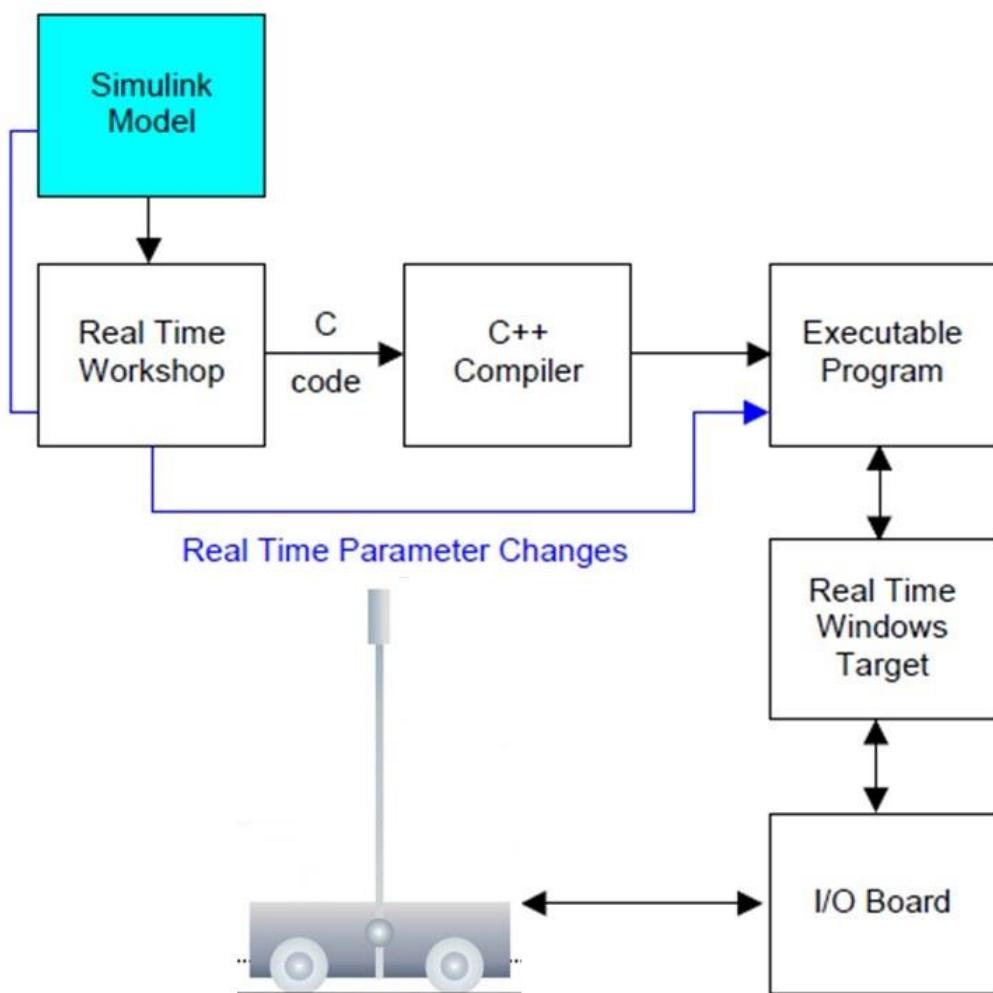
Real Time Workshop .4

Real Time Windows Target .5

Visual C++ Professional .6

Advantech PCI1711 drivers .7

- يعمل برنامج MATLAB كبيئة مستضيفة والتي تعمل فيها باقي منتجات شركة Mathworks, وهو يقدم مجموعة معقدة من الأدوات التي تحل المشكلات الرياضية.
- تطبيق Simulink هو بيئه برمجة رسومية لأغراض النمذجة والمحاكاة والتحكم، وهو يمرر النموذج للأداة .RTW
- يبني Simulink برنامج C++ المصدرى بشكل آلي من النموذج في .RTWT
- مترجم C++ يحول الكود الذى تم إنشاءه بواسطة RTW إلى برنامج تنفيذى executable، ثم ملائمة البرنامج مع البيئة الخارجية عن طريق
- يتصل Real Time Windows Target مع البرنامج التنفيذى والذى يعمل كبرنامج التحكم، ويتخاطب مع الأجهزة (العتاد الصلب) من خلال شريحة دخل/خرج، يتحكم RTWT بطريقين لتدفق البيانات، من وإلى النموذج (البرنامج التنفيذى)، من وإلى شريحة دخل/خرج (PCI).



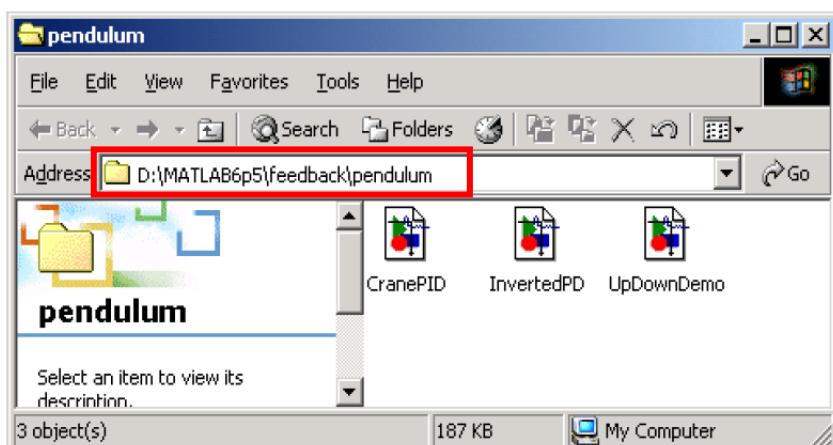
4. ضبط إعدادات المحاكاة وتشغيل التجربة:

بعد عملية تنصيب البرامج والتوصيل، لكي تقوم بتهيئة التجربة للعمل، يوجد أمثلة جاهزة هي نماذج مزودة من الشركة المصنعة، مخزنة في حاسب التجربة، مسارها الافتراضي:

(C:\MATLAB6p5\feedback\pendulum)

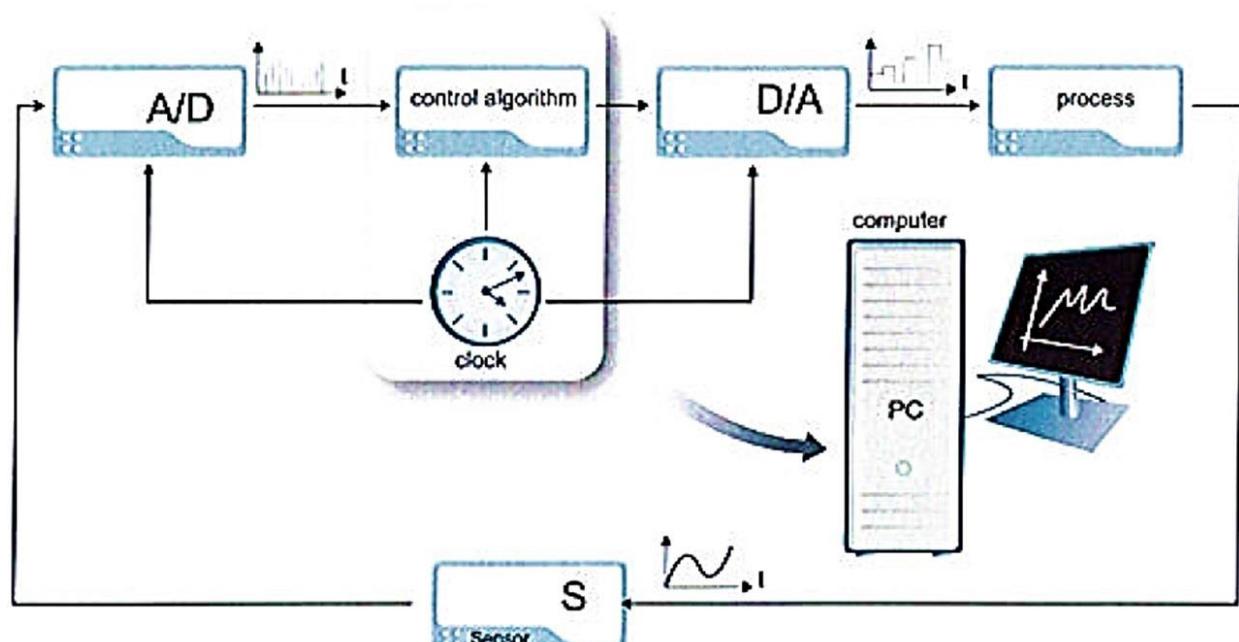
هذه النماذج يمكن تعديلها، حفظها، وتوليد البرامج منها، بالإضافة لوجود نسخة مرئية محفوظة من هذه الملفات (لا يمكن تعديلها)، تستخدم لاستعادة الملفات الأصلية عند الحاجة، مسارها الافتراضي:

(C:\MATLAB6p5\feedback\pendulum)



أسهل طريقة لاختبار النظام
حيث التركيب هي بتشغيل أحد
ملفات النماذج الأساسية.

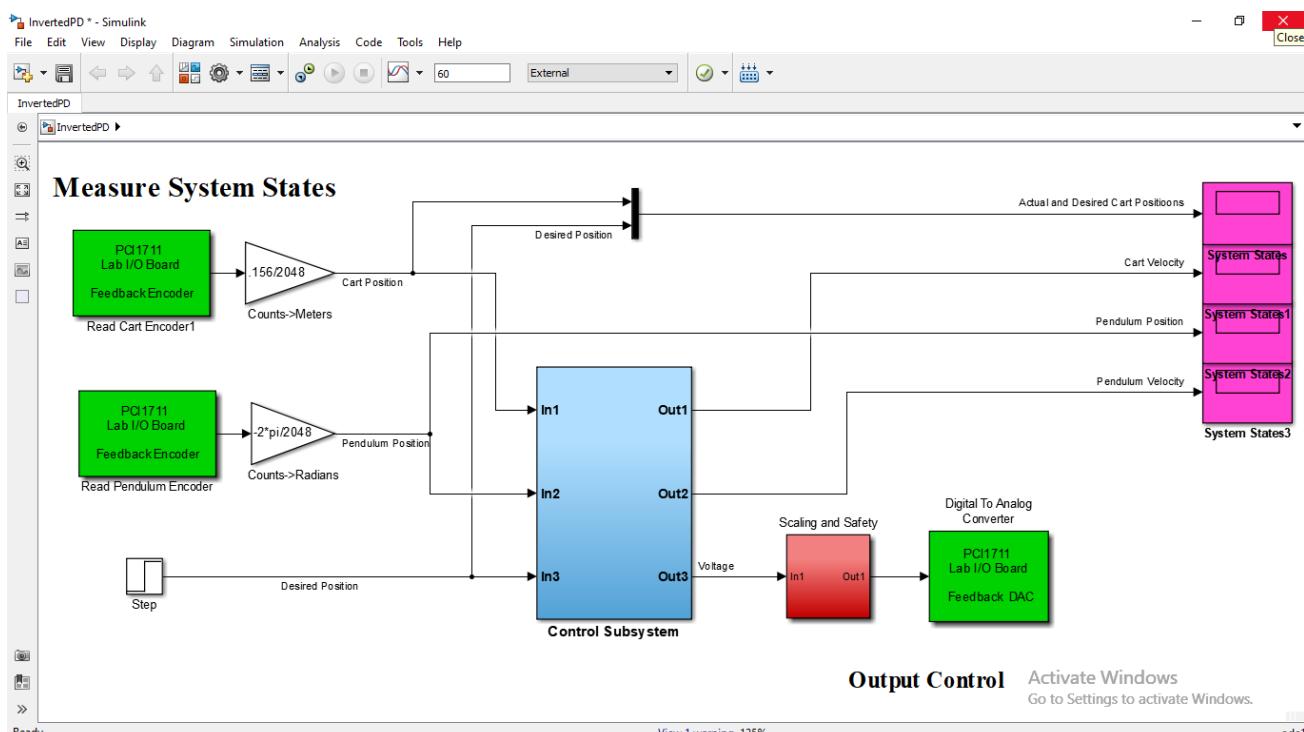
في النماذج المزودة من الشركة، إعدادات المحاكاة تكون مطبوعة مسبقاً، فإذا أردت إنشاء نماذج خاصة بك يجب استخدام نفس إعدادات المحاكاة، مثل ضبط خوارزمية الحل الرقمي وغيرها، لذلك من الأسهل تعديل أحد الملفات الجاهزة حسب المطلوب بدون تغيير إعدادات المحاكاة.



الحاسب مع شريحة Advantech PCI1711 وبيئة Matlab مع Simulink تمثل وحدة التحكم الرئيسية، إشارة التحكم عبارة عن جهد بين $DC \pm 2.5V$ ، تنتقل إلى صندوق المتحكم للنواص الرقمي، والذي يقود المحرك.

إشارات الحساسات لموضع العربة وزاوية النواص تنتقل إلى صندوق المتحكم للنواص الرقمي ومنه إلى الحاسب، حيث توجد جميع خوارزميات التحكم في بيئة Simulink.

تُزود بيئة Simulink نبضات الساعة لشريحة PCI، يوجد نمط خدمة المقاطعة Interrupt service routine (ISR) يتم استدعاؤه عندما ينتهي المبدل A/D من قراءة الإشارة المترقبة التي تمثل القياس العائد من الحساسات، وبناءً عليها تحسب الخوارزمية قيمة إشارة التحكم، في نهاية برنامج خدمة المقاطعة يتم تحديث قيمة إشارة التحكم وتذوبلها بواسطة المبدل D/A حيث يتم مسحها في خطوة أخذ العينات التالية.



يشير الصندوق الأحمر إلى عملية دخول/خروج، والصندوق الأحمر يشير إلى شروط الأمان، يملك المستخدم الصلاحيات الكاملة للوصول إلى خوارزمية التحكم وإعدادات الأمان.

أرباح التحكم يمكن تغييرها وذلك فقط بعد ظهور تأثيرها على استقرار النظام في الحلقة المغلقة أي يمكن تغيير الأرباح بعد توليد الكود.

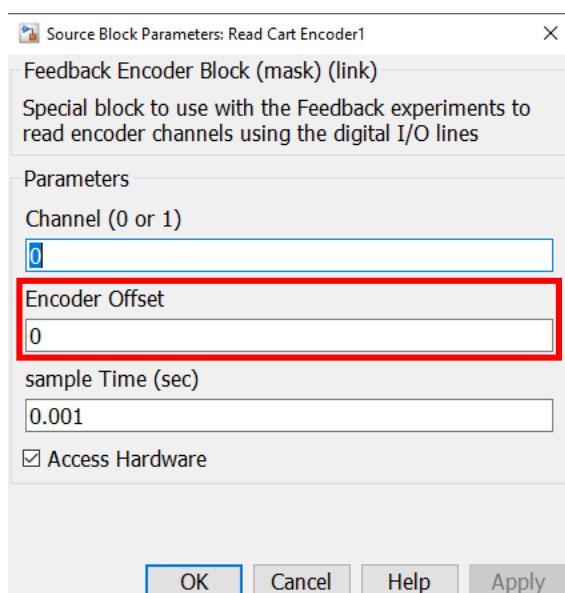
الصناديق الخضراء، التي تسمى:

(Read Cart Encoder, Read Pendulum Encoder) تعرض قراءة موضع العربة وزاوية التواوس

.(incremental_encoder) القادمة من الحساسين

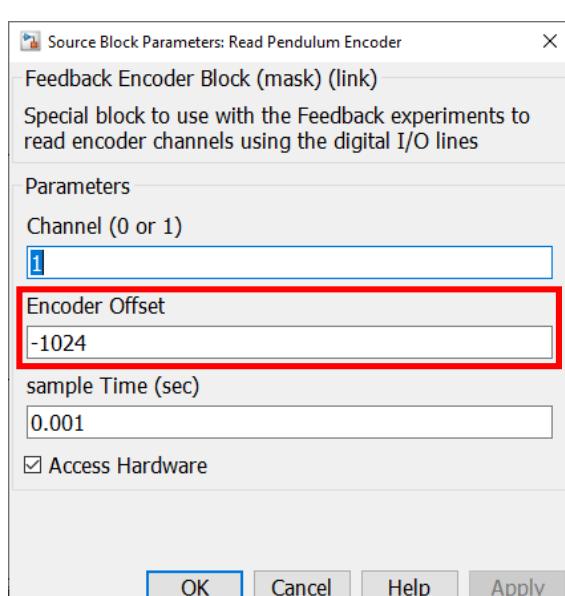
هذين الموضعين للعربة والتواوس يجب أن تسند لهما القيمتين 0 (العربة في منتصف السكة)، 0 أو π (موضع استقرار التواوس)، على التبالي. وتكون حركة العربة إلى يمين الموضع المرجعي في الاتجاه الموجب، والدوران مع عقارب الساعة للتواوس في الاتجاه الموجب.

:ضبط إعدادات الصناديق في Simulink



Cart Encoder Interface:

صندوق الملائمة للعربة يحول من عدات على خرج incremental_encoder والذي يدور مع المحرك، إلى واحدة المتر لحركة العربة على طول السكة ويجب أن تكون القيمة الابتدائية له 0.

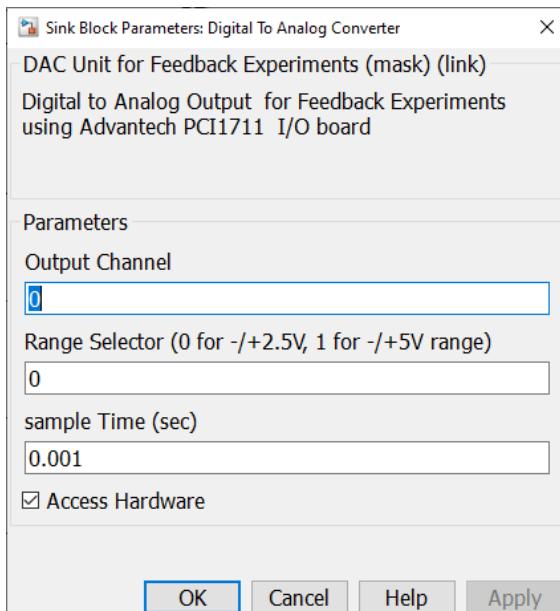


Pendulum Encoder Interface:

صندوق الملائمة للتواوس يحول من عدات على خرج incremental encoder والتي يدور مع التواوس، إلى واحدة الرadian، يجب أن تكون القيمة الابتدائية له $(0, \pi)$.

لحساب القيمة المرجعية المنسددة لزاوية النواص نطبق العلاقة:

$$\begin{aligned} ReferencePosition &= -1024 \text{ count} \times \frac{1 \text{ pendulum revolution}}{2048 \text{ count}} \times \frac{-2\pi \text{ radian}}{1 \text{ pendulum revolution}} \\ &= \pi \text{ radian} \end{aligned}$$



Digital to Analogue Converter Interface:

يجب أن يتلاءم الخرج مع إمكانيات العتاد الصلب، لدينا Advantech board قادر لأن يعطي على خرجه إشارة 0-5V، تتم إزاحة هذه الإشارة في دارة مضخم لتعطي إشارة $\pm 2.5V$ لتكون إشارة الأوامر لقيادة المحرك في كل الاتجاهين.

عند أول توليد للكود يجب بداية ضبط إعدادات المترجم في بيئة Matlab، وذلك باتباع الخطوات التالية:

1. تأكد من أن Matlab, Simulink, Real Time Workshop, Real Time Windows Target, and

Microsoft Visual C++، مثبتة مسبقاً على حاسب التجربة.

2. افتح بيئة Matlab.

3. لضبط إعدادات Real Time Windows Target اكتب في Matlab Command Window

```
>> rtwintgt -setup
```

4. لعلام Matlab عن مسار Visual C++ Compiler اكتب في Matlab Command Window

```
>> mex -setup
```

سيعيد Matlab الرسالة التالية:

```
>> Would you like mex to locate installed compilers [y]/n?
```

اكتب في Matlab Command Window

سيعيد ماتلاب رسالة مشابهة لما يلي:

```
>> Please choose your compiler for building external interface  
(MEX) files:
```

Select a compiler:

```
[1] Digital Visual Fortran version 6.0 in  
C:\Program Files\Microsoft Visual Studio  
[2] Lcc C version 2.4 in  
C:\MATLABR12\sys\lcc  
[3] Microsoft Visual C/C++ version 6.0 in  
C:\program Files\Microsoft Visual Studio
```

اكتب في Matlab Command Window "3" لاختيار Visual C++

لحفظ مسار المترجم الذي تم اختياره، اكتب في Matlab Command Window التعليمات التالية:

```
>> cd(prefdir);  
>> mccsavepath;
```

تأكد من أن الخطوة الزمنية للتقاطيع مقدارها (Fixed step 0.001[s]) في جميع ملفات .RTC

يجب توليد الكود للتحكم في الزمن الحقيقي لأي ملف Simulink حتى تستطيع تشغيل التجربة، تحقق ذلك:

Tools menu → Real-Time Workshop → Build Model

يمكن بناء النموذج من شريط الأدوات في Simulink بالضغط على الأيقونة  أو (Ctrl+B)

انظر في Matlab command window لمراقبة التقدم في بناء الكود، عندما تم عملية البناء، تأكد من أنها تمت بنجاح (لا يوجد رسائل خطأ).

تحذير هام: الخرج التشابهي لشريحة PCI-1711 له الجهد 5V – 0V وله القيمة الافتراضية 0V قبل تعريفه من نموذج Simulink، تم ملائمة الجهد ليتناسب مع المحرك، لذلك فإن 0V تعطي أكبر قوة لتدريب العرفة إلى اليسار، 2.5V لا تعطي أي قوة، و 5V تعطي أكبر قوة لتدريب العرفة إلى اليمين. لذلك، إذا تم تشغيل متركم النواس الرقمي وكان زر التشغيل الأخضر مضغوطاً، سيتم دفع العرفة بقوة كبيرة إلى اليسار لتصطدم بنهاية السكة. لتجنب ذلك، يجب تحقيق الاتصال مع الهدف أولاً من بيئه Simulink، والذي سوف يقوم بتعريف شريحة PCI1711 ويجعل خرجها 2.5V.

يوجد في Simulink عدة أنماط لتشغيل المحاكاة، سوف نستخدم منها:

- **Normal Mode Simulation**: يستخدم نمط المحاكاة لتشغيل نموذج في الزمن غير حقيقي، مما يمكنك من مراقبة سلوك النموذج في الزمن غير الحقيقي.
- **Real-Time External Mode**: يستخدم هذا النمط لربط خوارزمية التحكم المترددة مع البرنامج الناتج عن صندوق شريحة القيادة I/O driver، البرنامج التنفيذي الناتج يعمل بنمط Operating System Kernel على الحاسب المضيف ويتبادل البيانات مع Simulink باستخدامذاكرة المشتركة بينهما.

الخطوات التالية مهمة جداً ويجب اتباعها عند التحضير لتنفيذ نموذج في الزمن الحقيقي لتجنب الحالة المذكورة في الأعلى:

1. تأكد قبل تشغيل البرنامج، أن مفتاح تشغيل (Switch) صندوق المتحكم للنواص الرقمي في وضع التفعيل، لكن كبس التشغيل (Start) غير مفعل (مصابح الإشارة للكبس الأخضر لا يضيء). إذا كان ذلك ضرورياً، اضغط كبس الإيقاف الأحمر (Stop).
2. ضع العربة في منتصف السكة (على الإشارة) وأوقف النواص عن التأرجح.
3. قم بوصل التطبيق مع الهدف بضغط زر  Connect to Target بعد، لكن شريحة PCI1711 سيتم تعريفها بالقيم الابتدائية بشكل صحيح، الآن اضغط كبس التشغيل الأخضر (Start) على وحدة المتحكم للنواص الرقمي.
4. إذا كانت المنطقة حول النواص خالية، يمكنك البدء بالتطبيق وذلك بالضغط على زر  .Start Real Time Code
5. عندما تشتري المحاكاة، اضغط زر التوقف الأحمر (Stop) على صندوق التحكم بالنواص الرقمي.
6. إذا اضطررت لمقاطعة التشغيل وإيقافه، اضغط مفتاح الإيقاف الأحمر (Stop) على متحكم النواص الرقمي أولاً، وبعدها أوقف المحاكاة باستخدام Simulink، لإعادة التشغيل، اتبع الخطوات من جديد.

الفصل الثالث

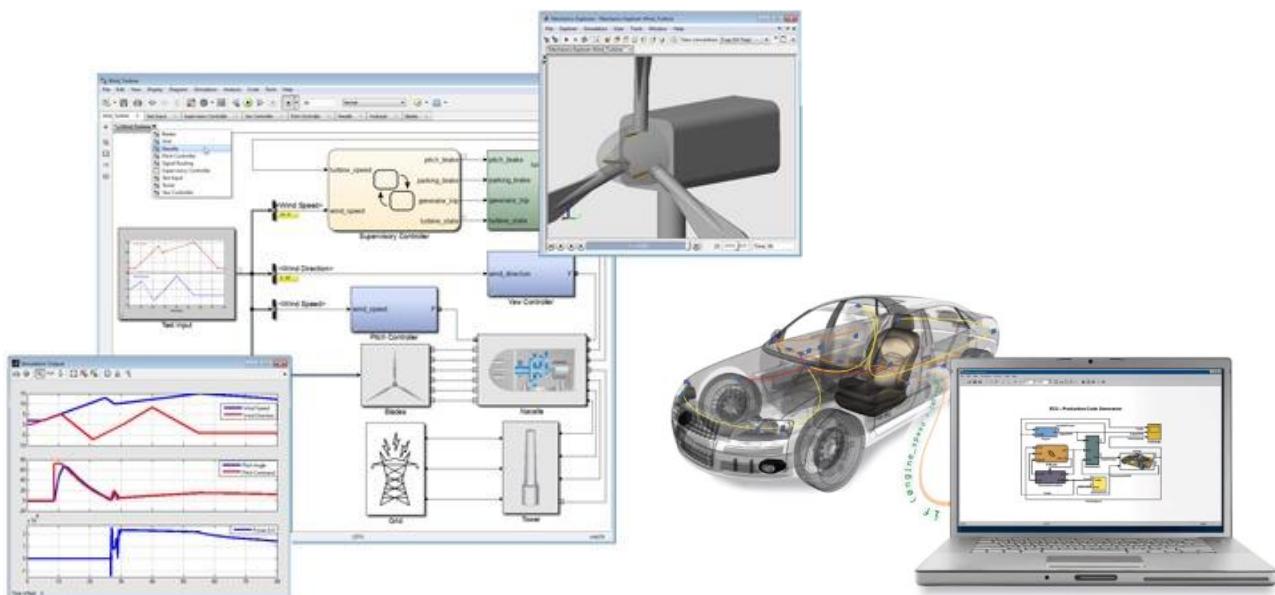
النموذج الرياضية وتعريف النظام

1. نظرة عامة:

الخطوة الأولى في عملية تصميم المتركم هو تحصيل النموذج الرياضي للنظام من أجل عملية التحكم، ويعرف النموذج الرياضي لنظام ما بأنه مجموعة المعادلات التي تصف السلوك الدركي (الدیناميکي) للنظام.

يمكن الحصول على هذا النموذج بتطبيق القوانين الفيزيائية المعروفة على النظام وذلك بحسب طبيعة النظام، فمثلاً من أجل الأنظمة الميكانيكية يمكن استخدام قانون نيوتن أو قانون لغرانج وفي الأنظمة الكهربائية يمكن تطبيق قانون أوم لمعادلة تغير الجهد أو التيار خلال دارة كهربائية، يسمى هذا النوع من النماذج بنماذج المعرفة (model_knowledge).

يمكن أيضاً الحصول على نموذج رياضي لنظام ما من خلال التجربة باستخدام مجموعة من قياسات الدخل والخرج للنظام ومطابقتها مع خرج نموذج رياضي له نفس الدخل، وهذا النوع من النماذج يسمى بنماذج المطابقة (identified_model).



2. النموذج الرياضي:

يمكن أن تقسم بaramترات نظام العربية والنواص لثلاث مجموعات:

- ثوابت (لا تحتاج إلى تعريف).
- بaramترات معرفة جيدا.
- بaramترات ضعيفة التعريف.

فمثلاً بالنسبة لجملة العربية والنواص نجد أن كتلة العربية وكتلة النواص وطول ذراع النواص هي بaramترات ثابتة ومحددة.

من المفترض أن النواص مصمم ليعمل ضمن شروط المختبر وبالتالي فإن اختلاف بسيط جداً يمكن أن يحدث فرق بين القيم المفروضة والقيم المقاسة.

لسوء الحظ في الأنظمة الدقيقة يكون لدينا بaramترات غير معرفة بدقة، وموصوفة بسلوك عشوائي، في نظام العربية والنواص تسمى البaramترات المتعلقة بالاحتكاك إلى هذه المجموعة.

هذه البaramترات إما أن تكون مقاسة أو أن تكون مستحصلة من تجارب عملية، فعلى سبيل المثال، بaramتر الاحتكاك الذي سوف يستخدم في المحاكاة في برنامج Matlab يجب أن تعدد قيمته والتي تختلف من مكان عمل لآخر.

نظام العربية والنواص يمكن أن يعرض العديد من المشاكل المعقدة وغير المبدلة في نظرية التحكم، يمكن تحليل مشكلة التحكم لهذا النوع من الأنظمة كالتالي:

- أربع متغيرات حالة ومتغير تحكم واحد.
- يتم وصف الديناميكي بمعادلة تفاضلية واحدة ODE من المرتبة الرابعة أو بواسطة أربع معادلات تفاضلية من المرتبة الأولى
 - النظام لا خطى
 - شعاع التحكم مقيد
 - طول السكة منتهي وموضع العربية محدود
 - معايير الأداء: تصغير خطأ التكامل المطلق (IAE), The Integral Absolute Error (IAE), تصغير الكلفة (الطاقة)، تحقيق الزمن الأمثل.

إن النواس يدور في المستوى الشاقولي حول محور ثابت على العربة في حين أن العربة تتحرك على سكة أفقية والتي محورها الطولي يقع في مستوى الدوران، كما أن قوة التحكم U تكون موازية للسكة وتطبق على العربة

يحتوي النظام الثوابت التالية:

m_c	كتلة العربة
m_p	كتلة النواس
	المسافة من محور الدوران وحتى مركز الثقل لنظام العربة والنواس
R	عزم العطالة لنظام العربة والنواس معأخذ مركز الثقل بعين الاعتبار

شعاع متغولات الحالة لنظام $x = \text{col}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ حيث أن:

x_1 : هو موضع العربة (المسافة عن مركز السكة)

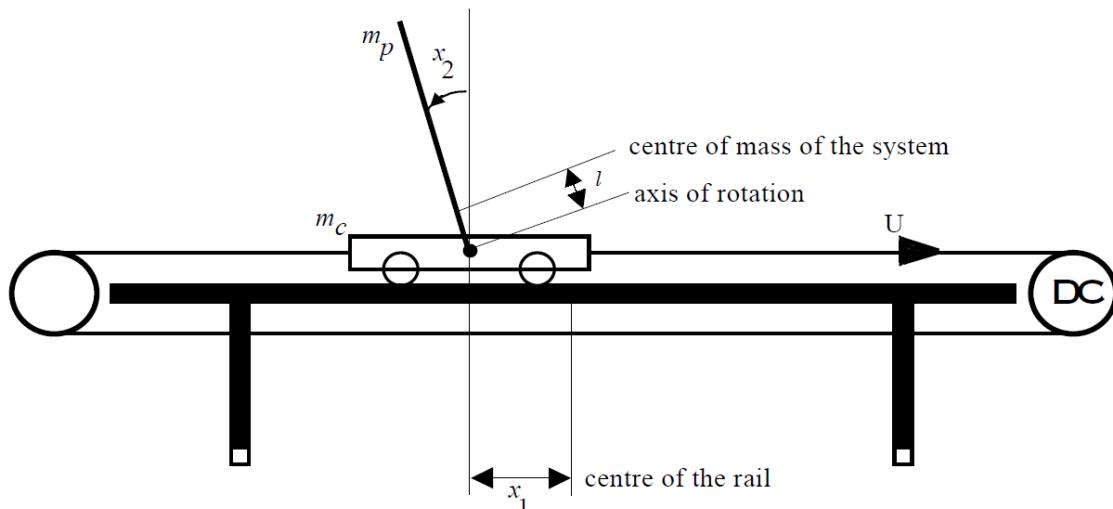
x_2 : هي الزاوية بين المحور الشاقولي الموجه للأعلى والشعاع من محور الدوران إلى مركز الكتلة، تقاس عكس عقارب الساعة ($0 = x_2$ في الموضع الشاقولي العلوي للنواس)

x_3 : هي سرعة العربة

x_4 : هي السرعة الزاوية للنواس

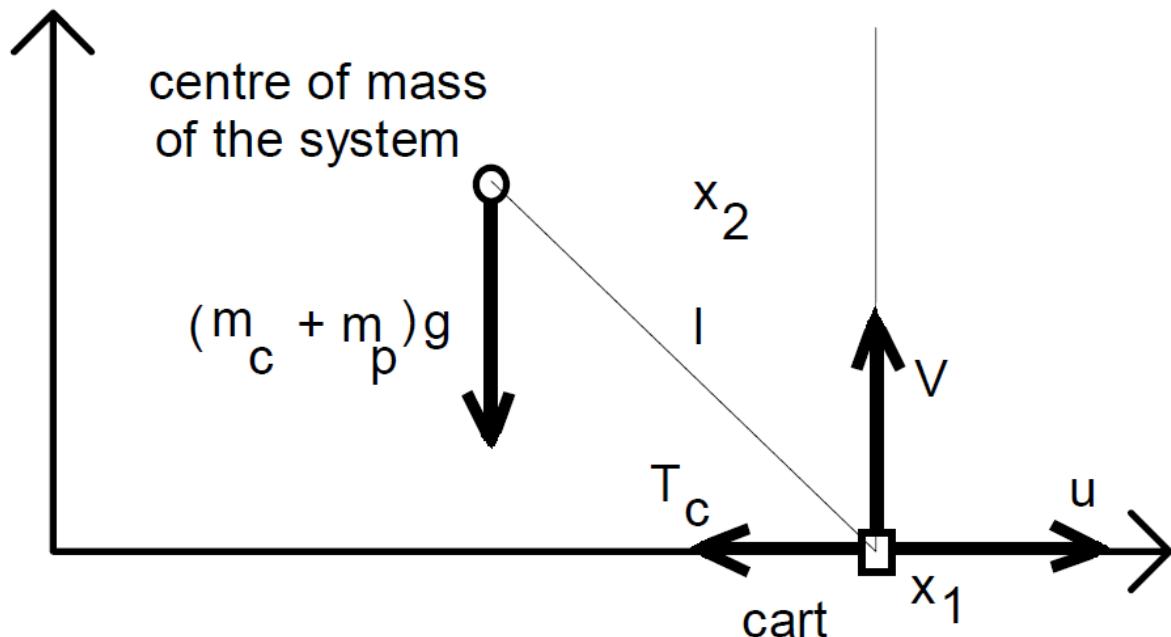
f_p : تمثل الاحتكاك لحركة العربة.

$D_p = f_p * x_4$ وهي متناسبة مع السرعة الزاوية D_p



V: تمثل قوى رد فعل السكة وهي قوى شاقولية على العربة.

تعطى الإحداثيات الأفقيّة لمركز الكتلة بالعلاقة: $x_1 = l \sin x_2$



و الإحداثيات الشاقولية تعطى بالعلاقة: $l \cos x_2$

يمكن الحصول على المعادلات الديناميكيّة للنظام حسب ميكانيكا نيوتن، وذلك بالتعويض في قانون نيوتن الثاني:

$$\sum F = m * a \quad \text{للحركة الانسحابية}$$

$$\sum \Gamma = I_{\Delta} * \alpha \quad \text{للحركة الدورانية}$$

بإسقاط الحركة الانسحابية على المحور الأفقي:

$$(m_c + m_p)(x_1 - l \sin x_2)'' = F - T_c \quad (1)$$

بإسقاط الحركة الانسحابية على المحور العاومي:

$$(m_c + m_p)(l \cos x_2)'' = V - (m_c + m_p)g \quad (2)$$

الحركة الدورانية:

$$Jx_2'' = (F - T_c)l \cos x_2 + Vl \sin x_2 - D_p \quad (3)$$

تعبر المعادلتين الأولى والثانية عن انسحاب مركز الكتلة، في حين أن المعادلة الثالثة تصف الدوران لكامل النظام حول مركز الكتلة.

1. استنتاج معادلات الحالة من معادلات الحركة للنظام:

من المعادلة الأولى نجد أن:

$$(m_c + m_p)(x_1 - l \sin x_2)'' = F - T_c$$

$$(m_c + m_p)(x_1' - l \cos x_2 x_2')' = F - T_c$$

$$(m_c + m_p)(x_1'' - l \cos x_2 x_2'' + l \sin x_2 x_2'^2) = F - T_c$$

$$(m_c + m_p)(x_3' - l \cos x_2 x_4' + l \sin x_2 x_4^2) = F - T_c \quad (4)$$

من المعادلة الثانية نحصل على:

$$(m_c + m_p)(l \cos x_2)'' = V - (m_c + m_p)g$$

$$(m_c + m_p)(-l \sin x_2 x_2')' = V - (m_c + m_p)g$$

$$(m_c + m_p)(-l \cos x_2 x_2'^2 - l \sin x_2 x_2'') = V - (m_c + m_p)g$$

$$(m_c + m_p)(-l \cos x_2 x_4^2 - l \sin x_2 x_4') = V - (m_c + m_p)g \quad (5)$$

من المعادلة السابقة:

$$V = (m_c + m_p)(-l \cos x_2 x_4^2 - l \sin x_2 x_4' + g)$$

من المعادلة الثالثة نجد أن:

$$Jx_4' = (F - T_c) l \cos x_2 + V l \sin x_2 - f_p x_4$$

نعرض قيمة V في المعادلة فنحصل على:

$$Jx_4' = (F - T_c) l \cos x_2 + (m_c + m_p)(-l \cos x_2 x_4^2 - l \sin x_2 x_4' + g) l \sin x_2 - f_p x_4$$

: x_4' نقوم بعزل

$$x_4'(J + (m_c + m_p)l^2 \sin x_2^2) =$$

$$(F - T_c) l \cos x_2 - (m_c + m_p)l^2 \cos x_2 \sin x_2 x_4^2 + (m_c + m_p)l g \sin x_2 - f_p x_4$$

نقسم على x_4' ونفرض أن $\mu = l (m_c + m_p)$ فنحصل على:

$$x_4' = \frac{l \cos x_2 (F - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin x_2^2}$$

من المعادلة (4) نحصل على :

$$(m_c + m_p)x'_3 = \mu \cos x_2 x'_4 - \mu \sin x_2 x_4^2 + F - T_c$$

نعرض قيمة x'_4 في المعادلة السابقة فنحصل على :

$$(m_c + m_p)x'_3 = \frac{\mu \cos x_2 [l \cos x_2 (F - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4]}{J + \mu l \sin x_2^2} - \mu \sin x_2 x_4^2 + F - T_c$$

$$\begin{aligned} (m_c + m_p)x'_3 &= \frac{\mu \cos x_2 [l \cos x_2 (F - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4]}{J - \mu l \sin x_2^2} \\ &\quad + \frac{-\mu \sin x_2 x_4^2 (J + \mu l \sin x_2^2) + (F - T_c)(J + \mu l \sin x_2^2)}{J + \mu l \sin x_2^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'_3 &= \frac{l \cos x_2 [l \cos x_2 (F - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4]}{J + \mu l \sin x_2^2} \\ &\quad + \frac{-J l \sin x_2 x_4^2 - l^2 \mu \sin x_2^2 x_4^2 + \frac{J(F - T_c)}{(m_c + m_p)} + l^2 \sin x_2^2 (F - T_c)}{J + \mu l \sin x_2^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'_3 &= \frac{l^2 \cos x_2^2 (F - T_c) - l^2 \cos x_2^2 \mu x_4^2 \sin x_2 + l \cos x_2 (+\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin x_2^2} \\ &\quad + \frac{-J l \sin x_2 x_4^2 - l^2 \mu \sin x_2^2 x_4^2 + \frac{J(F - T_c)}{(m_c + m_p)} + l^2 \sin x_2^2 (F - T_c)}{J + \mu l \sin x_2^2} \end{aligned}$$

$$x'_3 = \frac{(F - T_c)(l^2 + \frac{J}{(m_c + m_p)}) + l \cos x_2 (+\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin x_2^2} + \frac{-J l \sin x_2 x_4^2 - l^2 \mu x_4^2 \sin x_2}{J + \mu l \sin x_2^2}$$

نفرض أن :

$$a = l^2 + \left(\frac{J}{(m_c + m_p)}\right)$$

$$x'_3 = \frac{(F - T_c)a + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4) - a \mu x_4^2 \sin x_2}{J + \mu l \sin x_2^2}$$

$$x'_3 = \frac{a[(F - T_c) - \mu x_4^2 \sin x_2] + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin x_2^2}$$

وبالتالي تصبح معادلات الحالة بالشكل التالي :

$$x'_1 = x_3$$

$$x'_2 = x_4$$

$$x'_3 = \frac{a[(F - T_c) - \mu x_4^2 \sin x_2] + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin x_2^2}$$

$$x'_4 = \frac{l \cos x_2 (F - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin x_2^2}$$

2. استنتاج احتكاك العربة (Cart friction):

احتكاك العربة τ_c في النموذج هو تابع لا خطى لسرعة العربة x_3 كما هو مبين في الرسم.

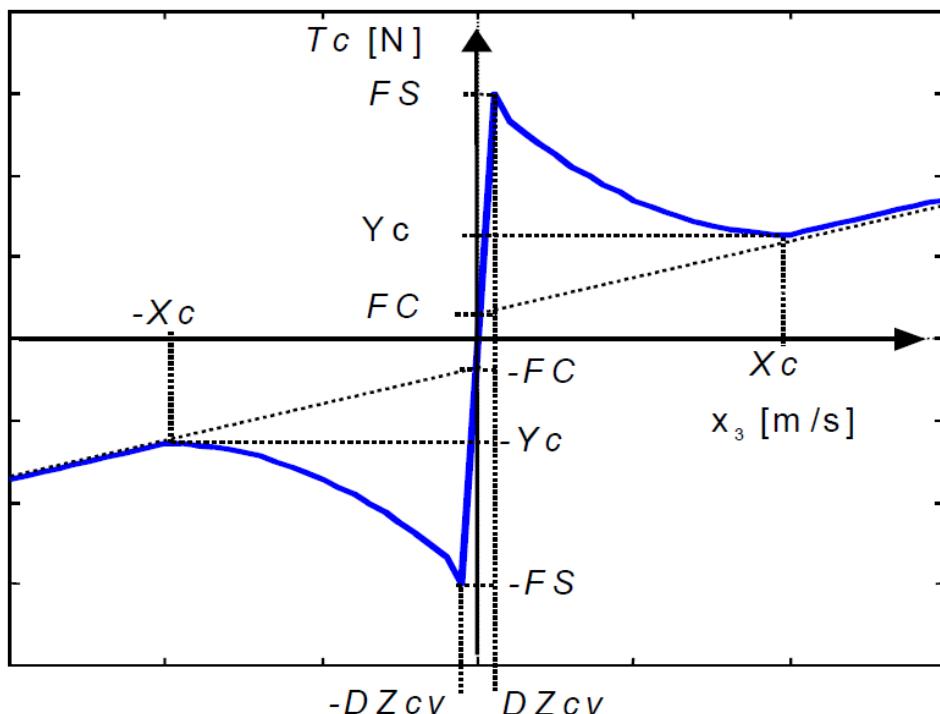
- الاحتكاك الساكن FS

- الاحتكاك الحركي أو احتكاك كولومب FC

X_c - سرعة العربة - بداية منطقة الاستقرار الخطى.

Y_c - قيمة احتكاك عند النقطة X_c

DZ_{cv} - المنطقة الميتة لسرعة العربة.



يمثل الشكل السابق العلاقة التجريبية بين احتكاك العربة وسرعة العربة، إن احتكاك الساكن يوجد في المنطقة الميتة للعربة وهذا يتطلب تطبيق قوة على العربة لكي تبدأ بالحركة ($x_3 > 0$)، لتجاوز الاحتكاك الابتدائي (الساكن)، على أي حال، فإن احتكاك الساكن ينافق بعلاقة تربعية تقريباً مع السرعة، أما احتكاك الديناميكي (احتكاك كولومب) يزداد غالباً بشكل خطى مع السرعة، أخيراً، يصل احتكاك الساكن إلى قيم ثابتة وتكون متساوية للصفر عند النقطة ($x_3 = X_c$) التي يصبح عندها احتكاك الكلى متساوياً لاحتكاك الحركي أو احتكاك كولومب، بما أن احتكاك كولومب، بما أن احتكاك كولومب يؤثر دائمًا في اتجاه معاكس لاتجاه الحركة، يكون التابع معكوساً بالنسبة لقيم السالبة من x_3 وذلك مع قيمة احتكاك بإشارة مختلفة.

لكي نحصل على بعض النتائج التحليلية لقوى الاحتكاك الكلية المؤثرة على العربية، سوف نقسم تابع الاحتكاك إلى خمس مناطق:

$x_3 < -x_c$	Zone1
$-x_c < x_3 < -DV_{cv}$	Zone2
$-DV_{cv} < x_3 < DV_{cv}$	Zone3
$DV_{cv} < x_3 < x_c$	Zone4
$x_3 > x_c$	Zone5

طريقة استنتاج المعادلات للأجزاء الخطية والتربيعية من تابع الاحتكاك:

العلاقة بين القسمين التربيعية والخطية من T_c ، تابع الاحتكاك، تقسم إلى قسمين:

1. خطية: تحتاج إلى نقطتين لإيجاد الحل، تعطي العلاقة العاملة لمستقيم مار بنقطتين، (x_1, y_1) و (x_2, y_2)

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

2. تربيعية: ستحتاج إما إلى ثلاثة نقاط لإيجاد الحل، أو تحتاج إلى معرفة نقطتين والميل في

نقطة، باستخدام الفرضيات التالية

i. تعطي المعادلة العامة للعلاقة التربيعية بالشكل:

$$y = ax^2 + bx + c$$

ii. يمر المنحنى خلال النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) .

iii. والميل في النقطة (x_2, y_2) هو G .

$$y' = 2ax + b$$

من ii نجد:

$$2ax_2 + b = G$$

من iii نجد

$$b = G - 2ax_2 \quad (\text{iv})$$

ولذلك يكون

$$y = ax^2 + (G - 2ax_2)x + c \quad (\text{v})$$

ولذلك من ii

$$y_1 = ax_1^2 + (G - 2ax_2)x_1 + c \quad (\text{vi})$$

من ii و viii نجد

$$y_2 = ax_2^2 + (G - 2ax_2)x_2 + c \quad (\text{vii})$$

وأيضا

$$y_2 - y_1 = a(x_2^2 - x_1^2) + (G - 2ax_2)(x_2 - x_1) \quad (\text{viii})$$

بطرح viii من viii نجد

ملاحظة يمكن إيجاد a من العلاقة viii، و b من العلاقة vii و c من vi

نستبدل (x_1, y_1) بواسطة $(f_s, 0)$, وبدل (x_2, y_2) نعوض (x_c, y_c) , كما يمكننا ملاحظة أن الميل في النقطة (x_c, y_c) مساو للصفر ($G=0$ at $x=x_c$), أيضا عندما يكون $(x=0)$ يكون تابع الاحتكاك هو الاحتكاك الساكن فقط وقيمة مساوية (f_s) والسرعة $(x_3=0)$, ملاحظة إن $f_s = c$ ومن العلاقة v نجد أن $c = -2ax_c$.

من العلاقة viii نجد $a = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_1 - x_2)^2}$ وهي تعادل $\frac{(y_c - F_S)}{x_c^2}$

1. المنطقة الأولى: $(x_3 < -x_c, -y_c)$ يكون التابع للحذف فيها خطٌ يصر التابع من النقاطين $(-x_c, -y_c)$ و $(0, -F_c)$.

الاحتكاك الشبكي يكون صفرًا والاحتكاك الديناميكي يتناقص بشكل خطى مع السرعة.

سنوجد العلاقة باستخدام الطريقة الخطية وذلك بتعويض النقاط في علاقة المستقيم:

$$y - (-F_C) = \frac{(-y_C) - (-F_C)}{(-x_C) - 0} (x - (0))$$

$$y = \frac{y_c - F_C}{x_c} x_3 - F_C$$

المنطقة الثانية: يكون تابع الاتكاك فيها تربيعي، يعر من النقاطين التاليتين $(0, -F_s)$ ولدينا أيضا الميل عند النقطة $(-x_c, -y_c)$ مساو للصفر.

الاحتكاك الشاب تربطه علاقة تربيعية بالسرعة، فهو يتناقص بزيادة السرعة حتى يصل إلى الصفر،
الاحتكاك الديناميكي أيضاً يملك علاقة تربيعية مع السرعة، الاحتكاك الكلي هو مجموع العنصرين الشاب
الديناميكي، لذلك هو يملك علاقة تربيعية مع السرعة.

نلاحظ أن الاحتكاك الساكن يصل إلى قيمة ثابتة متساوية للصفر عند $x_3 = x_c$ وهذا يتضمن أن الميل في هذه النقطة يصبح متساوياً للصفر، باستخدام الطريقة التربيعية (العلاقة التربيعية المشرودة سابقاً) وبنطويض $G=0$ كما يلى:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$a: (-y_c) - (-F_S) = a((-x_c)^2 - 0^2) + (0 - 2a(-x_c))((-x_c) - 0)$$

$$a = \frac{F_S - y_c}{-x_c^2} \rightarrow a = \frac{y_c - F_S}{x_c^2} \quad (1)$$

$$b: b = 0 - 2 \left(\frac{y_c - F_S}{x_c^2} \right) (-x_c) \rightarrow b = 2 \left(\frac{y_c - F_S}{x_c} \right) \quad (2)$$

$$c: y_1 = a(0)^2 + (0 - 2a(-x_c))(0) + c \rightarrow c = -F_S \quad (3)$$

بالتعويض نجد

$$y = \left(\frac{y_c - F_S}{x_c^2} \right) x_3^2 + 2 \left(\frac{y_c - F_S}{x_c} \right) x_3 - F_S$$

3. المنطقة الثالثة: يزداد التابع للدكتاك بشكل خطى ضمن المجال ($DV_{CV} < x_3 < DV_{CV}$), يمر التابع خلال نقطتين $(-DZ, -F_S)_1$ و $(DZ, F_S)_2$.

سنوجد العلاقة باستخدام الطريقة الخطية وذلك بتعويض النقاط في علاقه المستقيمه:

$$y - y_1 = \frac{F_S - (-F_S)}{DZ - (-DZ)} (x - x_1)$$

$$y = \frac{F_S}{DZ} (x + DZ) - F_S$$

$$y = \frac{F_S}{DZ} x$$

4. المنطقة الرابعة: ($DV_{CV} < x_3 < x_c$) تابع للدكتاك فيها تربيعى, يمر من نقطتين $(0, F_C)_1$ و $(x_c, y_c)_2$, ولدينا الميل عند النقطة x_c مساو للصفر.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$a: (y_c) - (F_S) = a((x_c)^2 - 0) + (0 - 2a(x_c))((x_c) - 0)$$

$$a = \frac{F_S - y_c}{x_c^2} \quad (1)$$

$$b: b = 0 - 2 \left(\frac{F_S - y_c}{x_c^2} \right) (x_c) \rightarrow b = -2 \left(\frac{F_S - y_c}{x_c} \right) \quad (2)$$

$$c: y_2 = a(x_c)^2 + (G - 2a(x_c))(x_c) + c \rightarrow c = F_S \quad (3)$$

بالتعويض نجد

$$y = \left(\frac{F_S - y_c}{x_c^2} \right) x_c^2 - 2 \left(\frac{F_S - y_c}{x_c} \right) x_c + F_S$$

5. المنطقة الخامسة: ($x_3 < x_c$) يكون تابع للدكتاك فيها خطى, يمر التابع من نقطتين التاليتين: $(0, F_C)_1$ و $(x_c, y_c)_2$.

يصل الدكتاك الثابت إلى الصفر والدكتاك الديناميكى يزداد بشكل خطى مع السرعة.

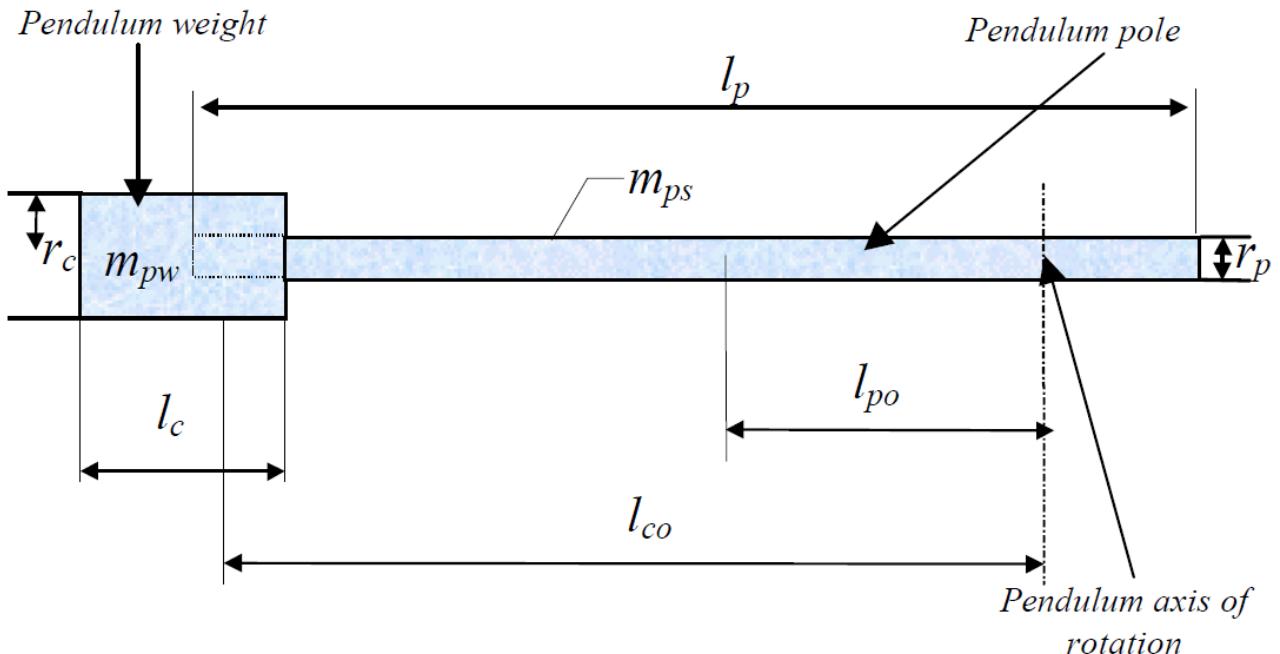
تعويض النقاط في علاقه المستقيمه:

$$y - (F_C) = \frac{(y_c) - (F_C)}{(x_c) - 0} (x - 0)$$

$$y = \frac{y_c - F_C}{x_c} x_3 + F_C$$

3. استنتاج عزم العطالة:(Moment of inertia)

الصورة التالية توضح حسابات عزم العطالة لنظام العربية والنواص:



باستخدام التسميات التالية:

ـ كتلة الحمل في نهاية النواس (kg). m_{pw}

ـ كتلة ذراع النواس (kg). m_{ps}

ـ طول النواس (m).

r_p ـ المسافة بين منتصف الذراع ومحور الدوران (m).

r_c ـ طول الحمل في نهاية النواس (m).

l_{co} ـ المسافة بين مركز الحمل و محور الدوران (m).

l_p ـ نصف قطر ذراع النواس (m).

r_c ـ نصف قطر الحمل (m).

يعطى قانون عزم عطالة النواس المتعلق بمحور الدوران بالعلاقة:

$$J_p = \left[\frac{1}{12} m_{pw} l_c^2 + \frac{1}{4} m_{pw} r_c^2 + m_{pw} l_{co}^2 \right] + \left[\frac{1}{12} m_{ps} l_p^2 + \frac{1}{4} m_{ps} r_p^2 + m_{ps} l_{po}^2 \right]$$

يعطى قانون المسافة من مركز الكتلة إلى محور الدوران بالعلاقة:

$$l = \frac{l_{po} m_{ps} + l_{co} m_{pw}}{m_c + m_{ps} + m_{pw}}$$

يمكن أن يعطى عزم العطالة الكلى للجسم I على اعتبار أنه لا يوجد دوران للعريمة حول مركز ثقلتها:

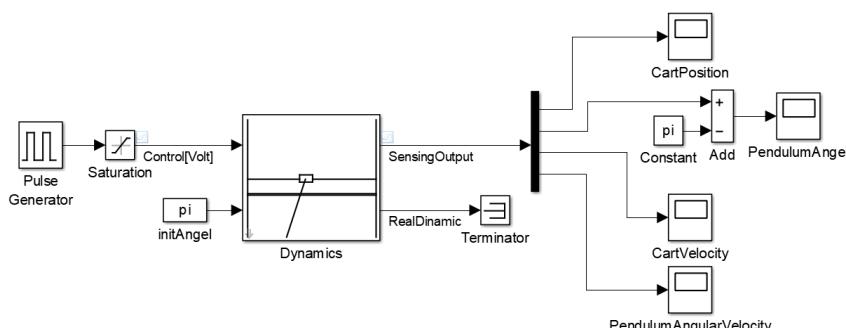
$$J = J_p - l^2(m_c + m_p)$$

لحساب دور النواص نعوض بالقانون:

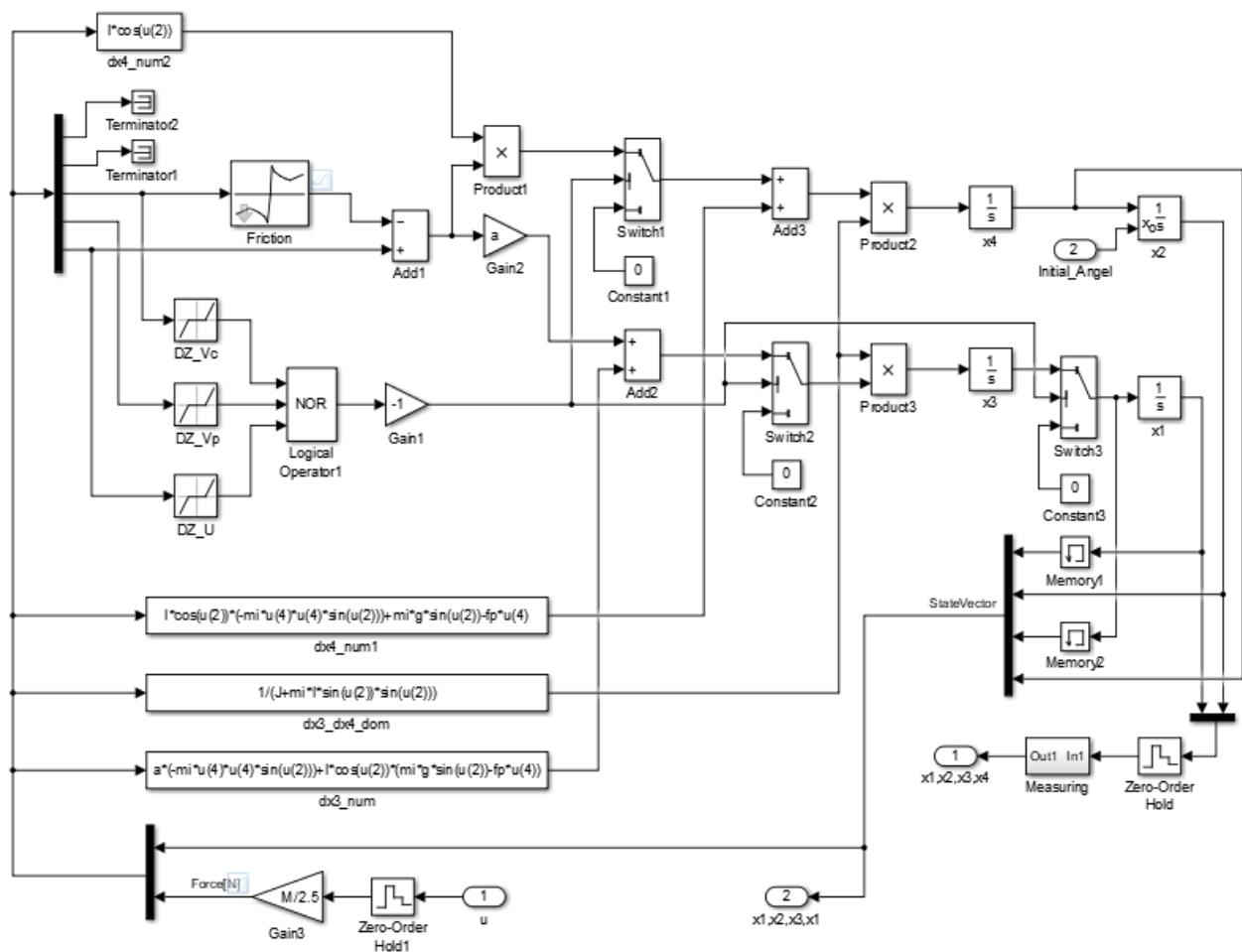
$$T = 2\pi * \sqrt{\frac{J}{(m_c + m_{pw} + m_{ps}) * g * l}}$$

4. محاكاة نموذج النظام: Simulink

نموذج المحاكاة لنظام العريمة والنواص موضح بالشكل التالي:



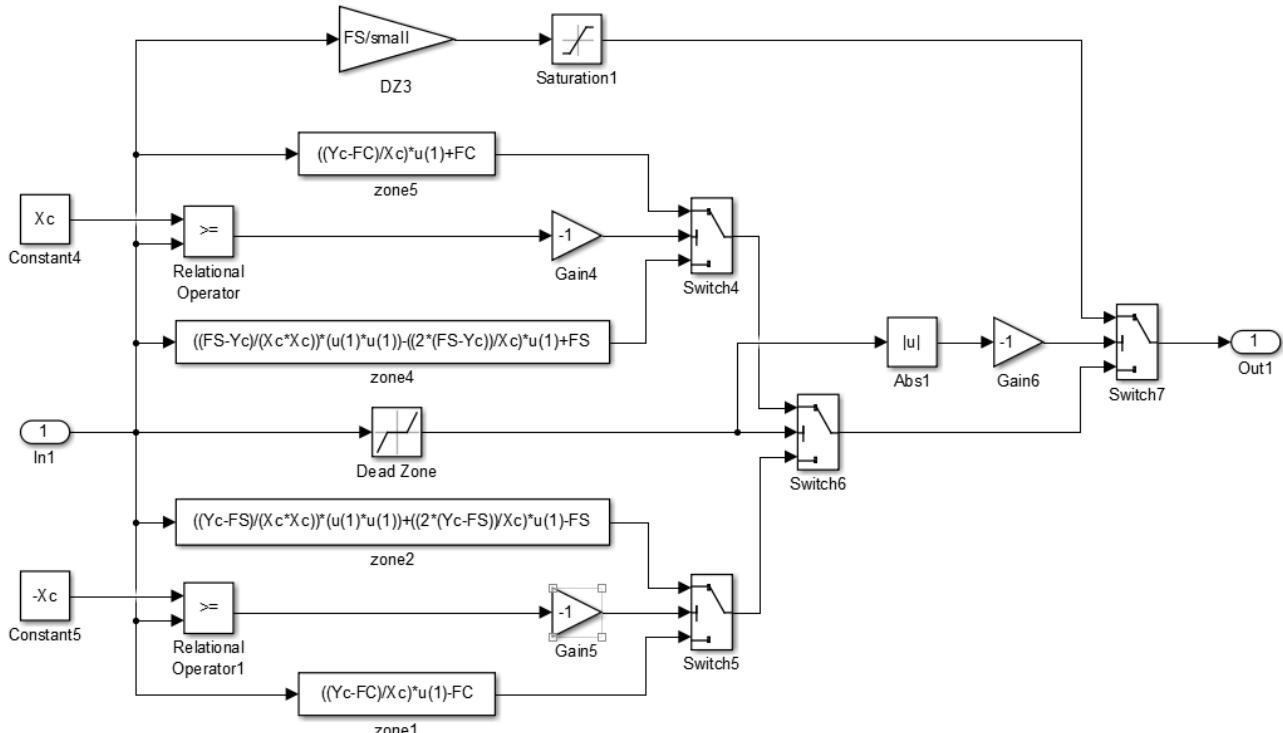
ديناميک العريمة والنواص
من معادلات الحالة تمت نموجتها
في الصندوق (Dynamics), ما
داخل القناع الخارجي معطى
بالشكل التالي:



وهو يتضمن على عدة بلوکات من مكتبة SIMULINK library والتي تمثل الزمن الميت، الاشباع لإشارة التحكم، بلوک الاحتکاك، وبلوکات نمذجة المشغل والحساسات

يوجد بلوکين memory معرفين من أجل تجنب الحلقات الجبرية، يوجد ثلاثة بلوکات للزمن الميت يجعل النموذج حساس من أجل القيم الصغيرة لإشارتي السرعة والتحكم.

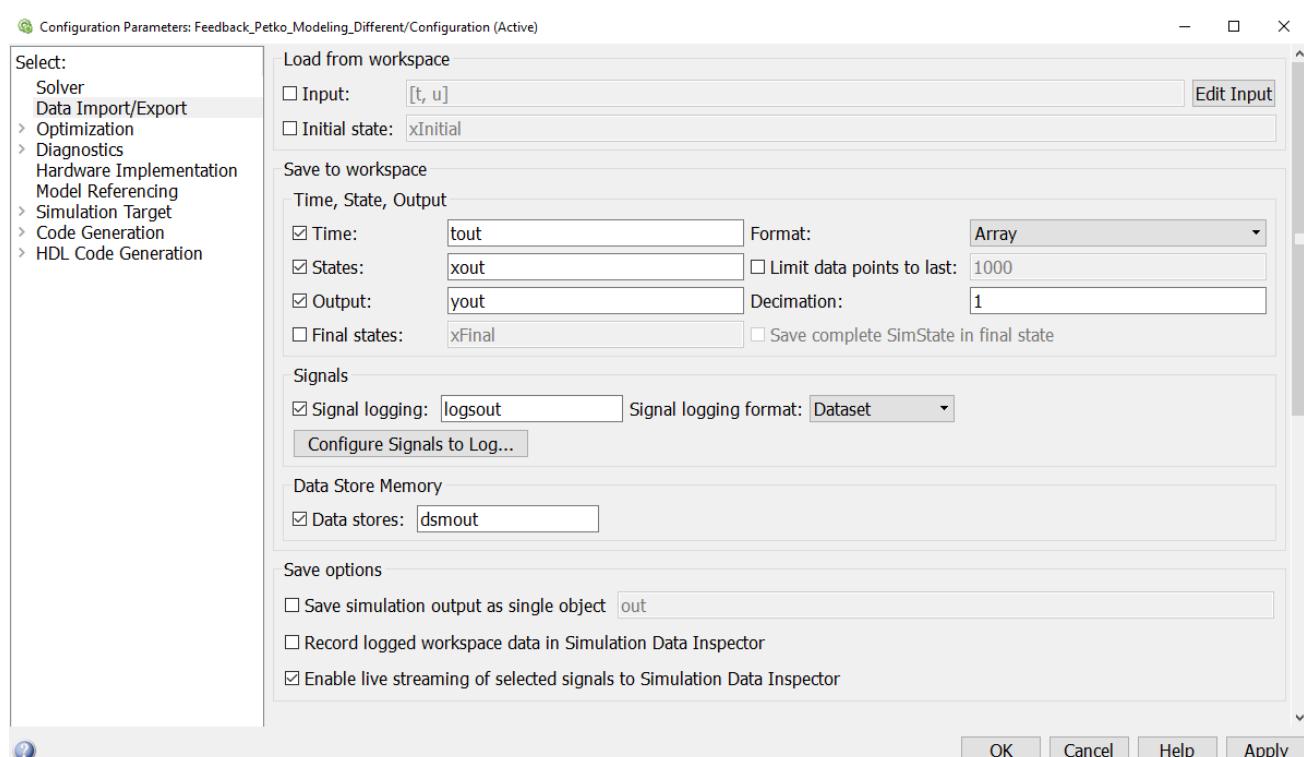
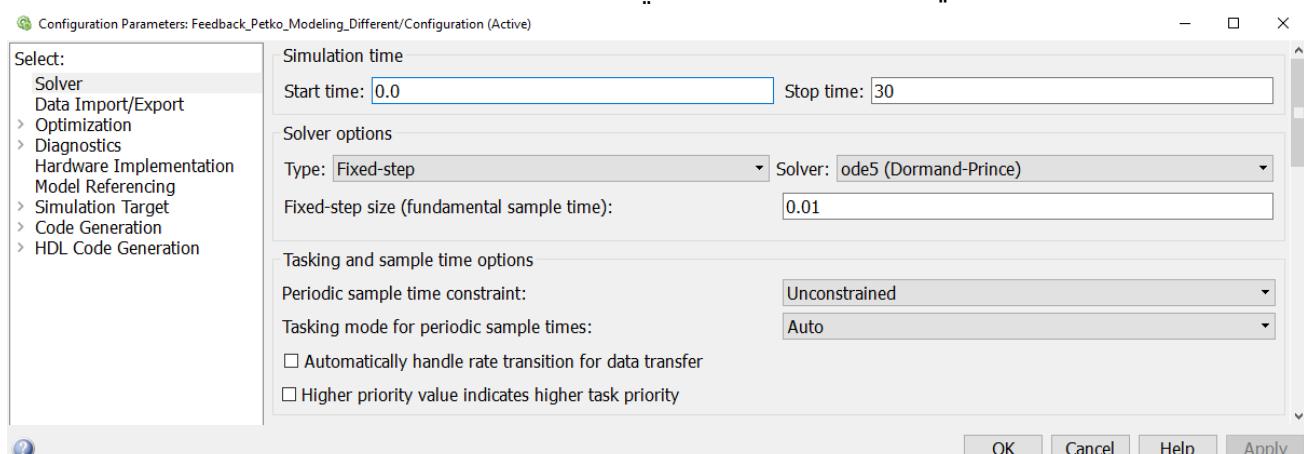
بلوك الاحتکاك هو الجزء الأهم من أجل دقة تعريف النموذج، الجزء الداخلي للبلوك كما هو موضح بالشكل:



إنَّ حذف أو تبسيط بلوک الاحتکاك يؤدي الي ضعف الملائمة بين النموذج الرياضي وال حقيقي.

ملحوظة: يجب ضبط إعدادات المحاكاة لخوارزمية الحل الرقمي على طريقة (Runge_Kutta fifth order) وعلى خطوة زمنية للتقاطيع مقدارها (Fixed step 0.01[s]), علماً أن قيمتها مختلفة عن الخطوة الزمنية في ملفات التحكم بالزمن الحقيقي RTC.

يوجد الضبط الافتراضي لبارامترات المدحكةة في الشكلين التاليين:



يمكن تحميل نموذج Simulink من خلال الروابط المذكورة في بداية البحث.

3. تعريف البارامترات الفيزيائية للنظام:

PARAMETER DESCRIPTION	SYMBOL	VALUE	ACTUALISED
Cart mass [kg]:	mc	1.12	1997-09-15 13:27
Cart mass without positioners [kg]:	mc_	1.045	1997-09-15 13:27
Pendulum weight mass [kg]:	mpw	0.095	1997-09-15 13:27
Pendulum stick mass [kg]:	mps	0.025	1997-09-15 13:27
Rail length [m]:	rl	1	1997-09-15 13:27
Pendulum stick length [m]:	lp	0.402	1997-09-15 13:27
Distance lpo [m]:	lpo	0.146	1997-09-15 13:27
Length of load[m]:	lc	0.041	1997-09-15 13:27
Distance lco [m]:	lco	0.347	1997-09-15 13:27
Radius of the load [m]:	rc	0.02	1997-09-15 13:27
Radius of the stick [m]:	rp	0.006	1997-09-15 13:27
Theoretic pend. moment of inertia [kg*m2]:	Jpt	0.0123321	1997-09-15 13:27
Static friction [N]:	FS	2.28133	1997-09-15 12:18
Coulombic friction [N]:	FC	2.53165	1997-09-15 12:18
Maximum control [N]:	M	17.463	1997-09-15 12:18
Minimum control [N]:	DZu	1.37918	1997-09-14 17:22
Minimum cart velocity [m/s]:	DZcv	-0.00793711	1997-09-14 16:33
Minimum pend. velocity [rad/s]:	DZpv	3.37476	1997-09-14 16:33
Pendulum friction [kg*m2/s]:	fp	0.000107443	1997-09-14 16:28
Pendulum period [s]:	T	1.16	1997-09-14 16:28
Pendulum moment of inertia [s]:	Jp	0.0139231	1997-09-14 16:28
Moment of inertia [kg*m2]:	J	0.0135735	1997-09-14 16:28
Distance: axis of rotation-mass centre [m]:	I	0.0167903	1997-09-14 16:28

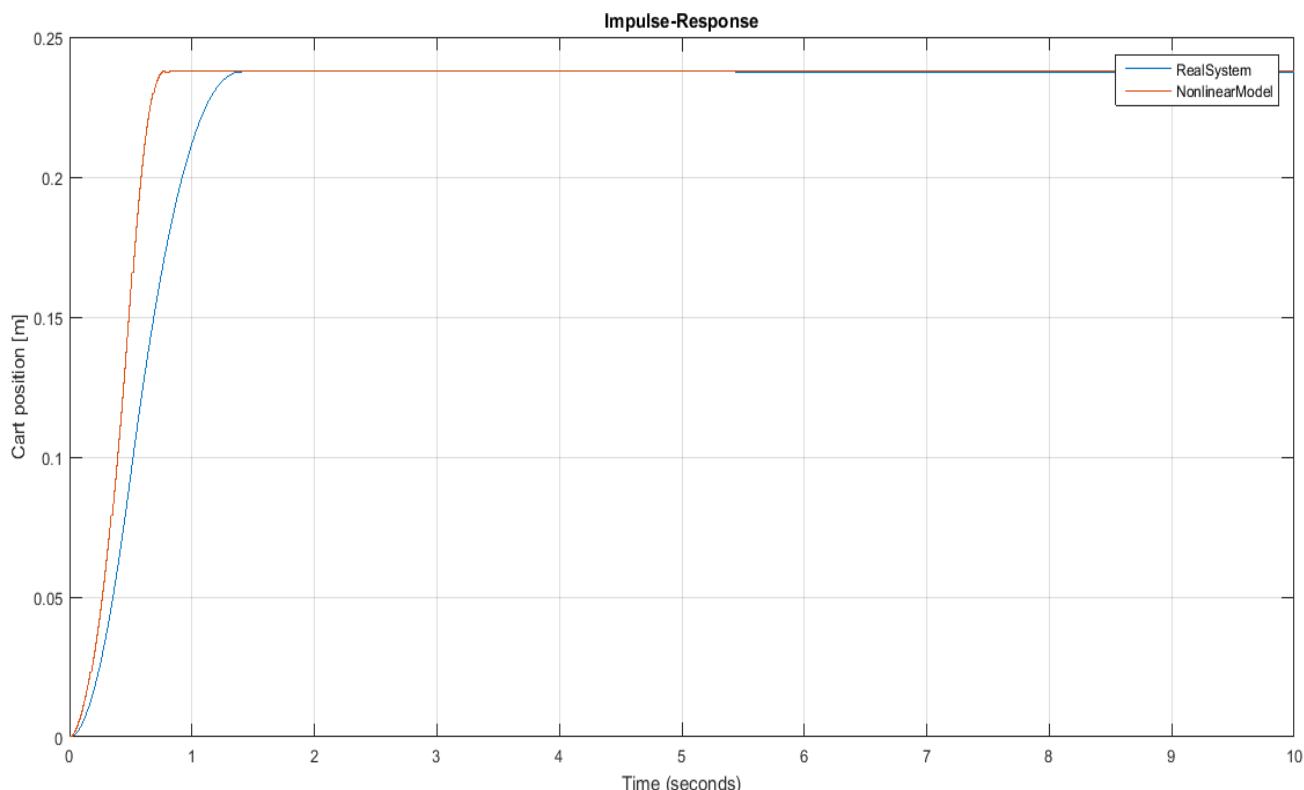
Close

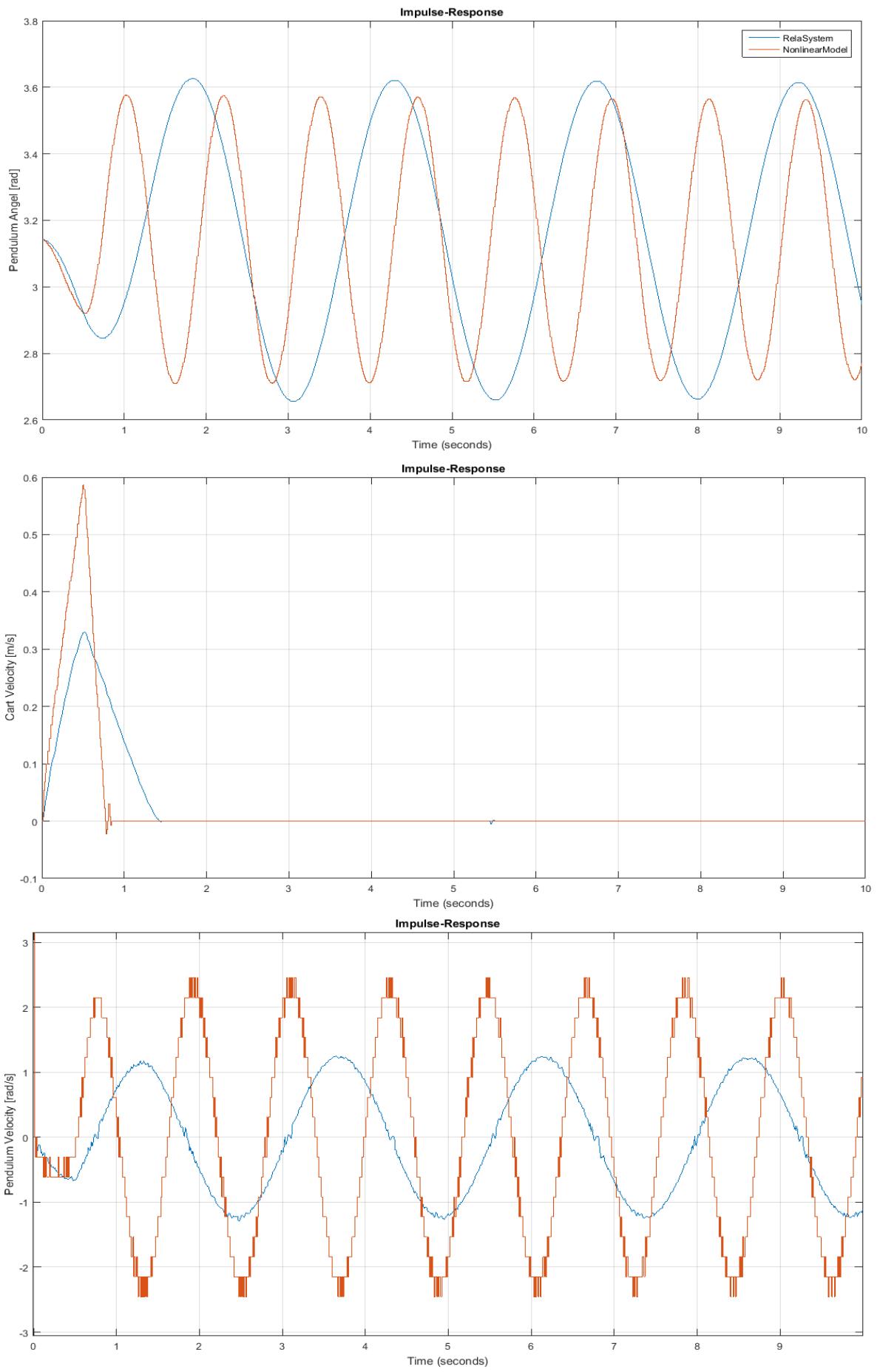
في الجدول تعريف لجميع البارامترات الفيزيائية لنظام العربة والنواص، إلا أن بعضها غير صحيح بالنسبة للتجربة الموجودة في المخبر، وذلك بسبب عامل الزمن أو الترتيب المخالف لتعليمات المرجع الخاص بالشركة.

Distance l_{po} [m]	l_{po}	0.186
Distance l_{co} [m]	l_{co}	0.385
Static friction [N]	F_S	2.53165
Columbic friction [N]	F_C	2.28133
Maximum control [N]	M	9.4
Pendulum period [s]	T	1.1663
Pendulum moment of inertia [kg^*m^2]	J_p	0.015305983
Moment of inertia [kg^*m^2]	J	0.013935418
Distance: axis of rotation mass center [m]	$ l $	0.033245968

بالملحوظة من تابع الاحتكاك نجد أن F_S يجب أن تكون قيمتها أكبر من F_C لذلك قمنا بالتبديل بينهما. نتيجة اختلاف التجميع الميكانيكي للنواص عن المرجع الخاص بالشركة المصنعة، نلاحظ قياساً اختلاف الأطوال l_{co} و l_{po} وتم استدلالهما بالقياس، مما أدى لتغيير بعض البارامترات الأخرى التي قمنا بحسابها باستخدام القوانيين المذكورة سابقاً.

المقارنة بين النظام الحقيقي والنموذج اللخطي: عند تطبيق إشارة Impulse على تجربة العريضة والنواص بعطل 1V استمرت لمدة 0.5 sec، تم استدلال النتائج من الحساسات ومقارنتها مع استجابة النموذج اللخطي للإشارة المطبقة ذاتها، يوضح الشكل التالي استجابة النظام في الحلقة المفتوحة (دون وجود متحكم) لنسبة على الدخل.



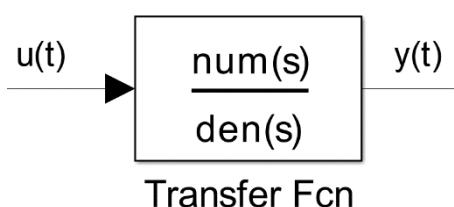


4. التقريب الخطي لنظام العرفة والنواص:

النظام الخطي Linear System هو النظام الذي يحقق خاصية التنضيد التالية: بفرض أن الدخل $u_1(t)$ للنظام الذي يعطي خرجاً $y_1(t)$ وأن الدخل $u_2(t)$ يعطي خرجاً $y_2(t)$ فإن الدخل $a_1u_1(t) + a_2u_2(t)$ حيث a_1 و a_2 هي ثوابت حقيقة، يعطي خرجاً $a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$.

1. استنتاج تابع النقل لنظام العرفة والنواص:

تستخدم تابع الانتقال لوصف العلاقة بين دخل نظام ما وخرجه باستخدام متداولات عقدية، حيث $u(t)$ تمثل إشارة دخل النظام و $y(t)$ تمثل إشارة خرج النظام



ويعرف تابع الانتقال للنظام المبين بالشكل، بأنه تحويل لبلس لـ $y(t)$ من أجل شروط ابتدائية صفرية.

$$G(s) = \left. \frac{L[y(t)]}{L[u(t)]} \right|_{IC=0}$$

حيث أن L تمثل الشروط الابتدائية للنظام و s هو متداول عقدي يمثل متداول لبلس.

خواص تابع الانتقال:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

- إن مرتبة تابع الانتقال تساوي مرتبة كثير الحدود $A(s)$ في مخرج (مقام) تابع الانتقال وتساوي n .
- إن جذور كثير حدود صورة (بسط) تابع الانتقال $(s - B)$ تسمى أصفار تابع الانتقال بينما جذور كثير حدود مخرج (مقام) تابع الانتقال $(s - A)$ فتسما أقطاب تابع الانتقال.
- إن تابع الانتقال يربط إشارات دخل النظام بإشارات خرجه حيث أن:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

- إن تابع الانتقال ليتحقق بالشروط الفيزيائية (الابتدائية) للنظام
- إن تابع الانتقال هو تحويل لبلس للاستجابة النبضية للنظام: تعرف الاستجابة النبضية للنظام بأنها درج النظام من أجل دخل نبضة ديراك. إن تحويل لبلس لنبضة ديراك يساوي الواحد أي أن:

$$U(s) = 1$$

للاستنتاج تابع النقل لنظام العربية والنواص سنبداً من المعادلات الديناميكية للنظام:

$$\ddot{x} = \frac{a((F - f_c \dot{x}) - \mu \dot{\theta}^2 \sin \theta) + l \cos \theta (\mu g \sin \theta - f_p \dot{\theta})}{J + \mu l \sin \theta^2} \quad (1)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{l \cos \theta (F - f_c \dot{x} - \mu \dot{\theta}^2 \sin \theta) + \mu g \sin \theta - f_p \dot{\theta}}{J + \mu l \sin \theta^2} \quad (2)$$

من المعادلين (1) و(2) للنظام الالخطي وبإجراء التقريب الخطى في الوضع العلوي عند نقطة التوازن القلق $x_e = [0, 0, 0, 0]$ ومن أجل التغيرات الصغيرة للزاوية θ حول الصفر سوف نعتبر أن:

$$\sin(\theta) \approx \theta, \cos(\theta) \approx 1, \dot{\theta}^2 = 0$$

وبعد ترتيب المعادلات نحصل على ما يلى:

$$aF = -J\ddot{x} + af_c \dot{x} + lf_p \theta - l\mu g \theta \dots \quad (1)$$

$$lF = J\ddot{\theta} + f_p \dot{\theta} - \mu g \dot{\theta} + lf_c \dot{x} \dots \quad (2)$$

نأخذ تدويل لبلس لطيفي المعادلة (1):

$$aF(s) = Js^2x(s) + af_c s x(s) + lf_p s \theta(s) - l\mu g \theta(s)$$

$$F(s) = \left(\frac{Js^2 + af_c s}{a} \right) x(s) + \left(\frac{lf_p s - l\mu g}{a} \right) \theta(s) \dots \quad (3)$$

نأخذ تدويل لبلس لطيفي المعادلة (2):

$$lF(s) = Js^2 \theta(s) + f_p s \theta(s) - \mu g \theta(s) + lf_c s x(s)$$

$$F(s) = \left(\frac{Js^2 + f_p s - \mu g}{l} \right) \theta(s) + \frac{f_c s}{1} x(s) \dots \quad (4)$$

من المعادلة (3):

$$x(s) = \frac{aF(s) - (lf_p s - l\mu g)\theta(s)}{Js^2 + af_c s}$$

نعرض العلاقة في المعادلة (4):

$$F(s) = \left(\frac{Js^2 + f_p s - \mu g}{l} \right) \theta(s) + f_c \left(\frac{aF(s) - (lf_p s - l\mu g)\theta(s)}{Js + af_c} \right)$$

$$\left(\frac{(Js + af_c) - af_c}{Js + af_c} \right) F(s) = \left(\frac{(Js + af_c)(Js^2 + f_p s - \mu g) - lf_c(lf_p s - l\mu g)}{l(Js + af_c)} \right) \theta(s)$$

$$\left(\frac{Js}{Js + af_c} \right) F(s) = \frac{(J^2 s^3 + Jf_p s^2 - J\mu g s + af_c Js^2 + af_c f_p s - af_c \mu g - l^2 f_c f_p s + l^2 f_c \mu g)}{l(Js + af_c)} \theta(s)$$

وبعد ترتيب طرفي العلاقة نحصل على التابع من الشكل:

$$P(s)_{pend} = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{(l/J)s}{s^3 + ((f_p + af_c)/J)s^2 + ((f_c f_p(a - l^2) - \mu g J)/J^2)s + ((f_c \mu g(l^2 - a))/J^2)}$$

وهوتابع النقل للنواص.

لأستنتاج تابع النقل للعربة، من العلاقة(4) نعزل $\theta(s)$ فنحصل على العلاقة من الشكل:

$$\theta(s) = \frac{lF(s) - lf_c s x(s)}{Js^2 + f_p s - \mu g}$$

نعرض هذه العلاقة في (3):

$$\begin{aligned} F(s) &= \left(\frac{Js^2 + af_c s}{a}\right) x(s) + \left(\frac{l f_p s - l \mu g}{a}\right) \left(\frac{l F(s) - lf_c s x(s)}{Js^2 + f_p s - \mu g}\right) \\ F(s) &= \left(\frac{l^2(f_p s - \mu g)}{a(Js^2 + f_p s - \mu g)}\right) F(s) + \left(\frac{Js^2 + af_c s}{a}\right) x(s) - \left(\frac{l^2(f_c f_p s - f_c \mu g)}{a(Js^2 + f_p s - \mu g)}\right) sx(s) \\ \left(\frac{a J s^2 + a f_p s - a \mu g - l^2 f_p s + l^2 \mu g}{a J s^2 + a f_p s - a \mu g}\right) F(s) &= \left(\frac{(Js^2 + af_c s)(Js^2 + f_p s - \mu g) - l^2 f_c f_p s^2 + l^2 f_c \mu g s}{a J s^2 + a f_p s - a \mu g}\right) x(s) \\ F(s) &= \left(\frac{J^2 s^4 + J f_p s^3 - \mu g J s^2 + J a f_c s^3 + a f_c f_p s^2 - a f_c \mu g s - l^2 f_c f_p s^2 + l^2 f_c \mu g s}{a J s^2 + (a f_p - l^2 f_p) s - a \mu g + l^2 \mu g}\right) x(s) \end{aligned}$$

وبعد ترتيب طرفي المعادلة نحصل على التابع من الشكل:

$$P(s)_{cart} = \frac{x(s)}{F(s)} = \frac{(a/J)s^2 + (f_p(a - l^2)/J^2)s + (l^2 - a)\mu g/J^2}{s^4 + ((f_p + af_c)/J)s^3 + ((f_c f_p(a - l^2) - \mu g J)/J^2)s^2 + ((f_c \mu g(l^2 - a))/J^2)s}$$

وهوتابع النقل للعربة.

بتعریف الثابت $v f$ وهو النسبة بين جهد الدخل للمحرك والقوة الناتجة عنه، المطبقة على العربة،

إضافته إلى تابع النقل لنحصل على النظام مدمجاً مع نموذج المشغل، حيث أن $F(s) = v f * v(s)$

$$P(s)_{cart} = \frac{x(s)}{v(s)} = v f \frac{(a/J)s^2 + (f_p(a - l^2)/J^2)s + (l^2 - a)\mu g/J^2}{s^4 + ((f_p + af_c)/J)s^3 + ((f_c f_p(a - l^2) - \mu g J)/J^2)s^2 + ((f_c \mu g(l^2 - a))/J^2)s}$$

$$P(s)_{pend} = \frac{\theta(s)}{v(s)} = v f \frac{(l/J)s}{s^3 + ((f_p + af_c)/J)s^2 + ((f_c f_p(a - l^2) - \mu g J)/J^2)s + ((f_c \mu g(l^2 - a))/J^2)}$$

بتعميض قيم الثوابت نحصل على توابع النقل التالية:

$$P(s)_{cart} = \frac{x(s)}{v(s)} = \frac{3.3304s^2 + 0.0233s - 87.9986}{s^4 + 2.2501s^3 - 29.005s^2 - 59.2504s}$$

$$P(s)_{pend} = \frac{\theta(s)}{v(s)} = \frac{8.9702s}{s^3 + 2.2501s^2 - 29.005s - 59.2504}$$

2. تمثيل النموذج الخطى لنظام العرية والنواص فى فراغ الحاله:

يعتبر وصف الأنظمة بمعادلات تفاضلية أو بتابع إنتقال وصفاً خارجياً لسلوك النظام، إذ أنه يصف العلاقة بين خرج النظام ودخله، غير أن هناك بعض الأنظمة التي تحتوي على حالات داخلية تؤثر على سلوك النظام دون أن تكون هذه الحالات موصوفة في المعادلة التفاضلية، لذلك كان لابد من وجود وصف آخر لسلوك النظام يأخذ بعين الاعتبار هذه الحالات الداخلية للنظام، وقد استخدمت لهذا الوصف بمعادلات تفاضلية من المرتبة الأولى، سميت بمعادلات الحالة وسمى هذا الوصف بالوصف الداخلي للنظام.

من أجل تقرير نظام اللخطي، هناك عدة طرق مختلفة، سوف نستخدم منها طريقة التقرير الخطى التحليلي (Analytic linearization). وهي تهدف إلى الحصول على معادلات النظام الخطى بواسطة استخدام نموذج النظام اللخطي من الشكل:

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x, u)$$

$$y(t) = h(x, u)$$

في هذه الحالة ديناميك النظام يتم تقريره بواسطة معادلات تفاضلية وجبرية بجوار نقطة التوازن

$$\dot{x} = f(x, u) = 0 \quad (\text{الموصوفة بالشرط } 0)$$

تم هذه العملية عن طريق تبسيط التابع اللخطي f & h باستخدام سلسلة تاييلور مع الأخذ بعين

الاعتبار الأشعة

$$\Delta x = x - xe, \Delta u = u - ue \text{ and } \Delta y = y - ye$$

إذا كان التغير حول نقاط التوازن صغيراً، فإن الحدود من المراتب العليا والترباعية $\Delta u, \Delta x, \Delta y$ يمكن

أن يتم إهمالها وكتيبة لذلك فإن معادلات الحالة المقرابة خطياً تكون

$$\frac{d}{dt}\Delta x(t) = A\Delta x + B\Delta u$$

$$\Delta y(t) = C\Delta x + D\Delta u$$

حيث أن A, B, C, D معادلات بالأبعاد المطلوبة، نحصل على هذه المصفوفات عن طريق الاستقاق

الجزئي (Jacobian matrices) للتابع الشعاعي h بالنسبة للمتغيرات x, u وبعدها نعرض قيم نقاط التوازن

$$(xe, ue)$$

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=xe, u=ue}$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=xe, u=ue}$$

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=xe, u=ue}$$

$$D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{x=xe, u=ue}$$

يتم الحصول على القيم الحدية بواسطة حل معادلات جبرية لخطية $f(x_e, u_e) = 0$ والتي يرها ان تكون غير فريدة، في حالة النموذج غير المتغير مع الزمن فان المصفوفات A, B, C, D سوف تكون ثابتة وعلاوة على ذلك فإن الرمز Δ سوف يبسط ويختصر.

فتشبه المعادلات من الشكل

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax + Bu$$

$$y(t) = Cx + Du$$

يجب نعلم أن u, y, x الموجودة في هذه المعادلات هي مشتقات للمتغيرات عند القيمة الحدية.
في نظام العربية والنواص سوف نعتبر التقرير الخطى للنموذج من أجل التغيرات الصغيرة للزاوية حول الصفر، نقاط التزان بهذه الحالة ستكون في الوضع العلوي للنواص $x_e = [0, 0, 0, 0]$ (وهي نقطة غير مستقرة).

ومن أجل التغيرات الصغيرة للزاوية θ حول الصفر سوف نعتبر أن:

$$\sin(\theta) \approx \theta, \cos(\theta) \approx 1, \dot{\theta}^2 = 0$$

ومنه نحصل على النموذج الخطى، حيث:

$$x(t) = [x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}]^T, y(t) = [x, \theta]^T$$

نستطيع استخدام ما تطلب للحصول على النظام المقرب خطيا وذلك باستخدام تعليمة

>> jacobian(f, v)

عندما تكون مصفوفات الحالة لنظام العربية والنواص المقرب حول الزاوية صفر بالشكل:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & (\mu l g)/J & -(a f_c)/J & -(l f_p)/J \\ 0 & (\mu g)/J & -(l f_c)/J & -f_p/J \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a/J \\ l/J \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu = l(m_c + m_p), a = l^2 + \left(\frac{J}{(m_c + m_p)}\right) \quad \text{حيث أن}$$

يمكن إجراء التقريب الخطى للنموذج أيضا من أجل التغيرات الصغيرة للزاوية حول π نقاط التزن بهذة الحالة ستكون في الوضع السفلي للنواص $[0, \pi, 0, 0] = x_e$ (وهي نقطة الاستقرار).

عندما سنعتبر أن:

$$\sin(\theta) \approx \pi - \theta, \cos(\theta) \approx -1, \dot{\theta}^2 = 0$$

لتسهيل استخدام النظام المقرب خطيا عند حاجته في الموضع العلوي أو السفلي للنواص سنفرض المتغير s ونأخذ الاعتبارات التالية:

- الزاوية 0 في الموضع الشاقولي العلوي للنواص.
- الزاوية π في الموضع الشاقولي السفلي للنواص.
- يأخذ المتغير s القيمة 1 عند التقريب حول الزاوية 0 (نقطة الاستقرار القلق).
- يأخذ المتغير s القيمة -1 عند التقريب حول الزاوية π (نقطة الاستقرار).

فتشير مصفوفات الحالة الرمزية المعطاة سابقا، بالشكل التالي:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & (\mu l g)/J & -(a f_c)/J & -(l f_p)/J \\ 0 & s * (\mu g)/J & -s * (l f_c)/J & -f_p/J \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (v f * a)/J \\ (s * v f * l)/J \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أضفنا أيضا الثابت $v f$ إلى مصفوفة الدخل B وهو النسبة بين جهد الدخل للمحرك والقوة الناتجة عنه، المطبقة على العربة المعلق بالعلاقة:

$$v f = \text{MaximumControlForce}/\text{MaximumControlVoltage} \rightarrow v f = M/2.5$$

لتصبح لدينا مصفوفات الحالة للنظام مدمجة مع نموذج المشغل، الممثل بالثابت $v f$ ، إلا أنها سوف تطرق لمذكرة المحرك بشكل تفصيلي لاحقا.

بتغيير قيم الثوابت وباعتبار $s=1$ نحصل على مصفوفات الحالة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.9645 & -2.2425 & -0.0003 \\ 0 & 29.0109 & -6.0398 & -0.0077 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.3305 \\ 8.9703 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(الملحق)

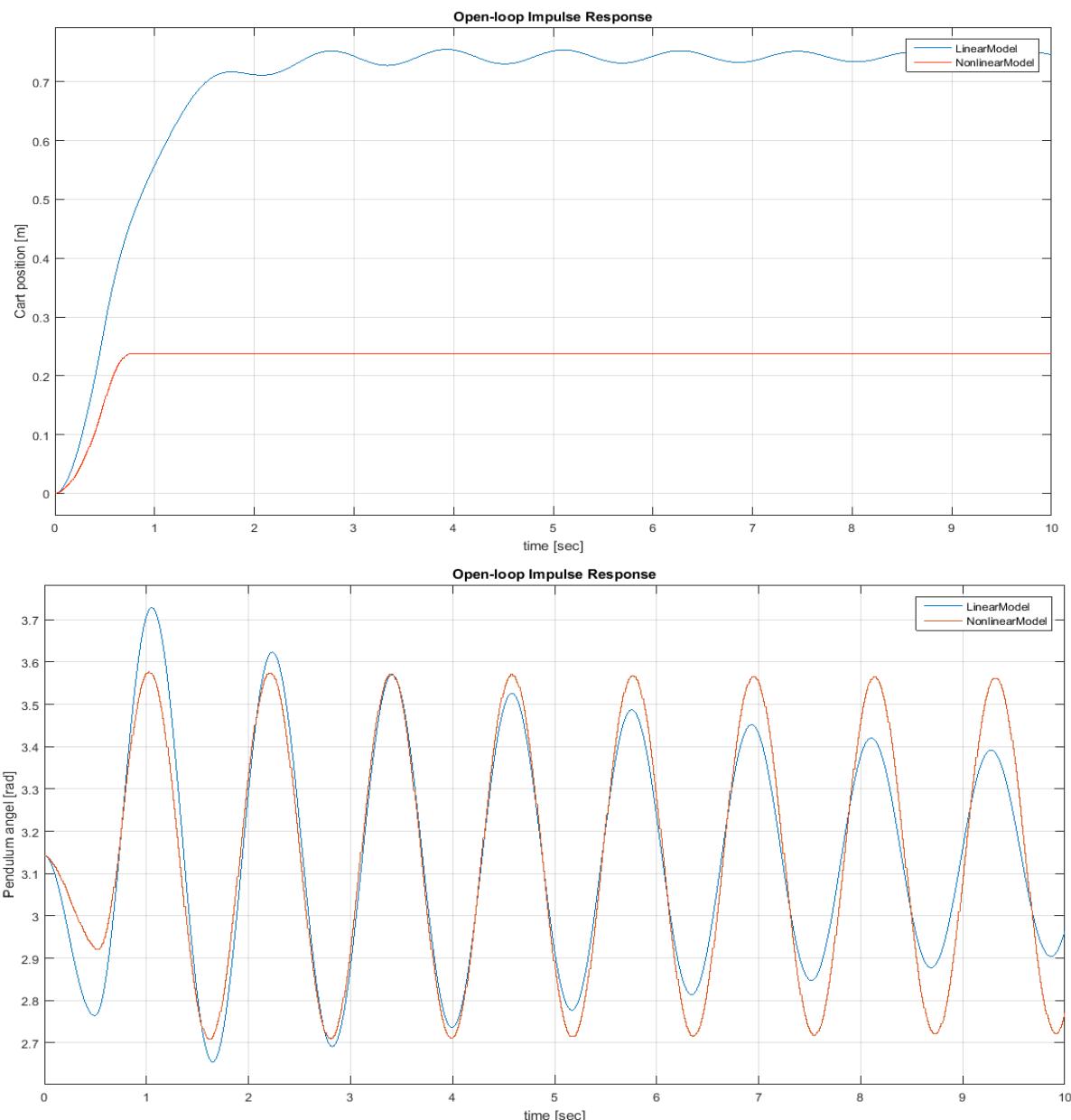
يمكن استحصل تابع النقل من فراغ الحالة لنظام العربة والنواص بتطبيق القانون:

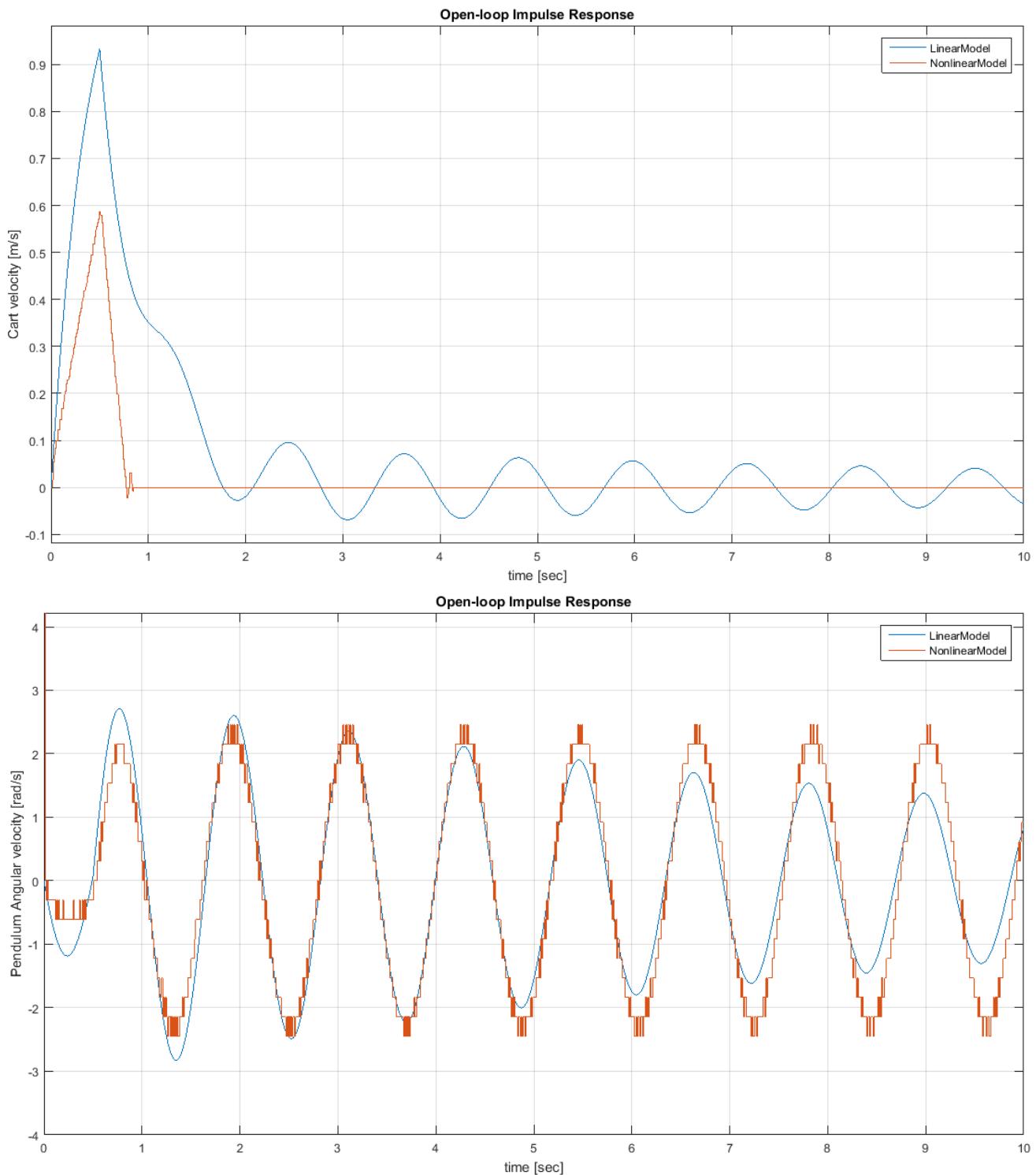
$$TF = C(sI - A)^{-1}B + D$$

أو باستخدام Matlab بكتابه التعليمية:

```
>> [num, den] = ss2tf(A, B, C, D)
```

المقارنة بين النموذج الخطي واللخطي: عند تطبيق إشارة Impulse على النموذج اللخطي للعربة والنواص بمطال 1V استمرت لمدة 0.5 sec، تم استحصل تابع المحاكاة ومقارنتها مع استجابة النموذج الخطي للإشارة المطبقة ذاتها، يوضح الشكل التالي استجابة النموذج في الحلقة المفتوحة (دون وجود متحكم).

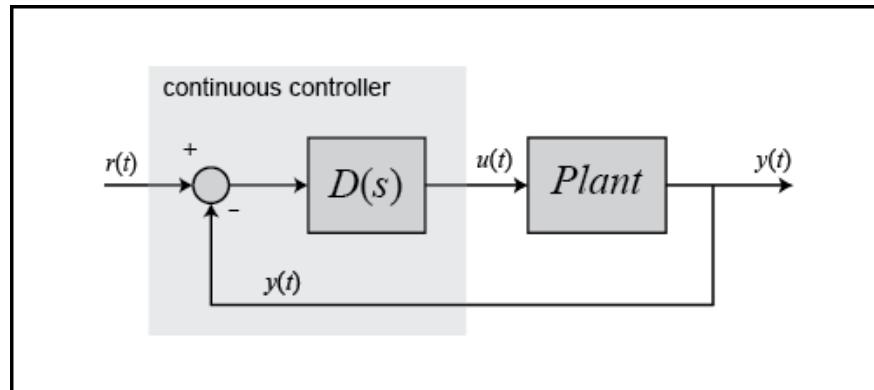




نلاحظ اختلافاً في الاستجابات الموضحة بين النموذجين الخطى واللخطى وذلك بسبب أن نظام العربة والنواص شديد اللخطى.

5. النموذج في المجال الزمني المتقطع (Discrete-time model)

يوضح الشكل التالي نظام مستمر مع الزمن ذو تغذية عكسية، معظم المتحكمات المستمرة مع الزمن يمكن تطبيقها بتوظيف الإلكترونيات التشابهية.



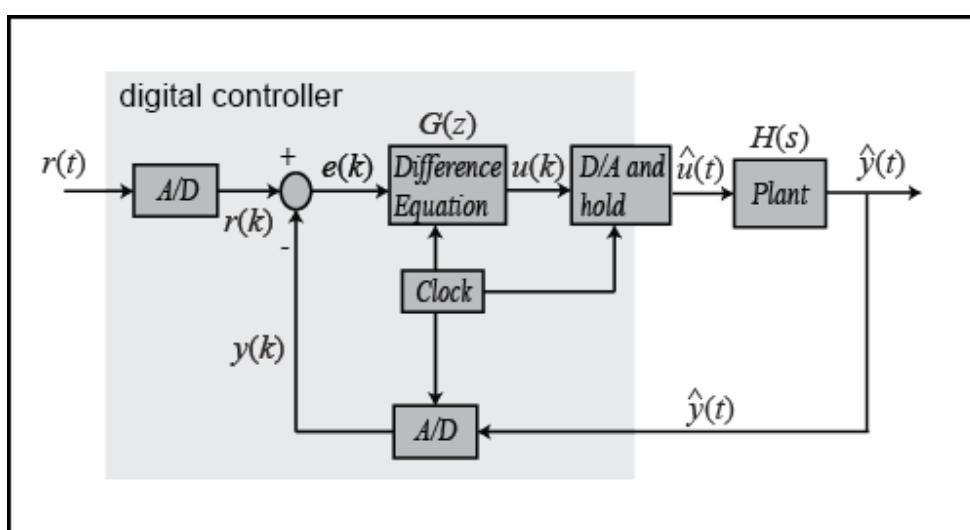
لكن المتحكمات المستمرة يمكن استبدالها بمتحكمات رقمية، تحقق وظيفة التحكم ذاتها التي تقوم بها المتحكمات المستمرة، إلا أن الفرق الأساسي بينها أن الأنظمة الرقمية تعمل على إشارات متقطعة (عينات لإشارة الحساس) بدلاً من الإشارات المستمرة، وهو تغيير ضروري في حال كنا نريد تطبيق خوارزمية التحكم في برنامج على حاسب رقمي.

أنظمة التحكم في المجال الزمني المتقطع يمكن تمثيلها باستخدام معادلات رياضية فرقية، كمثال لنظام خطي في المجال الزمني المتقطع بدخل وحيد (k) وخرج وحيد (y).

يمكن وصف العلاقة بين الدخول والخرج بصيغة معادلة فرقية من المرتبة n كالتالي:

$$y(k+n) + a_1y(k+n-1) + \dots + a_ny(k) = b_0u(k+m) + \dots + b_mu(k)$$

حيث أن $n \geq m$ (ليكون النظام سبيلاً)



عند تحليل النظام، يمكن استخدام معامل الإزاحة الأهمية q المعرف بالعلقة:

$$qf(k) = f(k + 1)$$

بضرب التسلسل الزمني بالمعامل q يطبق على التسلسل إزاحة بخطوة واحدة إلى الأمام، أما بالضرب بالمعامل q^{-1} نطبق إزاحة بمقدار خطوة إلى الأمام، بنفس الطريقة، عند الضرب بالمعامل q^{-1} يعني إزاحة إلى الخلف بمقدار خطوة، ويدعى المعامل q^{-1} معامل الإزاحة الخلفية، بأخذ معامل الفروقات الأهمية للنموذج السابق:

$$q^n y(k) + a_1 q^{n-1} y(k) + \dots + a_n y(k) = b_0 q^m u(k) + \dots + b_m u(k)$$

$$y(k) = \frac{B_q(q)}{A_q(q)} u(k)$$

حيث أنَّ كثيارات الحدود $A_q(q)$, $B_q(q)$ معرفة بالشكل:

$$A_q(q) = q^n + a_1 q^{n-1} + \dots + a_n$$

$$B_q(q) = b_0 q^m + b_1 q^{m-1} + \dots + b_m$$

بأخذ تدوين Z لكل طرف وبفرض أن الشروط الابتدائية صفرية، نحصل على:

$$A_q(z)Y(z) = B_q(z)U(z)$$

حيث أنَّ $U(z)$, $Y(z)$ هما تدوينات Z للسلسل $(u(k), y(k))$ على الترتيب، وأيضاً

$$A_q(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

$$B_q(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m$$

وبذلك يمكن كتابة المعادلة السابقة بالشكل:

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

حيث أنَّ

$$G(z) = \frac{B_q(z)}{A_q(z)}$$

وهو يدعى تابع النقل المتقطع للنظام، كما في حالة النظام المستمر، إن تابع النقل يحدد سلوك الخرج نسبة إلى الدخل عند عينات الزمن المتقطع وذلك عند شروط ابتدائية صفرية، إنْ جذور المعادلة $G(z)$ هي الأقطاب، وجذور المعادلة $A_q(z) = 0$ هي الأصفار للنظام، وهنا يتطلب استقرار النظام أن تكون جميع الأقطاب ضمن الدائرة الواحدية.

في عدة حالات بدلًا من استخدام النموذج السابق يفضل التمثيل باستخدام فراغ الحالة بالصيغة:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

حيث أن $x(k)$, $u(k)$ و $y(k)$ هي متغيرات الحالة، الدخل والخرج على الترتيب، و A , B , C , D هي مصفوفات بالأبعاد المطلوبة، باستخدام معامل الفروقات الأهمية:

$$qx(k) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

بأخذ تحويل Z عند شروط ابتدائية صفرية نجد:

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

حيث أن

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

عند وجود النموذج الاسمي المقرب خطياً في المجال الزمني المستمر لنظام العربية والنواص، يمكن الحصول على النموذج في المجال الزمني المتقطع من أجل خطوة تقاطيع $T_s=0.001$ باستخدام ماتلاب عند كتابة التعليمية:

```
>> sysd = c2d(sys, 0.001) %Zero-order hold (default)
```

يمثل النموذج الزمني المتقطع شعاع الحالة:

$$x(k) = [x(k) \theta(k) \dot{x}(k) \dot{\theta}(k)]^T$$

وتعطى المصفوفات الرقمية الناتجة:

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & 4.819e-07 & 0.0009989 & 3.259e-11 \\ 0 & 1 & -3.018e-06 & 0.001 \\ 0 & 0.0009634 & 0.9978 & 2.258e-07 \\ 0 & 0.02901 & -0.006033 & 1 \end{bmatrix} \quad B_d = \begin{bmatrix} 1.664e-06 \\ 4.482e-06 \\ 0.003327 \\ 0.00896 \end{bmatrix}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نستطيع الحصول على أقطاب هذا النظام الخطى المتقطع باستخدام Matlab:

```
>> SysdPole = eig(sysd.a)
```

فيكون الناتج

```
>> SysdPole = [1 1.0053 0.9944 0.9979]
```

يمكن إيجاد تابع النقل في المجال الزمني المتقطع من نموذج فراغ الحالة باستخدام التابع tf ,

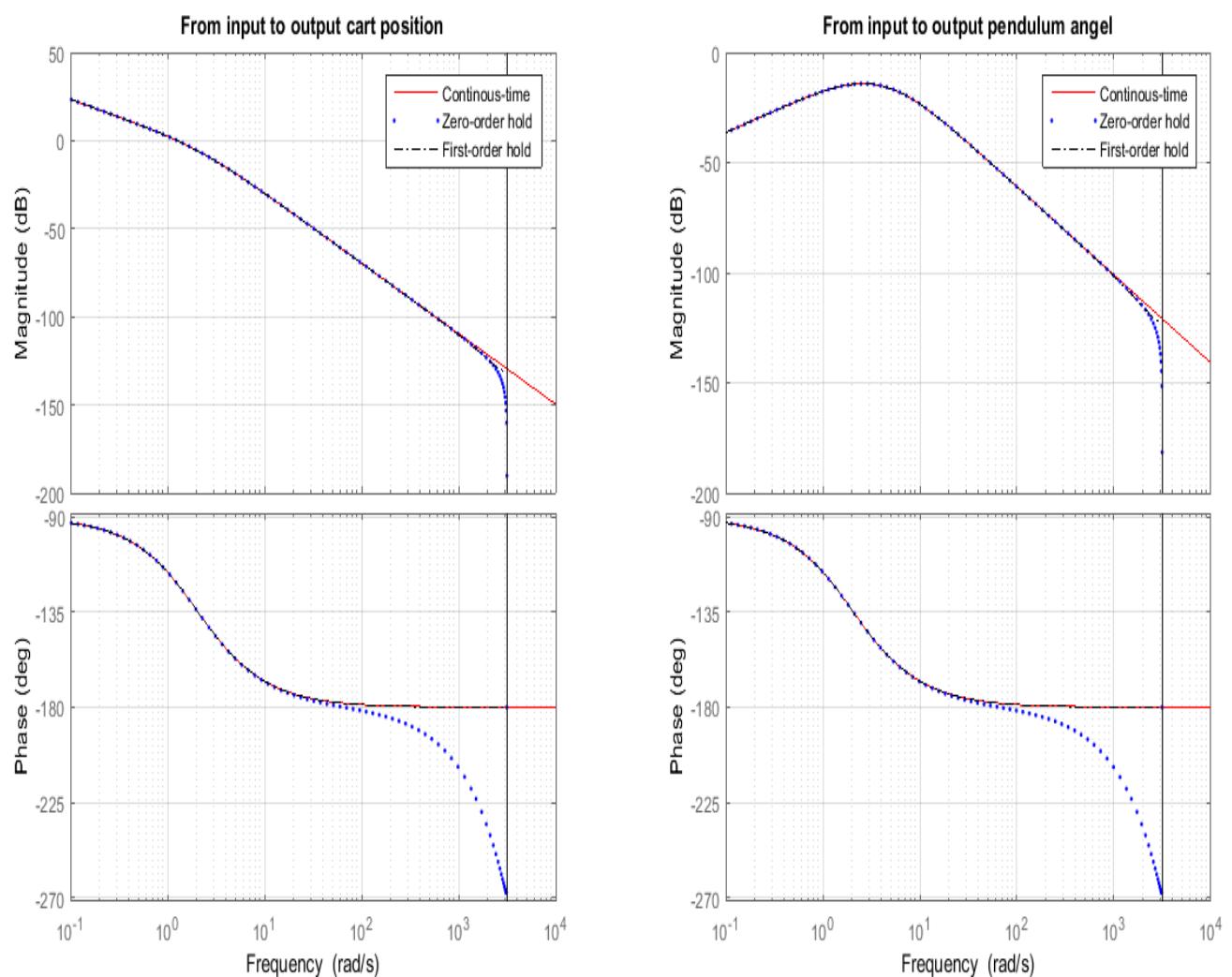
كنتيجة له نجد:

$$H_{xu}(z) = \frac{(1.664e-06 z^3) - (1.665e-06 z^2) - (1.662e-06 z) + (1.663e-06)}{z^4 - 3.998 z^3 + 5.993 z^2 - 3.993 z + 0.9978}$$

$$H_{\theta u}(z) = \frac{(4.482e-06 z^2) - (3.36e-09 z) - (4.478e-06)}{z^3 - 2.998 z^2 + 2.996 z - 0.9978}$$

فيما يلي سنقارن بين طرق التقاطع المطبقة، zero-order hold, first-order hold، باستخدام النموذج المستمر مع الزمن لنظام العربة والنواص، فإن التابع $c2d$ سيولد ثلاثة نماذج مختلفة في الزمن المتقطع باستخدام الطرق "zoh", "foh" .

يوضح الشكل التالي رسم المطال والصفحة لنظام المتقطع، كما يبدو من الرسم، فإن طريقة Zero-order hold تميل لتوليد خطأ كبير في المطال قرب ترد نايكويس، تولد أيضاً طريقة First-order hold تأخير كبير في الصفحة في المنطقة التردية ذاتها، أخطاء التقريب هذه يمكن أن تقل أو تخفي بزيادة ترددأخذ العينات.



6. نمذجة الحساسات والمشغلات:

إن النظام المدمج Compact model، يعبر عن دمج نموذج المشغل مع النظام الديناميكي لاستطاع وصف العزم أو القوة بدلالة قانون التحكم (جهد أو تيار).

الحساس (Sensor): هو جهاز ينتج إشارة خرج (كهربائية، ميكانيكية، مغناطيسية)، عندما يحدث تغير في ظاهرة فизيائية (حركة، قوة، درارة، ضغط) على الدخل، بشكل عام، الحساس هو جهاز يبني استجابة للتغيرات الفيزيائية.

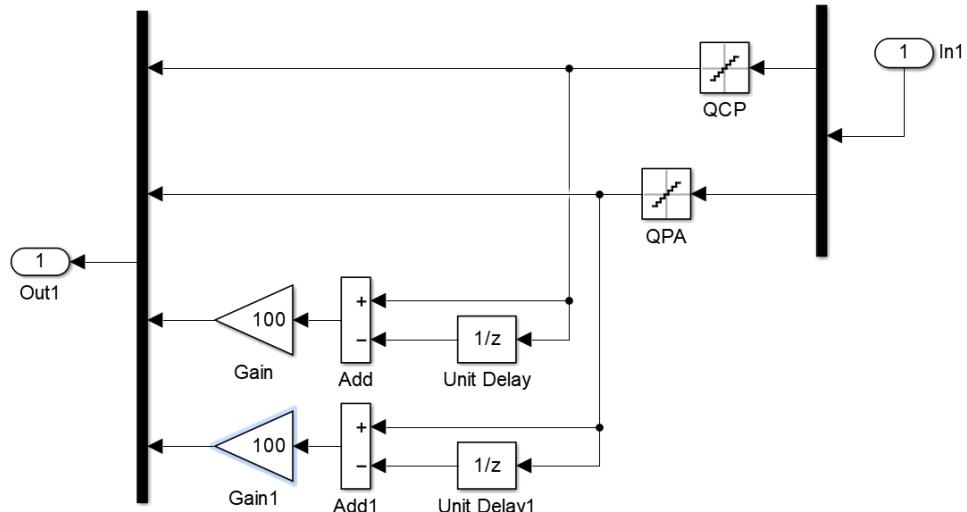
عند اختيار الحساس المناسب لقياس البارامتر الفيزيائي المطلوب، يجب أخذ عدد من العوامل статيكية والديناميكية بعين الاعتبار، القائمة التالية تتضمن العوامل الافتراضية الموجودة في معظم الحساسات.

Range	الفرق بين أقصى وأقل قيمة مقاسة
Resolution	أقل تغير يمكن للحساس أن يتاحسسه له
Accuracy	الفرق بين القيمة المقاسة والقيمة الحقيقية
Precision	القابلية لإعادة توليد نفس الاستجابة للتغير الفيزيائي ذاته
Sensitivity	نسبة التغير في واحدة الخرج إلى التغير في واحدة الدخل
Zero offset	وجود قيمة غير صفرية للخرج في حال عدم وجود دخل
Linearity	النسبة المئوية للفرق بين أفضل تقرير خطى و المندنى الأصلي
Zero drift	ازياح الخرج عن الصفر بعد فترة زمنية من عدم وجود دخل
Response time	التأخير الزمني بين الدخل والخرج
Bandwidth	التردد عند النقطة التي ينخفض فيها مطال الخرج بمقدار 3dB
Resonance	التردد عند النقطة التي يصل فيها مطال إشارة الخرج للقمة
Operating temperature	المجال الذي يستجيب فيه الحساس كما هو محدد
Deadband	مجال قيم الدخل التي لا يوجد عندها أي خرج
Signal-to-noise ratio	النسبة بين مطال الضجيج إلى الإشارة في الخرج

لقد تطرقنا في الفصل السابق عن وجود حساسين من نوع Incremental-encoder لقياس موضع العربية وزاوية النواص، في كل حساس قرص مثقب، عليه حلقتين من الثقوب، ويبلغ عددها 512 ثقب في كل حلقة، وبسبب آلية قياس المشفير المتزايد المستخدمة في شريحة PCI، نحصل على 2048 عدمة في كل دورة كاملة للقرص.

لنموذج Incremental-encoder على Simulink وضممه إلى نموذج النظام، نعلم مسبقاً أن:

- كل دورة كاملة لقرص الحساس 2048 عدّة على الخرج، تقابل $[rad] 2\pi$ لزاوية النواس.
- كل دورة كاملة لقرص الحساس 2048 عدّة على الخرج، تقابل $[cm] 15.6$ لموضع العربة.



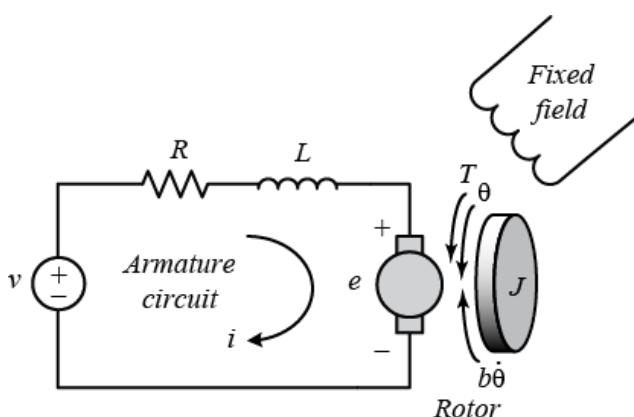
يوضح الرسم البياني الداخلية لصندوق Measuring الموجود سابقاً في ديناميكي النظام، يحوي صندوق المكّم، الذي يتم فيه ضبط أصغر قيمة يمكن للحساس أن يكتشفها، وذلك بالنسبة لمتحولات الحالة التي يتم قياسها (موضع العربة وزاوية النواس)، ويتم استهصال (سرعة العربة والسرعة الزاوية للنواس) باشتغال إشارة الموضع، أي بأخذ القيمة الحالية مطروحاً منها القيمة السابقة مقسومة على الفرق بين عينات الزمن (0.01).

المشغل (Actuator): الغرض من المشغل هو التحكم بجهاز فизيائي أو التأثير فizياً على البيئة، يوجد ثلاثة أنواع من المشغلات شائعة الاستخدام وهي الضواغط، المحرّكات ومدرّكات السيرفو.

المدرّكات الكهربائية لها ثلاثة أنواع رئيسية: مدرّك التيار المستمر DC، مدرّك التيار المتناوب AC والمدرّك الخطوي (Stepper-motor)، يمكن التحكم بمدرّك التيار المستمر بتغيير الجهد أو باستخدام PWM.

يوجد على التجربة مدرّك التيار المستمر ذو المغناط الدائمة (Permanent Magnet DC Motor)، يوضح

الشكل التالي جملة مدرّك.



المعادلات الكهربائية: سنفترض أن الدوار يمكن وصفه بعلف وديد ذو تدريضية α ومقاومة R_a ، ويجب أن نأخذ بعين الاعتبار القوة المدركة الكهربائية (back EMF) للمحرك، فتتعطى المعادلة التفاضلية للدارة الكهربائية بالعلاقة:

$$v_a(t) = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e$$

بما أن العلاقة خطية، نأخذ تحويل لبلاس للإشارات، فيكتب تابع النقل بالشكل:

$$\frac{i_a(s)}{v_a(s)-e(s)} = \frac{K_a}{1+\tau_a s}$$

$$\text{حيث } K_a = \frac{1}{R_a} \text{ ربح الدوار, } \tau_a = \frac{L_a}{R_a} \text{ الثابت الزمني للدوار.}$$

تمثل المعادلين التاليين القوة المدركة الكهربائية والعزم المقدم من المحرك:

$$T_M = K_i a$$

$$e = K\omega$$

المعادلات الميكانيكية: يقدم المحرك عزم ميكانيكي عندما تم تغذية الدوار بجهد كهربائي، هذا العزم يؤثر على الجملة الميكانيكية والتي يمكن وصفها بعطلة الدوار J ومعامل الاحتكاك F ، وممما كانت بيئة العمل، يجب أخذ عزم العمل المطبق على المحرك بعين الاعتبار، عندها إذا كان T هو عزم الدعولة، تكتب المعادلة بالشكل التالي:

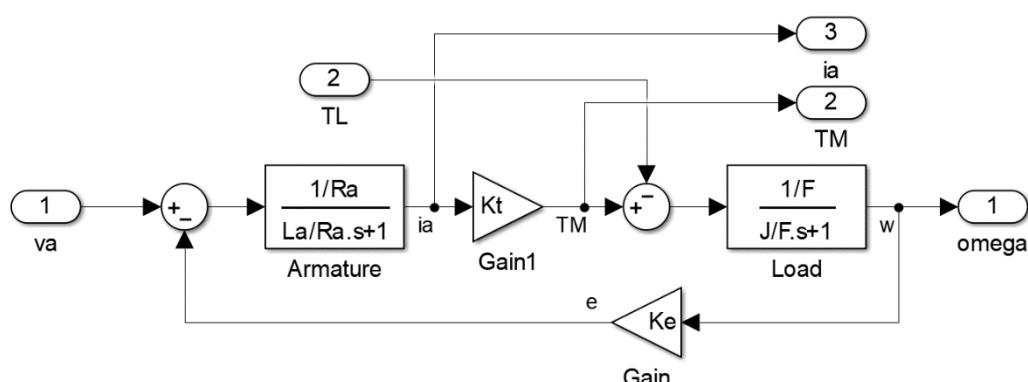
$$T_M - T_L = J \frac{d\omega}{dt} + F\omega$$

كما في الحالة الكهربائية، أيضاً المعادلات الميكانيكية خطية، ويمثل تابع النقل لها بالشكل:

$$\frac{\omega(s)}{T_M(s)-T_L(s)} = \frac{K_m}{1+\tau_m s}$$

$$\text{حيث } K_m = \frac{1}{F} \text{ الربح الميكانيكي, } \tau_m = \frac{J}{F} \text{ الثابت الزمني الميكانيكي.}$$

يوضح الشكل التالي نموذج المحرك في بيئة Simulink



يكون دخل النموذج هو الجهد المطبق على المحرك، والخرج هو العزم المقدم من قبل المحرك، إلا أن نموذج العربية والنواص له دخل وحيد وهو القوة المطبقة على العربة، حتى نحوال من عزم إلى قوة تبع العلاقة:

$$Force = \frac{Torque}{Radius}$$

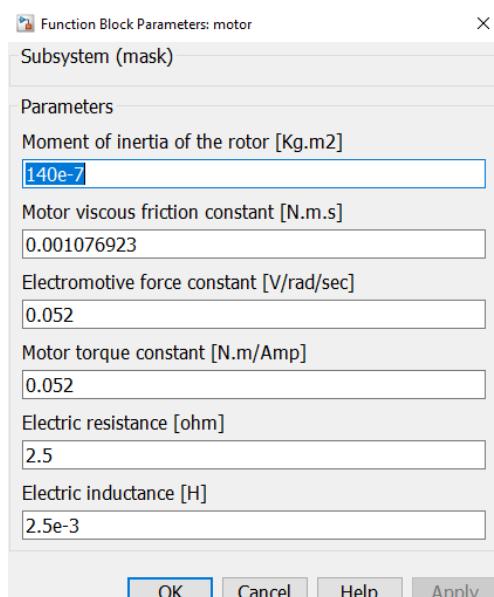
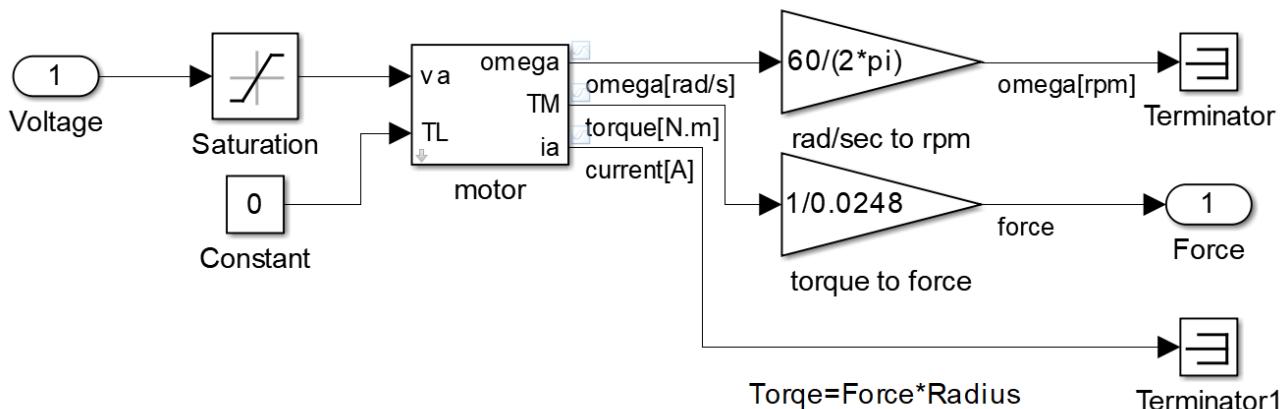
حيث أن نصف قطر القرص المثبت على المحرك هو $Radius = 0.0248m$

يظهر النموذج أيضاً سرعة المحرك ممثلة بواحدة [rad/s]، وفي حال أردنا تحويلها إلى وحدة [rpm] لمقارنتها مع القيم المذكورة في بيانات المحرك، نطبق العلاقة:

$$\omega[rpm] = \omega \left[\frac{rad}{sec} \right] * \left(\frac{60}{2\pi} \right)$$

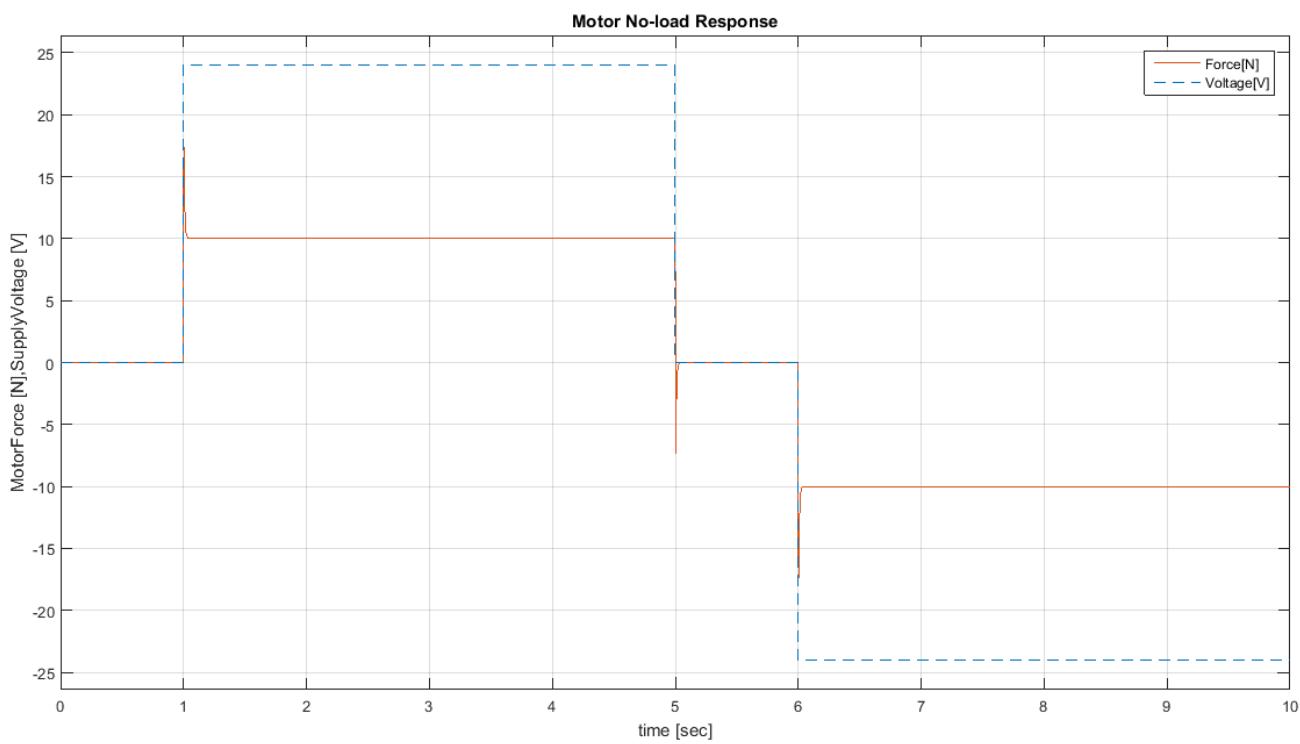
فيصبح المخطط الصندوقي للنموذج بالشكل:

$$[\text{rad/sec}] * (60/2\pi) = \text{rpm}$$



ملاحظة: غالباً ما تكون قيمة ثابت القوة المحركة الكهربائية K_e متساوية لقيمة ثابت عزم المحرك K_m ، في معظم المحركات.

عند ضبط البارامترات بقيمها الموجودة في بيانات المحرك (بالوحدات الدولية)، نحصل على الاستجابة التالية وذلك دون تطبيق حمولة:



7. طرق مختلفة للنحوذة الرياضية:

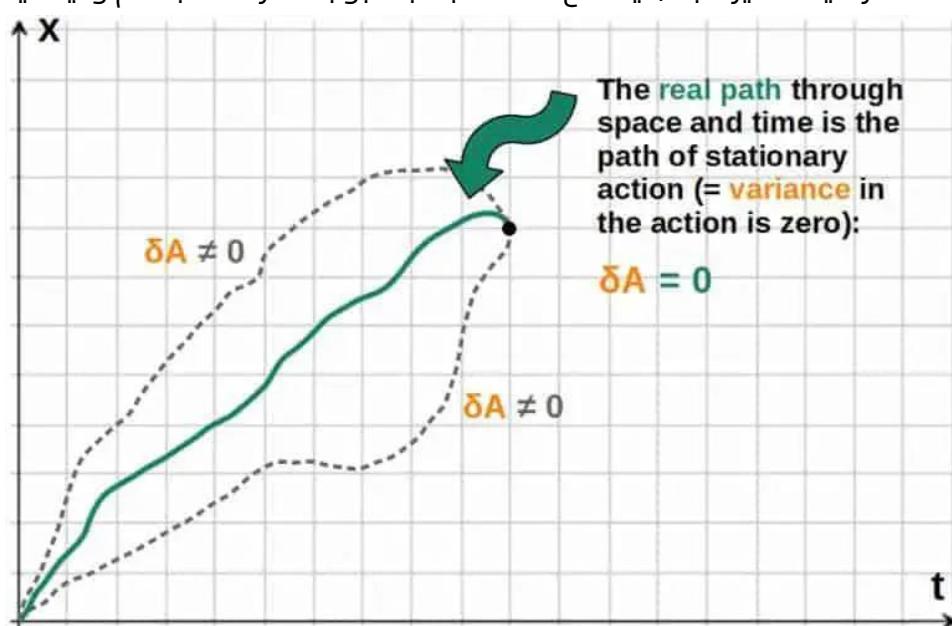
يوجد العديد من الطرق للحصول على النحوذة الرياضية لنظام فيزيائي التي تختلف عن ميكانيكا نيوتن المعتمدة سابقاً في الأطروحة، طبقنا بعضها على تجربة العربية والنواص، إحدى أشهر الطرق هي:

ميكانيكا لغرانج Lagrange Mechanics: النحوذة الفيزيائية باستخدام ميكانيكا لغرانج، هي طريقة رياضية لوصف دركة النظام من خلال مجموعة معادلات تسمى معادلات لغرانج، تربط هذه المعادلات بين القوى المطبقة على النظام وحركته وتصف كيف يتغير مع الزمن، تستخدم طريقة لغرانج لوصف مجال واسع من الأنظمة الفيزيائية، الأنظمة الميكانيكية البسيطة كالنواص والثابض حتى الأنظمة المعقدة الكهرومغناطيسية وميكانيك السوائل، مما يسمح بتوقع السلوك الفيزيائي للنظام.

يُعرف لغرانج على أنه الفرق بين الطاقة الحركية والطاقة الكامنة للنظام كالتالي:

$$L = K - P$$

ثم تُشتق معادلات الحركة باستخدام مبدأ الفعل الأدنى (Least Action)، وهو مبدأ في الفيزياء الكلاسيكية، ينص على أن الجسم يتبع المسار الذي يسمح له باستهلاك أقل طاقة ممكنة لحظياً، مع الأخذ بالاعتبار أن الحركة يجب أن تكون متواصلة، ولا يتشرط أن يكون المسار الذي يسلكه الجسم بين نقطتين هو الذي يمنح أقل استهلاك للطاقة وذلك لأن الاستهلاك اللحظي للطاقة هو الذي يكون أصغرياً أي أنه يحسب بالنسبة لمدة زمنية صغيرة جداً، يسمح هذا المبدأ بالتبؤ بمسارات الأجسام وديناميكيتها.



يتم إعطاء معادلات الحركة من خلال العلاقة:

$$\tau_i = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

حيث τ_i تمثل الإحداثيات العامة للنظام، وتمثل L أي قوى أو عزوم خارجية تطبق على النظام.

يعطى النموذج اللحظي للعربة والنواس باستخدام تابع لغرانج بالمعادلات:

$$\dot{x}_1 = x_3$$

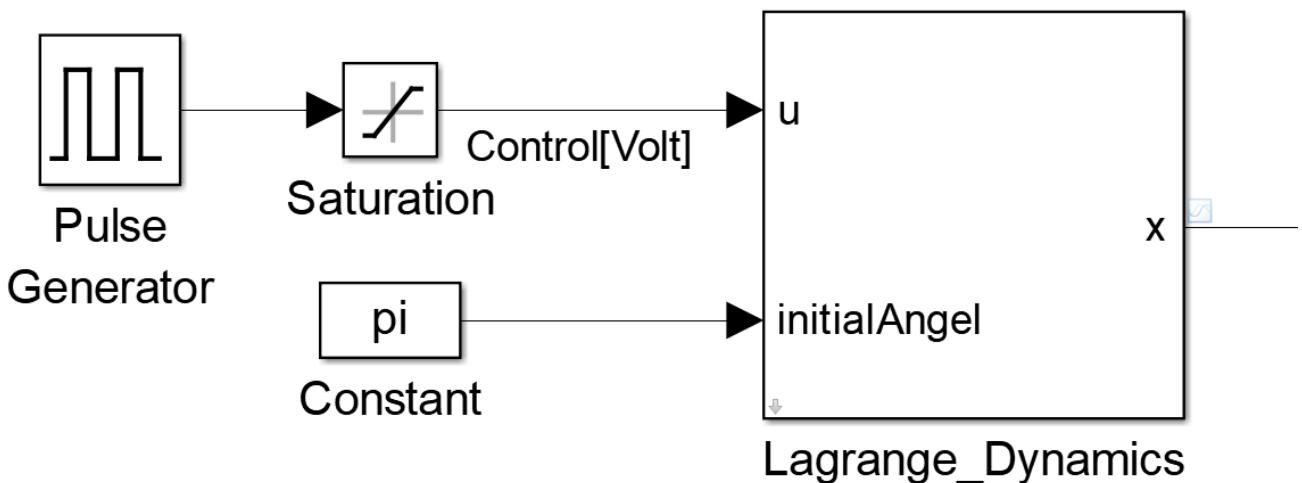
$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \frac{-m_p l I \sin \theta \dot{\theta}^2 + m_p^2 l^2 g \sin \theta \cos \theta - T_c I - f_p m_p l \cos \theta \dot{\theta} + I v_f u}{(m_p + m_c) I - m_p^2 l^2 \cos \theta^2}$$

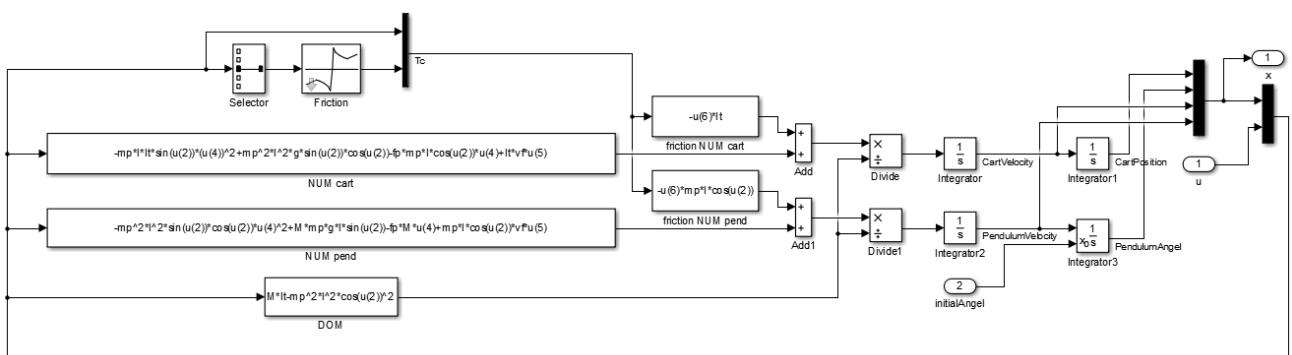
$$\dot{x}_4 = \frac{-m_p^2 l^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 + (m_p + m_c) m_p g l \sin \theta - T_c m_p l \cos \theta - f_p (m_p + m_c) \dot{\theta} + m_p l \cos \theta v_f}{(m_p + m_c) I - m_p^2 l^2 \cos \theta^2}$$

حيث أن $T_c(x_3)$ هو تابع الاحتكاك الموضح سابقاً، $I = J + m_p l^2$ ، $v_f = M/2.5$

وهو ممثل في بيئه Simulink، يمكن تحميل النموذج من الروابط في بداية الأطروحة.

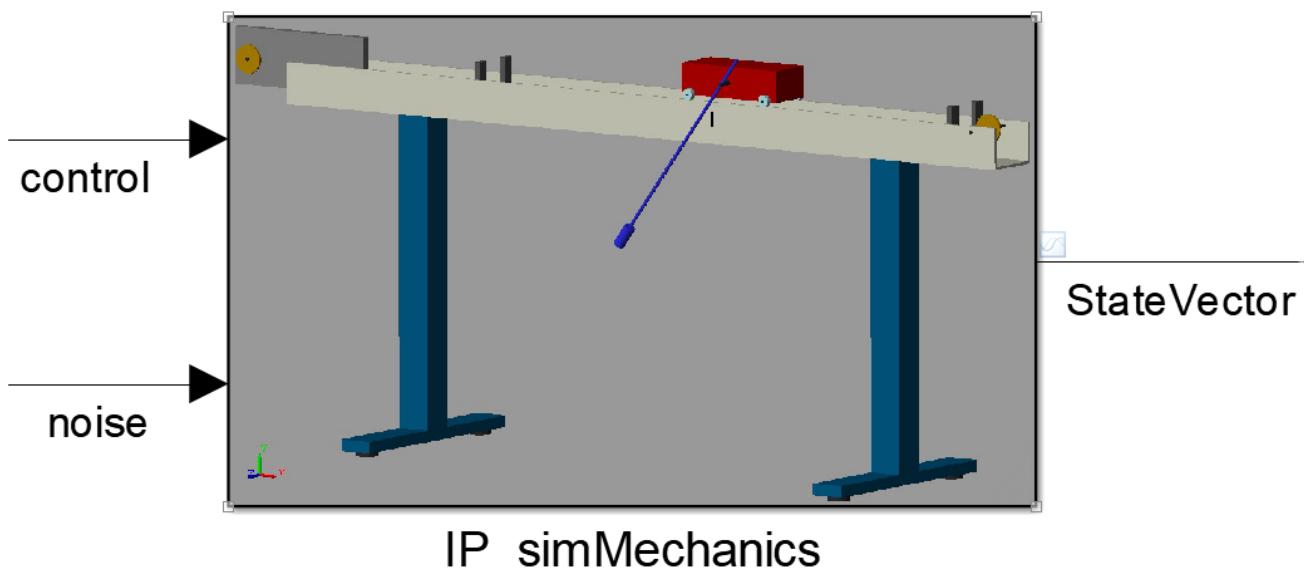


.Lagrange_Dynamics يبين الشكل التالي البنية الداخلية للصندوق

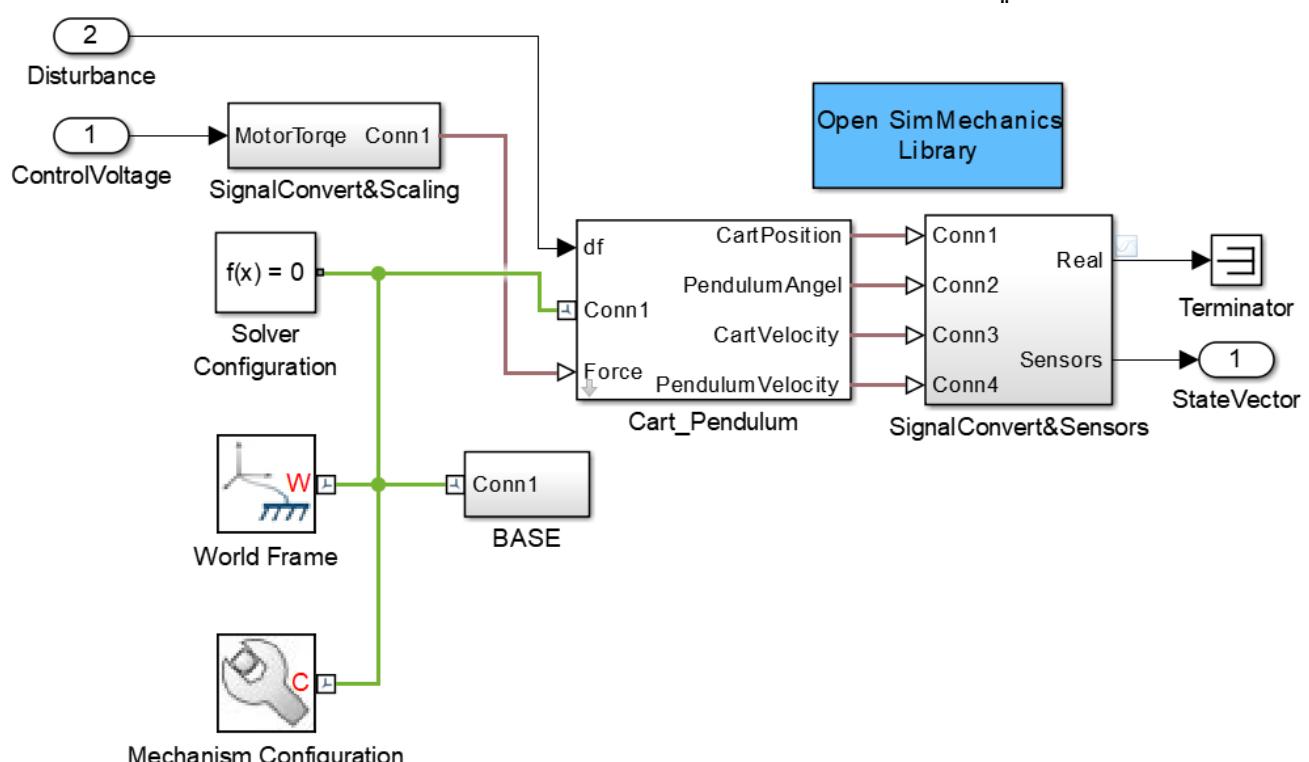


هي مكتبة في ماتلاب تقدم بيئة لمذكرة ومحاكاة الأنظمة الفيزيائية متضمنة الميكانيكية، الكهربائية، الهيدروليكية ومجالات فизيائية أخرى، وهي مزودة بصناديق أساسية من هذه المجالات، يمكنك تجميعها في نموذج لعنصر فزيائي، كالمحركات الكهربائية، المضخمات العملية، الصمامات الهيدروليكية ونماذج الدركية الميكانيكية، النماذج المبنية يمكن التحكم بها وتطوير نظام تحكم واختباره.

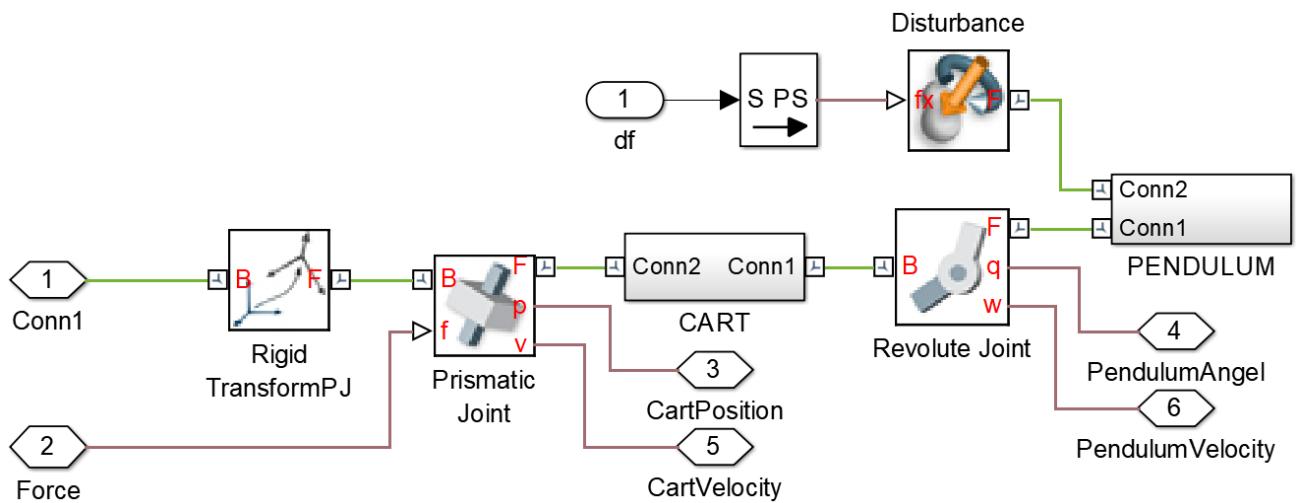
استخدمنا SimScape Mechanics لبناء نموذج فزيائي لتجربة العربة والنواس كالتالي:



يبين الشكل التالي البنية الداخلية لصندوق IP_simMechanics:



يسين الشكل التالي البنية الداخلية لصندوق Cart_Pendulum



أداة تعريف الأنظمة في Matlab، لبناء نماذج رياضية لأنظمة الديناميكية من بيانات الدخول والخرج المفتوحة، تسمح لك بإنشاء واستخدام نماذج لأنظمة الديناميكية التي لا يمكن نمذجتها بسهولة، تستطيع استخدام بيانات للدخل والخرج في المجال الزمني أو التردددي لتعريف توابع النقل المستمرة والمتقطعة، نماذج بارامترية، نماذج في فراغ الحالات.

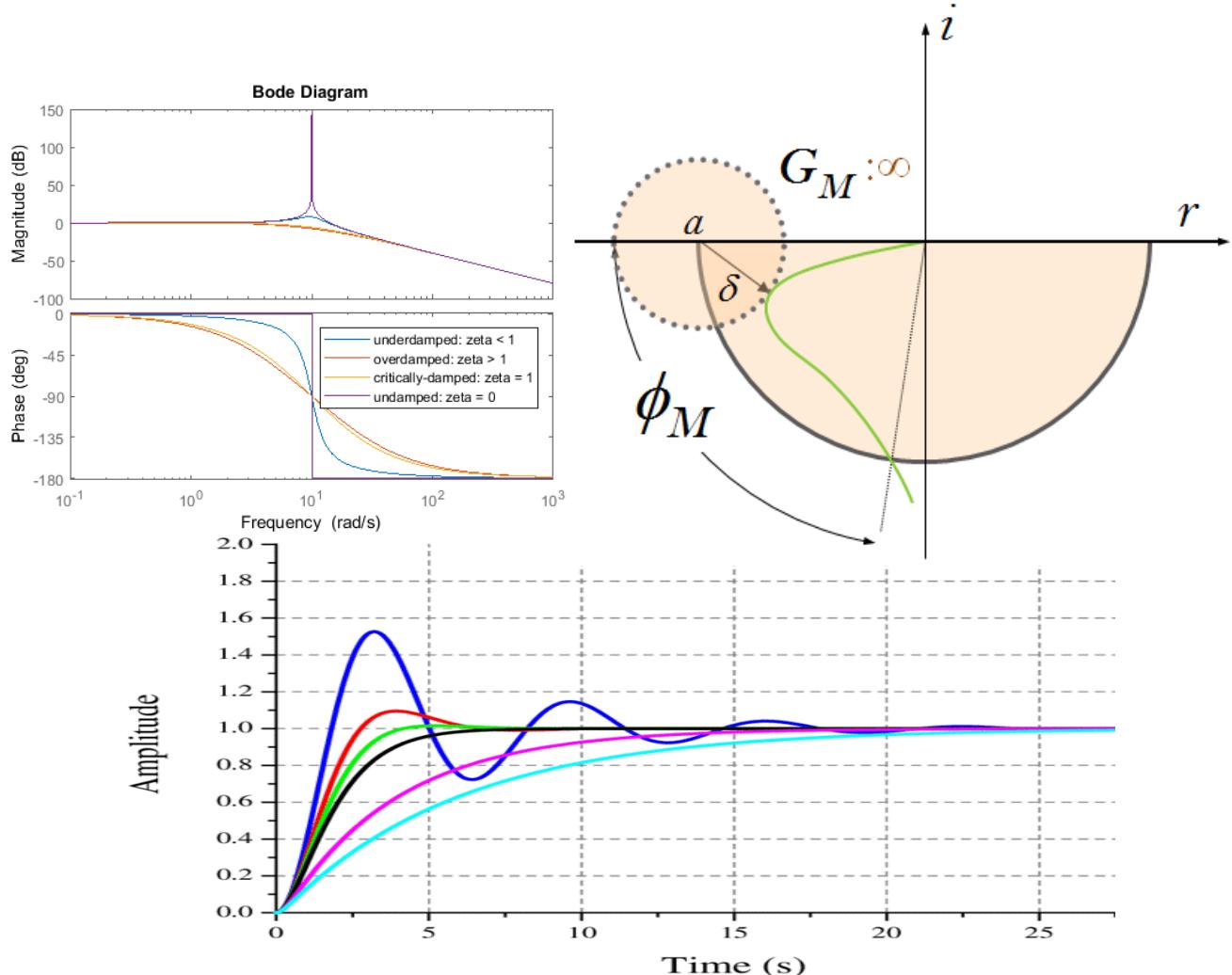
الفصل الرابع

تحليل النظام في المجالين الزمني والتردد़ي

1. نظرية عامة:

عند حصولنا على النموذج الرياضي للنظام سواء كان في فراغ الحالة أو بصيغة تابع انتقال، سنقوم بتحليل هذا النموذج لكي نستطيع التنبؤ بسلوك النظام في المجالين الزمني والترددِي، وذلك لأن أنظمة التحكم تُصمم لتحسين الاستقرار أو الاستجابة أو الغاء الخطأ الثابت أو الاهتزاز.

إن عملية التحليل هي فحص سلوك النظام لتعريفه وفهم خصائصه، مما يتضمن تحليل مداخل والنظام ومخارجه وتتابع الانتقال لنحدد كيف يتصرف تحت ظروف مختلفة، يستخدم تحليل الأنظمة لتصميم متخصص مناسب للنظام وذلك في مجالات متعددة، كالروبوتات، أنظمة السيارات، العمليات الصناعية، وأنظمة الفضاء، يمكن أيضاً تحليل نظام خاضع للتحكم لتحسين أداء المتخصص وزيادة قوته.



الاستقرار: سوف نطلق مصطلح Bounded Input Bounded Output(BIBO) لتعريف مفهوم الاستقرار، يكون النظام مستقراً إذا بقي الخرج محدوداً من أجل جميع قيم الدخل المحدودة، عملياً يمكن القول بأنّ النظام سوف لن يجذب أثواب فترة العمل.

تمثيل تابع الانتقال مفيد وخاصة من أجل تحليل النظام، إذا كانت أقطاب تابع الانتقال (قيم s للنظام عندما يساوي الصفر) تملك قيمة سالبة حقيقة عندما يكون النظام مستقراً، وإذا كانت الأقطاب تملك قيمة حقيقة عندتها يكون النظام غير مستقر، أما إذا كانت الأقطاب عقدية، عندتها يجب أن تكون في الجزء الأيسر (LHP) من المستوى العقدي لكي نضمن استقرار النظام، إذا كان هناك زوج من الأقطاب يقع على المحور التخييلي عندما يكون النظم على حدود الاستقرار ويميل إلى الاهتزاز، أما إذا كانت الأقطاب في الجزء الأيمن من المستوى العقدي عندتها لن يكون النظام مستقر ويُعتبر غير محدود(BIBO)، أي من أجل قيم الدخل المحدودة سوف تؤدي إلى استجابة غير محدودة في الخرج.

أقطاب نظام(LTI) في حال كان ممثلاً بشكل تابع الانتقال يمكن بسهولة ايجادها في بيئة MATLAB وذلك باستخدام التعليمية التالية:

```
>> SysPole = pole(G);
```

أما إذا كان النظام ممثلاً بصيغة فراغ الحالة تكون أقطاب تابع النقل هي ذاتها مصفوفة القيم الخاصة (eigenvalues) لمصفوفة النظام A , والتي تعطى بالقانون:

$Eig: (sI - A) = 0$

:MATLAB نستطيع استخدام التعليمية التالية لحساب القيم الخاصة لأي نظام (LTI) في بيئة

```
>> [A , B , C , D] = ssdata(G);  
>> pole = eig(A)
```

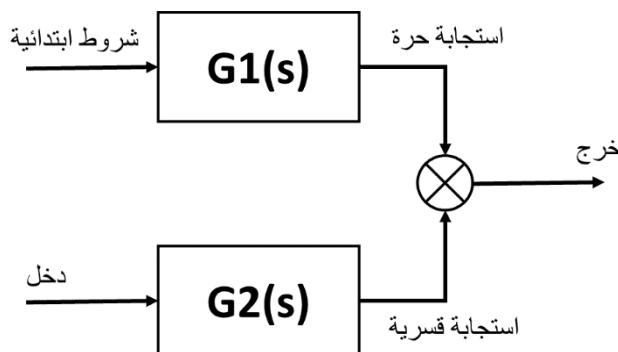
رتبة النظام: رتبة النظام الديناميكي يكون من رتبة أعلى مشتق من المعادلة التفاضلية الأساسية كما أنه يكون أعلى قوة لمحول لبلس s في مقام تابع الانتقال.

2. المجال الزمني:

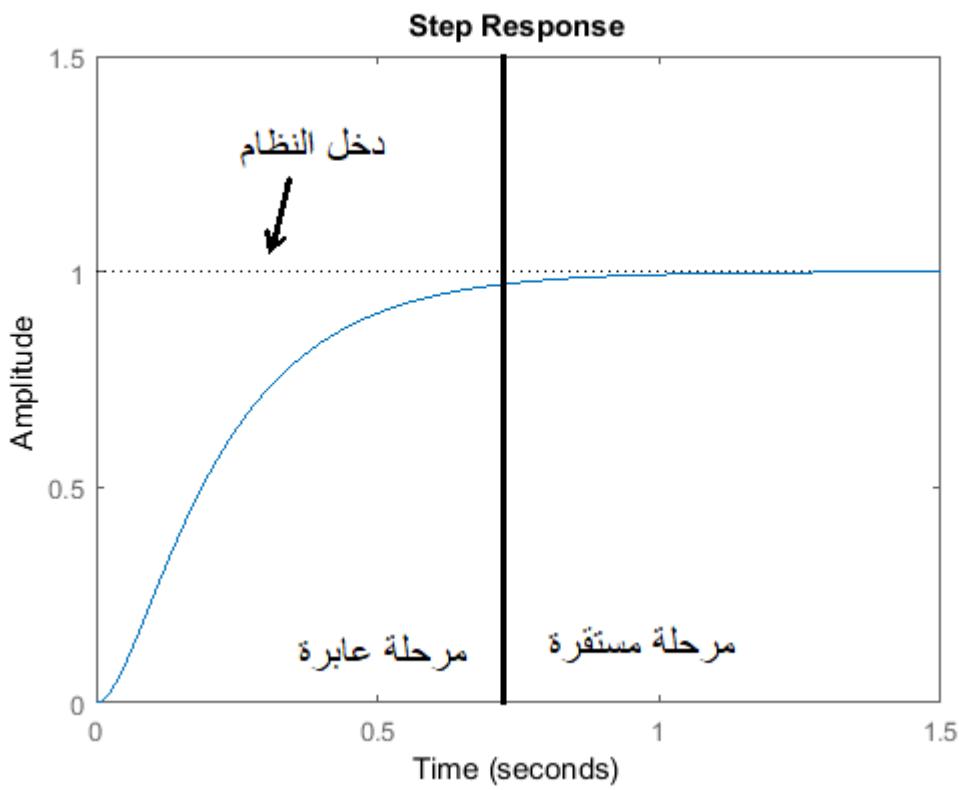
إن تحليل الاستجابة الزمنية لنظام ما تعني دراسة خواص إشارة خرج النظام الزمنية من أجل إشارة دخل قياسية للنظام كإشارة القفزة الواحدية والإشارة التصاعدية والإشارة القطعية ونبضة ديراك وعلاقة هذه الخواص بثوابت النظام.

بتحليل الاستجابة الزمنية لنظام ما، يمكن تحديد سلوك هذا النظام من حيث استقراره وسرعة استجابته وغيرها من الثوابت التي تعرف بثوابت الاستجابة الزمنية للنظام (time-response parameters)، تمكننا هذه الثوابت من التنبؤ باستجابة النظام لإشارة دخل غير قياسية ومن تصميم نماذج لأنظمة ذات خواص محددة.

تكون الاستجابة الزمنية لنظام خطى من مجموع استجابتين: الاستجابة الحرة (free response) والاستجابة القسرية (forced response)، تعرّف الاستجابة الحرة لنظام ما بأنها استجابة النظام لشروط ابتدائية غير صفرية ودخل يساوى الصفر وتعرّف الاستجابة القسرية لنظام ما بأنها استجابة النظام لدخل يختلف عن الصفر وشرط ابتدائية صفرية. وحيث أن النظم الخطى يوصف بمعادلات تفاضلية خطية فإن الاستجابة الحرة للنظام تتوافق الحل المتجانس لمعادله التفاضلية والاستجابة القسرية للنظام توافق الحل غير المتجانس لمعادله التفاضلية



تُعرّف الاستجابة الزمنية لنظام مستقر بمرحلتين: مرحلة عابرة transient response ومرحلة مستقرة steady state تمثل المرحلة العابرة الجزء من استجابة النظام الموافق للتغير حالة النظام من استجابة النظام من الحالة الأولى الآتية إلى الحالة النهائية (المستقرة) عند تطبيق دخل ما على النظام، بينما تمثل المرحلة المستقرة الجزء من استجابة النظام الموافق للحالة النهائية للنظام ويمكن القول بأن المرحلة العابرة هي استجابة النظام من لحظة تطبيق إشارة الدخل على النظام إلى لحظة وصول الاستجابة إلى المرحلة المستقرة وهي استجابة النظام اللانهائية (أي من أجل $(t \rightarrow \infty)$).



١. النظام من المرتبة الأولى:

هو أبسط نظام ديناميكي يمكن تحليله مثل نظام تخاذم كررة أو دائرة RC، ويكون الشكل العام للمعادلة التفاضلية لنظام من المرتبة الأولى:

$$\dot{y} + ay = bu \quad or \quad \tau \dot{y} + y = k_{dc}u$$

أما الشكل العام للتابع الانتقال له:

$$G(s) = \frac{b}{s+a} = \frac{k_{dc}}{\tau s + 1}$$

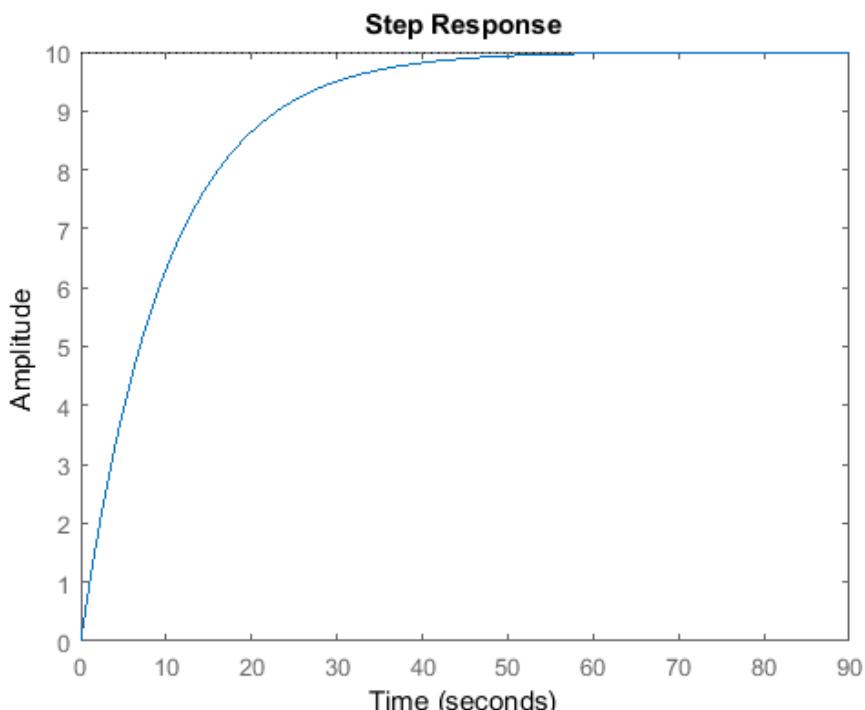
حيث البارامترات τ و k_{dc} *تعُّرف* خصائص النظام من المرتبة الأولى.

- الربح المستاتيكي k_{dc} : هو عبارة عن نسبة مطال القيمة النهائية لاستجابة النظام على مطال الدخل وذلك بتطبيقتابع القفزة الواحد على الدخل، ومن أجل توابع الانتقال المستقرة، فإن نظرية القيمة النهائية تبرهن بأن الربح المستاتيكي DC يكون بتعويض ($s = 0$) في تابع الانتقال، ومن أجل توابع الانتقال من المرتبة الأولى فإن الربح المستاتيكي يكون: $k_{dc} = b/a$

- الثابت الزمني: يكون $T_c = \tau = 1/a$ وهو الزمن الذي تستغرقه استجابة النظام حتى تصل إلى 36% من القيمة الثابتة النهائية (steady-state value) وذلك من أجل تابع قفزة واحدي على الدخل (حيث أن الشروط البدائية صفرية) أو ناقص 37% من القيمة البدائية للاستجابة الحادة للنظام.
- أقطاب النظام: يملك قطب واحد حقيقي، في حالة ($-a = \zeta$) إذا كانت قيمة a موجبة عندها يكون النظام مستقر وإذا كانت سالبة يكون النظام غير مستقر، أمّا الشكل العام للنظام من الدرجة الأولى لا يملك أصفار.
- الاستجابة الزمنية لتابع القفزة الواحدية: نستطيع حساب استجابة النظام من أجل دخل قفزة واحدة بمطال (u) باستخدام التعليمات التالية في بيئه ماتلاب كما هو موضح في المثال التالي:

```
>> k_dc = 5;
>> Tc = 10;
>> u = 2;
>> s = tf('s');
>> G = k_dc/(Tc*s+1);
>> step(u*G)
```

نحصل على استجابة من الشكل:



2. النظام من المرتبة الثانية:

هو الأكثر انتشاراً عملياً، وهو أبسط نظام ديناميكي يصف سلوك الاهتزاز، مثل نظام النابض والمحمد ونظام دارة (RLC)، في الحقيقة هناك عدة أنظمة من مراتب عليا تقرّب إلى نظام من المرتبة الثانية لتسهيل تحليل النظام.

الشكل القانوني للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = f(t) \quad \text{or} \quad \ddot{y} + 2\varepsilon w_n \dot{y} + w_n^2 y = k_{dc} w_n^2 u$$

أما الشكل القانوني لتابع النقل النظام من المرتبة الثانية، يملكقطيين وليس له أي أصفار:

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{k_{dc}w_n^2}{s^2 + 2\varepsilon w_n s + w_n^2}$$

البارامترات (w_n, k_{dc}, ϵ) تُعزّز خصائص النظام من المرتبة الثانية.

- الربح المستاتيكي (DC gain) أو k_{dc} تم تعريفه مسبقاً وبتعويض ($s = 0$) في الشكل العام نحصل على:

$$k_{dc} = \frac{1}{k}$$

- معامل التخاذم (٤): هو عبارة عن كمية ليس لها واحدة، تمثل نسبة الاهتزاز في استجابة النظام بسبب التأثيرات كالاحتكاك أو المقاومة الكهربائية ومن التعريف السابق:

$$\varepsilon = \frac{b}{2\sqrt{km}}$$

- التردد الطبيعي (w_n): وهو عبارة عن تردد بواحدة (rad/s) حيث يبدأ النظام بالاهتزاز عندما يكون معامل التأmand مساو للصفر ($\zeta = 0$).

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

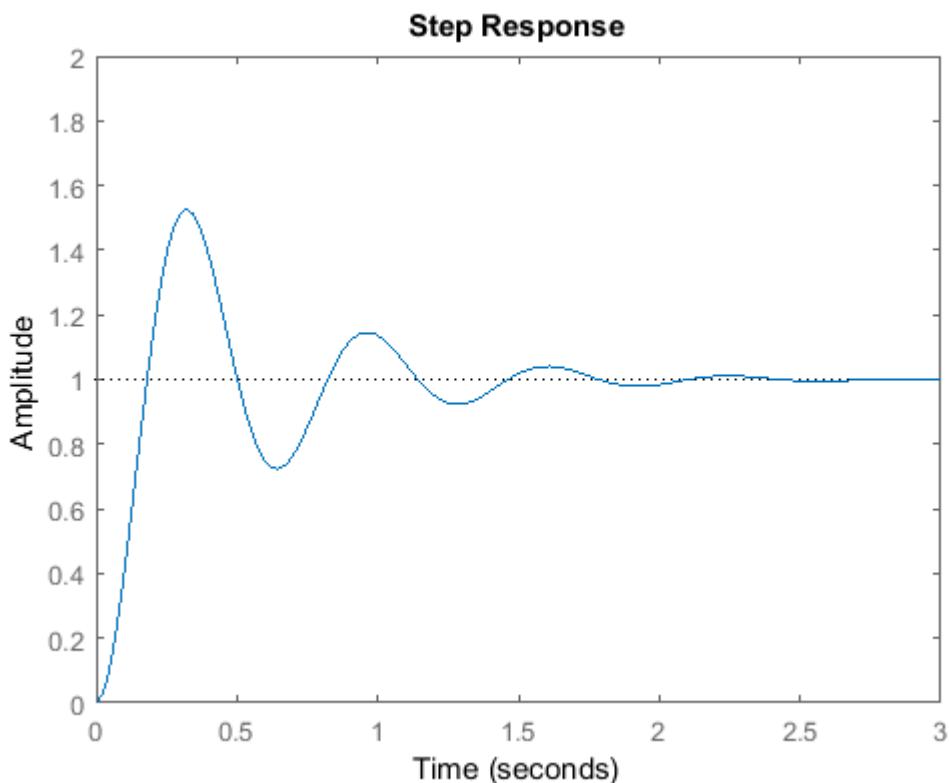
- أقطاب تابع الانتقال من الدرجة الثانية تعطى بالشكل القانوني:

$$s_p = -\varepsilon w_n \pm j w_n \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

هناك عدة حالات للنظام من الدرجة الثانية وذلك حسب قيمة(ϵ):

a. **الأنظمة الاهتزازية المترافقية:** إذا كانت ϵ عندما يكون النظام اهتزازي متزامن، في هذه الحالة تكون أقطاب النظام عقدية والجزء الحقيقي منها سالب لذلك يكون النظام فر، هذه الحالة مستقر ولكن يمتد حتى يصل إلى القيمة النهائية، بشكل خاص الاستدامة

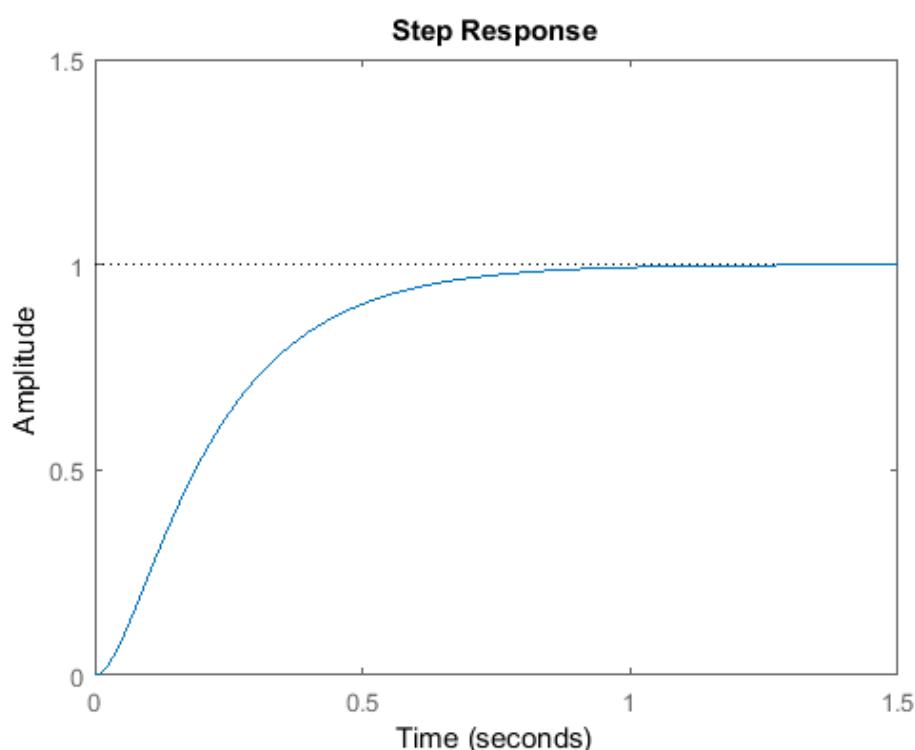
. $w_d = w_n \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ [rad/sec] الطبيعية تهتز مع وجود تبادل في التردد



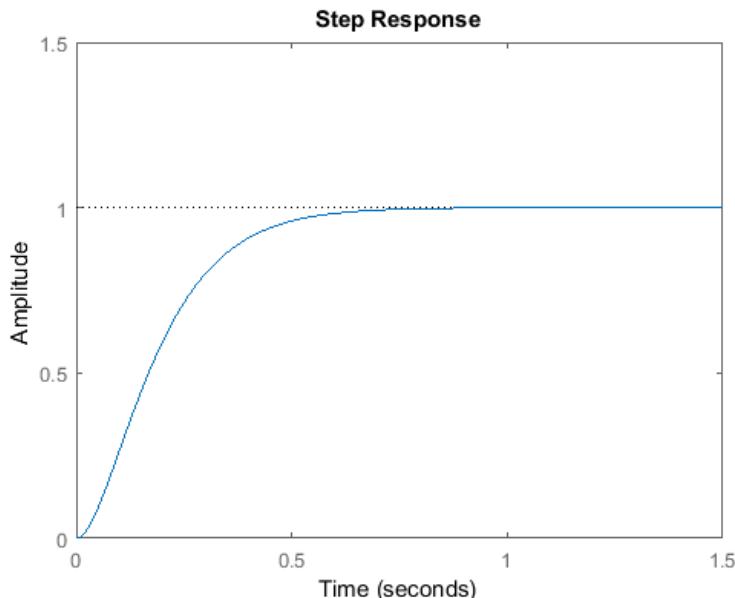
بـ. النـظـمةـ المـتـخـامـدةـ غـيرـ الـاهـتزـازـيـ: إـذـاـ كـانـتـ $\zeta < 1$ ـ عـنـدـهـاـ يـكـونـ النـظـامـ مـتـخـامـدـ وـكـلـ

الـقـطـلـيـنـ حـقـيقـيـنـ سـالـيـنـ لـذـكـ النـظـامـ يـكـونـ مـسـتـقـرـ وـغـيرـ اـهـتزـازـيـ وـيـكـونـ شـكـلـ الـاسـتـجـابـةـ

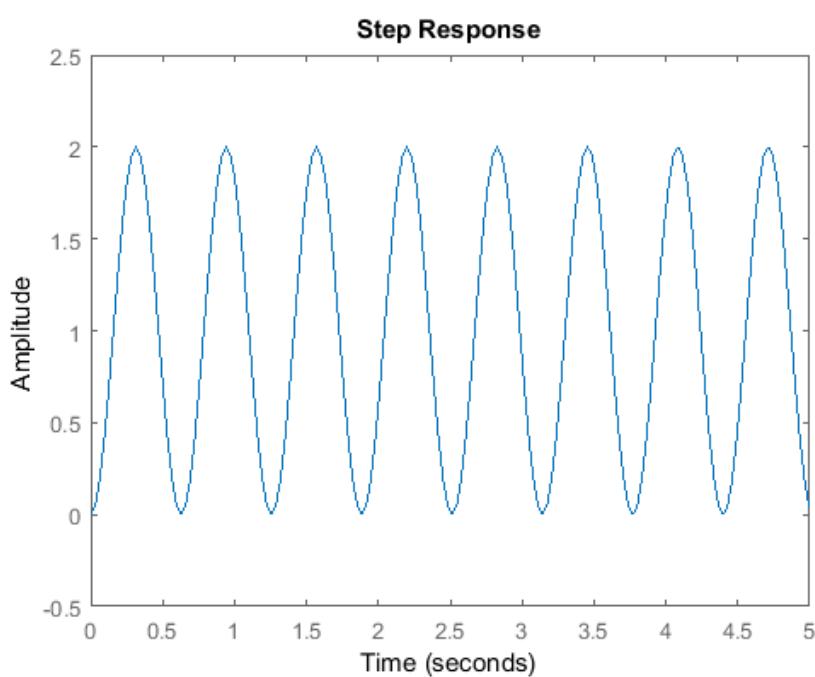
كـاشـلـيـ:



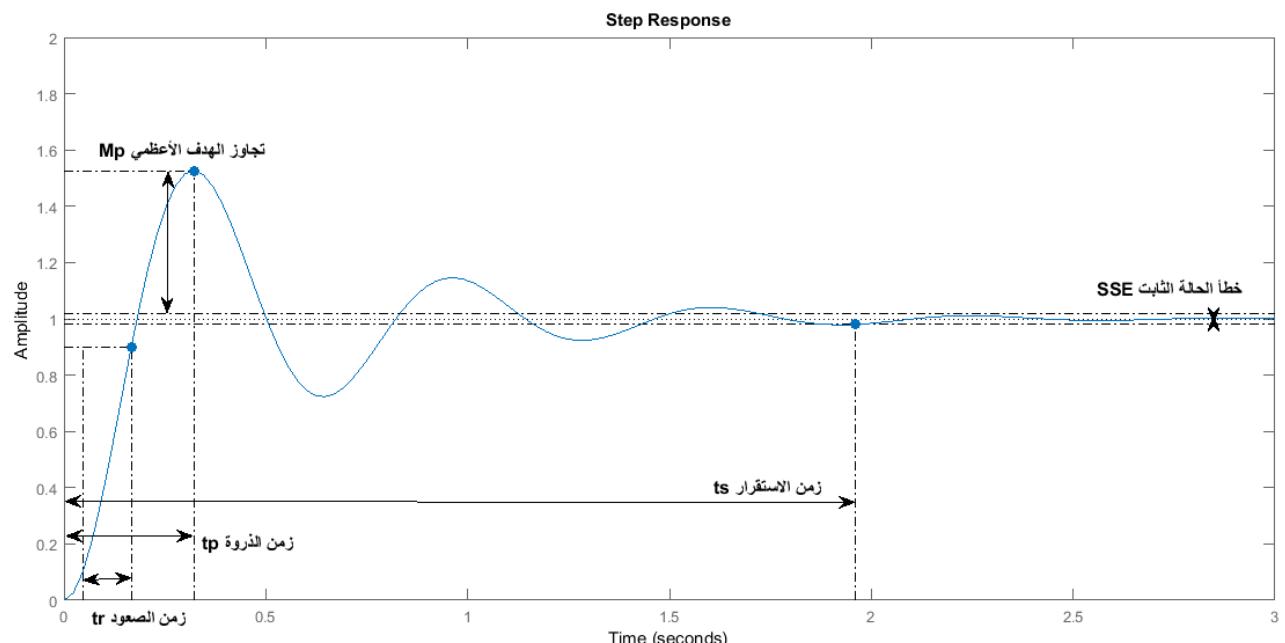
c. الأنظمة المتاخمة العرجية: إذا كانت $\zeta = 1$ عندما يكون النظام متاخم بشكل درج ويكون القطبين حقيقيين مع وجود مطال صغير $s_p = -\zeta w_n$ من أجل الأنظمة من المرتبة الثانية زمن الاستقرار يصبح أسرع عندما يكون النظام درج التاخمد، كما في الشكل:



d. الأنظمة غير المتاخمة: إذا كانت $\zeta = 0$ عندما يكون النظام غير متاخم وفي هذه الحالة أقطاب النظام تكون تخيلية بحثة، لذلك النظام يكون على حدود الاستقرار وتكون استجابته النظام مهتزة كما في الشكل:



3. خواص الاستجابة لتابع القفزة الواحدية:



a. زمن الاستقرار (t_s): ويمثل الزمن المعاين لدخول استجابة النظام ضمن مجال محدد من القيمة النهاية، دون أن تخرج منه ثانيةً.
 بالنسبة لأنظمة من المرتبة الأولى ومن أجل نسب تفاوت مختلفة يمكن الحصول على زمن الاستقرار كما هو موضح في الجدول التالي:

10%	5%	2%	1%
$T_s = 2.3/a = 2.3T_c$	$T_s = 3/a = 3T_c$	$T_s = 3.9/a = 3.9T_c$	$T_s = 4.6/a = 4.6T_c$

أما بالنسبة لأنظمة من المرتبة الثانية وفي حالة الأنظمة المتخامدة زمن الاستقرار يمكن إيجاده بشكل تقريري عن طريق المعادلة التالية:

$$T_s = \frac{-\ln(\text{tolerance fraction})}{\varepsilon w_n}$$

10%	5%	2%	1%
$T_s = 2.3/(\zeta * w_n)$	$T_s = 3/(\zeta * w_n)$	$T_s = 3.9/(\zeta * w_n)$	$T_s = 4.6/(\zeta * w_n)$

ومن أجل نسبة تفاوت 1% يكون:

$$T_s \approx \frac{4.6}{\varepsilon w_n}$$

نلاحظ أنه كلما كانت نسبة التفاوت أضيق كلما احتاجت استجابة النظام وقت أطول لكي تدخل ضمن المجال.

b. زمن الصعود (T_r):

وتوافق الزمن اللازم لانتقال الاستجابة من $\alpha\%$ من المستوى السفلي إلى $\beta\%$ للمستوى العلوي من القيمة النهاية ومن أجل الأنظمة من المرتبة الأولى يكون المجال الافتراضي من 10% حتى 90%, أما بالنسبة لأنظمة من المرتبة الثانية يحسب من العلاقة التالية:

$$T_r \approx \frac{1.8}{w_n}$$

وذلك من أجل المجال الافتراضي 90% - 10%.

c. زمن التأخير (T_d):

ويمثل الزمن الموافق لوصول استجابة النظام إلى 50% من القيمة النهاية.

d. زمن الذروة (T_p):

ويوافق الزمن اللازم لوصول الاستجابة إلى القيمة الاعظمية الأولى (القيمة الأولى للستجابة).

e. تجاوز الهدف الأعظمي المئوي (M_p):

وهو عبارة نسبة استجابة النظام التي تجاوزت القيمة النهاية، ومن أجل الأنظمة من المرتبة الثانية المتستخدمه النسبة المئوية للتجاوز الأعظمي متعلقة مباشرة بمعامل التخادم، يمكن حسابه كنسبة مئوية عن طريق المعادلة التالية:

$$M_p = e^{\left(\frac{-\varepsilon\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)}$$

$$\varepsilon = \frac{-\ln(M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \ln(M_p)^2}}$$

توفر بيئه ماتلب واجهة مستخدم قوية من أجل تحليل الأنظمة الخطية (LTI) والتي يمكن الوصول إليها عن طريق التعليمية التالية

```
>> linearSystemAnalyzer('step', G)
```

إذا قمنا بالضغط بالزر اليمنى للماوس على رسمة الاستجابة الخطوية، وقمنا باختيار (Characteristics)، سوف نحصل على عدة خصائص للنظام مثل ذروة الاستجابة، زمن الاستقرار، زمن الصعود وغيرها من الخصائص.

ملاحظة: عند تصميم نظم التحكم الآلي يتم في كثير من الأحيان تحديد مواصفات الأداء المرغوب للنظام في الحلقة المغلقة في المجال الزمني تحديد مواصفات الاستجابة الزمنية المرغوبة لتابع القفزة الواحدية للنظام في الحلقة المغلقة، غالباً ما يتم تحديد مواصفات الاستجابة المرغوبة للنظام بتحديد قيمة نقطتين فقط من النقاط، كقيمة تجاوز الهدف الأعظمي M_p وزمن الصعود T_r أو قيمة مجال السماح (5% أو 2%) وزمن الاستقرار T_s .

نلاحظ أن المتطلبات السابقة متناقضة بمعنى أنه لا يمكن تقليل تجاوز الهدف الأعظمي وتصغير زمن الصعود في نفس الوقت لأنه بتقليل تجاوز الهدف الأعظمي يزداد زمن الصعود لذلك لابد من إيجاد تسوية بين هذه المتطلبات.

2. المجال التردددي:

إنَّ الأنظمة من النوع I+II تملك خاصية هامة، وهي في حال كان دخل النظام جيبياً، عندها فإنَّ الخرج سيكون جيبياً أيضاً عند التردد ذاته، إلا أنه يختلف بالمطال والصفحة، هذا الفرق تابع للتردد ويُعرَّف الاستجابة التردديّة للنظام.

يمكن الحصول على الاستجابة التردديّة لنظام ممثَّل بصيغة تابع الانتقال، وذلك بإنشاء شعاع من الترددات من قيمة ثابتة وحدى اللانهاية واحسب قيمة تابع الانتقال عند هذه الترددات، إذا كان $G(s)$ تابع انتقال في الحلقة المفتوحة للنظام w هي شعاع الترددات، عندها نرسم $G(jw)$ كتابع للتردد، بما أنَّ $G(jw)$ هو عدد عقدي، فإننا نستطيع رسم المطال والصفحة (تمثيل Bode)، أو موضعه على المستوى العقدي (Nyquist مخطط).

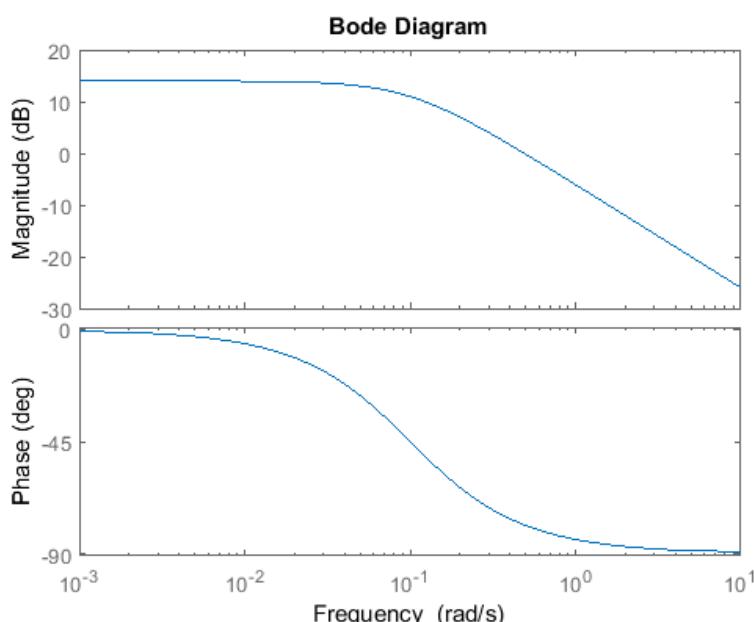
1. مخطط بود أو المنحني اللوغاريتمي: Bode

تمثل الاستجابة التردديّة للنظام في مخطط بود بمنحنيين، منحني مطال تابع الانتقال بالديسيبل ومنحني فرق الصفحة بالدرجة، كتابعين للتردد.

يُظهر مخطط Bode تمثيل لوغاريتمياً للتردد لعرض الاستجابة في مجال واسع من الترددات، ويعرف المطال الممثَّل بالديسيبل بالعلقة:

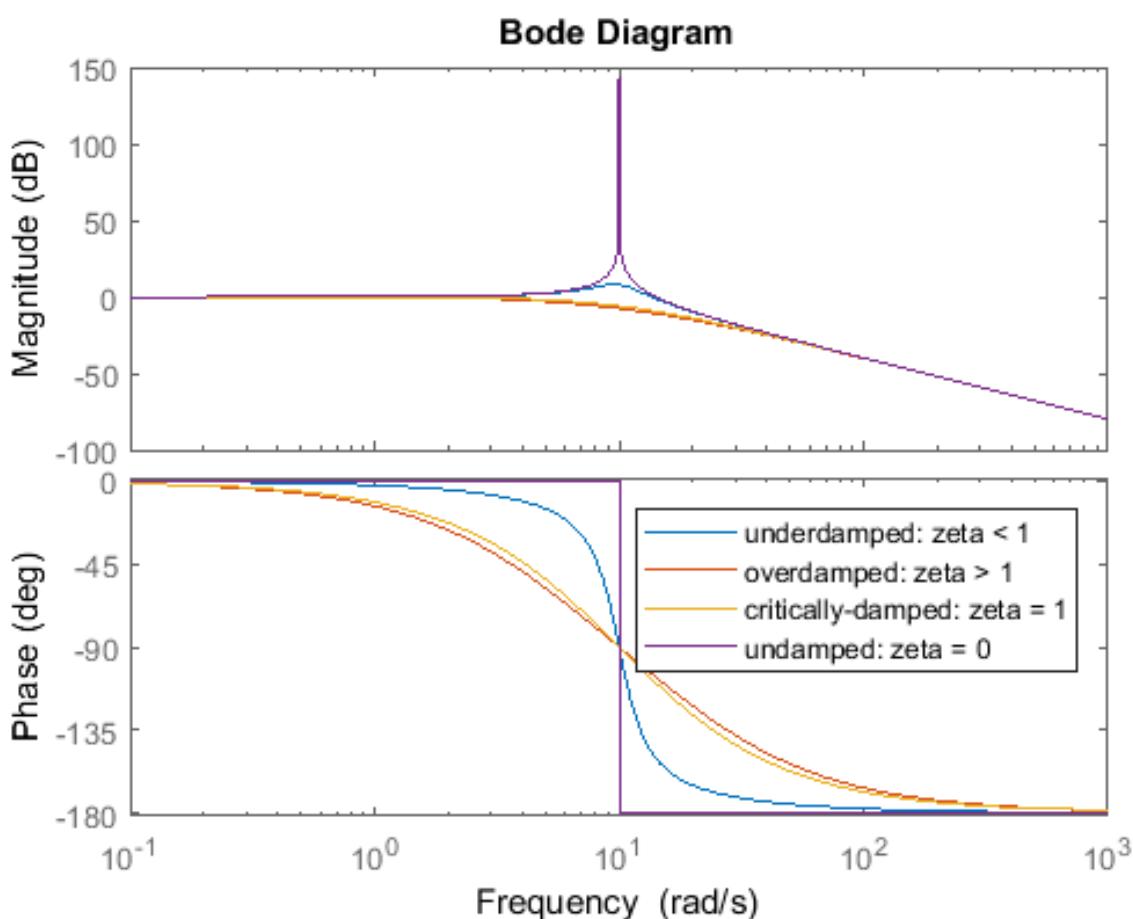
$$M_{dB} = 20 \log_{10}(M)$$

بالنسبة لمدحور التردد، فإن التمثيل بالديسيبل يسمح لنا بعرض مجال واسع من مميزة المطال في رسمة واحدة،



النظام من المترتبة الأولى: يكون مطاله عند الترددات المنخفضة مساوياً (K_{dc}), و تتحدى مميزة المطال عند التردد المساوي للقيمة المطلقة للقطب ($w=a$), عندها تنخفض dB 20 لكل زيادة من رتبة 10ⁿ على محور التردد (ميل بمقدار dB/decade -20-), تكون مميزة الصفحة مقارة لصفر درجة عند الترددات المنخفضة، وتقرب مع 90- درجة عند الترددات العالية، تتغير مميزة الصفحة بين الترددين 0.1 و 10 بما يقارب 45- درجة لكل زيادة بمقدار 10ⁿ على محور التردد أي بما يعادل (45 degrees/decade).

النظام من المترتبة الثانية: يظهر الشكل التالي مخطط Bode للمطال والصفحة لجميع حالات معامل التخاذم:



MMI المطال لأنظمة من المترتبة الثانية تنخفض بمقدار (40 dB/decade) في النهاية، بينما تتغير مميزة الصفحة من 0 حتى 180- درجة، في الأنظمة الاهتزازية المتخاذمة، كما أنها نرى قمة ضيقة قرب التردد الطبيعي، $\omega_n = [rad/s]$ ، إن حجم ومقدار حدة القمة يعتمد على التخاذم في النظام، ويعرف كمعامل للجودة Q-Factor وهو مهم في معالجة الإشارة

$$Q = \frac{1}{2\zeta}$$

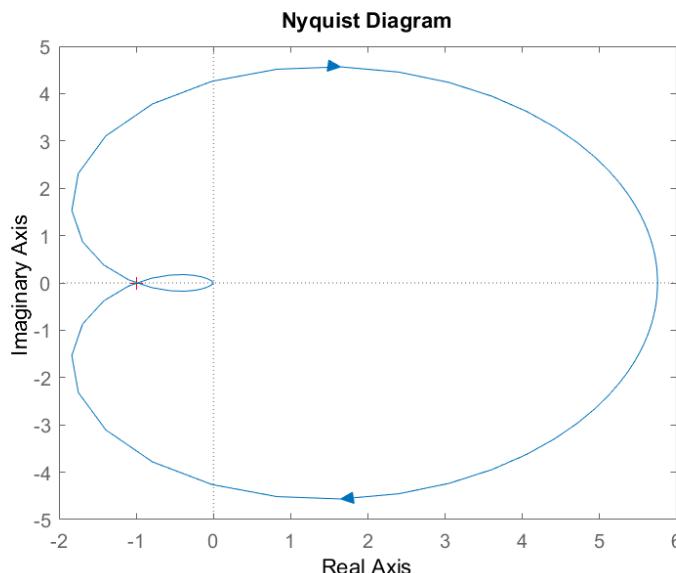
نعدد فيما يلي خصائص مميزة بود:

- تردد العبور ω_{gc} : ويوجد ترددان للعبور: تردد العبور للمطال ω وهو التردد الزاوي المقابل لمطال $dB = 0$, وتردد العبور لصفحة ω_p . وهو التردد الزاوي المقابل لصفحة -180 degree .
 - تردد عرض الحزمة ω_b : هو التردد الزاوي المقابل لانخفاض المطال بالديسيبل بمقدار $3 dB$ تحت القيمة المقابلة للتردد 0 rad/sec , يقوم النظام بترشيح مركبات إشارة الدخل ذات الترددات الأعلى من تردد القطع ω بينما يقوم بتمرير مركبات إشارة الدخل ذات الترددات الأدنى من تردد القطع ω_b .
 - عرض الحزمة Bandwidth: ويقابل المجال الترددي $[0, \omega_b]$ وتشير إلى درجة ملائمة النظام لإشارة الدخل الجيبية.
 - معدل القطع Cutoff rate: وهو ميل منحني المطال اللوغاريتمي حول تردد القطع وهو يشير إلى مدى تمييز النظام لإشارة الدخل من الضجيج.
- تستخدم تعليمية `bode` لرسم منحني بود في ماتلاب بالشكل التالي:

```
>> bode(sys)
```

2. مخطط نايكويسن أو المنحني القطبي Nyquist Diagram:

المنحني القطبي لتابع الانتقال الجيبى (jwG) يمثل العلاقة بين منحني المطال للتابع مع زاويته لدى تغير التردد من الصفر إلى اللانهاية في الإحداثيات القطبية (أي أن كل قيمة عقدية تمثل بشكل قطبي بمطال وزاوية).



إن مخطط نايكويست يسمح لنا بتوقع استقرار و خواص النظام في الحلقة المغلقة من مراقبة سلوكه في الحلقة المفتوحة.

معايير كاوشي Cauchy Criterion: مبرهنة كاوشي (من التحليل العقدي)، عندأخذ إطار مغلق في المستوى العقدي، و تمثيله بتابع عقدي $G(s)$ ، فإن عدد المرات التي يطوق فيها $G(s)$ نقطة المبدأ تساوي عدد أصفار $G(s)$ المحاطة بإطار التردد مطروحاً منها عدد أقطاب $G(s)$ المحاطة بإطار التردد، تحسب تطبيقات نقطة الأصل على أنها موجبة إذا كانت بنفس اتجاه الإطار المغلق الأصلي وسالبة إذا كانت بالاتجاه المعاكس.

وبما أننا نريد التحكم بالنظام، لذلك سنوئم بالحلقة المغلقة لتابع الانتقال

$$\frac{G(s)}{1+G(s)}$$

إذا كان $G(s) + 1$ يطوق نقطة الأصل، فإن $G(s)$ يطوق النقطة -1، لذلك في حال أردنا دراسة الاستقرار في الحلقة المغلقة، نحتاج لمعرفة فيما إذا كان يوجد أي أقطاب للحلقة المغلقة في النصف الأيمن من المستوى العقدي، لذلك نلاحظ أن سلوك مخطط نايكويست حول النقطة -1 - الواقعة على المحور الحقيقي شديد الأهمية.

استقرار الحلقة المغلقة دسب مخطط Nyquist: إن عدد المرات التي يدور فيها مسار نايكويست حول النقطة -1 - مساوية لعدد أصفار تابع النقل في الحلقة المغلقة المحاطة بإطار التردد مطروحاً منها عدد الأقطاب المحاطة بإطار التردد ($P = Z - N$)، يمكننا الحكم على استقرار النظام ذو الحلقة المغلقة من مخطط نايكويست للنظام في الحلقة المفتوحة من القانون:

إذا كان $N + Z = P$ موجباً، عندها يكون النظام في الحلقة المغلقة غير مستقر، حيث أنّ:

- Z هي عدد الأقطاب الحقيقية الموجبة (غير مستقرة) للنظام في الحلقة المغلقة.
- P هي عدد الأقطاب الغير مستقرة للنظام في الحلقة المفتوحة.
- N هي عدد المرات التي يطوق فيها مخطط نايكويست النقطة (-1).
- الدوران حول -1 مع عقارب الساعة يحسب كدوران موجب.
- الدوران حول -1 بعكس عقارب الساعة يحسب كدوران سالب.

بمعرفة عدد الأقطاب في النصف الأيمن من المستوى العقدي (غير المستقرة) للحلقة المفتوحة P ، وعدد الدورانات حول النقطة -1 - التي يقوم بها مسار نايكويست N ، نستطيع الحكم على استقرار الحلقة المغلقة للنظام، إذا كان $N + Z = P$ موجباً عندها يكون النظام في الحلقة المغلقة غير مستقر.

تستخدم تعليمة nyquist لرسم منحني Nyquist في ماتلب بالشكل التالي:

```
>> nyquist(sys)
```

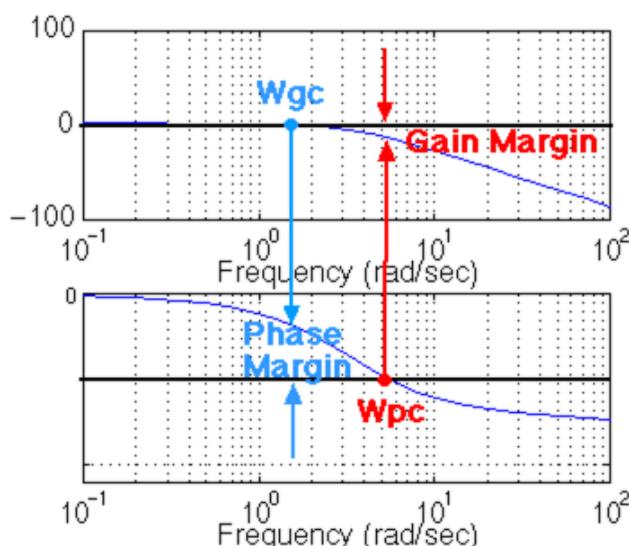
3. هامش الربح والصفحة:

تستخدم الاستجابة التردية لتحديد مدى قوّة النّظام "System Robustness", كمثال, ما مدى قرب النّظام حتّى يصبح غير مستقر؟، وهنا نستخدم قيمتين, هامش الربح (Gain margin), وهامش الصفحة (Phase margin), لتحديد الهامش الذي يملّكه النّظام ليصبح غير مستقر.

هامش الربح Gain margin: يُعرف على أنه التغيير المطلوب في ربح الحلقة المفتوحة لجعل النّظام في الحلقة المغلقة غير مستقر, يمكن للأنظمة ذات هامش الربح الكبير أن تحتمل تغييرات أكبر في بارامترات النّظام قبل أن تصبح غير مستقرة في الحلقة المغلقة.

هامش الصفحة Phase margin: يُعرف على أنه الإزاحة المطلوبة في الحلقة المفتوحة لجعل النّظام في الحلقة المغلقة غير مستقر, وهو يقيس أيضًا نسبة تفاوت النّظام للتأخير الزمني, إذا وجد تأخير زمني للنّظام أكبر من ω_{gc} في الحلقة (حيث أن w هو التردد بوحدة [rad/sec] حيث المطال 0, و PM هو احتياطي الصفحة مقدراً بالراديان) عندها سيصبح النّظام في الحلقة المغلقة غير مستقر.

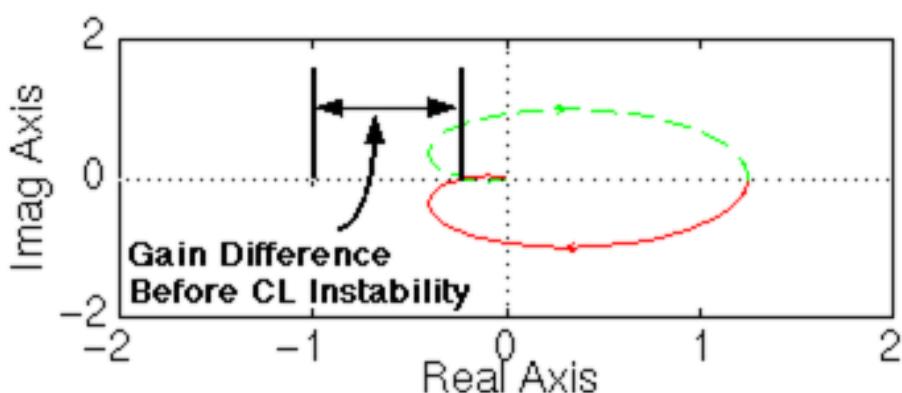
حساب الاحتياطي من المميزة اللوغاريتمية Bode: إن هامش الصفحة هو الكمية الإضافية من تأخير الصفحة المطلوب لجعل صفحة النّظام في الحلقة المفتوحة تبلغ 180 - درجة, بدأً من التردد الذي يكون عنده مطال الحلقة المفتوحة للنّظام يساوي 0 dB (تردد العبور للمطال ω_{gc}), كما أن هامش الربح هو الكمية الإضافية [dB] المطلوبة لجعل المطال للنّظام في الحلقة المفتوحة يبلغ 0 dB بدأً من التردد الذي تكون عنده الصفحة 180 - درجة (تردد العبور لصفحة ω_{pc}).



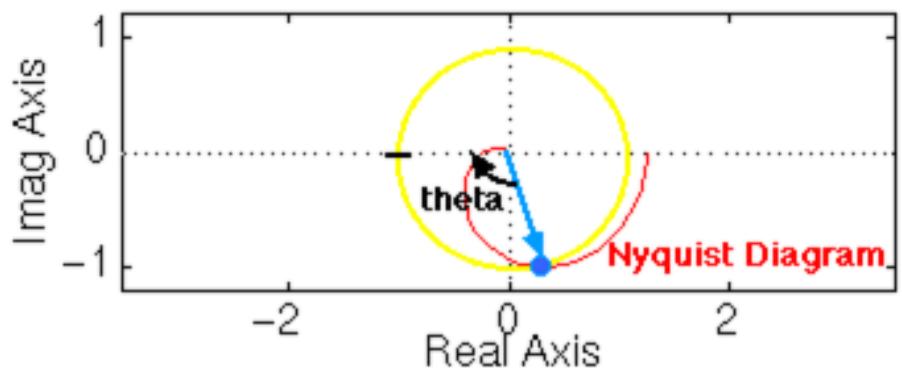
يمكن حساب الاحتياطي باستخدام ماتلاب من التعليمية:

```
>> margin(G)
```

حساب الاحتياطي من المميزة القطبية Nyquist: إن النظام الموضح بالشكل التالي، يصبح غير مستقر في الحلقة المغلقة إذا ازداد الربح عن مجال محدد، إن المجال الواقع على المحور الحقيقي السالب بين $-a$ والنقطة -1 (نُعرّف a على أنها النقطة حيث تكون الصدفة -180 درجة، أي عندما يقطع مسار نايكويسن المحور الحقيقي) يمثل كمية الزيادة التي يمكن أن يتفاوت فيها الربح حتى يدخل النظام في الحلقة المغلقة منطقة عدم الاستقرار. ويعطى بالعلاقة $G_M = \frac{1}{a}$.



يُعرف أيضاً احتياطي الصدفة على أنه الإزاحة المطلوبة في صفحة الحلقة المفتوحة عند الربح الواحد، لجعل النظام في الحلقة المغلقة غير مستقر، كما هو موضح في الشكل التالي:



نعلم مسبقاً أن النظام سيصبح غير مستقر في حال طوق مسار نايكويسن النقطة -1 ، عند إزاحة المسار بزاوية θ ، سوف يلمس هذه النقطة على المحور الحقيقي السالب، جاعلاً النظام على حدود الاستقرار في الحلقة المغلقة، عندها تدعى زاوية الإزاحة بهامش الصدفة (ممثلاً بالدرجات)، لإيجاد النقطة التي يمكن عندها حساب الزاوية، نرسم دائرة نصف قطرها 1 ، مركزها نقطة المبدأ، ثم نبحث عن النقطة التي يتقاطع فيها مسار نايكويسن مع الدائرة الواحدية (ربح بمقدار 0 dB)، ونقيس زاوية الإزاحة المطلوبة لجعل هذه النقطة بزاوية 180 درجة (أي مع المحور الحقيقي)، وهو هامش الصدفة.

3. تحليل النموذج الخطى لتجربة العربية والنواص:

لقد حصلنا على تابع النقل في الحلقة المفتوحة لنظام العربية والنواص ممثلاً بالشكل التالي:

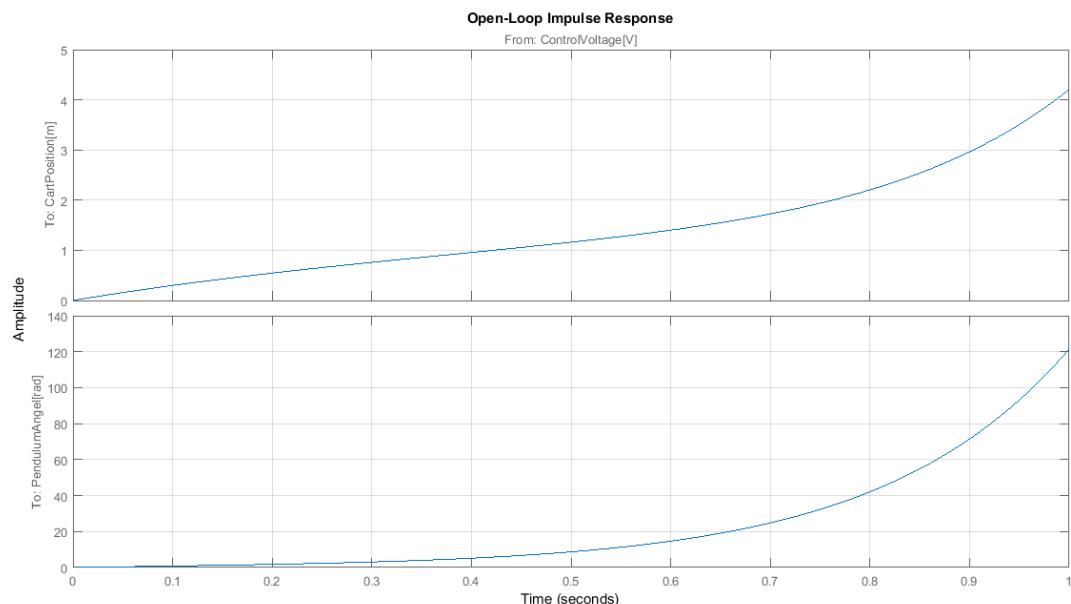
$$P(s)_{cart} = \frac{x(s)}{v(s)} = \frac{3.3304s^2 + 0.0233s - 87.9986}{s^4 + 2.2501s^3 - 29.005s^2 - 59.2504s}$$

$$P(s)_{pend} = \frac{\theta(s)}{v(s)} = \frac{8.9702s}{s^3 + 2.2501s^2 - 29.005s - 59.2504}$$

نستذكر أن تابعين النقل المعطيين تم تقريرهما بالنسبة للزوايا الصغيرة للنواص دول الصفر (الموضع الشاقولي العلوي).

الاستجابة النبضية في الحلقة المفتوحة (Impulse): سوف نختبر كيف يستجيب النظام لقوة نبضية مطبقة على العربية بتنفيذ التعليمات التالية في ماتلاب:

```
>> impulse(sys_tf, t);
```



كما نرى من الرسم، استجابة النظام غير مستقرة في الحلقة المفتوحة، إضافة إلى أن زاوية النواص تظفر ازيداً حتى [120 rad (19 دوره)، علمًا أن النموذج صالح فقط عند الزوايا الصغيرة، يمكن أن نرى أيضًا العربية تتحرك بشكل غير منتهي إلى اليمين.

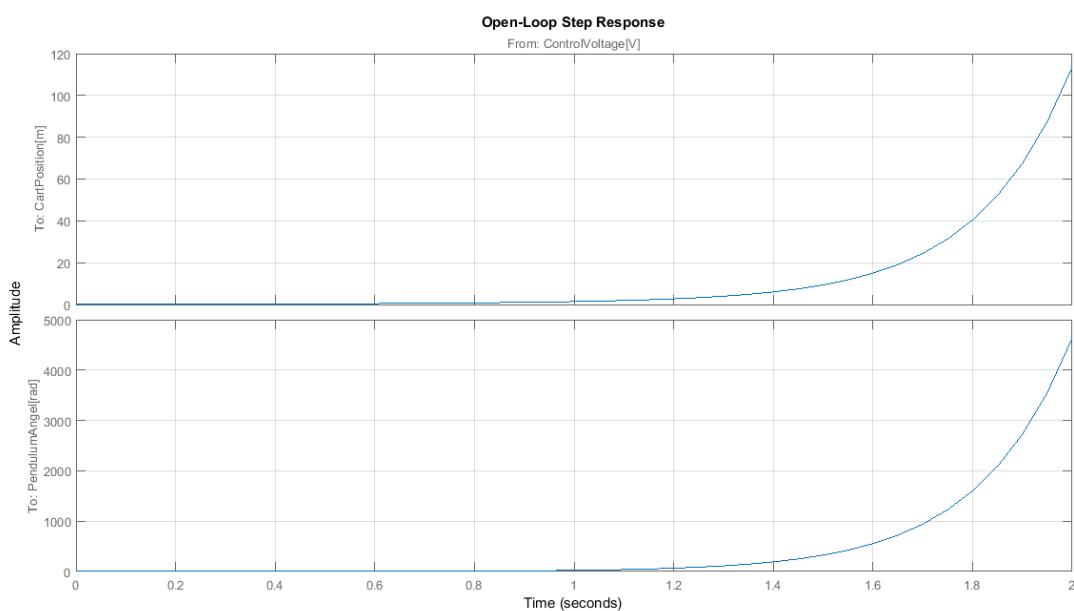
يمكنا حساب الأقطاب والأصفار للنظام باستخدام ماتلب من التابع:

```
>> [czeros cpoles] = zpkdata(P_cart)
czeros =
[-5.1438    5.1367]
cpoles =
[0    5.3113   -5.5522   -2.0092]
>> [pzeros ppoles] = zpkdata(P_pend)
pzeros =
0
ppoles =
[5.3113   -5.5522   -2.0092]
```

كما هو متوقع، الأقطاب لتابع النقل هي ذاتها، والقطب عند 5.3113 يوضح أن النظام غير مستقر لأن له جزء حقيقي موجب، بعبارة أخرى، يقع القطب في النصف الموجب من المستوى العقدي، وهذا يتواافق مع ما رأيناه في الرسم.

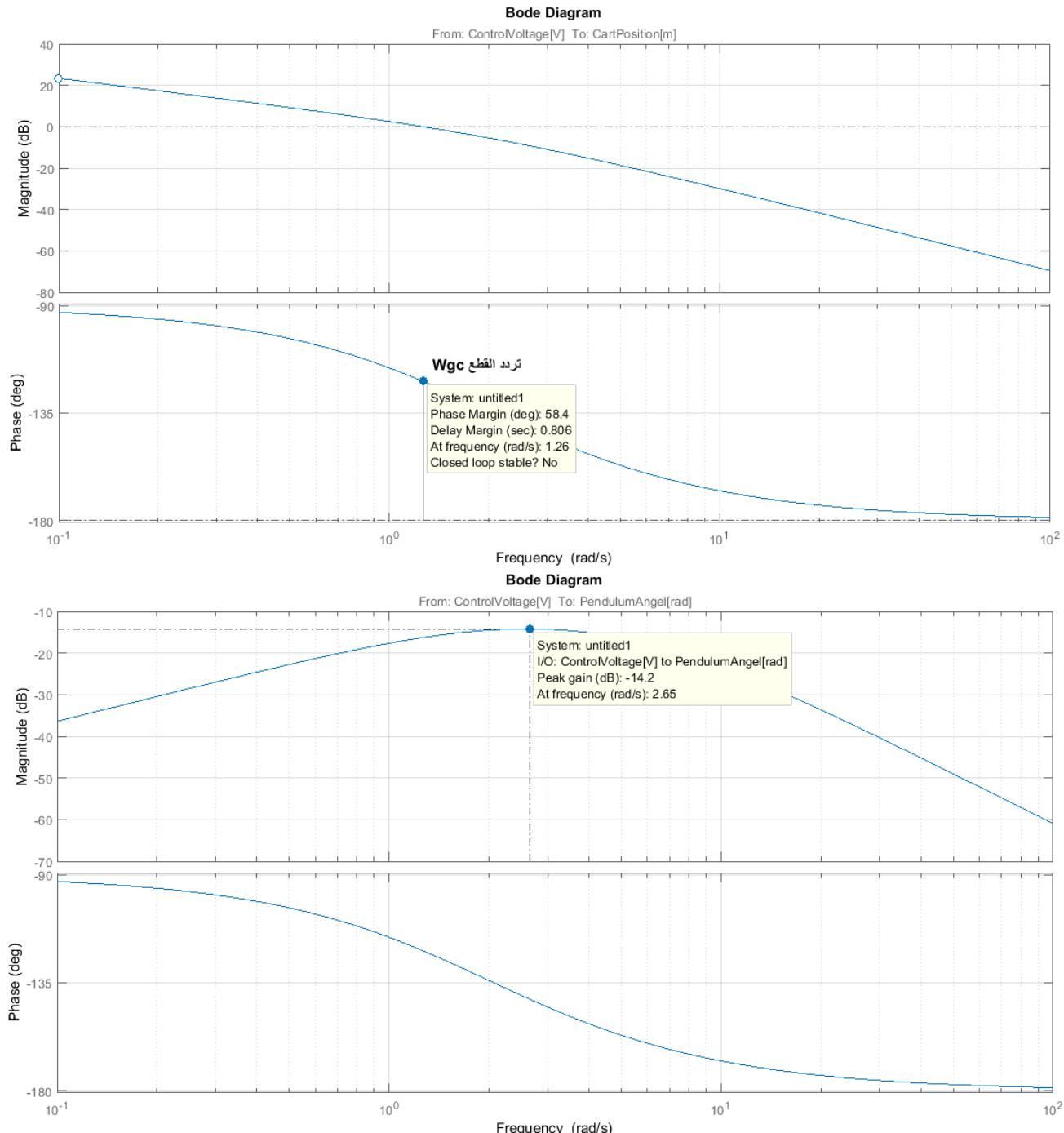
الاستجابة الخطوية في الحلقة المفتوحة (Step): بما أن النظام يملك قطباً بجزء حقيقي موجب، عند تطبيق تابع الخطوة الواحدية على النظام سوف يزداد بشكل غير محدود سنتاًك من هذا بكتابه :العلمية:

```
>> step(sys_tf, t);
```



المميزة اللوغاريتمية في الحلقة المفتوحة (Bode): يمكن الحصول على مميزة بود في ما يلي
باستخدام التعليمية:

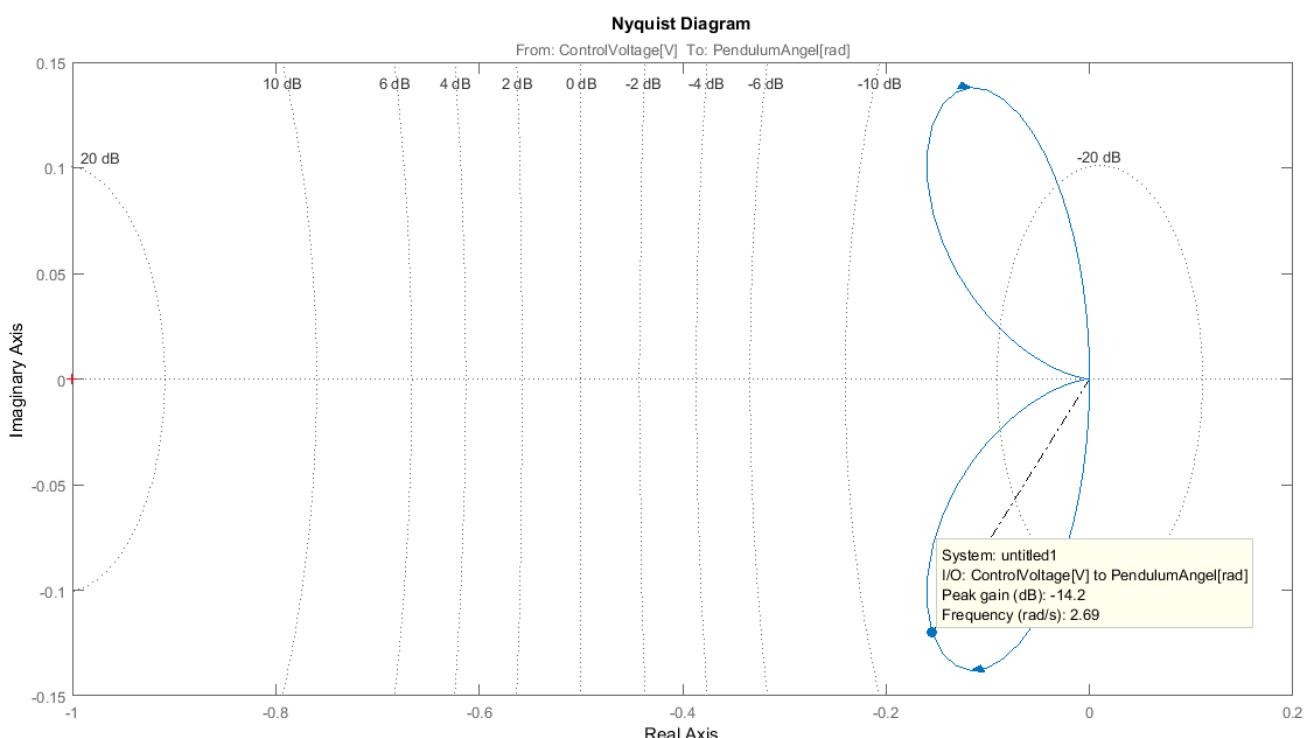
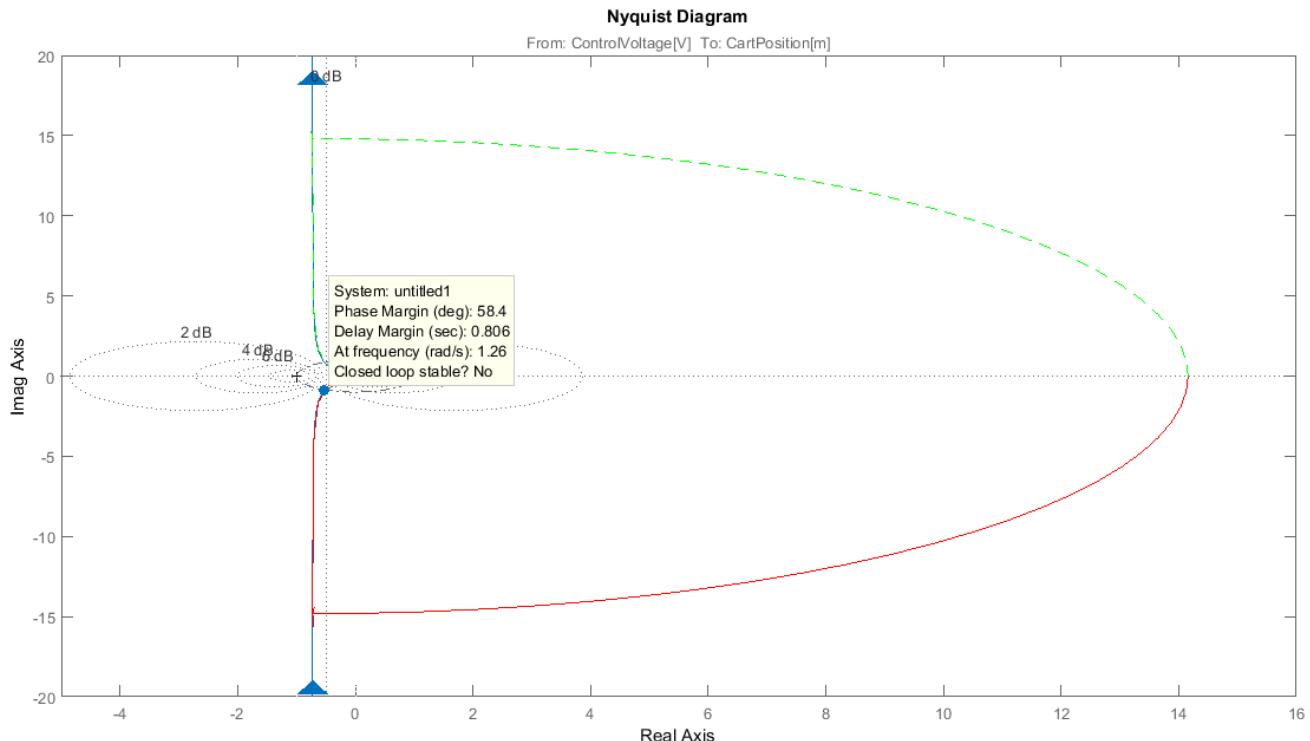
```
>> bode(sys_tf);
```



يتحقق معيزة بود لتابع النقل الخاص بزاوية التوازن الموضحة، نرى أن المطال أقل من 0 dB والصفحة أكبر من 180° على كامل مجال التردد، لن نستفيد بشكل كبير من حصولنا على مميزة بود عندما يكون النظام غير مستقر، حيث أنها تظهر وجود هامش صفر PM على الرغم من عدم استقرار النظام أساساً، لأنه يملك قطباً في الجزء الموجب من المستوى العقدي.

الميزة القطبية في الحلقة المفتوحة (Nyquist): يمكن الحصول على مسار نايكويست في مطلب باستخدام التعليمة:

```
>> nyquist(sys_tf);
```



مخطط نايكويست يسمح لنا بتوقع الاستقرار والأداء للنظام في الحلقة المغلقة بمراقبة سلوك النظام في الحلقة المفتوحة.

ملاحظة: إن التابع Nyquist في مطلب لا يقدم تمثيلاً مناسباً للأنظمة التي تحتوي على أقطاب تخيلية في الحلقة المفتوحة وتحتاج إلى إعتماد، لذلك استخدامنا التابع Nyquist بدلاً، والذي يمكن تحميله من الروابط المذكورة في بداية الأطروحة.

تابع النقل لنموذج العربية والنواص يملك قطب واحد غير مستقر $P=1$, إذا افترضنا أن النظام ISO أي أنها نظر إلى زاوية النواص فقط كمعيار لاستقرار النظام دونأخذ موضع العربية بعين الاعتبار، نرى من مخطط نايكويسن لتتابع النقل لزاوية النواص أن عدد المرات التي يطوق فيها مسار نايكويسن النقطة (-1,-j0) هي صفر $N=0$, عندها يكون:

$$Z = P + N = 1 + 0 = 1$$

وبالتالي فإن الحلقة المغلقة للنظام تملك قطباً واحداً في الجزء الأيمن من المستوى العقدي، أي أن النموذج الخطي للعربة والنواص في الحلقة المغلقة غير مستقر حسب معيار نايكويسن.

الفصل الخامس

منهجيات تصميم المتحكم

1. نظرية عامة:

غالباً ما تكون دراسة المتحكم هي المرحلة الأكثـر صعوبة واستغرـاكاً للوقت من عملية تصمـيم نظام التـحكم المـدمـج، لأنـ عملية تصـمـيم المـتـحـكم هي الغـاـية الأـسـاسـيـة من وجود هـنـدـسـةـ التـحـكمـ الـآـلـيـ،ـ والـتيـ تـضـمـنـ تـطـوـيرـ خـواـرـزمـيـاتـ وـطـرـقـ تـسـتـخـدـمـ لـلـتـنـظـيمـ وـالـتـلـاعـبـ بـسـلـوكـ النـظـامـ الـدـيـنـامـيـ،ـ إـضـافـةـ إـلـىـ أنـهاـ عـمـلـيـةـ أـسـاسـيـةـ لـضـمـانـ كـفـاءـةـ وـدـقـةـ عـمـلـ النـظـامـ،ـ تـضـمـنـ عـمـلـيـةـ تصـمـيمـ المـتـحـكمـ تـحلـيلـ سـلـوكـ النـظـامـ،ـ تـعرـيفـ بـأـرـاـمـتـرـاتـهـ الـأـسـاسـيـةـ،ـ وـتـطـوـيرـ مـنـوـجـيـةـ تـحـكمـ قـادـرـةـ عـلـىـ ضـبـطـ الـخـرـجـ لـتـحـقـيقـ الـأـدـاءـ الـمـطلـوبـ وـمـعـايـرـ التـصـمـيمـ،ـ إـنـ الـهـدـفـ الـأـلـهـمـ مـنـ تـصـمـيمـ المـتـحـكمـ هوـ أـنـ يـسـتـجـيبـ النـظـامـ بـشـكـلـ أـمـثـلـيـ لـلـتـغـيـرـاتـ الـحـاـصـلـةـ فـيـ بـيـئـتـهـ الـمـحـيـطـ وـمـلـاحـقـةـ إـلـيـشـارـةـ الـمـرـجـعـيـةـ بـيـنـماـ يـحـافـظـ عـلـىـ الـاسـتـقـرـارـ وـيـصـغـرـ تـابـعـ الـخـطـأـ.

سوف نستعرض في هذا الفصل تصميم وتحليل متحكمين مختلفين، تم تطبيقهما بنجاح على النظام المـدـمـجـ،ـ لـلـتـحـكمـ بـتـجـربـةـ الـعـرـبـةـ وـالـنـوـاـسـ،ـ حيثـ يـتـميـزـ هـذـاـ النـظـامـ باـسـتـقـارـاهـ الـدـرـجـ وـهـوـ شـدـيدـ الـلـاخـطـيـةـ مماـ يـجـعـلـ عـمـلـيـةـ تـطـبـيقـ خـواـرـزمـيـاتـ التـحـكمـ عـلـىـ النـظـامـ الـحـقـيـقـيـ تـحدـيـاـ،ـ وـيـجـعـلـ الـفـرـقـ بـيـنـ أـنـوـاعـ الـمـتـحـكمـاتـ وـطـرـقـ تـصـمـيمـهاـ جـلـياـ وـاضـحاـ.

أـحـدـ أـلـهـمـ أـهـدـافـنـاـ،ـ هـيـ تـحـقـيقـ السـلـوكـ الـمـطلـوبـ لـلـنـظـامـ فـيـ الـحـلـقـةـ الـمـغـلـقـةـ رـغـمـ وـجـودـ الـأـرـتـيـابـيـةـ فـيـ النـمـوذـجـ،ـ تـمـ تـرـيـبـ الـمـتـحـكمـاتـ أـنـتـاءـ الـعـرـضـ بـنـاءـ عـلـىـ زـيـادـةـ تـعـقـيـدـهـاـ وـقـوـتهاـ،ـ سـنـاقـشـ خـصـائـصـ الـمـتـحـكمـ الـتـنـاسـبـيـ الـتـكـامـلـيـ التـفـاضـلـيـ PID-controllerـ،ـ وـالـذـيـ يـسـتـخـدـمـ بـشـكـلـ وـاسـعـ جـداـ نـظـراـ لـبـساطـةـ تـطـبـيقـهـ عـلـىـ الرـغـمـ مـنـ أـنـهـ لـيـحـقـقـ أـدـاءـ فـرـضـيـاـ فـيـ مـوـاجـهـةـ تـغـيـرـاتـ النـظـامـ،ـ بـعـدـهـاـ نـسـتـعـرـضـ الـمـتـحـكمـ الـغـوـصـيـ الـتـرـيـيعـيـ الخـطـيـ LQG-controllerـ وـالـذـيـ يـتـضـمـنـ الـمـنـظـمـ الـتـرـيـيعـيـ الـخـطـيـ LQRـ مـعـ تـقـدـيرـ مـتـدـولـاتـ الـحـالـةـ غـيرـ الـمـقـاسـةـ بـتـوـظـيـفـ Kalman-Filterـ وـذـلـكـ عـنـدـ تـطـبـيقـ ضـجـيجـ عـلـىـ النـظـامـ،ـ أـخـيـراـ نـعـرـضـ شـائـجـ تـنـفـيـذـ الـمـتـحـكمـاتـ عـلـىـ الـتـجـربـةـ وـنـقـارـنـ الشـائـجـ.

2. المتتحكم النسبي التكامل التفاضلي PID:

متتحكم PID واسع الاستخدام في تطبيق نظريات التحكم وذلك نظراً لبساطته ومبدأه الفيزيائي الواضح، يمكن توظيفه بعشرات التطبيقات في العمليات الصناعية للوصول إلى نقطة العمل المرغوبه وذلك بتعديل خرج نظام التحكم، يقوم متتحكم PID بشكل مستمر بحساب قيمة الخطأ على أنه الفرق بين الإشارة المرجعية وناتج العملية المقاس، عندها يضبط الخرج لتصغير الخطأ.

1. بنية متتحكم PID:

إن الحد النسبي في متتحكم PID يستجيب للقيمة الحالية للخطأ وهو نسبة ثابتة من إشارة الدخل:

$$u = K_p e$$

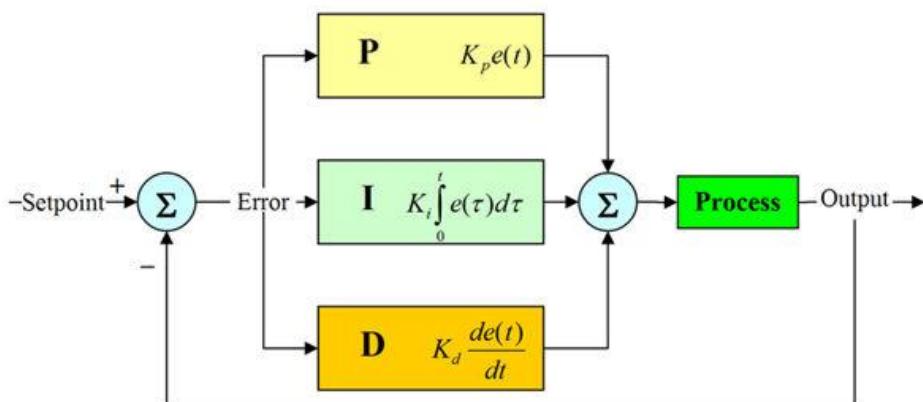
بينما يكون خرج الحد التكامل بناءً على القيمة التراكمية للخطأ مع الزمن، وهو نسبة من مجموع إشارات الدخل، التي تتناقص مع تناقص الخطأ:

$$u = K_p \left[e + \frac{1}{T_I} \int_0^t e dt \right]$$

الحد التفاضلي يستجيب لمدى سرعة تغير الخطأ، وهو نسبة من تغير إشارة الدخل التي تتناقص مع تناقص التغير في إشارة الخطأ:

$$u = K_p \left[e + T_D \frac{de}{dt} \right]$$

بجمع هذه الدوادع الثلاثة، نحصل على متتحكم PID الذي يستجيب بشكل فعال للتغيرات في جملة التحكم ويحافظ على استقرار النظام، يستخدم متتحكم PID بشكل واسع في المجال الصناعي للتنظيم التعبئي، العمليات الكيميائية والأذرع الروبوتية، كما أنه شائع الاستخدام في أنظمة التدفئة المعنزلية ووحدات التكييف، إضافةً إلى تطبيقات عديدة أخرى، حيث أنّ مرونة متتحكم PID وسهولة ملائمتها مع العديد من الأنظمة يجعله أداة أساسية للتحكم حتى بالأنظمة المعقدة.



من أبرز مميزات متحكم PID أنه لا يحتاج لمعرفة النموذج الرياضي للنظام، لكنه في المقابل بحاجة لمعايير ثوابته، تكون المعايرة غالباً يدوية تجريبية رغم وجود عدة طرق تسرع وتسهل العملية بشكل كبير، لكن عند تصميم متحكم PID للأنظمة متعددة المداخل والمخارج MIMO، يصبح توليف الأرباح مشكلة صعبة بسبب التفاعل بين المدخل والمخرج المختلفة.

سوف نستعرض طريقة توليف متحكم PID، حيث أنَّ هدف المتتحكم هو التأكيد من دقة الملاحظة للإشارة المرجعية، والتنظيم بوجود الاضطرابات والضجيج، مما يظهر أنَّ متتحكم PID يحقق معايير الأداء لنظام التحكم الاسمي، إلا أنه لا يستطيع ضمان الأداء الجيد مع تغيير بaramترات النظام.

يعطى متتحكم PID بالمعادلة:

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \right]$$

حيث أنَّ $e(t) = r(t) - y(t)$ هي معادلة الخطأ، K_p ، T_I ، و T_D هي الربح التناصي، الثابت الزمني التكاملی والثابت الزمني التفاضلی، على الترتيب، بأخذ تحويل لبلاس يصبح بالصيغة:

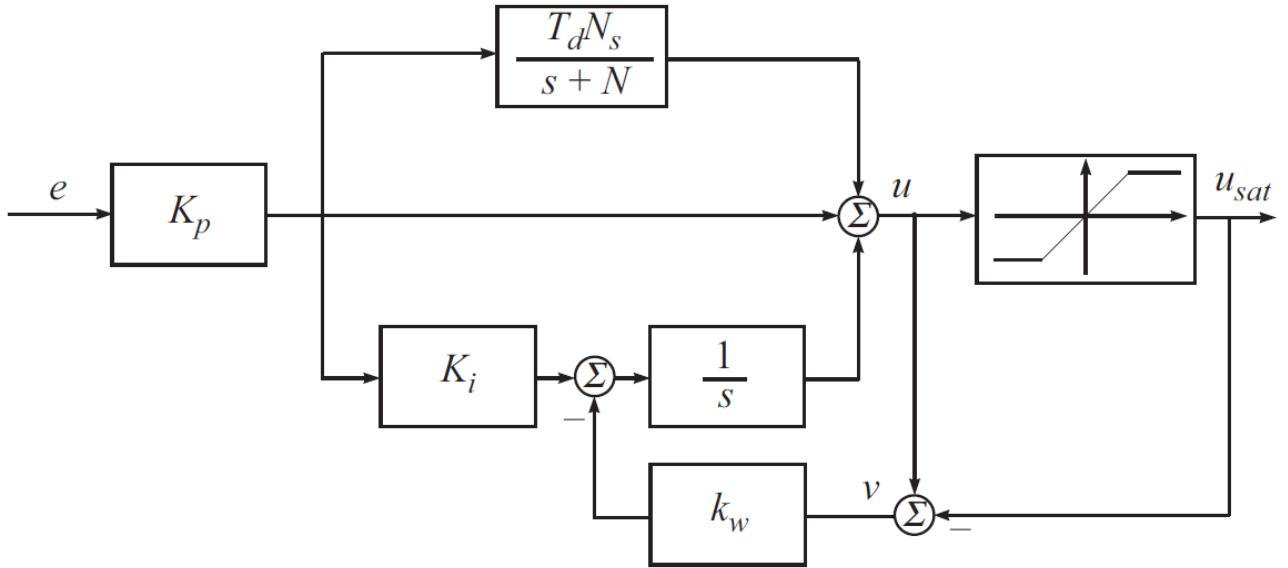
$$u(s) = K_p \left[e(s) + \frac{1}{T_I s} e(s) + T_D s e(s) \right]$$

قانون التحكم المعطى مثالي ولن يكون فعالاً عملياً، يمكن إضافة بعض التعديلات للحصول على متتحكم يمكن تطبيقه، يملك الحد التفاضلی ربحاً كبيراً عند الترددات العالية، مما يعني أن ضجيج القياس سيولد تغيرات كبيرة في إشارة التحكم، وهذا غير مرغوب بالنسبة إلى المشغلات، يمكن الحد من هذا التأثير بإضافة مرشح تمرير منخفض من المرتبة الأولى LPF First-Order للحد التفاضل ليصبح بالشكل:

$$u(s) = K_p \left[e(s) + \frac{NT_d s}{s+N} \right]$$

تعني القيم الكبيرة لثابت الترشيح N تردد قطع عالياً، عادة ما تأخذ N قيمة في المجال [2 ... 100].

يظهر عيب آخر عند التطبيق العملي يدعى integrator windup، ينشأ هذا الوضع عندما تصل إشارة التحكم إلى حدود قدرة المشغل (علماً أنه في التطبيقات العملية دائماً يوجد حدود للمشغل)، عندها ستبقى إشارة التحكم في حدودها اعتماداً على خرج النظام وسوف يبقى المشغل في حالة الإشباع، إضافةً إلى أن الحد التكاملی يتراكم طالما كان للخطأ قيمة غير صفرية، فيصبح خرج الحد التكاملی كبيراً جداً، عندها ستبقى إشارة التحكم في حالة إشباع حتى لو تغيرت قيمة الخطأ، وستأخذ وقتاً طويلاً قبل أن تنخفض قيمة الخرج إلى داخل مجال العمل، مما يجعل الفرق كبيراً بين خرج النظام والقيمة المرجعية وسيصبح زمن الاستقرار t_e كبيراً جداً.



يوجد العديد من الطرق لتقليل تأثير حالة integrator windup، إحدى الطرق المفيدة هي بإضافة شرط بتغذية عكسية للمتحكم، يعطى بأنه رجح على إشارة الفرق بين خرج متحكم PID والإشارة ذاتها بعد مرورها على حدود الرياضي لنموجذ المشغل $u_{sat}(t)$.

فتعطى العلاقة التطبيقية لمتحكم PID مع مرشح تمرين منخفض من المرتبة الأولى في الدد التفاضلي، وخدوارزمية anti-windup كالتالي:

$$u(s) = K_p \left(e(s) + \frac{T_d N_s}{s+N} e(s) \right) + (K_p K_I e(s) - K_w v(s)) \frac{1}{s}$$

حيث أن $K_I = 1/T_I$ هو الربح التكاملـي، K_w هو رجح شرط التغذية العكسية، $v(s) = u(s) - u_{sat}(s)$

تكون الإشارة v صفرـاً عندما لا يوجد إشباع، لكن عندما تصل إشارة التحكم إلى حد الإشباع عندما تطرح الإشارة v من إشارة الخطأ $e(s)$ قبل أن تتم متكاملـته، عادـماً نختار قيمة K_w وفق العلاقة $K_w = 1/T_I$.

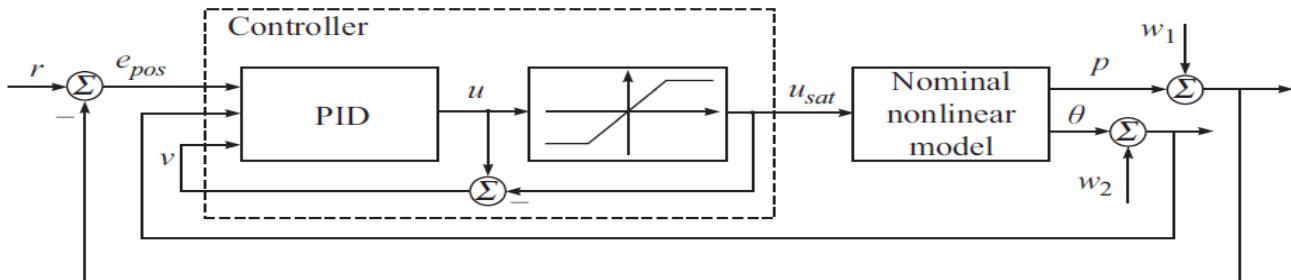
في نظام التحكم المدمج، يتم تطبيق متحكم PID بشكل رقمي في متحكم مصغر، لهذا السبب يجب تحويل الصيغة السابقة إلى المجال الزمنـي المتقطـع، لتصبح باشكـل:

$$u(z) = K_p \left(e(z) + \frac{T_d N(z-1)}{(z+NT_s)-1} e(z) \right) + (K_p K_I e(z) - K_w v(z)) \frac{T_s}{z-1}$$

حيث أن $v(z) = u(z) - u_{sat}(z)$

2. تصميم وتوليف متحكم PID لنظام العربة والنواس:

مشكلة تصميم متحكم PID لنظام تتضمن إيجاد القيم المناسبة للبارامترات $[K_p, K_I, T_d, N, K_w]$ التي تضمن الأداء المرغوب لنظام التحكم، يوضح الشكل التالي البنية العامة لجملة التحكم:



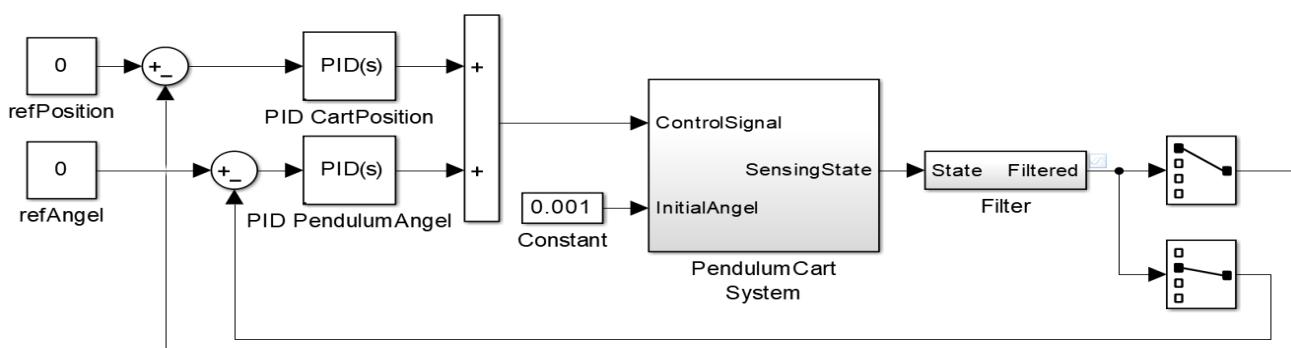
متحكم PID الذي تم تصميمه يملك ثلاثة مدخل وخرج واحد، الدخل الأول هو خطأ موضع العربة، والثاني هو زاوية النواس، والثالث هو الفرق بين خرج المتحكم u وخرج صندوق الإشباع للمشغل u_{sat} .

يجب أن يضمن المتحكمبقاء النواس في الوضع الشاقولي العلوي، فيما تخضع العربة لإشارة قفزة بمطال [m] 0.2 على الدخل، ضمن هذه الشروط تكون معايير التصميم:

- زمن الاستقرار T_s للعربة والنواس أقل من 0.1 sec.
- لا يجب أن يتحرك النواس أكثر من 0.05 rad عن الشاقول.

يوجد عدد من طرق لتوليف متحكم PID، يعتمد بعضها على الاستجابة الزمنية (العابرة)، أشهرها Cohen-Coon، طريقة التجربة والخطأ (المعايير اليدوية)، وبعضها على التحليل الترددية.

يُوضح في الشكل السابق أن نظام التحكم للعربة والنواس يحوي على متحكمين PID، المتحكم الأول لزاوية النواس، والثاني يستخدم للتحكم بموضع العربة، ثم نجمع خرج المتحكمين للحصول على إشارة التحكم النهائية التي تُوجه إلى D/A Converter، يبين المخطط التالي جملة التحكم الناتجة:



يسبب الضجيج الكبير الناتج عن الحساسات وعملية الاستقاط التي تزيد من مطال الضجيج، أضفنا صندوق المرشح، حيث أنه يساعد على تحسين الاستقرار.

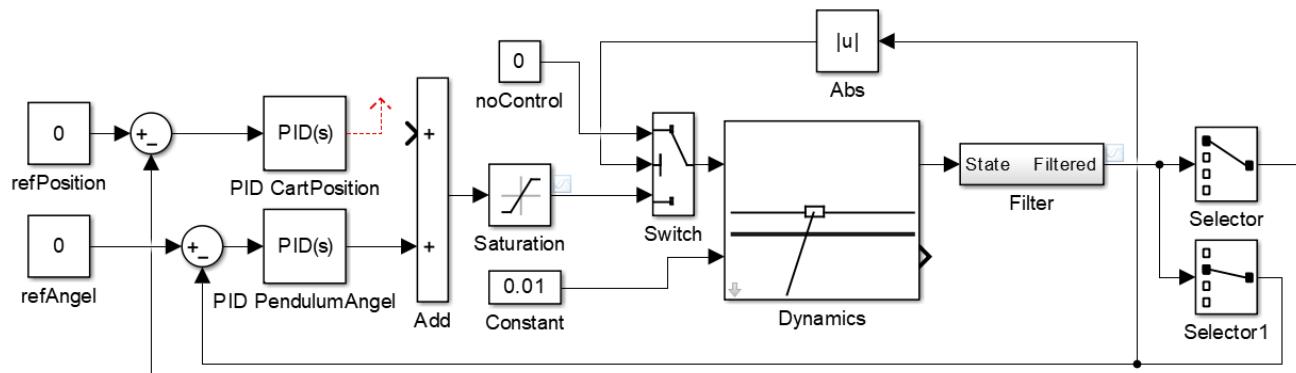
المعايير باستخدام القاعدة الشائعة Rule-of-Thumb Tuning: هي قاعدة شائعة الاستخدام في الحياة العملية، لكنها غير خاضعة لأساس علمي متيقن، تحقق أداء مقبول بسهولة لكن الخرج يستغرق وقت أكثر للستقرار ويعاني من تجاوز إشارة Overshoot وتأخير أكبر من طرق المعايير ذات الحلقة المغلقة.

طريقة المعايير: تتضمن زيادة الربح النسبي حتى يبدأ النظام بالاهتزاز، عندما يحدث الاهتزاز يكون الربح هو الربح النهائي (Ku) ودور الاهتزاز هو الدور النهائي (T) عندما نستخدم الجدول التالي:

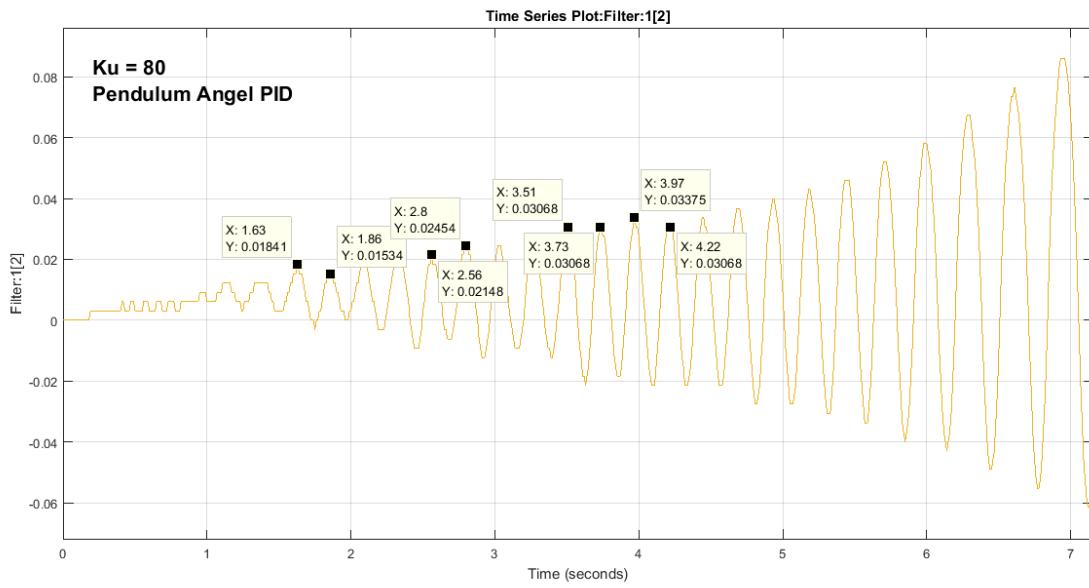
	KP	TI	TD
PID	$0.5 \times Ku$	$0.8 \times T$	$0.1 \times TI$

في الأنظمة الحساسة لا يمكن اتباع الطرق التجريبية وإنما نعتمد على منهجيات متقدمة لتصميم المتحكمات وختبارها قبل تنفيذها عملياً، حتى نضمن سلامة التجربة المخبرية للعربة والنواس نبدأ تصميم المتحكم وختباره على النموذج اللخطي للنظام.

بدايةً نفصل المتحكم الخاص بموضع العربة، ونجعل الأرباح K_p و K_d بقيمة صفرية في متحكم PID لزاوية النواس، عندما نبدأ بزيادة الثابت النسبي K_p ومراقبة سلوك النظام بالنسبة لزاوية النواس حتى تبدأ الاستجابة على خرج النظام بالاهتزاز حول نقطة الاستقرار المطلوبة



نلاحظ من المخطط التالي أن الاستجابة الزمنية لزاوية النواس تهتز بزوايا صغيرة حول موضع الاستقرار الشاقولي العلوي، عندما يكون الربح النسبي في الحلقة المغلقة $Ku = 80$.



ونحسب الدور النهائي بأخذ متوسط الفرق على محور الزمن بين قمتين للهتزاز، فيكون الدور النهائي $T = 0.236$ ، وبحساب أرباح المتذبذم من الجدول نجد:

$$K_p = 0.5K_u = 0.5 * 80 = 40$$

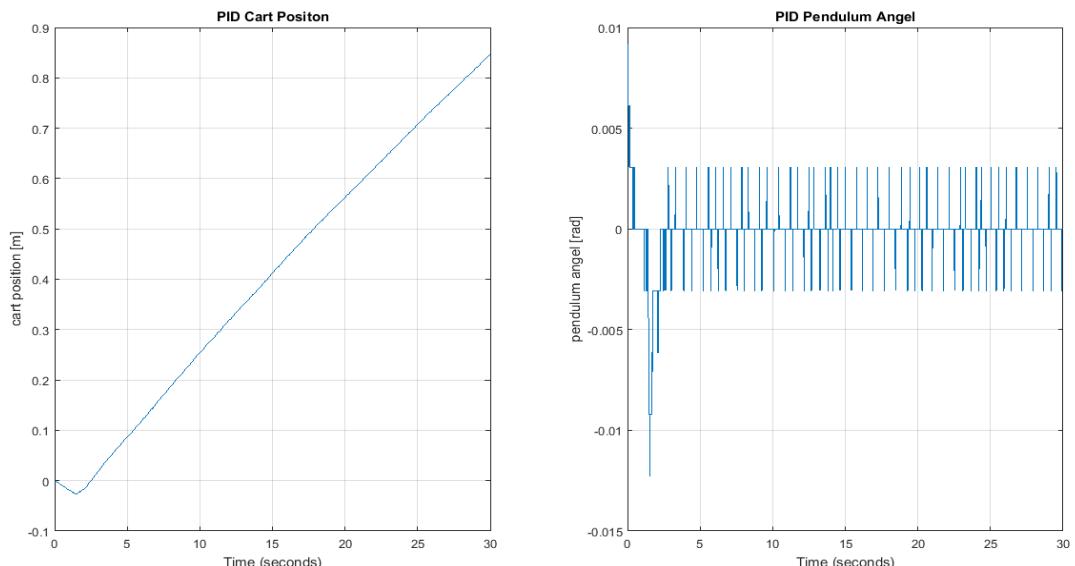
$$T_I = 0.8T = 0.8 * 0.236 = 0.1888$$

$$T_D = 0.1T_I = 0.1 * 0.1888 = 0.01888$$

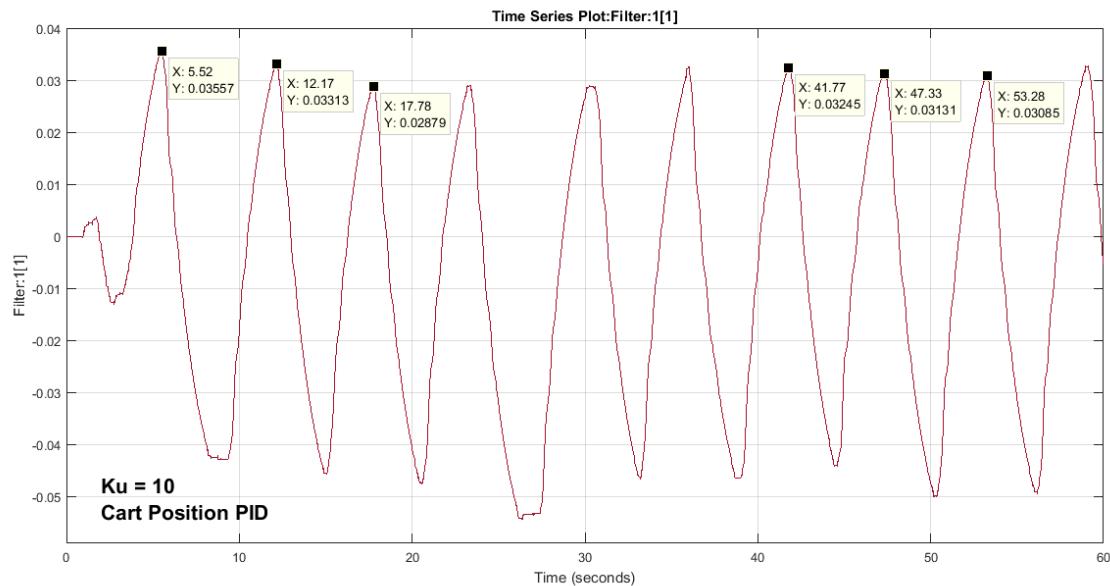
حيث أن $K_D = K_p * T_D$ و $K_I = K_p / T_I$ لزاوية النواص:

$$K_p = 40, \quad K_I = 211.8644, \quad K_D = 0.7552;$$

نشغل النموذج بعد إعادة ضبط الأرباح فتكون الاستجابة كالتالي:



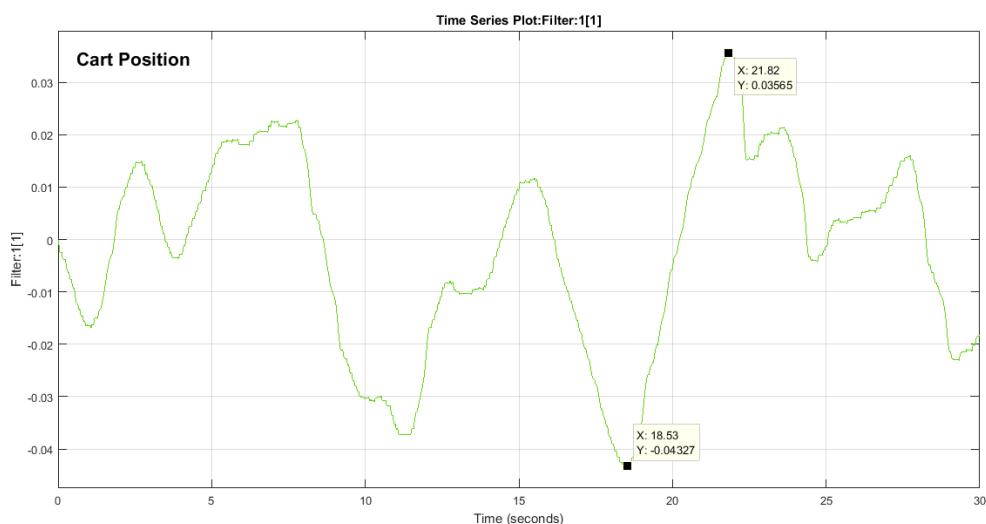
للحظ استقراراً واضحاً في زاوية النواس، إلا أنّ موضع العربة يزداد بشكل كبير سعيد وصل المتذبذم الخاص بموضع العربة لتعمل على توليف أرباح التحكم مع الإبقاء على متذبذم زاوية النواس متصلاً، بدايةً نجعل الأرباح K_p و K_D بقيمة صفرية في متذبذم PID لموضع العربة، وزيد الثابت التنسابي K_u مع مراقبة سلوك النظام بالنسبة لموضع العربة حتى تبدأ الاستجابة على خرج النظام بالاهتزاز حول نقطة الاستقرار المطلوبة.

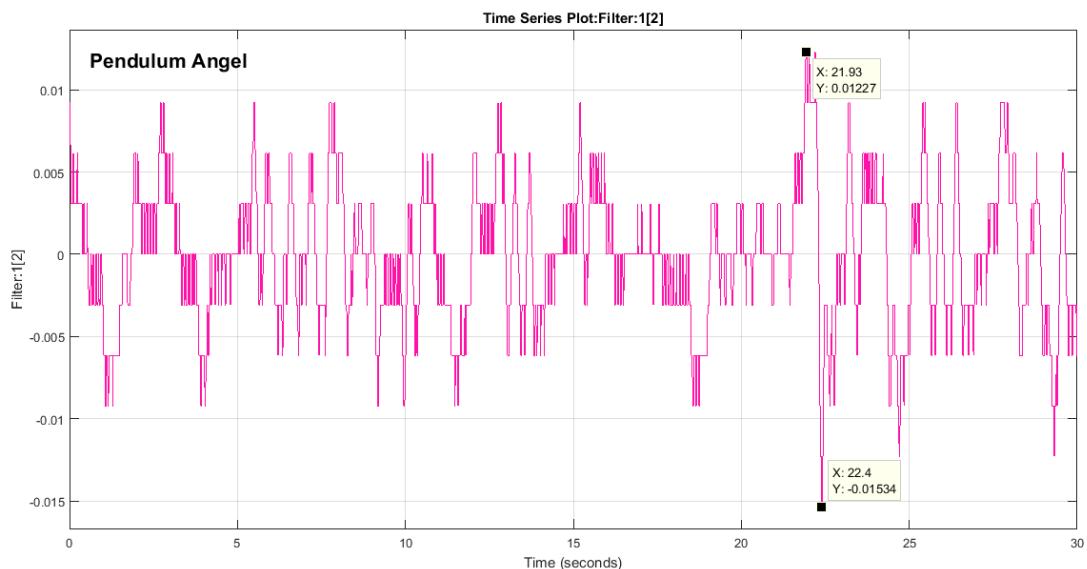


أصبحت استجابة موضع العربة تهتز حول الإشارة المرجعية بدور ثابت ومطال ثابت عندما زدنا الربح التنسابي حتى $K_u = 10$ ، نحسب الدور النهائي بأخذ متوسط الفرق بين عينات الزمن، فيكون الدور النهائي للنظام $T = 5.9425$ ، وبحساب أرباح متذبذم PID لموضع العربة فنجد:

$$K_p = -5, \quad K_I = -1.0517, \quad K_D = -2.377;$$

بتوليف الأرباح الناتجة، نجد الاستجابة النهائية للنموذج الديناميكي للعربة والنواس بالشكل:



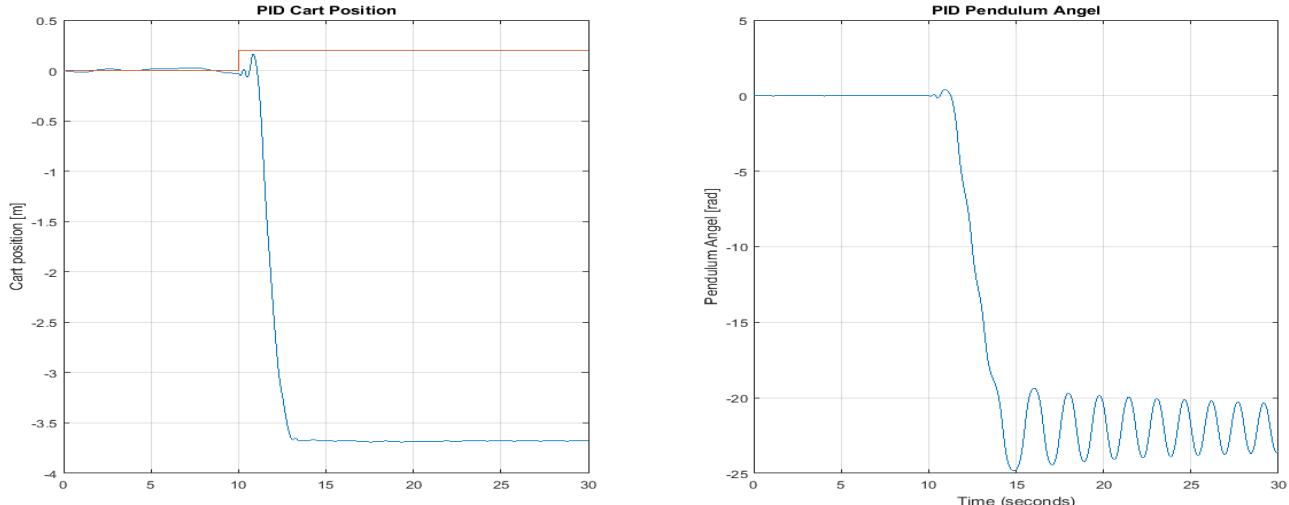


نلاحظ من الاستجابات المبينة، أنَّ موضع العربة يتفاوت بمحال قدرة [m] 0.079، ما يعادل [cm] 8، أما زاوية النواص فتهاوى بمطال [rad] 0.0276 [deg] 2، وهو محال مقبول واستجابة النموذج الديناميكي للنظام جيدة.

المعايير اليدوية Empirical Tuning: نحتاج غالباً بعد المعايرة بالطريقة الشائعة (أو طرق أخرى) إلى معايرة يدوية بسيطة لتحسين الأداء، إلا أنه يجب البدء من قيم ثوابت معينة، وطريقة المعايرة الشائعة نقطة بدء ممتازة، نقوم بتغيير الثابت المطلوب بقيمة صغيرة لا تتجاوز 10% كل مرّة ونراقب الأداء، يجب أن نأخذ بعين الاعتبار أن تغيير ثابت معين غالباً ما يحل مشكلة ولكن يسبب مشاكل أخرى، فنحاول الوصول إلى حل وسط، يكون التغيير حسب الجدول التالي:

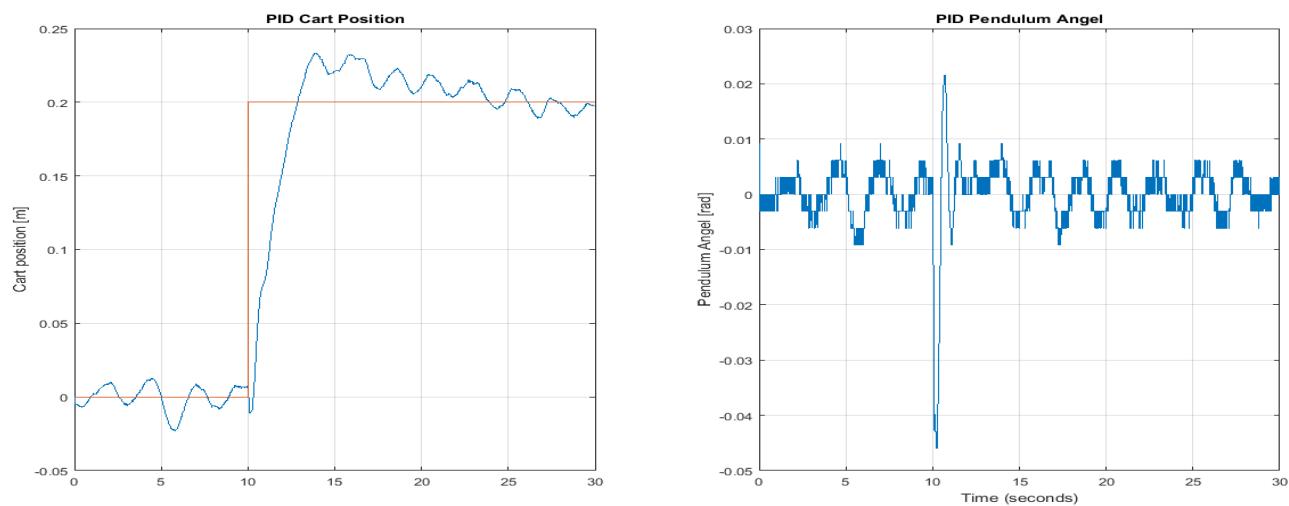
التأثير	الأداء	التأثير	الأداء
انقصاص الثابت التكاملي	يوجد اهتزاز ذو تردد منخفض ومطال منخفض على الخرج	زيادة الثابت التناصي	بطء في الاستجابة
انقصاص الثابت التناصي	يوجد اهتزاز ذو تردد منخفض ومطال مرتفع على الخرج	انقصاص الثابت التناصي أو زيادة التفاضلي	تجاوز Overshoot كبير
انقصاص الثابت التفاضلي و/أو ترشيح إشارة الحساس و/أو زيادة دور التقطيع	يوجد اهتزاز ذو تردد مرتفع (ضجيج) على الخرج	زيادة الثابت التكاملي	يوجد خطأ متبقي دائماً
انقصاص الثابت التكاملي و/أو انقصاص دور التقطيع	الخرج يصل إلى حالة إشباع (عدم استجابة)	انقصاص الثابت التناصي	الخرج يقفز بين قيمتين بسرعة

نلاحظ أن الاستجابة التي حصلنا عليها سابقاً جيدة فقط عندما تكون الإشارة المرجعية صفراءً، لكن في حال طبقنا إشارة قفزة واحدة على الدخل لموضع العربة بمطال [m] 0.2 عند الزمن [sec] 10، مع الحفاظ على الدخل المرجعي لزاوية النواص صفراءً، تظهر الاستجابة التالية:



إن الاستجابة المبينة تصبح غير مستقرة عند تطبيق إشارة القفزة الواحدية، نسعى لحل هذه المشكلة باستخدام طريقة المعايرة البدوية، عند تغيير الأرباح للمتحكمين حسب الجدول، وبعد عملية تكرارية من التغييرات ومراقبة الاستجابة، وقتاً طويلاً، وصلنا إلى النتائج الموضحة بالرسم:

ذلك عند القيم التالية لثوابت المتحكم:



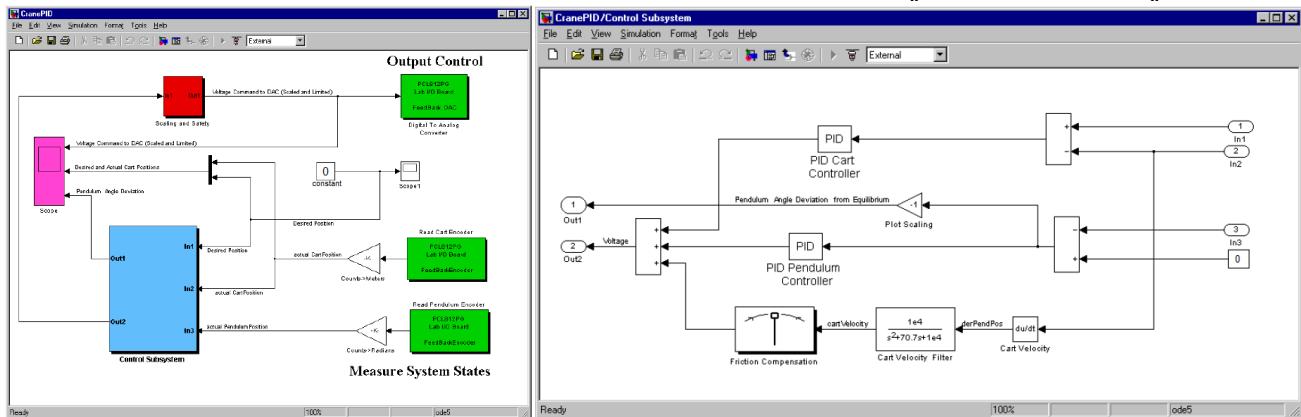
$$\text{Cart PID: } K_p = -7.0711, \quad K_I = -1.0517, \quad K_D = -6.5197;$$

$$\text{Pendulum PID: } K_p = 25.9369, \quad K_I = 100.8644, \quad K_D = 4.6985;$$

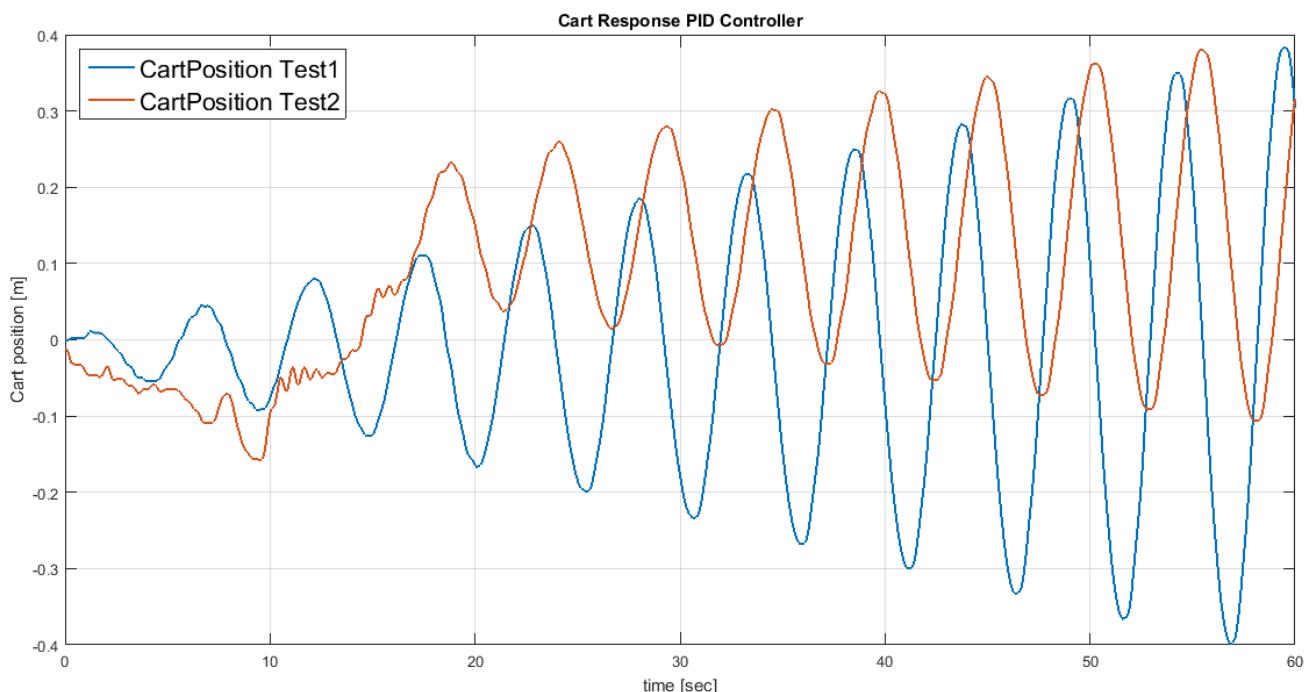
إن الاستجابة الناتجة مرضية جداً، وهي تحقق معايير تصميم المتحكم التي أشرطناها في البداية.

3. التنفيذ العملي لمتحكم PID على تجربة العرفة والنواص:

عند القيام بالتنفيذ العملي، باستخدام الملف "SelfErecting_PID.mdl" كانت إعدادات Solver: ode5(Dormand prince) هي (الخطوة Fixed step بمقدار 0.001 و خوارزمية الحل الرقمي هي)
الشكل التالي مخطط التحكم في بيئة Simulink :



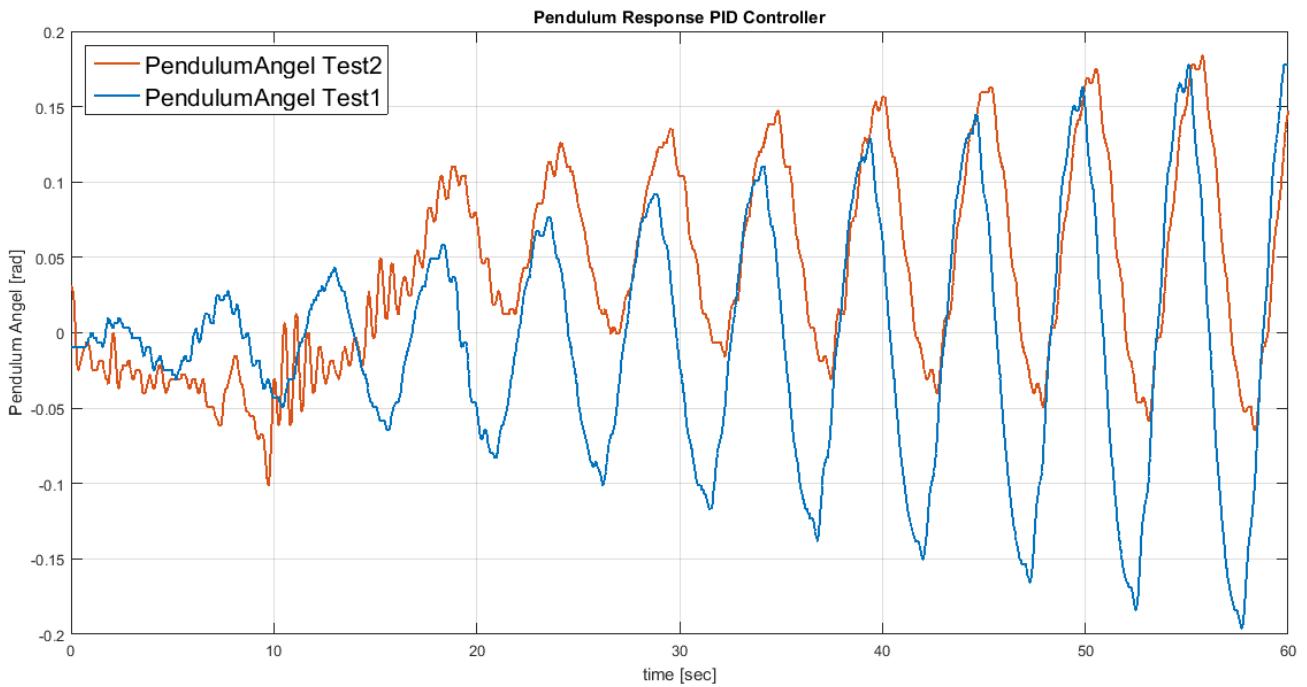
عند ضبط الدخل المرجعي على 0 أي أن الموضع المطلوب للعرفة هو في منتصف السكة وأن يكون النواص في الموضع الشاقولي العلوي، قمنا باستدلال النتائج التالية من التجربة وذلك عند أرباح التحكم المبينة:



الاستجابة ذات اللون الأزرق :Test1

$$\text{Cart: } K_p = -22.36, \quad K_I = 0, \quad K_D = -15.04;$$

$$\text{Pendulum: } K_p = 48.97, \quad K_I = 0.1, \quad K_D = 12.62;$$



الاستجابة ذات اللون الأحمر :Test2

Cart: $K_p = -20$, $K_I = 0$, $K_D = -16$;

Pendulum: $K_p = 44$, $K_I = 0.001$, $K_D = 11$;

علماً أن هذم الأرباح قد أعدنا معاييرها لトレليم مع التجربة الحقيقة قدر الإمكان، حيث أن أرباح منظم PID التي أعطت نتائج جيدة على النموذج اللدحي لم تكون كافية لتحقيق الاستقرار في التجربة العملية.

لم يحقق منظم PID الاستقرار عند تطبيقه العملي على التجربة، ولا نريد صرف المزيد من الوقت والجهد على معاييره، إلا أنها نظن أنه قادر على تحقيق استقرار مقبول باستهانة عملية المعايرة.

3. المتحكم الغوصي التربيعى الخطى LQG:

هي منهجية تحكم متقدمة، تجمع بين تقنيتي تحكم مختلفتين، تسميان المنظم التربيعى الخطى LQR (المنظم الأمثل) ومرشح كالمن Kalman-Filter (المرشح الأمثل)، حيث أنّ LQR هو خوارزمية تحكم تحسن أداء النظام الخطى بتصميم متتحكم ذو تغذية عكسيّة بالحالة، والذي يصغر تابع الأداء، بينما مرشح كالمن هو خوارزمية تستخدّم لتقدير الحالة للنظام اعتماداً على المتداولات المفقة ذات الضريح.

الهدف من هذا المتتحكم هو ضمان الملاحة الجيدة للإشارة المرجعية والتنظيم رغم وجود الاضطرابات وضجيج قادم من الحساسات أو ارتياحية في ديناميكية النظام، حيث يمكنه التعامل مع هذه الارتباطية وتقديم إشارة التحكم الأمثلية، وهو يستخدم على نطاق واسع في تطبيقات عديدة، بشكل عام، متتحكم LQG يقدم طريقة فعالة لتصميم نظام تحكم قوي لأنظمة المعقدة ديناميكياً والتي تحوي ارتياحية واضطرابات.

1. مفاهيم أساسية في مسألة التحكم الأمثل:

تؤتم مسألة التحكم الأمثل بتحديد شعاع التحكم الذي يغير سلوك النظام الفيزيائي المتتحكم به بحيث يكون تابع الكلفة (cost function) أصغر، مع الأخذ بعين الاعتبار القيود الفيزيائية للنظام الممثلة بمعادلات فضاء الحالة التالية.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}$$

يُطلق مصطلح مسألة التحكم الأثلبي التربيعى (Quadratic Optimal Control Problem) على التحكم الأثلبي وبعود السبب إلى تحديد تابع الكلفة للنظام بشكل حدود تربيعية، وتتابع الكلفة هو مؤشر للندراف المتزايد لأداء النظام عن الحالة المثالية المطلوبة يتم تحديده بحسب النظام المدروس والمدفون المطلوب من تطبيق التحكم الأثلبي ويعطى الشكل الرياضي العام لتتابع الكلفة بالعلاقة التالية:

$$J = \Phi |x(t), t|_{t=t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \varphi[x(t), u(t), t] dt$$

إنّ الحد الأول في العلاقة يمثل تابع الكلفة في الحالة الستاتيكية عند اللحظات الزمنية $[t_0, t_f]$ ، حيث يمثل الحد $\Phi[x(t), t_0, t_f]$ مؤشر الأداء عند لحظة البداية t_0 ، والحد $\int_{t_0}^{t_f} \varphi[x(t), u(t), t] dt$ يمثل مؤشر الأداء عند لحظة النهاية t_f . أما الحد الثاني في العلاقة يمثل تابع الكلفة في الحالة الديناميكية بين اللحظة البدائية والنهاية ومن أجل معالجة مسائل التحكم الأثلبي يجب أن نبحث عن شعاع التحكم ضمن القيود المسموحة وهذا

الشعاع يعتمد على حالة البدع، طبيعة القيد، طبيعة عامل الأداء، وبذلك يكون له مسألة التحكم الأمثلية للأشكال التالية:

1. مسألة التحكم النهائية (Terminal Control Problem):

الهدف في هذه المسألة إيجاد شعاع التحكم $u(t)$ الذي يؤمن نقل النظام إلى الحالة النهائية المرغوبه $\xi(t_f)$ وبالتالي تصغير الخطأ $[x(t_f) - \xi(t_f)]$ خلال دورة زمن معطاة، ويعطى تابع الكلفة بالشكل التالي

$$J = [x(t_f) - \xi(t_f)]^T S [x(t_f) - \xi(t_f)]$$

حيث S_{n*n} مصفوفة أوزان شبه معرفة، موجبة ومتنازرة وتعدد أهمية مقدار تشتت الخطأ

2. مسألة التحكم بالطاقة الأصغرية (Minimum Control Effort Problem):

يستخدم قانون التحكم لنقل النظام من الحالة الابتدائية إلى الحالة النهائية المرغوبه وبأقل استهلاك ممكن لطاقة المنبع خلال الفترة الزمنية $t \in (t_0, t_f)$ ويعطى تابع الكلفة بالشكل التربيعى التالي:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u(t)^T R(t) u(t) dt$$

حيث $R(t)_{m*m}$ مصفوفة أوزان معرفة موجبة متنازرة تعدد مقدار أهمية استهلاك الطاقة اللازمة للتحكم.

3. مسألة التحكم لتصغير الزمن اللازم للوصول إلى الحالة النهائية (Minimum Time Control Problem):

الهدف هو إيجاد شعاع التحكم $u(t)$ الذي يؤمن الوصول من الحالة الابتدائية إلى الحالة النهائية المطلوبة $\xi(t_f)$ بأصغر زمن ممكن.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0$$

4. مسألة الملائمة الأمثلية (Optimal Tracking Problem):

الهدف إيجاد شعاع التحكم $u(t)$ يؤمن تصغير شعاع الخطأ $e(t) = x(t) - \xi(t)$ لتابع الكلفة ضمن فترة زمنية $t \in (t_0, t_f)$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [x(t) - \xi(t)]^T Q(t) [x(t) - \xi(t)] dt = \int_{t_0}^{t_f} e^T(t) Q(t) e(t) dt$$

حيث مصفوفة $Q(t)$ مصفوفة أوزان شبه معروفة، موجبة ومتناهية وتحديد أهمية مقدار الخطأ، أما (t) ξ فهو المسار المرغوب لشاع الحالة $x(t)$ ويمكن تعليم مسألة الملاحقة لتشمل مسألة التحكم بالنهاية والتحكم بطاقة أصغرية يأخذ تابع الكلفة الشكل التالي:

$$J = [x(t_f) - \xi(t_f)]^T - S[x(t_f) - \xi(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} [e^T(t)Q(t)e(t) + u(t)^T R(t)u(t)]dt$$

5. مسألة المنظم الأمثل (Optimal Regulator Problem)

الهدف في هذه المسألة نقل النظام من نقطة التوازن الحرة للنظام إلى نقطة توازن قسرية(مرغوبة) بناء على مؤشر أداء معطى، وبالتالي فإن تابع الكلفة المراد قيمته الأصغرية حالة خاصة من تابع الكلفة لمسألة الملاحقة باعتبار أن $\xi(t_f) = 0$ وله الشكل التالي:

$$J = x(t_f)^T S x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x(t)^T Q(t)x(t) + u(t)^T R(t)u(t)]dt$$

يعتمد حل المسألة الأمثلية التربيعية بأشكالها السابقة على اختيار مصفوفات الأوزان المناسبة بحيث تؤمن استقرار النظام وتحقيق الأداء المرغوب، وعادة تعدد قيم هذه المصفوفات بطريقة التجربة والخطأ أو باستخدام خوارزميات الأسرايب لإيجاد القيم الأمثلية للمصفوفات.

فيما يلي سيتم حل المسألة المنظم الأمثلية وكيفية إيجاد قيم الربح الذي يحقق تابع الكلفة أصغرى للنظام باستخدام طريقة هاميلتون جاكوبيان (Hamilton-Jacobian Approach).

2. المنظم التربيعي الخطى LQR:

إن المنظم التربيعى الخطى LQR هو خوارزمية لتصميم متى مات أمثلية لأنظمة الخطية، بناءً على تابع الكلفة الذى يقيس أداء النظام ويحاول المتى مات جعله أصغرياً، يُعرف تابع الكلفة على أنه مجموع الحدود التربيعية لمتغيرات الحالة والدخل، حيث يحسب LQR شعاع التحكم الأمثل الذى يصغر تابع الكلفة، وهي تستخدم بشكل أساسى فى التحكم بالأنظمة متعددة المداخل والمخارج MIMO، حيث تكون طرق التحكم التقليدية غير فعالة.

بشكل عام، إن خوارزمية LQR فعالة وتشتمل على نطاق واسع لتحسين أداء الأنظمة الخطية بتنصغير تابع الكلفة.

1. حل مسألة المنظم الخطى التربيعى LQR (المنظم الأمثل):

يعطى هذا المنظم قانون تحكم أمثلى لأنظمة الخطية عن طريق حساب مصفوفة الربح التي تحقق تابع الكلفة أصغرى معطى بالعلاقة السابقة، بحيث يضمن أداء ديناميكى عالي ومستقر للنظام فيما يلى سيتم شرح طريقة هامiltonon جاكوبيان إحدى الطرق العددية المتبعة لحل مسألة المنظم الأمثل.

بفرض أن النظام المراد التحكم به خطى، مستمر ومتغير مع الزمن موصوف بمعادلات الحالة ولتصميم متى مات نفرض أن قانون التحكم عبارة عن تغذية عكسية خطية معطى بالشكل التالي:

$$U(t) = -k(t)x(t)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \dots & k_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \dots \dots (*)$$

لحل مسألة المنظم يجب إيجاد مصفوفة الربح $k(t)$ التي تحقق أصغر قيمة ممكنة لتابع الكلفة لمسألة المنظم المعطى بالشكل:

$$J = x(t_r)^T S x(t_r) + \int_{t_0}^{t_f} [x(t)^T Q(t) x(t) + u(t)^T R(t) u(t)] dt$$

حيث $Q(t)$: مصفوفة شبه معرفة موجبة متساوية $= Q^T$.

$R(t)$: مصفوفة معرفة موجبة متساوية > 0 .

ولهذه الغاية تتبع طريقة هاملتون جاكوبيان بحسب الخطوات التالية:
تشكيل تابع هاملتون (Hamiltonian Function) المعروف بالصيغة التالية:

$$H(x, u, \lambda, t) = \frac{1}{2}x(t)^T Q(t)x(t) + \frac{1}{2}u(t)^T R(t)u(t) + \lambda^T(t)[A(t)x(t) + B(t)u(t)]$$

حيث $\lambda^T(t)$ شعاع مضاrip لغرانج .Lagrange Multipliers

إعادة صياغةتابع كلفة جديد J بإضافة حد يساوي الصفر هو

$$\lambda^T(t)[A(t)x(t) + B(t)u(t) - \dot{x}(t)]$$

فيصبح بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{2} x^T(t_f) S x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x(t)^T Q(t) x(t) + u(t)^T R(t) u(t) + \lambda^T(t) [A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ & - \dot{x}(t)]] dt \end{aligned}$$

وبحسب علاقة تابع هامiltonون يصبح شكل تابع الكلفة النهائي باستخدام تابع hamiltonون بالشكل:

$$\hat{J} = \frac{1}{2} x^T(t_f) S x(t_f) - [\lambda^T(t) x(\dot{t})]_{t=0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} [H(x, u, \lambda, t) - \lambda^T x(\dot{t})] dt$$

- اشتقاق تابع الكلفة بالنسبة للشاعرين (u, v)

$$\delta \hat{J} = S x^T(t_f) \lambda(t_f) - \int_{t_0}^{t_f} \left[\delta x^T \left[\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} \right] + \delta u^T \left[\frac{\partial H}{\partial u} \right] \right] dt$$

- لإيجاد القيمة الأصغرية(النهاية الصغرى) لتابع الكلفة نجعل المشتق يساوي الصفر $0 = \delta$ وذلك بتحقيق المعادلات التالية:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda}(t) = Q(t)x(t) + A(t)^T \lambda(t) \dots \dots \dots \quad (1)$$

تدعى جملة المعادلات بالشكل القانوني لمعادلات هامiltonون وتمثل الشروط الحدية للمسألة.

من المعادلة (2) نجد:

وبتعويض هذه المعادلة في معادلات الحالة نجد:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - B(t)R(t)^{-1}B(t)^T\lambda(t) \dots \dots \dots \quad (5)$$

بما أن شعاع لغرناج تابع خطياً لشعاع الحالة بحسب العلاقة (3) المحددة لشرط النهاية، نفرض
مايلي:

$$\lambda(t) = P(t)x(t) \dots \dots \dots \quad (6)$$

حيث $p(t)$ مصفوفة شبه معرفة موجبة متناظرة وتحقق شرط النهاية $s = P(t_f)$ وبتعويض العلاقة السابقة في (5) والمقارنة مع المعادلة (*) نجد أن قيمة شعاع الربح $k(t)$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$k(t) = -R(t)^{-1}B(t)^T p(t) \dots \dots \dots \quad (7)$$

لإيجاد قيمة المصفوفة $p(t)$ نقوم بتعويض قيمة $\lambda(t)$ في (5) فنحصل:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - B(t)R(t)^{-1}B(t)^T P(t)x(t) \dots \dots \dots \quad (8)$$

وباشتقاق المعادلة (6) ومساواة الناتج مع المعادلة (1) نجد:

$$\dot{\lambda}(t) = P(T)x(t) + P(t)\dot{x}(t) = Q(t)x(t) + A(t)^T\lambda(t)$$

وأخيراً بتعويض المعادلة (7) في المعادلة السابقة واستخدام الفرضية (6) نجد:

$$[P'(t) + P(t)A(t) + A(t)^TP(t) + Q(t) - P(t)B(t)R(t)^{-1}B(t)^TP(t)]x(t) = 0$$

ولتحقيق المساواة السابقة من أجل $x(t) \neq 0$ يجب أن يتحقق

$$P'(t) + P(t)A(t) + A(t)^TP(t) + Q(t) - P(t)B(t)R(t)^{-1}B(t)^TP(t) = 0$$

تدعى المعادلة السابقة بمعادلة ريكاتي Riccati Equation وبحلها يتم تحديد قيمة المصفوفة $P(t)$ وتعويضها في علاقة الربح الأمثل (7) نحصل على قيمة الربح الأمثل المطلوب حسابه، وبما أن مصفوفات الأوزان $S, R(t), P(t)$ متناظرة فإن المصفوفة $P(t)$ تكون أيضاً متناظرة.

في حالة خاصة يصبح حل المسألة الأمثلية من أجل الأنظمة الخطية المستمرة وغير المتغيرة مع الزمن باستخدام المعادلين:

$$PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP = -Q$$

$$K = R^{-1}B^TP$$

وبالتالي تلخص خطوات تصميم المحكم الأمثل بحل معادلة ريكاتي للحصول على المصفوفة P وتعويض قيمتها فنحصل على الربح الأمثل K .

بما أن المصفوفة $Q \geq 0$ شبه معرفة ايجابياً ومضروبة بإشارة سالبة، مما يعني أن مشتق تابع لياتبونوف معرف سلبياً وهو يحقق الاستقرار من أجل أي مصفوفة Q .

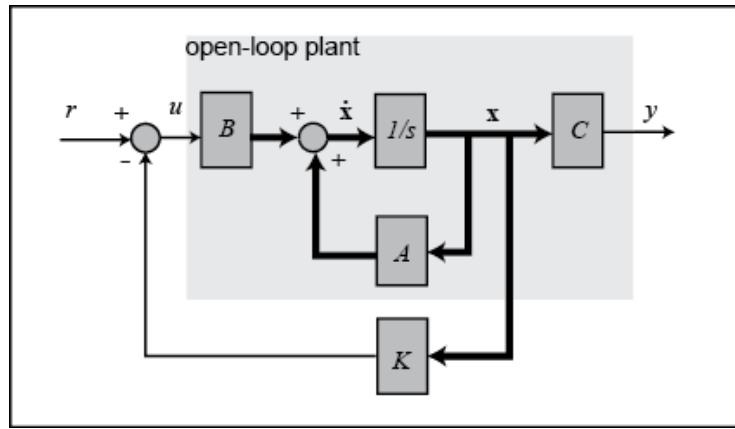
2. استنتاج أقطاب الحلقة المغلقة لجملة التحكم:

تعطى فراغ الحالة لأنظمة MIMO كما يلي:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

يُمثل النظام هنا بعدد n معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى ويستخدم عادةً مع الأنظمة MIMO، عند إضافة مصفوفة أرباح التحكم على مسار التغذية العكسية بالحالة، يصبح المخطط الصندوقي بالشكل:



بفرض أن الإشارة المرجعية تساوي الصفر $r = 0$ وبذلك تكون معادلات الحالة للنظام في الحلقة المغلقة

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx) = (A - BK)x$$

$$y = Cx$$

وبالتالي يمكننا إيجاد الاستقرار ومعرفة أقطاب النظام ذو التغذية العكسية بالحلقة المغلقة بواسطة تحليل القيم الخاصة للمatrice $(A - BK)$ والتي تمثل أقطاب الحلقة المغلقة.

3. طريقة تصميم المنظم الأمثل LQR:

بدايةً ندرس قابلية التحكم والتي تعني أنه يمكن التحكم بشعاع متغيرات الحالة للنظام عن طريق شعاع الدخل ضمن فراغ الحالة، وتكون كل متغيرات الحالة لها اتصال مع الدخل في مخطط سير الإشارة.

أي هي مقدرة شعاع التحكم u على نقل جميع متغيرات الحالة للنظام من شروطها البدائية إلى الحالة النهائية، ويكون النظام قابلاً للتحكم عندما تكون رتبة المصفوفة C متساوية لمرتبة النظام n .

$$C = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

$$\text{rank}(C) = n$$

n : هي مرتبة النظام أو عدد متغيرات الحالة.

ويمكن بسquelle إيجاد رتبة مصفوفة قابلية التحكم من ماتلب بالتعليمية:

```
>> rank(ctrb(A, B));
```

حتى نصم المنظم الأمثل، بالنسبة للأنظمة المستمرة مع الزمن، يكون قانون التغذية العكسية بالحالة $-Kx = u$ الذي يصغر تابع الكلفة التربيعية التالي:

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

حيث Q و R هي مصفوفات تمثل التشكيل لمتغيرات الحالة والدخل على الترتيب.

والخاضع لدیناميک النظام

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

يجب أن نحل معادلة ریکاتی لإيجاد P

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

حيث أن P هي مصفوفة متاظرة معرفة ايجابياً تحقق معادلة ریکاتي.

وبما أن مصفوفة القيم الخاصة للحلقة المغلقة تعطى $\text{eig}(A - BK)$ ، فإن K ربح المنظم الأمثل يعطى بتعويض P في العلاقة:

$$K = R^{-1}B^T P$$

لتطبيق هذه الطريقة يجب أن يكون النظام قابلاً للتحكم، و $R > 0$ and $Q \geq 0$.

يمكن استخدام ماتلب لحساب ربح المنظم الأمثل بكتابه التعليمية:

```
>> [K, P, e] = lqr(SYS, Q, R, N)
```

ناتج التنفيذ هو K ربح المنظم الأمثل، S حل معادلة ریکاتي، e مصفوفة القيم الخاصة للنظام ذو الحلقة المغلقة.

ميزات المنظم التربيعی الخطی LQR:

- يؤمن هامش صفة بمقدار $60^\circ = PM$.
- يؤمن هامش ربح كبير ضمن المجال $[0.5, +\infty]$.

مساوي المنظم التربيعی الخطی LQR: لا يمكن استخدامه في الحالات التالية

- أحد متغيرات الحالة لا يمكن قياسه فیزیائیاً.
- عدد متغيرات الحالة كبير مما يتطلب عدداً كبيراً من أجهزة القياس.
- اضطرابات شديدة أو ضجيج عالي لأجهزة القياس.

4. تصميم منظم LQR لنموذج العربية والنواص:

من مسألة التحكم الأساسية، كان لدينا المعادلات الديناميكية لنموذج الخطى لنظام العربية والنواص ممثلة بصيغة فراغ الحالة كالتالي:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.9645 & -2.2425 & -0.0003 \\ 0 & 29.0109 & -6.0398 & -0.0077 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.3305 \\ 8.9703 \end{bmatrix} u$$

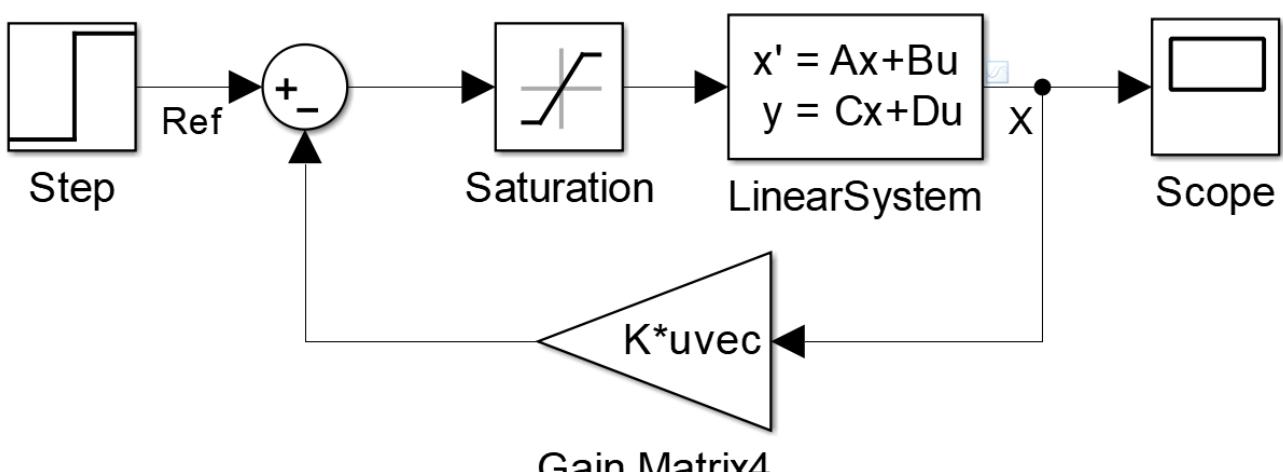
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

نستذكر أن الديناميك بصيغة فراغ الحالة المعطى تم تقريره بالنسبة للزوايا الصغيرة للنواص حول الصفر (الموضع الشاقولي العلوي)، للتأكد من طريقة حصولنا على النموذج الخطى بفراغ الحالة يمكن العودة لفصل النبذجة.

تعريف الفراغ الحالة المعطى في بيئة ماتلاب، حيث أن الخرج هو موضع العربية [m] x ، وزاوية النواص [rad] θ ، ولها معايير التصميم بالنسبة لإشارة قفزة بمطال m 0.2 لموضع العربية x المرغوب كالتالي:

- زمن استقرار T_s من أجل x و θ أقل من 3 sec.
- زمن صعود T_r من أجل x أقل من 1.5 sec.
- لا تزداد زاوية النواص θ عن 15 درجة (0.26 rad) عن الشاقول.
- خطأ الحالة الثابت SSE أقل من 2% من أجل x و θ .
- إلغاء التجاوز الأعظمي لموضع العربية.

ملاحظة: هنا لدينا تغذية عكسية بالحالة x بدلاً من التغذية العكسية بخرج النظام y فقط.



لإيجاد شعاع أرباح التحكم بالتجزئة العكسية بالحالة K , يجب أولاً التأكد من أنّ النظام قابل للتحكم أي أنّ مصفوفة قابلية التحكم لها الرتبة 4, بتعريف النموذج في ماتلاب وكتابة التعليمات التالية:

```
>> co = ctrb(sys_ss);
>> controllability = rank(co)
controllability = 4
```

بهذا تأكّدنا من قابلية التحكم بالنظام, حيث يمكننا تصميم متحكم يحقق المتطلبات المطلوبة.

تسمح تعليمات `lqr` في ماتلاب باختيار بارامترین هما R , مما سيوازن العلاقة الهامة بين قوّة التحكم (Control effort), والخطأ (الفرق عن الموضع الصفي리 لمتحولات الحالة), بالأأخذ بعين الاعتبار أثنا نحاول تحسين تابع الأداء قدر الإمكان.

الحالة الأبسط هي افتراض $R=1$, والمصفوفة $Q=C^T * C$, تسمح خوارزمية LQR بشكل أساسي بالتحكم بكل الخرجين في النظام, يمكن ضبط المنظم بتغيير التثقييل لعناصر القطر الرئيسي في المصفوفة Q لتحقيق الاستجابة المطلوبة

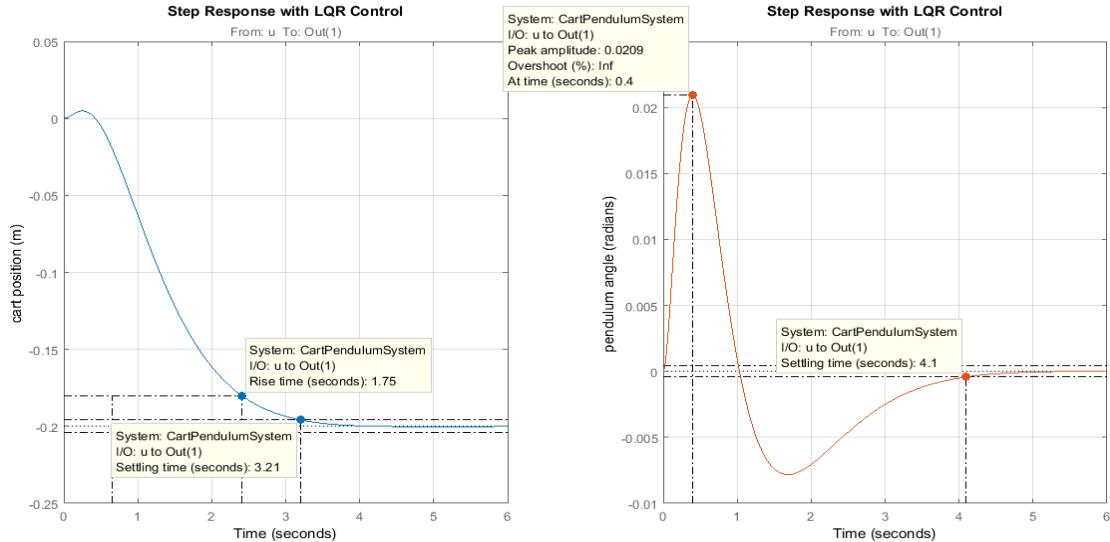
```
>> Q = C' * C
Q = [1 0 0 0;
      0 1 0 0;
      0 0 0 0;
      0 0 0 0]
>> R = 1;
```

من المصفوفة Q الناتجة, العنصر ذو الدليل (1,1) يمثل التثقييل لموضع العربة, والعنصر ذو الدليل (2,2) يمثل التثقييل لزاوية النواس, يمكن أن نجرب لإيجاد المصفوفة K التي تعطينا منظماً يحقق معايير التصميم, فنكتب التعليمات التالية:

```
>> K = lqr(A, B, Q, R)
K = [-1.0000    11.1637   -2.1120    2.1043]
```

والاستجابة التالية للنموذج الخطّي بالنسبة لموضع العربة وزاوية النواس عند تطبيق إشارة قفرزة على الدخل بمطال [m] 0.2 لموضع العربة المرغوب.

يمثل المنحني الأحمر زاوية النواس بالراديان, والمنحني الأزرق يمثل موضع العربة بالเมตร, كما نرى, النظام مستقر لكن الاستجابة غير مرضية, حيث يبدو تفاوت زاوية النواس واضحاً, ويحتاج زمن الاستقرار إلى تحسين.



نلاحظ أيضاً أن العربة ليست حتى في موضع قريب من المرغوب، وهي في الواقع تدرك بالاتجاه المعاكس، سنتعامل مع هذا الخطأ لاحقاً، وسنجرب في الوقت الراهن على زمن الصعود وزمن الاستقرار.

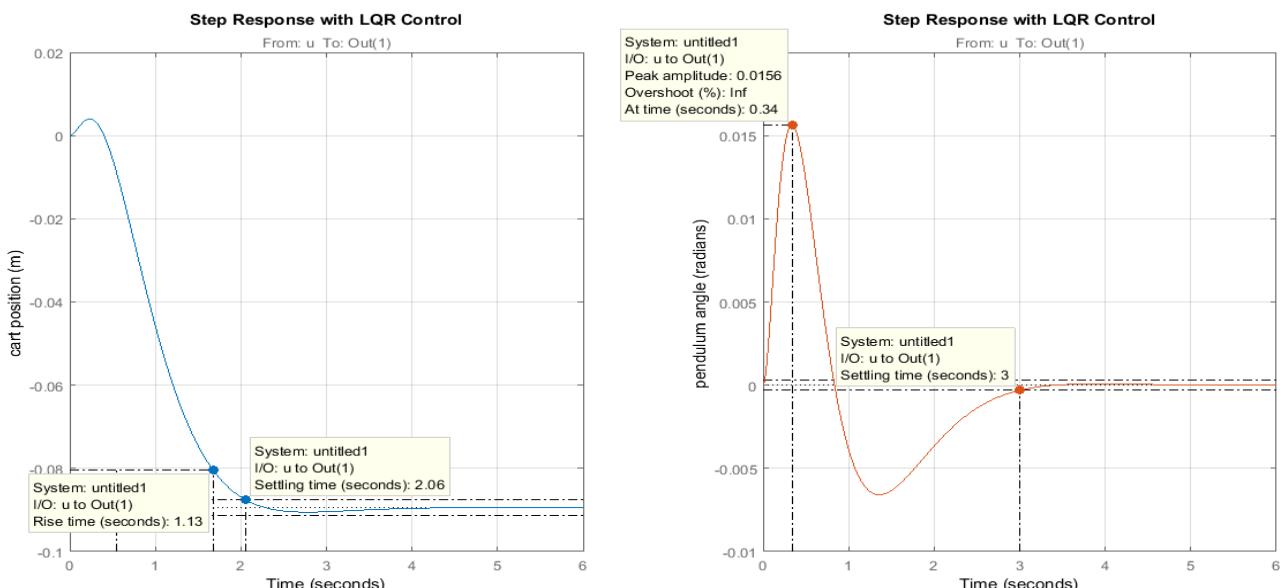
ستجد أن زيادة التثبيت لعناصر المصفوفة Q يجعل زمن الاستقرار وزمن الصعود أقل ويقلل زاوية المجال الذي يدرك فيه النواس، بعبارة أخرى ستضع المزيد من الوزن لتسريع ملاحقة الإشارة المرجعية وذلك بتكلفة زيادة قوة التحكم u .

```
>> Q = diag([50, 100, 1, 1]);
```

والتي تتح مصفوفة الأرباح

```
K = [-2.2361 14.1868 -3.0283 2.6491]
```

والاستجابة التالية للنموذج الخطى بالنسبة لموضع العربة وزاوية النواس عند تطبيق إشارة قفزة على الدخل بمطال [m] لموضع العربة المرغوب:

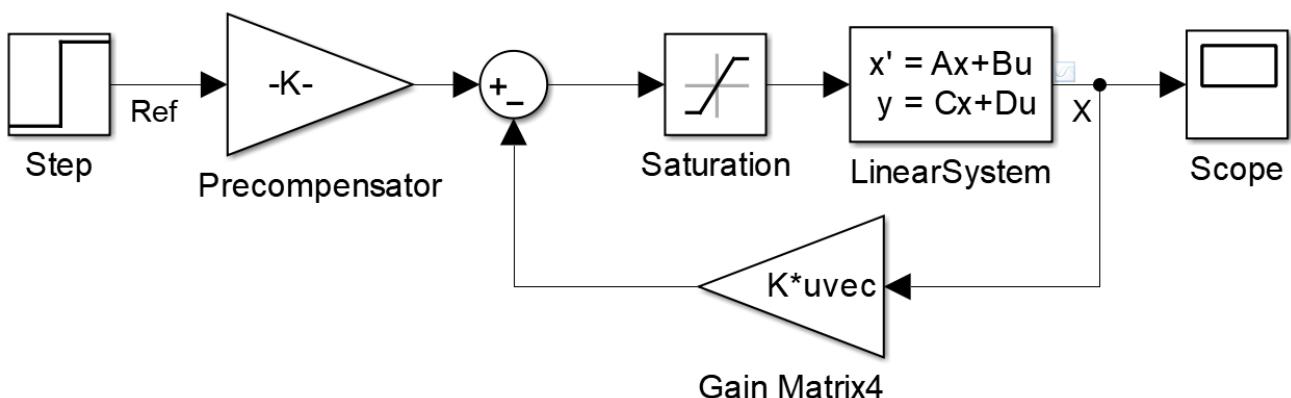


للحظ أنه بزيادة قيم عناصر المصفوفة Q تصبح الاستجابة أفضل، أي أن الخطأ يصبح أصغر لكنه سيطلب قوة تحكم u أكبر، وقوة تحكم أكبر تتطلب تكلفة أكبر في تصميم النظام الحقيقي (صرف طاقة أكثر، مشغل أكبر...).

المتحكم الذي صممناه يحقق متطلبات التحكم، لكننا الآن سنأخذ خطأ الحالة الشابت SSE بعين الاعتبار، فقد لاحظنا سابقاً أن النظام لم يلتحق بالإشارة المرجعية أبداً، حتى أن موضع العرفة سالب بدل أن يكون موجباً، وذلك لأننا لا نقارن خرج النموذج مع الإشارة المرجعية، بل نقيس جميع متغيرات الحالة، ونضربهم بشعاع الأرباح K ثم نطرح هذا الناتج من الإشارة المرجعية، ليس هناك أي سبب لنتوقع أن $x^* K^*$ سيكون مساوياً للخرج المرغوب.

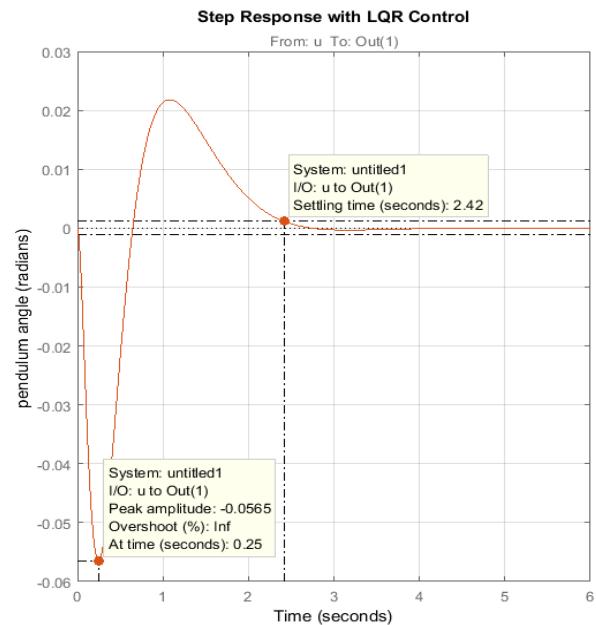
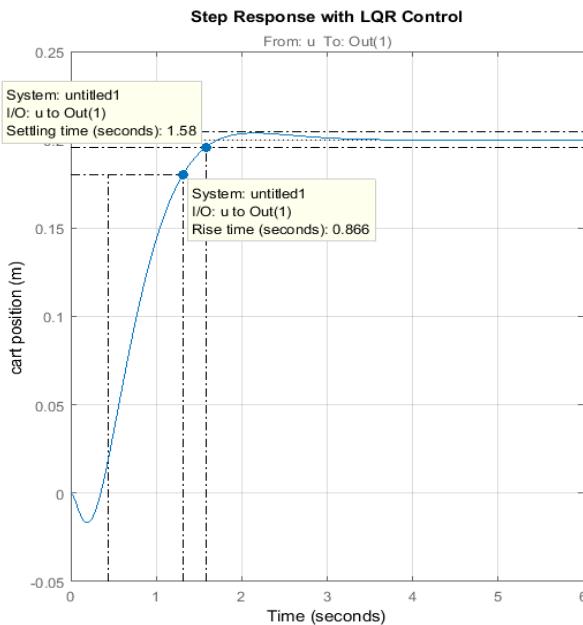
لحل هذه المشكلة، يمكن ملائمة الدخل المرجعي ليكون مساوياً $x^* K$ ، بالإضافة معامل الملائمة N وهو مساوي للربح المضروب بموضع العرفة المقاس $(1)K$.

فيكون الناتج بالشكل التالي:



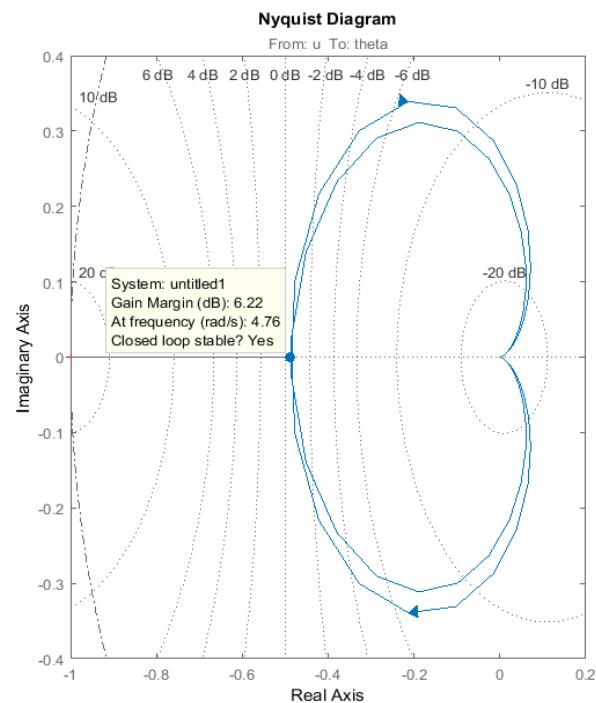
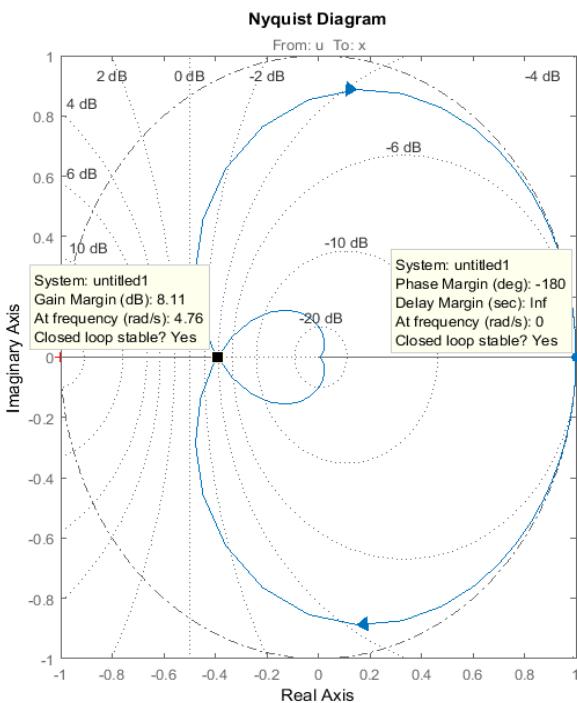
سنعود لتجدد استجابة النموذج مع التغذية العكسية بمتغيرات الحالة بعد إضافة هذه الملائمة للإشارة المرجعية، وذلك عند القيم السابقة للمصفوفتين R , Q نفسها.

فتكون الاستجابة التالية للنموذج الخطى بالنسبة لموضع العربة وزاوية التواس عند تطبيق إشارة قفزة على الدخل بمطال [m] 0.2 لموضع العربة المرغوب:



إن الاستجابة الناتجة مرضية جداً، وهي تحقق معايير تصميم المتحكم التي اشتربناها في البداية.

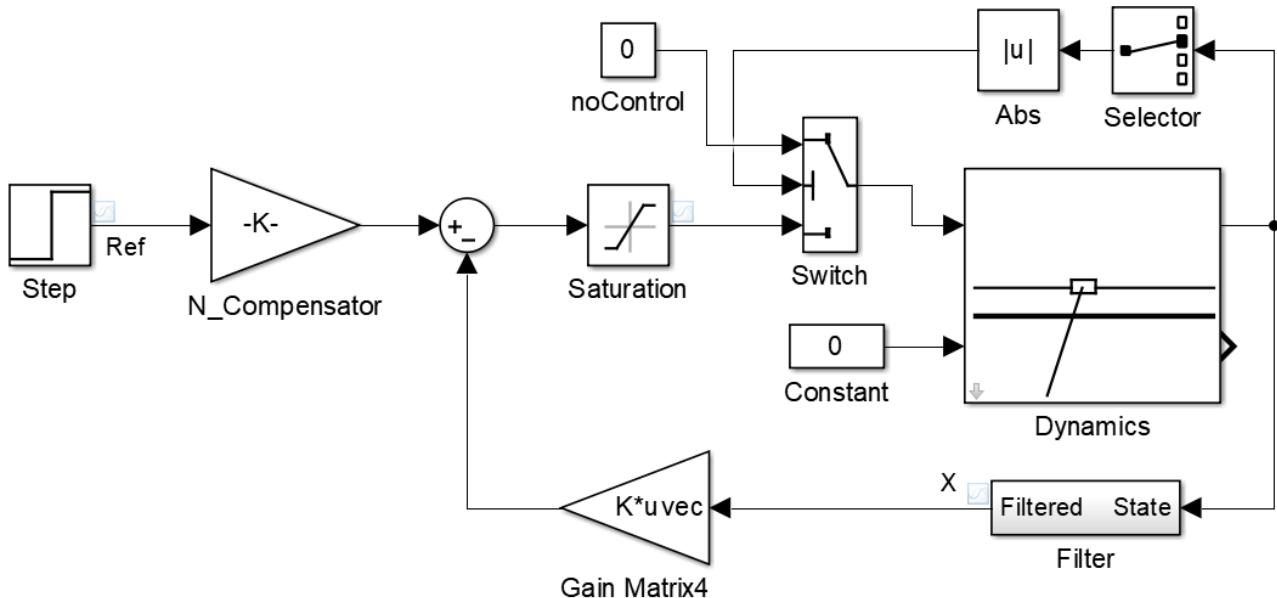
عند إجراء تحليل نايكويست الترددى للنظام المدمج مع أرباح منظم LQR نجد:



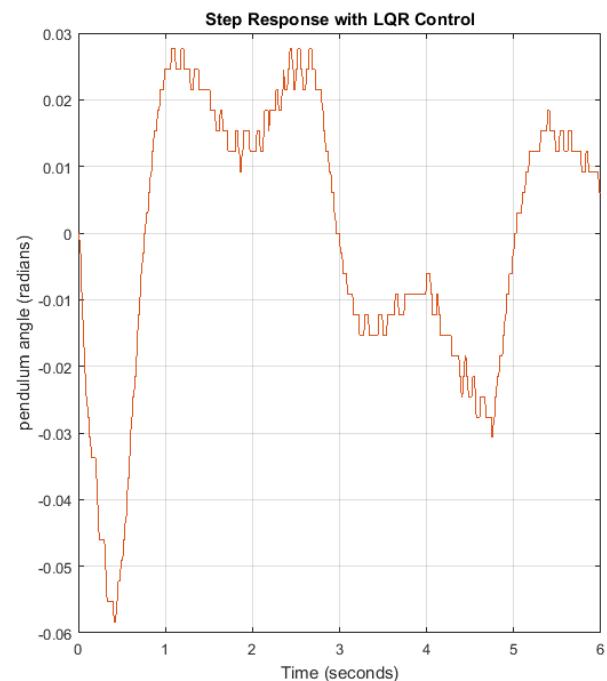
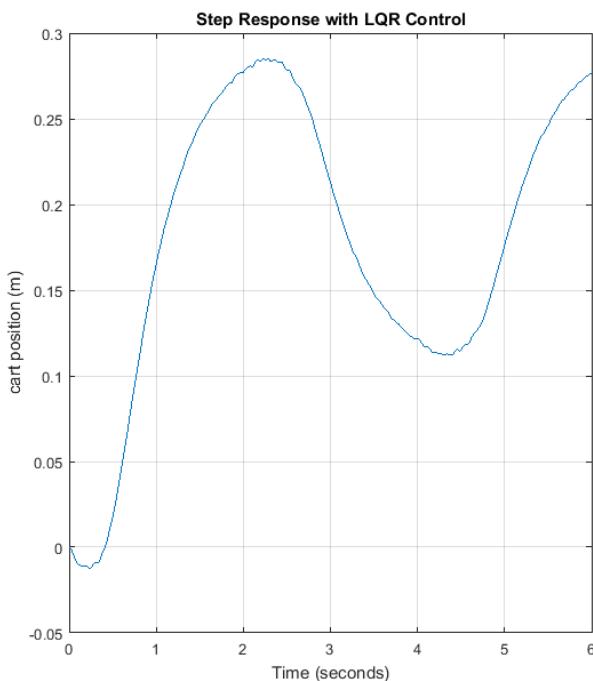
يوضح الرسم أن الاحتياطي $G_m = 6.22$ لعربة، و $G_m = 8.11$ لزوايا التواس.

تطبيق المنظم LQR على النموذج اللخطي للعرة والنواص:

بعد أن حصلنا على مصفوفة أرباح المنظم LQR التي تم تصميمها لتحقيق شروط الأداء للنموذج الخطبي، سترى استجابة النموذج اللخطي لهذه الأرباح، حيث أنه ممثل مع التغذية العكسيّة بالحالة ومصفوفة الربح للمنظم الأمثل، بالإضافة لمرشح قد تمت إضافته لترشيح ضجيج القياس.

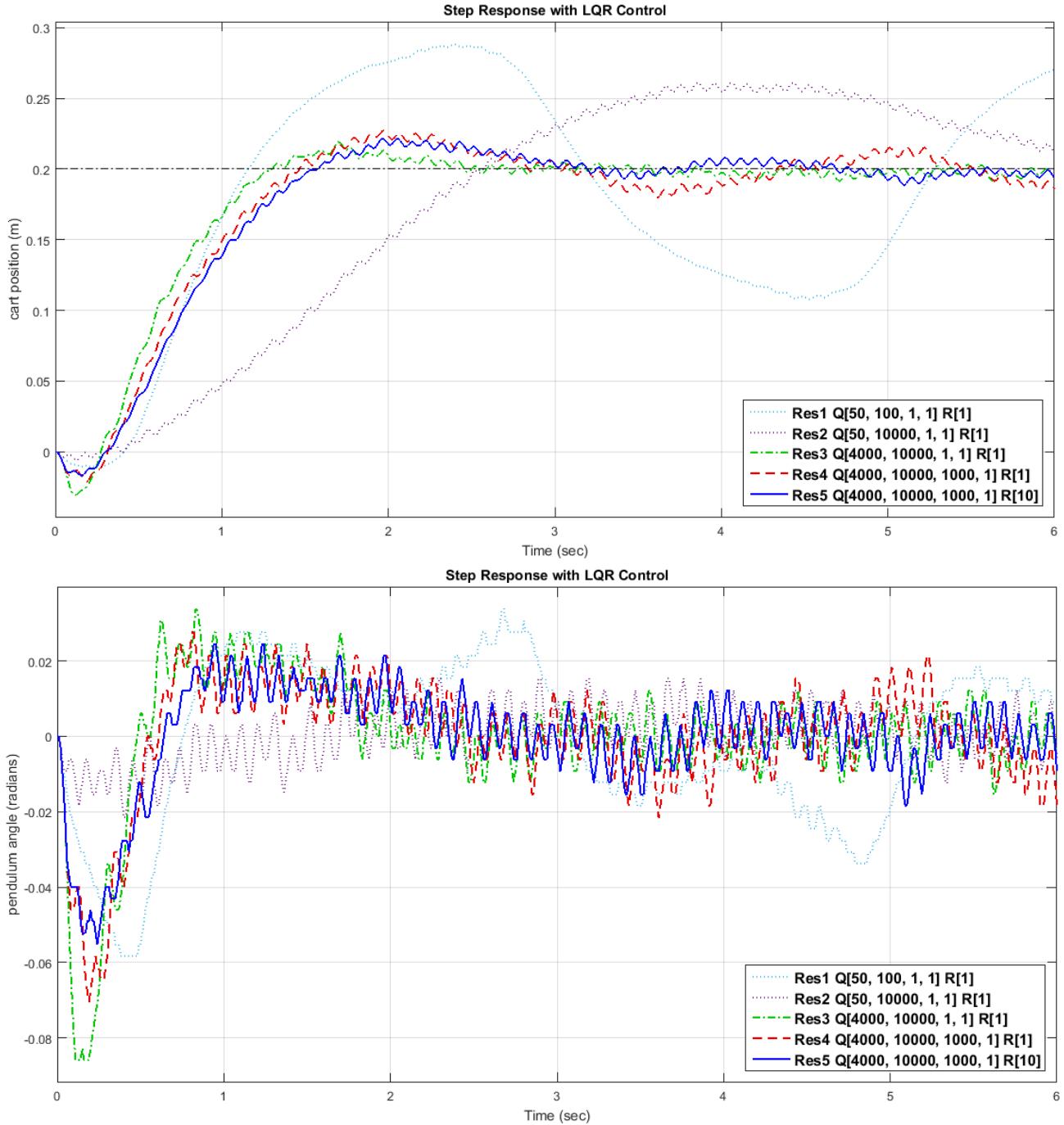


عند تطبيق إشارة قفزة على الدخل بمطال [m] 0.2 لموضع العرفة المرغوب، نجد ما يلي:



إن نظام العرفة والنواص شديد اللخطيّة، مما جعل استجابة النموذج اللخطي غير مرضية إلى حد كبير، لذلك سنقوم بتعديل المصفوفتين R و Q حتى نصل إلى استجابة تحقق معايير التصميم.

بعد عدة تجرب لتحسين الاستجابة، بإلغاء التجاوز الأعظمي للعربية، وتقليل المجال الذي يتفاوت فيه النواص، بحيث تكون الأرباح مناسبة أيضاً عند تطبيقها على النظام الحقيقي، توصلنا إلى الاستجابات التالية:



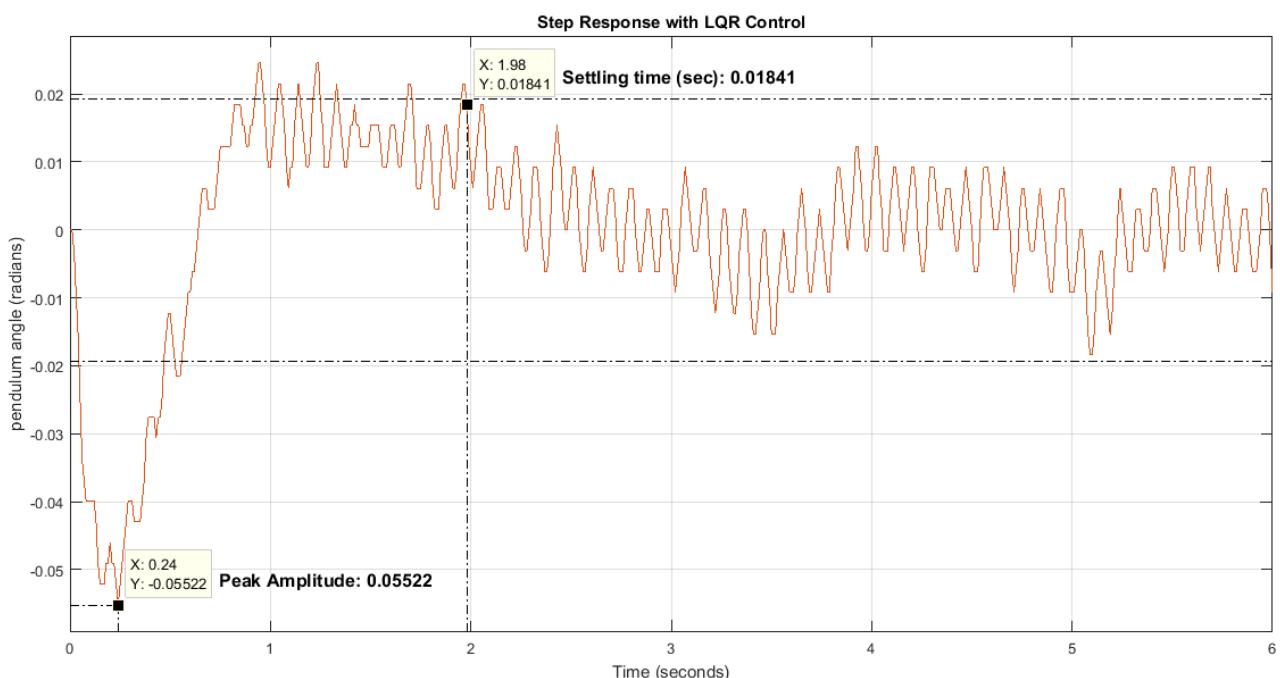
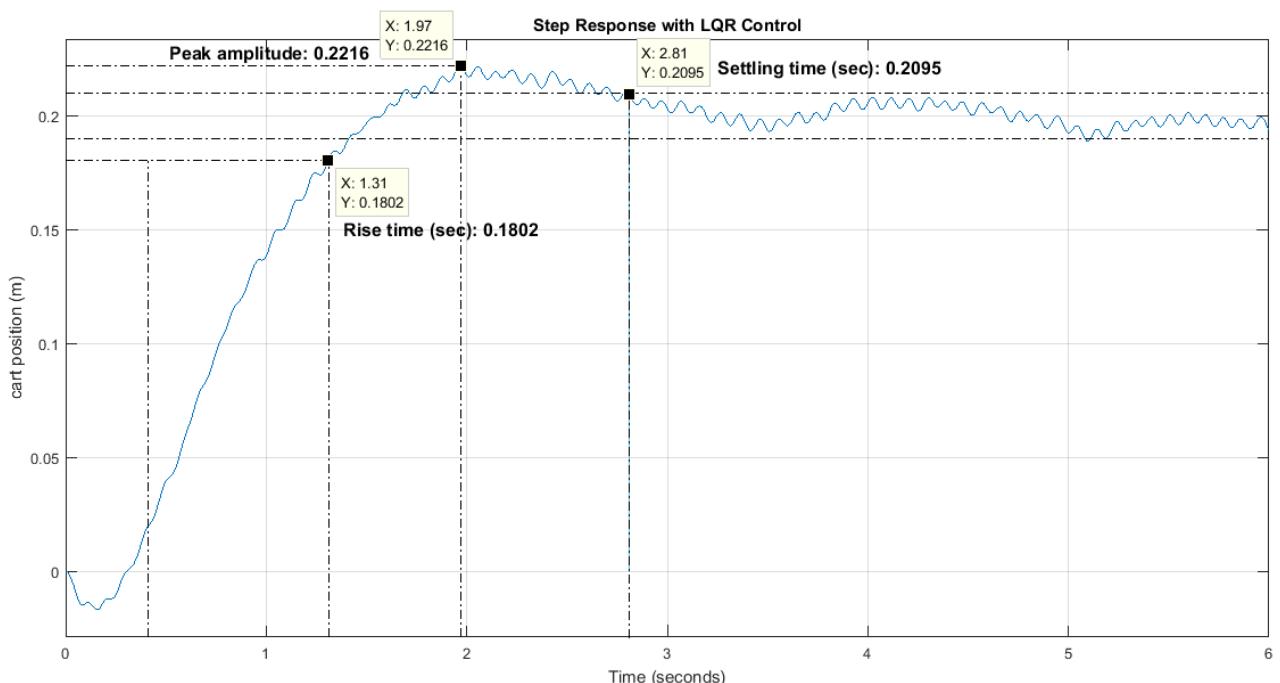
إنَّ ما يهم عند توليف المصروفتين R , Q هو النسبة بين عناصر المصفوفة وليس قيمة العنصر جميع المميزات العابرة في الرسم لها زمن استقرار T_s وزمن صعود T_r جيد، الاستجابة (2) البنفسجية، تملك أفضل الخواص بالنسبة لزاوية النواص من حيث التجاوز الأعظمي وزمن الاستقرار، بينما الاستجابة (3)

الخضراء، تملك أفضل الخواص بالنسبة لموضع العرفة من حيث زمن الصعود وזמן الاستقرار، إلا أن الاستجابة (5) ال Zarqae تجمع المميزات الأمثلية بالنسبة لموضع العرفة وزاوية التوازن معاً.

إن الاستجابة (5) حصلنا عليها بكتابه التعليمات التالية في Matlab:

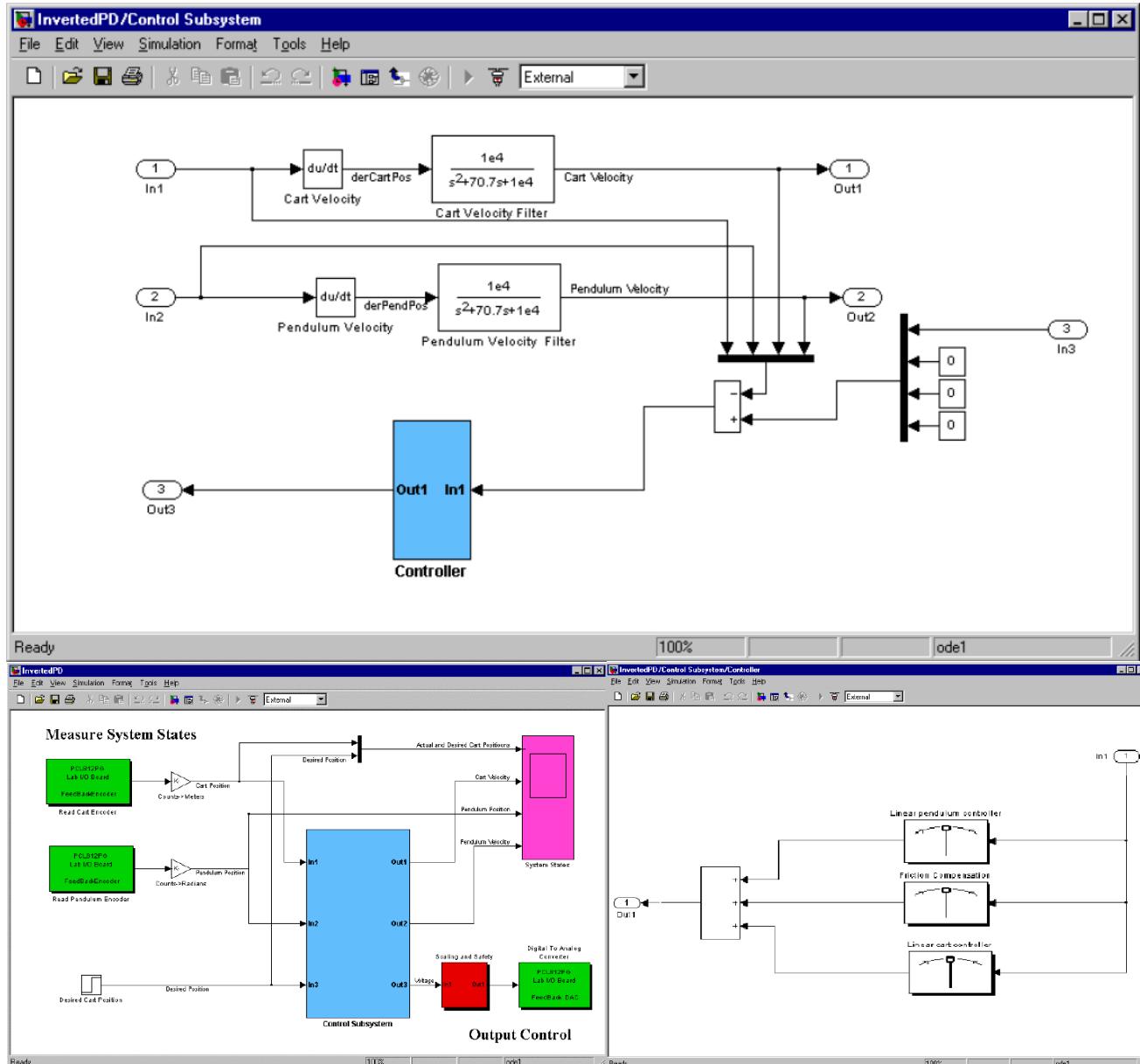
```
>> Q = diag([4000, 10000, 1000, 1]); R = [10]
>> K = lqr(A,B,Q,R)
K = [-20.0000    72.3354   -20.2234   12.5876]
```

ونوضح فيما يلي المميزات الزمنية لهذه الأرباح:



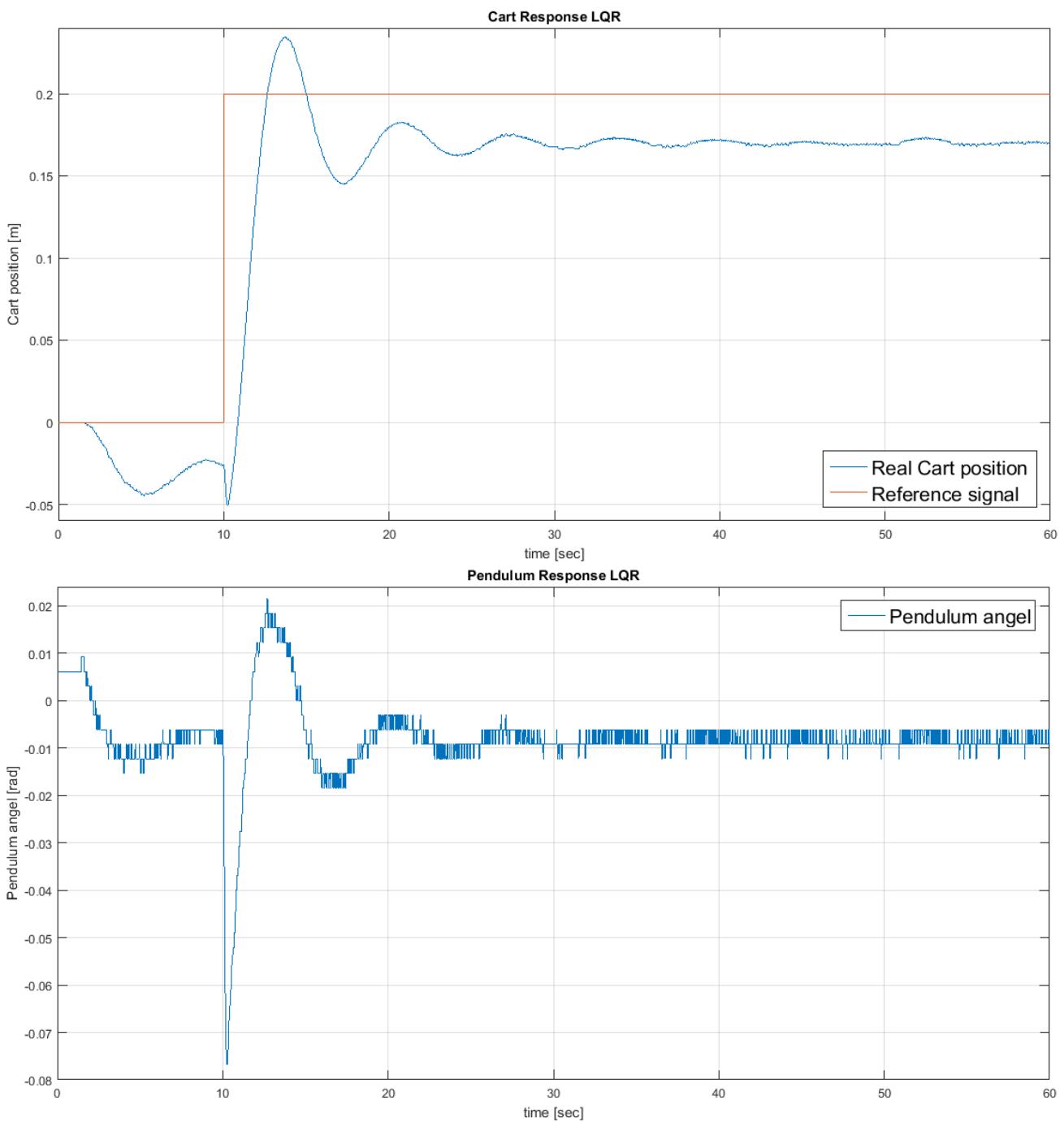
5. التنفيذ العملي لمنظم LQR على تجربة العربية والنواص:

عند القيام بالتنفيذ العملي للمنظم LQR باستخدام الملف "InvertedPD_Orginal.mdl" الموجود في حاسب التجربة، وذلك عند ضبط الإعدادات كما يلي الخطوة بمقدار 0.001 وخوارزمية الحل الرقمي هي Solver: ode5(Dormand prince)، يظهر الشكل التالي مخطط التحكم في بيئة Simulink:



عند ضبط الدخل المرجعي على إشارة [m] Step: 0.2 لموضع العربة المرغوب، شرط أن يبقى النواص في الوضع الشاقولي العلوي، قمنا باستدلال النتائج التالية من التجربة وذلك عند أرباح منظم LQR المبينة:

$$K = [-20.0000 \quad 72.3354 \quad -20.2234 \quad 12.5876]$$



إن النتائج الموضحة بالرسم جيدة نسبياً، حيث لاحق النشارة المرجعية وحقق الاستقرار، إلا أن الاستجابة تعانى من خطأ الإزاحة الثابت SSE وهي من المشاكل الشائعة التي تظهر عند تطبيق منظم LQR على النظم الخطية المرتبطة، لحل هذه المشكلة يجب إضافة ربح تكاملي.

6. التنفيذ العملي لمتحكم LQI على تجربة العربية والنواص:

يجب إضافة ربح لمنظم LQR، يضرب بتكامل إشارة الخطأ (الإشارة المرجعية مطروحة منها الإشارة المقاسة)، وتحسب هذه الأرباح في بيئة ماتلاب كالتالي:

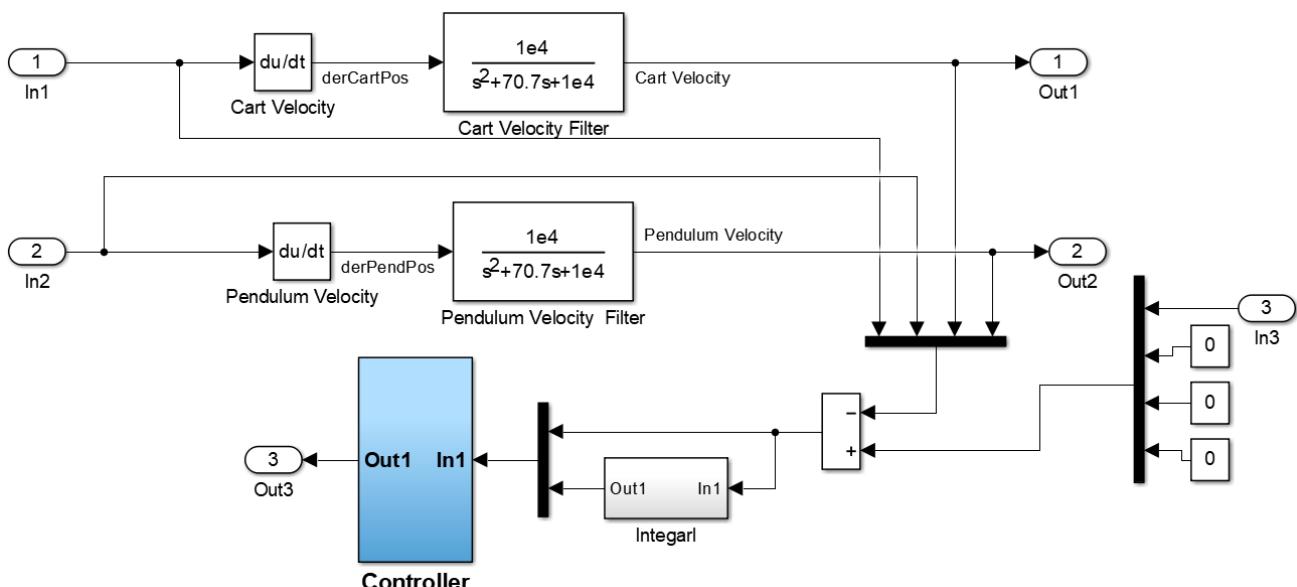
```
>> Q = diag([20000, 1000, 20, 1, 4000]); R = [10]
```

```
>> [K, S, e] = lqi(ss(A,B,C,D),Q,R);
```

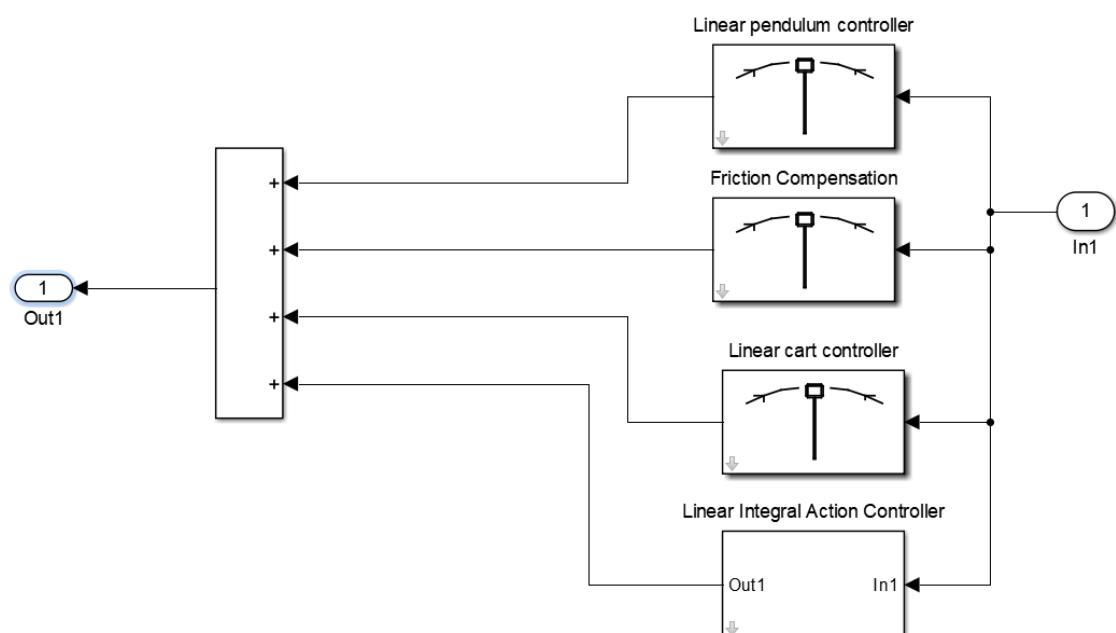
$K = [-55.1062 \quad 67.5031 \quad -26.5907 \quad 12.9250 \quad 20.0000]$

عند القيام بالتنفيذ العملي لمنظم LQI باستخدام الملف "Ahmad_Fares_LQI.mdl" الموجود في

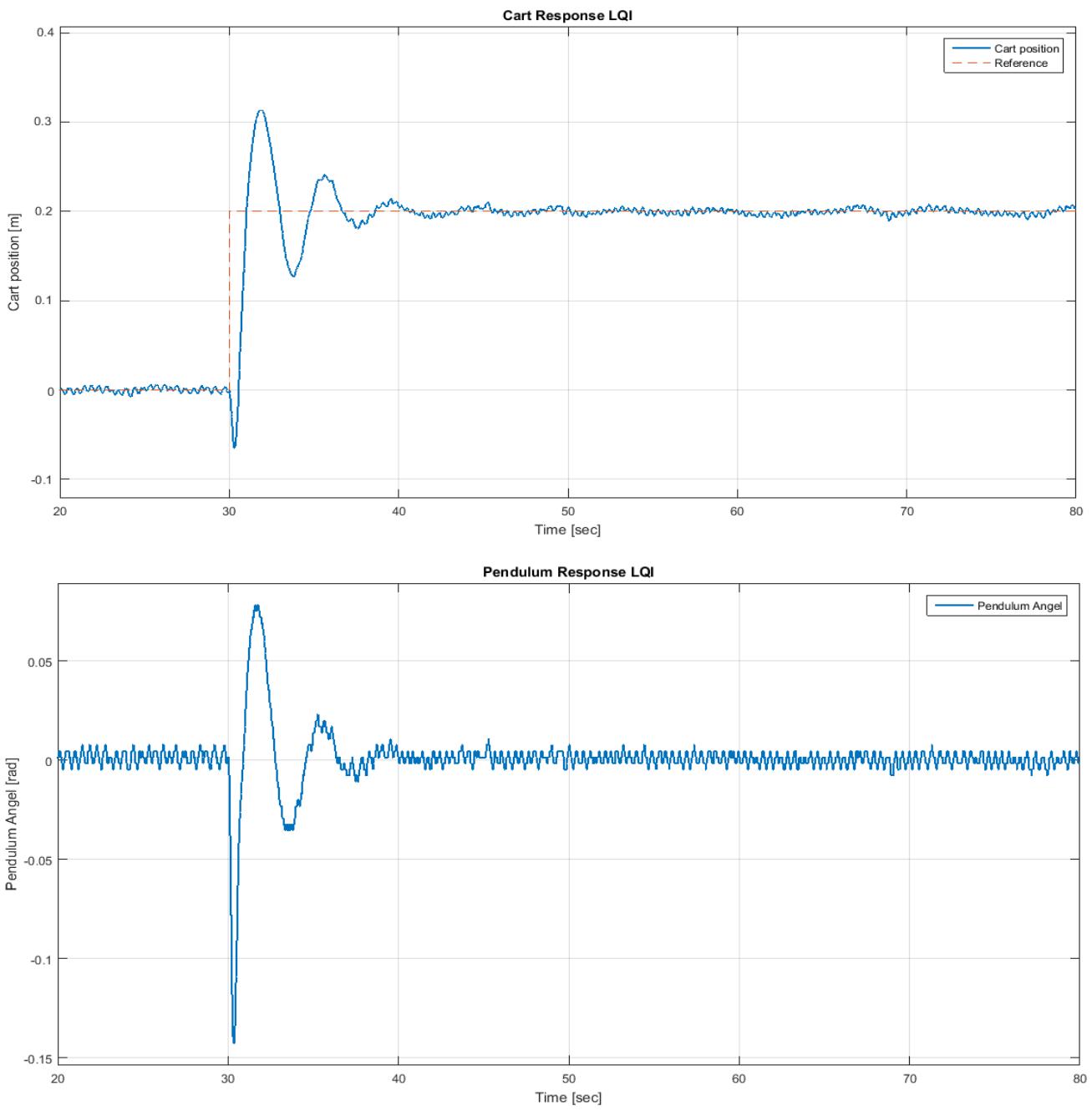
حاسوب التجربة، بنفس الاعدادات السابقة، يُظهر الشكل التالي مخطط التحكم في بيئة Simulink



وصندوق الذي يحوي الأرباح Controller



تم استرطال النتائج التالية عند أرباح متدرك LQI المُبيّنة:



إن النتائج الموضحة بالرسم ممتازة، حيث لاحق النشاط المرجعية وحقق الاستقرار، إلا أن الاستجابة تعانى من التجاوز الأعظمي M_p وقد ظهرت هذه المشكلة عند إضافة الربح التكاملى إلى المتدرك، حيث جعل استجابة النظام تهتز بمطال أكبر.

3. المُقدّر التريعي الخطّي LQE (Kalman Filter):



مرشح كالمن (Kalman Filter) والذي يعرف أيضًا بالمقدّر التريعي الخطّي (LQE) هو خوارزمية تستخدم سلسلة من القياسات التي تم استدلالها مع الوقت، متضمنة الضجيج والارتباط، لتعطي تقدّيرات للمتغيرات المعروفة والتي تمثّل لتكون أكثر دقة من الاعتماد على قياس واحد للإشارة فقط، من خلال تقدّير التوزع الاحتمالي على المتغيرات لكل لحظة زمنية، يأخذ المرشح اسمه من العالم Rudolf E. Kalman (May 19, 1930 – July 2, 2016)، في العام 1960 نشر كالمن ورقته البحثية المشهورة لحل التعاوادي لمسألة الترشيح الخطّي للبيانات المقطعة.

العديد من الأنظمة الحديثة تستخدم عدة حساسات لتقدير الحالة الداخلية للنظام من خلال سلسلة من القياسات، من أشهر هذه التطبيقات هي الملاحة والتوجيه والتحكم بالمركبات، خاصة الطائرات والمركبات الفضائية والسفين المتحركة، بالإضافة إلى ذلك، مرشح كالمن هو مفهوم يطبق كثيراً في تحليل السلسلة الزمنية المفيدة في مجالات مثل تحليل الإشارة والاقتصاد، كما أنه أحد الموضوعات الأساسية في علم تحطيم حركة الروبوتات والتحكم بها، ويمكن أن يستخدم لتحسين المسار.

تعمل الخوارزمية بمراحلتين: في مرحلة التنبؤ، يقوم مرشح كالمن بتقدير المتغيرات الحالية للنظام، على الرغم من الارتباط، حتى يتم استدلال نتيجة القياس التالي (يكون القياس مشوباً بخطأ ما، بما في ذلك الضجيج العشوائي)، هذه التقدّيرات يتم تحديتها بترجيح القيمة الوسطية، حيث يعطي مرشح كالمن المزيد من الأهمية لقياسات ذات الدقة الأكبر، يتم تكرار الخوارزمية (تعاواديها)، يمكن أن تعمل في الزمن الحقيقي باستخدام قياسات المدخلات الحالية فقط والحالة المحسوبة سابقاً ومصفوفة الارتباط.

بشكل أمثل، يفترض مرشح كالمن أن الخطأ له توزع طبيعي (غوصي)، تم تطوير امتدادات وعميلات على هذه النظرية، مثل مرشح كالمن الموسع EKF ومرشح كالمن الغير محدد UKF اللذان يعملان على الأنظمة اللاخطية، تم استخدام مرشح كالمن بنجاح في دمج القياسات من حساسات بأنواع متعددة، أو شبكات الحساسات الموزعة.

1. مدخل إلى مرشح كالمن:

إن الحالة الحالية للنظام تشكّل الدخل لخوارزمية التنبؤ، بينما يكون خرج الخوارزمية هي الحالة المستقبلية، والتي تتضمّن بaramترات الهدف لعينات زمنية متتالية، إذا عرفت الحالة الحالية للنظام والنموذج الديناميكي له، سيكون التنبؤ بالحالة التالية للنظام أمراً سهل التحقّيق.

في الواقع، قراءات الحساسات ليست دقيقة بشكل كلي، فهي تحوي أخطاء عشوائية أو ارتياحية والتي تؤثر على دقة الحالة المُتنبئ بها للنظام، إن عدم الدقة في القياسات تدعى ضجيج القياس Measurement-Noise.

إضافةً إلى أن حركة الهدف لا تتوافق دائمًا مع معادلات الحركة وذلك بسبب عوامل خارجية، إن عدم التوافق هذا بين معادلات الحركة والحركة الحقيقية للهدف تنتهي عن ضعف النمذجة الرياضية والارتياحية في النموذج الديناميكي، والذي يدعى اضطرابات العملية Process Noise.

بسبب الاضطرابات والضجيج، يمكن أن تكون الحالة المقدرة للنظام بعيدةً جداً عن الحالة الحقيقية للنظام.

2. مفاهيم أساسية في علم الإحصاء:

لابد لنا من شرح بعض المفاهيم الأساسية في الرياضيات قبل الغوص في مرشح كالمن

- المتوسط Mean: هو المعدل الوسطي للقيم المعلومة دقيقةً (دون ارتياح)، يرمز له μ ، ويعطى بالعلاقة:

$$V_{mean} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N V_n$$

- القيمة المتوقعة Expected Value: هي القيمة التي تتوقع أن يأخذها متغير غير معروف على مدة زمنية طويلة أو بالعديد من التجارب، يرمز له E ، ويعطى بالعلاقة:

$$W = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N W_n$$

- التباين Variance: هو مقياس لانتشار مجموعة من البيانات عن متوسطها، يرمز له σ^2 ، ويدرس بالعلاقة:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - \mu)^2$$

في حال أردنا تقدير التباين لمجموعة من البيانات ستختلف العلاقة قليلاً لتصبح بالشكل:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (x_n - \mu)^2$$

- الانحراف المعياري Standard Deviation: هو الجذر التربيعي للتباين، يرمز له σ ، ويعطى بالعلاقة:

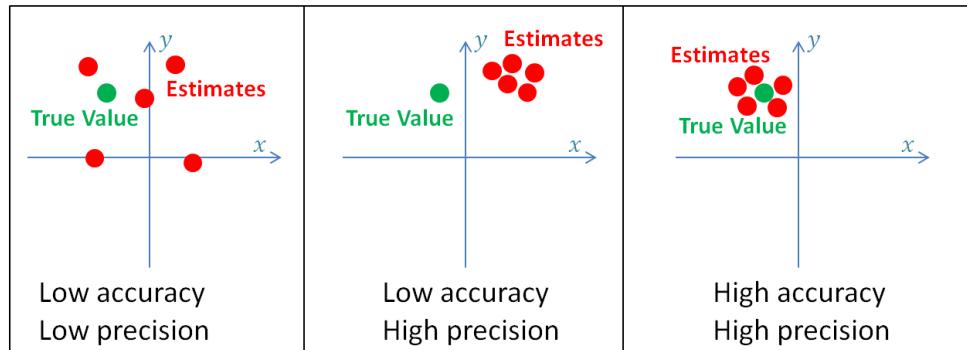
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - \mu)^2}$$

- التوزيع الطبيعي Normal Distribution: وهو يدعى أيضًا بالتوزيع الغوصي نسبةً إلى العالم، يمثل بالتالي Carl Friedrich Gauss.

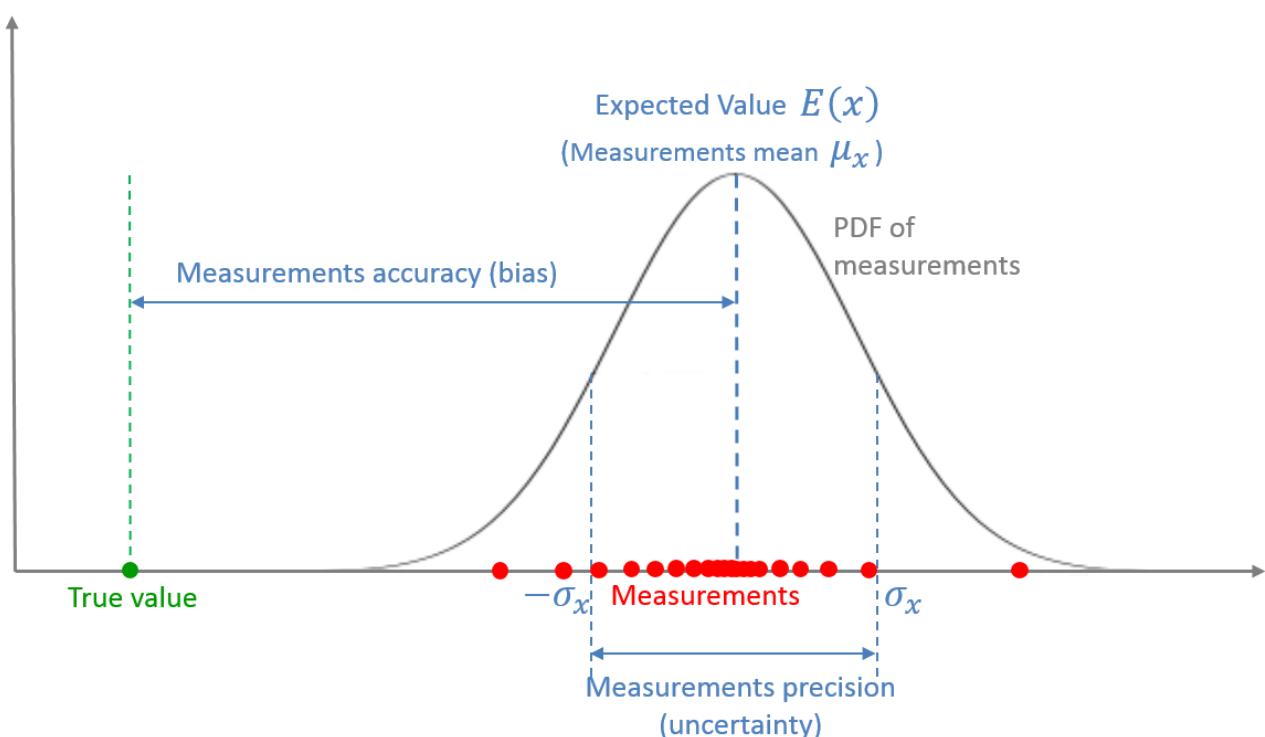
$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

يدعى أيضًا منحي غوص أو تابع الكثافة الاحتمالي PDF (Probability Density Function).

- المتداول العشوائي Random Variable: يمثل متداولات الحالة للنظام وله مجموعة من القيم المحتملة من عدة تجارب عشوائية، وهو يوصف بواسطة تابع الكثافة الاحتمالي.
- التقدير Estimate: هو تخمين الحالة الداخلية للنظام، يمكن تحسين التقدير بشكل كبير باستخدام حساسات متعددة وتطبيق خوارزميات تقدير متقدمة (مثل مرشح كالمن).
- الإدراك Accuracy: يحدد مدى قرب القياس من القيمة الحقيقة.
- الدقة Precision: تصف قابلية التغير في سلسلة من القياسات للباراهيتر ذاته.



إن القياسات هي المتداول العشوائي Random Variable، والتي توصف بواسطة تابع الكثافة الاحتمالي (PDF) Probability Density Function، المتوسط لهذه القياسات هو القيمة المتوقعة Expected Value، الإزاحة بين متوسط القياسات والقيمة الحقيقة هو مدى إدراك Accuracy of the measurement أو خطأ القياس السابق Precision، سعة التوزع للقياسات هي دقة القياس Systematic_measurement_uncertainty، وتعرف أيضاً بضجيج القياس Measurement noise.



3. مفهوم التخمين الأمثل Optimum Estimates

إن مسألة التخمين الأمثل تعامل على تخمين قيم بaramترات النظام اعتماداً على معادلات الحالة والمتغيرات المقاسة مع الأخذ بعين الاعتبار الخصائص الإحصائية لضجيج النظام وضجيج القياس، يهدف التخمين الأمثل إلى إيجاد الربح الذي يجعل معيار الأداء (تابع الكلفة) المعبر عن مقدار الانحراف عن الحالة المثالية للتخمين أصغر ما يمكن ويتحقق ذلك من خلال خطوات تكرارية.

ليكن لدينا نظام فيزائي موصوف بالنموذج الديناميكي المتقطع التالي:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_k$$

$$z_k = Hx_k + v_k$$

حيث أن x شعاع الحالة، u شعاع الدخل، z شعاع القياس

$x [nx1]$	شعاع الحالة في اللحظة الزمنية k
$A [nxn]$	مصفوفة انتقال الحالة
$B [nx1]$	مصفوفة الدخل
$u [nx1]$	شعاع الدخل
$w [nx1]$	شعاع الارتيابية في الحالة
$z [mx1]$	شعاع القياس
$H = C [mxn]$	مصفوفة الخرج (تمثل علاقة الحالة بالقياس)
$v [mx1]$	شعاع ضجيج القياس

ويتمتع الضجيج v بالخصائص الإحصائية التالية:

مصفوفة التغير للاضطرابات w_k هي: Q_k

$$E[w_k, w_i^T] = \begin{cases} Q_k, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

مصفوفة التغير للضجيج v_k هي: R_k

$$E[v_k, v_i^T] = \begin{cases} R_k, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

:Kalman Filter Algorithm خوارزمية مرشح كالمن

عبارة عن خوارزمية تكرارية تقوم في كل لحظة زمنية بتحديث تخمين متغيرات الحالة (posterior) اعتماداً على التقدير السابق للحالة \hat{x}_k والقياس الحالي z_k (prior) بشكل خططي كما هو موضح بالمعادلة التالية:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_n(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad [2]$$

وتدعى المصفوفة K برج مرشح كالمن، سنقوم الآن بدراسة الخصائص الإحصائية لتحديد قيمة هذا البرج، لنعرف القيم التالية والتي تحدد الخصائص الإحصائية للمرشح وبناءً عليها سيتم تحديد قيمة البرج:

$$e_k^- \equiv x_k - \hat{x}_k^-$$

$$e_k \equiv x_k - \hat{x}_k$$

$$P_k^- = E[e_k^-, e_k^{-T}]$$

$$P_k = E[e_k, e_k^T]$$

تألف خوارزمية مرشح كالمن من ثلاثة مراحل أساسية وهي:

المرحلة الأولى وهي مرحلة التنبؤ Action/Prediction stage: ويتم الحصول على القيمة المتوقعة للعينة x باستخدام معادلات الحالة للنظام، وتقوم بحساب مصفوفة التشتت للحالة P_k^- قبل قيودم القياس وذلك بالاعتماد على النموذج الرياضي ومصفوفة التشتت لضريح النظام Q وذلك بتحديد التابع الذي يربط بين التخمين السابق للحالة Prior والتخمين التالي Posterior (وهو التابع الذي يصف سلوك النظام الفيزيائي):

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k$$

وقيمة خطأ التخمين هي:

$$e_k^- = x_k - \hat{x}_k^- = Ae_k + w_k$$

وبالتالي فإن قيمة P_k^- تكون:

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$$

المرحلة الثانية مرحلة إيجاد البرج: ويتم تحديد قيمة ربح مرشح كالمن K الذي يعطي أفضل تخمين ممكن لبارامترات النظام ويقلل تشتت خطأ التخمين وبالتالي الحصول على قيم أمثلية لبارامترات المخمنة للنظام وقريبة من القيم الحقيقية وذلك كما يلي:

$$K_n = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1}$$

المرحلة الثالثة مرحلة التصحيح Prediction/Correction Stage: وهنا يتم تصحيح القيمة المخمنة \hat{x}_k من خلال تغذية عكسية مصححة وذلك بإضافة بد التصحيح $K_n(z_k - \hat{z}_k)$ إلى توقع القيمة كما يلي:

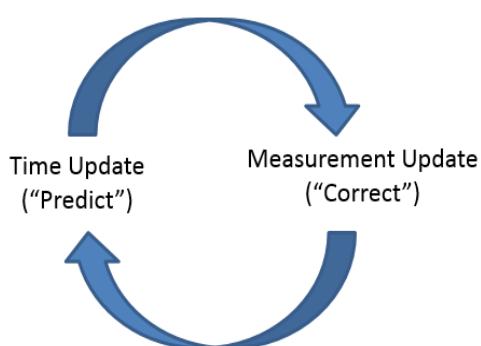
$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_n(z_k - H\hat{x}_k^-)$$

وحتى نكمل عمل خوارزمية KF علينا تهديد قيمة مصفوفة تشتت الخطأ P_k وذلك موم جداً حتى تتمكن الخوارزمية من تحديد انتشار تشتت خطأ التخمين مع الزمن ويتم ذلك بالعلاقة التالية:

$$P_k = (I - K_n H) P_k^-$$

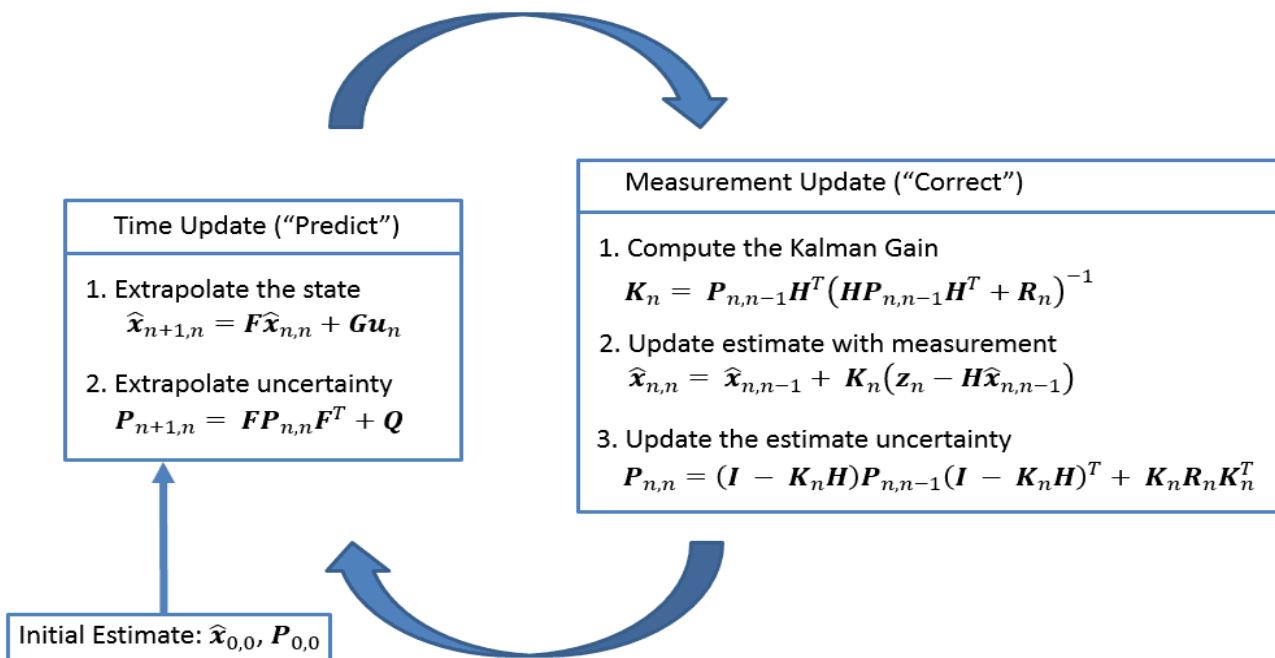
إن الجزء العرج في تصميم KF هو استخدام القيم البدائية الصريحة لمصفوفات P, Q, R فلذلك المصفوفات تأثير كبير على أداء واستقرار المرشح وتسخدم طريقة التجربة trial & error لتحديد قيم هذه المصفوفات.

خوارزمية مرشح كالمن الموسع Extended Kalman Filter Algorithm



تستخدم هذه الخوارزمية لتخمين متغيرات وبارامترات نظام ديناميكي غير خطى في الزمن الحقيقي، في خوارزمية EKF يتم تقرير النظام غير الخطى إلى خطى عند كل لحظة زمنية وتحول نقطة العمل باستخدام تقنية Linearization وبالنهاية استخدام مصفوفة Jacobian (F) في معادلات المرشح وبالتالي استخدام مصفوفات الحالة للحصول على التقرير الخطى وبعد بدلًا من مصفوفات الحالة للحصول على التقرير الخطى ذلك نطبق خوارزمية KF النموذجية للحصول على القيم للنظام.

ويوضح المخطط المنهجي التالي طريقة عمل EKF:



يوضح الجدول التالي جميع المعادلات المترابطة بتطبيق مرشح كالمن:

	Equation	Equation Names
Predict	$\hat{x}_{n+1} = F\hat{x}_{n,n} + Gu_n$	State Space Model
	$P_{n+1,n} = FP_{n,n}F^T + Q$	Covariance
(correction)		Extrapolation
	$\hat{x}_{n,n} = \hat{x}_{n,n-1} + K(z_n - H\hat{x}_{n,n-1})$	State Update
	$P_{n,n} = (I - K_n H)P_{n,n-1}(I - K_n H)^T + K_n R_n K_n^T$	Covariance Update
Auxiliary	$K_n = P_{n,n-1}H^T(HP_{n,n-1}H^T + R_n)^{-1}$	Kalman Gain
	$z_n = Hx_n$	Measurement Equation
	$R_n = E(v_n v_n^T)$	Measurement
		Covariance
	$Q_n = E(w_n w_n^T)$	Process Noise
		Covariance
	$P_{n,n} = E(e_n e_n^T) = E((x_n - \hat{x}_{n,n})(x_n - \hat{x}_{n,n})^T)$	Estimation Error

يلخص الجدول التالي رموز الأشعة وأبعاد المصطلحات المستخدمة في خوارزمية مرشح كالمن:

Term	Name	Dimensions
x	State Vector	$n_x \times 1$
z	Measurement Vector	$n_z \times 1$
F	State Transition Matrix	$n_x \times n_x$
u	Input Variable	$n_u \times 1$
G	Control Matrix	$n_x \times n_u$
P	Estimation Covariance	$n_x \times n_x$
Q	Process Noise Covariance	$n_x \times n_x$
R	Measurement Covariance	$n_x \times n_z$
w	Process Noise Vector	$n_x \times 1$
v	Measurement Noise Vector	$n_z \times 1$
H	Observation matrix	$n_z \times n_x$
K	Kalman Gain	$n_x \times n_z$

حيث أن:

n_x عدد متغيرات الحالة

n_z عدد المتغيرات المقاسة

n_u عدد متغيرات الدخل

n دليل الزمن المتقطع

4. تصميم مرشح كالمن لتقدير الحالة لنموذج العرفة والنواص:

بدايةً ندرس قابلية المراقبة والتي تعني أننا نستطيع مراقبة (قياس) شعاع متغيرات الحالة عن طريق شعاع الخرج، وتكون كل متغيرات الحالة موصولة مع الخرج في مخطط سير الإشاره، ويكون النظام قابلاً للمراقبة عندما تكون رتبة المصفوفة Ob متساوية لدرجة النظام n .

$$Ob = [C \ C A \ C A^2 \ \dots \ C A^{n-1}]^T$$

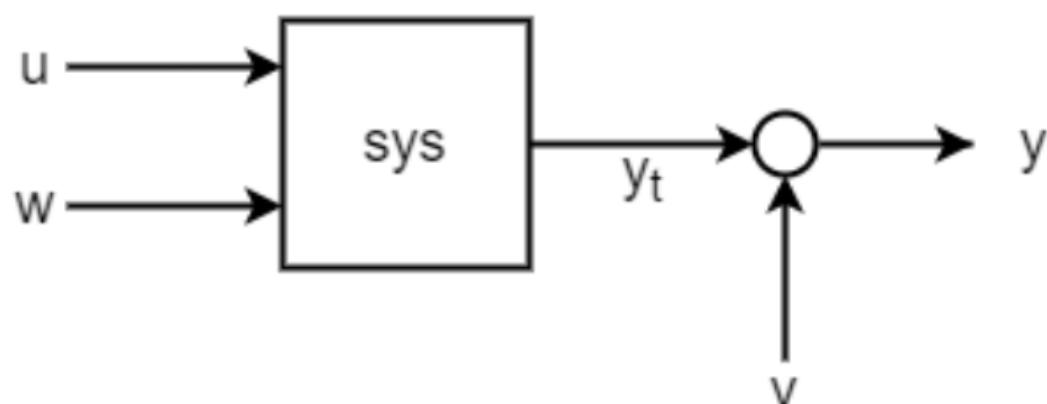
$$\text{rank}(Ob) = n$$

n : هي درجة النظام أو عدد متغيرات الحالة.

ويمكن بسهولة إيجاد رتبة مصفوفة قابلية المراقبة باستخدام ماتلاب بالتعليمية:

```
>> rank(obsv(A, B));
```

لكي نصمم مرشح كالمن الخطى نحتاج لإضافة ضجيج العمليات وضجيج القياس الى النظام الخطى بحيث يكون للنظام دخل u بالإضافة إلى ضجيج العمليات w والخرج y المقاس والذي يحتوى على ضجيج القياس v .

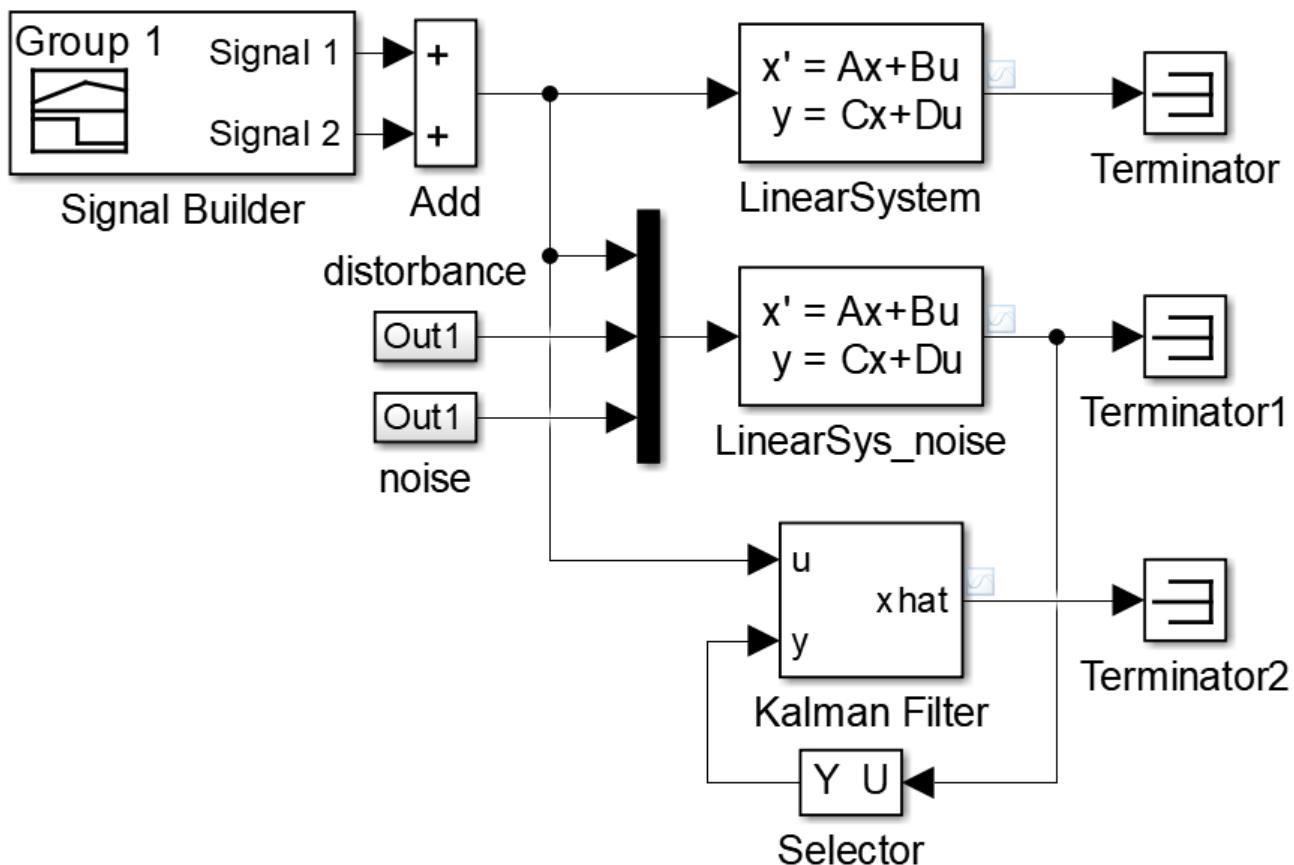


يعطى فضاء الحالة المستمر للنظام الخطى مع الأخذ بعين الاعتبار ضجيج العمليات وضجيج القياس بالشكل التالي:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gw$$

$$y = Cx + Du + Hw + v$$

تم تمثيل النظام المدمج مع ضجيج العمليات وضجيج القياس لنموذج العربية والنواص كما هو مبين بالشكل التالي:



تعطى مصفوفات النظام الخطى للعربيه والنواص بعد إضافة ضجيج العمليات وضجيج القياس:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.9645 & -2.2425 & -0.0003 \\ 0 & 29.0109 & -6.0398 & -0.0077 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.3305 \\ 8.9703 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad D = [0]$$

$$G = \text{ones}(4,4) \quad H = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

باعتبار أن هناك متغير حالة واحد مقاس وهو موضع العربية x .

يمكن الحصول على النظام المجمع عن طريق التعليمية التالية:

```
>> sys = ss(A, [B G], [C], [D H]);
```

يمكنا حساب الأرباح الأمثلية لمرشح كالمن باستخدام التعليمية التالية:

```
>> [kf, L, P] = kalman(sys, Qn, Rn);
```

يعيد التابع ثلاثة مخرجات هي kf التي تمثل النظام بصيغة فراغ الحالة مع الدخل u والخرج y مع ضجيج القياس ويكون الخرج شعاع الحالة المقدر \hat{x} ، وتعيد التعليمية أيضاً الربح الأمثل L و P مصفوفة خطأ التشتت

بعد ضم مرشح كالمن مع النظام الخطى، تعطى مصفوفات النظام مع المرشح في الحلقة المغلقة بالمعادلات التالية:

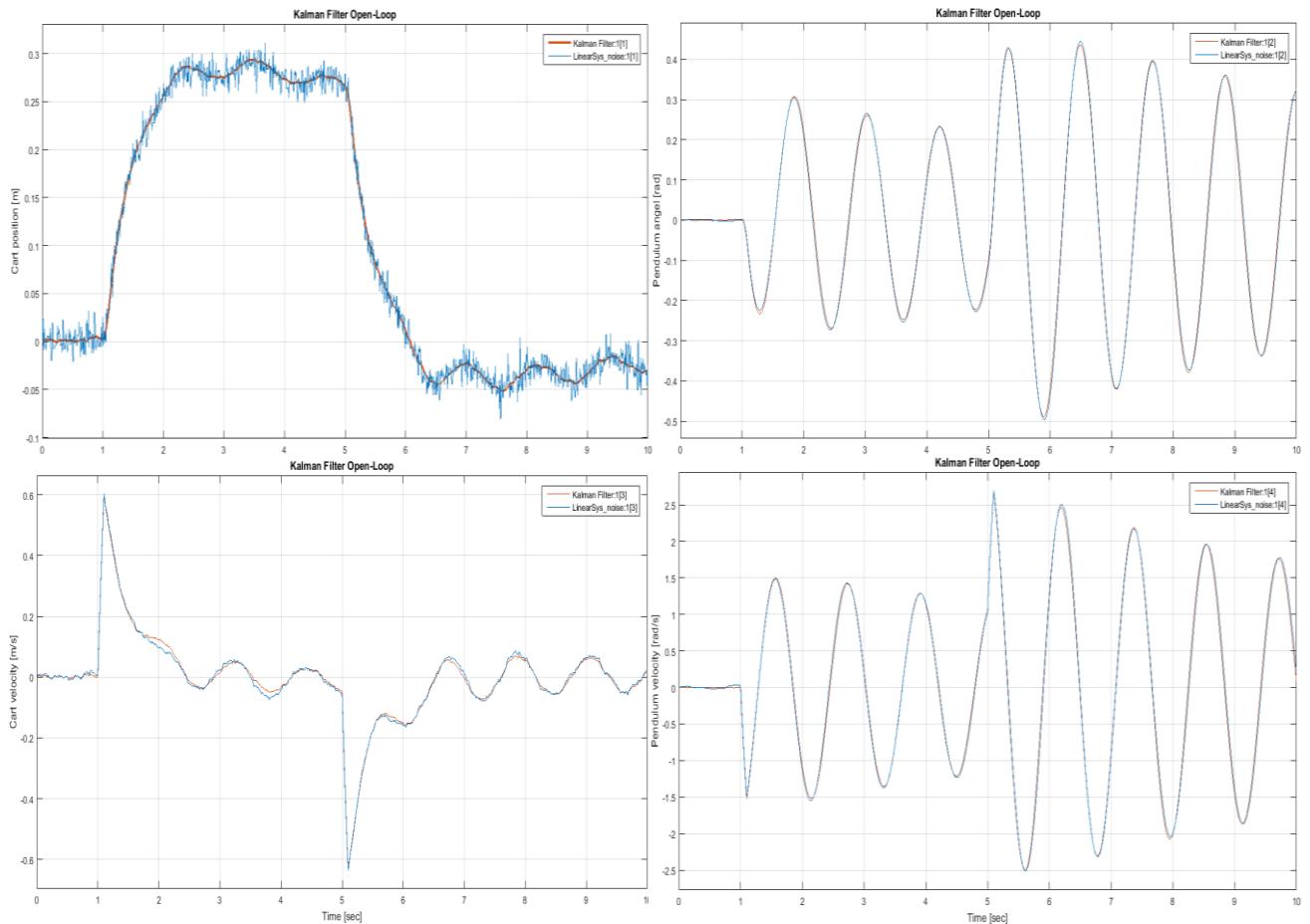
$$A_k = A - L * C$$

$$B_k = [B \ L]$$

$$C_k = eye(4)$$

$$D_k = 0 * [B \ L]$$

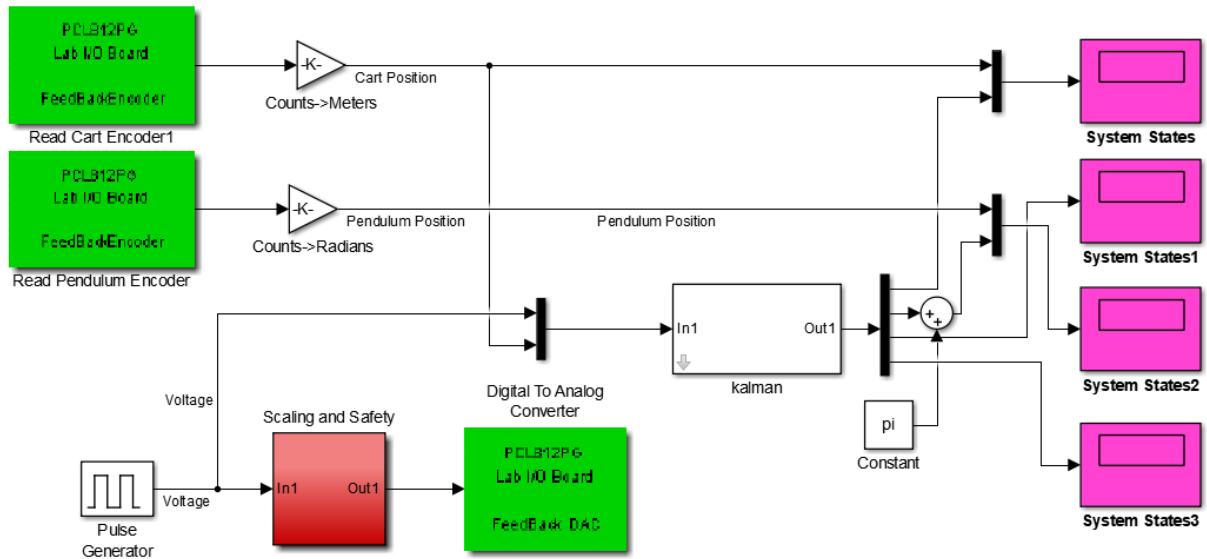
وبعد معايرة المصفوفات R على النظام حصلنا على الاستجابات التالية حيث توضح الفرق بين خرج المرشح المتبى به وخرج النموذج المدموج:



إن الخوارزمية تقدر بشكل صحيح والخرج المقدر منطبق على خرج النموذج

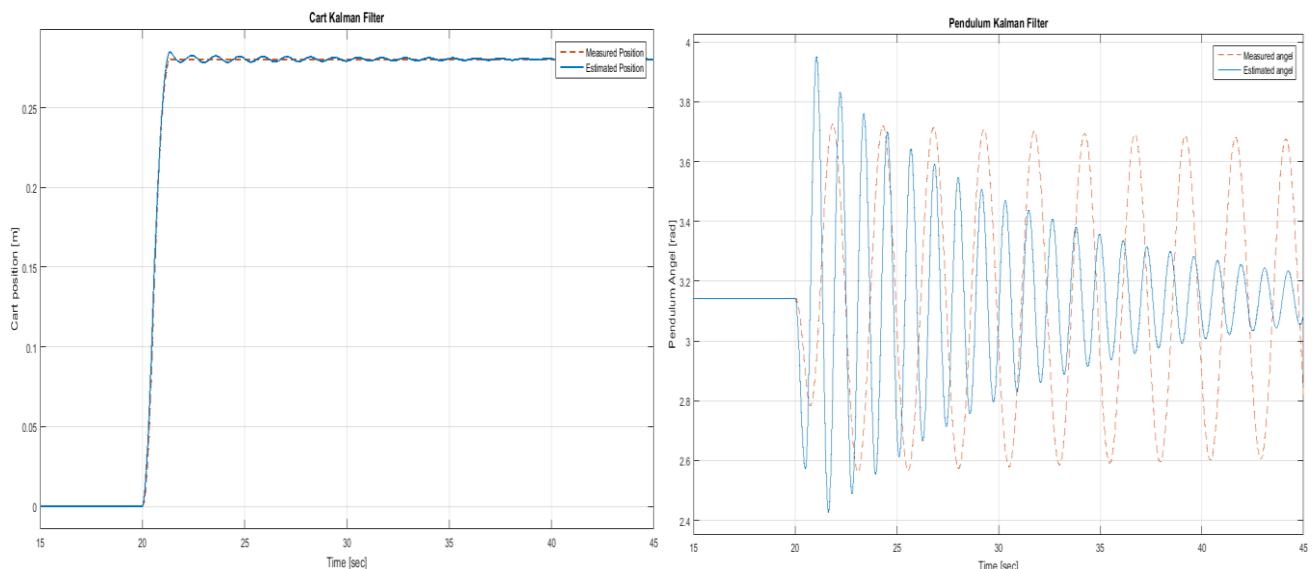
عند تنفيذ خوارزمية كالمن على التجربة قمنا بتطبيق جهد على الدخل بمقدار 1.2 لمدة 0.5 ثانية في الحلقة المفتوحة باستخدام الملف "Ahmad_Fares_Kalman.mdl" الموجود في حاسب التجربة، يظهر الشكل التالي مخطط التحكم في بيئة Simulink

Measure System States



Output Control

قمنا باستحصل النتائج التالية النتائج التالية:



5. تصميم مرشح كالمن الموسع لتقدير الحالة لنموذج العرفة والنواص:
ليكن لدينا نظام ديناميكي لخطي موصوف بمعادلات فضاء الحالة

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, q) \\ y &= g(x) + r\end{aligned}$$

والذي يجب نقله إلى المجال الزمني المتقطع (نستخدم Euler)

$$\begin{aligned}x_n &= f(x_{n-1}, u_n, w_n) \\ y_n &= g(x_n) + v_n\end{aligned}$$

يقوم مرشح كالمن الموسع بتقريب النظام اللخطي في كل خطوة زمنية حول نقطة التقدير الحالي للحالة ونستخدم مصفوفة جاكوبيان الناتجة تستخدم في التنبؤ وتحديث الحالة في خوارزمية مرشح كالمن Jacobians:

$$\begin{aligned}F &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{n-1}, u_n} \\ G &= \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\hat{x}_n}\end{aligned}$$

Linearized system:

$$\begin{aligned}\Delta x_n &\approx F \Delta x_{n-1} + w_n \\ \Delta y_n &\approx G \Delta x_n + v_n\end{aligned}$$

للحصول على تخمين أمثلى للمتحولات العشوائية للنظام يمكن حساب القيم المحدثة لشاعر الحالة وتحديث قيم المتوسط الحسابي والتشتت باستخدام نموذج النظام بشكل تكراري وحساب الخصائص الإحصائية لتابع التوزيع المرتبط بين x , y .

باستخدام معادلة التصحيح التي يعبر عنها بالشكل:

$$\hat{x}_{n,n} = \hat{x}_{n,n-1} + K(z_n - H\hat{x}_{n,n-1})$$

ويكون التخمين أمثلياً عندما يكون تشتت خطأ التخمين $e_n = x_n - \hat{x}_n$ أصغر وبالتالي ستكون القيمة المختمنة للمتحولات العشوائية المعمرة على النظام أقرب إلى القيمة الحقيقية.
إن معادلة استقراء الحالة يعبر عنها بالشكل العام:

$$P_{n+1,n} = FP_{n,n}F^T + Q$$

وتشتت التقدير بالصيغة المصفوفية:

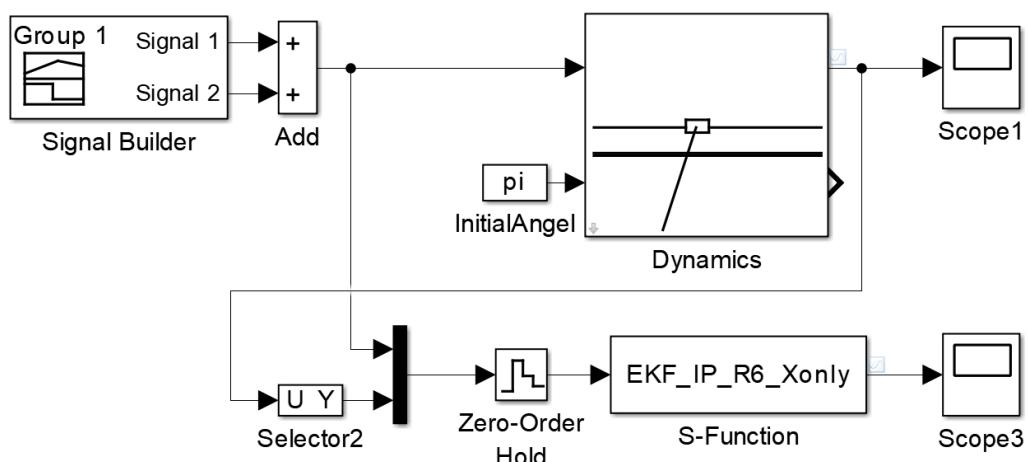
$$P = \begin{bmatrix} p_x & p_{x\theta} & p_{xx} & p_{x\dot{\theta}} \\ p_{\theta x} & p_\theta & p_{\theta x} & p_{\theta\dot{\theta}} \\ p_{\dot{x}x} & p_{\dot{x}\theta} & p_{\dot{x}} & p_{\dot{x}\dot{\theta}} \\ p_{\dot{\theta}x} & p_{\dot{\theta}\theta} & p_{\dot{\theta}x} & p_{\dot{\theta}} \end{bmatrix}$$

عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة هي التشتت التقدير المستقل لمتحولات شاعر الحالة، وبباقي عناصر المصفوفة هي التشتت المرتبط للمتحولات العشوائية.
سنفترض أن أخطاء التقدير هي مت حولات عشوائية مستقلة وبهذا تكون العناصر إلا القطر الرئيسي ذات قيم صفرية.

إن الجزء المدرج في تصميم EKF هو استخدام القيم الابتدائية الصديقة لمصفوفات P , R , Q ملحوظة المصفوفات تأثير كبير على أداء واستقرار المخمن، وتسخدم طريقة التجربة والخطأ لتحديد قيم هذه المصفوفات.

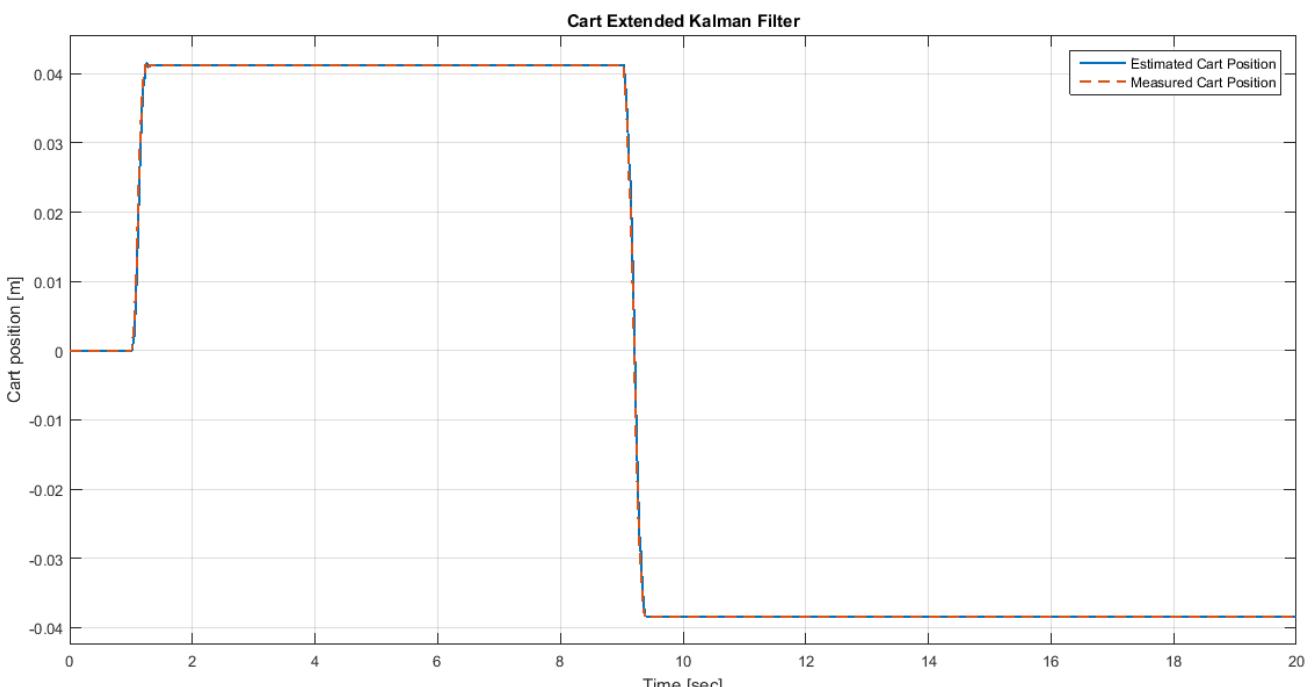
بسبب قدم نسخة برنامج Matlab المتوفّر على حاسب التجربة وعدم وجود صندوق مرشح كالمن في بيئـة Simulink، اضطـررنا إلى بناء صندوق باستـخدام S-function بلغـة C وتحـويله إلى صيـغـة C، ليـصـبح قـابـلاً للـاستـخدـام في ملفـات Simulink، وذـكـرـ بـكتـابـةـ الـتعلـيمـةـ باـسـتـخدـامـ C/C++ Compilerـ باـسـتـخدـامـ mexw32ـ >> mex EKF_IP_R6_Xonly.cـ

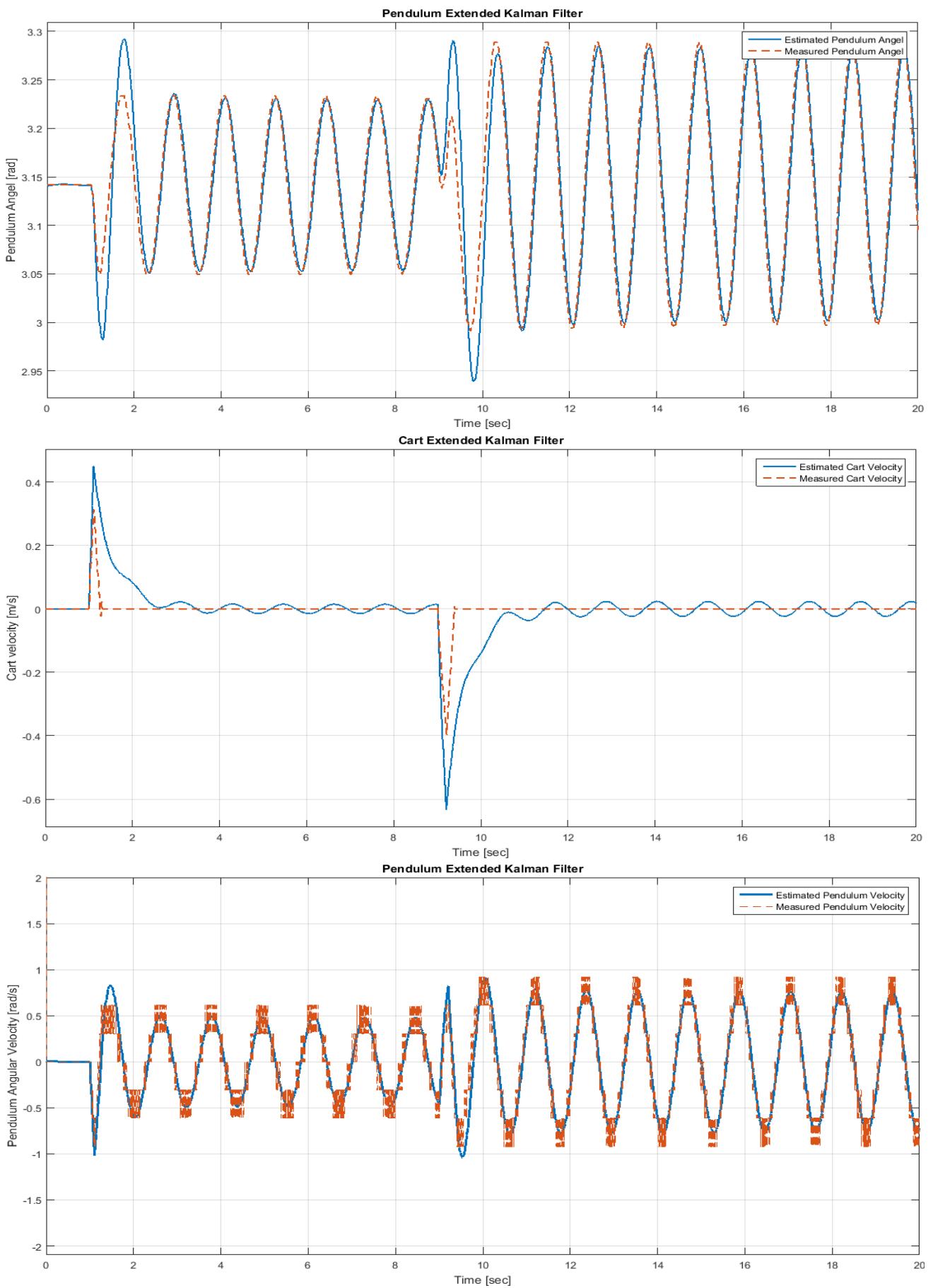
يـبـينـ الشـكـلـ التـالـيـ مـخـطـطـ Simulinkـ لـاخـتـيـارـ مرـشـحـ كـالـمـنـ المـوـسـعـ عـلـىـ النـمـوذـجـ الـلـاخـطـيـ فـيـ الـحـلـقـةـ الـمـفـتوـحةـ وـبـضـبـطـ 0.01ـ كـطـطـوـةـ زـمـنـيـةـ ثـابـتـةـ:



عـنـ تـطـبـيقـ إـشـارـةـ دـخـلـ عـلـىـ النـمـوذـجـ وـمـقـارـنةـ مـتـحـولـاتـ الـحـالـةـ الـمـقـاسـةـ معـ الـمـقـدـرـةـ تمـ الـحـصـولـ

عـلـىـ النـتـائـجـ التـالـيـةـ:





يتضح من النتائج السابقة أن مرشح كالمن الموسع أثبت جدارته في تخمين حالة نظام العربية والنواص وحقق نتائج رائعة في ترشيح ضجيج القياس وملاحقة حالة النظام، ويمكن بصرف وقت أكثر على توليف المصروفات P , R , Q , أن نحصل على تقدير أكثر دقة.

لم يسعفنا الوقت لتطبيق مرشح كالمن الموسع على التجربة الحقيقة، ولا لتطبيق المتعلم LQG، حيث نتطلع لدراستها فيما بعد.

ملخص النتائج والآفاق المستقبلية

1. نظرة عامة:

يعرض هذا الفصل ملخص النتائج للدراسة النظرية والعملية المقدمة في الأطروحة ومقترنات التطوير البحث.

تم في هذا البحث اختيار بعض منهجيات التحكم على تجربة العربية والنواص المخبرية، والتي تم برمجتها مباشرة عن طريق بيئة Simulink، ثم يحول النموذج إلى برنامج تنفيذي بواسطة Real Time Workshop يوضع على شريحة PCI موجودة داخل حاسب التجربة ليتواصل مع العالم الخارجي وذلك بواسطة Real Time Windows Target، تعطي شريحة PCI الأوامر لصدق التحكم والملائمة وتأخذ منه قراءات الحساسات، تمكن هذه المنصة الباحثين في مجال هندسة أنظمة التحكم من اختيار وتطوير خوارزميات التحكم المختلفة في الزمن الحقيقي، كما أن استخدام ماتلاب لمسائل التحكم في الزمن الحقيقي يسرع ويسهل تطوير وتنفيذ الأبحاث برمجياً وعملياً.

تم في هذا البحث اتباع منهجية العمل التالية:

أولاً: دراسة النظام الفيزيائي للتجربة بغية الوصول لأقرب نموذج رياضي يحاكي النظام الحقيقي باستخدام ميكانيك نيوتن ولاغرانج، وتقريب النموذج اللخطي الناتج إلى نظام خطي باستخدام جاكوبيان وتعويض نقاط العمل، وتم أيضاً الحصول على النموذج الخطي المتقطع.

ثانياً: دراسة استقرار النظام في الحلقة المفتوحة وإجراء التحليلات الزمنية والتزديدية اللازمة لاستدلال مميزات النظام.

ثالثاً: تصميم وتنفيذ عدة خوارزميات تحكم وهي (متحكم ثناسي-تكاملی-تفاضلی (PID)، منظم تربيعی خطی (LQI)، (LQR)).

رابعاً: تصميم وتنفيذ مقدر-تربيعي خطی (Kalman Filter) لتقدير متغيرات الحالة غير المقاسة اعتماداً على قياس موضع العربة فقط، وضم روح المنظم الأمثل مع خوارزمية التقدير للحصول على المتتحكم التربيعی الخطی الغوصي (LQG).

2. ملخص النتائج:

يمكن تلخيص نتائج البحث كما يلي:

يبين الدراسة النظرية أن تجربة العربية والنواص المخبرية ذات سلوك لخطي يخضع لقيود حركية، ويتأثر بمجموعة من الارتباطات، وهو نظام ذو استقرار قلق، وبهدف تصميم جملة تحكم ناجحة تمكّن النظام من ملاحقة الإشارة المرجعية وتحقيق الأداء المرغوب تم إيجاد نموذج رياضي للنظام يحاكي بدقة السلوك الحقيقى.

تم الاعتماد على عدة خوارزميات في التحكم، فتم تصميم متعدد PID، وقد يبيّن نتائج المحاكاة باستخدام Simulink نجاحاً مقبولاً للمتحكم في ملاحقة المسارات البسيطة، إلا أنه عند التنفيذ العملي لم يتمكن من تحقيق الاستقرار، مما اضطرنا لتطبيق المنظم التربيعى الخطى LQR الذي حقق نجاحاً في تحقيق الاستقرار وملحقة المسارات البسيطة والمعقدة وتغلب على اللخطية العالية للنظام وقيوده الحركية رغم أخطاء النمذجة الرياضية، عند التنفيذ العملي أظهر أداءً مقبولاً إلا أن الاستجابة تعانى من خطأ الإزاحة الثابت SSE، الذي استعانت معالجته بتغيير قيم المصفوفات R, Q مما أدى بنا لإضافة ربح مضروب بتكامل الخطأ وذلك بتطبيق المتحكم LQI، ففضى تماماً على خطأ الإزاحة الثابت إلا أنه أدى لبعض الاهتزاز في الاستجابة، كما قمنا بتطبيق مرشح كالمن (بافتراض حدوث عطل في حساس زاوية النواص، أو في حال أردنا الاستغناء عنه) بغية تقدير متغيرات الحالة غير المقاسة، ومن ثم تم تصميم متعدد تربيعى خطى غومي (LQG)، للتحكم بالنظام بوجود قياس موضع العربية فقط.

يوضح الجدول التالي نتائج تطبيق منهجيات التحكم على نظام العربية والنواص

المميزات الترددية		المميزات الزمنية				المتحكم
Pm	Gm	SSE	Mp(m)	Ts(sec)	Tr(sec)	CartPos
-	-	-	-	-	-	PID
-180	12.1	0.03	0.235	11.8	1.4	LQR
-	-	0.0	0.316	10.1	0.38	LQI
Pm		Gm	SSE	Mp(rad)	Ts(sec)	pendAng
-	-	-	-	-	-	PID
-	8.33	0.0	0.068	12.3	-	LQR
-	-	0.0	0.143	9.6	-	LQI

3. الآفاق المستقبلية والتوصيات:

بعد العمل المقدم في هذا البحث الأساس لبناء العديد من أنظمة التحكم المعقدة، وفيما يلي أهم النقاط التي يمكن دراستها بهدف التعلم وتطوير التجربة وتحديتها وهي:

- تطبيق منهجيات التحكم اللخطي مثل التحكم الانزلاقي SMC، وذلك لتحسين الأداء.
- تطبيق منهجيات التحكم القوي لأخذ الارتباطية واللخطية للنظام بعين الاعتبار ودراسة توابع الحساسية وقوية الأداء.
- تعريف النظام باستخدام ماتلاب System Identification App الذي يستخدم الشبكات العصبية للتعرف على الأنظمة الخطية واللخطية بإعطاء عينات دخل وخرج للشبكة.
- تطبيق منهجيات الذكاء الاصطناعي مثل التعلم المعزز لتحسين قدرة النظام على التكيف مع المتغيرات المختلفة وذلك باستخدام خوارزمية Deep Deterministic Policy Gradient، بهدف قلب موازنة النواص في الموضع الشاقولي العلوي.
- تضمين مسألة تحكم أمثل من أجل أرجحة النواص موازنته بأخذ القيود على النظام بعين الاعتبار لضمان تحقيق أفضل أداء ممكن
- نوصي باستبدال حاسب التجربة وصندوق التحكم القديم بـ شريحة ذات معالج أحدث، مثل STM32، وشريحة ملائمة، وذلك لأن التعامل مع التجهيزات القديمة شديد الصعوبة، ويمكن أن يؤدي أي تلف أو ضياع للملفات والبرامج الموجودة على حاسب التجربة إلى عدم القدرة على تشغيل التجربة مجدداً، كما يجب أن يكون هذا التجهيز المحدث قابلاً للبرمجة مباشرةً باستخدام Matlab/Simulink من الحاسوب الشخصي الخاص بالطالب، حيث أننا نريد السعي في تحديث التجربة مع المحافظة على السرعة واليسير في تطبيق خوارزميات التحكم.
- نوصي باعتماد التجربة في مخبر التحكم في الكلية لتعزيز فهم الطالب لأهمية علم التحكم، وكيفية تطبيقه عملياً، وبيان أثر كل منهجية تحكم على سلوك النظام، ويمكن ضم العديد من التجارب المختلفة للمخبر مما يجذب الطالب عن سبب تلقي كل هذه العلوم النظرية، كتجارب Servo Motor Control, Ball and Beam, Control of Two-Wheeled Robot, Control of Water-Level in Tank)

المراجع

- [1] Feedback Instruments, 2002 - Digital Pendulum Installation and Commissioning. FI Ltd, 33-935/936-0V61 Ed01, England, 21.
- [2] Feedback Instruments, 2003 - Introduction and Computer System Installation. FI Ltd, 33-000V65 Ed03, England, 65.
- [3] Feedback Instruments, 2002 - Digital Pendulum. FI Ltd, 33-935/936-1V60 Ed04, England, 71.
- [4] Feedback Instruments, 2003 - Digital Pendulum Control Experiments. FI Ltd, 33-935/936-1V61 Ed02, England, 45.
- [5] Advantech, 2000 - PCI-1711/U User Interface Manual. Ed3.1, England.
- [6] Petko H. Petkov, Tsionyo N. Slavov and Jordan K. Kralev, 2018 - Design of Embedded Robust Control Systems Using MATLAB®/Simulink®. The Institution of Engineering and Technology, London, United Kingdom, 534.
- [7] Dalia Kass Hanna, 2015 – A Novel Control-Navigation System-Based Adaptive Optimal Controller & EKF Localization of DDMR. International Journal of Advanced Research in Artificial Intelligence, Aleppo, Syria, 9.
- [7] د. فتوح أنس, 2007 - التحكم الحديث (1). مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، سورية، 488 صفحة.
- [8] حمامي يوسف, 2019 – التحكم القوي بالنظم الارتياحية غير المستقرة (نظام العربية والعارضة). مجلة بحوث جامعة حلب، سلسلة العلوم الهندسية، العدد /140/, 94 صفحة.

Lectures:

- [10] محاضرات الدكتور محمد أسعد كعдан في التحكم الحديث 2 (التحكم الرقمي).
- [11] محاضرات الدكتور باسم فارس في التحكم المتقدم 1 (التحكم الأمثل).

Websites:

[12] [Control Tutorials for Matlab and Simulink](#)

[13] [Kalman Filter Tutorial](#)

Youtube – Playlist:

[14] [Brian Douglas / Classical Control theory](#)

[15] [Steve Brunton / Control Bootcamp](#)

[16] [Matlab / Understanding Kalman Filters](#)