CY TECH, ING3 IFI, Exam April 10, 2021
Theory of Contingent Claims Rattrapage

Rules

Rules : Due to the special circumstances of covid-19, the exam is made at distance by an "electronical communication".
Les copies de rédaction passent par un logiciel de anti-plagiat, et tout plagiat est sanctionné.

---

your surname and first name :

Exercice 2 [7 points] Let $\mathcal{M}$ be a mono-period, $t \in \{0, T\}$, $T > 0$, financial market, with $1 + N$ assets, whose price processes $S^0, \dots, S^N$ are defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. S^0 is the price processes of a risk-free asset with spot rate $r > -1$ and $S_0^0 = 1$.

For the pay-off X at T, of an European derivative in the market $\mathcal{M}$, let $\mathcal{A}(X) = \{\theta \in \mathbb{R}^N \,|\, V_T(\theta) \geq X\}$ be the set of super-hedging portfolios X. By definition, the super-hedging price of X at $t = 0$ is

$$p(X) = \inf\{V_0(\theta) \,|\, \theta \in \mathcal{A}(X)\},$$

where the convention $\inf(\emptyset) = +\infty$ is used.

In this point it is supposed that $N = 1$, $r = 0$, $S_0^1 = 1$, and that $S_T^1 = \exp(Z)$, where Z is a $\mathcal{N}(0, 1)$ random variables on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Calculate $p(X)$ in the following cases, where $a > 0$ and $K > 0$:

$$\text{(i) } X = \left((S_T^1)^{1/2} - 8\right)_+, \ \text{(ii) } X = (S_T^1)^3, \ \text{(iii) } X = \mathbf{1}_{\{S_T^1 > 7\}}.$$

Exercice 2 [13 points]

We consider a continuous time $t \in [0, T]$, $T > 0$ financial market $\mathcal{M}$, with three basic assets, one risk free asset with spot interest rate $r = 1$ and two risky assets whose prices at time t are S_t^1 and S_t^2 respectively:

• $W = (W^1, W^2)$ is a two-dimensionnal standard Brownian motion on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ is a complete filtered probability space, where the filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$ is generated by the two dimensionnal process (S^1, S^2) and $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.

• The price processes S^1 and S^2 are defined by:

$$dS_t^1 = S_t^1(\,dt + dW_t^1 + dW_t^2),\ dS_t^2 = S_t^2(2\,dt + 3\,dW_t^1 + 4dW_t^2) \text{ and } S_0^1 = S_0^2 = 1.$$

An European derivative on S is defined by its pay-off X at maturity T:

$$X = 2f\left(\frac{S_T^1}{\sqrt{S_T^2}}\right) - 3g\left(\frac{S_T^2}{\sqrt{S_T^1}}\right),$$

where $f(x) = (\ln(x))^3$ and $g(x) = (\ln(x))^2$ for all $x > 0$.

1. [6 points] Let P_t be the price of the derivative at time $t \in [0, T]$. Find a numerical function $F : [0, T] \times]0, +\infty[^2 \to \mathbb{R}$, such that

$$P_t = F(t, S_t^1, S_t^2), \text{ for } 0 \leq t \leq T.$$

2. [4 points] Verify that your function F satisfy the Black-Scholed PDE.

3. [3 points] Let $\theta = (\theta^0, \theta^1, \theta^2)$ be a hedging portfolio of the derivative. Find an explicite numerical function $G : [0, T] \times]0, \infty[^2 \to \mathbb{R}^3$ such that

$$(\theta_t^0 e^{rt}, \theta_t^1 S_t^1, \theta^2 S_t^2) = G(t, S_t^1, S_t^2), \text{ for } 0 \leq t \leq T.$$

Here $(\theta_t^0 e^{rt}, \theta_t^1 S_t^1, \theta^2 S_t^2)$ is the vector of investments at time t, given by θ.

CY TECH, ING3 IFI, Exam January 12, 2021
Theory of Contingent Claims

Rules

Rules : Due to the special circumstances of covid-19, the exam is made at distance by an "electronical communication".
IMPORTANT: All answers should be justified. The Exam-Solutions should be written on A4 pages, all in Portrait Orientation, no red color, numbered and compiled into one single pdf file, the first page of your pdf file should be your subject on which your have to write your name. The presentation will count in the evaluation, and copies not respecting the instructions can not be considered. Les copies de rédaction passent par un logiciel de anti-plagiat, et tout plagiat est sanctionné.

---

your surname and first name :

Exercice 1 (discrete time) [6 points]
We consider a mono-period financial market $\mathcal{M}$, with trading dates $t \in \{0, T\}$ with $T = 1$ and with a complete probability space $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$. In this market there is one risk free asset, whose interest rate $r = \ln(2)$, and one risky asset whose price at t is S_t^0 and S_t^1 respectively.
$S_0^0 = 1$ and $S_0^1 = \frac{1}{2}$.
The σ-algebra $\mathcal{F}$ is generated by the price S_T^1, which has an exponential distribution with parameter $\lambda = 2$, i.e. its probability density function p is $p(x) = 2e^{-2x}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$.
1) Prove that there is AOA in the market $\mathcal{M}$.
2) Prove that $\mathcal{M}$ is incomplete.
3) Find the set $\mathcal{M}_e$ of all equivalent martingale measures (e.m.m.) $\mathbb{Q}$.

Exercice 2 (continuous time) [10 points] We consider a continuous time $t \in [0, T]$, $T = 8$ financial market $\mathcal{M}$, with three basic assets, one risk free asset with spot interest rate $r = 4$ and two risky assets whose prices at time t are S_t^1 and S_t^2 respectively.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ is a complete filtered probability space, where the filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ is generated by a two dimensional standard Brownian motion $W = (W^1, W^2)'$ and $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$. The prices S^1 and S^2 satisfy

$$dS_t^1 = S_t^1(-(2 + a_t)\,dt + 2\,dW_t^1 + a_t\,dW_t^2) \text{ and } dS_t^2 = S_t^2(dt + 3\,dW_t^2),\ 0 \le t \le T,$$

where $S_0^1 = S_0^2 = 1$ and a is a stochastic process defined by

$$\forall t \in [0, T/2]\ :\ a_t = 2 \text{ and } \forall t \in]T/2, T]\ :\ a_t = \frac{1}{8} \times \mathbf{1}_{\{S^2_{T/2} \le e^{-10}\}} + 5 \times \mathbf{1}_{\{S^2_{T/2} > e^{-10}\}}.$$

A European derivative with pay-off X at T is defined by

$$X = \left(\frac{S_T^1}{S_T^2} - K\right)^2,$$

where $K \ge 0$.
Find the arbitrage prices of X at time $t = 0$.

Exercice 3 (continuous time) [4 points]
We consider a continuous time $t \in [0, T]$, $T > 0$ financial market $\mathcal{M}$, with four basic assets, one risk free asset with spot rate $r = 3$ and three risky assets whose prices at time t are S_t^1, S_t^2 and S_t^3 respetively.
Let $W = (W^1, W^2, W^3)'$ be a three dimensional standard Brownian motion on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ the complete filtered probability space generated by the three dimensional process (S^1, S^2, S^3) on $[0, T]$ and $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$, where $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$.
The price processes S^1, S^2 and S^3 are defined by:

$$dS_t^1 = S_t^1(5\,dt + dW_t^1 + dW_t^2 + dW_t^3),\ dS_t^2 = S_t^2(4\,dt + dW_t^1 - dW_t^2 + dW_t^3),$$
$$dS_t^3 = S_t^3(4\,dt - dW_t^1 + dW_t^2 + dW_t^3) \text{ and } S_0^1 = S_0^2 = S_0^3 = 1.$$

An European derivative in the market $\mathcal{M}$ is defined by its pay-off X at maturity T:

$$X = \frac{S_T^2}{S_T^3(S_T^1)^3}.$$

Let p_t be the arbitrage price of this derivative at time $t \in [0, T]$. Find a **numerical** function $F : [0, T]\times]0, \infty[^3 \to \mathbb{R}$ such that $p_t = F(t, S_t^1, S_t^2, S_t^3)$, for all $t \in [0, T]$.

CY TECH (EISTI), ING3 IFI, Exam April 27, 2020
Theory of Contingent Claims

Rules

Rules : Due to the special circumstances of covid-19, the exam is made at distance by an "electronical communication".
IMPORTANT: All answers should be justified. The Exam-Solutions should be written on A4 pages, all in Portrait Orientation, no red color, numbered and compiled into one single pdf file, the first page of your pdf file should be your subject on which your have to write your name. The presentation will count in the evaluation, and copies not respecting the instructions can not be considered. Les copies de rédaction passent par un logiciel de anti-plagiat, et tout plagiat est sanctionné.

---

your surname and first name :

Exercice 1 [10 points] Let $\mathcal{M}$ be a mono-period, $t \in \{0, T\}$, $T > 0$, financial market, with $1 + N$ assets, whose price processes $S^0, \dots, S^N$ are defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. S^0 is the price processes of a risk-free asset with spot rate $r > -1$ and $S_0^0 = 1$.

For the pay-off X at T, of an European derivative in the market $\mathcal{M}$, let $\mathcal{A}(X) = \{\theta \in \mathbb{R}^N \,|\, V_T(\theta) \geq X\}$ be the set of super-hedging portfolios X. By definition, the super-hedging price of X at $t = 0$ is

$$p(X) = \inf\{V_0(\theta) \,|\, \theta \in \mathcal{A}(X)\},$$

where the convention $\inf(\emptyset) = +\infty$ is used.

i) **[4 pts]** In this point it is supposed that $\mathcal{A}(X) \neq \emptyset$, that there exists a portfolio η and $c \in \mathbb{R}$ such that $V_0(\eta) = 0$ and $V_T(\eta) \geq c > 0$. Calculate $p(X)$.

ii) **[6 pts]** In this point it is supposed that $N = 1$, $r = 0$, $S_0^1 = 1$, and that $S_T^1 = \exp(Z)$, where Z is a $\mathcal{N}(0, 1)$ random variables on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Calculate $p(X)$ in the following cases, where $a > 0$ and $K > 0$:

$$\text{(i) } X = (S_T^1 - 8)_+, \text{ (ii) } X = (S_T^1)^2, \text{ (iii) } X = \mathbf{1}_{\{S_T^1 > 4\}}.$$

Exercice 2 [10 points]

We consider a continuous time $t \in [0, T]$, $T > 0$ financial market $\mathcal{M}$, with three basic assets, one risk free asset with spot interest rate $r = 1$ and two risky assets whose prices at time t are S_t^1 and S_t^2 respectively:

• $W = (W^1, W^2)$ is a two-dimensionnal standard Brownian motion on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ is a complete filtered probability space, where the filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$ is generated by the two dimensionnal process (S^1, S^2) and $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.

• The price processes S^1 and S^2 are defined by:

$$dS_t^1 = S_t^1(\,dt + dW_t^1 + dW_t^2),\; dS_t^2 = S_t^2(2\,dt + 3\,dW_t^1 + 4dW_t^2) \text{ and } S_0^1 = S_0^2 = 1.$$

An European derivative on S is defined by its pay-off X at maturity T:

$$X = 2f\left(\frac{S_T^1}{\sqrt{S_T^2}}\right) - 3g\left(\frac{S_T^2}{\sqrt{S_T^1}}\right),$$

where $f(x) = (\ln(x))^3$ and $g(x) = (\ln(x))^2$ for all $x > 0$.

1. [5 points] Let P_t be the price of the derivative at time $t \in [0, T]$. Find a numerical function $F : [0, T] \times]0, +\infty[^2 \to \mathbb{R}$, such that

$$P_t = F(t, S_t^1, S_t^2), \text{ for } 0 \leq t \leq T.$$

2. [3 points] Verify that your function F satisfy the Black-Scholed PDE.

3. [2 points] Let $\theta = (\theta^0, \theta^1, \theta^2)$ be a hedging portfolio of the derivative. Find an explicite numerical function $G : [0, T] \times]0, \infty[^2 \to \mathbb{R}^3$ such that

$$(\theta_t^0 e^{rt}, \theta_t^1 S_t^1, \theta^2 S_t^2) = G(t, S_t^1, S_t^2), \text{ for } 0 \leq t \leq T.$$

Here $(\theta_t^0 e^{rt}, \theta_t^1 S_t^1, \theta^2 S_t^2)$ is the vector of investments at time t, given by θ.

EISTI, ING3 Option IFI, Exam December 20, 2019
Theory of contingent claims

Rules (Règles)

• Calculators, phones, tablets, computers, smart watches and all communication or storage devices, as well as documents are prohibited.
• The quality of the writing will be an important factor in the appreciation of copies. You are therefore invited to produce clear, complete and concise reasoning.
• Indicative scale: The number of points allocated to an exercise is indicated in boldface in a parenthesis at the start of the exercise.

• Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.
• La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. Vous êtes donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.
• Barème indicatif : Le nombre de points attribués à un exercice est indiqué en gras dans une parenthèse au début de l'exercice.

Course Question 1 [7pts] Let W be a 4-dimensional standard Brownian motion on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ endowed with its natural complete filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. For given $a \in \mathbb{R}^4$, such that $|a| = 1$, the process B is defined by $B = W + a$. It is admitted that $P(\exists t \in [0, \infty[\mid B_t = 0) = 0$.

We consider a continuous time $t \in \mathbb{T} := [0, T]$, $T > 0$, financial market $\mathcal{M}$, with five basic assets, one risk free asset with spot interest rate $r = 0$ and $N = 4$ risky assets whose prices define the N-dimensional (risky) price process $\tilde{S}$ satisfying the SDE

$$\forall t \in \mathbb{T},\ \ d\tilde{S}_t = D(\tilde{S}_t)\Big(2B_t\, dt + |B_t|^2\, dB_t\Big),\ \tilde{S}_0 \in\,]0, \infty[^N. \tag{1}$$

We recall that an admissible portfolio (x, h) and its value $V_t(x, h)$ at time $t \in \mathbb{T}$ is defined as follows: $x \in \mathbb{R}$, h^i_t is the number of units held in the portfolio of the risky asset nr. i at time t, $V_0(x, h) = x$ and h is a progressively measurable process such that the stochastic integral

$$\forall t \in \mathbb{T},\ \ V_t(x, h) = x + \int_0^t h_s \cdot d\tilde{S}_s,$$

is well-defined, as semi-martingale and such that $V(x, h)$ is bounded from below. $\mathcal{A}$ is the set of admissible portfolios (x, h), $\mathcal{H}$ is the set of terminal portfolio values for initial endowment $x = 0$ and $\mathcal{K}$ is the subset of elements of $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, bounded by elements of $\mathcal{H}$, i.e.

$$\mathcal{H} = \{V_T(0, h) \mid (0, h) \in \mathcal{A}\} \text{ and } \mathcal{K} = \{X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) \mid X \leq Y \text{ for some } Y \in \mathcal{H}\}$$

1. Find the market price of risk processes γ in the market $\mathcal{M}$. Is γ unique? Prove that $\xi = \exp\left(M - \frac{1}{2} < M\, ,\, M >\right)$ is a supermartingale, where $M = -\int_0^\cdot \gamma_s \cdot dW_s$.
2. Why is $\frac{1}{|B|^2}$ a continuous semimartingale? Using Itô's formula, show that $\xi = \frac{1}{|B|^2}$.
3. Show that ξ is not a $(\mathbb{F}, P)$-martingale and infer that there does not exist an e.m.m. Q.
4. Give the definition of "*$\tilde{S}$ satisfies the condition of No Free Lunch with Vanishing Risk (NFLVR)*" .
5. Use a Theorem of the course, to show that there exists a FLVR in the market $\mathcal{M}$.

Exercise 1 [6pts] We consider a mono-period, $t \in \{0,1\}$, financial market with one risk free asset and one risky asset, in the context of a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. The σ-algebra $\mathcal{F}$ is generated by a random variable X, with a standard normal $\mathcal{N}(0,1)$ distribution. The price S^0 of the risk free asset and the price S^1 of the risky asset are defined by

$$S_0^0 = S_1^0 = 1, \quad S_0^1 = 1 \text{ and } S_1^1 = e^X.$$

1. Construct an e.m.m. Q such that $\xi := \frac{dQ}{dP} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Hint*: One possibility is to set $\xi = f(X)$, where $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = a\mathbf{1}_{]-\infty,0]}(x) + b\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x)e^{-x}$, and then determine a and b.

2. Construct an e.m.m. Q such that $\xi = \frac{dQ}{dP} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, but $\xi =\notin L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

3. Find the set $\mathcal{M}_e$ of all equivalent martingale measures (e.m.m.) Q. Is there AOA in this market and is the market complete?

Exercise 2 [7pts] We consider a continuous time $t \in [0,T]$, $T > 0$ financial market $\mathcal{M}$, with four basic assets, one risk free asset with spot rate $r = 3$ and three risky assets whose prices at time t are S_t^1, S_t^2 and S_t^3 respectively.

Let $W = (W^1, W^2, W^3)$ be a three-dimensional standard Brownian motion on a probability space $(\Omega, \mathcal{G}, P)$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ the complete filtered probability space generated by the three dimensional process (S^1, S^2, S^3) on $[0,T]$ and $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$, where $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [O,T]}$.

The price processes S^1, S^2 and S^3 are defined by:

$$dS_t^1 = S_t^1(3\,dt + dW_t^1 - dW_t^3), \; dS_t^2 = S_t^2(3\,dt + dW_t^1 + dW_t^2),$$
$$dS_t^3 = S_t^3(dt + dW_t^2 - dW_t^3) \text{ and } S_0^1 = S_0^2 = S_0^3 = 1.$$

An European derivative in the market $\mathcal{M}$ is defined by its pay-off X at maturity T:

$$X = (S_T^1)^{p_1}(S_T^2)^{p_2}(S_T^3)^{p_3}, \text{ where } p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}.$$

1. Let $\Pi_t(X)$ be the arbitrage price of this derivative at time $t \in [0,T]$. Solve the relevant Black-Scholes PDE for the price of the above European derivative in order to find a numerical function $F : [0,T] \times]0,\infty[^3 \to \mathbb{R}$, such that

$$\Pi_t(X) = F(t, S_t^1, S_t^2, S_t^3), \text{ for } 0 \le t \le T.$$

2. Let $\theta = (\theta^0, \theta^1, \theta^2, \theta^3)$ be a hedging portfolio of the derivative. Find a function $G : [0,T] \times]0,\infty[^3 \to \mathbb{R}^4$ such that

$$(\theta_t^0 e^{rt}, \theta_t^1 S_t^1, \theta_t^2 S_t^2, \theta_t^3 S_t^3) = G(t, S_t^1, S_t^2, S_t^3), \text{ for } 0 \le t \le T.$$

Here $(\theta_t^0 e^{rt}, \theta_t^1 S_t^1, \theta_t^2 S_t^2, \theta_t^3 S_t^3)$ is the vector of investments at time t, given by θ.

EISTI, ING3 Option IFI, Exam Mars 04, 2019
Theory of contingent claims

Rules (Règles)

Documents, calculators and telephones are not allowed. Answers should be justified. (Les documents, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées.)

Course Question 1 [6pts] Fundamental **T**heorem of **A**sset **P**ricing: **FTAP**.
Let $\mathcal{M}^{D-T}$ and $\mathcal{M}^{Gen.B-S}$ be the General Discrete-Time and the Generalized Black-Scholes markets respectively, defined in the course.

i) **[3pts]** For the market $\mathcal{M}^{D-T}$: (a) Define the relevant notion of Arbitrage Opportunity and state the First FTAP. (b) Prove the First FTAP in the particular case of a finite state space Ω.

ii) **[3pts]** For the market $\mathcal{M}^{Gen.B-S}$, define the relevant notion of Arbitrage Opportunity and state the First FTAP. (*Hint:* Define first NFLVR).

Exercise 1 [7pts] Let $\mathcal{M}$ be a mono-period, $t \in \{0, T\}$, $T > 0$, financial market, with $1 + N$ assets, whose price processes $S^0, \ldots, S^N$ are defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. S^0 is the price processes of a risk-free asset with spot rate $r > -1$ and $S_0^0 = 1$.

For the pay-off X at T, of an European derivative in the market $\mathcal{M}$, let $\mathcal{A}(X) = \{\theta \in \mathbb{R}^N \mid V_T(\theta) \geq X\}$ be the set of super-hedging portfolios of X. By definition, the super-hedging price of X at $t = 0$ is

$$p(X) = \inf\{V_0(\theta) \mid \theta \in \mathcal{A}(X)\},$$

where the convention $\inf(\emptyset) = +\infty$ is used.

i) **[4pts]** In this point it is supposed that $\mathcal{A}(X) \neq \emptyset$, that there exists a portfolio η and $c \in \mathbb{R}$ such that $V_0(\eta) = 0$ and $V_T(\eta) \geq c > 0$. Calculate $p(X)$.

ii) **[3pts]** In this point it is supposed that $N = 1$, $r = 0$, $S_0^1 = 1$, and that $S_T^1 = \exp(Z)$, where Z is a $\mathcal{N}(0, 1)$ random variables on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Calculate $p(X)$ in the following cases, where $a > 0$ and $K > 0$:

$$\text{(i) } X = (S_T^1 - K)_+, \text{ (ii) } X = (S_T^1)^2, \text{ (iii) } X = \mathbf{1}_{\{S_T^1 > K\}}.$$

Exercise 2 [7pts] We consider a continuous time $t \in [0,T]$, $T > 0$ financial market $\mathcal{M}$, with four basic assets, one risk free asset with spot rate $r = 2$ and three risky assets whose prices at time t are S_t^1, S_t^2 and S_t^3 respectively.

Let $W = (W^1, W^2, W^3)$ be a three-dimensional standard Brownian motion on a probability space $(\Omega, \mathcal{G}, P)$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ the complete filtered probability space generated by the three dimensional process (S^1, S^2, S^3) on $[0,T]$ and $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$, where $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [O,T]}$.

The price processes S^1, S^2 and S^3 are defined by:

$$dS_t^1 = S_t^1(4\,dt + dW_t^1 - dW_t^3),\ dS_t^2 = S_t^2(3\,dt + dW_t^1 + dW_t^2),$$
$$dS_t^3 = S_t^3(3\,dt + dW_t^2 - dW_t^3) \text{ and } S_0^1 = S_0^2 = S_0^3 = 1.$$

An European derivative in the market $\mathcal{M}$ is defined by its pay-off X at maturity T:

$$X = \frac{S_T^1}{S_T^2 (S_T^3)^2}.$$

1. Let p_t be the arbitrage price of this derivative at time $t \in [0,T]$. Find a numerical function $F : [0,T] \times]0,\infty[^3 \to \mathbb{R}$, such that

$$p_t = F(t, S_t^1, S_t^2, S_t^3), \text{ for } 0 \le t \le T.$$

2. Let $\theta = (\theta^0, \theta^1, \theta^2, \theta^3)$ be a hedging portfolio of the derivative. Find a function $G : [0,T] \times]0,\infty[^3 \to \mathbb{R}^4$ such that

$$(\theta_t^0 e^{rt}, \theta_t^1 S_t^1, \theta_t^2 S_t^2, \theta_t^3 S_t^3) = G(t, S_t^1, S_t^2, S_t^3), \text{ for } 0 \le t \le T.$$

Here $(\theta_t^0 e^{rt}, \theta_t^1 S_t^1, \theta_t^2 S_t^2, \theta_t^3 S_t^3)$ is the vector of investments at time t, given by θ.

EISTI, ING3 Option IFI, Exam November 27, 2018
Theory of contingent claims

Rules (Règles)

Documents, calculators and telephones are not allowed. Answers should be justified. (Les documents, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées.)

Course Question 1 [7pts] Let W be a 3-dimensionnal standard Brownian motion on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ endowed with its natural complete filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. For given $a \in \mathbb{R}^3$, such that $|a| = 1$, the process B is defined by $B = W + a$. In this course question it is admitted that $P(\exists t \in [0, \infty[\mid B_t = 0) = 0$. It follows that the process $[0, \infty[\ni t \mapsto 1/|B_t| \in]0, \infty[$ is continuous a.s.

We consider a continuous time $t \in \mathbb{T} := [0, T]$, $T > 0$, financial market $\mathcal{M}$, with four basic assets, one risk free asset with spot interest rate $r = 0$ and $N = 3$ risky assets whose prices define the N-dimensional (risky) price process $\tilde{S}$ satsfying the SDE

$$\forall t \in \mathbb{T}, \;\; d\tilde{S}_t = D(\tilde{S}_t)\Big(|B_t|^{-2} B_t \, dt + dB_t\Big), \; \tilde{S}_0 \in]0, \infty[^N. \tag{1}$$

We recall that an admissible portfolio (x, h) and its value $V_t(x, h)$ at time $t \in \mathbb{T}$ is defined as follows: $x \in \mathbb{R}$, h^i_t is the number of units held in the portfolio of the risky asset nr. i at time t, $V_0(x, h) = x$ and h is a progressively measurable process such that the stochastic integral

$$\forall t \in \mathbb{T}, \;\; V_t(x, h) = x + \int_0^t h_s \cdot d\tilde{S}_s,$$

is well-defined, as semi-martingale and such that $V(x, h)$ is bounded from below. $\mathcal{A}$ is the set of admissible portfolios (x, h), $\mathcal{H}$ is the set of terminal portfolio values for initial endowment $x = 0$ and $\mathcal{K}$ is the subset of elements of $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, bounded by elements of $\mathcal{H}$, i.e.

$$\mathcal{H} = \{V_T(0, h) \mid (0, h) \in \mathcal{A}\} \text{ and } \mathcal{K} = \{X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) \mid X \leq Y \text{ for some } Y \in \mathcal{H}\}$$

1. Find the market price of risk processes γ in the market $\mathcal{M}$. Is γ unique? Prove that $\xi = \exp\left(-M - \frac{1}{2} < M \, , \, M >\right)$ is a supermartingale, where $M = \int_0^\cdot \gamma_s \cdot dW_s$.
2. Using Itô's formula, show that $\xi = \frac{1}{|B|}$.
3. Show that ξ is not a $(\mathbb{F}, P)$-martingale and infer that there does not exist an e.m.m. Q.
4. Give the definition of "*$\tilde{S}$ satisfies the condition of No Free Lunch with Vanishing Risk (NFLVR)*" .
5. Use a Theorem of the course, to show that there exists a FLVR in the market $\mathcal{M}$.

Exercise 1 [6pts] We consider a mono-period, $t \in \{0, T\}$, $T > 0$, financial market $\mathcal{M}$, with N assets, whose price processes $S^1, \dots, S^N$ are defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Among the N assets, there is not necessarily a risk-free asset. In the market $\mathcal{M}$, there is an *Arbitrage Portfolio* η satisfying $V_0(\eta) < 0 \le V_T(\eta)$.

Let X be the pay-off an option in the market $\mathcal{M}$ and let $\mathcal{A}(X) = \{\theta \in \mathbb{R}^N \mid V_T(\theta) \ge X\}$ be its set of super-hedging portfolios. By definition, the super-hedging price of X at $t = 0$ is

$$p(X) = \inf\{V_0(\theta) \mid \theta \in \mathcal{A}(X)\},$$

where the convention $\inf(\emptyset) = +\infty$ is used. Calculate $p(X)$ in the case of $\mathcal{A}(X) \neq \emptyset$.

Exercise 2 [7pts] We consider a continuous time $t \in [0, T]$, $T > 0$, Heston type financial market $\mathcal{M}$, with three basic assets, one risk free asset with spot interest rate $r = 0$ and two risky assets whose prices at time t are S^1_t and S^2_t respectively.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ is a complete filtered probability space, where the filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ is generated by a two dimensional standard Brownian motion $W = (W^1, W^2)$ and $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$. The prices S^1 and S^2 satisfy

$$\begin{aligned} dS^1_t &= S^1_t\Big(\frac{v_t}{1+\sqrt{v_t}}\, dt + \sqrt{v_t}\, dW^1_t\Big),\ S^1_0 = 1, \\ dS^2_t &= S^2_t\big(\, dt - (1 + \sqrt{v_t})\, dW^2_t\big),\ S^2_0 = 1, \end{aligned}$$

where v is a real-valued process called the variance process of S^1, which satisfies

$$dv_t = -(v_t - 1)\, dt + \sqrt{v_t}\Big(-\frac{4}{5} dW^1_t + \frac{3}{5}\, dW^2_t\Big) - \frac{\sqrt{v_t}}{1+\sqrt{v_t}}\Big(\frac{4}{5}\sqrt{v_t} + \frac{3}{5}\Big)\, dt,\ v_0 = 1.$$

An european derivative on S^1 is defined by its pay-off X at maturity T,

$$X = \left(\ln(S^1_T/S^1_0)\right)^2.$$

i) Find all local mart. $M = \int_0^{\cdot}(m^1_s dW^1_s + m^2_s dW^2_s)$ such that $\mathcal{E}(-M)S^1$ and $\mathcal{E}(-M)S^2$ are $(\mathbb{F}, P)$-local martingales. Is the solution unique?

ii) Prove that $\mathcal{E}(-M)$ is a $(\mathbb{F}, P)$-martingale.
(*Hint*: Use Novikov's criterion, i.e. $E[\exp(\frac{1}{2} < M\,,\, M >_T)] < \infty$).

iii) Find a probability measure Q equivalent to P, such that S^1 and S^2 are $(\mathbb{F}, Q)$-local martingales. Is Q unique?

iv) Rewrite the SDEs for S^1, S^2 and v, using the 2-dim. Q-B.m. $\bar{W}$, obtained by Girsanov's theorem.

v) Calculate $E_Q[\Upsilon_T]$, where $\Upsilon_t = \int_0^t v_s ds$ is the integrated variance. Find the arbitrage prices $p(X)$ at $t = 0$ of X and express it on the form $p(X) = f(T, \mathrm{var}_Q\,[\Upsilon_T])$, where $f : [0, \infty[^2 \to \mathbb{R}$.

EISTI, ING3 Option IFI and QFRM M2, Exam February 13, 2018
Theory of contingent claims

Rules (Règles)

Documents, calculators and telephones are not allowed. Answers should be justified. (Les documents, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées.)

Course Question 1 [10pts] We consider a generalized B-S market, having AOA, on a time interval $\mathbb{T} = [0, T]$, with one risk free asset, whose priceprocess is S^0, and N risky assets, whose prices processes are X^i, $i = 1 \ldots, N$. Let X be the column vector with the coordinates X^i. Let W be a standard m-dimensional B.m. on a complete filtered probability space $(\Omega, P, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}})$, where P is a priori probability measure and the filtration is generated by W and (and the null-sets). $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$. The SDE for S^0 and X are

$$dS_t^0 = r(X_t) S_t^0 \, dt \text{ and } dX_t = \beta(X_t) \, dt + \alpha(X_t) \, dW_t, \; X_0 \in \mathbb{R}^m,$$

where $r : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\beta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ and $\alpha : \mathbb{R}^N \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^N)$ are C^1 functions with bounded derivative. Here $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^N)$ is the space of linear maps from $\mathbb{R}^m$ to $\mathbb{R}^N$, i.e. $N \times m$ matrices.

Let $f(X_T)$ be the pay-off of a hedgeable European derivative at T, where f is a C^1 functions with a bounded derivative.

In this context, deduce and state the second order PDE which the price function $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ of the above European derivative should satisfy and find a function $G : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ giving the risky part of the hedging portfolio.

Recall: By definition of F and G, the price at time $t \in \mathbb{T}$ of the derivative is $F(t, X_t)$ and $G(t, X_t)$ is the risky part of a hedging portfolio.

Exercise 1 [10pts] We consider a mono-period, $t \in \{0, T\}$, $T > 0$, financial market $\mathcal{M}$, with one risk free asset and one risky asset, in the context of a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. The interest rate of the risk free asset is $r = 0$, the price of the risky asset at t is S_t and $S_0 = 2$. The σ-algebra $\mathcal{F}$ is generated by the random variable S_T. The cumulative distribution function of S_T is given by $F(x) = P(S_T \leq x)$, where

$$F(x) = 0 \text{ if } x < 0, \;\; F(x) = 1 - \tfrac{1}{9}(3 - x)^2 \text{ if } 0 \leq x < 3 \text{ and } F(x) = 1 \text{ if } 3 \leq x.$$

1. Find the set $\mathcal{M}_e$ of equivalent martingale measures of the market $\mathcal{M}$. Is there AOA in this market? Is the market complete?

2. Find all the arbitrage prices, at $t = 0$, of a Put on S, with strike $K = 1$ and maturity T.

EISTI, ING3 Option IFI and QFRM M2, Exam November 28, 2017
Theory of contingent claims

Rules (Règles)

Documents, calculators and telephones are not allowed. Answers should be justified. (Les documents, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées.)

Course Question 1 [6pts] Fundamental **T**heorem of **A**sset **P**ricing: **FTAP**.

For each of the following three financial markets (being as in the course) below in points i)-iii), $\mathcal{M}^{M-P}$, $\mathcal{M}^{D-T}$ and $\mathcal{M}^{Gen.B-S}$, define the relevant notion of Arbitrage Opportunity and state the First FTAP:

i) $\mathcal{M}^{M-P}$ is a finite Mono-Period market.

ii) $\mathcal{M}^{D-T}$ is a general Discrete-Time market.

iii) $\mathcal{M}^{Gen.B-S}$ is a generalized Black-Scholes market. (*Hint:* Define first NFLVR).

Exercise 1 [7pts] We consider a continuous time $t \in [0,T]$, $T > 0$ financial market $\mathcal{M}$, with three basic assets, one risk free asset with spot interest rate $r = 1$ and two risky assets whose prices at time t are S_t^1 and S_t^2 respectively:

- $W = (W^1, W^2)$ is a two dimensional standard Brownian motion on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ is a complete filtered probability space, where the filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ is generated by the two dimensional process (S^1, S^2) and $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.
- The price processes S^1 and S^2 are defined by:

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu^1 dt - dW_t^1 + 3dW_t^2),\ dS_t^2 = S_t^2(\mu^2 dt + 2dW_t^1 - dW_t^2) \text{ and } S_0^1 = S_0^2 = 1,$$

  where $\mu^1, \mu^2 \in \mathbb{R}$.

An European derivative on S is defined by its pay-off X at maturity T:

$$X = \left(\frac{S_T^1}{\sqrt{S_T^2}} - \frac{S_T^2}{\sqrt{S_T^1}} \right)^2.$$

1. Let P_t be the price of the derivative at time $t \in [0,T]$. **Using the Black-Scholes PDE**, find a numerical function $F : [0,T] \times]0,\infty[^2 \to \mathbb{R}$, such that

$$P_t = F(t, S_t^1, S_t^2), \text{ for } 0 \le t \le T.$$

2. Let $\theta = (\theta^0, \theta^1, \theta^2)$ be a hedging portfolio of the derivative. Find a function $G : [0,T] \times]0,\infty[^2 \to \mathbb{R}^3$ such that

$$(\theta_t^0 e^{rt}, \theta_t^1 S_t^1, \theta_t^2 S_t^2) = G(t, S_t^1, S_t^2), \text{ for } 0 \le t \le T.$$

   Here $(\theta_t^0 e^{rt}, \theta_t^1 S_t^1, \theta_t^2 S_t^2)$ is the vector of investments at time t, given by θ.

Exercise 2 [7pts] We consider a mono-period, $t \in \{0, T\}$, $T > 0$, financial market $\mathscr{M}$, with one risk free asset and one risky asset, in the context of a complete probability space $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. The interest rate of the risk free asset is $r = 0$, the price of the risky asset at t is S^1_t. The σ-algebra $\mathscr{F}$ is generated by the random variable S^1_T, and $S^1_0 = 4$. The cumulative distribution function of S^1_T is given by $F(x) = P(S^1_T \le x)$, where

$$F(x) = 0 \text{ if } x \le 0 \text{ and } F(x) = 1 - \tfrac{16}{(2+x)^4} \text{ if } x > 0.$$

1. Find the set $\mathscr{M}_e$ of equivalent martingale measures of the market $\mathscr{M}$. Is there AOA in this market? Is the market complete?

2. Find all the arbitrage prices, at $t = 0$, of a Put on S^1, with strike $K = S^1_0$ and maturity $T = 1$.

EISTI, IFI ING3, Exam March 9, 2017
Theory of contingent claims

Rules (Règles)

Documents, calculators and telephones are not allowed. Answers should be justified (Les documents, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées.)

Exercise 1

We consider a continuous time $t \in [0,T]$, $T > 0$ financial market $\mathscr{M}$ of type Heston, with three basic assets, one risk free asset with spot interest rate $r = 0$ and two risky assets whose prices at time t are S_t^1 and S_t^2 respectively.
$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ is a complete filtered space, where the filtration $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$ is generated by a two dimensional standard Brownian motion $W = (W^1, W^2)$ and $\mathscr{F} = \mathscr{F}_T$. The prices S^1 and S^2 satisfy

$$dS_t^1 = S_t^1(v_t\,dt + \sqrt{v_t}\,dW_t^1),\ S_0^1 = 1,$$
$$dS_t^2 = S_t^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{v_t}\,dt + dW_t^1 - 2\,dW_t^2),\ S_0^2 = 1,$$

where v is a real-valued process called the variance process of S^1, which satisfies

$$dv_t = \tfrac{1}{2}(1 - v_t)\,dt + \sqrt{v_t}(dW_t^1 - 2\,dW_t^2),\ v_0 = 1.$$

A European derivative with pay-off X at T is defined by

$$X = \langle \ln(S^1), \ln(S^1)\rangle_T.$$

For the market $\mathscr{M}$:

1. Find the equivalent martingale measures and conclude if there is AOA in this market and if the market is complete ?

2. Find the arbitrage prices of X at time $t = 0$.

Exercise 2

We consider a mono-period, $t \in \{0,1\}$, financial market with one risk free asset and one risky asset, in the context of a complete probability space $(\Omega, \mathbb{P}, \mathscr{F})$. The σ-algebra $\mathscr{F}$ is generated by a random variable X, with a standard normal distribution $\mathscr{N}(0,1)$. The price S^0 of the risk free asset and the price S^1 of the risky asset are defined by

$$S_0^0 = S_1^0 = 1,\ S_0^1 = 0 \text{ and } S_1^1 = b + \sigma X,$$

where $b = -\frac{1}{2}$ and $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

1. Find the set $\mathscr{M}_e$ of equivalent martingale measures. Is there AOA in this market and is the market complete ?

2. Find all arbitrage prices, at $t = 0$, of a Call on S^1, with strike $K > 0$ and maturity $t = 1$.

Indication : To find $\mathscr{M}_e$, it may be useful to consider the strictly positive functions f such that:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = 1 \ \text{ and } \int_{\mathbb{R}} x f(x)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = 0.$$

N.B. Contingent claims, with initial price zero, are frequent. For example, forward contracts.

EISTI, ING3 Option IFI, Exam November 30, 2016
Theory of contingent claims

Rules (Règles)

Documents, calculators and telephones are not allowed. Answers should be justified. (Les documents, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées.)

Exercise 1 [10pts] We consider a continuous time $t \in [0, T]$, $T = 1$ financial market $\mathcal{M}$, with three basic assets, one risk free asset with spot interest rate $r = 0$ and two risky assets whose prices at time t are S_t^1 and S_t^2 respectively.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ is a complete filtered probability space, where the filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ is generated by a two dimensional standard Brownian motion $W = (W^1, W^2)$ and $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$. The prices S^1 and S^2 satisfy

$$dS_t^1 = S_t^1(-(1 + a_t)\, dt + a_t dW_t^1 - dW_t^2) \text{ and } dS_t^2 = S_t^2(2\, dt + 2\, dW_t^2),\ 0 \le t \le T,$$

where $S_0^1 = S_0^2 = 1$ and a is a stoch. proc. defined by

$$\forall t \in [0, T/2] :\ a_t = 1 \text{ and } \forall t \in]T/2, T] : \begin{cases} a_t = 1/4 \text{ if } S_{T/2}^2 \le 1 \\ a_t = 5 \text{ if } S_{T/2}^2 > 1 \end{cases}$$

A European derivative with pay-off X at T is defined by

$$X = (S_T^1 - K)^2,$$

where $K \ge 0$.

Find the arbitrage prices of X at time $t = 0$.

Exercise 2 [10pts] We consider a mono-period, $t \in \{0, 1\}$, financial market with one risk free asset and one risky asset, in the context of a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. The σ-algebra $\mathcal{F}$ is generated by a random variable U, which is uniformly distributed on $[0, 1]$. The price S^0 of the risk free asset and the price S^1 of the risky asset are defined by

$$S_0^0 = S_1^0 = 1, \quad S_0^1 = 1 \text{ and } S_1^1 = U + \frac{1}{2}.$$

1. Find the set $\mathcal{M}_e$ of equivalent martingale measures. Is there AOA in this market and is the market complete?

2. Find all the arbitrage prices, at $t = 0$, of a Call on S^1, with strike $1/2 < K < 1$ and maturity $T = 1$.

EISTI, ING3 Option IFI, Exam March 29, 2016
Theory of contingent claims

Rules (Règles)

Documents, calculators and telephones are not allowed. Answers should be justified. (Les documents, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées.)

Exercise 1 [10pts]
We consider a continuous time $t \in \mathbb{T} = [0,T]$, $T > 0$ financial market $\mathcal{M}$, with three basic assets, one risk free asset with spot interest rate $r = 2$ and two risky assets whose prices at time t are S_t^1 and S_t^2 respectively. The process $W = (W^1, W^2, W^3)$ is a standard three dimensional Brownian motion on a complete probability space $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, \mathbb{F})$, which is endowed with the complete filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ generated by W. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$. The price processes S^1 and S^2 are defined by:

$$dS_t^1 = S_t^1(2\,dt + dW_t^1 + dW_t^3), \quad dS_t^2 = S_t^2(2\,dt + dW_t^1 + dW_t^2 + dW_t^3) \text{ and } S_0^1 = S_0^2 = 1.$$

An European derivative on S is defined by its pay-off X at maturity T:

$$X = \left(\sqrt{S_T^1 S_{\frac{T}{2}}^2} - 1\right)^2.$$

1. **[2pts]** Find the equivalent martingale measures and conclude if there is AOA in this market and if the market is complete.
2. **[4pts]** Show that the arbitrage price (process) P of X is unique and find a numerical function $F : [0,T]\times]0,\infty[^2 \to \mathbb{R}$, such that
$$P_t = F(t, S_t^1, S_{\frac{T}{2}\wedge t}^2), \text{ for } 0 \le t \le T.$$
3. **[4pts]** Show that X is replicable (i.e. hedgeable) and let $\theta = (\theta^0, \theta^1, \theta^2)$ be a hedging portfolio of the derivative. Find a function $G : [0,T]\times]0,\infty[^2 \to \mathbb{R}^3$ such that
$$(\theta_t^0 e^{rt}, \theta_t^1 S_t^1, \theta_t^2 S_t^2) = G(t, S_t^1, S_{\frac{T}{2}\wedge t}^2), \text{ for } 0 \le t \le T.$$
Here $(\theta_t^0 e^{rt}, \theta_t^1 S_t^1, \theta_t^2 S_t^2)$ is the vector of investments at time t, given by θ.

Exercise 2 [10pts]
We consider a continuous time $t \in [0,T]$, $T > 0$ financial market $\mathcal{M}$, with three basic assets, one risk free asset with spot interest rate $r = 0$ and two risky assets whose prices at time t are S_t^1 and S_t^2 respectively:

- $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ is a complete filtered probability space, where the filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ is generated by the two dimensional process (S^1, S^2) and $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.
- $W = (W^1, W^2)$ is a two dimensional standard Brownian motion.
- The price processes S^1 and S^2 are defined by $S_0^1 = 1$, $S_0^2 = 1$,
$$dS_t^1 = S_t^1 W_t^2\, dW_t^1 \text{ and } dS_t^2 = S_t^2 \left(\frac{W_t^1}{1+(W_t^1)^2}\, dt + \frac{1}{1+(W_t^1)^2}\, dW_t^2\right) \quad t \in [0,T].$$

An European variance derivative on S^1 is defined by its pay-off X at maturity T,

$$X = < \ln(S^1)\,,\, \ln(S^1) >_T .$$

The following hypothesis is introduced for $T > 0$:
Hypothesis $\mathbf{H}(T)$:
There exists a strictly positive continuous process ξ such that ξ, ξS^1 and ξS^2 are martingales w.r.t. $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ on the time interval $[0,T]$.

1. Under the hypothesis $\mathbf{H}(T)$, find the arbitrage prices at $t = 0$ of X.
2. Find $T > 0$ such the hypothesis $\mathbf{H}(T)$ is satisfied.
(Hint: One can use the Novikov's criterion and that for a B.m. B the random variables $|B_t|$ and $\sup_{0\le s\le t} B_s$ have the same law)

EISTI, ING3 Option IFI, Exam November 25, 2015
Theory of contingent claims

Rules (Règles)

Documents, calculators and telephones are not allowed. Answers should be justified. (Les documents, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées.)

Course Questions [10pts]
We consider a continuous time, $t \in [0,T]$, $T > 0$, generalized Black-Scholes market $\mathcal{M}$, with one risk free asset, which has a stochastic spot interest rate process r, and with N risky assets. An m-dimensional standard Brownian motion $W = (W^1, \dots, W^m)$ is defined on a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ is the completed filtration generated by W.

The price processes S^i, $i = 1, \dots, N$, of the risky assets satisfy

$$dS_t^i = S_t^i \mu_t^i dt + S_t^i \sum_{j=1}^{m} \sigma_t^{ij} dW_t^j, \quad S_0^i = 1.$$

Here the drift μ and the volatility σ are bounded and progressively measurable processes w.r.t. $\mathbb{F}$.

1. [3pts] For the market $\mathcal{M}$:
1.1. Give the (mathematical) definitions of: Self-financing portfolio θ, Arbitrage Opportunity θ, AOA, process of discounted gains $\bar{G}$ and market-price of risk γ.
1.2. Prove the following statement:
There is AOA in the market $\mathcal{M}$ if and only if for all admissible portfolios (not necessarily self-financing) η,

$$\bar{G}_T(\eta) \geq 0 \quad \Rightarrow \bar{G}_T(\eta) = 0. \tag{1}$$

2. [7pts] Suppose that the market $\mathcal{M}$ is such that there does not exists a market-price of risk process γ. Under this hypothesis, construct an arbitrage opportunity θ, by using (1).
(Hint: Consider the set A of elements $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$ such that $\pi_t(\mu_t - r_t e)(\omega) \neq 0$ a.e. $dt\, d\mathbb{P}$, where $e \in \mathbb{R}^N$ is the vector with all coordinates equal to one and π_t is the orthogonal projection in $\mathbb{R}^N$ defined by $\pi_t = \iota - q_t$. Here q_t is the orthogonal projection in $\mathbb{R}^N$ on the image of σ_t and $\iota(x) = x$ for all $x \in \mathbb{R}^N$).

Exercise [10pts]
We consider a continuous time, $t \in [0,T]$, $T > 0$, financial market $\mathcal{M}$, with two basic assets, one risk free asset with spot interest rate $r = 0$ and one risky assets whose price at time t is S_t^1. The risky asset can take both positive and negative values.

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ is a complete filtered probability space, where the filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ is generated by a two dimensional standard Brownian motion $W = (W^1, W^2)$.
- The price processes S^1 is defined by the stochastic integral

$$S_t^1 = 1 + \int_0^t \left(1 + (W_s^1)^2\right)^{1/4} dW_s^2, \ \ t \in [0,T].$$

An European variance derivative on S^1 is defined by its pay-off X at maturity T,

$$X = < S^1 \, , \, S^1 >_T .$$

1. **[2pts]** Find the equivalent martingale measures and conclude if there is AOA in this market and if the market is complete.
2. **[5pts]** Find the arbitrage prices at $t = 0$ of X.
3. **[2pts]** The filtration $\mathbb{F}$, i.e. the flow of information in the market $\mathcal{M}$, is replaced by the filtration $\mathbb{F}^S = (\mathcal{F}_t^S)_{t\in[0,T]}$ generated by S^1. Let $\mathcal{M}^S$ be this new market. Show that there is less information available in the market $\mathcal{M}^S$ than in the market $\mathcal{M}$ by constructing a contingent claim which is $\mathcal{F}_T$-measurable but not $\mathcal{F}_T^S$-measurable.
4. **[1pts]** For the market $\mathcal{M}^S$, what can be said concerning equivalent martingale measures, AOA, completeness and the arbitrage prices at $t = 0$ of X?

EISTI, ING3 Option IFI, Exam April 2, 2015
Theory of contingent claims

Rules (Règles)

Documents, calculators and telephones are not allowed. Answers should be justified. (Les documents, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées.)

Exercise 1 [10pts]
We consider a mono-period, $t \in \{0,1\}$, financial market with one risk-free asset and a risky asset, whose prices are S^0 and S^1 respectively. The "a priori probability space" of this market is $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, where $\Omega = [0,1]$, $\mathbb{P}$ has the density $\phi(x) = 2(1-x)$ and $\mathcal{F}$ is the collection of Borel subsets of Ω. The random variable Z is defined by $Z(x) = x$, for $x \in \Omega$. The prices satisfy

$$S_0^0 = S_1^0 = 1, \quad S_0^1 = 1 \text{ et } S_1^1 = Z + \frac{2}{3}.$$

1. **[4pts]** Find the set of equivalent martingale measures $\mathcal{M}_e$ and determine if there is AOA in the market and if it is complete.

2. **[4pts]** X is the pay-off of a european Call of maturity $T = 1$ and strike K, where $2/3 < K < 1$. Find the sub-replication price v_* and portfolio θ_* of X and the super-replication price v^* and portfolio θ^* of X. *Recall:*
$$v_* = \sup\{V_0(\theta)\ ;\ V_1(\theta) \leq X\}, \quad V_0(\theta_*) = v_* \text{ and } V_1(\theta_*) \leq X$$
and
$$v^* = \inf\{V_0(\theta)\ ;\ V_1(\theta) \geq X\}, \quad V_0(\theta^*) = v^* \text{ and } V_1(\theta_*) \geq X.$$

3. **[2pts]** Verify that the interval of arbitrage prices $]\Pi_{*0}(X), \Pi_0^*(X)[$ of X at $t = 0$ satisfies $\Pi_{*0}(X) = v_*$ and $\Pi_0^*(X) = v^*$.

Exercise 2 [10pts]
We consider a continuous time, $t \in [0,T]$, $T > 0$, financial market $\mathcal{M}$, with two basic assets, one risk free asset with spot interest rate $r = 0$ and one risky assets whose price at time t is S_t^1. The risky asset can take both positive and negative values.

$(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ is a complete filtered probability space, where the filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ is generated by a two dimensional standard Brownian motion $W = (W^1, W^2)$ and $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.

The price process S^1 is defined by the stochastic integral

$$S_t^1 = \int_0^t W_s^2 dW_s^1, \quad t \in [0,T].$$

A European derivative on S^1 is defined by its pay-off $X = < S^1 , S^1 >_T$ at maturity T.

1. **[6pts]** For the market $\mathcal{M}$:
1.A. Find the equivalent martingale measures and conclude if there is AOA in this market and if the market is complete.
1.B. Find the arbitrage prices at $t = 0$ of X.

2. **[2pts]** The filtration $\mathbb{F}$, i.e. the flow of information in the market $\mathcal{M}$, is replaced by the filtration $\mathbb{F}^S = (\mathcal{F}_t^S)_{t\in[0,T]}$ generated by S^1. Let $\mathcal{M}^S$ be this new market.
2.A. Show that there is less information available in the market $\mathcal{M}^S$ than in the market $\mathcal{M}$, i.e. there exists an event $E \in \mathcal{F}_T$ such that $E \notin \mathcal{F}_T^S$.
2.B. For the market $\mathcal{M}^S$, What can be said concerning equivalent martingale measures, AOA, completeness and the arbitrage prices at $t = 0$ of X?

EISTI, ING3 Option IFI, Exam November 26, 2014
Theory of contingent claims

Rules (Règles)

Documents, calculators and telephones are not allowed. Answers should be justified. (Les documents, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées.)

Course Questions [10pts]
We consider a continuous time, $t \in [0, T]$, $T > 0$, generalized Black-Scholes market $\mathcal{M}$, with one risk free asset, which has a stochastic spot interest rate process r, and with N risky assets. An m-dimensional standard Brownian motion $W = (W^1, \ldots, W^m)$ is defined on a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ and $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ is the completed filtration generated by W.

The price processes S^i, $i = 1, \ldots, N$, of the risky assets satisfy

$$dS^i_t = S^i_t \mu^i_t dt + S^i_t \sum_{j=1}^{m} \sigma^{ij}_t dW^j_t, \quad S^i_0 = 1.$$

Here the drift μ and the volatility σ are bounded and progressively measurable processes w.r.t. $\mathbb{F}$.

1. [4pts] For the market $\mathcal{M}$:
1.1. Give the (mathematical) definitions of: Self-financing portfolio θ, Arbitrage Opportunity θ, AOA, process of discounted gains $\bar{G}$ and market-price of risk γ.
1.2. Prove the following statement:
There is AOA in the market $\mathcal{M}$ if and only if for all admissible portfolios (not necessarily self-financing) η,

$$\bar{G}_T(\eta) \geq 0 \quad \Rightarrow \bar{G}_T(\eta) = 0. \tag{1}$$

2. [6pts] Suppose that the market $\mathcal{M}$ is such that there does not exists a market-price of risk process γ. Under this hypothesis, construct an arbitrage opportunity θ, by using (1).

Exercise [10pts]
We consider a continuous time $t \in [0, T]$, $T > 0$ financial market $\mathcal{M}$, with three basic assets, one risk free asset with spot interest rate $r = 0$ and two risky assets whose prices at time t are S^1_t and S^2_t respectively:

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ is a filtered probability space, where $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ is the natural filtration generated by a standard two dimensional Brownian motion $W = (W^1, W^2)$ and $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.
- The price processes S^1 and S^2 satisfy: $S^1_0 > 0$, $S^2_0 > 0$,

$$dS^1_t = S^1_t \left(\frac{v_t}{1 + v_t}\, dt + \sqrt{v_t} dW^1_t\right) \text{ and } dS^2_t = S^2_t dW^2_t.$$

  Here the stochastic volatility $\sqrt{v}$ is defined by the SDE

$$dv_t = k(a - v_t)\, dt + \delta\sqrt{v_t}\, d\bar{z}_t,\ v_0 > 0,\ \text{where } d\bar{z}_t = \rho(dW^1_t + \frac{\sqrt{v_t}}{1 + v_t} dt) + \sqrt{1-\rho^2}\, dW^2_t,\ z_0 = 0.$$

  The model parameters satisfy: $-1 < \rho < 1$, $k, \delta > 0$ and $\delta^2 < 2ak$.

A european derivative on S^1 is defined by its pay-off X at maturity T,

$$X = \left(\ln(S^1_T / S^1_0)\right)^2.$$

Find the arbitrage prices at $t = 0$ of X. The answer shall not contain any random variables!

Hint: Let $\Upsilon_t = \int_0^t v_s ds$ be the integrated variance. One can use that:
1) $v_t = f(t) + \int_0^t g(t, s)\sqrt{v_s}\, d\bar{z}_s$, where f and g are deterministic functions to be found.
2) $\mathrm{var}_Q[\Upsilon_t] = \frac{\delta^2}{2k^3}\left(2akt + 2v_0 - 5a + 4k(a - v_0)te^{-kt} + 4ae^{-kt} + (a - 2v_0)e^{-2kt}\right)$, where Q is an e.m.m.

EISTI, ING3 Option IFI, Exam April 3, 2014
Theory of contingent claims

Rules (Règles)

Documents, calculators and telephones are not allowed. Answers should be justified. (Les documents, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées.)

Exercise 1 [10pts]
We consider a continuous time $t \in [0, T]$, $T > 0$ financial market $\mathcal{M}$, with three basic assets, one risk free asset with spot interest rate $r = 2$ and two risky assets whose prices at time t are S_t^1 and S_t^2 respectively:

- $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ is a complete filtered probability space, where the filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ is generated by the two dimensional process (S^1, S^2) and $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.
- $W = (W^1, W^2)$ is a two dimensional standard Brownian motion.
- The price processes S^1 and S^2 are defined by:

$$dS_t^1 = S_t^1(dt + dW_t^1 + dW_t^2), \quad dS_t^2 = S_t^2(3\,dt + 2dW_t^1 - dW_t^2) \text{ and } S_0^1 = S_0^2 = 1.$$

An European derivative on S is defined by its pay-off X at maturity T:

$$X = \left(\sqrt{S_T^1 S_{\frac{T}{2}}^2} - 1\right)^2.$$

1. **[5pts]** Let P_t be the price of the derivative at time $t \in [0, T]$. Find a numerical function $F : [0, T]\times\,]0, \infty[^2 \to \mathbb{R}$, such that

$$P_t = F(t, S_t^1, S_{t\wedge\frac{T}{2}}^2), \text{ for } 0 \le t \le T.$$

2. **[5pts]** Let $\theta = (\theta^0, \theta^1, \theta^2)$ be a hedging portfolio of the derivative. Find a function $G : [0, T]\times\,]0, \infty[^2 \to \mathbb{R}^3$ such that

$$(\theta_t^0 e^{rt}, \theta_t^1 S_t^1, \theta_t^2 S_t^2) = G(t, S_t^1, S_t^2), \text{ for } 0 \le t \le T.$$

Here $(\theta_t^0 e^{rt}, \theta_t^1 S_t^1, \theta_t^2 S_t^2)$ is the vector of investments at time t, given by θ.

Exercise 2 [10pts]
We consider a continuous time $t \in [0, T]$, $T > 0$ financial market $\mathcal{M}$, with two basic assets, one risk free asset with spot interest rate $r = 0$ and one risky assets whose prices at time t is S_t^1:

- $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ is a complete filtered probability space, where the filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ is generated by a two dimensional standard Brownian motion $W = (W^1, W^2)$.
- The price processes S^1 is defined by the stochastic integral

$$S_t^1 = 1 + \int_0^t S_s^1 \sqrt{1 + (W_s^1)^2}\, dW_s^2, \quad t \in [0, T].$$

An European variance derivative on S^1 is defined by its pay-off X at maturity T,

$$X =< \ln(S^1)\,,\, \ln(S^1) >_T .$$

1. **[2pts]** Find the equivalent martingale measures and conclude if there is AOA in this market and if the market is complete.
2. **[5pts]** Find the arbitrage prices at $t = 0$ of X.
3. **[2pts]** The filtration $\mathbb{F}$, i.e. the flow of information in the market $\mathcal{M}$, is replaced by the filtration $\mathbb{F}^S = (\mathcal{F}_t^S)_{t\in[0,T]}$ generated by S^1. Let $\mathcal{M}^S$ be this new market. Show that there is less information available in the market $\mathcal{M}^S$ than in the market $\mathcal{M}$ by constructing a contingent claim which is $\mathcal{F}_T$-measurable but not $\mathcal{F}_T^S$-measurable.
4. **[1pts]** For the market $\mathcal{M}^S$, what can be said concerning equivalent martingale measures, AOA, completeness and the arbitrage prices at $t = 0$ of X?

EISTI, ING3 Option IFI, Exam December 2, 2013
Theory of contingent claims

Rules (Règles)

Documents, calculators and telephones are not allowed. Answers should be justified. (Les documents, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées.)

Exercise 1 [10pts]
We consider a mono-period financial market $\mathcal{M}$, with trading dates $t \in \{0, 1\}$ and with a complete probability space $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$. In this market there is one risk free asset, whose interest rate $r = 0$, and one risky asset, whose price at $t =$ is S_t.

The σ-algebra $\mathcal{F}$ is generated by the price S_1, which has an exponential distribution with parameter $\lambda = 1$, i.e. its probability density function p is

$$p(x) = 0 \text{ if } x < 0 \text{ and } p(x) = e^{-x} \text{ if } x \geq 0.$$

1. Find all prices $S_0 \in \mathbb{R}$ such that there is AOA in the market $\mathcal{M}$.
2. Fix $S_0 = \frac{1}{2}$. Find the set $\mathcal{M}^e$ of equivalent martingale measures. Is there AOA in this market and is the market complete?
3. Fix $S_0 = \frac{1}{2}$. Let X be the pay-off of a Put on S with strike $K = \frac{1}{2}$ and maturity $t = 1$. Find the set $\mathcal{A}$ of all arbitrage prices P_0 of X in the market $\mathcal{M}$ by calculating
$$P_0^* = \sup_{Q \in \mathcal{M}^e} E[X] \text{ and } P_{0*} = \inf_{Q \in \mathcal{M}^e} E[X].$$
4. Fix $S_0 = \frac{1}{2}$, let X be as in item 3 and suppose that the price of X at $t = 0$ is P_0. For the case $P_0 \notin \mathcal{A}$, construct an arbitrage portfolio.

Exercise 2 [10pts]
We consider a continuous time $t \in [0, T]$, $T > 0$ financial market $\mathcal{M}$, with three basic assets, one risk free asset with spot interest rate $r = 0$ and two risky assets whose prices at time t are S_t^1 and S_t^2 respectively:

- $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ is a complete filtered probability space, where the filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$ is generated by the two dimensional process (S^1, S^2) and $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.
- $W = (W^1, W^2)$ is a two dimensional standard Brownian motion.
- The price processes S^1 and S^2 are defined by $S_0^1 = 1$, $S_0^2 = 1$,
$$dS_t^1 = S_t^1 |W_t^2| \, dW_t^1 \text{ and } dS_t^2 = S_t^2 \left(\frac{W_t^1}{\sqrt{1 + (W_t^1)^2}} \, dt + \frac{1}{\sqrt{1 + (W_t^1)^2}} \, dW_t^2 \right) \quad t \in [0, T].$$

An European variance derivative on S^1 is defined by its pay-off X at maturity T,

$$X = < \ln(S^1) \, , \, \ln(S^1) >_T \, .$$

The following hypothesis is introduced for $T > 0$:
Hypothesis $\mathbf{H}(T)$:
There exists a strictly positive continuous process ξ such that ξ, ξS^1 and ξS^2 are martingales w.r.t. $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ on the time interval $[0, T]$.

1. Under the hypothesis $\mathbf{H}(T)$, find the arbitrage prices at $t = 0$ of X.
2. Find $T > 0$ such the hypothesis $\mathbf{H}(T)$ is satisfied.
(Hint: Use the Novikov's criterion and that for a B.m. B the random variables $|B_t|$ and $\sup_{0 \leq s \leq t} B_s$ have the same law)

EISTI, ING3 Option IFI, Exam April 4, 2013
Theory of contingent claims

Rules (Règles)

Documents, calculators and telephones are not allowed. Answers should be justified. (Les documents, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées.)

Exercise 1 [10pts]
We consider a mono-period, $t \in \{0, 1\}$, financial market with one risk free asset and one risky asset, in the context of a complete probability space $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$. The σ-algebra $\mathcal{F}$ is generated by a random variable N, with a standard normal distribution $\mathcal{N}(0, 1)$. The price S^0 of the risk free asset and the price S^1 of the risky asset are defined by

$$S_0^0 = S_1^0 = 1, \quad S_0^1 = 0 \text{ and } S_1^1 = a + \sigma N,$$

where $a \in \mathbb{R}$ and $\sigma > 0$.

1. Find the set $\mathcal{M}_e$ of equivalent martingale measures. Is there AOA in this market and is the market complete?
2. Find all the arbitrage prices, at $t = 0$, of a Call on S^1, with strike $K > 0$ and maturity $t = 1$.

N.B. Contingent claims, with initial price zero, are frequent. For example, forward contracts.

Exercise 2 [10pts]
We consider a continuous time, $t \in [0, T]$, $T > 0$, financial market $\mathcal{M}$, with two basic assets, one risk free asset with spot interest rate $r = 0$ and one risky assets whose price at time t is S_t^1. The risky asset can take both positive and negative values.

$(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ is a complete filtered probability space, where the filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ is generated by a two dimensional standard Brownian motion $W = (W^1, W^2)$ and $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.

The price process S^1 is defined by the stochastic integral

$$S_t^1 = \int_0^t W_s^2 dW_s^1, \quad t \in [0, T].$$

A European derivative on S^1 is defined by its pay-off $X = < S^1 , S^1 >_T$ at maturity T.

1. [7pts] For the market $\mathcal{M}$:
1.A. Find the equivalent martingale measures and conclude if there is AOA in this market and if the market is complete.
1.B. Find the arbitrage prices at $t = 0$ of X.

2. [3pts] The filtration $\mathbb{F}$, i.e. the flow of information in the market $\mathcal{M}$, is replaced by the filtration $\mathbb{F}^S = (\mathcal{F}_t^S)_{t\in[0,T]}$ generated by S^1. Let $\mathcal{M}^S$ be this new market. 2.A. Show that there is less information available in the market $\mathcal{M}^S$ than in the market $\mathcal{M}$, i.e. there exists an event $E \in \mathcal{F}_T$ such that $E \notin \mathcal{F}_T^S$.
2.B. For the market $\mathcal{M}^S$, What can be said concerning equivalent martingale measures, AOA, completeness and the arbitrage prices at $t = 0$ of X?

EISTI, ING3 Option IFI, Exam December 3, 2012
Theory of contingent claims

Rules (Règles)

Documents, calculators and telephones are not allowed. Answers should be justified. (Les documents, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées.)

In the two exercises below (Exercise 1 and Exercise 2), we consider a continuous time $t \in [0,T]$, $T > 0$ financial market $\mathcal{M}$, with three basic assets, one risk free asset with spot interest rate r_t at time t and two risky assets whose prices at time t are S_t^1 and S_t^2 respectively.

$(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ is a complete filtered probability space, where the filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ is generated by a two dimensional standard Brownian motion $W = (W^1, W^2)$ and $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.

Exercise 1 [10pts]
In this exercise the spot rate $r_t = 0$ for all $t \in [0,T]$. The prices S^1 and S^2 satisfy

$$dS_t^1 = S_t^1 a_t dW_t^1 \text{ and } dS_t^2 = S_t^2 dW_t^2,\ 0 \le t \le T = 1,$$

where $S_0^1 = S_0^2 = 1$ and a is a stoch. proc. defined by

$$\forall t \in [0, T/2] :\ a_t = 1 \text{ and } \forall t \in]T/2, T] :\ \begin{cases} a_t = 1/2 \text{ if } S_{T/2}^2 \le e^{-1/4} \\ a_t = 2 \text{ if } S_{T/2}^2 > e^{-1/4} \end{cases}$$

A European derivative with pay-off X at T is defined by

$$X = (S_T^1 - K)^2,$$

where $K \ge 0$.

For each time $t \in [0,T]$, find the arbitrage prices of X at time t.

Exercise 2 [10pts]
In this exercise the spot rate r is stochastic. The price S^0 of the risk free asset satisfies

$$dS_t^0 = r_t S_t^0 dt, \quad S_0^0 = 1 \tag{1}$$

and the prices S^1 et S^2 of the risky assets satisfy

$$dS_t^i = S_t^i \mu_t^i dt + S_t^i \sum_{j=1}^{2} \sigma_t^{ij} dW_t^j, \quad S_0^i > 0. \tag{2}$$

Here the μ^i et σ^{ij} are bounded and $\mathbb{F}$-adapted processes.

1. [5pts] For the market $\mathcal{M}$:
1.1. Give the (mathematical) definition of the following concepts: Self-financing portfolio, discounted gains process $\bar{G}$ and AOA.
1.2. Establish the following result:

There is AOA in the market $\mathcal{M}$ if and only if for all admissible portfolios θ (not necessarily self-financing):

$$\bar{G}_T(\theta) \geq 0 \quad \Rightarrow \bar{G}_T(\theta) = 0. \tag{3}$$

2. [5pts]
2.1. Give the definition of the Market Price of Risk process γ
2.2. Using (3), prove the following result,

$$\textit{AOA in the market } \mathcal{M} \Rightarrow \exists \textit{ Market Price of Risk } \gamma. \tag{4}$$

EISTI, ING3 Option IFI, Examen du 13 Septembre 2012
Theory of contingent claims

Règles

Les documents, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées.

Exercice 1 [12pts]
Nous considérons un marché financier $\mathcal{M}$ en temps continu $t \in [0, T]$, $T > 0$ avec un actif sans risque de taux d'intérêt stochastique r et deux actifs risqués de prix S^1 et S^2. $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ est un espace de probabilité complet et $W = (W^1, W^2)$ est un M.b. standard de dimension 2 sur cet espace de probabilité. Soit $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ la filtration engendrée par W.

Le prix de l'actif sans risque S^0 satisfait $S_0^0 = 1$ et

$$dS_t^0 = r_t S_t^0 dt \tag{1}$$

et les prix des actifs risqués S^1 et S^2 satisfont

$$dS_t^i = S_t^i \mu_t^i dt + S_t^i \sum_{j=1}^{2} \sigma_t^{ij} dW_t^j. \tag{2}$$

Ici μ et σ sont des processus bornés et adaptés à la filtration $\mathbb{F}$.

1. [6pts] Pour le marché $\mathcal{M}$:
1.1. Donner la définition (mathématique) des notions suivantses: Portefeuille auto-financé, processus des gains actualises $\bar{G}$ et AOA
1.2. Démontrer le résultat suivant :

Il y a AOA dans le marché $\mathcal{M}$ si et seulement si pour tout portefeuille (pas nécessairement auto-financé) admissible θ

$$\bar{G}_T(\theta) \geq 0 \quad \Rightarrow \bar{G}_T(\theta) = 0. \tag{3}$$

2. [6pts]
2.1. Donner la définition du processus de Market Price of Risk γ
2.2. Démontrer le résultat suivant, en utilisant (3):

$$\textit{AOA dans le marché } \mathcal{M} \Rightarrow \exists \textit{ Market Price of Risk } \gamma. \tag{4}$$

Exercice 2 [8pts]
Nous considérons un marché financier en temps discret $\mathcal{M}$, $t \in \mathbb{T} = \{0, \dots, T\}$, $T \in \mathbb{N}^*$, avec un actif sans risque de taux d'intérêt $r = 0$ et un actif risqué de prix S. On se place dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, \mathbb{F})$, où Ω est fini, S est adapté à la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, $\mathcal{F}_0$ est le tribu trivial et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$. L'évolution du prix est donnée par

$$S_{t+1} = k_{t+1} S_t, \; S_0^1 > 0 \text{ pour } t \in \{0, \dots, T-1\},$$

où

$$k_{t+1} \text{ est } \mathcal{F}_{t+1}\text{-mesurable et } \mathbb{P}(k_{t+1} > 0) = 1.$$

1. **[6pts]** Trouver (d'une façon argumentée) une condition sur les k_{t+1}, $t \in \{0, \ldots, T-1\}$ qui est nécessaire et suffisante pour avoir AOA dans le marché $\mathcal{M}$.

2. [**2pts**] *(Évaluation d'une "Knock-out Duoble Barrier Call-Option").* Soient T **impair**, $S_0 = 1$, $k_1, \ldots, k_T$ i.i.d., $\mathbb{P}(k_1 = 2) = p$ et $\mathbb{P}(k_1 = 1/2) = 1 - p$, où $0 < p < 1$. Trouver le prix à $t = 0$ de l'option avec pay-off X à T. Ici X est défini par:

$$X(\omega) = \begin{cases} C_T(\omega) & \text{si } 1/3 < S_t(\omega) < 3, \\ 0 & \text{si-non,} \end{cases}$$

où $C_T = (S_T - 1)^+$.

EISTI, ING3 Option IFI, Examen du 13 Avril 2012
Theory of contingent claims

Règles

Les documents, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées.

Exercice 1 [10pts]
Nous considérons un marché financier en temps discret $\mathcal{M}$, $t \in \mathbb{T} = \{0, \dots, T\}$, $T \in \mathbb{N}^*$, avec un actif sans risque de taux d'intérêt $r = 0$ et un actif risqué de prix S. On se place dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, \mathbb{F})$, où Ω est fini, S est adapté à la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$, $\mathcal{F}_0$ est le tribu trivial et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$. L'évolution du prix est donnée par

$$S_{t+1} = k_{t+1} S_t, \; S_0^1 > 0 \text{ pour } t \in \{0, \dots, T-1\},$$

où

$$k_{t+1} \text{ est } \mathcal{F}_{t+1}\text{-mesurable et } \mathbb{P}(k_{t+1} > 0) = 1.$$

1.1 [5pts] Trouver (d'une façon argumentée) une condition sur les k_{t+1}, $t \in \{0, \dots, T-1\}$ qui est nécessaire et suffisante pour avoir AOA dans le marché $\mathcal{M}$.
1.2 [5pts] *(Évaluation d'une "Knock-out Duoble Barrier Call-Option").* Soient T **impair**, $S_0 = 1$, $k_1, \dots, k_T$ i.i.d., $\mathbb{P}(k_1 = 2) = p$ et $\mathbb{P}(k_1 = 1/2) = 1 - p$, où $0 < p < 1$. Trouver le prix à $t = 0$ de l'option avec pay-off X à T. Ici X est défini par:

$$X(\omega) = \begin{cases} C_T(\omega) & \text{si } 1/3 < S_t(\omega) < 3, \\ 0 & \text{si-non,} \end{cases}$$

où $C_T = (S_T - 1)^+$.

Exercice 2 [10pts]
Nous considérons un marché financier $\mathcal{M}$ en temps continu $t \in [0, T]$, $T > 0$ avec un actif sans risque de taux d'intérêt $r = 0$ et un actif risqué de prix S^1. Le prix de l'actif risqué peut prendre des valeurs positives et négatives, comme c'est le cas pour des contrats forwards, des swaps, etc.

$(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ est un espace de probabilité complet et $W = (W^1, W^2)$ est un M.b. standard de dimension 2 sur cet espace de probabilité. Soit $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$ la filtration engendrée par W et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.

S^1 est défini par l'intégrale stochastique

$$S_t^1 = \int_0^t W_s^2 dW_s^1, \quad t \in [0, T]$$

et $T > 0$ est choisi suffisamment petit pour qu'on n'ait pas besoin de distinguer des martingales et des martingales locales dans cette définition.

Un produit dérivé européen est défini par son pay-off $X = < S^1 , S^1 >_T$ à la maturité T.

1.1 [**7pts**] Pour le marché $\mathcal{M}$:
1.1.A Trouver les mesures martingales équivalentes et en déduire s'il y a AOA dans ce marché et si ce marché est complet.
1.1.B Trouver les prix d'arbitrage à $t = 0$ de X.

1.2 [**3pts**] La filtration, c.a.d. le flux d'informations $\mathbb{F}$ dans le marché $\mathcal{M}$ est remplacé par la filtration $\mathbb{F}^S = (\mathcal{F}_t^S)_{t\in[0,T]}$ engendrée par S^1. Soit $\mathcal{M}^S$ ce nouveau marché. Pour le marché $\mathcal{M}^S$:
1.2.A Démontrer qu'il y a moins d'informations accessibles dans le marché $\mathcal{M}^S$ que dans le marché $\mathcal{M}$, c.a.d. qu'il existe un événement $E \in \mathcal{F}_T$ tel que $E \notin \mathcal{F}_T^S$.
1.2.B Que peut-on dire concernant mesures martingales équivalentes, AOA, complétude et les prix d'arbitrage à $t = 0$ de X?

EISTI, ING3 Option IFI, Examen du 6 Décembre 2011
Theory of contingent claims

Règles

Les calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées. Document autorisé : Slides du cours non-annotés.

Exercice 1 [10pts]
On se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ et on considère un marché financier mono-période, $t \in \{0, 1\}$, avec un actif sans risque de prix S^0 et un actif risqué de prix S^1. La tribu $\mathcal{F}$ est engendrée par la variable aléatoire U, qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.
Les prix sont définis par

$$S_0^0 = S_1^0 = 1, \quad S_0^1 = 1 \text{ et } S_1^1 = U + \frac{1}{2}.$$

1. Déterminer l'ensemble des mesures martingale équivalentes $\mathcal{M}_e$. En déduire s'il y a AOA dans ce marché et si ce marché est complet.
2. X est le pay-off d'un Call sur S^1 de maturité $T = 1$ est de strike K, où $1/2 < K < 1$. Trouver le prix v_* et un portefeuille θ_* de sous-réplication et le prix v^* et un portefeuille θ^* de sur-réplication de X. *Rappel* :

$$v_* = \sup\{V_0(\theta) \; ; \; V_1(\theta) \leq X\}, \;\; V_0(\theta_*) = v_* \text{ and } V_1(\theta_*) \leq X$$

and

$$v^* = \inf\{V_0(\theta) \; ; \; V_1(\theta) \geq X\}, \;\; V_0(\theta^*) = v^* \text{ and } V_1(\theta_*) \geq X.$$

3. Vérifier que l'intervalle des prix d'arbitrage à $t = 0$ de X, c.a.d. $]\Pi_{*0}(X), \Pi_0^*(X)[$, satisfait $\Pi_{*0}(X) = v_*$ et $\Pi_0^*(X) = v^*$.

Exercice 2 [10pts]
Nous considérons un marché financier de type Heston, d'un actif sans risque de taux d'intérêt $r = 0$ et deux actions de prix S^1 et S^2, où

$$dS_t^1 = S_t^1 \sqrt{v_t} dW_t^1, \;\; dS_t^2 = S_t^2 (dW_t^1 + dW_t^2) \text{ et } S_0^1 = S_0^2 = 1.$$

Ici $W = (W^1, W^2)$ est un M.b. standard de dimension 2 et

$$dv_t = (2 - v_t)\, dt + \sqrt{v_t}\, (dW_t^1 + dW_t^2), \; v_0 = 1.$$

Soit $V_t = \frac{1}{t} < \ln(S^1), \ln(S^1) >_t$. Un *swap de variance* est défini par son pay-off X à la maturité T,

$$X = V_T - K^2,$$

où le strike de volatilité $K \geq 0$ est déterminé tel que le prix

$$\Pi_0(X) = 0.$$

Déterminer K et trouver le prix $\Pi_t(X)$ à $t \in [0, T]$ du swap.

EISTI, ING3 Option IFI, Examen du 27 Avril 2011
Theory of contingent claims

Règles

Les calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées. Document autorisé : Slides du cours non-annotés.

Exercice 1 [10 pts]
On considère un marché financier à deux périodes, $t \in \{0, 1, 2\}$, avec un actif sans risque de prix S^0 et un actif risqué de prix S^1.

On se place dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{0 \leq t \leq 2})$. La tribu $\mathcal{F}_1$ est engendrée par N_1 et $\mathcal{F}_2$ est engendrée par N_1 et N_2, où N_1 et N_2 sont deux variables aléatoires indépendantes normales centrées réduites. Les prix sont définis par

$$S_0^0 = S_1^0 = S_2^0 = 1, \quad S_0^1 = 0, \;\; S_1^1 = a + \sigma N_1 \;\text{ et }\; S_2^1 = a + \sigma(N_1 + N_2),$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

1. Déterminer l'ensemble des mesures martingales équivalentes $\mathcal{M}_e$. En déduire s'il y a AOA dans ce marché et si ce marché est complet.
2. Trouver tous les prix d'arbitrage d'un Call Européen de maturité $T = 2$ et de strike $K > 0$ sur S^1.

Indication: Pour trouver $\mathcal{M}_e$, il peut-être utile de considérer les fonctions strictement positives f telles que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-x^2/2} \frac{d\,x}{\sqrt{2\pi}} = 1 \;\text{ et }\; \int_{\mathbb{R}} x f(x) e^{-x^2/2} \frac{d\,x}{\sqrt{2\pi}} = 0.$$

N.B. Des produits financiers dont le prix initial est nul sont fréquents; les contrats forward par exemple.

Exercice 2 [10 pts]
Nous considérons un marché financier d'un actif sans risque de taux d'intérêt $r = 2$ et deux actions de prix S^1 et S^2 :

$$dS_t^1 = S_t^1(2\,dt + dW_t^1 + dW_t^2), \;\; dS_t^2 = S_t^2(3\,dt + dW_t^1 - dW_t^2) \;\text{ et }\; S_0^1 = S_0^2 = 1,$$

où $0 \leq t \leq T$, $T > 0$ et $W = (W^1, W^2)$ est un M.b. standard de dimension 2.

Un produit dérivé européen est défini par son pay-off X à la maturité T :

$$X = \left(\frac{S_T^1}{S_T^2} - 1\right)^2.$$

i) Quel est le prix de X à $t \in [0, T]$, exprimé en fonction de S_t^1 et S_t^2.
ii) Trouver un portefeuille de couverture de X, exprimé en fonction du prix à t de X et en fonction de S_t^1 et S_t^2.

EISTI, ING3 Option IFI, Examen du 25 Janvier 2011
Theory of contingent claims

Règles

Les calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées. Document autorisé : Slides du cours non-annotés.

Exercice 1 [7pts]
On se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ est on considère un marché financier monopériode, $t \in \{0, 1\}$, avec un actif sans risque de prix S^0 et un actif risqué de prix S^1. La tribu $\mathcal{F}$ est engendrée par une variable aléatoire normale centrée réduit N.
Les prix sont définis par

$$S_0^0 = S_1^0 = 1, \quad S_0^1 = 0 \text{ et } S_1^1 = a + \sigma N,$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

1. Déterminer l'ensemble des mesure martingale équivalentes $\mathcal{M}_e$. En déduire s'il y a AOA dans ce marché et si ce marché est complet.
2. Trouver tous les prix d'arbitrage d'un Call de strike $K > 0$ sur S^1.

Indication: Pour trouver $\mathcal{M}_e$, il peut-être utile de considérer les fonctions strictement positives f telles que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 1 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} x f(x) e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 0.$$

N.B. Des produits financiers dont le prix initial est nulle sont fréquents; les contrat forward par exemple.

Exercice 2 [7pts]
Nous observons l'évolution des prix de deux titres financiers pendant deux périodes de temps. Le premier processus stochastique, S^1, représente le prix du titre sans risque à chaque instant, tandis que S^2 modélise la fluctuation du prix du titre risqué. L'espace de probabilité filtré considéré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}, \mathbb{P})$ est engendré par les actifs observés.

ω	$(S_0^1; S_0^2)$	$(S_1^1; S_1^2)$	$(S_2^1; S_2^2)$
ω_1	(1;3/2)	(3/2;1)	(2;1/2)
ω_2	(1;3/2)	(3/2;1)	(2;2)
ω_3	(1;3/2)	(3/2;5/2)	(2;5/2)
ω_4	(1;3/2)	(3/2;5/2)	(2;3)
ω_5	(1;3/2)	(3/2;5/2)	(2;4)

1. Déterminer la mesure risque neutre ou les mesures risque neutre du modèle.

2. On considère Z le payoff d'un put sur S^2 de strike 2.
(a) Déterminer le prix à l'instant 0 de Z s'il est de type européen.
(b) Déterminer le prix à l'instant 0 de Z s'il est de type américain.
(c) Déterminer l'instant optimal pour exercer l'option de type américain.

Soit U une nouvelle option qui engendre, au temps $t = 2$, les flux monétaires présentés dans le tableau ci-dessous.

ω	$(S_0^1; S_0^2)$	$(S_1^1; S_1^2)$	$(S_2^1; S_2^2)$	U
ω_1	(1;3/2)	(3/2;1)	(2;1/2)	3
ω_2	(1;3/2)	(3/2;1)	(2;2)	0
ω_3	(1;3/2)	(3/2;5/2)	(2;5/2)	1
ω_4	(1;3/2)	(3/2;5/2)	(2;3)	1
ω_5	(1;3/2)	(3/2;5/2)	(2;4)	3

3. Cette option a-t-elle un prix d'arbitrage unique à l'instant $t = 0$? Si oui, quel est-il ? Sinon, pourquoi ?

Exercice 3 [7pts]
L'objectif de cet exercice est de montrer que la définition de l'autofinancement est invariante par changement de numéraire.
On se place dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ et on considère un marché comportant deux actifs dont les prix sont des processus d'Itô S et $\hat{S}$ tels que S est strictement positif. Soit π et $\hat{\pi}$ deux processus adaptés. Un portefeuille de valeur $V_t = \pi_t S_t + \hat{\pi}_t \hat{S}_t$ est autofinancé si

$$dV_t = \pi_t dS_t + \hat{\pi}_t d\hat{S}_t.$$

On choisit S comme numéraire et on note $\bar{V}_t = \frac{V_t}{S_t}$ et $\tilde{S}_t = \frac{\hat{S}_t}{S_t}$.

Démontrer que

$$d\bar{V}_t = \hat{\pi}_t d\tilde{S}_t. \qquad (1)$$

Indication: On peut suivre les étapes suivants
1. Montrer que

$$S_t d(\frac{1}{S_t}) + \frac{1}{S_t} dS_t + d\langle S, \frac{1}{S}\rangle_t = 0.$$

2. Calculer $d\langle V, \frac{1}{S}\rangle_t$ en fonction de $d\langle S, \frac{1}{S}\rangle_t$ et de $d\langle \hat{S}, \frac{1}{S}\rangle_t$
3. Montrer que

$$d\bar{V}_t = \hat{\pi}_t \left(\hat{S}_t d\frac{1}{S_t} + \frac{1}{S_t} d\hat{S}_t + d\langle \hat{S}, \frac{1}{S}\rangle_t \right).$$

4. En déduire que (1) est satisfait.

EISTI, Option IFI
Examen du 5 Mai 2010
Théorie des produits dérivés

Règles

Les calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées. Document autorisé : Slides du cours non-annotés.

Problème :

Nous considérons un marché financier Black-Scholes généralisé d'un actif sans risque de taux d'intérêt $r = 0$ et une action de prix S^1, où

$$dS_t^1 = S_t^1 \left(\frac{1}{10}(W_t^1 + W_t^2)dt + 4dW_t^1 - 3dW_t^2 \right), \quad S_0^1 = 1, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ici $T = 1$, $W = (W^1, W^2)$ est un M.b. standard de dimension 2 et la filtration est engendrée par W.
Dans ce marché, un produit dérivé européen D est défini par son pay-off X à la maturité T :

$$X = \sqrt{S_T^1}.$$

1 [3pts] Trouver les processus de "market price of risk" γ.

2 [6pts] Trouver un portefeuille de couverture de D, exprimé en fonction de son prix d'arbitrage.

3 [6pts] Trouver le prix d'arbitrage de D à la date t ($0 \leq t \leq T$) exprimé en fonction de S_t^1.

4 [5pts] Trouver un produit dérivé européen qui n'est pas duplicable. Plus généralement, caractériser les produits dérivés européens qui ne sont pas duplicables.

EISTI, Option IFI
Examen du 3 Février 2010
Théorie des produits dérivés

Problème 1 [10pts]
Nous considérons un marché financier d'un actif sans risque de taux d'intérêt $r = 2$ et deux actions de prix S^1 et S^2 :

$$dS_t^1 = S_t^1(2\,dt + dW_t^1 + dW_t^2), \;\; dS_t^2 = S_t^2(3\,dt + dW_t^1 - dW_t^2) \;\text{ et }\; S_0^1 = S_0^2 = 1,$$

où $0 \leq t \leq T$, $T > 0$ et $W = (W^1, W^2)$ est un M.b. standard de dimension 2.

Un produit dérivé européen est défini par son pay-off X à la maturité T :

$$X = (\frac{S_T^1}{S_T^2} - 1)^2.$$

i) Quel est le prix de X à $t \in [0, T]$, exprimé en fonction de S_t^1 et S_t^2.
ii) Trouver un portefeuille de couverture de X, exprimé en fonction du prix à t de X et en fonction de S_t^1 et S_t^2.

Problème 2 [10pts]
Nous considérons un marché financier de type Heston, d'un actif sans risque de taux d'intérêt $r = 0$ et deux actions de prix S^1 et S^2, où

$$dS_t^1 = S_t^1(v_t\,dt + \sqrt{v_t}dW_t^1), \;\; dS_t^2 = S_t^2(4\sqrt{v_t}\,dt + dW_t^1 + dW_t^2) \;\text{ et }\; S_0^1 = S_0^2 = 1.$$

Ici $W = (W^1, W^2)$ est un M.b. standard de dimension 2 et

$$dv_t = (2 - v_t)\,dt + \sqrt{v_t}\,(dW_t^1 + dW_t^2), \; v_0 = 1.$$

i) Y a-t-il AOA dans ce marché ? Le marché est-il complet ?
ii) Trouver le prix à $t = 0$ d'un produit dérivé européen de pay-off X à la maturité $T \geq 0$, où

$$X = -\ln(S_T^1/S_0^1).$$

(INDICATION : Trouver d'abord λ)
iii) Trouver la volatilité implicite en fonction de T.

EISTI, Option IFI
Examen de rattrapage 09 mars 2009
Théorie des produits dérivés

Nous considérons un marché financier décrit par le modèle Black-Scholes standard, d'un actif sans risque de prix S^0 avec un taux d'intérêt $r \in \mathbb{R}$ et d'une action de prix S^1 avec drift $\mu \in \mathbb{R}$ et volatilité $\sigma \neq 0$.

Deux produits dérivés X et Y sont définis par leurs pay-off à la maturité T, qui sont respectivement

$$X = (\frac{1}{2}S^1_{T/2} + \frac{1}{2}S^1_T - K)^2 \tag{1}$$

et

$$Y = (\frac{1}{T}\int_0^T S^1_s\, ds - K)^2, \tag{2}$$

où $K \in \mathbb{R}$.

1. Trouver le prix du produit dérivé X à $t = \frac{T}{2}$ et à $t = 0$ exprimé en fonction de S^1, K et les paramètres du modèle B-S.
2. Trouver le prix du produit dérivé Y à $t = 0$, exprimé en fonction de S^1, K et les paramètres du modèle B-S.
3. Trouver le Δ à $t = 0$ du produit dérivé X. Soit $t \mapsto \theta_t = (\theta^0_t, \theta^1_t)$ un portefeuille de couverture de X. Trouver $\theta_0 = (\theta^0_0, \theta^1_0)$ exprimé en fonction de S^1, K et les paramètres du modèle B-S.
4. Trouver le Δ à $t = 0$ du produit dérivé Y. Soit $\theta = (\theta^0, \theta^1)$ un portefeuille de couverture de Y. Trouver (θ^0_0, θ^1_0) exprimé en fonction de S^1, K et les paramètres du modèle B-S.

EISTI, Option IFI
Examen 11 décembre 2008
Théorie des produits dérivés

Problème 1 [10pts]
Nous considérons un marché financier d'un actif sans risque de taux d'intérêt $r = 0$ et deux actions de prix S^1 et S^2 :

$$dS_t^1 = S_t^1 b_t dW_t^1,\ S_0^1 = 1 \ \text{ et } \ dS_t^2 = 3S_t^2 dW_t^2,\ S_0^2 = 1,$$

où $0 \le t \le T$, $T > 0$, $W = (W^1, W^2)$ est un M.b. standard de dimension 2 et b_t est défini par

$$\forall t \in [0, T/3] :\ b_t = 3 \ \text{ et } \ \forall t \in]T/3, T] : \ \left\{ \begin{array}{l} b_t = 6 \text{ si } S_{T/3}^2 \le e^{-\frac{3T}{2}} \\ b_t = 3/2 \text{ si } S_{T/3}^2 > e^{-\frac{3T}{2}}. \end{array} \right.$$

Un produit dérivé européen D est définie par son pay-off $X = (S_T^1)^2$ à la maturité T.

i) Quel est le prix de D à $t = 0$?

ii) Trouver la volatilité implicite σ_{imp} et tracer (l'allure) du "smile de volatilité" en fonction de T.

Problème 2 [10pts]
Nous considérons un marché financier de type Heston, d'un actif sans risque de taux d'intérêt $r = 0$ et deux actions de prix S^1 et S^2, où

$$dS_t^1 = S_t^1 \sqrt{v_t} dW_t^1 \ \text{ et } \ dS_t^2 = S_t^2 dW_t^2.$$

Ici $W = (W^1, W^2)$ est un M.b. standard de dimension 2 et

$$dv_t = k(a - v_t)\, dt + \delta \sqrt{v_t}\, dz_t,\ v_0 = a, \quad \text{où } \ z_t = \rho W_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2}\, W_t^2.$$

Les paramètres du modèle satisfont : $\delta > 0$, $k > 0$, $-1 < \rho < 1$ et $\delta^2 < 2ak$.

i) Y a-t-il AOA dans ce marché ? Le marché est il complet ?

ii) Quel est le prix à $t = 0$ d'un produit dérivé européen de pay-off X à la maturité T, où

$$X = \left(\ln(S_T^1/S_0^1)\right)^2.$$

EISTI, Option IFI
Examen de rattrapage du 26 Février 2008
Théorie des produits dérivés

Problème 1 [10pts]
Nous considérons un marché financier à deux périodes d'une année chacune, $t \in \{0,1,2\}$, avec un actif sans risque, une action et un Call européen sur l'action de maturité de 2 ans. Le strike du Call est $K = 3€$.

Le processus de prix spot S^0 de l'actif sans risque et le processus de prix spot S^1 de l'action ont les propriétés suivantes :

- $S_0^0 = S_1^0 = 1€$ et $S_2^0 = a^{\nu_1} b^{1-\nu_1}$.
- $S_0^1 = 1€$, $S_1^1 = U^{\nu_1} D^{1-\nu_1}$ et $S_2^1 = U^{\nu_1+\nu_2} D^{2-\nu_1-\nu_2}$.
- ν_1 et ν_2 sont deux variables aléatoires i.i.d prenant les valeurs 0 et 1 avec une probabilité non nulle et $a = 3/2$, $b = 4/3$, $U = 2$ et $D = 1/2$.

Pour $t \in \{0,1,2\}$, trouver :
i) le prix (spot) C_t du Call.
ii) le prix futures du Call, dans un contrat futures conclue à t et de date de maturité 2 ans.
iii) le prix forward du Call, dans un contrat forward conclue à t et de date de maturité 2 ans.

Problème 2 [10pts]
Nous considérons un marché financier où il y a un actif sans risque, une action et un produit dérivé européen sur l'action. Les prix de l'actif sans risque S^0 et de l'action S^1 sont donnés par le modèle Black-Scholes standard avec

$$dS_t^0 = \frac{1}{2} S_t^0 \, dt, \quad S_0^0 = 1$$

et

$$dS_t^1 = S_t^1 \,(5\, dt + dW_t), \quad S_0^1 = 1.$$

Le produit dérivé a une maturité de 1 ans et son pay-off X à la date de maturité est donné par :

$$X = \exp\left(\frac{1}{4}\left(\ln S_1^1\right)^2\right).$$

i) Déterminer le prix d'arbitrage du produit dérivé à la date t, $0 \le t \le 1$.
ii) Trouver un portefeuille de couverture du produit dérivé.
iii) En particulier à $t = 0$, quel le prix d'arbitrage du produit dérivé et quelle est la composition du portefeuille de couverture ?

EISTI, Option IFI
Examen 4 décembre 2007
Théorie des produits dérivés

Problème 1 [10pts]
Vous êtes gestionnaire dans un marché financier à temps discret avec deux périodes, où il y a un actif sans risque S^0 avec un taux d'intérêt $r = 0$ et une action de prix S^1. Les temps de transaction sont $t \in \{0, 1, 2\}$. Le prix de l'action à $t = 0$ est $S_0^1 = 1$ et les évolutions possibles, avec des probabilites à priori non-nulles, du prix de l'action de t à $t+1$ sont :

$$S_{t+1}^1 = 2S_t^1, \quad S_{t+1}^1 = S_t^1 \text{ et } S_{t+1}^1 = \frac{1}{2}S_t^1.$$

i) A l'instant t, combien de valeurs distinctes l'action peut elle prendre et combien d'états du système peut on distinguer ?
ii) Trouver l'ensemble $\mathcal{M}_e$ de tous les mesures martingales équivalentes. Le marché est il arbitré et/ou complet ?
iii) Trouver la fourchette des prix d'arbitrage à $t = 0$ d'un Call européen sur l'action avec strike $K = 2$ et maturité $T = 2$.

Problème 2 [10pts]
Nous considérons un marché financier d'un actif sans risque de prix S^0 et une action de prix S^1, décrit par le modèle Black-Scholes standard, avec un taux d'intérêt r, un drift de l'action μ, une volatilité annuelle de l'action σ.

Un produit dérivé européen D est définie par son pay-off X à la maturité T, où

$$X = (S_0^1 \frac{S_T^1}{S_{\frac{T}{2}}^1} - K)_+,$$

où $(x)_+ = 0$ si $x \leq 0$ et $(x)_+ = x$ si $x > 0$.

i) Quel est le prix de D à $t \in [0, T]$, exprimé en fonction de S^1 et des paramètres du modèle B-S ?

ii) Quel est le portefeuille de couverture de D, exprimé en fonction du prix de D et en fonction du S^1.

EISTI, Option IFI
Examen rattrapage du 15 janvier 2007
Théorie des produits dérivés

Problème 1 [10pts]
Vous investissez dans un marché financier où il y a une seule période, un actif sans risque (le compte en banque) et un actif risqué (l'action). Au début de la période, l'action coût 100€. Le prix de l'action à la fin de la période, est S^1 €. A la fin de la période, le marché se trouvera dans un seul des trois états ω_1, ω_2 et ω_3. Suivant le cas, le prix de l'action sera :

$$S^1(\omega_1) = 120,\ S^1(\omega_2) = 100,\ S^1(\omega_3) = 80.$$

Le taux d'intérêt $r = 0$.
Les probabilités à priori de ω_1, ω_2 et ω_3 sont tous strictement positives.
C est un Call sur l'action de strike $K = 100$€.

i) Trouver l'intervalle des prix d'arbitrage à $t = 0$ de C, c.a.d. $]\Pi_{*0}(C_T), \Pi_0^*(C_T)[$, où C_T est le pay-off de l'option à la fin de la période.

ii) (Sur-réplication) Trouver tout portefeuilles θ tels que $V_0(\theta) = \Pi_0^*(C_T)$ et $V_T(\theta) \geq C_T$.

iii) Existe-il un portefeuille θ tel que $V_0(\theta) = \Pi_0^*(C_T)$ et $V_T(\theta) = C_T$.

Problème 2 [10pts] Nous considérons un marché financier d'un actif sans risque de prix S^0 et une action de prix S^1, décrit par le modele Black-Scholes standard, avec un taux d'intérêt r, un drift de l'action μ, une volatilité annuelle de l'action σ.

Un produit derive D est definie par son pay-off X à la maturité T, où

$$X = (S_T^1 - S_0)^2.$$

i) Quel est le prix de D à $t \in [0, T]$, exprimé en fonction de S^1, et les paramètres du model B-S ?

ii) Quel est le portefeuille de couverture de D, exprimé en fonction du prix de D et en fonction du S^1.

EISTI, Option IFI
Examen du 18 décembre 2006
Théorie des produits dérivés

Problème 1 [10pts]
Nous considérons un marché financier à deux périodes d'une année chacune, $t \in \{0, 1, 2\}$, avec un actif sans risque, une action et un Put européen sur l'action de maturité de 2 ans. Le strike du Put est $K = 1$€.

Le processus de prix spot S^0 de l'actif sans risque et le processus de prix spot S^1 de l'action ont les propriétés suivantes :

- $S_0^0 = S_1^0 = 1$€ et $S_2^0 = S_1^0 A^{\nu_1} B^{1-\nu_1}$.
- $S_0^1 = 1$€, $S_1^1 = S_0^1 U^{\nu_1} D^{1-\nu_1}$ et $S_2^1 = S_0^1 U^{\nu_1+\nu_2} D^{2-\nu_1-\nu_2}$.
- ν_1 et ν_2 sont deux variables aléatoires i.i.d prenant les valeurs 0 et 1 avec une probabilité non nulle. $A = 1 + 5/100$, $B = 1 + 10/100$, $U = 5/4$ et $D = 4/5$.

i) Pour $0 \leq t \leq 2$, trouver le prix (spot) du Put.
ii) Quel est le prix forward du Put, dans un contrat forward conclue à $t = 0$ et de maturité 2 ans.

Problème 2 [10pts] Considérons un marché financier d'un actif sans risque et une action, décrit par le modele Black-Scholes standard, avec un taux d'intérêt annuel $r = 2\%$, un drift annuel de l'action $\mu = 8\%$, une volatilité annuelle de l'action $\sigma = 25\%$ et le prix actuel $(t = 0)$ de l'action 100€.

Une banque vend à $t = 0$ une option binaire type Put, sur l'action, de strike 100€ et de maturité $T = 1$ ans. Le pay-off est de $X = H(K - S_T^1)$, où le prix de l'action est S_T^1 à la maturité, $H(y) = 0$ pour $y < 0$ et $H(y) = 1$ pour $y \geq 0$.

Pour se couvrir la banque constitue une portefeuille de couverture approché, θ, de la façon suivant :

- θ est autofinancé.
- Le portefeuille θ_0 à $t = 0$ est le portefeuille de couverture du modèle Black-Scholes à $t = 0$ du X.
- θ est rebalancé uniquement à la date $t = 1/2$ ans et cela est fait tel que le partie risqué de $\theta_{1/2}$ est la même que pour le portefeuille de couverture du modele Black-Scholes à $t = 1/2$.

Le prix observé de l'action à $t = 1/2$ est de 110€ et à $t = 1$ de 90€.
Quelle est la valeur de la position de la banque (option binaire émise + couverture approché θ) à la date de maturité $t = 1$?

EISTI, Option IFI
Examen de rattrapage du 5 mars 2006
Théorie des produits dérivés

Problème 1 [10pts]
Nous considérons un marché financier d'un actif sans risque de prix S^0 et une action de prix S^1, décrit par le modele Black-Scholes standard, avec un taux d'intérêt r, un drift de l'action μ, une volatilité annuelle de l'action σ.

Pour $a \in \mathbb{R}$ un produit derive D est definie par son pay-off X à la maturité T, où

$$X = (S_T^1)^a.$$

i) Quel est le prix de D à $t \in [0, T]$, exprimé en fonction de S^1, a et les paramètres du model B-S ?

ii) Quel est le portefeuille de couverture de D, exprimé en fonction du prix de D et en fonction du S^1.

Problème 2 [10pts]
Nous considérons un marché financier Black-Scholes généralisé d'un actif sans risque de taux d'intérêt $r = 0$ et une action de prix S^1, où

$$dS_t^1 = S_t^1(W_t^2 dt + dW_t^1 + dW_t^2).$$

Ici $W = (W^1, W^2)$ est un M.b. standard.
D est un produit derive avec pay-off $X = \log(S_T^1)$ et maturité T.

i) Ce marché est il incomplet ?

ii) Trouver un portefeuille de couverture de D.

iii) Trouver les processus de "market price of risk" $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2)$.

iv) Pour un mesure martingale équivalent particulier Q, vérifier que $E_Q[X]$ est le prix du portefeuille de couverture à $t = 0$.

EISTI, Option IFI
Examen du 7 décembre 2005
Théorie des produits dérivés

Problème 1 [10pts] Considérons un marché financier d'un actif sans risque et une action, décrit par le modele Black-Scholes standard, avec un taux d'intérêt annuel $r = 3\%$, un drift annuel de l'action $\mu = 6\%$, une volatilité annuelle de l'action $\sigma = 30\%$ et le prix actuel ($t = 0$) de l'action 100€.

Une banque vend à $t = 0$ un Put européen sur l'action avec une date d'exercice de 1 ans et un prix d'exercice de 105€. Pour se couvrir la banque constitue une portefeuille de couverture approché, θ, de la façon suivant :

- θ est autofinancé.
- Le portefeuille θ_0 à $t = 0$ est le portefeuille de couverture du modèle Black-Scholes à $t = 0$ d'un put.
- θ est rebalancé uniquement à la date $t = 1/2$ ans et cela est fait tel que le partie risqué de $\theta_{1/2}$ est la même que pour le portefeuille de couverture du modele Black-Scholes à $t = 1/2$.

Le prix observé de l'action à $t = 1/2$ est de 90€ et à $t = 1$ de 95€.
Quelle est la valeur de la position de la banque (Put émise + couverture approché θ) à la date de maturité $t = 1$?

Problème 2 [10pts]
Considérons un marché financier à deux périodes d'une année chacune, $t \in \{0, 1, 2\}$, avec un actif sans risque, une action, un Call et un Put sur l'action. Les deux options sont européenne et de maturité 2 ans. Le strike du Call est $K_c = 17/16$ et le strike du Put est $K_p = 89/100$.

Le processus de prix spot S^0 de l'actif sans risque et le processus de prix spot S^1 de l'action ont les propriétés suivantes :

- S^0 et S^1 sont indépendants et ils engendrent les différents états possible du marché financier
- $S^0_0 = S^0_1 = 1$€. Le prix S^0_2 à $t = 2$ est bien $(1 + 1/10)S^0_1$ ou bien S^0_1, chacun avec une probabilité non nulle.
- $S^1_0 = 1$€ et si le prix de l'action au temps t est de S^1_t, alors le prix S^1_{t+1} à $t + 1$ est $\frac{5}{4}S^1_t$ ou bien $\frac{4}{5}S^1_t$, chacun avec une probabilité non nulle.

A la date $t = 0$, le prix du Call est $C_0 = 112/891$ et le prix du Put est $P_0 = 25/396$.

Pour $0 \leq t \leq 2$, trouver le prix futures de l'action $F(t, 2)$, à t de maturité 2 ans.

EISTI, Option IFI
Examen de ratrappage, 7 avril 2005
Théorie des produits dérivés

Problème 1 [20pts]
Considérons un marché financier à deux périodes d'une année chacune, $t \in \{0, 1, 2\}$, avec un actif sans risque et une action. Le processus de prix spot S^0 de l'actif sans risque et le processus de prix spot S^1 de l'action ont les propriétés suivantes :

- S^0 et S^1 sont indépendants et ils engendrent les différents états possible du marché financier
- $S_0^0 = S_1^0 = 1$€ et S_2^0 prend les valeurs $5/4$€ et $3/2$€, chacune avec une probabilité non nulle.
- $S_0^1 = 1$€ et si le prix de l'action au temps t est de S_t^1, alors le prix S_{t+1}^1 à $t+1$ est $S_t^1/2$ ou bien $2S_t^1$, chacun avec une probabilité non nulle.

A la date $t = 0$, les prix forward $f(0, 2)$ et futures $F(0, 2)$ de l'action sont respectivement $f(0, 2) = 15/11$€ et $F(0, 2) = 11/8$€. Pour le marché avec ces prix spot, forward et futures donnés :

i) Trouver les mesures martingales équivalentes. Ce marché est il arbitré ; est il complet ?
ii) Trouver un prix d'arbitrage à $t = 0$ de l'option européenne avec un pay-off de $X = (S_1^1 - 3/2)_+$ à la maturité $t = 2$, où $(x)_+$ est la partie positive de x. (Donc le montant du pay-off X à la maturité $t = 2$ est bien connue à $t = 1$.)

EISTI, Option IFI
Examen du 14 décembre 2004
Théorie des produits dérivés

Problème 1 [12pts]
Considérons un marché financier à deux périodes d'une année chacune, $t \in \{0,1,2\}$, avec un actif sans risque et une action. Le processus de prix spot S^0 de l'actif sans risque et le processus de prix spot S^1 de l'action ont les propriétés suivantes:

- S^0 et S^1 sont indépendants et ils engendrent les différents états possible du marché financier
- $S^0_0 = S^0_1 = 1$€ et S^0_2 prend les valeurs 1€ et 4/3€, chacune avec une probabilité non nulle.
- $S^1_0 = 1$€ et si le prix de l'action au temps t est de S^1_t, alors le prix S^1_{t+1} à $t+1$ est $S^1_t/2$ ou bien $2S^1_t$, chacun avec une probabilité non nulle indépendante de t.

A la date $t = 0$, les prix forward $f(0,2)$ et futures $F(0,2)$ de l'action sont respectivement $f(0,2) = 16/15$€ et $F(0,2) = 9/8$€. Pour le marché avec ces prix spot, forward et futures donnés :

i) Trouver le prix d'arbitrage à $t = 0$ d'un Zero-Coupon de maturité 2 ans.
ii) Trouver les mesures martingales équivalentes, de chaque événement connue à $t = 1$. Ce marché est il arbitré et complet?
iii) Trouver un prix d'arbitrage à $t = 0$ de l'option européenne avec un pay-off de $X = (1 - S^1_1)_+$ à la maturité $t = 2$, où $(x)_+$ est la partie positive de x. (Donc le montant du pay-off X à la maturité $t = 2$ est bien connue à $t = 1$.)

Problème 2 [8pts] Une banque américaine vend le 13/12/04 un call européen sur l'euro avec une date d'exercice de 3 mois et un prix d'exercice “at the money”. Le taux sans risque du $ est de 2,4% et celui de l'euro de 3,5%. Le taux de change spot est de 1,3218 $ pour 1 euro. La volatilité de l'euro est de 0,12. On vous demande de calculer les grecs et de les interpréter.

EISTI, Option IFI
16 Décembre 2003, Examen Complémentaire
Théorie des produits dérivés

Problème 1 [7pts]
Nous considérons un marché financier où il y a un actif sans risque, une action et un produit dérivé européen D sur l'action. Les prix de l'actif sans risque et de l'action sont donnés par le modèle Black-Scholes standard avec un taux d'intérêt annuel r, un drift annuel de l'action μ et une volatilité annuelle de l'action $\sigma > 0$. Le taux d'intérêt r et la volatilité σ satisfont

$$r = \frac{1}{2}\sigma^2.$$

Le produit dérivé a une maturité de T ans et son pay-off $f(x)$, en fonction du prix x de l'action à la maturité est donné par :

$$f(x) = \exp\left(\frac{a}{2\sigma^2}(\log x)^2\right), \quad \text{où} \quad a < \frac{1}{T}.$$

i) Déterminer le prix d'arbitrage de D à la date t, $0 \leq t \leq T$.
ii) Trouver un portefeuille de couverture du D.
iii) Soient $\sigma = 1$, $a = 1/2$ et $T = 1$. Le prix de l'action est 100€ à $t = 0$. Quelle est la composition à $t = 0$ du portefeuille de couverture ?

Indication : Soit $n_{\alpha,\beta}$ la densité de probabilité d'un variable aléatoire $\mathcal{N}(\alpha, \beta^2)$ et soit $c < \frac{1}{\beta^2}$. Alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}cy^2} n_{\alpha,\beta}(y)dy = \frac{1}{\sqrt{1 - c\beta^2}} \exp\left(\frac{c\alpha^2}{2(1 - c\beta^2)}\right).$$

EISTI, Option IFI
Examen du 27 Novembre 2003
Théorie des produits dérivés

Problème 1 [7pts]
Nous considérons un marché financier où il y a un actif sans risque, une action et un produit dérivé européen D sur l'action. Les prix de l'actif sans risque et de l'action sont donnés par le modèle Black-Scholes standard avec un taux d'intérêt annuel $r = 2\%$, un drift annuel de l'action $\mu = 8\%$, une volatilité annuelle de l'action $\sigma = 20\%$ et le prix actuel ($t = 0$) de l'action 50€. Le produit dérivé a une maturité de 1 an et son pay-off $f(x)$, en fonction du prix x de l'action à la maturité est donné par:

$$f(x) = (x - 40)^2.$$

i) Déterminer le prix d'arbitrage de D à la date t, $0 \leq t \leq 1$ an.
ii) Trouver un portefeuille de couverture du D. Quelle est sa composition à $t = 0$?
(Indication: Soit $n_{\alpha,\beta}$ la densité de probabilité d'un variable aléatoire $\mathcal{N}(\alpha,\beta^2)$, alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ay} n_{\alpha,\beta}(y) dy = e^{a\alpha + \frac{1}{2}(a\beta)^2}.$$

Problème 2 [7pts] Dans un marché financier arbitré, il y a un actif sans risque, 2 actions et une option binaire européenne dont les prix au temps t sont respectivement S_t^0, S_t^1, S_t^2 et A_t. Le taux d'intérêt annuel r, qui ici est stochastique et les prix satisfont

$$dS_t^0 = S_t^0 r_t dt,\ r_t = cW_t^1,$$

$$dS_t^1 = S_1^1(r_t dt + dW_t^1 + dW_t^2),$$
$$dS_t^2 = S_1^2(r_t dt + dW_t^1 - dW_t^2),$$

où $c \in \mathbb{R}$, $S_0^0 = 1$€, $S_0^1 = 100$€, $S_0^2 = 50$€ et où W^1 et W^2 sont deux mouvements Browniens indépendants.

L'option a une maturité de $T = 1$ an et son pay-off est $H(S_T^1 - 110)$, où

$$H(x) = 0 \text{ pour } x < 0 \text{ et } H(x) = 1 \text{ pour } x \geq 0.$$

i) Trouver un prix d'arbitrage A_t de l'option à l'instant t, $0 \leq t \leq 1$ an.
ii) Pour $c = 1$, trouver la valeur numérique de A_0.

Problème 3 [7pts] Considérons un marché financier à quatre périodes $t \in \{0,1,2,3,4\}$, composé d'un actif sans risque et d'une action. Si le prix de l'action au temps t est de s €, alors le prix à $t+1$ est us € ou bien ds €. Le processus du prix de l'action est un processus à incréments indépendants. Le taux sans risque est de $r = 10\%$, $d = 1/u$, $u = 1{,}25$ et le prix à $t = 0$ de l'action est de $S_0 = 100$ €.
i) Trouver le prix à $t = 0$ d'une option Americain binaire, sur l'action, avec pay-off à l'exercice de

$$H(x - 100),$$

si le prix de l'action est x à la date d'exercice.
ii) Doit on l'exercer avant l'échéance et si oui quand.
iii) Quelle est le prix à $t = 0$ de l'option binaire européenne correspondante?

EISTI, Option IFI
Examen du 17 Février 2003
Théorie des produits dérivés

Problème 1 [10pts]
Dans un marché financier il y a un actif sans risque et une action. Les prix de ces deux actifs sont donnés par le modèle Black-Scholes standard avec taux d'intérêt annuel $r = 3\%$, drift annuel de l'action $\mu = 6\%$, volatilité annuelle de l'action $\sigma = 20\%$ et prix actuel de l'action 100€. Dans ce marché il y a aussi un PUT européen sur l'action, de maturité 2 ans et de prix d'exercice 110€.

i) Trouver le prix actuel du PUT.

ii) Si dans un an ($t = 1$) le prix de l'action est de 90€, quelle est la composition à l'instant $t = 1$, en nombre unités de l'actif sans risque et de l'action, d'un portefeuille de couverture du PUT.

Problème 2 [10pts] Considérons un marché financier arbitré d'un actif sans risque, d'une action et des zéro coupons de maturité $T \geq 0$, dont les prix au temps t sont respectivement S_t^0, S_t^1 et $B(t,T)$. Les prix satisfont

$$dS_t^0 = S_t^0 r_t dt,$$

$$dS_t^1 = S_t^1 (r_t dt + \frac{1}{5} dW_t^*),$$

$$dB(t,T) = B(t,T)(r_t dt - \frac{1}{10}(T-t) dW_t^*),$$

où $S_0^0 = 1$€, $S_0^1 = 100$€, r est le taux d'intérêt annuelle (qui n'est pas constant ici) et W^* est un mouvement Brownian par rapport à une mesure martingale.

Aujourd'hui ($t = 0$) nous observons que le prix $B(0,2) = 905/1000$€. Après un an ($t = 1$) nous observons que le prix $B(1,2) = 942/1000$€ et que $S_1^1 = 110$€.

Trouver les prix forward et future à l'instant t d'une action, pour livraison à la date de 2 ans, dans les deux cas suivants :
i) $t = 0$
ii) $t = 1$.
Indication pour (*ii*) :

$$\frac{1}{B(t,T)} = \frac{B(0,t)}{B(0,T)} \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} tT(T-t) + \sigma(T-t)W_t^*\right)$$

$0 \leq t \leq T$.

EISTI, Option IFI
Contrôle du 25 Novembre 2002
Théorie des produits dérivés

Problème 1 [7pts]
Quel est le prix Black-Scholes actuel ($t = 0$) d'un PUT européen sur une action, de maturité $T = 3$ mois et de prix d'éxercice $K = 99$€. Le taux d'intérêt annuelle est $r = 3\%$, la volatilité annuelle de l'action est $\sigma = 10\%$ et le prix actuel de l'action est 100€.

Problème 2 [7pts] Considérons un marché financier à quatre périodes $t \in \{0,1,2,3,4\}$, composé d'un actif sans risque et d'une action. Si le prix de l'action au temps t est de s €, alors le prix à $t+1$ est us € ou bien ds €. Le processus du prix de l'action est un processus à incréments indépendants. Le taux sans risque est de $r = 4\%$, $d = 1/u$, $u = 1{,}2$ et le prix à $t = 0$ de l'action est de $S_0 = 15$ €. Trouver le prix à $t = 0$ d'un Put Americain, sur l'action, avec strike (prix d'exercice) $K = 13{,}5$ €. Doit on l'exercer avant l'échéance et si oui quand.

Problème 3 [7pts] Soit un marché financier de deux actifs et de temps discret, avec temps de transactions possibles $t \in \{0,1,\ldots,\bar{T}\}$, $\bar{T} \geq 1$. Les prix des actifs sont

$$S_t^0 = \exp(rt) \quad \text{et} \quad S_t^1 = S_0^1 \exp(rt - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t)$$

où $r \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et $S_0^1 > 0$. Par rapport à la mesure de probabilité a priori $W_0,\ldots,W_{\bar{T}}$ sont des variables aleatoires satisfaisant : (i) $W_0 = 0$, (ii) $W_{t+1} - W_t$ est distribuèe $\mathcal{N}(0,1)$ et (iii) $W_{t+1} - W_t$ est independant de $W_0,\ldots,W_t$.

Trouver une mesure martingale équivalent pour le prix S et trouver le prix risque neutre correspondant du produit dérivé européen avec pay-off $(S_{\bar{T}}^1)^a$, où $a \in \mathbb{R}$.

EISTI, Examen du 18 Février 2002
Théorie des produits dérivés

Problème 1 [7pts]
Soit P le prix "Black-Scholes" d'un put :

1.1. Quand le prix du sous-jacent augmente, toutes choses égales par ailleurs, le prix P
   a) diminue,
   b) ne change pas,
   c) augmente,
   d) cela dépend

1.2. Quand la date d'échéance augmente, toutes choses égales par ailleurs, le prix P
   a) diminue,
   b) ne change pas,
   c) augmente,
   d) cela dépend

1.3. Quand le taux d'intérêt augmente, toutes choses égales par ailleurs, le prix P
   a) diminue,
   b) ne change pas,
   c) augmente,
   d) cela dépend

1.4. Quand la volatilité augmente, toutes choses égales par ailleurs, le prix P
   a) diminue
   b) ne change pas,
   c) augmente,
   d) cela dépend

1.5. Quand le prix d'exercice augmente, toutes choses égales par ailleurs, le prix P
   a) diminue,
   b) ne change pas,
   c) augmente,
   d) cela dépend

1.6. Quand on passe du jour au lendemain, toutes choses égales par ailleurs, le prix P
   a) diminue,
   b) ne change pas,
   c) augmente,
   d) cela dépend

1.7. Quand la tendance augmente, toutes choses égales par ailleurs, le prix P
   a) diminue,
   b) ne change pas,
   c) augmente,
   d) cela dépend

Problème 2 [7pts]
Soit $S(t)$ le prix à t, où $0 \leq t \leq T$ et $T > 0$, d'une action dans le model B-S,

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)),$$

où $S(1) = 1$ euro, W est un mouvement Brownian, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Le taux d'intérêt est de $r \geq 0$. Trouver le prix $P(t)$ au temps t d'une option binaire Européen avec pay-off de 1 euro si $K_1 \leq S(T) < K_2$ et de 0 euro pour d'autre valeurs de $S(T)$.

Problème 3 [7pts]
Dans un marché financier à trois périodes $t \in \{0, 1, 2, 3\}$, il y a un actif sans risque et un actif risqué (une action). Le prix de l'action à $t = 0$ est 2592 euro. Si le prix de l'action au temps t est de s euro, alors le prix à $t + 1$ est $5s/4$ euro (si le prix monte) ou bien $s/2$ euro (si le prix baisse) et la probabilité objective que le prix monte est de $1/2$. Le taux d'intérêt est de 5%.

Trouver le prix à t d'un Put Asiatique sur une action, avec strike (prix d'exercice) $K = 1296$ euro et qui expire à $t = 3$. Ici le pay-off du Put Asiatique est de $(K - A(S))_+$ euro, où $A(S) = (S(2) + S(3))/2$.

EISTI, Option IFI
Contrôle du 3 Décembre 2001
Théorie des produits dérivés

Problème 1 [7pts]
Dans un marché sans opportunité d'arbitrage $\{M(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$, où $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$ et $T \geq 1$, est le processus du prix d'un actif sous-jacent. Pour l'espace de probabilité $(\Omega, \pi, \mathcal{F})$, M est un processus à incréments indépendants, $E_\pi(M(t+1)-M(t)) = 0$, $Var_\pi(M(t+1)-M(t)) = \sigma^2$, où $\sigma > 0$ est indépendant de t. Trouver un prix d'arbitrage à $t = 0$ du produit dérivé qui paye $(M(T))^2$ à $t = T$ et qui paye zéro à $0 \leq t \leq T-1$.

Problème 2 [7pts] Considérons un marché financier à quatre périodes $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, composé d'un actif sans risque et d'une action. Si le prix de l'action au temps t est de s FF, alors le prix à $t+1$ est us FF ou bien ds FF. Le processus du prix de l'action est un processus à incréments indépendants. Le taux sans risque est de 5%, $d = 0,8187$, $u = 1,2214$ et le prix à $t = 0$ de l'action est de 20 FF. Trouver le prix à tout instant d'un Put Americain avec strike (prix d'exercice) 18 FF sur l'action, ansi que le temps d'exercice optimal.

Problème 3 [7pts] Considérons un marché financier à trois périodes $t \in \{0, 1, 2, 3\}$, composé d'un actif sans risque et d'une action. Si le prix de l'action au temps t est de s FF, alors le prix à $t+1$ est us FF ou bien ds FF. Le processus de prix de l'action est un processus à incréments indépendants. Le taux d'intérêt $r \geq 0$ est constant. Soit $0 < d < 1+r < u$. Soit ω' l'etat donné par l'évolution suivant du prix de l'action : de temps 0 à 1 le prix monte, de 1 à 2 le prix baisse et de 2 à 3 le prix monte. Trouver un prix d'état β' de ω' et trouver un portefeuille de couverture du produit dérivé qui paye 1 FF dans l'état ω' et 0 FF dans les autres états.

EISTI
Examen du 30 Juin 2001, 3ème année Ingénierie Financière
Théorie Mathématique des Actifs Contingents,
Optimisation de Portefeuille

Problème 1 [10pts]
Vous devez faire un payement $L = 20494$ FF dans $T_0 = 18$ mois. Pour disposer exactement de cette somme, dans 18 mois, vous achetez aujourd'hui ($t = 0$) un portefeuille $\mathcal{P}$ composé de deux types d'obligations, les obligations A et les obligations B :

A est un zéro coupon de maturité 12 mois et qui verse 1 FF. Son prix de marché d'aujourd'hui est $P^A = 100/105$ FF,

B est une obligation à taux nominal constant 5%, capital nominal 100 FF, remboursement au pair in fine et de maturité 24 mois. Son prix de marché d'aujourd'hui est $P^B = 100$ FF.

Le portefeuille $\mathcal{P}$ est composé d'un nombre a d'obligations A et d'un nombre b d'obligations B.

1.1. [7pts] Soit r le taux d'intérêt (annuel) pour la période de 12 à 24 mois et soit $\Sigma_0(r)$, la somme de la valeur de marché à T_0 du portefeuille $\mathcal{P}$ et de la valeur à T_0 des flux versés par $\mathcal{P}$ après son achat réinvestis au taux r. Déterminer a et b de façon que $D = T_0$ et de façon que $L = \Sigma_0(5\%)$.
(N.B. Pour un taux annuel de r, le facteur d'actualisation sur 6 mois est de $(1 + r)^{1/2}$)

1.2. [3pts] Calculer $\Sigma_0(4.5\%)$ et $\Sigma_0(5.5\%)$ et comparer les résultats avec $\Sigma_0(5\%)$ pour vérifier que l'investissement est immunisé contre de petites variations de taux d'intérêt.

Problème 2 [10pts]
Vous investissez dans un marché financier où il y a une seule période, un actif sans risque (le compte en banque) et deux actifs risqués (les actions). Au début de la période, les actions coûtent 100 FF. Les prix de l'action 1 et de l'action 2, à la fin de la période, sont respectivement S_1 et S_2 FF. A la fin de la période, le marché se trouvera dans un seul des trois états ω_1, ω_2 et ω_3. Suivant le cas, le prix des actions sera :

$$S_1(\omega_1) = 200,\ S_1(\omega_2) = 62,\ S_1(\omega_3) = 50$$

et

$$S_2(\omega_1) = 62,\ S_2(\omega_2) = 100,\ S_2(\omega_3) = 150.$$

Vos probabilités subjectives (ou à priori) de ω_1, ω_2 et ω_3 sont respectivement 2/100, 48/100 et 50/100. Le taux d'intérêt est de 4%.

2.1. [5pts] On considère le portefeuille constitué d'une action 1 et d'une action 2. Calculer le prix au début de la période d'un Call Européen, sur ce portefeuille, de prix d'exercice (strike) de 200 FF, à la fin de la période.

2.2. [5pts] Trouver un portefeuille efficient dans le sens espérance variance d'un rendement espéré de $4,5\%$. Calculer son Value at Risk, au niveau de 5/100.

EISTI
Examen du 22 Février 2001
Théorie Mathématique des Actifs Contingents
Stratégies Dynamiques, Optimisation de Portefeuille, Contraintes de Risque

Problème 1 [8pts]
Soit C le prix "Black-Scholes" d'un call et soit $VaR_\alpha(X)$ le Value at Risk au niveau $\alpha \in]0,1[$ d'une variable X :

1.1. Quand le prix du sous-jacent augmente, toutes choses égales par ailleurs, le prix C
  a) diminue,
  b) ne change pas,
  c) augmente,
  d) cela dépend

1.2. Quand la date d'échéance augmente, toutes choses égales par ailleurs, le prix C
  a) diminue,
  b) ne change pas,
  c) augmente,
  d) cela dépend

1.3. Quand le taux d'intérêt augmente, toutes choses égales par ailleurs, le prix C
  a) diminue,
  b) ne change pas,
  c) augmente,
  d) cela dépend

1.4. Quand la volatilité augmente, toutes choses égales par ailleurs, le prix C
  a) diminue
  b) ne change pas,
  c) augmente,
  d) cela dépend

1.5. Quand le prix d'exercice augmente, toutes choses égales par ailleurs, le prix C
  a) diminue,
  b) ne change pas,
  c) augmente,
  d) cela dépend

1.6. Quand on passe d'un jour au lendemain, toutes choses égales par ailleurs, le prix C
  a) diminue,
  b) ne change pas,
  c) augmente,
  d) cela dépend

1.7. Quand la tendance augmente, toutes choses égales par ailleurs, le prix C
a) diminue,
b) ne change pas,
c) augmente,
d) cela dépend

1.8. Quand α augmente, $VaR_\alpha(X)$
a) diminue,
b) ne change pas,
c) augmente,
d) cela dépend

1.9. $VaR_\alpha(X) + VaR_\alpha(Y) - VaR_\alpha(X+Y)$ est
a) > 0,
b) $= 0$,
c) < 0,
d) cela dépend

Problème 2

Vous êtes gestionnaire de portefeuille dans un marché financier où il y a une seule période, un actif sans risque (le compte en banque) et deux actifs risqués (les actions). Au début de la période, les actions coûtent 1 F et leurs prix, à la fin de la période, sont respectivement S_1 et S_2 F. A la fin de la période, le marché se trouvera dans un seul des trois états ω_1, ω_2 et ω_3. Suivant le cas, le prix des actions sera :

$$S_1(\omega_1) = 214/100,\ S_1(\omega_2) = 64/100,\ S_1(\omega_3) = 34/100$$

et

$$S_2(\omega_1) = 64/100,\ S_2(\omega_2) = 64/100,\ S_2(\omega_3) = 184/100.$$

Les probabilités subjectives (ou a priori) de ω_1, ω_2 et ω_3 sont 2/100, 48/100 et 50/100 respectivement. Le taux d'intérêt est de 4%.

2.1. [5pts] On considère le portefeuille constitué d'une action 1 et d'une action 2. Il vaut donc 2F au début de la période. Calculer la valeur d'un put, sur ce portefeuille, de prix d'exercice $2,28$ à la fin de la période.

2.2. [8pts] Trouver un portefeuille efficient d'un rendement espéré de $4,5\%$:

a) Efficient dans le sens espérance variance; (i) Formuler mathématiquement le problème et la méthode de résolution que vous proposez. (ii) Faites les calculs numériques.

b) Efficient dans le sens espérance Value at Risk, au niveau de 5/100; (i) Formuler mathématiquement le problème et la méthode de résolution que vous proposez. (ii) Faites les calculs numériques.