It's MyniGold!!!!! 课后题配套解答

2026 年 1 月 20 日

目录

第一章 微分流形

Problem 1.1

紧Hasudorff空间上的逆紧映射都是闭映射

Problem 1.2

证明局部紧Hasudorff空间上的逆紧映射都是闭映射

Problem 1.3

设$B(0,1)$是R^n中的开球, 证明$B(0,1)$和R^n微分同胚

Problem 1.4

证明对一个连通的拓扑流形M, 任取其中两点p,q, 都存在一个$M\to M$的同胚ψ使得$\psi(p)=q$

Problem 1.5

R上的连通集一定是区间.

Problem 1.6

M是拓扑空间,$\mathcal{X}$是M中一族局部有限的集合, 证明$\{\overline{X}\}_{X\in\mathcal{X}}$也是局部有限的

Proof:任取$x\in M$, 根据局部有限性设有$\mathcal{X}$中和x的某个邻域V相交n个集合, 记为$X_1,..,X_n$. 则对$\mathcal{X}$中的其他Y, 我们证明$\overline{Y}\cap V=\emptyset$, 这将给出V至多和$\overline{X}_1,..,\overline{X}_n$相交, 从而完成证明

假设$\overline{Y}\cap V\neq\emptyset$, 那么和V相交的点肯定是Y的边界点, 设$y\in\partial Y\cap V$, 根据y是V的内点(因为V是开集), 存在邻域K使得$y\in K\subseteq V$另一方面根据$y\in\partial Y$可得 $K\cap Y\neq\emptyset$, 这给出了$K\cap Y\subseteq V\cap Y$, 和$V\cap Y=\emptyset$矛盾. 因此$\overline{Y}\cap V=\emptyset$, 对$\mathcal{X}$中除了$X_1,..,X_n$之外的Y都成立, 因此V至多和$\overline{X}_1,..,\overline{X}_n$交集非空, 因此根据x的任意性, $\{\overline{X}\}_{X\in\mathcal{X}}$也是局部有限的

Problem 1.7

M是光滑流形, 证明任何一组坐标覆盖, 都能抽出可数个坐标卡, 形成一个新的坐标覆盖.

Proof: 取M的可数预紧拓扑基, 记为$\{B_i\}_{i=1}$, 根据预紧性, 存在有限个坐标卡覆盖$\overline{B_i}$, 因此也覆盖B_i. 把这些坐标卡收集起来, 是可数个(因为可数个有限集的并还是可数集), 且根据$\cup_{i=1}^{\infty}B_i=M$可得这些坐标卡也覆盖M.

Problem 1.8

M是光滑流形, 证明存在一组可数拓扑基$\mathcal{B}$, 满足对任何$B \in \mathcal{B}$, 都存在一个坐标卡(B', φ)和$r < 1$, 满足

$$\varphi(B') = B(0,1) \qquad \varphi(B) = B(0,r) \qquad \varphi(\overline{B}) = \overline{B(0,r)}$$

对于边界坐标卡的情形, 要改成

$$\varphi(B') = B^+(0,1) \qquad \varphi(B) = B^+(0,r) \qquad \varphi(\overline{B}) = \overline{B^+(0,r)}$$

这样的B称为**正则坐标球体**

Proof: 根据上一题, M能被可数个坐标卡覆盖, 不妨设每个坐标函数都把对应的坐标邻域映射为单位球(如果是内坐标卡)或$B^+(0,1)$(如果是边界坐标卡), 设这些坐标卡为(U_i, φ_i).

对一个坐标卡(U_i, φ_i), 如果是内坐标卡, 则取$B(0,1)$内的所有“球心坐标分量全为有理数, 半径也为有理数”的开球体, 共可数个, 可以设为B_{ij}. 如果是边界坐标卡, 则取$B^+(0,1)$内, 含于$(B^+(0,1))^o$内的所有“球心坐标分量全为有理数, 半径也为有理数, 闭包含于$\varphi_i(U_i)$”的开球体, 共可数个. 和含于$B^+(0,1)$内的所有“球心最后一个分量为0, 其他坐标分量为有理数, 半径也为有理数, 闭包含于$\varphi_i(U_i)$”的开球体与H^n的交集, 这是可数个半球. 从而记这些开球体和半球体的全体为B_{ij}

下面证明

$$\{\varphi_i^{-1}(B_{ij})\}_{i,j=1}$$

是一组拓扑基. 设U是x的邻域. 那么x必定含于某个坐标卡中, 设为(U_i, φ_i), 则$U \cap U_i$也是x的邻域, 所以$\varphi_i(U \cap U_i)$是$\varphi_i(x)$的邻域. 如果$\varphi_i(x) \notin \partial H^n$, 则根据有理数的稠密性, 存在一个半径为有理数, 球心坐标分量为有理数且闭包含于$\varphi_i(U \cap U_i) \cap \{x | x_n > 0\}$(这是$R^n$中的开集)的开球B, 而且根据定义, 这个开球必定是$\{B_{ij}\}_{j=1}$中的某一个, 又φ_i是同胚, 所$\varphi_i^{-1}(B)$是 $\{\varphi_i^{-1}(B_{ij})\}_{i,j=1}$中的某一个, 且是x在$U$中的开邻域.

如果$\varphi_i(x) \in \partial H^n$, 又$\varphi_i(U \cap U_i)$是$H^n$的开子集, 所以存在$R^n$的开子集V使得$\varphi_i(U \cap U_i) = V \cap H^n$, 然后考虑一个有理坐标(其中最后一个左边分量为0), 有理半径且包含$\varphi_i(x)$的球体$B \subseteq V$(满足闭包也在V中), 则$B \cap H^n$必定是$\{B_{ij}\}_{j=1}$中的某一个, 因此$\varphi_i^{-1}(B)$是 $\{\varphi_i^{-1}(B_{ij})\}_{i,j=1}$中的某一个, 且是x在$U$中的开邻域.

因此$\{\varphi_i^{-1}(B_{ij})\}_{i,j=1}$是一组可数拓扑基

然后我们为拓扑基中的每个元素寻找一个合适的坐标映射. 对固定的B_{ij}, 根据$\varphi_i(U_i)$的开性(要么是$B(0,1)$要么是$B^+(0,1)$)和$\overline{B_{ij}} \subseteq \varphi_i(U_i)$, 可知存在一个有理数r和$B_{ij}$同球心(设为$q_{ij}$),同类型(意为要么是开球, 要么是半球), 且半径为r的球体C_{ij}使得$C_{ij} \subseteq \varphi_i(U_i)$, 考虑映射

$$\psi_{ij}(x) = \frac{\varphi_i(x) - q_{ij}}{r}$$

则ψ_{ij}把$\varphi_i^{-1}(C_{ij})$映射为$B(0,1)$, 且把$\varphi_i^{-1}(B_{ij})$映射为某个半径< 1的球体. 且坐标卡$(\varphi_i^{-1}(C_{ij}), \psi_{ij})$和M的光滑结构相容(因为$\psi$是$\varphi_i$复合上一个平移与伸缩, 都是$R^n$中的光滑同胚).

Problem 1.9

M是拓扑空间, $\mathcal{X}$是一组局部有限的集合, 证明$\mathcal{X}$中的取并和取闭包能交换次序:

$$\overline{\cup_{X \in \mathcal{X}} X} = \cup_{X \in \mathcal{X}} \overline{X}$$

Hint:右边显然含于左边, 要证明反向的包含, 则可考虑任意极限点,然后用Problem 1.6的结论.

Problem 1.10

M是拓扑空间, 考虑$M \times M$上自然的乘积拓扑, 证明对角线

$$\triangle = \left\{ (p,p) \middle| p \in M \right\}$$

是$M \times M$中的闭集.

第二章　光滑映射

Problem 2.1

M是光滑流形, A,B是M中互不相交的闭子集, 证明存在光滑函数$f: M \to R.$ 使得f在A上恒为1, 在B上恒为0

第三章　切向量

Problem 3.1

设M,N是光滑流形，$F: M \to N$是光滑映射，$\gamma: J \to M$是光滑曲线. 则对任何$t_0 \in J$，$F \circ \gamma$在t_0处的速度向量为

$$(F \circ \gamma)'(t_0) = dF_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0))$$

Problem 3.2

M,N是有边或无边光滑流形. $F: M \to N$是光滑映射，则$dF_p = 0$对任何$p \in M$成立，当且仅当F在M的每个连通分支上都是常数

Proof:$\Rightarrow$ 取M的连通分支K，这是M的开子集，且$F(M)$是N的连通子集，所以必定含于某个连通分支中，因此不妨设M,N都是连通的光滑流形. 固定一个$q \in M$，令

$$A = \left\{ y \in M \middle| F(y) = F(q) \right\}$$

下面说明A是开集：任取$p \in A$，取p附近的坐标卡(U, φ)，不妨设$\varphi(U) = B(0,1)$或$B^+(0,1)$，无论哪种情况都能推出U连通. 取$F(p) = F(q)$附近的坐标卡(V, ψ)，通过缩小U，不妨设$F \circ \varphi(U) \subseteq V$. 那么在坐标卡$(U, \varphi)$, (V, ψ)下F的坐标表示

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x) \qquad x \in \varphi(U) = B^+(0,1)\text{或}B(0,1)$$

是光滑的(不要忘记在$B^+(0,1)$上光滑意为可以延拓到$B^+(0,1)$的某个邻域上的光滑函数)

那么dF_p在这两个坐标卡下的坐标表示的jacobian矩阵就是0矩阵，这说明$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x)$在$\varphi(U)$的内部的一阶偏导数全是0，这给出了$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x)$在$\varphi(U)$的内部(注意这是个连通集)是常数，因此根据连续性可得在$\varphi(U)$上是常数

因此F在U上是常数，又$F(p) = F(q)$,因此$U \subseteq A$. 因此A是M的开子集

又N中的单点集是闭集，所以

$$A^c = \left\{ y \in M \middle| F(y) \neq F(q) \right\} = F^{-1}(N - \{F(q)\})$$

是开的，由此可得$M = A^c \cup A$，是两个不交开集的并.如果A, A^c都不是空的，就与M的连通性矛盾. 又$q \in A$，所以$A^c = \emptyset$，所以$M = A$，因此F在M上是常值函数，值为$F(q)$

$\Leftarrow$ 如果都是常数，那么对任何$p \in M$，取p附近的坐标卡(U, φ)和$F(p)$附近的坐标卡(V, ψ)，则$J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) = O$，因此$dF_p = O$，根据p的任意性可得结论成立.

Problem 3.3

M,N是有边或无边光滑流形. $F: M \to N$是微分同胚，证明M和N具有相同的维数

Proof:微分同胚的切映射是切空间之间的线性同构, 两个线性空间同构必须满足二者维数相同

Problem 3.4

M是光滑流形, 证明集合
$$M_0=\left\{(p,0)\in TM\middle|p\in M\right\}$$
是TM的闭子集

Proof: 任取$(p,v)\in M_0^c$, 则$v\neq 0$, 在M中取p附近的坐标卡(U,φ). 考虑坐标映射

$$\tilde{\varphi}((p,v))=(\varphi(p),v_1,...,v_n)$$

考虑$\varphi(U)\times R^n$中的一个开子集
$$\varphi(U)\times B(v,\epsilon)$$
其中ϵ满足$B(v,\epsilon)$和0没有交点, 则
$$\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(U)\times B(v,\epsilon))$$
是TM中的开集(因为TM的拓扑保证了$\tilde{\varphi}$是同胚), 其中的元素为

$$\left\{(p,u)\in TM\middle|p\in U,u\in B(v,\epsilon)\right\}$$

和M_0无交点, 因此含于M_0^c, 从而M_0^c是开的, 因此M_0是闭的

第四章　浸入, 淹没和嵌入

Problem 4.1

M是n维无边光滑流形, N是n维带边流形, $F : M \to N$是光滑映射. 证明如果$p \in M$满足dF_p是非异阵(意为其坐标表示的Jacobian矩阵是非异阵), 那么$F(p) \in IntN$

Proof: 假设$p \in \partial N$, 那么存在一个边界坐标卡(V, ψ), 使得$\psi(V) = B(0,1) \cap H^n$, 且$\psi_n(p) = 0$, i.e $\psi(p) \in \partial H^n \cap B(0,1)$, 且

$$J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})$$

在0处是非异阵. 记$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$为h, 则h在$B(0,1)$上光滑.

根据反函数定理, 存在0的邻域X, 和Y,使得h的反函数存在, 且是在Y上光滑的, 记为g, i.e h是X到Y的微分同胚. Y也是0的开邻域, 且含于$\psi(V)$. 但是$\psi(V)$只包含那些第n个分量大于等于0的点. 而0的任意开邻域都包含一些第n个分量小于0的点, 因此矛盾. 所以p不可能位于边界坐标卡中, 因此只能是内点.

Problem 4.2

M是紧光滑流形, 证明不存在$M \to R^k, k > 0$的光滑淹没

Proof:如果有, 那么$F(M)$是R^k中的紧集, 因此是有界闭集. 又淹没是开映射, 所以$F(M)$还是开的, 又R^k连通, 所以$F(M) = R^k$(因为既开又闭), 但这和紧性矛盾, 所以没有.

Problem 4.3

证明拓扑覆盖映射$\pi : E \to M$是proper(逆紧)的, 当且仅当其纤维是有限的

Proof: $\Rightarrow$ 对任何$p \in M$, 存在p的邻域U使得π在$\pi^{-1}(U)$的每个连通分支上的限制都是到U的拓扑同胚. 注意连通分支是开集, 所以形成了π^{-1}的开覆盖, 根据π逆紧, 且单点集是紧的可得$\pi^{-1}(p)$是紧的, 且$\pi^{-1}(U)$的连通分支构成了$\pi^{-1}(p)$的开覆盖, 必有有限子覆盖$V_1, .., V_n$.

从而每个$\pi|_{V_i}$是拓扑同胚, V_i是$\pi^{-1}(U)$的连通分支. 假设除了这n个外, 还有其他连通分支V, 那么$\pi\Big|_V$也是到U的同胚, 从而$\pi^{-1}(p) \cap V \neq \emptyset$. 但是$\pi^{-1}(p)$完全被$V_1, .., V_n$覆盖, 这说明V至少和其中某一个$V_j$相交, 两个不同连通分支相交是不可能的, 因此$\pi^{-1}(U)$总共就n个连通分支. 根据$\pi$在$V_i$上是同胚可得$V_i$包含且仅包含一个满足$\pi(x) = p$的x, 所以$\pi^{-1}(p)$总共n个点, 有限

$\Leftarrow$ 沿用上文的记号, $\pi^{-1}(U)$的每个连通分支都包含且仅包含一个$\pi^{-1}(p)$中的元素, 设$\pi^{-1}(p)$有n个元素, 那么$\pi^{-1}(U)$有n个连通分支$V_1, .., V_n$. 先证明一个引理

不同纤维的元素个数是相同的

显然对任何$q \in U$, $\pi^{-1}(p), \pi^{-1}(q)$有同样多的元素. 所以当$\pi^{-1}(p)$有n个元素时, 其邻域中的所有点的纤维都有n个

元素, i.e
$$U_i=\left\{p\in M\middle|\pi^{-1}(p)\text{有i个元素}\right\}$$
是开的. 又纤维都是有限的, 所以
$$M=\cup_{i=1}^{\infty}U_i$$
这是可数个互不相交的开集的并, 但M连通, 所以只能有一个非空, 又$p\in U_n$, 所以$M=U_n$

设K是M中的紧集, 要证明$\pi^{-1}(K)$是E中的紧集. 设$\cup_\alpha W_\alpha$是$\pi^{-1}(K)$的一组开覆盖. 设每个$y\in K$满足π是局部同胚的邻域为U_y

对任何$y\in K$, $\pi^{-1}(U_y)$是若干个连通开集, 有n个连通分支$V_y^1,..,V_y^n$, 又$\pi^{-1}(y)\subseteq\cup_\alpha W_\alpha$, 所以取n个$\alpha_y^n$使得每个$W_{\alpha_y^i}\cap V_y^i$都包含$\pi^{-1}(y)$中的一个点(这是可以做到的, 因为$\cup_\alpha W_\alpha$覆盖了$\pi^{-1}(y)$). 注意到$\pi$是开映射, 所以
$$X_y=\cap_{i=1}^n\pi(W_{\alpha_y^i}\cap V_y^i)$$
依然包含y的开集,即含于U_y又含于$\cup_\alpha\pi(W_\alpha)$, 又$\cup_{y\in K}X_y$是K的开覆盖, 所以有有限子覆盖
$$X_{y_1},..,X_{y_k}$$
而$\pi^{-1}(X_{y_j})\subseteq\pi^{-1}(U_{y_j})$, 所以
$$\pi^{-1}(y_j)\subseteq\cup_{i=1}^nV_{y_j}^i$$
而且根据π是$V_{y_j}^i$上的同胚可知若$\pi^{-1}(X_{y_j})$中的某个$x\in V_{y_j}^i$(对于某个i是一定成立的), 则有$x\in W_{\alpha_{y_j}^i}\cap V_{y_j}^i$, 从而$\pi^{-1}(X_{y_j})\subseteq\cup_{i=1}^nW_{\alpha_{y_j}^i}$, 这给出了
$$\pi^{-1}(K)\subseteq\cup_{j=1}^k\pi^{-1}(X_{y_j})\subseteq\cup_{j=1}^k\cup_{i=1}^nW_{\alpha_{y_j}^i}$$
因此最右边就是想找的有限子覆盖, 证毕

Problem 4.4

证明局部微分同胚是开映射

第五章　子流形

Problem 5.1

S是M的嵌入子流形, 那么对任何一个$f \in C^\infty(S)$, 都存在S在M中的邻域U, 使得存在$g \in C^\infty(U)$且$g|_S = f$

Proof: 对任何$p \in S$, 存在M在p附近的坐标卡(U, φ)使得

$$\varphi^i(p) = 0 \qquad n < i \leq m$$

且$(U \cap S, \tilde{\varphi})$是S在p附近的一个光滑坐标卡, 其中

$$\tilde{\varphi}(p) = (\varphi^1(p), .., \varphi^n(p)) \qquad \tilde{\varphi}^{-1}(x_1, .., x_n) = \varphi^{-1}(x_1, .., x_n, 0, .., 0)$$

由此可得

$$\widetilde{f}(x_1, .., x_n) = f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x_1, .., x_n) \qquad x \in \tilde{\varphi}(S \cap U)$$

是光滑函数. 定义

$$\tilde{g}(x_1, .., x_n, .., x_m) = \widetilde{f}(x_1, .., x_n) \qquad (x_1, .., x_n) \in \tilde{\varphi}(S \cap N)$$

因此$\tilde{g}$的定义域就是$\tilde{\varphi}(S \cap N) \times R^{m-n}$, 定义

$$g_p(p) = f\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi^1(p), .., \varphi^n(p)) \qquad (\varphi^1(p), .., \varphi^n(p)) \in \tilde{\varphi}(S \cap N)$$

那么

$$g \circ \varphi^{-1}(x_1, .., x_n, .., x_m) = f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x_1, ..., x_n)$$

因此g_p是U_p中的光滑函数. 且$g|_S = f$.

令$U = \cup_{p \in S} U_p$, 则U是S的开邻域且U_p是U的一组开覆盖, 考虑其上的单位分解, 那么

$$g = \sum_{p \in S} \psi_p(x) g_p(x) \in C^\infty(U)$$

就是要找的函数

Problem 5.2

上一题中, 如果S到M的嵌入是proper(逆紧)的, 那么证明g可以是$C^\infty(M)$的

Proof: 局部紧T2空间上的逆紧映射是闭映射, 因此S是M中的闭集, 从而U_p和S^c共同构成了一组单位分解, 此时$\psi_p \in C^\infty(M)$, 且$\sum_{p \in S} \psi_p$在S上为1, 所以

$$g(x) = \sum_{p \in S} \psi_p(x) g_p(x) \in C^\infty(U) \in C^\infty(M)$$

就是要找的函数

第六章　Sard定理

Problem 6.1

M是R^N的k维光滑嵌入子流形. S是R^N的嵌入子流形. f是M上的光滑映射. 定义

$$F(x,p) = f(x) + p \qquad M \times R^N \to R^N$$

证明对a.e的$p \in R^N$, 映射$f_p(x) = F(x,p)$都和S横截相交.

Problem 6.2

M是R^N的k维光滑嵌入子流形. 证明对任何$d < N - k$, 必定存在和M不相交的d维仿射子空间[a]
$d = N - k$时是否成立?

[a]仿射子空间是线性空间的平移: 一个d维线性空间加上一个向量v

Proof: 设L是一个n维子空间,

$d = N - k$时不成立, 考虑映射$f(x,y) = x^3 - y$, 那么$df = \begin{pmatrix} 3x^2 & y \end{pmatrix}$, 从而在在$x^3 - y = 1$上, df总不是O矩阵, 从而1是f的正则点, 所以$f^{-1}(1)$是R^2的嵌入子流形, 又任何直线$y = kx + b$总会和$y = x^3 - 1$相交(因为三次方程总有实根), 所以不存在和M相交的仿射子空间

Problem 6.3

M是m维光滑流形, N是n维光滑流形. S是N的嵌入子流形, 且光滑映射$f: M \to N$与S横截相交. 证明对任何$p \in W = f^{-1}(S)$, 都有

$$T_pW = (df_p)^{-1} T_{f(p)} S$$

Proof: S是N的正则子流形. 我们任取$p \in W$, 则存在$f(p)$的邻域U和$\varphi : U \to R^k$使得$S \cap U = \varphi^{-1}(0)$是$\varphi$的正则水平集. 换言之$\varphi$是一个local defining map

然后说明 0是$\varphi \circ f$的正则值.

注意到如果$\varphi(f(p)) = 0$则$p \in f^{-1}(S) \cap f^{-1}(U) = W \cap f^{-1}(U)$, , 我们需要证明$d\varphi_{f(p)} \circ df_p T_p M$是$T_0 R^k$

首先根据横截相交得到

$$df_p T_p M + T_{f(p)} S = T_{f(p)} N = T_{f(p)} U$$

又$f(p) \in S \cap U$是φ的正则点, 所以$d\varphi_{f(p)} T_{f(p)} U = T_0 R^k$(正则点处的切映射是满的)

上式两边复合$d\varphi_{f(p)}$, 需要注意到$d\varphi_{f(p)} T_{f(p)} S = 0$(因为$\varphi$在S上是常数0), 因此

$$d\varphi_{f(p)} \circ df_p T_p M = T_0 R^k$$

这说明, 0是$\varphi \circ f$的正则值, $\varphi \circ f$在$f^{-1}(U)$上是 $f^{-1}(U) \cap W$的local defining map. 如此可以知道

$$T_pW = ker(d\varphi_{f(p)} \circ df_p)$$

又$d\varphi_{f(p)} \circ df_p((df_p)^{-1}(T_{f(p)}S)) = d\varphi_{f(p)}(T_{f(p)}S) = 0$, 因此$T_pW \supseteq (df_p)^{-1}(T_{f(p)}S)$

另一个方面$T_{f(p)}S = kerd\varphi_{f(p)}$, 且$d\varphi_{f(p)}(df_pT_pW) = 0$, 因此$df_pT_pW \subseteq T_{f(p)}S$, 因此只能有

$$T_pW = (df_p)^{-1}(T_{f(p)}S)$$

第七章　Lie群

第八章　向量场

Problem 8.1

M是n维带边光滑流形, 那么存在M上的光滑向量场X, 使得X在∂M上是处处指向内的. 为其取负号可知存在光滑向量场X使得X在∂M上处处指向外

Proof:∂M可被可数个边界坐标卡覆盖, 记为$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, 定义$U_\alpha$上的向量场

$$X_\alpha(p) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}\Big|_p \qquad p \in U_i$$

则X_α在U_α上光滑, 且在$\partial M \cap U_\alpha$上指向内.

考虑从属于U_α的单位分解ψ_α, 那么可以构造出一个$\cup_\alpha U_\alpha$上的光滑向量场

$$X = \sum_\alpha \psi_\alpha(p) X_\alpha(p)$$

取一个边界定义函数f, 对任何$p \in \partial M$, 根据$X_\alpha(p)$指向内可得$X_\alpha f > 0$, 因此

$$X_p f > 0$$

因此在$p \in \partial M$处, X是指向内的. 又∂M是M的闭子集, 且X是∂M的一个邻域$\cup_\alpha U_\alpha$上的光滑向量场, 因此根据向量场的延拓定理, 存在M上的光滑向量场Y使得$Y\big|_{\partial M} = X$, 从而Y在∂M上是处处指向内的.

$-Y$是在∂M上处处指向外的光滑向量场.

第九章　积分曲线与流

第十章　向量丛

Problem 10.1

M是n维光滑流形. 如果存在光滑映射$f : TM \to M \times R^n$使得$f|_{T_pM}$是到$\{p\} \times R^n$的线性同构, 证明f是微分同胚

[Hint: 先说明f是双射. 根据全局秩定理, 只需说明f是常秩的,用坐标卡$(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$和$(U \times R^n, \varphi \times id)$直接验证]

Problem 10.2

M是n维光滑流形, M上存在n个处处线性无关的光滑向量场, 当且仅当TM丛同构于$M \times R^n$

Hint: 任意向量场都能用这n个向量场的线性组合表示, 证明这个线性组合的系数光滑, 然后考虑这个向量到它的系数的对应.

第十一章　张量积

第十二章　微分形式

第十三章　流形的定向

Problem 13.1

证明Lie群可定向

第十四章　流形上的积分

Problem 14.1

考虑R^2上的光滑2-形式

$$\omega = xdy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + zdx \wedge dy$$

计算

$$\int_{S^2} \iota_{S^2}^* \omega$$

Proof:

$$\begin{aligned}\int_{S^2} \iota_{S^2}^* \omega = \int_{\overline{B(0,1)}} d\omega = \int_{\overline{B(0,1)}} dx \wedge dy \wedge dz + 2ydx \wedge dy \wedge dz + dx \wedge dy \wedge dz \\ = 2\int_{\overline{B(0,1)}} (1+y) dxdydz = 2\int_{\overline{B(0,1)}} dxdydz = \frac{8}{3}\pi\end{aligned}$$

参考文献

[1] James Munkres. Topology. 2014

[2] John M. Lee. Introduction to Smooth Manifolds.