



Faculté : Sciences

Département : Mathématiques

Domaine : Mathématiques

Filière : Master

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master

Thème:

Théorie spectrale d'un opérateur de Sturm-Liouville singulier

Présenté par : *Djerourou Mohamed Farès*

Encadrant : *Chorfi Lahcène*

Prof.

UBMA

Jury de Soutenance :

Djoudi Ahcène	Professeur	UMBA	Président
Chorfi Lahcène	Professeur	UBMA	Encadrant
Alem Leïla	Professeur	UBMA	Examineur

Année Universitaire : 2019/2020

Théorie spectrale d'un opérateur de Sturm-Liouville singulier

Mémoire de Master présenté par: Djerourou Mohamed Farès
Encadré par: Pr. L. Chorfi

Devant le jury
- Président: Pr. Djoudi AHCÈNE (UBMA)
- Examineur: Pr. Alem Leïla (UBMA)

juin 2020

Remerciements

Je tiens à exprimer mes remerciements à toutes les personnes qui m'ont soutenu dans la préparation de ce travail.

Premièrement je souhaite adresser mes remerciements au directeur de ce mémoire monsieur le *Professeur* Lahcène CHORFI, à qui je dois le mérite de m'avoir encadré, et ceci pour tout l'intérêt qu'il a porté à ce sujet, tous les conseils qu'il a prodigués, ainsi que sa disponibilité.

Je remercie également les membres du jury ici présents, Le président Monsieur Djoudi Ahcène et l'examineur Madame Leila Alem qui me font l'honneur d'examiner ce travail.

Je tiens aussi à remercier les membres de ma famille qui ont été et sont toujours là pour me soutenir, mes parents et mon frère.

Je remercie aussi mes amis, les plus proches, et mes camarades.

Bien sûr, je n'oublie pas de remercier les professeurs du département de Mathématiques et de l'université Badji-Mokhtar, qui m'ont enseigné durant les cinq années.

A toutes ces personnes j'exprime ma gratitude.

Résumé

Dans ce mémoire on étudie le spectre d'un opérateur autoadjoint A_p défini par un opérateur différentiel de type Sturm-Liouville sur le demi-axe $(0, +\infty)$, avec un coefficient discontinu. Grâce à la méthode de Titchmarsh on a obtenu la décomposition spectrale, c'est à dire un système complet de fonctions propres et de fonctions propres généralisées. On a obtenue aussi la résolvante de l'opérateur A_p . Le mémoire est illustré par des exemples numériques. On a considéré une application numérique à la résolution de l'équation $A_p u - zu = f$, les résultats obtenus sont en accord avec la théorie.

Abstract

In this report we study the spectrum of a self-adjoint operator A_p defined by a Sturm-Liouville differential operator on the semi-axis $(0, +\infty)$, with a discontinuous coefficient. Using Titchmarsh method we obtained the spectral decomposition, that is to say a complete system of eigenfunctions and of generalized eigenfunctions. We also obtained the resolvent of A_p . The text is illustrated by numerical examples. We have considered a numerical application for solving the equation $A_p u - zu = f$. The results obtained are in agreement with the theory.

ملخص

في هذه المذكرة ندرس طيف عامل محدد ذاتيا بواسطة عامل تفاضلي من نوع ستورم - ليوفيل المعروف على نصف المحور الحقيقي مع معامل غير مستمر. بفضل طريقة تيتسمارش حصلنا على التحلل الطيفي ، وهذا يعني نظام كامل من الوظائف الذاتية و من الوظائف الذاتية المعممة. كما حصلنا على حالة المؤثر بدلالة نشر فورييه المعمم لمذكرة موضحة بأمثلة عددية . لقد نظرنا في التطبيق العددي لحل معادلة تفاضلية ، النتائج التي تم الحصول عليها تتفق مع النظري

Table des matières

1	L'opérateur A_p	6
1.1	Introduction	6
1.2	Cadre fonctionnel	7
2	Spectre ponctuel de A_p	9
2.1	Fonctions de base	9
2.2	Fonction $m(\lambda)$ de Weyl-Titchmarsh	10
2.3	Courbes de dispersion	11
3	Mesure spectrale et spectre continu	16
3.1	Détermination du spectre continu	16
3.2	fonctions propres généralisées	16
3.3	Famille spectrale et transformation de Fourier généralisée	17
3.4	La résolvante	19
4	Application numérique. Résolution de l'équation $A_p u - zu = f$	20
4.1	Position du problème	20
4.2	Méthode des différences finies	20
4.3	Méthode spectrale	21
5	Conclusion et perspectives	25
5.1	Conclusion	25
5.2	Perspectives	25
6	Annexe: rappels de théorie spectrale	26
6.1	Opérateur auto-adjoint	26
6.2	Spectre	27
6.3	Décomposition spectrale	28
6.4	Théorie de perturbation	29

Chapitre 1

L'opérateur A_p

1.1 Introduction

Considérons l'équation de la propagation du son dans un milieu stratifié dans le demi-plan $\Omega = \mathbb{R}_+^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \quad t > 0 \quad (1.1)$$

avec les conditions mixtes

$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \quad u_t(0,x,y) = u_1(x,y), \quad u(t,x,0) = 0 \quad (1.2)$$

Où $Au = -c^2(y)\Delta u$ est l'opérateur de propagation avec la vitesse

$$c(y) = \begin{cases} c_1 & \text{si } 0 \leq y < h \\ c_2 & \text{si } y \geq h \end{cases} \quad (1.3)$$

avec $0 < c_1 < c_2$.

En utilisant la transformation de Fourier partielle par rapport à x , on se ramène à l'étude du spectre de l'opérateur A_p , $p > 0$, défini dans $L^2(0, +\infty)$ par

$$A_p v = c^2(y) \left(-\frac{d^2 v}{dy^2} + p^2 v \right) \quad (1.4)$$

de domaine

$$D(A_p) = \{H^2(0,\infty), v(0) = 0\} = H^2(0,\infty) \cap H_0^1(0,\infty)$$

A_p est un opérateur du type Sturm-Liouville singulier. La singularité provient du fait qu'il est défini sur l'intervalle non borné $(0, +\infty)$. Si on cherche une solution de (1.1) sous la forme d'une onde plane qui se propage dans la direction x ,

$$u(x,y,t) = v(y) \exp i(\omega t - px)$$

alors v est une fonction propre de A_p :

$$\begin{cases} A_p v = \lambda v, & \text{avec } \lambda = \omega^2 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

$V = \frac{\omega(p)}{p}$ s'appelle vitesse de groupe (de l'onde plane)

$$u_p(x, y, t) = v_p(y) \exp[ip(Vt - x)] \quad (1.5)$$

Si v_p est une vraie fonction propre ie appartient à $L^2(0, \infty)$, on dit que u_p est une onde guidée (confinée) par la couche $\{(x, y) / 0 < y < h\}$. Si $v_p \notin L^2(0, \infty)$ est une fonction propres généralisée, l'onde u_p est dite de radiation.

1.2 Cadre fonctionnel

Précisons le cadre fonctionnel. Dans la suite on notera la variable y par x . Soit $p > 0$ et soit $c(x)$ une fonction positive définie comme suit

$$c(x) = \begin{cases} c_1 & \text{si } 0 \leq x < h \\ c_2 & \text{si } x \geq h \end{cases} \quad (0 < c_1 < c_2)$$

A_p est un opérateur non borné défini dans l'espace de Hilbert $H = L^2(0, \infty)$ par

$$D(A_p) = \{v \in H^2(0, \infty), v(0) = 0\}$$

$$A_p(v) = c^2(x)(-v'' + p^2 v)$$

On muni H du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_H = \int_0^\infty uv \frac{dx}{c^2(x)}$$

Considérons la forme bilinéaire $a_p(u, v)$ définie dans $V = H_0^1(0, \infty)$ par

$$a_p(u, v) := (A_p u, v)_H = \int_0^\infty (u' v' + p^2 uv) dx, \quad u \in D(A_p), v \in V$$

La forme a_p est symétrique, elle est définie positive:

$$a_p(u, u) = \int_0^\infty ((u')^2 + p^2 u^2) dx \geq p^2 \int_0^\infty u^2 dx \geq c_1^2 p^2 \|u\|_H^2 \quad (1.6)$$

a_p est coercive:

$$a_p(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \quad (\alpha = \min(1, p^2)) \quad (1.7)$$

L'opérateur $A_p : D(A_p) \rightarrow H$ est bijectif par le théorème de Lax-Milgram, ce qui prouve que A_p est auto-adjoint (voir annexe, Théorème 6.1.1), c'est à dire:

$$A_p^* = A_p$$

Proposition 1.2.1 *Le spectre de A_p vérifie $\sigma(A_p) \subset [c_1^2 p^2, +\infty[$*

Preuve. Découle de l'inégalité (1.6). □

Plan du mémoire

Dans le prochain chapitre 2, on étudiera le spectre ponctuel. Le chapitre 3 concerne le spectre continu et la décomposition spectrale. Dans le chapitre 4, on considère une application numérique. Le mémoire s'achèvera par une conclusion et des perspectives. En annexe on a mis des rappels sur l'analyse spectrale.

Chapitre 2

Spectre ponctuel de A_p

2.1 Fonctions de base

Afin de caractériser le spectre de l'opérateur auto-adjoint A_p on va chercher la fonction de Weyl-Titchmarsh $m(\lambda)$ ([4],[5]), qui est construite à l'aide des fonctions de base

$$\begin{cases} A_p \varphi = \lambda \varphi, & \varphi(0) = 1, & \varphi'(0) = 0 \\ A_p \chi = \lambda \chi, & \chi(0) = 0, & \chi'(0) = 1 \end{cases}$$

Les fonctions φ et χ sont définies par morceaux,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & 0 \leq x \leq h \\ \varphi_2(x), & x \geq h \end{cases}$$

$$\chi(x) = \begin{cases} \chi_1(x), & 0 \leq x \leq h \\ \chi_2(x), & x \geq h \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} -\varphi_1'' + \alpha^2 \varphi_1 = 0, & \text{avec } \alpha^2 = p^2 - \frac{\lambda}{c_1^2} \\ -\varphi_2'' + \beta^2 \varphi_2 = 0, & \text{avec } \beta^2 = p^2 - \frac{\lambda}{c_2^2} \end{cases}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} ch(\alpha x), & 0 \leq x \leq h \\ c_1 e^{\beta x} + c_2 e^{-\beta x}, & x \geq h \end{cases} \quad (2.1)$$

Comme φ et χ sont de classe $C^1[0, \infty)$ puisque $H^2 \subset C^1$, on a les conditions de transmission

$$\varphi_1(h) = \varphi_2(h) \quad \text{et} \quad \varphi_1'(h) = \varphi_2'(h)$$

on trouve

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{2\beta} e^{-\beta h} (\beta ch(\alpha h) + \alpha sh(\alpha h)) \\ \frac{1}{2} e^{\beta h} (ch(\alpha h) - \alpha sh(\alpha h)) \end{cases}$$

De la même manière on trouve

$$\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{sh(\alpha x)}{\alpha}, & 0 \leq x \leq h \\ c_3 e^{\beta x} + c_4 e^{-\beta x}, & x \geq h \end{cases} \quad (2.2)$$

où c_3 et c_4 sont données par

$$\begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\beta h} \left(\frac{sh(\alpha h)}{\alpha} + \frac{ch(\alpha h)}{\beta} \right) \\ \frac{1}{2} e^{\beta h} \left(\frac{sh(\alpha h)}{\alpha} - \frac{ch(\alpha h)}{\beta} \right) \end{cases}$$

2.2 Fonction $m(\lambda)$ de Weyl-Titchmarsh

La fonction de Weyl-Titchmarsh (W-T) $m(\lambda)$, pour λ de partie imaginaire strictement positive est donnée par ([5, 9])

$$m(\lambda) = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{\varphi_2(x, \lambda)}{\chi_2(x, \lambda)} \quad (2.3)$$

Remarquons que si $\lambda = s + i\epsilon$, avec $s > c_2^2 p^2$ et $z = p^2 - \frac{\lambda}{c_2^2}$ alors $\Re(z) < 0$ et $\Im(z) < 0$ et par suite $\Re(\sqrt{z}) > 0$, ($\beta = \sqrt{z}$). Ce qui nous donne en remplaçant par les formules (2.1) et (2.2)

$$m(\lambda) = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{c_1 e^{\beta x} + c_2 e^{-\beta x}}{c_3 e^{\beta x} + c_4 e^{-\beta x}} = -\frac{c_1(\lambda)}{c_3(\lambda)}$$

Finalement on trouve que $m(\lambda)$ pour $\Im(\lambda) > 0$ est explicitement donnée par

$$m(\lambda) = -\alpha \frac{\beta ch(\alpha h) + \alpha sh(\alpha h)}{\beta sh(\alpha h) + \alpha ch(\alpha h)}$$

avec

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{cases} \sqrt{p^2 - \frac{\lambda}{c_1^2}} \\ \sqrt{p^2 - \frac{\lambda}{c_2^2}} \end{cases}$$

$m(\lambda)$ est méromorphe dans le plan \mathbf{C} muni de la coupure $[c_2^2 p^2, +\infty[$. Les valeurs propres de l'opérateur A_p sont exactement les pôles de la fonction $m(\lambda)$, situés sur l'intervalle $]c_1^2 p^2, c_2^2 p^2[$. Donc coïncident avec les racines de l'équation caractéristique

$$th(\alpha h) = -\frac{\alpha}{\beta}$$

Cette équation est équivalente à l'équation

$$F(p, \lambda) := c_2 \xi_2(\lambda) \sin(\xi_1(\lambda) h) + c_1 \xi_1(\lambda) \cos(\xi_2(\lambda) h) = 0 \quad (2.4)$$

avec $\xi_1(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{c_1^2} - p^2}$ et $\xi_2(\lambda) = \sqrt{p^2 - \frac{\lambda}{c_2^2}}$.

Exemple 2.2.1 Avec les paramètres:

$$h = 1, c_1 = 1, c_2 = 2, p = 3,$$

on a deux valeurs propres $\lambda_1 = 14.519$, $\lambda_2 = 32.913$, voir FIG 2.1.

Les fonctions propres χ_k associées à λ_k sont données par

$$\chi_k = \begin{pmatrix} \chi_{1k}(x) \\ \chi_{2k}(x) \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha_k x)}{\alpha_k} \\ -\frac{1}{\beta_k} \cos(\alpha_k h) e^{-\beta_k(x-h)} \end{cases}$$

avec $\alpha_k = \xi_1(\lambda_k)$ et $\beta_k = \xi_2(\lambda_k)$. Le tracé des fonctions propres est montré sur la figure 2.2

2.3 Courbes de dispersion

Le spectre de A_p est composé d'une partie discrète et d'une partie continue :

$$\sigma_d = \{c_1^2 p^2 < \lambda_1(p) < \dots < \lambda_N(p) < c_2^2 p^2\}, \quad \sigma_c = [c_2^2 p^2, +\infty[$$

Les courbes $p \rightarrow \lambda_m(p)$ sont appelées *courbes de dispersion*. Elle sont définies lorsque $p > p_m$, les nombres p_m , $m = 1, \dots, N(p)$ appelés seuils (d'apparition).

On a établi que $\lambda_m(p)$ sont les racines de l'équation caractéristique (2.4):

$$\operatorname{tg}(h\sqrt{\lambda - c_1^2 p^2}) = -\frac{c_1}{c_2} \sqrt{\frac{c_2^2 p^2 - \lambda}{\lambda - c_1^2 p^2}}, \quad \lambda \in]c_1^2 p^2, c_2^2 p^2[\quad (2.5)$$

La suite des seuils est $p_m = \frac{(m+0.5)\pi}{\sqrt{c_2^2 - c_1^2}}$, $m = 0, 1, 2, \dots$

Principe du Min-Max

On note \mathcal{V}_m la famille des sous-espaces de \mathcal{V} de dimension m . Posons

$$U_m(p) = \min_{V \in \mathcal{V}_m} \left(\max_{v \in V} \frac{a_p(v, v)}{|v|^2} \right) \quad (2.6)$$

Alors on a la proposition

Proposition 2.3.1 Si $U_m(p) < c_2^2 p^2$, alors A_p possède m valeurs propres

$$\lambda_k(p) = U_m(p), \quad \text{pour tout } k \leq m$$

Preuve. Lorsque l'injection $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$ est compacte, (c'est à dire A est un opérateur non borné mais à inverse compacte), vous trouverez une démonstration dans le livre ([2]). Lorsque le spectre de A est mixte, la formule est valable pour les valeurs propres discrètes (inférieures à la borne inférieure du spectre essentiel, on suppose que A est borné inférieurement: $a(u,u) \geq m |u|_{\mathcal{H}}^2$, voir[3]). ■

Théorème 2.3.1 *Les courbes de dispersion $p \rightarrow \lambda_m(p)$ sont croissantes et continues.*

Preuve. Rappelons que

$$a_p(u,v) = (A_p(u),v)_H = \int_0^\infty (u'v' + p^2 uv)dx,$$

et

$$\|u\|_H^2 = \int_0^\infty |u|^2 \frac{dx}{c^2}$$

Supposons que $\|u\|_H = 1$. Posons $Q_p(u) = \frac{a_p(u,u)}{\|u\|_H}$, alors

$$Q_p(u) = \int_0^\infty |u'|^2 dx + p^2 \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^+)}$$

u étant fixé, la fonction $Q_p(u)$ est croissante strictement, donc pour tout m fixé, les fonctions $U_m(p)$ définie par

$$U_m(p) = \min(\max Q_p(u))$$

sont aussi croissantes. En effet si pour tout u dans V nous avons $Q_1(u) \leq Q_2(u)$, alors $U_m^1 \leq U_m^2$.

Supposons maintenant que $p_1 < p_2$, puisque $\|u\|_{L^2} \leq c_2 \|u\|_H$ on déduit

$$Q_{p_2}(u) - Q_{p_1}(u) \leq c_2^2 (p_2 - p_1)^2$$

Ce qui entraîne

$$\lambda_m(p_2) - \lambda_m(p_1) \leq K(p_2 - p_1)$$

Avec $K = c_2^2(p_2 + p_1)$. Donc la fonction $p \rightarrow \lambda_m(p)$ est localement Lipschitzienne c'est à dire continue. ■

Proposition 2.3.2 *Pour tout m fixé,*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\lambda_m(p)}{p^2} = c_1^2$$

Preuve. $\forall u, \|u\|_H = 1$, on a

$$\frac{Q_p(u)}{p^2} = c_1^2 + \frac{1}{p^2} \int_0^\infty |u'|^2 dx + \int_h^\infty \left[1 - \left(\frac{c_1}{c_2}\right)\right] |u|^2 dx \quad (2.7)$$

Ce qui montre que la fonction $p \rightarrow \mu_m(p) = \frac{\lambda_m(p)}{p^2}$ est décroissante. Posons $l = \lim_{p \rightarrow \infty} \mu_m(p)$, alors $c_1^2 \leq l \leq c_2^2$ et l'équation caractéristique (2.5) s'écrit

$$\operatorname{tg}(p\sqrt{\mu_m(p) - c_1^2}h) = -\frac{c_1}{c_2} \sqrt{\frac{c_2^2 - \mu_m(p)}{\mu_m(p) - c_1^2}}$$

Lorsque p tend vers l'infini on obtient

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \operatorname{tg}(ph\sqrt{l - c_1^2}) = -\frac{c_1}{c_2} \sqrt{\frac{c_2^2 - l}{l - c_1^2}}.$$

Si $l > c_1^2$ on obtient une contradiction (car la fonction $\operatorname{tg}(x)$ n'ayant pas de limite à l'infini). Donc $l = c_1^2$ CQFD. ■

Remarque 2.3.1 *Voici une autre démonstration instructive utilisant le principe du Min – Max. Partons de l'égalité (2.7) et considérons la suite de fonctions propres $\varphi_k \in H_0^1(0, h)$ vérifiant, pour tout $k \leq m$, m étant fixé:*

$$-\varphi'' = \nu^2 \varphi, \quad \varphi(0) = \varphi(h)$$

Celle fonction s'écrit

$$\varphi_k(x) = \alpha_k \sin(\nu_k x), \quad \text{avec } \nu_k = \frac{k\pi}{h}, \text{ et } \int_0^h |\varphi_k|^2 dx = c_1^2$$

Maintenant on considère la fonction $u \in V = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m], u = \sum_{k=1}^m u_k \varphi_k$ tel que $\|u\|_{L^2(0, h)}^2 = \sum u_k^2 = c_1^2$, de telle sorte que $\|u\|_H = \frac{1}{c_1} \|u\|_{L^2(0, h)} = 1$.

Si on prolonge φ_k par 0 hors de l'intervalle $(0, h)$, alors $V \in \mathcal{V}_m$ et l'équation 2.7 devient

$$\forall u \in V, \|u\|_H = 1, \quad \frac{Q_p(u)}{p^2} = c_1^2 + \frac{1}{p^2} \int_0^\infty |u'|^2 dx \quad (2.8)$$

$$\text{mais } \int_0^h |u'|^2 dx = \sum_{k=1}^m u_k^2 \nu_k^2 \leq \nu_m^2 \sum_{k=1}^m u_k^2 \leq \frac{c_1^2 \pi^2}{h^2} m, \text{ donc}$$

$$\forall u \in V, \|u\|_H = 1, \quad \frac{Q_p(u)}{p^2} \leq c_1^2 + \frac{c_1^2 \pi^2 m^2}{h^2 p^2} \quad (2.9)$$

Le principe du min-max (2.6) entraîne alors

$$\mu_m(p) = \frac{\lambda_m(p)}{p^2} \leq c_1^2 + \frac{c_1^2 \pi^2 m^2}{h^2 p^2}$$

et

$$l = \lim_{p \rightarrow \infty} \mu_m(p) \leq c_1^2$$

ce qui prouve $l = c_1^2$. Le comportement des courbes de dispersion est illustré dans la figure 2.3

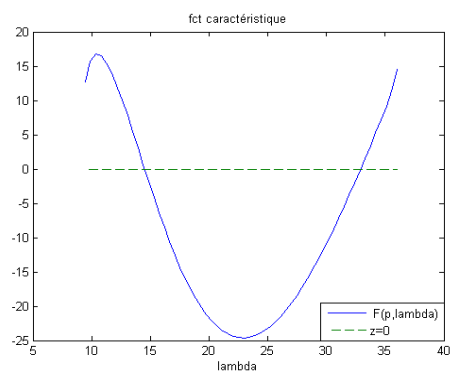


FIG. 2.1 – *Fonction caractéristique, $p = 3$*

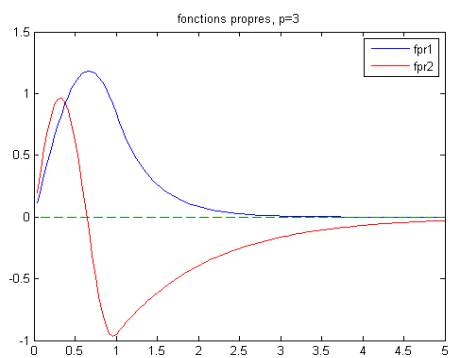


FIG. 2.2 – *Fonctions propres, $p = 3$*

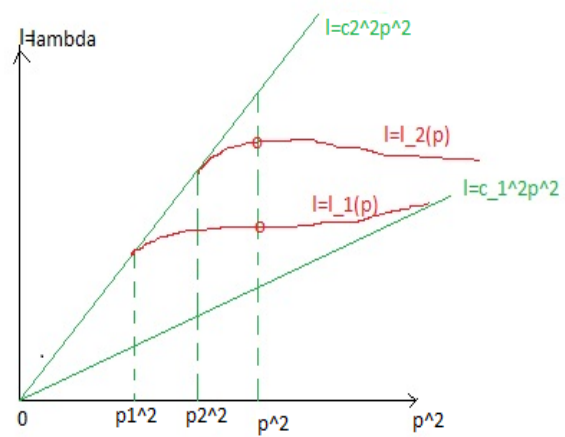


FIG. 2.3 – *Courbes de dispersion: illustration*

Chapitre 3

Mesure spectrale et spectre continu

3.1 Détermination du spectre continu

On s'intéresse maintenant au spectre continu de l'opérateur A_p .

Théorème 3.1.1 *Le spectre continu est*

$$\sigma_c = [c_2^2 p^2, +\infty[$$

Preuve. Soit $\lambda > c_2^2 p^2$. On utilise le critère de Weyl (voir Annexe, théorème 6.2.2). On construit une suite singulière (u_n) ie $u_n \in D(A_p)$ tel que

$$\|u_n\| = 1, \quad u_n \rightharpoonup 0 \text{ et } \|A_p u_n - \lambda u_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

On pose

$$u_n(\lambda, x) = c_n \chi(\lambda, p, x) \tau_n(x)$$

où $\chi(\lambda, p, x)$ est une fonction propre généralisée (voir formule (3.1)) et $\tau_n(x) = \tau(\frac{x}{n})$ une fonction de troncature ($\tau \in C^2(0,1)$, $\tau(x) = 1$ si $0 < x < 1/2$, $\tau(x) = 0$ si $x > 1/2$), c_n est une constante de normalisation. \square

Théorème 3.1.2 A_p n'a pas de valeurs propres supérieures à la borne $c_2^2 p^2$, c'est à dire

$$\sigma_e(A_p) = \sigma_c(A_p) = [c_2^2 p^2, +\infty[$$

Preuve. Si $\lambda > c_2^2 p^2$, l'équation $A_p u = \lambda u$ n'a pas de solution $u \in D(A_p)$ non nulle. \square

3.2 fonctions propres généralisées

Soit $\lambda > c_2^2 p^2$. L'équation $A_p u = \lambda u$, $u(0) = 0$ possède une solution $u \neq 0$, bornée, qui appartenant à $H_{loc}^2(0, \infty)$. Cette solution s'appelle fonction propre généralisée (FPG). Elle est donnée par l'expression

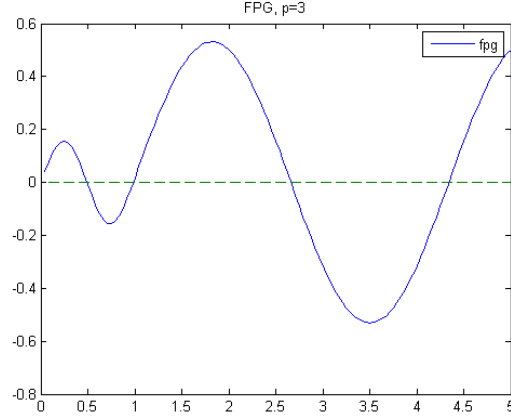


FIG. 3.1 – fonction $\chi(\lambda, x)$, $\lambda = 50$, $p = 3$

$$\chi_0(\lambda, x) = \begin{cases} \frac{\sin(\xi_1 x)}{\xi_1}, & x \leq h \\ \cos(\xi_2(x-h)) \frac{\sin(\xi_1 h)}{\xi_1} + \sin(\xi_2(x-h)) \frac{\cos(\xi_1 h)}{\xi_2}, & x \geq h \end{cases} \quad (3.1)$$

avec

$$\begin{pmatrix} \xi_1(\lambda) \\ \xi_2(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\lambda}{c_1^2} - p^2} \\ \sqrt{\frac{\lambda}{c_2^2} - p^2} \end{pmatrix}$$

Exemple 3.2.1 Avec les paramètres $h = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $p = 3$ et $\lambda = 50$, on a la FPG représentée sur la figure 3.1

3.3 Famille spectrale et transformation de Fourier généralisée

D'après la méthode développée dans le livre [4], la fonction spectrale d'un problème de Sturm-Liouville, du type point-limite à l'infini, s'écrit à l'aide de la fonction de W-T $m(\lambda)$ comme suit

$$\varrho(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^t \Im(m(s + i\epsilon)) ds$$

La limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ dans la formule (2.3) donne

$$\Im m(s + i0) = \frac{\xi_1^2 \xi_2}{\xi_2^2 \sin^2(\xi_1 h) + \xi_1^2 \cos^2(\xi_1 h)} \quad \text{si } s > c_2^2 p^2;$$

avec $\xi_1^2(s) = \frac{s}{c_1^2} - p^2$ et $\xi_2^2(s) = \frac{s}{c_2^2} - p^2$.
 $m(s)$ a des pôles sur l'intervalle $c_1^2 p^2 < s < c_2^2 p^2$, qui coïncident avec les valeurs propres. La formule de Cauchy entraîne

$$\frac{d\varrho}{dt}(s) = \sum_{k=1}^N r_k \delta(s - s_k) + \frac{1}{\pi} \Im m(s) \text{Id}_{[c_2^2 p^2, \infty[}$$

avec

$$r_k = \text{Res}(m(s), s_k) = \frac{2c_1^2 \xi_1^2(s_k) \xi_2(s_k)}{1 + \xi_2(s_k) h}.$$

La fonction spectrale $\varrho(s)$ est croissante, discontinue aux valeurs propres $\{s_k\}$ et continue, strictement croissante, si $s \in \sigma_c = [c_2^2 p^2, \infty[$.

La famille spectrale E_t est donnée par l'intégrale de Riemann-Stieljes [5]

$$E_t g(x) = \int_{-\infty}^t \chi(x, s) h(s) d\varrho(s)$$

l'intégrale converge dans $L^2(0, \infty)$ quand $t \rightarrow +\infty$, avec

$$h(s) = \int_0^\infty \chi(x, s) g(y) \frac{dx}{c^2(x)} \quad (3.2)$$

convergente dans $L_\varrho^2(0, \infty)$. g une fonction de $L^2(0, \infty)$.

Par suite, lorsque $t \rightarrow \infty$ on a la décomposition spectrale suivante

$$g = \lim_{t \rightarrow \infty} E_t g(x) = \int_{-\infty}^\infty \chi(x, s) h(s) d\varrho(s) \quad (3.3)$$

donc

$$g = \sum_{k=1}^{N_p} r_k \langle \chi_k, g \rangle \chi_k + \int_{c_2^2 p^2}^{+\infty} \langle \chi_0(x, s), g \rangle \chi_0(x, s) \varrho'(s) ds \quad (3.4)$$

avec la Transformée de Fourier (généralisée)

$$\mathcal{F}g(s) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_k g(s) \\ \mathcal{F}_0 g(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{r_k} \langle \chi_k(\cdot, s), g \rangle \\ \langle \chi_0(\cdot, s), g \rangle \end{pmatrix}$$

Remarquons que $\|\chi_k\|^2 = \frac{1}{r_k}$ ([9]).

Le premier terme dans (3.4), $\sum_{k=1}^{N_p} r_k \langle \chi_k, g \rangle \chi_k$ ne pose pas de problème car N_p est fini, en ce qui concerne l'intégrale impropre elle converge dans $L^2(0, \infty)$ quand $t \rightarrow +\infty$.

On a le théorème suivant ([5]).

Théorème 3.3.1 *Pour tout $g(x)$ dans $L^2(0, \infty)$, il existe un élément $h(s)$ dans L_ρ^2 tel que l'équation (3.3) est vraie. Inversement, pour tout $h(s)$ dans $L_\rho^2(0, \infty)$, il existe un élément $g(x)$ dans $L^2(0, \infty)$ tel que l'équation (3.2) est satisfaite. La transformation $\mathcal{F} : g \rightarrow h$ est un isomorphisme isométrique de $L^2(0, \infty)$ sur $L_\rho^2(0, \infty)$.*

3.4 La résolvante

Soit $z \in \rho(A_p)$, ensemble résolvant. La résolution de l'équation $A_p u - zu = f$ est équivalente à l'équation

$$\mathcal{F}(A_p u) - z\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(f),$$

la décomposition spectrale (3.4) montre que $\mathcal{F}(A_p u) = \lambda\mathcal{F}(u)$, d'où

$$\mathcal{F}(u) = \frac{\mathcal{F}(f)}{\lambda - z}$$

c'est à dire

$$u = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\mathcal{F}(f)}{\lambda - z} \right)$$

qui s'écrit d'après la décomposition spectrale (3.4)

$$u := R_z(f) = \sum_{k=1}^{N_p} r_k \frac{\langle \chi_k, f \rangle}{s_k - z} \chi_k + \int_{c_2^2 p^2}^{+\infty} \frac{\langle \chi_0(x, s), f \rangle}{s - z} \chi_0(x, s) \varrho'(s) ds \quad (3.5)$$

Remarque 3.4.1 Si $z = \lambda \in]c_2^2; +\infty[$, on a le principe d'absorption limite ([6, 7], [8]): la limite

$$R(\lambda) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} R(\lambda + i\epsilon)$$

existe pour la topologie de la norme de $\mathcal{L}(L_s^2(\mathbf{R}_+), H_{-s}^2(\mathbf{R}_+))$, $s > \frac{1}{2}$, où

$$L_s^2(\mathbf{R}_+) = \{u \in L_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}_+), (1 + x^2)^{s/2} u \in L^2(\mathbf{R}_+)\},$$

$$H_s^2(\mathbf{R}_+) = \{u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}_+), u', u'' \in L_s^2(\mathbf{R}_+)\}$$

avec la définition

Définition 3.4.1 $u \in L_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}^+)$ si, pour tout $M > 0$, $u \in L^2([0, M])$.

Chapitre 4

Application numérique. Résolution de l'équation $A_p u - zu = f$

4.1 Position du problème

Dans ce chapitre on s'intéresse à la résolution de l'équation

$$c^2(x)(-u'' + p^2 u) - zu = f(x), \quad x > 0, \quad u(0) = 0 \quad (4.1)$$

avec $z \in \mathbb{R}$ une valeur régulière ou située sur le spectre continu, ie $z > c_2^2 p^2$.

Nous choisissons $f(x)$ qui décroît vers 0 à l'infini. Nous allons considérer deux exemples

Exemple 4.1.1 $f_1(x) = \sin(\pi x) \exp(-x)$

Exemple 4.1.2 $f_2(x)$ la fonction "chapeau"

$$f_2(x) = \begin{cases} x - 1, & 1 < x < 2 \\ 3 - x, & 2 < x < 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On va utiliser les paramètres utilisés dans le chapitre 2: $h = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $p = 3$.

4.2 Méthode des différences finies

Discrétisation

On cherche la solution de l'équation (4.1) par la méthode des différences finies centrées avec un maillage uniforme de pas h . On cherche la solution u

dans l'intervalle borné $[0, xm]$ avec les conditions de Dirichlet homogènes $u(0) = 0$, $u(xm) = 0$. Considérons le maillage $\{x_i = ik, i = 1, \dots, n\}$ de pas $k = \frac{xm}{n+1}$. On pose

$$u_i = u(x_i), c_i = c(x_i), F_i = \frac{f(x_i)}{c_i^2}$$

Alors l'équation discrète associée à (4.1) s'écrit

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + (p^2 - z)u_i = F_i$$

Ce qui nous donne un système matriciel $AU = F$ avec A une matrice tridiagonale symétrique:

$$A_{i,i-1} = A_{i,i+1} = -\frac{1}{h^2}$$

et

$$A_{i,i} = \frac{2}{h^2} + p^2 - z$$

Dans la figure 4.1, on compare la solution exacte u_{ex} (de l'équation $A_p u = f_3$) avec la solution approchée u_{dif} . On a utilisé les données suivantes:

$$u_{ex}(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & si \quad 0 < x < 1 \\ y = \exp(1-x) \sin(\pi x) & si \quad x > 1 \end{cases}$$

et le second membre

$$f_3(x) = \begin{cases} (\pi^2 + p^2) \sin(\pi x) & si \quad 0 < x < 1 \\ y = [(\pi^2 - \pi + p^2) \sin(\pi x) + 2\pi \cos(\pi x)] \exp(1-x) & si \quad x > 1 \end{cases}$$

4.3 Méthode spectrale

La méthode utilise la formule (3.5) de la résolvante. Dans ce cas on a deux valeurs propres. L'intégrale est calculée sur l'intervalle $[c_2^2 p^2, B]$ avec une borne B assez grande (mais pas trop grande). On a obtenu les courbes suivantes (comparées avec la solution par Diff-Finies) pour différentes valeurs de $z = 0, 20, 50$ (FIG 4.2; FIG 4.3; FIG 4.4 respectivement). La figure 4.5 montre les courbes obtenues pour l'exemple 2 (avec f_2 la fonction chapeau et $z = 0$).

Commentaires

- On remarque que la solution obtenue par la méthode spectrale est bonne pour z une valeur régulière inférieure à la première valeur propre λ_1 , pour $z = 0$ et $B = 100$, on la FIG 4.2.
- Si $\lambda_1 < z < \lambda_2$ la solution est toujours bonne (FIG 4.3).
- Si $z > c_2^2 p^2$, la solution est bonne à condition de choisir une borne B assez grande, dans la FIG 4.4) on a pris $B = 400$.
- Si f est un chapeau (à support compact), la solution est bonne sur le support de f (FIG 4.5), on remarque des oscillations sur $[0, 1]$, ici on a choisi $B = 150$.

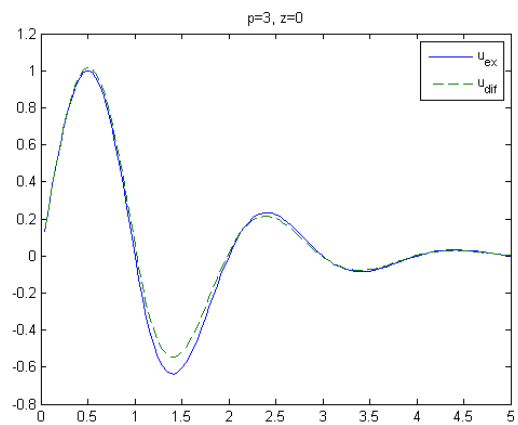


FIG. 4.1 – Solution u_{dif} et u_{ex} pour , $p = 3$, $z = 0$

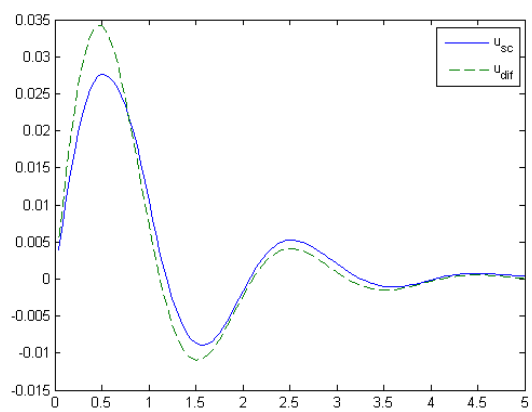


FIG. 4.2 – Solution u_{sc} et u_{dif} pour , $p = 3$, $z = 0$

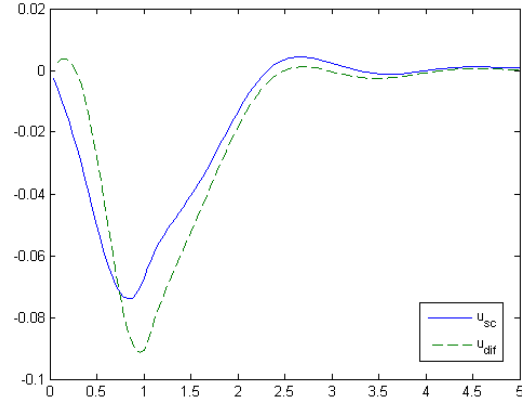


FIG. 4.3 – Solution u_{sc} et u_{dif} pour , $p = 3$, $z = 20$

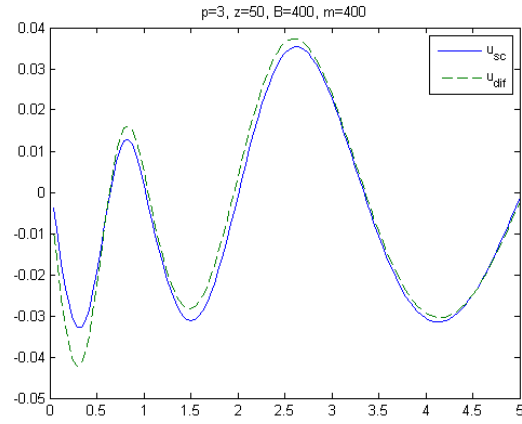


FIG. 4.4 – Solution u_{sc} et u_{dif} pour , $p = 3$, $z = 50$

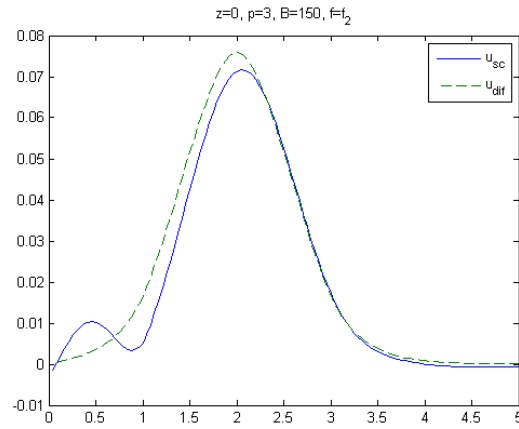


FIG. 4.5 – Solution u_{sc} et u_{diff} pour , $p = 3$, $z = 0$, $f = f_2$

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

5.1 Conclusion

Dans ce mémoire on a étudié le spectre d'un opérateur autoadjoint défini par un opérateur différentiel, de type Sturm-Liouville sur le demi-axe, avec un coefficient discontinu.

- Grâce à la méthode de Titchmarsh on a obtenu la décomposition spectrale, c'est à dire un système complet de fonctions propres et de fonctions propres généralisées.
- On a considéré une application numérique, les résultats obtenus pour le calcul de la résolvante $R(z) = (A_p - zI)^{-1}$ sont en accord avec la théorie pour $z \in \mathbb{R}$ différente d'une valeur propre.

5.2 Perspectives

Comme perspectives on peut étudier les questions suivantes.

- 1- Généraliser les résultats théoriques pour l'opérateur

$$B_p u = c^2(x)[-u'' + p^2 u]$$

avec une fonction $c(x)$ variable mais proche de $c_0 = (c_1, c_2)$, dans le sens suivant:

$$\forall x > 0, \quad |c(x) - c_0| \leq \frac{C}{(1+x)^\alpha}, \text{ pour un certain } \alpha > 1.$$

- 2- Généraliser la méthode de Fourier (connue dans le cas $c(x) = c_2$) pour représenter la solution de l'équation des ondes

$$u_{tt} = B_p u + f(t, x); \quad x > 0, t > 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad u(0, t) = 0$$

Chapitre 6

Annexe: rappels de théorie spectrale

6.1 Opérateur auto-adjoint

Pour les notions de base on peut consulter le cours pédagogique [1].

Définition 6.1.1 Soit H un espace de Hilbert et $D(A)$ un sous espace dense dans H . Un opérateur linéaire $A : D(A) \rightarrow H$ est dit non bornée.

Remarque 6.1.1 Si A est continue, alors il est défini partout (prolongeable sur H) en une application $\tilde{A} \in \mathcal{L}(H)$

Opérateur adjoint et opérateur auto-adjoint

Définition 6.1.2 On appelle opérateur adjoint de A , l'opérateur $A^* : D(A^*) \rightarrow H$ défini par:

$$D(A^*) = \{u \in H, \text{ tq } \exists w \in H; \forall v \in D(A), (v, Au) = (w, v)\}, \quad A^*u = w$$

On a

$$\langle u, Av \rangle = \langle A^*u, v \rangle, \quad \forall u \in D(A^*), \forall v \in D(A)$$

- $A : D(A) \rightarrow H$ est dit auto-adjoint si $A = A^*$

Opérateur symétrique

Définition 6.1.3 $(A, D(A))$ est dit symétrique si $D(A) \subset D(A^*)$. C'est à dire que $A^* \supset A$.

Théorème 6.1.1 Si A est un opérateur symétrique inversible (A injectif et $R(A) = H$), alors $A = A^*$.

6.2 Spectre

Ensemble résolvant et résolvante de A

Définition 6.2.1 *Un nombre complexe λ est une valeur régulière si $A_\lambda = A - \lambda I$ est bijectif et A_λ^{-1} est continue. L'ensemble des valeurs régulières $\rho(A)$ est appelé ensemble résolvant. La résolvante de A est définie par:*

$$\lambda \rightarrow R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}; \lambda \in \rho(A) \quad (6.1)$$

Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 6.2.2 *Un nombre λ s'appelle valeur propre de l'opérateur A si l'équation $Ax = \lambda x$ admet des solutions non nulles. Un tel vecteur x est alors appelé vecteur propre de A .*

Spectre de A

Définition 6.2.3 *Le spectre d'un opérateur A noté $\sigma(A)$ est défini comme le complémentaire de l'ensemble résolvant $\rho(A)$ dans \mathbf{C} . Noté*

$$\sigma(A) = \mathbf{C} \setminus \rho(A)$$

Spectre d'un opérateur auto-adjoint

Théorème 6.2.1 – *Le spectre d'un opérateur auto-adjoint est réel.*
– *Deux sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.*

Spectre discret

Définition 6.2.4 *On appelle spectre discret $\sigma_d(A)$ d'un opérateur A l'ensemble des valeurs propres λ isolées et de multiplicité finie.*

Spectre essentiel

Définition 6.2.5 *Soit A un opérateur auto-adjoint. Le spectre essentiel de A noté $\sigma_{ess}(A)$ est le complémentaire du spectre discret ie $\sigma_{ess}(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_d$.*

Théorème 6.2.2 (Critère de Weyl) $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ si et seulement si il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D(A)$ tel que

$$\|u_n\| = 1; \quad u_n \rightharpoonup 0, \quad \|Au_n - \lambda u_n\| \rightarrow 0$$

Principe du min-max

Définition 6.2.6 On définit le quotient de Rayleigh par

$$\mathcal{R}_A(u) = \frac{\langle Au, u \rangle_H}{\|u\|_H^2}, \quad \forall u \in D(A), u \neq 0$$

On pose alors pour tout entier $m \geq 1$:

$$\mu_m(A) = \inf_{V_m \in \mathcal{V}_m(D(A))} \sup_{u \in V_m, u \neq 0} \mathcal{R}_A(u),$$

Où $\mathcal{V}_m(F)$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de F de dimension m .

Proposition 6.2.1 (Principe du Min-Max) On note $\lambda_e(A)$ la borne inférieure du spectre essentiel de l'opérateur de A et $N(A)$ le nombre de valeurs propres de A strictement inférieures à $\lambda_e(A)$ (comptées avec leurs ordre de multiplicité). Alors:

- $\mu_m(A) < \lambda_e(A)$ si et seulement si $N(A) \geq m$. Dans ce cas $\mu_1(A), \mu_2(A), \dots, \mu_m(A)$ sont exactement les m premières valeurs propres de l'opérateur A .
- $\mu_m(A) = \lambda_e(A)$ si et seulement si $N(A) < m$. Dans ce cas, $\mu_n(A) = \lambda_e(A)$ pour tout entier $n \geq m$.

6.3 Décomposition spectrale

Famille spectrale

Proposition 6.3.1 La famille spectrale engendrée par un opérateur auto-adjoint A est liée à la résolvante par l'intégrale:

$$\forall u, v \in H, \quad (E_t u, v) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^t ((R(s + i\epsilon) - R(s - i\epsilon))u, v) ds,$$

Décomposition spectrale

Théorème 6.3.1 ([2]) La décomposition spectrale d'un opérateur auto-adjoint A s'écrit:

$$(Au, v) = \int_{-\infty}^{\infty} t d(E_t u, v)$$

La fonction $\varphi(t) = (E_t u, u)$ est croissante et bornée, elle définit une mesure positive. L'intégrale est alors définie au sens de Riemann-Stieltjes

6.4 Théorie de perturbation

Définition 6.4.1 Soit $(A, D(A))$ un opérateur auto-adjoint et $(B, D(B))$ un opérateur symétrique avec $D(A) \subset D(B)$.

- On dit que B est A -borné s'il existe des constantes positives α, β telles que:

$$\|Bx\| \leq \alpha \|Ax\| + \beta \|x\|$$

α est dite A -borne pour B .

- On dit que B est A -compact si, pour toute suite $(u_n) \in D(A)$ on a:

$$\|u_n\| + \|Au_n\| \leq C \Rightarrow (Bu_n) \text{ possède une sous-suite convergente dans } H$$

Théorème 6.4.1 [2] (Kato-Rellich) Si B est A -borné avec une borne $\alpha < 1$, alors l'opérateur $A + B$ est auto-adjoint.

Théorème 6.4.2 [2] (Weyl) Si B est A -compact alors l'opérateur $A + B$ est auto-adjoint et

$$\sigma_{ess}(A + B) = \sigma_{ess}(A).$$

Bibliographie

- [1] Pierre lévy-Bruhl, Introduction à la théorie spectrale, Edit DUNOD (2007).
- [2] R. Dautray, et J.-L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Vol. 5, Spectre d'Opérateurs, Masson, Paris, 1988.
- [3] Reed, M., Simon, B. Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 4. Analysis of Operators. Academic Press, New York 1978
- [4] E-A. Coddinngton, N. Levinson. Theory of Ordinary Differential Equations, Mc-Graw-Hill publishing co.LTD.(9th Reprint 1987). (First edition 1955)
- [5] Robert D. Richtmyer, Principale of Advanced Mathematical Physics,volume 1. Springer Verlag, 1978.
- [6] D. M. Eidus. (1) The principle of limiting absorption, Amer. Math. Sot. Transl. (2) 41 (1965), 157-191;
- [7] D. M. Eidus. (2) The principle of limiting amplitude, Russian Math. Surveys 24 (1969), 97-167.
- [8] Y. Dermenjian et J-C Guillot, Théorie spectrale de la propagation des ondes acoustiques dans un milieu stratifié perturbé, Journal of Differencial Equations 62, 357-409 (1986)
- [9] E.C. Titchmarsh, Eigenfunction expansions associated wth second-order differential equations, Oxford University Press, second edition 1962.

Programmes Matlab

Programme principal

```
echo on clf
global p; global h; global c1; global c2; global xm; global n;

global B; global m; global z;
h=1; p=3; z=0; c1=1; c2=2;
xm=5; n=120;
dx=xm/n; x=dx:dx:xm;
x2=c2*p; b=x2*x2; B=100; m=200;
ds=(B-b)/m; s=b+ds:ds:B;
f=zeros(1,n);g=zeros(1,n); uex=zeros(1,n); g1=zeros(1,n);
for i=1:n
xi=x(i);
ci=coefc(xi);
g(i)=funf(xi);
f(i)=ci*g(i); end
A=Amat(n,xm,p); udif=A \ g';
p2=p*p; c12=c1*c1;
lambda1=14.519; lambda2=32.913;
F=TFG(f);
v1=zeros(1,n);v2=zeros(1,n);
for j=1:n
xj=x(j);
cj=coefc(xj);
v1(j)=fp(xj,lambda1)/sqrt(cj);
v2(j)=fp(xj,lambda2)/sqrt(cj);
end
N1=norm(v1); N1=N1*sqrt(dx);
v1=v1/N1;
N2=norm(v2); N2=N2*sqrt(dx);
v2=v2/N2;
F1=v1*g'; F2=v2*g';
F1=F1*dx; F2=F2*dx;
ug1=F1/(lambda1-z)*v1;
ug2=F2/(lambda2-z)*v2;
ug=ug1+ug2;
G=zeros(1,m);
for i=1:m
si=s(i);
G(i)=F(i)/(si-z);
end
ur=invTFG(G);
utot=ug+ur; utot=utot(1:n);
```

```

x1=dx:dx:xm;
figure (1) plot(x1,utot,'-',x1,udif,'-'), Legend('usc','udif');
echo off

```

function F=TFG(f)

```

global p; global c2; global xm; global n; global B; global m;

```

```

x2=c2*p; b=x2*x2;
ds=(B-b)/m; s=b+ds:ds:B;
F=zeros(1,m);
dx=xm/n; x=dx:dx:xm; u=zeros(m,n);
for i=1:m
    si=s(i);
    for j=1:n
        xj=x(j); cj=coefc(x(j)); u(i,j)=fpg(xj,si)/cj;
    end end
for i=1:m v=u(i,:); F(i)=v*f'; F(i)=F(i)*dx; end
end

```

function z=rho(s)

```

global p; global c1; global c2; global h;

```

```

c12=c1*c1; c22=c2*c2; p2=p*p2;
alpha=sqrt(s/c12-p2); beta=sqrt(s/c22-p2); alpha2=s/c12-p2;beta2=s/c22-p2;
s1=s*(1/c12-1/c22);
N=beta*alpha2; D=-s1*sin(alpha*h).^2+alpha2; z=N/D; z=z/pi;
end

```

function y = fpg(x,s)

```

global h; global p; global c1;
global c2; c12=c1*c1; c22=c2*c2; p2=p*p; a=p2*c12; b=p2*c22; alpha=p*sqrt(s/a-1); beta=p*sqrt(s/b-1);
if 0<=x<=h
    y=sin(alpha*x)/alpha; end
if x>h
    y=sin(alpha*h)*cos(beta*(x-h))/alpha+... cos(alpha*h)*sin(beta*(x-h))/beta;
end end

```

Calcul des VP et FP

```

echo on clf

```

```

global h; global p; global c1; global c2;

```

```

h=1; p=3; c1=1; c2=2;
x2=c2*p; x22=x2*x2;
A1=13; B1=17; A2=30; B2=35;

```

```

n=120; xm=5;

options = optimset('Display','iter');

lambda1=fzero(@myfun,[A1 B1]); lambda2=fzero(@myfun,[A2 B2]);
lambda=50; dx=xm/n; x=dx:dx:xm; y1=zeros(1,n);y2=zeros(1,n);
z=zeros(1,n);y=zeros(1,n);
for i=1:n
ci=coefc(i);
y1(i)=fp(x(i),lambda1)/sqrt(ci); y2(i)=fp(x(i),lambda2)/sqrt(ci);
y(i)=fpg(x(i),lambda); end
N1=norm(y1); N1=N1*sqrt(dx);
N2=norm(y2); N2=N2*sqrt(dx); y1=y1/N1; y2=y2/N2;
figure (1) plot(x,y1,'-',x,y2,'r-',x,z,'-') title('fonctions propres, p=3') legend('fpr1','fpr2')
figure (2) plot(x,y,'-',x,z,'-') title('FPG, p=3') legend('fpg')
echo off

```

Fct caractéristique

```
function y = myfun(x)
```

```
global h; global p; global c1; global c2;
```

```

x1=c1*p; x2=c2*p; a=x1*x1; b=x2*x2;
y= x1*sqrt(b-x)*sin(h*sqrt(x-a))+... x2*sqrt(x-a)*cos(h*sqrt(x-a));
end

```

Localisation des VP, racine de la fonction caractéristique

```
echo on clf
```

```
h=1; p=3; c1=1; c2=2; n=60;
```

```

x1=c1*p; a=x1*x1; x2=c2*p; b=x2*x2;
Np=h*sqrt(b-a)/pi; Np=round(Np);

```

```

dx=(b-a)/n; x = a+dx:dx:b;
y1=zeros(1,n);y2=zeros(1,n);y=zeros(1,n); z=zeros(1,n);
for i=1:n;
y1(i) = x2*sqrt(x(i)-a)*cos(h*sqrt(x(i)-a)); y2(i) = x1*sqrt(b-x(i))*sin(h*sqrt(x(i)-
a)); y(i)= y1(i)+y2(i);
end
figure (1) plot(x,y,'-',x,z,'-'); xlabel('lambda') legend(' F(p,lambda)','z=0') title('fct
caractéristique')
'Nombre de vp=', Np, echo off

```

function y = fp(x,s)

```
global h; global p; global c1; global c2;
```

```

c12=c1*c1; c22=c2*c2; p2=p*p; alpha=sqrt(s/c12-p2); beta=sqrt(p2-s/c22);
if 0<=x<=h
y=sin(alpha*x)/alpha; end
if x>h
y=sin(alpha*h)*exp(-beta*(x-h))/alpha; end
end

```

function A=Amat(n,xm,p)

```

global z;

```

```

p2=p*p; k=xm/n; k2=k*k; x=0:k:xm;
c=zeros(1,n);
for i=1:n
xi=x(i); c(i)=coefc(xi); end
A=zeros(n,n); A(1,1)=2/k2+p2-z/c(1); A(1,2)=-1/k2;
A(n,n)=2/k2+p2-z/c(n); A(n,n-1)=-1/k2;
for i=2:n-1
ci=c(i); A(i,i-1)=-1/k2; A(i,i)=2/k2+p2-z/ci; A(i,i+1)=-1/k2; end end

```

function y=coefc(x)

```

global c1; global c2; global h;

```

```

h=1; c1=1;c2=2; c12=c1*c1; c22=c2*c2;
if x<=h
y=c12; end
if x>h
y=c22; end end.

```