L'influence des mathématiques dans la musique

Quand notes et ratios s'accordent

La musique : des sons, des fréquences

Définition du son : une onde mécanique présentant une période dans les perturbations matérielles

Exemple : son sinusoïdal

Au vu de la nature périodique du son, il présente aussi une fréquence

Plus cette fréquence est élevée, plus le son est perçu comme aigu

On exploite cette perception graves/aigus pour organiser différents sons de sorte à ce qu'ils soient agréables à l'oreille;

Autrement dit, on fait de la musique

Quels sons sonnent bien ensemble ?

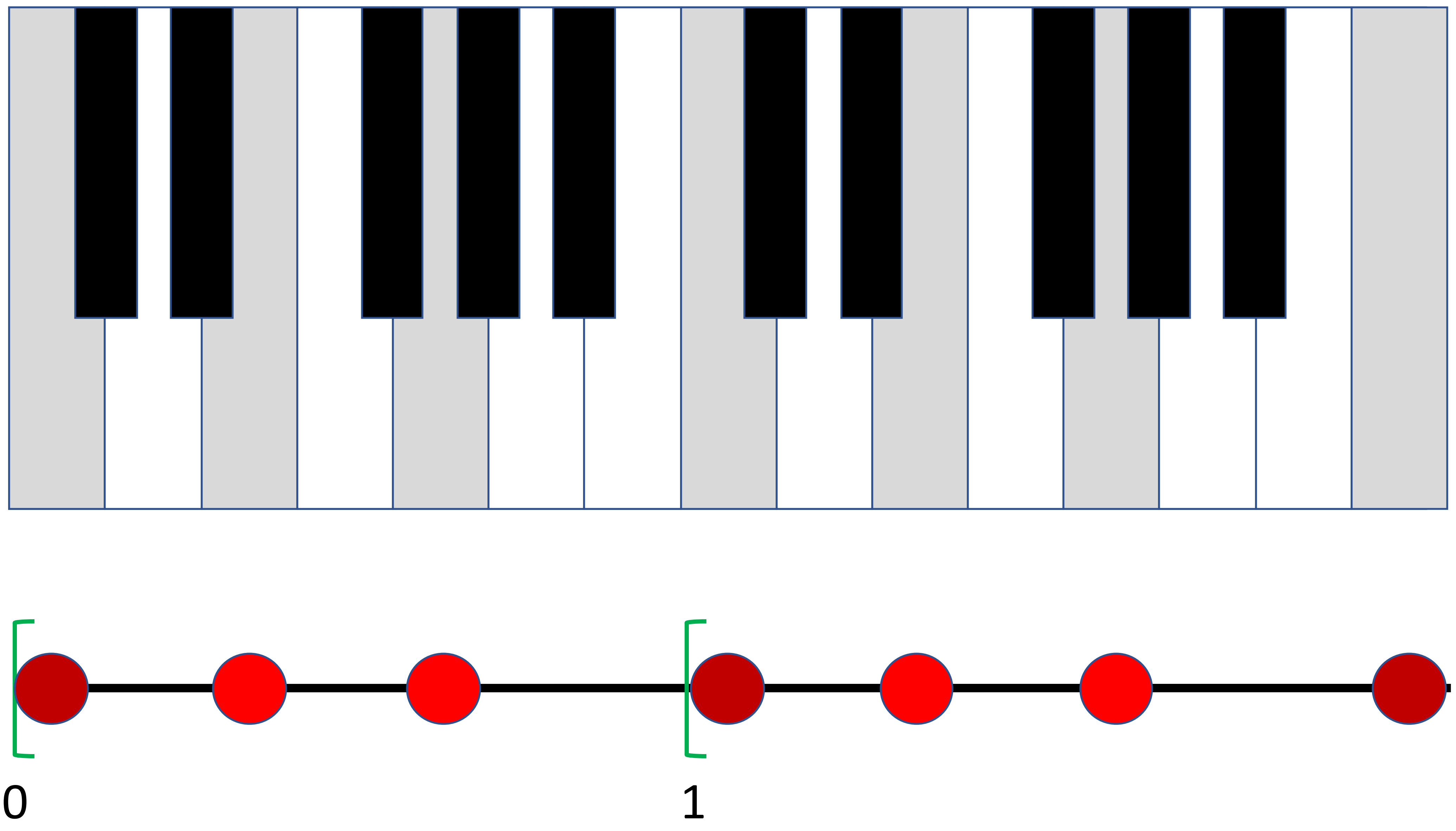
- Pour simplifier, l'on ne s'intéressera qu'au cas d'un son unique, dans le sens où les périodes sont de mêmes formes, et de longueur différentes en fonction de leurs fréquences.
- On ne choisit pas les fréquences dont on se sert au hasard! Au plus basique, on remarque que **les sons conjoints avec le double ou le triple de leurs fréquences sonnent bien ensemble**.
- Il faut une certaine logique derrière nos choix de fréquences ; afin de simplifier l'usage de ces fréquences, on les regroupe dans des **Gammes Musicales**

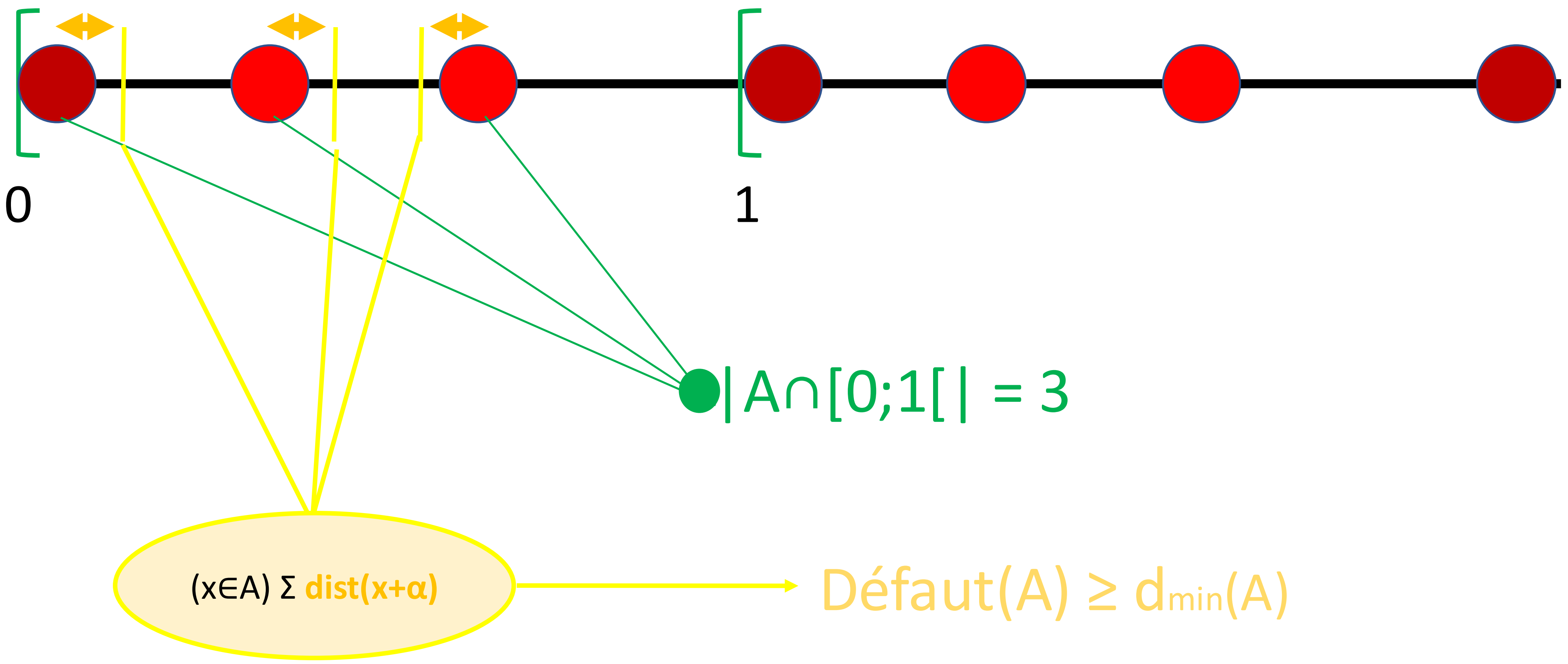
Définir mathématiquement une gamme

- On choisit un ensemble A pour rassembler les fréquences dont on va se servir lors de la composition d'un morceau
- Un exemple de gamme très importante : la gamme Pythagoricienne (img)
- Les gammes que nous étudierons seront des sous-gammes de la gamme Pythagoricienne
- On définit une octave par l'intervalle de fréquences [f;2f[; pour simplifier, l'on passe par le logarithme de base 2 pour retrouver l'intervalle [0;1[

Définition de la gamme

- Une gamme est un sous-ensemble discret de $\mathbb{R}$, stable par la translation par entiers;
- Explication:
  - On peut changer d'octave à sa guise, [0;1[+1 est une translation d'un octave au-dessus
  - Un ensemble discret, tel que $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$, est un ensemble E tel que
    $\forall e \in E, \forall r > 0, B(e, r) \not\subset E$
    (Il n'existe pas de boule centrée sur un membre de E tel qu'elle soit un sous-ensemble de E)
- La taille d'une gamme est donnée par $|A \cap [0;1[|$


0
1


0
1
|A∩[0;1[| = 3
(x∈A) Σ dist(x+α)
Défaut(A) ≥ dmin(A)

Comment écrire A ?

- Bien qu'A soit discret, A reste infini puisque les notes d'une gamme ne dépendent pas de l'octave, et est stable par la translation par entiers
- A reste pour autant délimitée par sa taille, que l'on notera q
- L'écart entre les notes de la gamme est donnée par un irrationnel α

$$A = \{r\alpha + s \mid s \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq r < q\}$$

Une application : la gamme pythagoricienne

- On rappelle que pour une fréquence f donnée, 2f ou 3f sonnent bien
- Multiplier f par 2 revient à passer à l'octave d'au-dessus ; ainsi, multiplier par 3 change d'octave, mais aussi de note
- En faisant en sorte de passer au demi-ton suivant pour une note donnée (eg. Do -> Do#), on obtient la fraction (3^7)/(2^11) = 2187/2048
- On vient de préciser juste avant l'exemple que α était irrationnel, et pourtant, on trouve un nombre rationnel faisant le lien entre deux notes adjacentes ; contresens ?

Démonstration : pourquoi α est-il irrationnel ?

- Supposons $\alpha = p/q$, avec q la taille de la gamme A et p un entier relatif tel que $|q\alpha + p| = d_{min}(A)$
- Séparons alors les cas :

$q\alpha - p > 0$;
$q\alpha - p = d_{min}(A)$
$p = q\alpha - d_{min}(A)$

$q\alpha - p < 0$;
$p - q\alpha = d_{min}(A)$
$p = d_{min}(A) + q\alpha$

DONC

$q\alpha - p > 0$;
$\alpha = (q\alpha - d_{min}(A))/q$
$\alpha = \alpha - d_{min}(A)/q$

$\alpha = \alpha \pm d_{min}(A)/q$

$q\alpha - p < 0$;
$\alpha = (d_{min}(A) + q\alpha)/q$
$\alpha = \alpha + d_{min}(A)/q$

- Ce qui est absurde, donc $\alpha \neq p/q$, ainsi, α est bien irrationnel

Une approximation : les fractions rationnelles

- Pour un réel x, on donne $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière et $\{x\}$ sa partie décimale
- $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$; on donne $x1 = 1/\{x\}$
  => $x = \lfloor x \rfloor + 1 /\lfloor x1 \rfloor + \{x1\}$ (Insérer image fractions rationnelles)
  …
- On simplifie l'écriture en [x, x1, x2, …, xn]
- Cette écriture peut se réécrire en fraction pn/qn : n-ième réduite
- On peut démontrer qu'il s'agit de la meilleure approximation (trop long)

Les accords et les nombres premiers

- Grâce aux fractions rationnelles, on peut approximer des irrationnels par une fraction
- Rappel ; pour une fréquence f, 2f et 3f sonnent bien
- On peut donc donner une harmonie indirecte avec 4f, 6f, 8f, 9f, 12f, etc... ; Qu'en advient-il de 5f, 7f, 11f, ou 13f ?
- Comme tous ces nombres sont supérieurs à 2, on divise par 2 suffisamment de fois pour obtenir un nombre compris entre 1 et 2
- On a donc les fractions 3/2, 5/4, 7/4, 11/8, 13/8.
- Pour aider à la compréhension, on mettra en parallèle la théorie musicale derrière ces accords

Construction : le cercle des quintes (Image)

- En prenant Do comme note de référence, et en utilisant la multiplication successive par 3/2, on trouve un cycle fixe, en revenant bien vers la note de référence
- /!\ Utiliser un raisonnement par récurrence ne mène à rien ici, puisque 3/2 est une approximation d'un irrationnel.
- Le meilleur moyen est donc l'utilisation d'un algorithme capable d'approximer les fréquences obtenues vers les fréquences des notes données

Insérer ici plusieurs illustrations

- Le code utilisé
- Le tableau de fréquence des notes
- Un tableau associant les notes et leurs quintes parfaites

Conclusion

- Si l'on passe 1min par diapositive, ce serait logiquement la dernière