

It's MyniGold!!!!

2026 年 1 月 20 日

读前必看

版本说明

完稿于2026年1月20日. 该版本还存在诸多不足之处, 比如极少的习题和比较多的笔误. 稳定版预计在2026年2月10日之前完成并在<https://farewell2006.github.io>公开. 因此该版本作为暂行的抢先体验版, 不接受任何勘误

致谢

本讲义除了参考文献中列出的资料外, 还参考了王作勤老师在科大讲授微分流形的资料<http://staff.ustc.edu.cn/wangzuoq/Courses/23F-Manifolds/index.html>和科大微分流形的考试题, 王文龙老师在南开讲授微分流形的作业题和期末考试题. 在此对各位老师及相关人士表示真挚的感谢, 并且本人承诺这些引用仅用于学习交流, 没有任何商业用途.

目录

第一章 微分流形	5
1.1 拓扑流形	5
1.1.1 局部欧式空间	5
1.1.2 拓扑流形	6
1.1.3 带边流形	7
1.2 光滑结构	8
1.3 理解光滑坐标卡	10
1.4 构造新的流形	11
1.5 光滑流形的例子	12
1.5.1 RP^n	12
1.5.2 S^n	13
1.6 Appendix: review of topology	13
1.6.1 覆盖映射	13
1.6.2 逆紧	13
1.7 Exercise	14
第二章 光滑映射	16
2.1 光滑性的刻画	16
2.2 微分同胚	18
2.3 单位分解	18
2.3.1 单位分解的应用	21
2.4 Exercise	21
第三章 切向量	22
3.1 R^n 中的导子	22
3.2 切空间	23
3.2.1 切空间的维数和基底	23
3.2.2 边界点处的切空间	25
3.3 切空间的相关计算	27
3.3.1 基变换的表示矩阵	27
3.3.2 切映射的表示矩阵	27
3.4 切丛	28
3.5 曲线的切线	29
3.6 Exercise	31
第四章 浸入, 淹没和嵌入	32
4.1 常秩映射	32
4.1.1 常秩定理	33

目录	3
4.1.2 带边流形的常秩定理	35
4.2 嵌入	37
4.3 Exercises	37
第五章 子流形	38
5.1 嵌入子流形	38
5.1.1 嵌入子流形的结构	38
5.1.2 水平集	39
5.2 嵌入子流形的性质	41
5.3 子流形的切空间	42
5.4 作为嵌入子流形的 ∂M	43
5.5 Exercise	47
第六章 Sard定理	48
6.1 零测集	48
6.2 Sard定理	49
6.3 Whitney嵌入定理	51
6.4 Whitney逼近定理	54
6.5 横截性	54
6.6 Exercise	56
第七章 Lie群	58
7.1 Lie群的定义和性质	58
7.1.1 Lie群的例子	59
7.2 Lie子群	59
7.3 Lie群同态	60
7.4 Lie群作用	61
第八章 向量场	63
8.1 流形的向量场	63
8.2 标架	64
8.3 作为导子的向量场	65
8.4 光滑映射与向量场	66
8.5 Lie括号	67
8.6 Lie群的Lie代数	68
8.7 Lie代数同态	70
8.8 Exercise	72
第九章 积分曲线与流	73
9.1 积分曲线	73
9.1.1 例子	73
9.1.2 存在唯一性	73
9.2 流	75
9.3 完备向量场	76
9.4 Lie导数	77
第十章 向量丛	80
10.1 余切丛	80
10.1.1 对偶空间和对偶基	80

10.1.2 余切向量	81
10.1.3 余切丛	81
10.1.4 函数的微分	83
10.1.5 向量场的拉回	84
10.2 向量丛	85
10.3 Exercise	87
第十一章 张量积	88
11.1 张量	89
11.1.1 对称张量	89
11.1.2 交错张量	90
11.2 张量场	91
11.3 协变张量场的拉回	93
11.4 张量场的Lie导数	94
第十二章 微分形式	97
12.1 交错张量	97
12.2 初等交错张量	99
12.3 楔积	102
12.4 内乘	105
12.5 流形上的微分形式	106
12.6 外微分	107
12.7 微分形式的Lie导数	110
第十三章 流形的定向	112
13.1 线性空间的定向	112
13.2 流形的定向	112
13.3 定向的其他性质	114
13.4 子流形的定向	116
13.5 Exercise	117
第十四章 流形上的积分	118
14.1 坐标卡内紧支n-形式的积分	118
14.2 紧支n-形式的积分	119
14.3 Stokes定理	120
14.4 Exercise	123

第一章 微分流形

1.1 拓扑流形

1.1.1 局部欧式空间

对一个拓扑空间 X , 称 X 是 n 维局部欧式空间, 如果对任何 $x \in X$, 存在 X 的邻域 U 和一个 U 到 R^n 中的开集 V 的同胚映射 φ , 我们称 (U, φ) 是 x 附近的一个坐标卡, U 叫做坐标邻域, φ 叫做坐标函数或坐标映射. 根据定义有 $\varphi(U) = V$, 有时候也略写为 (U, φ) . 需要注意的是, 当提及局部欧式空间, 我们总是默认它的维数是固定的, 也就是说不能存在两个不同的坐标卡 $(U, \varphi), (V, \psi)$ 使得 φ 和 ψ 分别把 U, V 映射到 R^n 和 R^m 中的开集

这个定义是在说, X 中每个足够小的“局部”都“长得像”欧式空间的某个开集, 严格的说, 任取 $x \in X$, 根据定义存在 x 的邻域 U 和同胚 φ , $\varphi(U)$ 是 R^n 中的开集. 而且, 同胚限制在开子集还是同胚, 所以每个 U 中的开子集 V 都和 R^n 中的开集 $\varphi(V)$ 同胚

通过这个同胚, 我们可以从 R^n 的性质中推导出 X 的性质:

Proposition 1.1

n 维局部欧式空间是局部紧^a的

^a每个点都存在一个邻域 U , U 含于某个紧子集中

通过取开球里的较小闭球能证明 R^n 局部紧, 然后利用同胚保持紧性(其实是连续映射保持紧性), 就能给出证明

Proposition 1.2

n 维局部欧式空间是局部道路连通的

n 维欧式空间是局部道路连通的, 因此这个局部被一个同胚逆映射回去还是局部道路连通.

Proposition 1.3

局部道路连通的连通空间 X , 一定是道路连通的

这个性质的证明也比较容易. 对任何 $y \in X$, y 都有有道路连通的邻域. 因此固定一个 x , 考虑集合

$$A = \left\{ y \in X \mid x, y \text{ 可以被某条道路连接} \right\}$$

那么任取 $y \in A$, 都有一个邻域 U 使得 U 中任意点 z 都能和 y 道路连接, 把这个道路和 x 到 y 的道路连接起来就得到 x 和 z 的道路, 因此 $z \in A$, 从而 $U \subseteq A$. 这说明 A 是开集

A^c 是不能和 x 之间有道路连接的点的全体, 又 X 局部道路连通, 任取 $y \in A^c$, y 有道路连通的邻域 U , 如果存在 $z \in U$ 使得 $z \notin A^c$, 则 z 能和 x 道路连接. 而 $z \in U$ 所以也能和 y 道路连接, 这两条道路连接起来就得到 x 到 y 的道路, 因此 $y \in A$, 这与 $y \in A^c$ 矛盾. 因此 $U \subseteq A^c$, 从而 A^c 也是开集. 根据 $X = A \cup A^c$ 可知, 如果 A, A^c 都非空, 则和 X 的连通

性矛盾. 因此只能有一个非空. 又 $x \in A$, 所以 A 非空, 因此 $X = A \cup \emptyset = A$, 这说明 X 中所有点都能和 x 道路连接. 根据道路连接的传递性, X 是道路连通的

Proposition 1.4

局部欧式空间是正则的

Proof: 正则性衡量的是点和闭集的分离性质. 根据[1]的Lemma 31.1, 只需要验证对任何开集 U 和任何的 $x \in U$, 存在 x 的邻域 V 使得 $\overline{V} \subseteq U$. 取 x 附近的坐标卡 (K, φ) , 从而 $U \cap K$ 还是开集, 所以存在 r 使得 $B(\varphi(x), r) \subseteq \varphi(K \cap U)$, 考虑开集

$$V = \varphi^{-1}(B(\varphi(x), r/2))$$

根据 φ 是同胚可得

$$\overline{V} = \overline{\varphi^{-1}(B(\varphi(x), r/2))} = \varphi^{-1}(\overline{B(\varphi(x), r/2)}) \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(K \cap U))$$

从而 $\overline{V} \subseteq U$, 所以这个 V 就是满足条件的 x 的邻域.

1.1.2 拓扑流形

对于一个 n 维局部欧式空间 X , 为其添加两个额外条件:

- T2性质: 任取不同的 $x, y \in X$, 存在互不相交的开集 A, B 使得 $x \in A, y \in B$
- 第二可数性质: X 存在可数拓扑基

这样的 X 称为 **n 维拓扑流形**, 满足 T2 性质的空间称为 Hausdorff 空间, 第二可数性质也称为 A_2 性质.

在众多优良的拓扑性质当中, T2 性都是不可或缺的, 比如我们刚才知道局部欧式空间正则. 加上 T2 和 A_2 性质之后就能把正则提升到正规:

Proposition 1.5

每个拓扑流形都是正规空间

Proof: 用[1]的Theorem 32.1, 前面说明了局部欧式空间正则, 加上第二可数性质就得到了正规

Proposition 1.6

拓扑流形 X 连通, 当且仅当 X 道路连通

Proof: 道路连通一定连通. 反过来, 根据 Proposition 1.2 和 Proposition 1.3 可得到道路连通

Proposition 1.7

拓扑流形 M 有可数预紧^a拓扑基

^a一个集合在 X 中是预紧的, 如果它在 X 中的闭包是紧的

Proof: 根据第二可数性, 取可数拓扑基, 记为 A_i . 任何一个 $x \in M$, 根据局部紧性, 存在预紧的邻域 U , i.e U 含于 M 的某个紧子集 K . 又 T2 空间的紧子集肯定是闭的, 所以 $\overline{U} \subseteq K$. K 是紧空间, 所以其闭子集 \overline{U} 是紧的. 根据拓扑基的性质, 取一个 $\{A_i\}_{i=1}$ 中的某个拓扑基, 记为 V_x , 满足

$$x \in V_x \subseteq U$$

则

$$\overline{V_x} \subseteq \overline{U} \subseteq K$$

因此 $\overline{V_x}$ 紧, 从而 V_x 预紧. 这样根据 x 的任意性, 每个 x 都有一个 $V_x \in \{A_i\}_{i=1}$, 且 V_x 是预紧的.

另一方面, 对 V_x , 我们把 $\{A_i\}_{i=1}$ 中含于 V_x 的元素全部放进去, 设 $A_j \subseteq V_x$, 则 $\overline{A_j} \subseteq \overline{V_x}$, 因此 A_j 预紧. 记 V_x 和这些(含于 V_x 的) A_j 的全体为 P_x , 考虑集合

$$\mathcal{P} = \cup_{x \in M} P_x$$

注意到 \mathcal{P} 中的元素都是 $\{A_i\}_{i=1}$ 中的, 所以 \mathcal{P} 是可数集 $\{A_i\}_{i=1}$ 的子集, 还是可数的. 而且其中的元素都是预紧的. 下面证明 \mathcal{P} 是拓扑基.

只需验证对任何开集 U 和 $x \in U$, 存在 $V \in \mathcal{P}$ 使得 $x \in V \subseteq U$.

首先我们取对应的 V_x , 那么 $V_x \cap U$ 还是开集, 根据 $\{A_i\}_{i=1}$ 是拓扑基可得存在 $A_i \subseteq V_x \cap U$ 且 $x \in A_i$, 那么这个 $A_i \in P_x$, 因此 $A_i \in \mathcal{P}$, 证毕

Proposition 1.8

拓扑流形 M 总有一个由紧集构成的穷竭, i.e 存在紧集序列 X_i 满足

$$M = \cup_{i=1}^{\infty} X_i \quad X_i \subseteq \text{Int} X_{i+1}$$

Proof: 找出可数预紧拓扑基, 记为 U_i , 记

$$X_1 = \overline{U_1}$$

假设我们已经得到了紧集 X_2, \dots, X_{n-1} 使得 $U_j \subseteq X_j$ 且 $X_i \subseteq \text{Int} X_{i+1}, 1 \leq i \leq n-2$, 则根据 X_{n-1} 是紧集可得存在有限个 U_1, \dots, U_{m_n} 覆盖 X_{n-1} , 令

$$X_n = \overline{U_1 \cup \dots \cup U_{m_n} \cup U_n}$$

则这是 $m_n + 1$ 个开集的并集, 因此和闭包可以交换次序, 从而 X_n 是紧的且 $X_{n-1} \subseteq \text{Int} X_n$, 根据数学归纳法可得 X_i 就是 M 的穷竭

Proposition 1.9

每个拓扑流形仿紧. 事实上对拓扑流形 M 和 M 的开覆盖 \mathcal{X} . 对 M 的任一组拓扑基 \mathcal{B} , 都存在由 \mathcal{B} 中元素组成的 \mathcal{X} 的加细. 且这个加细是可数的, 局部有限的.

Proof: 取前面的穷竭记为 K_j , 定义

$$V_j = K_{j+1} - \text{Int} K_j \quad W_j = \text{Int} K_{j+2} - K_{j-1}$$

则 V_j, W_j 分别是紧集(因为是紧集 K_{j+1} 的闭子集)和开集, 且 $V_j \subseteq W_j$.

任取 $x \in V_j$, 则存在 $A_x \in \mathcal{X}$, 且 $x \in A_x$. 根据 \mathcal{B} 是拓扑基可得存在 B_x 使得

$$x \in B_x \subseteq A_x \cap W_j$$

则当 $x \in V_j$ 变动时 $\cup_{x \in V_j} B_x$ 是 V_j 的开覆盖, 取有限子覆盖记为 C_j . 那么 $\cup_{j=1}^{\infty} C_j$ 是 \mathcal{X} 的加细还是可数的

只需证局部有限性. 注意 W_j 只可能和 W_{j-1}, W_{j+1} 交集非空, 且 C_j 中的元素都含于 W_j . 任取 $x \in M$, 存在 j 使得 $x \in W_j$, 从而 W_j 和 $\cup_{j=1}^{\infty} C_j$ 中至多和 C_{j-1}, C_{j+1} 中的元素相交, 这些只有有限多个

1.1.3 带边流形

我们前面考虑的流形 M 都是开集, 因为每个点 x 附近都有一个坐标邻域 U , 所以每个点都是 M 的内点. 不过很多几何对象本身并不是开的. 比如说 R^n 中的单位闭球体. 或者第 n 个分量 ≥ 0 的全体. 它们除了内点以外还有边界点. 我

们希望把这类拓扑空间,也放入流形的框架下,这就引出了如下概念:

Definition 1.10

M 是一个拓扑空间. 设对任何一个 $x \in M$, 都存在一个邻域 U 和一个映射 φ , 满足 φ 是 U 到 H^n 的某个开子集的同胚. 如果 $\varphi(U) \cap \partial H^n = \emptyset$, i.e $\varphi(U)$ 是 R^n 中的开集, 那么称 (U, φ) 为**内坐标卡**, 否则称为**边界坐标卡**. 对 $x \in M$, 如果存在坐标卡 (U, φ) , 使得 $x \in \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \partial H^n)$, 则称 x 是 M 的**边界点**, 边界点的全体记为 ∂M . 其他点称为 M 的内点, 内点的全体记为 $Int M$. M 称为 **n 维带边流形**

以上定义有两处让人疑惑的地方, 首先, $\varphi(U) \cap \partial H^n = \emptyset$ 能得出 $\varphi(U)$ 是 R^n 的开集吗? 这个事实并不明显. 假设 $W \cap \partial H^n = \emptyset$ 且是 H^n 中的开集, 那么存在 R^n 中的开集 V 使得 $U = H^n \cap V$. 另一方面, W 中每个点的最后一个分量必须严格 > 0 (因为 $W \subseteq H^n$ 且和 ∂H^n 不交), 这意味着

$$U = U \cap \{x | x_n > 0\} = V \cap \{x | x_n > 0\} \cap H^n$$

而 $\{x | x_n > 0\} \subseteq H^n$, 所以 $U = V \cap \{x | x_n > 0\}$, 又 $\{x | x_n > 0\}$ 是 R^n 的开子集, 所以 U 是 R^n 的开子集

另一个问题是, 边界点这个概念是不是良定义的?

Proposition 1.11

M 是 n 维带边流形, 则 M 的边界点是一个良定义的概念. 也就是说, 若对某个边界坐标卡 (U, φ) , 有 $x \in \varphi^{-1}(\partial H^n)$. 那么对 x 附近的任意坐标卡 (V, ψ) , (V, ψ) 必须是边界坐标卡且 $x \in \psi^{-1}(\partial H^n)$

目前我们还没有足够的工具证明这个命题. 本书在证明该命题之前, 都不会用到这个命题, 因为后文的研究对象都是光滑流形. 稍后我们将证明一个弱化的情形: 对于光滑流形来说, 边界点确实是良定义的概念.

1.2 光滑结构

为了在流形上使用分析学的技术, 比如求微分, 求积分, 这要求我们考虑流形上具备一定“光滑”性质的函数, 但是流形是一个拓扑对象, 光滑则是分析学上的概念, 为了将二者联系起来, 我们称一个函数 $f: X \rightarrow R$ 在 $p \in X$ 处是光滑的, 如果对任何的包含 x 的坐标卡 (U, φ) , $f \circ \varphi^{-1}$ 都是 $\varphi(U)$ 上的光滑函数, 这里的光滑就是 R^n 中的集合上的函数光滑的含义¹

这样的定义好像有点麻烦, 因为要对每个包含 x 的坐标卡进行光滑性验证, 这样做有时成本很高. 但是我们发现, 对任何两个这样的坐标卡 $(U, \varphi), (V, \psi)$, 有

$$f \circ \varphi^{-1} = f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1} \quad y \in \varphi(U \cap V)$$

所以只要 $\psi \circ \varphi^{-1}$ 作为 R^n 的某两个开集之间的映射, 是光滑的, 那么根据 R^n 中光滑映射的复合还是光滑的, 我们只需对 $f \circ \psi^{-1}$ 验证光滑性, 就能得到 $f \circ \varphi^{-1}$ 的光滑性. 这就引出了**光滑相容**的概念: M 是 n 维拓扑流形, $(U, \varphi), (V, \psi)$ 是 M 中的两个坐标卡, 且 $U \cap V \neq \emptyset$, $\psi \circ \varphi^{-1}$ 叫做**转移映射**, 显然是 $\varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ 的同胚. 称这两个坐标卡是**光滑相容**的, 如果转移映射是微分同胚(也就是说转移映射及其逆映射都是光滑函数). 如果有一组坐标卡, 它们的坐标邻域能够覆盖 M , 那么称这组坐标卡是一个**图册**, 或**坐标覆盖**, 如果图册中的所有坐标卡都是光滑相容的, 就称之为**光滑图册**. 一个光滑图册是**极大的**, 如果它包含了所有和它里面的坐标卡光滑相容的坐标卡, 极大的光滑图册称为**光滑结构**, 一个拓扑流形 M 和光滑结构 A 合起来称为**光滑流形**.

值得注意的是, 一个拓扑流形上未必仅有一个光滑结构. 比如说, (R, id) 自己组成一个光滑图册, (R, x^3) 自己又组成一个光滑图册, 但是 $id \circ x^{\frac{1}{3}}$ 在0处不光滑, 所以这两个坐标卡不是光滑相容的, 不可能含于同一个极大图册中, 所以包含它们的极大图册肯定是两个不同的极大图册, 也就是说 R 上至少存在两种光滑结构

¹ f 在集合 A 上光滑, 意味着存在 A 的邻域 U 和 U 上的无穷次可微的函数 g , 使得 $g|_A = f$. 如果 A 是开集那么可以取 U 是 A 本身, 其他情况的话 U 就是 A 的一个邻域

Proposition 1.12

M 是 n 维拓扑流形(无论带边与否), \mathcal{A} 是 M 上的一个光滑图册, 那么存在 M 上存在一个唯一的光滑结构, 且包含 \mathcal{A} . 这个光滑结构称为 \mathcal{A} 诱导的光滑结构

Proof: 我们把所有与 \mathcal{A} 中坐标卡相容的坐标卡全都放进一个集合 $\overline{\mathcal{A}}$ 中. 显然 $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$. 下面证明 $\overline{\mathcal{A}}$ 是一个光滑图册. 任取 $\overline{\mathcal{A}}$ 中的两个坐标卡 $(U, \varphi), (V, \psi)$. 设 $p \in U \cap V$, 取 p 附近的 \mathcal{A} 中的坐标卡 (K, ξ) , 则

$$\varphi \circ \psi^{-1} = [\varphi \circ \xi^{-1}] \circ [\xi \circ \psi^{-1}]$$

又 $(U, \varphi), (V, \psi)$ 各自和 (K, ξ) 光滑相容, 所以 $\varphi \circ \psi^{-1}$ 在 p 的邻域 $U \cap V \cap K$ 上光滑. 根据 p 的任意性, $\varphi \circ \psi^{-1}$ 光滑. 因此 $\overline{\mathcal{A}}$ 还是图册.

然后证明 $\overline{\mathcal{A}}$ 的极大性, 假设有一个不同的包含 \mathcal{A} 的图册 \mathcal{B} , 则 \mathcal{B} 中任意坐标卡都和 \mathcal{A} 中坐标卡光滑相容, 根据 $\overline{\mathcal{A}}$ 的定义, 这个坐标卡必须在 $\overline{\mathcal{A}}$ 里, 从而 $\mathcal{B} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$.

这说明 $\overline{\mathcal{A}}$ 的确是一个光滑结构, 然后证明 $\overline{\mathcal{A}}$ 的唯一性. 假设有一个不同的包含 \mathcal{A} 的光滑结构 \mathcal{B} , 那么 \mathcal{B} 也是个包含 \mathcal{A} 的图册, 则根据 $\overline{\mathcal{A}}$ 的极大性可得 $\mathcal{B} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$. 又 \mathcal{B} 也是极大的, 且 $\overline{\mathcal{A}}$ 是个包含 \mathcal{A} 的图册, 所以根据极大性 $\overline{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{B}$, 因此二者只能相等

下面的推论说明有时候不同的图册会诱导出同样的光滑结构.

Corollary 1.13

M 是 n 维拓扑流形(无论带边与否), 两个图册诱导出同一光滑结构, 当且仅当它们是光滑相容的(i.e它们的并集还是个图册)

Proof: \Rightarrow 如果诱导出同一光滑结构, 那么两个图册在同一光滑结构中, 同一光滑结构的任两个坐标卡都是光滑相容的

\Leftarrow 如果两个图册 \mathcal{A}, \mathcal{B} 光滑相容, 那么它们的并集还是个图册, 这个图册诱导出的光滑结构 \mathcal{C} 包含了 \mathcal{A}, \mathcal{B} . 从而根据 \mathcal{A}, \mathcal{B} 诱导出的光滑结构的唯一性, \mathcal{C} 就是 \mathcal{A}, \mathcal{B} 诱导出的光滑结构

Proposition 1.14

M 是 n 维带边光滑流形, 则 M 的边界点是一个良定义的概念. 也就是说, 若对某个边界坐标卡 (U, φ) , 有 $x \in \varphi^{-1}(\partial H^n)$. 那么对 x 附近的任意坐标卡 (V, ψ) , (V, ψ) 必须是边界坐标卡且 $x \in \psi^{-1}(\partial H^n)$

Proof: 假设 $\psi(x) \notin \partial H^n$, 那么 $\psi(x) \in \psi(V \cap U) \cap \{x | x_n > 0\}$. 又 $\psi(V \cap U)$ 是 H^n 中的开集(因为 $U \cap V$ 是 V 的开子集且 ψ 是同胚), 所以存在 R^n 中的开集 K 使得 $\psi(V \cap U) = K \cap H^n$, 因此存在 $\psi(x)$ 的邻域 $B = B(\psi(x), r) \subseteq K \cap H^n = \psi(V \cap U)$. 把 $\varphi \circ \psi^{-1}$ 看成 B 上的光滑映射, 记为 π

那么根据光滑相容可得 $\eta = \pi^{-1}$ 也是光滑的, 根据光滑的定义, $\eta = \pi^{-1}$ 在 $\pi(B)$ 的某个开邻域上光滑. 因此

$$id_B = \eta \circ \pi$$

两边取jacobian矩阵得到

$$I_n = D\eta(\pi(y)) \circ D\pi(y) \quad y = \psi(x)$$

因此 π 在 x 处的jacobian是非异阵, 因此根据数学分析中的反函数定理可得在 π 在 $\psi(x)$ 附近是开映射, 把 π 看成 $B \rightarrow R^n$ 的光滑映射, 则存在 x 的邻域 P 使得 $\pi(P)$ 是 R^n 中的开集. 又 $\pi(\psi(x)) = \varphi(x) \in \partial H^n$, 所以 $\pi(P)$ 作为 $\varphi(x)$ 的邻域, 必定存在第 n 个分量 < 0 的点. 但 $\pi(P) = \varphi \circ \psi^{-1}(P) \subseteq H^n$, 不存在第 n 个分量 < 0 的点, 矛盾. 因此 $x \in \psi^{-1}(\partial H^n)$. 这也暗示了所有覆盖 x 的坐标卡必须是边界坐标卡(因为值域和 ∂H^n 交集非空)

Proposition 1.15

M 是 n 维光滑带边流形. x 是 M 的内点, 那么 x 含于某个内坐标卡

Proof:任意取 x 附近的一个坐标卡 (V, ψ) . 如果这是个内坐标卡, 那么什么也不需要证明. 只需设这是个边界坐标卡.

既然 x 是内点, 那么 $\psi(x) \notin \partial H^n$, 照抄上面的第一段, 存在 R^n 中 $\psi(x)$ 的开邻域 B , 且 $B \subseteq \psi(V)$. 根据 ψ 是同胚可得 $\psi^{-1}(B)$ 是 V 中的开集. 又 V 是 M 的开子集, 所以 $\psi^{-1}(B)$ 是 M 的开子集, 还是 x 的邻域, 因此 $(\psi^{-1}(B), \psi)$ 还是一个坐标卡. 根据 ψ 和其他函数的相容性, 这个坐标卡和其他坐标卡也是光滑相容的, 且 B 是 R^n 中的开集, 所以这是个内坐标卡

1.3 理解光滑坐标卡

根据前面的定义, 只要拓扑流形 M 上的两个图册是相容的, 那么它们诱导出的光滑结构一样. 当给出 M 的一个图册 A (或者说, 坐标覆盖 $A(U_\alpha, \varphi_\alpha)$)时, 如果你觉得这个坐标覆盖不好, 那么可以换一个和坐标覆盖 A 相容的坐标覆盖 B , 来研究 M . 这并不改变 M 上的光滑结构, 所以并不会改变光滑流形 M 本身的性质.

光滑坐标卡是一个非常灵活的概念. 给定一个 n 维光滑流形 M , 对于 $x \in \text{Int}M$, 我们知道内点坐标卡 (U, φ) . $\varphi(U)$ 是 $\varphi(x)$ 在 R^n 中的邻域, 因此存在一个球体 $B(\varphi(x), r) \subseteq \varphi(U)$, 令 $K = \varphi^{-1}(B(\varphi(x), r))$, 则根据同胚可得 K 是 x 的邻域, 因此 (K, φ) 是个坐标卡. 且根据 φ 和其他坐标函数的相容性, 这个坐标卡是光滑坐标卡. 且把 x 的坐标邻域 K 映射为一个球体. 因此以后取 x 附近的坐标卡时, 可以

取 x 附近的坐标卡 (U, φ) 使得 $\varphi(U)$ 是 R^n 中的开球

此外, 通过平移和伸缩, 定义 $\psi(y) = \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{r}$, 则 $\psi^{-1}(z) = \varphi^{-1}(zr + \varphi(x))$. 根据平移和伸缩都是特殊的微分同胚可知, 坐标卡 (K, ψ) 也是个光滑坐标卡. 因此以后取 x 附近的坐标卡时, 可以

取 x 附近的坐标卡 (U, φ) 使得 $\varphi(U)$ 是 R^n 中的单位开球 $B(0, 1)$

或者更一般的, 如果有开集 V 包含了 $\varphi(U)$, 且有一个 V 上的光滑同胚 f , 满足 f^{-1} 也光滑那么 $(U, f \circ \varphi)$ 还能成为一个坐标卡, 因为对任何坐标映射 $\phi, f \circ \varphi \circ \phi^{-1}, \phi \circ \varphi^{-1} \circ f^{-1}$ 还是光滑的.

除了对 $\varphi(U)$ 进行微分同胚, 我们还能缩小 U , 比如说给定一个开集 $K, x \in K \cap U$, 那么 $\varphi|_{K \cap U}$ 还是同胚, 从而 $(U \cap K, \varphi)$ 就是坐标邻域在 K 中的一个坐标卡. 所以以后遇到 x 的邻域 K 时, 可以

取 x 附近的坐标卡 (U, φ) , 不妨设 $U \subseteq K$

对于边界坐标卡来说, 道理是类似的. 假设 $x \in \partial M$. 那么 x 必定含于一个边界坐标卡 (U, φ) , 设存在 R^n 中的开集 K 使得 $\varphi(U) = K \cap H^n$. 那么由 $\varphi(x) \in K$ 可得存在 r 使得 $B(\varphi(x), r) \subseteq K$, 因此

$$B^+ = B^+(\varphi(x), r) \subseteq \varphi(U)$$

B^+ 是 H^n 的开集, 因此 $K = \varphi^{-1}(B^+)$ 也是开的, 且包含 x , 根据 φ 和其他坐标映射的相容性, 可得 (K, φ) 也是 x 的边界坐标卡, 且 $\varphi(K) = B^+(\varphi(x), r)$ 是个半球体. 因此以后取 x 附近的坐标卡时, 可以

取 x 附近的坐标卡 (U, φ) 使得 $\varphi(U)$ 是 H^n 中的半球体

此外, 通过平移和伸缩, 定义 $\psi(y) = \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{r}$, 可以

取 x 附近的坐标卡 (U, φ) 使得 $\varphi(U)$ 是 R^n 中的单位半开球 $B^+(0, 1) = B(0, 1) \cap H^n$

另外, 无论是边界坐标卡还是内坐标卡, 我们可以交换坐标函数的某两个分量(边界坐标卡的情形, 最后一个坐标轴不能和其他轴交换), 这个变换对任意内坐标卡都是同胚, 所以交换分量之后得到的映射还是同胚. 这种交换坐

标的操作能给转移映射的研究带来很多有利条件.

还有给坐标函数做减法的方法, 比如给定 p 附近的坐标卡 (U, φ) , 令 $\psi(q) = \varphi(q) - \varphi(p)$, 则 (U, ψ) 还是 p 附近的坐标卡且 $\psi(p) = 0$. 因此在需要时可以:

不妨设 $\varphi(p) = 0$.

另一个重要的事情是可以取坐标卡 (U, φ) 使得 $\varphi(U) = \mathbb{R}^n$ 或 H^n , 具体地说, 如果 (U, φ) 是内坐标卡, 首先不妨设 $\varphi(U) = B(0, 1)$, 然后考虑

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}$$

那么 $(U, f \circ \varphi)$ 就是把 U 同胚到 \mathbb{R}^n 的光滑坐标卡. 如果 (U, φ) 是边界坐标卡, 那么不妨设 $\varphi(U) = B^+(0, 1)$, 则 $f \circ \varphi(U) = H^n$, 因此我们可取 M 的坐标覆盖, 使得每个坐标邻域要么同胚于 \mathbb{R}^n (内坐标卡), 要么同胚与 H^n (边界坐标卡)

我们以上都是对一个固定的 $x \in M$, 构造了一个新坐标卡, 记为 (U_x, φ_x) . 如何给出一个 M 的新的图册? 显然只需考虑坐标覆盖 $\{(U_x, \varphi_x)\}_{x \in M}$. 它们的相容性由“它们都在 M 的光滑结构中”这一事实保证. 下面我们看一个经典的应用:

Proposition 1.16

M 是 n 维光滑带边流形, 那么 ∂M 是 $n-1$ 维不带边的光滑流形

Proof: 在 M 的图册中取所有边界坐标卡, 记为 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, 不妨设 $\varphi_\alpha(U_\alpha) = B^+(0, 1)$

定义

$$V_\alpha = U_\alpha \cap \partial M$$

根据子空间拓扑的定义, V_α 是 ∂M 中的开集, 且所有 V_α 覆盖了 ∂M , 这是因为:

对任何 $x \in \partial M$, 如果 $x \in U_\alpha$, 则 $x \in U_\alpha \cap \varphi_\alpha^{-1}(\partial H^n) \subseteq U_\alpha \cap \partial M = V_\alpha$.

另一方面如果 $x \in V_\alpha$, 则 $x \in U_\alpha$, 结合 x 是边界点可以知道 $x \in \varphi_\alpha^{-1}(\partial H^n)$, 所以实际上

$$V_\alpha = U_\alpha \cap \varphi_\alpha^{-1}(\partial H^n)$$

定义坐标函数

$$\psi_\alpha(z) = \pi \circ \varphi_\alpha(z) \quad \forall z \in V_\alpha$$

其中 π 是 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ 前 $n-1$ 个分量的投影. 那么

$$\psi_\alpha(V_\alpha) = \pi(B^+(0, 1)) = \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}) \mid \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 < 1 \right\}$$

后者是 \mathbb{R}^{n-1} 的单位开球, 因此是开集且 ψ_α 是一一的, 根据 φ_α 是同胚可得 ψ_α 也是同胚. 且

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \pi \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$$

根据 $\pi, \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 光滑, 可得 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ 光滑, 因此 $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_\alpha$ 是 ∂M 的坐标覆盖, 全是内坐标卡. 因此 ∂M 是 $n-1$ 维无边光滑流形

1.4 构造新的流形

假设有两个光滑流形 M, N , 我们可以定义 $M \times N$ 上的光滑结构, 使之成为一个光滑流形.

Proposition 1.17 乘积流形

M 是 m 维不带边光滑流形, N 是 n 维不带边光滑流形, 则可以赋予 $M \times N$ 一个光滑结构使其成为 $m+n$ 维光滑流形

Proof: 设有 M 的坐标覆盖 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, N 的坐标覆盖 (V_β, ψ_β) , 则

$$(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)$$

是 $M \times N$ 的坐标覆盖. 局部欧式性质是显然的, 因为两个开集的乘积是乘积空间的开集, 两个同胚的乘积是乘积空间的同胚, 而相容性则是因为

$$\varphi_\alpha \times \psi_\beta \circ (\varphi_\xi \times \psi_\gamma)^{-1} = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\xi^{-1}) \times (\psi_\beta \circ \psi_\gamma^{-1})$$

还是光滑的

Proposition 1.18 流形的开子集

M 是 n 维光滑流形, U 是 M 的开子集, 则在子空间拓扑下, U 是 n 维光滑流形

Proof: 对任何 $p \in M$, 存在 M 中 p 附近的坐标卡 (V_p, ψ_p) , 则 $\{(U \cap V_p, \psi_p)\}_{p \in U}$ 就是一个图册. 从而决定了一个唯一的光滑结构.

1.5 光滑流形的例子

1.5.1 RP^n

考虑 $R^{n+1} - \{0\}$ 上的等价关系:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists t \in R \text{ s.t. } x = ty$$

也就是说 $x \sim y$ 当且仅当它们在同一条直线上. 等价类的全体记为 RP^n , 称为 n 维射影空间. 把 $[x]$ 记为 x 所在的等价类. 记 $\pi(x) = [x]$ 是 $R^{n+1} \rightarrow RP^n$ 的商映射, 我们赋予 RP^n 一个拓扑:

U 是 RP^n 中的开集, 当且仅当 $\pi^{-1}(U)$ 是 $R^{n+1} - \{0\}$ 中的开集

要证明 RP^n 是 T_2 和 A_2 的. 为此我们先说明商映射是开的. 任取 $X \in R^{n+1} - \{0\}$ 是一个开集, 则

$$\pi^{-1}(\pi(X)) = \left\{ y \in R^{n+1} - \{0\} \mid \exists x \in X, t \in R \text{ s.t. } y = tx \right\} = \cup_{t \in R - \{0\}} tX$$

其中 $tX = \{tx \mid x \in X\}$, 注意到映射 $f(x) = tx (t \neq 0)$ 给出了 $R^{n+1} \rightarrow R^{n+1}$ 的同胚, 因此 tX 都是开集, 因此 $\pi^{-1}(\pi(X))$ 是开集, 根据定义, $\pi(X)$ 是 RP^n 中的开集

现在我们可以证明第二可数性质, 取 $R^{n+1} - \{0\}$ 的可数拓扑基记为 B_i , 则显然 $\{\pi(B_i)\}_{i=1}^\infty$ 就是 RP^n 的可数拓扑基. 因此 RP^n 是第二可数的.

然后考虑乘积空间 $R^{n+1} - \{0\} \times R^{n+1} - \{0\}$, 考虑上面的一个子集

$$D = \{(x, y) \mid x \sim y\}$$

我们证明它是闭的. 假设 (u, v) 是 D 中某个点列 (x^n, y^n) 的极限点, 那么我们可以通过 R^{n+1} 的拓扑得到 $x^n \rightarrow u, y^n \rightarrow v$, 根据定义, u 和 v 的分量都不能全为0, 因此可设 $u_i \neq 0, v_j \neq 0$, 那么可以知道对足够大的 n , 都有 $x_i^n \neq 0, y_j^n \neq 0$,

因此 $t_n = \frac{x_j^n}{y_j^n}$, 根据 x^n, y^n 收敛可以给出 t_n 收敛, 不妨设收敛到 t , 因此

$$x_n = t_n y_n \Rightarrow u = tv$$

又 u, v 都不是 0, 因此 t 必定不为 0, 从而 $(u, v) \in D$. 这说明 D 是个闭集

从而对任何 $[x], [y] \in RP^n$, 我们证明 T2 性质. 注意到当 $[x] \neq [y]$ 时, $(x, y) \in D^c$, 因此根据乘积拓扑的拓扑基, 存在 x 和 y 在 $R^{n+1} - 0$ 的邻域 U, V 使得 $U \times V \subseteq D^c$, 继而 $\pi(U), \pi(V)$ 是 RP^n 中 $[x], [y]$ 的邻域. 如果 $\pi(U) \cap \pi(V) \neq \emptyset$, 则存在 $p \in U, q \in V$ 使得 $[p] = [q]$, 这说明 $(p, q) \in D$, 这与 $U \times V \subseteq D^c$ 矛盾. 因此 $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$, 这证明了 T2 性质

然后我们给出一组坐标卡, 并验证相容性, 从而给出 RP^n 是 n 维光滑流形. 令

$$U_i = \left\{ [x] \mid x_i \neq 0 \right\}$$

这是 RP^n 的开集, 因为这是开集 $\{x \in R^{n+1} - 0 \mid x_i \neq 0\}$ 在开映射 π 下的像. 定义

$$\varphi_i([x_1, \dots, x_{n+1}]) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$$

显然

$$\varphi_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) = [y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n]$$

容易验证 $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ 是光滑映射, 因此 (U_i, φ_i) 是 RP^n 的光滑图册, 因此 RP^n 是 n 维光滑流形.

1.5.2 S^n

接下来看一个简单的例子: R^{n+1} 中的单位球面 S^n , 显然这是 A2, T2 的, 因为 A2, T2 性质可以被子空间继承.

定义开集

$$U_i^+ = \{x \in S^n \mid x_i > 0\} \quad U_i^- = \{x \in S^n \mid x_i < 0\}$$

它们是 S^n 的开集, 是因为它们是开集 $\{x \in R^{n+1} \mid x_i > 0\}, \{x \in R^{n+1} \mid x_i < 0\}$ 和 S^n 的交集, 因而是子空间拓扑的开集

定义

$$\varphi_i(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \quad \text{扔掉第 } i \text{ 个分量}$$

这是 U_i^\pm 到 $B^n(0, 1)$ 的同胚. 容易验证 $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ 是光滑的. 因此 (U_i^\pm, φ_i) 是 S^n 的图册.

1.6 Appendix: review of topology

1.6.1 覆盖映射

设 E, X 都是连通且局部道路连通的拓扑空间(因此是全局道路连通的), $\pi: E \rightarrow X$ 是连续满射, 则 π 称为覆盖映射, 如果对任何 $p \in X$, 都存在 p 的邻域 U , 使得 π 限制在 $\pi^{-1}(U)$ 的每个连通分支上都是到 U 的同胚, 我们称这样的 U 是被 π 均匀覆盖的, $\pi^{-1}(U)$ 的每个连通分支称为 U 的层

1.6.2 逆紧

Definition 1.19

拓扑空间 $X \rightarrow Y$ 的映射 F (没说连续) 是逆紧 (proper) 的, 如果紧集的原像还是紧集

逆紧映射往往成为“定义域为紧集”的良好替代.

1.7 Exercise

Problem 1.1

紧Hasudorff空间上的逆紧映射都是闭映射

Problem 1.2

证明局部紧Hasudorff空间上的逆紧映射都是闭映射

Hint: 单点紧化之后给映射补充定义, 然后用前一个习题的结论

Problem 1.3

设 $B(0, 1)$ 是 R^n 中的开球, 证明 $B(0, 1)$ 和 R^n 微分同胚

Hint: 把映射 $f = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 推广到 R^n

Problem 1.4

证明对一个连通的拓扑流形 M , 任取其中两点 p, q , 都存在一个 $M \rightarrow M$ 的同胚 ψ 使得 $\psi(p) = q$

Problem 1.5

R 上的连通集一定是区间.

Problem 1.6

M 是拓扑空间, \mathcal{X} 是 M 中一族局部有限的集合, 证明 $\{\overline{X}\}_{X \in \mathcal{X}}$ 也是局部有限的

Problem 1.7

M 是光滑流形, 证明任何一组坐标覆盖, 都能抽出可数个坐标卡, 形成一个新的坐标覆盖.

Problem 1.8

M 是光滑流形, 证明存在一组可数拓扑基 \mathcal{B} , 满足对任何 $B \in \mathcal{B}$, 都存在一个坐标卡 (B', φ) 和 $r < 1$, 满足

$$\varphi(B') = B(0, 1) \quad \varphi(B) = B(0, r) \quad \varphi(\overline{B}) = \overline{B(0, r)}$$

对于边界坐标卡的情形, 要改成

$$\varphi(B') = B^+(0, 1) \quad \varphi(B) = B^+(0, r) \quad \varphi(\overline{B}) = \overline{B^+(0, r)}$$

这样的 B 称为正则坐标球体

Problem 1.9

M 是拓扑空间, \mathcal{X} 是一组局部有限的集合, 证明 \mathcal{X} 中的取并和取闭包能交换次序:

$$\overline{\cup_{X \in \mathcal{X}} X} = \cup_{X \in \mathcal{X}} \overline{X}$$

Hint: 右边显然含于左边, 要证明反向的包含, 则可考虑任意极限点, 然后用Problem 1.6的结论.

Problem 1.10

M 是拓扑空间, 考虑 $M \times M$ 上自然的乘积拓扑, 证明对角线

$$\Delta = \left\{ (p, p) \mid p \in M \right\}$$

是 $M \times M$ 中的闭集.

第二章 光滑映射

2.1 光滑性的刻画

有了光滑结构, 我们就能把光滑的概念推广到流形上去. 给定一个 n 维光滑流形 M , 称 f 是 $M \rightarrow R^k$ 的光滑函数, 如果对任何 $p \in M$, 都存在一个包含 p 的坐标卡 (U, φ) 使得 $f \circ \varphi^{-1}$ 是 $\varphi(U)$ 上的光滑函数.

注意到, 根据转移映射的光滑性, 这等价于对 M 中的任何光滑坐标卡 (V, ψ) , $f \circ \psi^{-1}$ 都是光滑函数. 其中 $f \circ \varphi^{-1}$ 是 f 在 (U, φ) 下的坐标表示, 可以发现 f 在不同坐标卡下的坐标表示未必相同. 所以我们在提及坐标表示的时候, 必须要明确是关于哪一个坐标卡的.

我们可以光滑函数的概念推广到流形之间的映射. 设 M, N 是微分流形, $f: M \rightarrow N$ 是光滑的, 如果对任何 $p \in M$, 存在 p 附近的坐标卡 (U, φ) 和 $f(p)$ 附近的坐标卡 (V, ψ) 使得 $f(U) \subseteq V$, 且在 $\varphi(U)$ 上有

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \text{ 光滑}$$

我们称这个函数为 f 在坐标卡 $(U, \varphi), (V, \psi)$ 下的坐标表示

Proposition 2.1

光滑映射必定连续

Proof: 对任何 $p \in M$, 沿用前面的记号, 我们知道

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$$

在 $\varphi(U)$ 上光滑, 所以连续, 又 ψ, φ 都是同胚, 所以两边复合 ψ^{-1}, φ 之后得到 F 在 U 上连续, 根据 p 的任意性可得 F 处处连续

Proposition 2.2

F 是 $M \rightarrow N$ 的光滑函数, 等价于对 M, N 的任何光滑坐标卡 $(U, \varphi), (V, \psi)$, 均有

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} \text{ 在其定义域内光滑}$$

Proof: \Leftarrow 对任何 $p \in M$, 取一对使得 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ 光滑的坐标卡 $(U, \varphi), (V, \psi)$, 因为 $F^{-1}(V) \cap U$ 是 p 的邻域(因为根据连续性, $F^{-1}(U)$ 是开的), 令 $K = U \cap F^{-1}(V)$, 则 (K, φ) 还是 p 附近的坐标卡且 $\varphi(K) \subseteq V$, F 在 $(K, \varphi), (V, \psi)$ 下的坐标表示还是 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$, 因此光滑, 根据 p 的任意性, 这是光滑性的最初定义, 证毕

\Rightarrow 假设存在 p , $F(p)$ 附近的坐标卡 $(U, \xi), (V, \eta)$ 使得

$$\eta \circ F \circ \xi^{-1}$$

在 $\varphi(U)$ 上光滑, 那么根据转移映射 $\psi \circ \eta^{-1}, \xi \circ \varphi^{-1}$ 的光滑性可得

$$\psi \circ \eta^{-1} \circ \eta \circ F \circ \xi^{-1} \circ \xi \circ \varphi^{-1} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \text{ 光滑}$$

Proposition 2.3 光滑性是局部的性质

设 F 是光滑流形 $M \rightarrow N$ 的光滑映射. 那么

- 如果对于任何 $p \in M$, 存在 p 的邻域 U 使得 $F|_U$ 是光滑的, 则 F 在 M 上光滑
- 如果 F 光滑, 那么 F 限制在 M 的任一开子集上都是光滑的

Proof: (a) 任取 $p \in M$, 因为 U 是 M 的开子流形, 根据第一章构造的开子流形的图册, 对于 M 中 p 附近的坐标卡 (V, ψ) , $(U \cap V, \psi)$ 是 U 中包含 p 的坐标卡, 因此根据光滑的定义, 存在 $F(p)$ 附近的坐标卡 (K, φ) 使得

$$\varphi \circ F|_U \circ \psi^{-1} = \varphi \circ F \circ \psi^{-1}$$

是 $\psi(U \cap F^{-1}(V))$ 上的光滑函数, 又 $U \cap F^{-1}(V)$ 是 p 的邻域, 从而 $(U \cap F^{-1}(V), \psi)$ 是 M 中 p 附近的坐标卡, 根据 p 的任意性, 每个 p 都能找出 M 中 p 附近的坐标卡, 和 N 中 $F(p)$ 附近的坐标卡, 使得 F 在这两个坐标卡下的坐标表示为光滑函数, 这就是光滑的定义

(b) 显然的. 对任何 $p \in U$, 取 M 中 p 附近的坐标卡 (V, ψ) , 则 $(U \cap V, \psi)$ 是 U 中 p 附近的坐标卡, 再取 N 中 $F(p)$ 附近的坐标卡 (K, φ) , 那么

$$\varphi \circ F|_U \circ \psi^{-1} = \varphi \circ F \circ \psi^{-1}$$

右边根据 F 的光滑性是光滑的, 所以左边光滑, 因此根据 p 的任意性, $F|_U$ 光滑

Corollary 2.4

M, N, P 是光滑流形, 那么

- $M \rightarrow N$ 的常值映射光滑
- M 上的恒等映射光滑
- U 是 M 的开子集, 则 $U \rightarrow M$ 的光滑映射还是光滑的
- $F: M \rightarrow N, G: N \rightarrow P$ 都光滑, 那么 $G \circ F: M \rightarrow P$ 光滑
- $M_1 \times \cdots \times M_n$ 是乘积流形, π 是到 M_i 的投影映射, 那么 π 光滑
- $M_1 \times \cdots \times M_n$ 是乘积流形, $F_i: N \rightarrow M_i$ 是光滑映射, 那么 $F_1 \times \cdots \times F_n$ 是 $N \rightarrow M_1 \times \cdots \times M_n$ 的光滑映射

Proof: 前两个很容易

(c) 对任何 $p \in U$, 存在 M 中 p 附近的坐标卡 (V, φ) , 则 $(U \cap V, \varphi)$ 是 U 中 p 附近的坐标卡, 从而

$$\varphi \circ \iota \circ \varphi^{-1} = id \quad x \in \varphi(U \cap V)$$

(d) 取 $p, F(p), G(p)$ 附近的坐标卡 $(U, \varphi), (V, \psi), (K, \xi)$, 那么

$$\xi \circ G \circ F \circ \varphi = (\xi \circ G \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \varphi)$$

右边光滑, 所以左边光滑

(e) 回忆乘积流形的坐标卡, 可取 $(U_1 \times \cdots \times U_n, \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n)$, 其中 (U_i, φ_i) 是 M_i 中的坐标卡, 那么 π 的一个坐标表示为

$$\varphi_i \circ \pi \circ (\varphi_1^{-1}, \dots, \varphi_n^{-1})(x_1, \dots, x_n) = x_i$$

其中 x_i 是 R^{r_i} 维的向量, 且含于 $\varphi_i(U_i)$. 以上映射显然光滑

(f) 取 N 中 p 附近的坐标卡 (V, ψ) , $(F_1(p), \dots, F_n(p))$ 附近的坐标卡 $(U_1 \times \dots \times U_n, \varphi_1 \times \dots \times \varphi_n)$

然后注意到

$$\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n \circ F_1 \times \dots \times F_n \circ \psi^{-1} = \varphi_1 \circ F_1 \circ \psi^{-1} \times \dots \times \varphi_n \circ F_n \circ \psi^{-1}$$

欧式空间开集上的光滑函数的直积还是光滑的, 因此证毕

Proposition 2.5

设 M_1, \dots, M_n 是光滑流形, $F : N \rightarrow M_1 \times \dots \times M_n$ 是光滑映射, 当且仅当对每个 i , 到 M_i 的投影映射 π_i , 均有 $F_i = \pi_i \circ F$ 是 $N \rightarrow M_i$ 的光滑映射

Proof: \Rightarrow 投影映射显然光滑, 再根据光滑映射的复合还是光滑可知证毕.

\Leftarrow

$$F = (\pi_1 \circ F, \dots, \pi_n \circ F)$$

是 $\pi_i \circ F_i$ 的直积, 从而也是光滑的.

2.2 微分同胚

Definition 2.6

M, N 是两个光滑流形, $F : M \rightarrow N$ 是光滑映射, 且是同胚, 如果 $F^{-1} : N \rightarrow M$ 也是光滑的, 则称 F 是微分同胚

以下的结论是显然的, 留给读者自行验证:

Proposition 2.7

- 微分同胚是拓扑同胚, 因此是开映射和闭映射
- 微分同胚和复合还是微分同胚
- 有限个微分同胚的直积映射还是微分同胚
- 微分同胚限制在开子流形 U 上还是到 $f|_U$ 的值域的微分同胚, 无论流形是不是带边的
- 流形之间的“微分同胚”是等价关系(自反性, 对称性, 传递性)

2.3 单位分解

微分流形是一个聚焦于局部的几何对象. 下面我们介绍一个有用的工具, 叫做单位分解. 能够把局部性质粘贴到整体, 也能把整体化解到局部.

Definition 2.8 Partition of unity

M 是光滑流形, 那么任意给出 M 的一组开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 都存在一组光滑函数 ψ_α , 使得

- $0 \leq \psi_\alpha \leq 1$
- $\text{supp} \psi_\alpha \subseteq U_\alpha$ 而且是局部有限的, 也就是说, 对任意点 $p \in M$, 存在 p 的邻域 Q 使得 Q 只和有限多个 $\text{supp} \psi_\alpha$ 相交
- $\sum_\alpha \psi_\alpha = 1$ 在 M 上恒成立

为了证明单位分解的存在性, 我们先给出一些技术性的引理:

Lemma 2.9

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

是 \mathbb{R} 上的光滑函数

Proof: 在 $t > 0$ 时, 用数学归纳法可知

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2n}}$$

其中 P_n 是关于 t 的多项式, 因此这个函数光滑

在 $t = 0$ 时, 用数学归纳法可得 $f^{(n)}(0) = 0$ (因为可以用 $t > 0$ 的情形令给出 $f^{(n)}(t)$, 归纳假设 $f^{(n)}(0) = 0$, 可用来计算 $f^{(n+1)}(0) = 0$)

$t < 0$ 是, 各阶微分都是0

Lemma 2.10

对任何 $r_1 < r_2$, 存在光滑函数 $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 使得 $h(t) = 1$ 当 $t \leq r_1$ 时成立, $h(t) = 0$ 在 $t \geq r_2$ 时成立, 在其他地方 $0 < h(t) < 1$

Proof: 令 f 是前一个Lemma构造的光滑函数,

$$h(t) = \frac{f(r_2 - t)}{f(r_2 - t) + f(t - r_1)}$$

下面我们把这个结果推广到高维:

Lemma 2.11

对任何 $0 < r_1 < r_2$, 存在光滑函数 $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 使得 H 在 $\overline{B(0, r_1)}$ 上为1, 在 $B(0, r_2)^c$ 上为0. 其他地方满足 $0 < H(x) < 1$

Proof: 设 h 是前一个lemma中的光滑函数, 令

$$H(x) = h(|x|)$$

光滑性有疑问的地方在于0附近, 但此时 $H(x) = 1$ 恒成立, 所以各阶偏导数都是0

Theorem 2.12 单位分解的存在性

M 是带边或不带边光滑流形, $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 是 M 的一组开覆盖, 则存在从属于 \mathcal{X} 的单位分解

Proof: 注意到每个 X_α 都是一个光滑流形, 根据Problem 1.8, 存在可数个正则坐标球体作为拓扑基, 记为 \mathcal{B}_α . 容易证明 $\mathcal{B} = \cup_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ 是 M 的拓扑基, 因此根据Proposition 1.9, 存在可数个开集 $B_i \in \mathcal{B}$, 使得 $\{B_i\}$ 是 \mathcal{X} 的加细且是局部有限的. 根据Problem 1.6, $\{\overline{B_i}\}_{i=1}$ 也是局部有限的.

根据正则坐标球的性质, 对任何 $B_i (B_i \subseteq \text{某个 } X_\alpha, \text{因为 } B_i \text{ 是加细})$, 根据正则坐标球的定义: 存在一个 $B'_i \subseteq X_\alpha$ 和光滑的坐标映射 φ_i 使得

$$\varphi_i(\overline{B_i}) = \overline{B(0, r_i)} \quad \varphi_i(B'_i) = B(0, 1)$$

定义映射

$$f_i(p) = \begin{cases} H_i \circ \varphi_i & p \in B'_i \\ 0 & p \in M - \overline{B_i} \end{cases}$$

其中 H_i 是在 $\overline{B(0, r_i)}$ 上为1, 在 $B(0, 1)^c$ 上为0, 其他地方 $0 < H_i < 1$ 的光滑函数. 则根据 H_i 的性质可得上述定义在 $p \in B'_i \cap (M - \overline{B_i})$ 上没有歧义($f_i = 0$). 我们发现

$$\text{supp} f_i = \overline{B_i}$$

定义

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \quad M \rightarrow R$$

根据 $\overline{B_i}$ 局部有限可得对任何 $x \in M$, 使得 $f_i(x) \neq 0$ 的 i 在 x 的某个邻域 V 中只有有限多个, 所以以上求和在 V 上只有有限个非0, 因此是 V 上的光滑函数. 根据 x 的任意性可得 f 是 M 上的光滑函数的

又 f 必定非负, 因为对任何 $x \in M$, 都存在 i 使得 $x \in B_i$. 所以可以另

$$g_i = \frac{f_i}{f}$$

还是 M 上光滑函数. 且

$$0 \leq g_i \leq 1 \quad \text{supp} g_i = \overline{B_i} \quad \sum_{i=1}^{\infty} g_i = 1$$

然后我们重新设置 g_i 的指标, 又因为每个 B'_i 都含于某个 X_α 中, 所以对任何 i , 都存在某个指标 $\alpha(i) \in \Gamma$ 使得 $B'_i \subseteq X_{\alpha(i)}$, 对每个 i 都取定这样的 $\alpha(i)$. 考虑映射

$$f(i) = \alpha(i) \quad \text{尽管可能有多个 } X_\alpha \text{ 包含 } B_i, \text{ 但我们只考虑固定其中的某一个作为 } \alpha(i), \text{ 从而 } f \text{ 是单值函数}$$

对每个 $\alpha \in \Gamma$, 定义

$$\psi_\alpha = \sum_{i: \alpha(i)=\alpha} g_i$$

从而根据Problem 1.9,

$$\text{supp} \psi_\alpha = \overline{\cup_{\alpha(i)=\alpha} B_i} = \cup_{\alpha(i)=\alpha} \overline{B_i} \subseteq X_\alpha$$

然后说明局部有限性, 定义

$$B(\beta) = \left\{ i \mid f(i) = \beta \right\}$$

则对不同的 α, β , 都有 $B(\alpha) \cap B(\beta) = \emptyset$, 否则存在 i 使得 $f(i)$ 是多值的, 矛盾. 又显然有 $\cup_\alpha B(\alpha) = \{1, \dots, n, \dots\}$. 根据 $\overline{B_i}$ 的局部有限性, 对任何 $x \in M$, 存在邻域 V 使得 V 只和有限多个 $\overline{B_i}$ 相交(设为 i_1, \dots, i_m). 所以 V 至多和包含 $\overline{B_{i_1}}, \dots, \overline{B_{i_m}}$ 的 $\text{supp} \psi_\alpha$ 相交, 又根据 $B(\alpha) \cap B(\beta) = \emptyset$ 可得每个 $\text{supp} \psi_\alpha$ 中包含的 $\overline{B_i}$ 都是互不相同的, 也就是说除了 $\text{supp} \psi_{\alpha(i_1)}, \dots, \text{supp} \psi_{\alpha(i_m)}$ 之外, 其他 $\text{supp} \psi_\alpha$ 都是由和 V 不交的 $\overline{B_i}$ 的并集组成的,

所以包含 $\overline{B_{i_1}}, \dots, \overline{B_{i_m}}$ 的 $\text{supp} \psi_\alpha$ 至多有 m 个, 从而 $\text{supp} \psi_\alpha$ 局部有限.

$$0 \leq \psi_\alpha(p) \leq \sum_{i=1}^{\infty} g_i(p) = 1$$

且 ψ 还是光滑函数.

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} g_i = \sum_{\alpha} \sum_{i: \alpha(i)=\alpha} g_i = \sum_{\alpha} \psi_\alpha$$

2.3.1 单位分解的应用

下面给出单位分解的几个应用:

Proposition 2.13 鼓包函数

M 是光滑流形, A 是 M 的闭子集, U 是 A 的一个邻域, 那么存在一个 $f \in C^\infty(M)$ 使得 $\text{supp} f \subseteq U$ 且 $f|_A = 1$

Hint: U 和 A^c 构成 M 的开覆盖, 取从属于这个覆盖的单位分解, 记为 ψ_1, ψ_2 , 哪一个可以直接作为 f ?

实在不会可以参考[2]的Proposition 2.25

Proposition 2.14

M 是带边或不带边光滑流形, A 是 M 的闭子集, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ 是光滑函数^a. 证明对任何包含 A 的开集 U , 都存在 M 上的光滑函数 \tilde{f} , 满足 $\tilde{f}|_A = f, \text{supp} \tilde{f} \subseteq U$

^a意为, 对任何一点 $p \in A$, 存在 p 在 M 中的邻域 U 和 U 上的光滑函数 g 使得 $g|_{A \cap U} = f$

Proof: 存在鼓包函数 h 满足 h 在 A 上为1, 且 $\text{supp} h \subseteq U$, 若把 f 在 A^c 上定义为0, 则 $hf \in C^\infty(M)$, 且

$$\text{supp} hf \subseteq U \quad hf|_A = f$$

2.4 Exercise

Problem 2.1

M 是光滑流形, A, B 是 M 中互不相交的闭子集, 证明存在光滑函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. 使得 f 在 A 上恒为1, 在 B 上恒为0

第三章 切向量

3.1 R^n 中的导子

对任何 $a \in R^n$, 一个映射 $\omega \in C^\infty(R^n) \rightarrow R$ 被称为在 a 处的导子, 如果 ω 是线性的且

$$\omega(fg) = f\omega(g) + \omega(f)g \quad \forall f, g \in C^\infty(R^n)$$

导子有如下明显性质:

Proposition 3.1

如果 f 是常值函数, 那么 $\omega(f) = 0$

如果 $f(a) = g(a) = 0$, ω 是在 a 处的导子, 那么 $\omega(fg) = 0$

Proof: 如果 f 是常数, 那么根据导子在 R 上的线性性可得 $\omega(f) = f\omega(1)$, 所以只需证 $\omega(1) = 0$, 注意到

$$\omega(1) = \omega(1 \cdot 1) = \omega(1) + \omega(1) = 2\omega(1) \quad \omega(1) = 0$$

第二点容易证明:

$$\omega(fg) = \omega(f)g(a) + f(a)\omega(g) = 0$$

显然点 a 处的导子的全体构成线性空间, 记为 $T_a R^n$. 所以一个本能的问题是: 这个空间是有限维的吗?

首先来看一些特殊的导子: 对任何 $a \in R^n$ 和向量 $v \in R^n$, 考虑映射

$$D_{v_a} f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tv)$$

那么,

$$D_{v_a} f = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

D_{v_a} 就是点 a 处的导子, 且将 f 映射到在 a 点关于向量 v 的方向导数.

为了进一步观察导子的映射性质, 我们可以对函数 f 进行局部 Taylor 展开:

$$f(x) = f(a) + Df(a) \cdot (x - a) + (x - a)^T D^2 f(t_x x + (1 - t_x)a)(x - a)$$

设 ω 是在 a 处的导子, 那么

$$\omega(f) = \omega(f(a)) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\omega(x_i - a_i) + \omega((x - a)^T D^2 f(t_x x + (1 - t_x)a)(x - a))$$

根据导子的性质, 我们知道

$$\omega(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \omega(x_i) + \sum_{i,j}^n \omega((x_i - a_i) D^2 f_{ij}(\theta)(x_j - a_j))$$

最后一项为0, 从而

$$\omega(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \omega(x_i)$$

我们把上式右边写成抽象算子的形式:

$$\omega(f) = \sum_{i=1}^n \omega(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x=a} (f)$$

注意到 $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x=a}$ 作为导子是固定的, 和 ω 的取值无关. 也就是说, ω 被 n 个实数 $\omega(x_1), \dots, \omega(x_n)$ 唯一确定. 从而 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x=a} \right\}_{1 \leq i \leq n}$ 张成了 $T_a R^n$.

Proposition 3.2

$T_a R^n$ 是 n 维空间, 线性同构于 R^n , 因此偏微分算子

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x=a} \quad 1 \leq i \leq n$$

成为 $T_a R^n$ 的一组基

Proof: 考虑映射

$$F(v) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x=a} = D_{v_a}$$

根据前面的推理, F 是个线性满射, 毕竟只要让 $v_i = \omega(x_i)$ 就有 $F(v_a) = \omega$, 而且 F 也是个单射, 若

$$\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x=a} = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x=a}$$

两边同时作用在函数 $f(x_1, \dots, x_n) = x_k$ 上, 注意到

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_i} \Big|_{x=a} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

所以 $v_k = w_k, 1 \leq k \leq n$, 这说明 $v = w$, 因此 F 是单射. 从而我们导出了 R^n 到 $T_a R^n$ 的同构

3.2 切空间

3.2.1 切空间的维数和基底

设 M 是 n 维光滑流形, 对 $p \in M$, 一个映射 $v \in C^\infty(M) \rightarrow R$ 被称为 p 处的导子, 如果 v 是 R 上的线性映射, 且

$$v(fg) = v(f)g + f v(g) \quad \forall f, g \in C^\infty M$$

模仿 Proposition 3.1 的方法, 不难验证, 点 p 处导子的全体构成线性空间, 且

Proposition 3.3

如果 f 是常值映射, 那么 $\omega(f) = 0$

如果 $f(a) = g(a) = 0$, ω 是在 a 处的导子, 那么 $\omega(fg) = 0$

问题在于如何确定切空间的维数和基底. 注意到 M 是局部欧式空间, 所以我们可以借助微分同胚, 把 $T_p M$ 映射到 $T_a \mathbb{R}^n$, 考虑映射

$$dF : T_p M \rightarrow T_p N$$

满足对任何 $g \in C^\infty(N)$, $X_p \in T_p M$, $dF(X_p)$ 是满足下列关系的切向量

$$dF(X_p)(g) = X_p(g \circ f)$$

dF_p 就叫做切映射, 容易验证基本性质如下:

Proposition 3.4

dF_p 是线性映射

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$$

作为推论, 当 F 是微分同胚时, $(dF_p)^{-1} = dF_{F(p)}^{-1}$

Proposition 3.5

设 M 是 n 维带边或无边光滑流形, $p \in M$. $f, g \in C^\infty(M)$. 如果在 p 的某个邻域 U 中, $f = g$, 则对任何 $v \in T_p M$, 都有 $vf = vg$

Proof: 令 $h = f - g$, 则 h 在 U 中为0. 考虑一个鼓包函数 ψ , 在 h 的支集中为1, 且 $\text{supp} \psi \subseteq M - \{p\}$, 则 $\psi h = h$ (这是因为当 h 不为0的时候, $\psi = 1$), 再根据 $\psi(p) = h(p) = 0$ 和Proposition 3.3可知 $v(h) = v(\psi h) = 0$, 因此 $vf = vg$

Proposition 3.6 开子流形的切空间

M 是带边或不带边的 n 维光滑流形, U 是 M 的开子集, 记 $\iota : U \rightarrow M$ 是包含映射. 则对任何 $p \in U$, $d\iota_p$ 都是 $T_p U \rightarrow T_p M$ 的同构

Proof: 取 $v \in T_p U$, 如果 $d\iota_p(v) = 0$, 那么取 p 的邻域 B 满足 $\bar{B} \subseteq U$, 根据光滑函数的延拓定理, 存在 $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ 使得 $\tilde{f}|_{\bar{B}} = f$. 把 f 和 $\tilde{f}|_U$ 视为光滑流形 U 上的光滑函数, 注意到二者在 B 上相等. 则根据Proposition 3.5可得

$$vf = v(\tilde{f}|_U)$$

从而

$$vf = v(\tilde{f}|_U) = v(\tilde{f} \circ \iota) = d\iota_p(\tilde{f}) = 0$$

因此 $v=0$. 然后证明 $d\iota_p$ 是满射. 对任何 $w \in T_p M$, 定义 $v \in T_p U$ 为

$$vf = w\tilde{f}$$

其中 \tilde{f} 是任何一个在 \bar{B} 上 $=f$ 的 $C^\infty(M)$ 函数, 根据Proposition 3.5, $w\tilde{f}$ 是良定义的, 因此 vf 是良定义的, 且显然是个导子. 又对任何 $g \in C^\infty(M)$, 都有

$$d\iota_p(v)g = v(g \circ \iota)$$

因为 $g|_{\bar{B}} = g \circ \iota$, 所以根据 v 的定义有

$$v(g \circ \iota) = wg$$

因此

$$d\iota_p(v)g = wg$$

因此 $d\iota_p = w$, 因此 $d\iota_p$ 是线性同构

Proposition 3.7

如果 M 是 n 维光滑(无边)流形, 那么 $T_p M$ 是 n 维空间, 当选定一组坐标卡 (U, φ) 时, 其基底可以表示为

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \quad 1 \leq i \leq n$$

其中 $\frac{\partial}{\partial x^i} f = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)}$, 注意区分 i 的位置是上面还是下面, 在下面就表示欧式空间中对第 i 个变量的偏微分运算

Proof: 对任何 $p \in M$, 考虑 p 附近的一个坐标卡 (U, φ) . 和映射 $d\varphi_{\varphi(p)}^{-1}$, 那么根据它是线性同构可知,

$$d\varphi_{\varphi(p)}^{-1} \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)}$$

成为 $T_p M$ 的一组基底, 注意到

$$d\varphi_{\varphi(p)}^{-1} \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} (f) = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1})$$

所以我们可以把 $d\varphi_{\varphi(p)}^{-1} \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)}$ 更方便的记为 $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)}$, 其中

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} f = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1})$$

3.2.2 边界点处的切空间

Lemma 3.8

设 $\iota: H^n \rightarrow R^n$ 是包含映射, 那么对任何 $a \in \partial H^n$, $d\iota_a: T_a H^n \rightarrow T_a R^n$ 是线性同构.

Proof: 先证明 $d\iota_a$ 是单射, 假如

$$d\iota_a(v) = 0$$

则对任何 $f \in C^\infty(H^n)$, 根据光滑的定义, 存在 H^n 在 R^n 中的邻域 V 和 V 上的光滑函数 g 使得 $g|_{H^n} = f$. 因此根据 Proposition 2.14, 可以延拓到整个 R^n 上的光滑函数(还记为 g), 且在 H^n 上依然为 f . 从而 $g \circ \iota = f$, 因此

$$vf = v(g \circ \iota) = d\iota_a(v)(g) = 0(g) = 0 \quad \forall f \in C^\infty(H^n)$$

这给出了 $v=0$, 所以 $d\iota_a$ 是单射. 为了说明是满射, 任取 $w \in T_a R^n$, 定义 $v \in T_a H^n$:

$$vf = wg$$

在基底下展开 w , 可设 $w = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, 那么

$$vf = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_a$$

容易说明这是良定义的, 假设有另一个光滑函数 h 满足在 H^n 上 $=f$, 则 $\frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{a+t} = \frac{\partial h}{\partial x_i} \Big|_{a+t}$ 对任何 $t = (0, \dots, 0, t), t > 0$ 成立, 令 $t \rightarrow 0$ 根据光滑性可得 $\frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_a = \frac{\partial h}{\partial x_i} \Big|_a$, 因此 vf 的取值和延拓的选取无关. 且显然 v 满足导子的所有性质.

而且注意到 $w = d\iota_a(v)$, 这是因为, 对任何 $f \in R^n$, f 都是 $f \circ \iota$ 的延拓, 因此 $v(f \circ \iota) = wf$, 即 $d\iota_a(f) = wf$.

Proposition 3.9

M 是 n 维光滑带边流形, 则 M 在每一点处的切空间都同构于 R^n

Proof: 如果 p 是 M 的内点, 则 p 含于某个内坐标卡中(Proposition 1.15), 设为 (U, φ) , 则 U 微分同胚于 R^n 的某个开集, U 本身是 n 维无边光滑流形, 因此根据前面的结论有 $T_p M \cong T_p U \cong R^n$. 第一个同构是Proposition 3.6, 第二个同构是Proposition 3.7

如果 p 是 M 的边界点, 那么设有边界坐标卡 (U, φ) , 可得

$$T_p M \cong T_p U \cong T_{\varphi(p)} \varphi(U) \cong T_{\varphi(p)} H^n \cong T_{\varphi(p)} R^n$$

其中第一个同构是Proposition 3.6, 第二个同构是Proposition 3.4($\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ 是微分同胚), 第三个同构是Proposition 3.6($\varphi(U)$ 是 H^n 的开子集), 第四个同构是Lemma 3.8

Proposition 3.10 乘积流形的切空间

设 M_1, \dots, M_n 是光滑流形, 维数分别为 $d_1 + \dots + d_n$, $\pi_i: M_1 \times \dots \times M_n \rightarrow M_i$ 是投影映射. 则

$$T_{(p_1, \dots, p_n)} M_1 \times \dots \times M_n \cong T_{p_1} M_1 \oplus \dots \oplus T_{p_n} M_n$$

其中同构可以由

$$\alpha(v) = (d(\pi_1)_p(v), \dots, d(\pi_n)_p(v)) \quad p = (p_1, \dots, p_n)$$

给出.

Proof: 显然,

$$\alpha(T_{(p_1, \dots, p_n)} M_1 \times \dots \times M_n) \subseteq T_{p_1} M_1 \oplus \dots \oplus T_{p_n} M_n$$

取 p_i 附近的坐标卡 (U_i, φ_i) , 则 $(U_1 \times \dots \times U_n, \varphi_1 \times \dots \times \varphi_n)$ 是 $M_1 \times \dots \times M_n$ 在 p 附近的坐标卡, 从而可以找出基底

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, 1 \leq i \leq d_1 + \dots + d_n$$

我们只需观察 α 在基底上的表现, 注意到

$$d(\pi_j)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) (f) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f \circ \pi_j) = \frac{\partial f \circ \pi_j \circ (\varphi_1^{-1} \times \dots \times \varphi_n^{-1})(x_1, \dots, x_{d_1}, x_{d_1+1}, \dots, \dots, x_{\sum_i d_i})}{\partial x^i} \Big|_{\varphi_1(p_1) \times \dots \times \varphi_n(p_n)}$$

记 $t_i = \sum_{j=1}^{i-1} d_j, t_1 = 0, x_{[p,q]}$ 是截取 x 中第 p 个到第 q 个分量. 则

$$d(\pi_j)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) (f) = \frac{\partial f \circ \pi_j \circ (\varphi_1^{-1}(x_{[t_0+1, t_1]}) \times \dots \times \varphi_n^{-1}(x_{[t_d+1, t_{d+1}]})}{\partial x^i} \Big|_{\varphi_1(p_1) \times \dots \times \varphi_n(p_n)}$$

$$= \frac{\partial f \circ \varphi_j^{-1}(x_{[t_j+1, t_{j+1}]})}{\partial x^i} \Big|_{\varphi_j(p_j)} = \begin{cases} 0 & i \notin [t_j+1, t_{j+1}] \\ \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\varphi_j(p_j)} f & i = t_j + k, k \leq d_j \end{cases}$$

因此

$$\alpha\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^{t_i+k_i}} \Big|_p\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \Big|_{p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{k_n}} \Big|_{p_n}\right) \quad 1 \leq k_i \leq d_i$$

因此 $T_{p_1}M_1 \oplus \dots \oplus T_{p_n}M_n$ 的基底含于 α 的值域中, 根据线性性可知 α 是满射. 定义域和值域都是 $\sum_{i=1}^n d_i$ 维的线性空间, 所以 α 也是单射, 因此是同构

3.3 切空间的相关计算

3.3.1 基变换的表示矩阵

我们发现要想给出切空间的一组具体的基底, 要依赖于局部坐标卡的选取. 所以选取不同坐标卡的时候, 基底可能不相同. 这就涉及到线性代数的另一个经典问题: 基底的变换矩阵

对 $p \in M$, 我们取 p 附近的另一个光滑坐标卡 (V, ψ) , 那么还有另一组基底 $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \Big|_p$, 满足

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \Big|_p f = \frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial x_i} \Big|_{\psi(p)}$$

想办法变出 $f \circ \varphi^{-1}$, 通过添一项去一项的技巧可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \Big|_p f &= \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1} \circ [\varphi \circ \psi^{-1}])}{\partial x_i} \Big|_{\psi(p)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}(\varphi(p)) \frac{\partial(\varphi \circ \psi^{-1})_j}{\partial x_i} \Big|_{\psi(p)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j} \Big|_{\varphi(p)} \frac{\partial(\varphi \circ \psi^{-1})_j}{\partial x_i} \Big|_{\psi(p)} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\varphi \circ \psi^{-1})_j}{\partial x_i} \Big|_{\psi(p)} \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p f \end{aligned}$$

那么任给一个 $\omega \in T_p M$, 都有旧基下的表示

$$\omega = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \Big|_p$$

从而在新基下的表示为

$$\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i \frac{\partial(\varphi \circ \psi^{-1})_j}{\partial x_i} \Big|_{\psi(p)} \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial(\varphi \circ \psi^{-1})_j}{\partial x_i} \Big|_{\psi(p)} \right] \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p f$$

从矩阵的角度讲, 如果把 ω 在旧基下的展开视为列向量 $(v_1, \dots, v_n)^T$, 那么新基底下的列向量就是

$$J(\varphi \circ \psi^{-1}) \cdot (v_1, \dots, v_n)^T$$

3.3.2 切映射的表示矩阵

因为 dF_p 是 m 维线性空间 $T_p M$ 到 n 维线性空间 $T_{F(p)} N$ 的线性映射, 所以当为这两个空间选好基底之后, dF_p 就能写成矩阵的形式. 设 p 附近的坐标卡为 (U, φ) , $f(p)$ 附近的坐标卡为 (V, ψ) , 那么任意切向量 $X_p \in T_p M$ 都能写作

$$X_p = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

从而任取 $g \in C^\infty(N)$, 有

$$dF_p X_p(g) = X_p(g \circ F) = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial g \circ F \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)}$$

凑出 $g \circ \psi^{-1}$:

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)} \\ &= \sum_{i=1}^m v_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial g \circ \psi^{-1}}{\partial x_j} \Big|_{\psi(F(p))} \frac{\partial(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_j}{\partial x_i}(\varphi(p)) \end{aligned}$$

令 $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \Big|_{F(p)}$ 是 $T_{F(p)}N$ 在坐标卡 (V, ψ) 下的基底, 那么

$$\begin{aligned} dF_p X_p(g) &= \sum_{i=1}^m v_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_j}{\partial x_i}(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \Big|_{F(p)} g \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_j}{\partial x_i}(\varphi(p)) \right] \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \Big|_{F(p)} g \end{aligned}$$

X_p 在基底 $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ 下的坐标为 $(v_1, \dots, v_m)^T$, 从而 $dF_p X_p$ 在基底 $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \Big|_{F(p)}$ 下的坐标, 看成一个列向量的话, 是

$$J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \cdot (v_1, \dots, v_m)^T$$

因为转移映射的jacobian矩阵都是非异阵, 所以假设 $p, f(p)$ 附近有别的坐标卡 (X, η) 和 (Y, ϕ) , 那么

$$J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) = J(\psi \circ \phi^{-1}) J(\phi \circ F \circ \varphi^{-1}) J(\varphi \circ \eta^{-1})$$

这说明, 对 $p \in M$, F 在任何一组坐标卡下的坐标表示的Jacobian矩阵拥有相同的秩, 也就是说这个秩不依赖于坐标卡的选取, 从而它只和 F 的本身有关. 因此我们把这个秩称为 F 的秩, 关于秩的结果我们将在下一章中介绍

3.4 切丛

Definition 3.11

M 是 n 维光滑流形, 切丛 TM 定义为

$$TM = \left\{ v_p \mid p \in M, v_p \in T_p M \right\}$$

我们需要给 TM 定义一个拓扑结构. 考虑投影映射

$$\pi(v_p) = p \quad TM \rightarrow M$$

对任何一个 M 上的坐标卡 (U, φ) , 设 $p \in U$, 且 $v_p = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$, 考虑映射

$$\tilde{\varphi}(v_p) = (\varphi^1(p), \dots, \varphi^n(p), v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{2n}$$

$$\tilde{\varphi}^{-1}(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi^{-1}(x)}$$

那么显然 $\tilde{\varphi}$ 是 $\pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ 的双射. 因为 M 能被可数个坐标卡覆盖, 所以我们定义 TM 的拓扑为使得所有 $\tilde{\varphi}$ 都连续

的最弱的拓扑, 此时TM成为了 $2n$ 维的局部欧式空间.

且 $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ 是TM的一组坐标卡. 下面验证相容性: 设有两个坐标卡 $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi}), (\pi^{-1}(V), \tilde{\psi})$, 那么

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) = (\psi \circ \varphi^{-1}(x), J(\psi \circ \varphi^{-1})v)$$

根据 ψ, φ 的光滑性可得转移映射是光滑的, 因此这组坐标卡光滑相容.

Proposition 3.12

在这组拓扑下, π 是连续的, 且是光滑的.

Proof: 只需证对任何开集 U , $\pi^{-1}(U)$ 都是开集. 因为有可数个坐标卡 $(\pi^{-1}(U_i), \tilde{\varphi}_i)$, 且 $\pi^{-1}(U_i)$ 都是开集, 所以任给 $x \in \pi^{-1}(U)$, 存在 i 使得 $\pi(x) \in U_i$, 取 $\pi(x)$ 在 $U_i \cap U$ 中的邻域 V_i , 根据 $\tilde{\varphi}_i$ 连续可得

$$\pi^{-1}(V_i) = \tilde{\varphi}_i^{-1}(\varphi(V_i) \times \mathbb{R}^n)$$

是开的, 且 $x \in \pi^{-1}(V_i) \subseteq \pi^{-1}(U)$, 从而 $\pi^{-1}(U)$ 是开集. 从而 π 连续.

为了看出 π 光滑, 只需注意到因为 (U_i, φ_i) 覆盖 M , 因此只需对每个 i 验证 π 的光滑性:

$$\varphi_i \circ \pi \circ \tilde{\varphi}_i^{-1}(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) = (x_1, \dots, x_n)$$

由此TM成为了一个拓扑空间. 其实它是 T^2 的, 这是因为, 对任何的 p, q 和 $v_p \in T_p M, v_q \in T_q M$, 如果 $p \neq q$, 那么根据 M 的 T^2 性质, 存在 p, q 的互不相交的邻域 A, B , 从而 $\pi^{-1}(A), \pi^{-1}(B)$ 是 v_p, v_q 的不相交的邻域. 如果 $p = q$, 且 $v_p \neq v_q$, 假设 $p = q \in U_i$, 则根据 \mathbb{R}^{2n} 的 T^2 性存在 $\tilde{\varphi}(v_p), \tilde{\varphi}(v_q)$ 的不相交的邻域, 用 $\tilde{\varphi}^{-1}$ 映回去会得到 v_p, v_q 的互不相交的邻域. 因此TM是Hausdorff空间

TM的第二可数性质是容易证明的, U_i 覆盖 M , 且都是第二可数的(因为第二可数能被开子集继承), 由此可得 $\tilde{\varphi}_i^{-1}(U_i)$ 第二可数, 这是TM的可数开覆盖, 即 $TM = \cup_{i=1}^n \tilde{\varphi}_i^{-1}(U_i)$, 把 $\tilde{\varphi}_i^{-1}(U_i)$ 的可数拓扑基全拿出来就得到TM的拓扑基, 可数个可数集的并集还是可数集, 所以这就是TM的拓扑基.

以上, 我们证明了TM在某个拓扑下能够称为 $2n$ 维光滑流形, 且投影映射 $\pi : TM \rightarrow M$ 是光滑映射.

3.5 曲线的切线

作为切映射的一个特殊情况, 我们考虑一个微分流形 M 上的曲线的“切线”. 回忆曲线 $\gamma(t)$ 的定义, 它是 \mathbb{R} 中某个区间 J 到 M 的连续映射, 如果 γ 还是光滑的, 那么称 γ 是 M 上的一条光滑曲线. 定义 γ 在 t_0 处的速度向量为

$$d\gamma\left(\frac{d}{dt}\right)\bigg|_{t_0} \in T_{\gamma(t_0)}M$$

记为 $\gamma'(t_0)$, 注意不要和导数混淆, 尽管它们有类似的形式:

取 $\gamma(t_0)$ 附近的坐标卡 (U, φ) , 则 γ 在 t_0 附近有坐标表示

$$\tilde{\gamma}(t) = (\varphi_1 \circ \gamma(t), \dots, \varphi_n \circ \gamma(t))$$

然后考虑这个切向量 $d\gamma\left(\frac{d}{dt}\right)\bigg|_{t_0}$ 在 f 上的作用:

$$d\gamma\left(\frac{d}{dt}\right)\bigg|_{t_0}(f) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t_0}(f \circ \gamma(t)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t_0}(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i}\bigg|_{\varphi(\gamma(t_0))} \frac{d\varphi_i \circ \gamma}{dt}\bigg|_{t_0}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{d\varphi_i \circ \gamma}{dt} \Big|_{t_0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t_0)} f$$

我们发现这个切向量的系数就是

$$\tilde{\gamma}'(t_0) = \left(\frac{d\varphi_1 \circ \gamma}{dt} \Big|_{t_0}, \dots, \frac{d\varphi_n \circ \gamma}{dt} \Big|_{t_0} \right)$$

Proposition 3.13

M 是有边或无边 n 维光滑流形, $p \in M$, 则对任何 $v \in T_p M$, v 都是某条曲线的速度向量

Proof: 如果 $p \in \text{Int} M$, 则取 p 附近的坐标卡 (U, φ) , 不妨设 $\varphi(U) = B(0, 1)$, $\varphi(p) = 0$. 设 $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$, 令

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}(tv_1, \dots, tv_n)$$

则存在 ϵ 使得当 $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ 时, $(tv_1, \dots, tv_n) \in B(0, 1)$, 从而 γ 在坐标卡 (U, φ) 下的坐标表示

$$\tilde{\gamma}(t) = (tv_1, \dots, tv_n)$$

因此其在 $t = 0$ 的速度向量在基底 $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(0)}$ 下的系数就是

$$\tilde{\gamma}'(t) = (v_1, \dots, v_n)$$

即

$$d\gamma\left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0}\right) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

(注意到 $\gamma(0) = \varphi^{-1}(0) = p$) 因此 $p \in \text{Int} M$ 的情形证毕

如果 $p \in \partial M$, 取 p 附近的坐标卡 (U, φ) , 不妨设 $\varphi(U) = B^+(0, 1)$, 那么 $(tv_1, \dots, tv_n) \in \varphi(U)$ 当且仅当 $tv_n \geq 0$. 因此如果 $v_n \geq 0$, 则考虑

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}(tv_1, \dots, tv_n)$$

则存在 ϵ 使得当 $t \in [0, \epsilon)$ 时, $(tv_1, \dots, tv_n) \in B^+(0, 1)$, 从而 γ 可定义在区间 $[0, \epsilon)$ 上, 且

$$\tilde{\gamma}(t) = (tv_1, \dots, tv_n)$$

剩余步骤同 $p \in \text{Int} M$ 的情形.

如果 $v_n < 0$, 则存在 ϵ 使得当 $t \in (-\epsilon, 0]$ 时, $(tv_1, \dots, tv_n) \in B^+(0, 1)$, 剩余步骤同上

Theorem 3.14 用曲线计算切映射的取值

设 M, N 是光滑流形, $F : M \rightarrow N$ 是光滑映射, $v \in T_p M$. 则对任意一条满足 $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$ 的光滑曲线 γ , 都有

$$dF_p(v) = (F \circ \gamma)'(0)$$

Proof:

$$dF_p(v)(f) = v(f \circ F) = d\gamma\left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0}\right)(f \circ F) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0}(f \circ (F \circ \gamma)) = d(F \circ \gamma)\left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0}\right)f \quad \forall f \in C^\infty(M)$$

右边的 $d(F \circ \gamma)\left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0}\right)$ 就是 $(F \circ \gamma)'(0)$

3.6 Exercise

Problem 3.1

设 M, N 是光滑流形, $F : M \rightarrow N$ 是光滑映射, $\gamma : J \rightarrow M$ 是光滑曲线. 则对任何 $t_0 \in J$, $F \circ \gamma$ 在 t_0 处的速度向量为

$$(F \circ \gamma)'(t_0) = dF_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0))$$

Remark: 这是[2]的Proposition 3.24

Problem 3.2

M, N 是有边或无边光滑流形. $F : M \rightarrow N$ 是光滑映射, 则 $dF_p = 0$ 对任何 $p \in M$ 成立, 当且仅当 F 在 M 的每个连通分支上都是常数

Problem 3.3

M, N 是有边或无边光滑流形. $F : M \rightarrow N$ 是微分同胚, 证明 M 和 N 具有相同的维数

Remark: 一个偏分析学的证明可参考[2]的Theorem 2.17

Problem 3.4

M 是光滑流形, 证明集合

$$M_0 = \left\{ (p, 0) \in TM \mid p \in M \right\}$$

是 TM 的闭子集

第四章 浸入, 淹没和嵌入

4.1 常秩映射

Definition 4.1

M, N 分别是 m 维和 n 维光滑流形, $F: M \rightarrow N$ 是光滑映射. 对任何 $p \in M$, 线性映射 dF_p 的秩称为 F 在 p 处的秩, 根据线性代数知识, 它是 F 的在 p 和 $F(p)$ 附近任意两个坐标卡下的坐标表示 \tilde{F} 的 jacobian 矩阵的秩(上一章节的讨论证明了秩不依赖于坐标卡的选取)

如果 F 在每一点 $p \in M$ 处的秩都是一样的, 则称 F 为常秩映射. 显然有两种特殊的常秩映射: 一种 dF_p 恒为单射, 此时称 F 为浸入. 另一种是 dF_p 恒为满射, 称 F 为淹没. 根据线性代数知识可得浸入的秩为 m 且必有 $m \leq n$, 淹没的秩为 n 且必有 $m \geq n$

对于 dF_p 是满射或单射的情形, 我们可以得出在 p 的邻域里面, dF 都是满射或单射. 也就是说, 使得 dF_p 为满射或单射的 p 的全体必定是 M 的开子集

Proposition 4.2

M 是 m 维光滑流形, N 是 n 维光滑流形, $p \in M$. 如果 dF_p 是单的, 那么存在 p 的邻域 U 使得 dF 在 U 上是单的, i.e F 在 U 上是个浸入

如果 dF_p 是满的, 那么存在 p 的邻域 U 使得 dF 在 U 上是满的, i.e F 在 U 上是个淹没

Proof: 取 $p, F(p)$ 附近的坐标卡 $(U, \varphi), (V, \psi)$. 如果 dF_p 是单的, 那么

$$J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x)$$

在 $\varphi(p)$ 处的 rank 为 m , 从而存在 m 阶子矩阵 $T(x)$ 满足 $T(\varphi(p)) \neq 0$, 根据行列式的连续性, 在 $\varphi(p)$ 的某个邻域 K 中 $T(x)$ 都是非异阵, 因此 $J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})$ 是列满秩矩阵, 因此秩恒为 m (因为有 m 阶非异子矩阵且 jacobian 矩阵的 rank 至多为 m), 因此在 $\varphi^{-1}(K)$ 中 dF 是单射, 从而是浸入

如果 dF_p 是满的, 那么

$$J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x)$$

在 $\varphi(p)$ 处的 rank 为 n , 从而存在 n 阶子矩阵 $T(x)$ 满足 $T(\varphi(p)) \neq 0$, 根据行列式的连续性, 在 $\varphi(p)$ 的某个邻域 K 中 $T(x)$ 都是非异阵, 因此 $J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})$ 是列满秩矩阵, 因此秩恒为 n (因为有 n 阶非异子矩阵且 jacobian 矩阵的 rank 至多为 n), 因此在 $\varphi^{-1}(K)$ 中 dF 是满射, 从而是淹没

还有一类特殊的映射, 满足 dF_p 处处都是可逆的线性映射, 此时必有 $m=n$, 可以证明 F 是局部微分同胚:

Definition 4.3 局部微分同胚

$F: M \rightarrow N$ 光滑流形之间的光滑映射. 如果对任何 $p \in M$, 都存在 p 的邻域 U 使得 $F|_U: U \rightarrow F(U)$ 是微分同胚, 那么称 F 为局部微分同胚.

Proposition 4.4 流形的反函数定理

M, N 是 n 维光滑流形, M 不带边. 对任何 $p \in M$, dF_p 都是 $T_p M \rightarrow T_p N$ 的双射, 那么 F 是局部微分同胚

Proof: 任取 $p \in M$, 取 p 和 $F(p)$ 附近的坐标卡 $(U, \varphi), (V, \psi)$, 通过缩小 U 不妨设 $\varphi(U) \subseteq V$. 则

$$J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})$$

在 $\varphi(p)$ 处是非异阵, 根据数学分析中的反函数定理, 存在 $\varphi(p)$ 的邻域 K 和 $\psi(F(p))$ 的邻域 $Q \subseteq \psi(V)$ 使得

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : K \rightarrow Q$$

是可逆的, 且其逆映射 $f : Q \rightarrow K$ 也是光滑函数. 定义

$$g(q) = \varphi^{-1} \circ f \circ \psi(q) \quad q \in \psi^{-1}(Q)$$

显然 g 是 $\psi^{-1}(Q)$ 上的光滑映射. 且对 $p \in \varphi^{-1}(K)$, 有

$$g(F(p)) = \varphi^{-1} \circ f \circ \psi(F(p))$$

根据 f 的定义, 可知

$$f(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in K$$

因此对任何 $p \in \varphi^{-1}(K)$, 必有

$$f(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(f(p))) = f(p)$$

从而

$$g(F(p)) = \varphi^{-1} \circ \varphi(p) = p$$

同理可得 $F \circ g = id_{\psi^{-1}(Q)}$, 这给出了 F 是 $\varphi^{-1}(K) \rightarrow \psi^{-1}(Q)$ 的微分同胚.

4.1.1 常秩定理

反函数定理其实是一个更一般的定理的特殊形式:

Theorem 4.5 常秩定理

M, N 是 m, n 维光滑流形. $F : M \rightarrow N$ 是秩为 r 的光滑映射. 那么对任何 $p \in M$, 存在坐标卡 (U, φ) 和 $F(p)$ 的坐标卡 (V, ψ) 使得 $F(U) \subseteq V$, 且在这两组坐标卡下, 有坐标表示:

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

这称为 **F 的局部标准型**

Proof: 先证明 $p = 0, F(p) = 0$, M, N 分别是 R^m, R^n 的开子集的情形. 此时 $DF(0)$ 的 rank 为 r , 这意味着存在 r 阶非异子矩阵, 通过交换坐标轴¹, 不妨设 $DF(0)$ 的前 r 行 r 列子矩阵就是非异阵. 记 R^m 中的坐标为 $(x, y) = (x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{m-r})$, R^n 中的坐标为 $(v, w) = (v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_{n-r})$. 那么

$$F(x, y) = (Q(x, y), R(x, y))$$

其中 Q 是 F 的前 r 个分量, R 是 F 的后 $n-r$ 个分量. 且 $Q(x, y)$ 关于 x 的 jacobian 矩阵 $\frac{\partial Q_i}{\partial x_j}(0, 0)$ 就是 $DF(0)$ 的前 r 行 r 列矩阵,

¹ 第一章中说明了这种变换给出的坐标卡和流形的光滑结构相容

因此是非异阵. 考虑映射 $\varphi(x, y) = (Q(x, y), y) : U \rightarrow R^m$, 那么

$$D\varphi(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_i}{\partial x_j}(0, 0) & \frac{\partial Q_i}{\partial y_j}(0, 0) \\ O & I_{m-r} \end{pmatrix}$$

因此 $D\varphi$ 在 $(0, 0)$ 处为非异阵. 注意我们设 $F(0) = 0$, 所以 $Q(0) = 0, \varphi(0, 0) = 0$. 根据反函数定理, 存在 0 的邻域 U_0, \tilde{U}_0 使得

$$\varphi : U_0 \rightarrow \tilde{U}_0$$

是微分同胚. 通过缩小 U_0 不妨设 \tilde{U}_0 是开正方体 $(-\delta, \delta)^m$. 记

$$\varphi^{-1}(x, y) = (A(x, y), B(x, y)) \quad A : \tilde{U}_0 \rightarrow R^r, B : \tilde{U}_0 \rightarrow R^{m-r}$$

则

$$(x, y) = \varphi(A(x, y), B(x, y)) = (Q(A(x, y), B(x, y)), B(x, y))$$

则 $y = B(x, y), x = Q(A(x, y), B(x, y)) = Q(A(x, y), y)$, 从而

$$\varphi^{-1}(x, y) = (A(x, y), y)$$

另一方面还能知道 $Q(A(x, y), y) = x$, 所以

$$F \circ \varphi^{-1}(x, y) = (Q(\varphi^{-1}), R(\varphi^{-1})) = (Q(A(x, y), y), \tilde{R}(x, y)) = (x, \tilde{R}(x, y)) \quad \tilde{R} = R \circ \varphi^{-1} : \tilde{U}_0 \rightarrow R^{n-r}$$

计算它的 jacobian 矩阵给出了

$$D(F \circ \varphi^{-1}) \begin{pmatrix} I_r & O \\ \frac{\partial \tilde{R}_i}{\partial x_j} & \frac{\partial \tilde{R}_i}{\partial y_j} \end{pmatrix}$$

复合一个微分同胚不改变 $DF(0)$ 的 rank (秩为 r), 而上述矩阵的前 r 行 r 列是单位阵, 能通过初等行变换化为

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & \frac{\partial \tilde{R}_i}{\partial y_j} \end{pmatrix}$$

这个矩阵的 rank 还是 r , 因此右下分块必须是 rank 0 的矩阵, 也就是说必须是 O , 因此 \tilde{R} 是和 y 无关的函数, 因此根据 \tilde{U}_0 是开正方体可得

$$\tilde{R}(x, y) = \tilde{R}(x, 0)$$

把 $\tilde{R}(x, 0)$ 记为 $S(x)$, 那么

$$F \circ \varphi^{-1}(x, y) = (x, S(x))$$

然后取 0 的一个邻域

$$V_0 = \left\{ (v, w) \in N \mid (v, 0) \in \tilde{U}_0 \right\}$$

又因为 $\tilde{U}_0 = (-\delta, \delta)^m$, 可得

$$F \circ \varphi^{-1}(\tilde{U}_0) \subseteq V_0$$

从而根据 φ 是微分同胚可知

$$F(U_0) \subseteq V_0$$

定义 $\psi : V_0 \rightarrow R^n$ 为

$$\psi(v, w) = (v, w - S(v))$$

则

$$\psi^{-1}(x, y) = (x, y + S(x))$$

因此 ψ 是 $V_0 \rightarrow \psi(V_0)$ 的微分同胚. 我们知道 $(U_0, \varphi), (V_0, \psi)$ 都是和 R^m, R^n 的光滑结构相容, 所以自然是光滑坐标卡, 且在这两组坐标卡下,

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{m-r}) = (x_1, \dots, x_r, S(x) - S(x)) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \quad (x, y) \in \tilde{U}_0$$

把 y_j 改成 x_{r+j} , 就证明了欧式空间开集的情形.

然后考虑一般的情形, 设 $p, F(p)$ 附近有坐标卡 $(U, \xi), (V, \eta)$, 不妨设 $\xi(p) = 0, \eta(F(p)) = 0$, 那么

$$\eta \circ F \circ \xi^{-1}$$

是欧式空间开集之间的常秩映射, 就能用刚才的情形得到 U_0, V_0 和微分同胚 ψ, φ 使得

$$\psi \circ \eta \circ F \circ \xi^{-1} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_0) \rightarrow \psi(V_0)$$

具有形式

$$\psi \circ \eta \circ F \circ \xi^{-1} \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

通过缩小 U 和 V 不妨设 $\xi(U) \subseteq U_0, \eta(V) \subseteq V_0, F(U) \subseteq V$. 那么考虑坐标卡 $(U, \varphi \circ \xi), (V, \psi \circ \eta)$, 根据 φ, ψ 是微分同胚可得这两个新坐标卡分别与 M, N 的光滑结构相容, 从而 F 在这两个坐标卡下的表示就具有我们想要的形式, 证毕

4.1.2 带边流形的常秩定理

现在设 M 是 m 维带边光滑流形, N 是 n 维无边光滑流形. $F : M \rightarrow N$ 是光滑映射. 那么对于 $p \in \partial M$ 的情形, F 的坐标表示不能再成为欧式空间开集上的光滑函数, 而是一个不开不闭的集合 A 上的光滑函数, 需要结合光滑函数的定义, 利用 A 的邻域上的光滑函数 \tilde{F} , 去得到 F 的局部标准型. 此处我们只考虑 F 是浸入的情形. 一般的常秩情形虽然也能得到 F 的局部标准型, 但证明比较复杂, 而且后文用不上.

如果 N 也是带边光滑流形, 这时的情况会复杂得多, F 不一定能写成类似无边流形时的局部标准型

Theorem 4.6 边界点附近的局部标准型

M 是 m 维光滑带边流形, N 是 n 维光滑流形(无边). $F : M \rightarrow N$ 是浸入. 那么对任何 $p \in \partial M$, 存在边界坐标卡 (U, φ) 和 $F(p)$ 附近的坐标卡 (V, ψ) 满足 $F(U) \subseteq V$, 且

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

Proof: 和普通常秩定理的情形一样, 我们只需证明 M, N 分别是 H^m, R^n 的开子集, 且 $F(p) = 0, p = 0$ 的情况(证明完这个情况之后可以照抄常秩定理的过程)

M 是 H^m 的开子集所以存在 r 使得 $B^+(0, r) \subseteq M$. 又 F 在 $B^+(0, r)$ 上光滑, 所以存在 $B^+(0, r)$ 在 R^m 中的邻域 U 和 U 上的光滑函数 \tilde{F} 满足 $\tilde{F}|_{B^+(0, r)} = F$. 通过缩小 r , 不妨设 $B(0, r) \subseteq U$.

下面证明 $d\tilde{F}_0 = dF_0$. 设 ι 是 $H^m \rightarrow R^m$ 的包含映射, 那么 $F = \tilde{F} \circ \iota$, 所以

$$dF_0 = d\tilde{F}_0 \circ d\iota_0$$

Lemma 3.8证明了 $d\iota_0 : T_0 H^m \rightarrow T_0 R^m$ 是线性同构, 因此 dF_0 是单射可以推出 $d\tilde{F}_0$ 是单射, 所以根据Proposition 4.2, \tilde{F} 在 0 附近是个浸入, 通过缩小 r , 不妨设 \tilde{F} 在 $B(0, r)$ 上是浸入.

则有 R^m, R^n 中的坐标卡 $(U_0, \varphi), (V_0, \psi)$ 使得

$$\psi \circ \tilde{F} \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

(回忆浸入的rank必须为m) 通过缩小 U_0, V_0 不妨设 $U_0 \subseteq B(0, r), \tilde{F}(U_0) \subseteq V_0$.

但是 $\varphi(U_0 \cap H^m)$ 不一定在上半平面上. 我们需要做出一些调整: 首先根据 φ 是微分同胚可得 $\varphi^{-1} \times id_{R^{n-m}}$ 是 $\varphi(U_0) \times R^{n-m}$ 上的微分同胚, 令 $\psi_0 = (\varphi^{-1} \times id_{R^{n-m}}) \circ \psi$, 则 ψ_0 是 0 的某个邻域 K 上的微分同胚, 从而

$$\begin{aligned} \psi_0 \circ F(x) &= (\varphi^{-1} \times id_{R^{n-m}}) \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1} \circ \varphi(x) \\ &= (\varphi^{-1} \times id_{R^{n-m}}) \circ \psi \circ \tilde{F} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi(x) \\ &= (\varphi^{-1} \times id_{R^{n-m}})(\varphi(x), 0, \dots, 0) \\ &= (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \quad \forall x \in U_0 \end{aligned}$$

根据 U_0 是 R^m 中开集, 可取 r_2 使得 $B^+(0, r_2) \subseteq U_0 \cap B^+(0, r)$, 且 $\tilde{F}(B(0, r_2)) \subseteq K$ 则在坐标卡 $(B^+(0, r_2), id_{H^m})$ 和 (K, ψ_0) , 满足 $F(B^+(0, r_2)) = \tilde{F}(B^+(0, r_2)) \subseteq \tilde{F}(B(0, r_2)) \subseteq K$, 且

$$\psi_0 \circ F(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

如果 F 是常秩的, 那么判定 F 是否是浸入/淹没/嵌入的条件可以非常简单:

Theorem 4.7 全局秩定理

M, N 是光滑流形, $F: M \rightarrow N$ 是光滑常秩映射. 那么

- F 是满射, 则 F 是淹没
- F 是单射, 则 F 是浸入
- F 是双射, 则 F 是微分同胚

Proof: 写出 F 的局部标准型

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

如果 F 是满射, 那么根据 ψ, φ 都是双射可得 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ 必须是满射, 因此标准型的右边不能有 0 , 这说明 $r \geq n$, 所以 $rank F \geq n$, 因此 $rank F = n$, 因此 dF 是满射, 从而 F 是淹没

如果 F 是单射, 那么根据 ψ, φ 都是双射可得 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ 必须是单射, 从而 $r \geq m$. 因此 $r = m$. 因此

$$J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix}$$

所以 dF 是单射, 从而 F 是浸入

如果 F 是双射, 那么 F 既是淹没也是浸入, 所以 dF_p 是双射, 所以 F 是局部微分同胚. 又 F 是双射所以有 F^{-1} , 只需证 F^{-1} 光滑. 对任何 $q \in N$, 所以根据局部微分同胚可以取 $p = F^{-1}(q)$ 的某个邻域 U 满足 F 是 $U \rightarrow F(U)$ 的微分同胚.

再结合同胚是开映射可得 $F(U)$ 是 q 的邻域. 又 $F^{-1}|_{F(U)}$ 光滑 (因为局部微分同胚), 所以根据 p 的任意性, F^{-1} 光滑, 所以 F 是微分同胚

4.2 嵌入

有一种特殊的浸入, i.e 如果 F 是光滑流形 M, N 之间的浸入, 且 $F : M \rightarrow F(M)$ 是拓扑同胚的话, 就称 F 是嵌入.

下面列出了一些使得单射浸入能成为嵌入的充分条件:

Proposition 4.8

M 是 m 维光滑流形, N 是 n 维光滑流形, $F : M \rightarrow N$ 是光滑单射浸入. 那么下面任何一条都能推出 F 是个嵌入

- F 是开映射或闭映射
- F 逆紧
- M 是紧的
- $\partial M = \emptyset$ 且 $m = n$

Proof: (1) 如果 F 是开映射, 那么 F^{-1} 连续, 因此 F 是拓扑同胚. 如果 F 是闭映射, 对任何一个 M 中的开集 U , 都可知道 $F(U) = F(M) - F(M - U)$, 其中 $M - U$ 是闭的, 因此 $F(M - U)$ 是闭的, 所以 $F(U)$ 是开的, 所以 F 也是开映射, 所以 F^{-1} 连续, 所以 F 同胚

(2) F 是局部紧 T_2 空间 M 上的逆紧映射, 根据第一章习题可得 F 是闭的, 由(1)可得结论

(3)根据第一章习题可得 F 是闭的, 由(1)可得结论

(4)此时根据 $m=n$ 可得 F 是浸入也是淹没. 所以是局部微分同胚, 因此根据本章习题4.4, F 是开映射, 由(1)可得结论.

4.3 Exercises

Problem 4.1

M 是 n 维无边光滑流形, N 是 n 维带边流形, $F : M \rightarrow N$ 是光滑映射. 证明如果 $p \in M$ 满足 dF_p 是非异阵(意为其坐标表示的Jacobian矩阵是非异阵), 那么 $F(p) \in \text{Int}N$

Problem 4.2

M 是紧光滑流形, 证明不存在 $M \rightarrow R^k, k > 0$ 的光滑淹没

Problem 4.3

证明拓扑覆盖映射 $\pi : E \rightarrow M$ 是proper(逆紧)的, 当且仅当其纤维是有限的

Problem 4.4

证明局部微分同胚是开映射

第五章 子流形

5.1 嵌入子流形

上一章我们介绍了一个光滑映射什么时候能成为嵌入：单射浸入且是到像集的同胚。借此我们可以定义一类子流形：

Definition 5.1

M 是 n 维光滑流形, S 是 M 的一个子集, 且在子空间拓扑下成为一个光滑流形. 如果包含映射 $\iota : S \rightarrow M$ 是嵌入, 则称 S 是 M 的嵌入子流形

5.1.1 嵌入子流形的结构

嵌入子流形 S 在每个局部都能看成 M 的切片：

Theorem 5.2

M 是 n 维光滑流形, S 是 M 的子集. 则 S 是 M 的 k 维嵌入子流形, 当且仅当对任何 $p \in S$, 存在 M 中 p 附近的坐标卡 (U, φ) 使得

$$U \cap S = \left\{ q \in U \mid \varphi^i(q) = 0, k+1 \leq i \leq n \right\}$$

Proof: \Rightarrow 因为 $\iota : S \rightarrow M$ 是嵌入, 所以是浸入, 所以 rank 为 k . 常秩定理给出了存在 S 中 p 附近的坐标卡 (V, ψ) 和 M 中的坐标卡 (U, φ) 使得

$$\varphi \circ \iota \circ \psi^{-1}(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

这意味着对任何的 $q \in V$, 不妨设 $\psi(q) = x$, 则有

$$\varphi(q) = \varphi \circ \iota \circ \psi^{-1}(x) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

也就是说对 V 中的 q , $\varphi(q)$ 的后 $n-k$ 的分量确实均为0.

因为 V 是 S 的开子集, 在子空间拓扑下, 存在 M 的开子集 K 使得 $V = K \cap S$, 又存在 r 使得 $B_n(0, r) \subseteq \varphi(U)$, $B_k(0, r) \subseteq \psi(V)$, 因此通过缩小 U 和 V 不妨设 $\varphi(U) = B_n(0, r)$, $\psi(V) = B_k(0, r)$, 则

$$U \cap S \subseteq \left\{ q \in U \mid \varphi^i(q) = 0, k+1 \leq i \leq n \right\}$$

只需再证明反方向的包含. 任取 $q \in U$, 且有 $\varphi^i(q) = 0, k+1 \leq i \leq n$, 可设

$$(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = \varphi(q)$$

从而 $\sum_{i=1}^k |x_i|^2 < r^2$, 这给出了 $\varphi(q) = (x_1, \dots, x_k) \in B_k(0, r) = \psi(V)$, 那么根据 φ 是双射可得

$$\psi^{-1}(x_1, \dots, x_k) = \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = q$$

所以 $q \in S$, 因此

$$U \cap S = \left\{ q \in U \mid \varphi^i(q) = 0, k+1 \leq i \leq n \right\}$$

\Leftarrow 显然 S 是 T_2 且第二可数, 这都由 M 继承而来. 又对任何 $p \in S$, 存在 M 中 p 附近的坐标卡 (U, φ) 使得

$$U \cap S = \left\{ q \in U \mid \varphi^i(q) = 0, k+1 \leq i \leq n \right\}$$

通过缩小 U 不妨设 $\varphi(U)$ 是某个球体 $B(0, r)$, 令

$$\tilde{\varphi}(q) = (\varphi^1(q), \dots, \varphi^k(q)) \quad q \in U \cap S$$

显然 $\tilde{\varphi}$ 连续, 又可定义

$$h(x_1, \dots, x_k) = \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

所以可知 h 和 $\tilde{\varphi}$ 互逆, 从而 $\tilde{\varphi}$ 成为一个 $U \cap S \rightarrow B_k(0, r)$ 的同胚, 记 $V = U \cap S$, 则 $(V, \tilde{\varphi})$ 就是 S 中 p 附近的一个坐标卡, 从而 S 是局部欧式空间, 维数是 k . 在子空间拓扑下, $\iota: S \rightarrow S$ 显然是一个同胚. 下面我们赋予 S 光滑结构: 我们刚才取的坐标卡就是光滑相容的. 注意到对任何 $(V, \tilde{\varphi})$ 和 $(K, \tilde{\psi})$, 根据这两个坐标卡的构造,

$$V = U \cap S \quad \tilde{\varphi}(p) = (\varphi^1(p), \dots, \varphi^k(p)) \quad K = X \cap S \quad \tilde{\psi}(p) = (\psi^1(p), \dots, \psi^k(p))$$

其中 $(U, \varphi), (X, \psi)$ 都是满足题意的 M 中的坐标卡. 这给出了

$$\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1}(x_1, \dots, x_k) = \tilde{\varphi} \circ \psi^{-1}(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

$$= (\varphi^1 \circ \psi^{-1}(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0), \dots, \varphi^k \circ \psi^{-1}(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0))$$

根据 φ 和 ψ 的光滑相容性, 可得 $\varphi^i \circ \psi^{-1}$ 都光滑, 因此 S 的不同坐标卡光滑相容, 又这种坐标卡可以覆盖 S , 因此是一个图册, 决定了唯一的光滑结构且直接计算得到

$$\varphi \circ \iota \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

因此 ι 是个浸入, 从而成为一个嵌入, 从而 S 是 M 的维数为 k 的嵌入子流形

5.1.2 水平集

了解了嵌入子流形的结构之后, 我们来看如何构造嵌入子流形. 首先介绍水平集的概念. 对一个映射 $F: M \rightarrow N$, 和 $c \in N$, $F^{-1}(c)$ 称为 F 在 c 处的水平集, 当然有可能是空集

Theorem 5.3 常秩水平集定理

M 是 m 维光滑流形, N 是 n 维光滑流形, $F: M \rightarrow N$ 是秩为 r 的常秩映射, $c \in F(M)$, 那么 $F^{-1}(c)$ 是 M 的 $m-r$ 维嵌入子流形

Proof: 常秩定理给出了, 对任何 $p \in F^{-1}(c)$, 存在 M 中 p 附近的坐标卡 (U, φ) 和 N 中 $F(p)$ 附近的坐标卡 (V, ψ) 使得

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

不妨设 $\psi(c) = 0$, 那么对 $p \in U$, 则又 $F(p) = c$ 当且仅当

$$\varphi^1(p) = \cdots = \varphi^r(p) = 0$$

因此

$$p \in F^{-1}(c) \cap U \Leftrightarrow \varphi^1(p) = \cdots = \varphi^r(p) = 0$$

通过交换坐标顺序, 把前 r 个换到后 r 个, 记令新函数 $\tilde{\varphi} = (\varphi^{r+1}, \dots, \varphi^m, \varphi^1, \dots, \varphi^r)$, 第一章已经说过 $(U, \tilde{\varphi})$ 还是 M 中的光滑坐标卡, 且由上可得

$$U \cap F^{-1}(c) = \left\{ q \in U \mid \tilde{\varphi}^i(q) = 0, m-r+1 \leq i \leq m \right\}$$

因此根据嵌入子流形的结构定理, $F^{-1}(c)$ 是 M 的 $m-r$ 维嵌入子流形.

由上可知光滑浸入的水平集肯定是嵌入子流形, 事实上只要 F 在每个 $p \in F^{-1}(c)$ 处的切映射都是满射, 就能得到 $F^{-1}(c)$ 是嵌入子流形, 这样的 p 称为正则点, 这样的 c 称为正则值. 不是正则点的点称为临界点, 不是正则值的值称为临界值. 正则值的水平集称为正则水平集

Theorem 5.4 正则水平集定理

M 是 m 维光滑流形, N 是 n 维光滑流形, $F: M \rightarrow N$ 是光滑映射, c 是 F 的正则值, 那么 $F^{-1}(c)$ 是 M 的 $m-n$ 维嵌入子流形

Proof: Proposition 4.2 说明使得 dF_p 是满射的 p 的全体是 M 的开子集 U , 且显然 $F^{-1}(c) \subseteq U$ (因为 $F^{-1}(c)$ 全都是 F 的正则点). 又 U 是 M 的开子集, 从而 $F|_U: U \rightarrow N$ 是光滑映射, 且根据 U 的性质可得 $F|_U$ 是浸入, 从而根据常秩水平集定理, $F^{-1}(c)$ 是 U 的嵌入子流形, 维数为 $\dim U - n = m - n$.

又 U 是 M 的开子集, 所以包含映射 $\iota_U: U \rightarrow M$ 是光滑嵌入. 又 $\iota: F^{-1}(c) \rightarrow U$ 也是光滑嵌入, 所以二者的复合: $F^{-1}(c) \rightarrow M$ 还是光滑嵌入, 因此 $F^{-1}(c)$ 是 M 的 $m-n$ 维嵌入子流形

Proposition 5.5

S 是 m 维光滑流形 M 的子集. 那么 S 是 M 的 k 维嵌入子流形, 当且仅当对任何 $p \in S$, 存在 p 在 M 中的邻域 U 和光滑淹没 $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$ 满足

$$U \cap S = \Phi^{-1}(0)$$

Proof: \Rightarrow 在 p 附近存在 M 的坐标卡 (U, φ) 使得

$$U \cap S = \left\{ q \in U \mid \varphi^i(q) = 0, k+1 \leq i \leq m \right\}$$

定义

$$\Phi(q) = (\varphi^{k+1}(q), \dots, \varphi^m(q)) \quad U \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$$

则把 U 视为光滑流形时, U 可被一个坐标卡 (U, φ) 覆盖, 因此 Φ 的坐标表示为

$$\Phi \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_{k+1}, \dots, x_m)$$

因此 $J(\Phi \circ \varphi^{-1})$ 在 $\varphi(U)$ 中是满秩的, 秩为 $m-k$, 从而是个淹没. 且

$$q \in U \cap S \quad \text{当且仅当} \quad \Phi(q) = 0$$

\Leftarrow 根据正则水平集或常秩水平集定理, $U \cap S$ 是 U 的 $m - (m - k) = k$ 维嵌入子流形, 所以对任何 $p \in S \cap U$, 存在 U 中

的坐标卡 (V, ψ) 使得

$$V \cap S = \left\{ q \in V \mid \psi^i(q) = 0, k+1 \leq i \leq m \right\}$$

而 U 作为 M 的开子集, 其光滑结构和 M 的光滑结构是相容的, 所以 U 中的坐标卡都是 M 中的坐标卡, 所以 (V, ψ) 是 M 中的坐标卡. 根据 p 的任意性, 用正则子流形的结构定理就能得出结论.

如果 $S \subseteq M$ 是嵌入子流形, 且光滑映射 $\Phi: M \rightarrow N$ 满足 S 是 Φ 的一个正则水平集, 那么 Φ 称为 S 的定义映射. 一般的, 如果存在 M 的开子集 U 和光滑映射 $\Phi: U \rightarrow N$, 使得 $S \cap U$ 是 Φ 的某个正则水平集, 则 Φ 称为 S 的局部定义映射. 前一个性质说明嵌入子流形的每一点附近都有一个局部定义映射.

5.2 嵌入子流形的性质

Proposition 5.6 在定义域上的限制

S 是 m 维光滑流形 M 的 k 维嵌入子流形, F 是 M 上的光滑映射, 则 $F|_S$ 也是光滑映射

Proof:

$$F|_S = F \circ \iota$$

而光滑映射的复合还是光滑的, 所以 $F|_S$ 光滑.

另一种方式是用嵌入子流形的结构定理, 对任何 $p \in S$, 存在坐标卡 (U, φ) 使得

$$S \cap U = \left\{ q \in U \mid \varphi^i(q) = 0, k+1 \leq i \leq m \right\}$$

且 $(V, \tilde{\varphi})$ 就是 S 中 p 附近的坐标卡(其中 $V = U \cap S$, $\tilde{\varphi}(q) = (\varphi^1(q), \dots, \varphi^k(q))$), 因此

$$F|_S \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x_1, \dots, x_k) = F \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

右边光滑, 所以左边光滑, 根据 p 的任意性, $F|_S$ 光滑

Proposition 5.7 在值域上的限制

M 是 m 维光滑流形, N 是 n 维光滑流形, 且 S 是 N 的 k 维嵌入子流形, $F: M \rightarrow N$ 是光滑映射, 且 $F(M) \subseteq S$, 则把 F 视为 $M \rightarrow S$ 的映射时, 也是光滑的

Proof: 对任何 $F(p) \in S$, 存在 N 中 $F(p)$ 附近的坐标卡 (U, φ) 使得

$$U \cap S = \left\{ q \in U \mid \varphi^i(q) = 0, k+1 \leq i \leq n \right\}$$

令 $\tilde{\varphi} = (\varphi^1, \dots, \varphi^k)$, 那么 $(U \cap S, \tilde{\varphi})$ 是 S 中 $F(p)$ 附近的坐标卡, 记 π 是 R^n 到前 k 个分量的投影, 显然 $\pi: R^n \rightarrow R^k$ 光滑, 因此有

$$\tilde{\varphi} \circ F \circ \psi^{-1} = \pi \circ \varphi \circ F \circ \psi^{-1}$$

右边光滑, 所以左边光滑.

下面的结论告诉我们, 使得 S 成为 M 的嵌入子流形的光滑结构是唯一的

Proposition 5.8

M是m维光滑流形, S是M的k维嵌入子流形, 则Theorem 5.2给出的光滑结构是唯一一个使得S成为M的嵌入子流形的光滑结构

Proof: 假设还有另一组光滑结构, 在这个光滑结构下S记为 \tilde{S} , 这个光滑结构下的包含映射记为 \tilde{i} , 则根据 $\tilde{i} : \tilde{S} \rightarrow M$ 光滑且 $\tilde{i}(\tilde{S}) = S$, S是M的嵌入子流形, 可利用Proposition 5.7得到

$$\tilde{i} : \tilde{S} \rightarrow S$$

是光滑映射. 取 \tilde{S} 中的任意坐标卡 (U, φ) , 和S中的任意坐标卡 (V, ψ) , 则根据 \tilde{i} 光滑可得

$$\psi \circ \varphi^{-1} = \psi \circ \tilde{i} \circ \varphi^{-1}$$

右边光滑所以左边光滑.

另一方面, \tilde{i} 在 \tilde{S} 上是嵌入所以常秩, 又 $\tilde{i} : \tilde{S} \rightarrow S$ 是双射, 所以根据全局秩定理, $\tilde{i} : \tilde{S} \rightarrow S$ 是微分同胚. 因此有光滑逆映射, 逆映射就是 $S \rightarrow \tilde{S}$ 的恒等映射 id , 所以 id 是光滑的, 因此

$$\varphi \circ \psi^{-1} = \varphi \circ id \circ \psi^{-1}$$

右边光滑所以左边光滑, 因此 \tilde{S} 中的任意坐标卡和S中的任意坐标卡 (V, ψ) 是光滑相容的, 因此它们决定的光滑结构是相同的, 从而 \tilde{S} 和S的光滑结构一样, 证毕.

5.3 子流形的切空间

假设S是M的子流形, 那么我们可以把 $T_p S$ 视为 $dt_p(T_p S)$ 等同, 从而 $T_p S$ 成为了 $T_p M$ 的线性子空间, 这个子空间有一些特殊的性质:

Proposition 5.9

M是m维光滑流形, S是M的k维嵌入子流形, U是M中的开集, N是n维光滑流形. 如果 $\Phi : U \rightarrow N$ 是S的一个局部定义映射(这给出了 $k=m-n$), 那么对任何 $p \in S \cap U$, 都有

$$T_p S = Ker d\Phi_p = \left\{ v \in T_p M \mid d\Phi_p(v) = 0 \right\}$$

Proof: 根据局部定义映射的定义, $S \cap U$ 是 Φ 的某个正则值的水平集, 设为 $\Phi^{-1}(c)$. 则 $\Phi|_{S \cap U}$ 是常值函数(注意到还是光滑的, 因为 $S \cap U$ 是U的嵌入子流形), 因此对任何 $v \in T_p S$, 都可以知道

$$d\Phi_p(v)(f) = v(f \circ \Phi)$$

而 $f \circ \Phi$ 在 $S \cap U$ 上为c, 而 $S \cap U$ 是p在S中的一个邻域, 所以根据 $v \in T_p S$ 可得 $v(f \circ \Phi) = 0$, 因此根据f的任意性可知 $v \in Ker d\Phi_p$, 从而

$$T_p S \subseteq Ker d\Phi_p$$

又 $d\Phi_p$ 是一个m维流形到n维流形的切映射, 且对任何 $p \in S \cap U = \Phi^{-1}(c)$, $d\Phi_p$ 都是满射, 因此 $d\Phi_p$ 的rank为n. 所以 $dim(Ker d\Phi_p) = m - n$.

另一方面, $S \cap U$ 是U的m-n维嵌入子流形(正则水平集定理), 因此 $dim T_p S = m - n$, 所以 $T_p S$ 和 $Ker d\Phi_p$ 是维数相同的线性空间. 又 $T_p S \subseteq Ker d\Phi_p$, 所以二者必须相等.

Proposition 5.10 常秩水平集的切空间

S 是某个 $M \rightarrow N$ 的常秩映射 Φ 的水平集(因此 S 是 M 的嵌入子流形), 证明

$$T_p S = \text{Ker } d\Phi_p \quad \forall p \in S$$

Proof: 既然是水平集, 那么可设 $S = \Phi^{-1}(c)$, 同上, 对任何 $v \in T_p S$, 都可以知道

$$d\Phi_p(v)(f) = v(f \circ \Phi)$$

而 $f \circ \Phi$ 在 S 上为常数 $f(c)$, 因此 $d\Phi_p(v)(f) = 0$, 所以根据 f 的任意性 $v \in \text{Ker } d\Phi_p$. 另一方面, 设 $\text{rank } \Phi = r$, 则

$$\dim \text{Ker } d\Phi_p = \dim M - r \quad \dim S = m - r$$

因此 $\dim T_p S = \dim M - r$, 再根据 $T_p S \subseteq \text{Ker } d\Phi_p$ 可得 $T_p S = \text{Ker } d\Phi_p$

5.4 作为嵌入子流形的 ∂M **Theorem 5.11** ∂M 是嵌入子流形

M 是 n 维带边光滑流形, 前面已经证明 ∂M 是 $n-1$ 维无边光滑流形. 事实上 ∂M 是 M 的嵌入子流形

Proof: 回忆 ∂M 上的光滑结构. 对任何 $p \in \partial M$, 存在 M 中 p 附近的边界坐标卡 (U, φ) , 从而可以定义 ∂M 中 p 附近的坐标卡

$$(U \cap \varphi^{-1}(H^n), \pi \circ \varphi)$$

其中 π 是 R^n 到前 $n-1$ 个分量的投影, $(\pi \circ \varphi)^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$. 以上内容可参考 Proposition 1.16, 在子空间拓扑下, $\iota: \partial M \rightarrow \partial M$ 显然是拓扑同胚.

又

$$\varphi \circ \iota \circ (\pi \circ \varphi)^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \varphi \circ \iota \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$$

所以 ι 是浸入, 因此 ι 是嵌入. 从而 ∂M 在 Proposition 1.16 的光滑结构下成为嵌入子流形.

另一个方法:

根据 Proposition 1.14, $q \in U \cap \partial M$ 当且仅当

$$\varphi^n(q) = 0$$

所以存在光滑结构使得 ∂M 可以成为 M 的嵌入子流形, 由第一种方法可得 Proposition 1.16 的光滑结构也能使 ∂M 成为嵌入子流形, 所以根据光滑结构的唯一性, ∂M 的光滑结构就是 Proposition 1.16 的光滑结构

我们可以给带边流形边界处的切空间的元素进行分类. 定义 $v \in T_p M - T_p \partial M$ 为内切向量, 如果存在光滑曲线 $\gamma: [0, \epsilon) \rightarrow M$ 满足 $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. 定义 $v \in T_p M - T_p \partial M$ 为外切向量, 如果存在光滑曲线 $\gamma: (-\epsilon, 0] \rightarrow M$ 满足 $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$

Proposition 5.12

M 是 n 维带边光滑流形, $p \in \partial M$, 则边界坐标卡 (U, φ) 给出了一组基底 $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$. 如果把 $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ 和 (v_1, \dots, v_n) 视为等同, 那么

- $T_p \partial M = \left\{ v \in T_p M \mid v_n = 0 \right\}$
- 内切向量 $= \left\{ v \in T_p M \mid v_n > 0 \right\}$
- 外切向量 $= \left\{ v \in T_p M \mid v_n < 0 \right\}$

显然这三个集合互不相交, 且并集为 $T_p M$, 而且由定义可得内切向量和外切向量不依赖于坐标卡的选取

Proof: 首先看 $T_p \partial M$

注意到

$$U \cap \partial M = \left\{ q \in U \mid \varphi^n(q) = 0 \right\}$$

且 $\varphi^n \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = x_n$, 所以 φ^n 是个淹没, 且 $U \cap \partial M$ 是 φ^n 在0处的水平集, 因此 φ^n 是 ∂M 的局部定义映射, 根据Proposition 5.9,

$$T_p \partial M = \text{Ker } d\varphi_p^n$$

任取 $v \in \text{Ker } d\varphi_p^n$, 那么可设 $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$, 且

$$\begin{aligned} d\varphi_p^n(v)(f) &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \varphi^n) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f \circ \varphi^n \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x^i} \quad \forall f \in C^\infty(R) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f(x_n)}{\partial x^i} = v_n \frac{df}{dx} \Big|_{x_n} \end{aligned}$$

因此 $d\varphi_p^n(v) = 0$ 当且仅当 $v_n = 0$, 第一条证毕

然后看内切向量. 根据内切向量的定义, v 是内切向量当且仅当存在光滑曲线 $\gamma: [0, \epsilon) \rightarrow M$, 满足 $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. 那么根据3.5节的内容可知

$$(v_1, \dots, v_n) = \left(\left. \frac{d\varphi^1 \circ \gamma}{dt} \right|_{t=0}, \dots, \left. \frac{d\varphi^n \circ \gamma}{dt} \right|_{t=0} \right)$$

注意到 $\varphi^n(q) > 0$ 因为 $\varphi(U) \in H^n$, 且 $\varphi^n(p) = 0$ 因为 $p \in \partial M$, 因此用极限的保号性可知

$$\left. \frac{d\varphi^n \circ \gamma}{dt} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi^n \circ \gamma(t) - 0}{t} \geq 0$$

又内切向量不能在 $T_p \partial M$ 里, 所以 $\left. \frac{d\varphi^n \circ \gamma}{dt} \right|_{t=0}$ 必须 > 0 . 这说明内切向量含于 $\left\{ v \in T_p M \mid v_n > 0 \right\}$. 反过来, 不妨设 $\varphi(U) = B^+(0, 1), \varphi(p) = 0$, 设 v 满足 $v_n > 0$, 因为 U 是 p 的邻域, 所以存在 ϵ 使得当 $t \in [0, \epsilon)$ 时, $(tv_1, \dots, tv_n) \in \varphi(U)$, 定义

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}(tv_1, \dots, tv_n)$$

则 $\gamma'(0) = (v_1, \dots, v_n)$, 因此 $\left\{ v \in T_p M \mid v_n > 0 \right\}$ 含于内切向量, 从而两个集合相互包含, 因此相等

然后看外切向量, 根据外切向量的定义, v 是外切向量当且仅当存在光滑曲线 $\gamma: (-\epsilon, 0] \rightarrow M$, 满足 $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. 那么根据3.5节的内容可知

$$(v_1, \dots, v_n) = \left(\left. \frac{d\varphi^1 \circ \gamma}{dt} \right|_{t=0}, \dots, \left. \frac{d\varphi^n \circ \gamma}{dt} \right|_{t=0} \right)$$

注意到 $\varphi^n(q) > 0$ 因为 $\varphi(U) \in H^n$,且 $\varphi^n(p) = 0$ 因为 $p \in \partial M$, 因此极限的保号性可知

$$\left. \frac{d\varphi^n \circ \gamma}{dt} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\varphi^n \circ \gamma(t) - 0}{t} \leq 0 \quad (\text{分子非负, 分母非正})$$

又外切向量不能在 $T_p \partial M$ 里, 所以 $v_n < 0$, 这说明外切向量含于 $\left\{v \in T_p M \mid v_n < 0\right\}$.

反过来, 设 v 满足 $v_n < 0$, 不妨设 $\varphi(U) = B^+(0, 1)$, $\varphi(p) = 0$, 因为 U 是 p 的邻域, 所以存在 ϵ 使得当 $t \in (-\epsilon, 0]$ 时, $(tv_1, \dots, tv_n) \in \varphi(U) = B^+(0, 1)$ (t 不能是正数, 因为 $v_n < 0$, 而要落在半球内需要保证最后一个分量非负), 定义

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}(tv_1, \dots, tv_n)$$

则 $\gamma(0) = \varphi^{-1}(0) = p$, $\gamma'(0) = (v_1, \dots, v_n)$, 因此 $\left\{v \in T_p M \mid v_n < 0\right\}$ 含于外切向量, 从而两个集合相互包含, 因此相等

Proposition 5.13 边界定义映射

M 是 n 维带边光滑流形, 则存在一个光滑函数 $f : M \rightarrow [0, \infty)$, 满足 $f^{-1}(0) = \partial M$, 且 0 是 f 的正则值(i.e. df_p 在 $p \in \partial M$ 处的rank为1, i.e. $df_p \neq 0, \forall p \in \partial M$). f 称为边界定义映射

Proof: 取可数个覆盖 M 的坐标卡, 设为 (U_i, φ_i) , 定义

$$f_i(p) = \begin{cases} 1 & U_i \text{ 是内坐标卡} \\ \varphi_i^n(p) & U_i \text{ 是边界坐标卡} \end{cases} \quad \forall p \in U_i$$

因此, $f_i(p) > 0$ 当且仅当 $p \in \text{Int} M$, $f_i(p) = 0$ 当且仅当 $p \in \partial M$. 令 ψ_i 是从属于 U_i 的单位分解, 定义

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i f_i$$

显然 $f \geq 0$ 且 $f^{-1}(0) = \partial M$, 只需证 $p \in \partial M$ 都是 f 的正则点. 设 $v \in T_p M$ 是一个指向内的向量, 把包含 p 的 U_i 都找出来, 则 $f_i(p) = 0$ 成立, 且

$$d(f_i)_p(v) = d(\varphi_i^n)_p(v)$$

在坐标卡 (U_i, φ_i) 中考虑基底 $(\frac{\partial}{\partial x^i})$, 则 v 有展开

$$v = \sum_{j=1}^n v_j^i \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$$

从而对任何 $g \in C^\infty([0, \infty))$, 都有

$$\begin{aligned} d(\varphi_i^n)_p(v)(g) &= v(g \circ \varphi_i^n) = \sum_{j=1}^n v_j^i \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p g \circ \varphi_i^n \\ &= \sum_{j=1}^n v_j^i \frac{\partial g \circ \varphi_i^n \circ \varphi_i^{-1}}{\partial x_j} \Big|_{\varphi(p)} = \sum_{j=1}^n v_j^i \frac{\partial g(x_n)}{\partial x_j} \Big|_{\varphi(p)} = v_n^i \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{\varphi_i^n(p)} \end{aligned}$$

所以结合 $\varphi_i^n(p) = 0$ 可得

$$d(f_i)_p(v) = v_n^i \frac{\partial}{\partial x} \Big|_0 \neq 0$$

又

$$\begin{aligned} df_p(v) &= \sum_{p \in U_i} f_i(p) d(\psi_i)_p(v) + \psi_i(p) d(f_i)_p(v) \\ &= \sum_{p \in U_i} \psi_i(p) d(f_i)_p(v) \end{aligned}$$

刚才已经得出 $d(f_i)_p(v)$ 是 $T_0[0, \infty)$ 中的 $v_n^i \frac{\partial}{\partial x} \Big|_0$, 且根据 v 是指向内的可知 v_n^i 都是正数, 又使得 $\psi_i(p) \neq 0$ 的 i 只有有限个, 而有限个 v_n^i (正数) 相加还是正数, 因此 df_p 满射 (因为 $T_0[0, \infty)$ 是一维空间), 因此 p 是正则点, 0 是正则值

Proposition 5.14 用边界定义映射对切向量分类

M 是 n 维带边光滑流形, $p \in \partial M$. 则对任何一个边界定义映射 f , $v \in T_p M$ 是指向内的, 当且仅当 $vf > 0$. 指向外, 当且仅当 $vf < 0$. $v \in T_p \partial M$, 当且仅当 $vf = 0$

Proof: 取 p 附近的边界坐标卡 (U, φ) , 不妨设 $\varphi(U) = B^+(0, 1)$, $\varphi(p) = 0$, 那么注意到

$$vf = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)}$$

对 $i \neq n$, 我们有

$$\frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \circ \varphi^{-1}(0, \dots, 0, h, 0, \dots, 0) - f \circ \varphi^{-1}(0, \dots, 0)}{h}$$

如果把 $f \circ \varphi^{-1}(\dots, h, \dots, 0)$ 记为 $g(h)$, 那么 $g(h) \geq 0$, 且在 $(-1, 1)$ 中可微, $g(0) = 0$, 从而根据可导极值点必定是逐点可以给出 $g'(0) = 0$, 从而 $\frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)} = 0$, 这给出了

$$vf = v_n \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_n} \Big|_0$$

又根据极限的保号性,

$$\frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_n} \Big|_0 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f \circ \varphi^{-1}(0, \dots, 0, h) - f \circ \varphi^{-1}(0, \dots, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f \circ \varphi^{-1}(0, \dots, 0, h) - f(p)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f \circ \varphi^{-1}(0, \dots, 0, h)}{h} \geq 0$$

(因为 $f \geq 0$) 如果 $\frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_n} \Big|_0 = 0$, 则任取 $h \in C^\infty([0, \infty))$,

$$\begin{aligned} df_p(v)(h) &= v(h \circ f) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial h \circ f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)=0} \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{dh}{dt} \Big|_0 \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i} \Big|_0 = \frac{dh}{dt}(0) v_n \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_n} \Big|_0 = 0 \end{aligned}$$

这将给出 $df_p(v) = 0$ 恒成立, 与 p 是 f 的正则点矛盾, 所以 $\frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_n} \Big|_0 > 0$, 因此由

$$vf = v_n \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_n} \Big|_0$$

可以知道, v 指向内当且仅当 $v_n > 0$ 当且仅当 $vf > 0$

v 指向外当且仅当 $v_n < 0$ 当且仅当 $vf < 0$. $v \in T_p \partial M$ 当且仅当 $v_n = 0$ 当且仅当 $vf = 0$

5.5 Exercise

Problem 5.1

S 是 M 的嵌入子流形, 那么对任何一个 $f \in C^\infty(S)$, 都存在 S 在 M 中的邻域 U , 使得存在 $g \in C^\infty(U)$ 且 $g|_S = f$

Problem 5.2

上一题中, 如果 S 到 M 的嵌入是 proper (逆紧) 的, 那么证明 g 可以是 $C^\infty(M)$ 的

第六章 Sard定理

6.1 零测集

在实分析中我们接触了零测集的概念, 它们代表了一类“可忽略”的集合, 在光滑流形上我们有时也要考虑除去流形上“可忽略”的一些点, 因此可以把零测集引入到光滑流形上来. 通过光滑流形与欧式空间局部同胚的特性, 我们可以定义光滑流形 M 上的零测集的概念:

Definition 6.1

M 是 n 维光滑流形, A 是 M 的子集. 称 A 为零测集, 如果存在一组 M 的坐标卡 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 使得 U_α 覆盖 A 且满足 $\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha)$ 是 R^n 中的零测集

流形上的零测集这个概念是良定义的, 在说明这件事之前, 我们需要一个引理, 它是实分析中“绝对连续函数把零测集映射为零测集”在高维空间下的推广, 当然此处我们只需考虑光滑函数:

Lemma 6.2

A 是 R^n 中的零测集, F 是 $A \rightarrow R^n$ 的光滑映射, 那么 $F(A \cap U)$ 是 R^n 中的零测集.

Proof: $m(A \cap U) = 0$, 因此 $A \cap U$ 也是零测集, 从而我们不妨设 $A \subseteq U$, 对任何 $p \in A$, 都存在一个邻域 $U_p \subseteq U$, 使得存在 U_p 上的光滑函数 F_p , 满足 $F_p|_{A \cap U_p} = F$, 再取以 p 球心, 半径足够小的一个球体 V_p , 满足 $\bar{V}_p \subseteq U_p$, 那么 $\cup_{p \in A} V_p$ 组成了 A 的开覆盖, 根据 R^n 林德洛夫性质, 可以取可数子覆盖 $\cup_{j=1}^{\infty} V_{p_j}$, 在每个 V_{p_j} 上, 我们知道 $\bar{V}_{p_j} \subseteq U_{p_j}$, 因此存在常数 C_j 使得

$$\|F(x) - F(y)\| = \|F_{p_j}(x) - F_{p_j}(y)\| \leq C_j |x - y| \quad x, y \in V_{p_j}$$

又 $F(A) = \cup_{i=1}^{\infty} F(A \cap V_{p_j})$, 那么根据可数个零测集的并还是零测集, 可以知道只需证 $F(A \cap V_{p_j})$ 是零测集, 因此不妨设 $A \in V_{p_j}$.

根据 A 是零测集, 则对任何的 $\epsilon > 0$, 存在一组覆盖 A 的开正方体 Q_i 使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(Q_i) < \epsilon$$

则由 $A \subseteq V_{p_j}$ 可得 $Q_i \cap V_{p_j}$ 还是 A 的开覆盖(j 是固定的), 取定 $x_i \in Q_i \cap V_{p_j}$, 则对任何 $y \in Q_i \cap V_{p_j}$, 都有

$$\|F(x_i) - F(y)\| \leq C_j \|x_i - y\| \leq C_j \sqrt{n} d_i$$

其中 d_i 是 Q_i 的边长.

这说明 $F(Q_i \cap V_{p_j}) \subseteq B(F(x_i), C_j \sqrt{n} d_i)$, 从而

$$\begin{aligned} m(F(A)) &= m(\cup_{i=1}^{\infty} F(Q_i \cap V_{p_j})) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(Q_i \cap V_{p_j}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(B(F(x_i), C_j \sqrt{n} d_i)) = m(B(0, 1)) C_j^n n^{\frac{n}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} d_i^n \\ &= m(B(0, 1)) C_j^n n^{\frac{n}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} m(Q_i) < m(B(0, 1)) C_j^n n^{\frac{n}{2}} \epsilon \end{aligned}$$

根据 ϵ 的任意性, 可以知道 $F(A)$ 是 R^n 中的零测集.

然后我们可以说明光滑流形上的“零测集”是良定义的概念:

Proposition 6.3

M 是 n 维带边或不带边光滑流形, 如果 A 是 M 上的零测集, 那么对于任何一组覆盖 A 的坐标卡 (V_β, ψ_β) , 均有 $\psi_\beta(V_\beta \cap A)$ 是 R^n 中的零测集 (n 是 M 的维数)

Proof: 如果 A 是零测集, 根据定义, 可得存在一组覆盖 A 的坐标卡

$$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$$

满足 $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 是 R^n 中的零测集. 那么根据 M 的第二可数性质, 可以选取 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 的可数子覆盖, 记为 (U_i, φ_i) , 则

$$\psi_\beta(V_\beta \cap A) = \cup_{i=1}^{\infty} \psi_\beta(V_\beta \cap A \cap U_i) = \cup_{i=1}^{\infty} (\psi_\beta \circ \varphi_i^{-1}) \circ \varphi_i(V_\beta \cap A \cap U_i)$$

$\varphi_i(V_\beta \cap A \cap U_i)$ 是零测集 $\varphi_i(A \cap U_i)$ 的子集, 因此也是零测的, 因此用 Lemma 6.2 可得 $(\psi_\beta \circ \varphi_i^{-1}) \circ \varphi_i(V_\beta \cap A \cap U_i)$ 是 R^n 中的零测集, 而可数个零测集的并还是零测集, 因此 $\psi_\beta(V_\beta \cap A)$ 是零测集

6.2 Sard定理

Theorem 6.4 Sard's theorem

M, N 是带边或不带边光滑流形, F 是 M 到 N 的光滑映射, 那么 F 的临界值的全体在 N 中是零测集

Proof: 令 $m = \dim M, n = \dim N$. 对 m 用数学归纳法. 当 $m = 0$ 时, 如果 $n = 0$, 则 F 没有临界点 (切空间是 0 维的), 如果 $n > 0$, 那么 $F(M)$ 是可数集, 自然零测.

现在固定 m , 假设定理对 $1, 2, \dots, m-1$ 成立. 因为光滑流形可被可数个坐标卡覆盖, 所以只需证明 F 是 R^m 或 H^m 的开子集 U 到 R^n 的光滑函数的情形即可.

记 $C \subseteq U$ 是 F 的临界点的全体, 定义

$$C_k = \left\{ x \in C \mid F \text{ 的所有 } i \text{ 阶偏导数在 } x \text{ 处为 } 0, 1 \leq i \leq k \right\}$$

根据 F 的光滑性, 可知 F 的各阶偏导数连续, 因此 C_k 都是闭集, 下面通过 3 步证明 $F(C)$ 是 R^n 中的零测集

- $F(C - C_1)$ 零测
- $F(C_i - C_{i+1})$ 零测
- 对 $k > \frac{m}{n} - 1$, $F(C_k)$ 零测. 需要这一步是因为, 有可能存在任意阶偏导数都是 0 的点, 这显然不属于任何一个 $C_k - C_{k+1}$

Step 1: 因为 C_1 是闭的, 所以我们可以把 U 换为 $U - C_1$, 并令 $C_1 = \emptyset$, 然后证明 $F(C)$ 是零测集. 此时任取 $a \in C$, 根据 $C_1 = \emptyset$ 可得 F 的某个一阶偏导数在 a 处非0, 通过交换坐标轴的顺序不妨设 $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) \neq 0$, 考虑坐标换元 $(u(x), v(x)) = (u(x), v_2, \dots, v_m)$, 其中

$$u(x) = F_1(x) \quad v_2 = x_2 \quad \cdots \quad v_m = x_m$$

则根据 (u, v) 关于 x 的jacobian在 a 处非异可得存在 a 在 U 中的邻域 U_a 使得映射

$$g : (x_1, \dots, x_m) \rightarrow (u, v_2, \dots, v_m) = (F_1(x), x_2, \dots, x_m)$$

是微分同胚, 在 U_a 中取 V_a 满足 $\overline{V_a}$ 是紧的. 继而对任何 $y \in g(V_a)$, 存在唯一的 $x \in V_a$ 使得

$$(y_1, \dots, y_m) = (F_1(x), x_2, \dots, x_m) = g(x)$$

$$F \circ g^{-1}(y_1, \dots, y_n) = (y_1, F_2(x), \dots, F_n(x)) = (y_1, F_2 \circ g^{-1}(y), \dots, F_n \circ g^{-1}(y))$$

因此作为 y 的函数, $F \circ g^{-1}$ 的jacobian为

$$\begin{pmatrix} 1 & O \\ * & \left\{ \frac{\partial F_i \circ g^{-1}}{\partial y_j} \right\}_{i,j \geq 2} \end{pmatrix}$$

又 g 是 V_a 上的微分同胚, 所以 DF 满秩当且仅当 $D(F \circ g^{-1})$ 满秩, 所以 $F \circ g^{-1}$ 在 $g(\overline{V_a})$ 上的临界值就是 F 在 $\overline{V_a}$ 上的临界值.

固定 y_1 , 则 $F \circ g^{-1}$ 可以视为 $(\{y_1\} \times R^{m-1}) \cap \overline{V_a}$ 上的光滑函数, 且临界点是那些满足 $\text{rank} \left\{ \frac{\partial F_i \circ g^{-1}}{\partial y_j} \right\}_{i,j \geq 2} < n-1$ 的点, 根据归纳假设 $F \circ g^{-1}$ 在 $(\{y_1\} \times R^{m-1}) \cap \overline{V_a}$ 上的临界值(记为 $C(y_1)$)为 R^{n-1} 的零测集, 根据Fubini定理, $F \circ g^{-1}$ 在 $\overline{V_a}$ 上的临界值的测度为

$$m(F(C \cap \overline{V_a})) = m(F \circ g^{-1} \text{在 } g(\overline{V_a}) \text{ 的临界值}) = \int_{-\infty}^{\infty} m(C(y_1)) dy_1 = 0$$

又 C 可被 $\cup_{a \in C} V_a$ 覆盖, 且 R^m 是林德洛夫空间, 因此存在可数子覆盖 $\cup_i V_{a_i}$, 因此

$$m(F(C)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(F(C \cap \overline{V_{a_i}})) = 0$$

Step 2: 证明 $F(C_k - C_{k+1})$ 是零测集. 任取 $x \in C_k - C_{k+1}$, 存在某个模长为 k 的重指标 α (i.e $|\alpha| = k$), 满足 $w = \partial^\alpha f$ 在 C_k 中为0, 且 w 的某个分量的某个一阶偏导数在 a 处非0. 通过交换坐标轴, 不妨设 $\frac{\partial w_1}{\partial x_1} \neq 0$. 则定义

$$g : (x_1, \dots, x_m) \rightarrow (w_1(x), x_2, \dots, x_m)$$

同step1的证明, 可以给出在 a 的某个邻域 V_a 中(V_a 同上), 使得 g 是微分同胚. 回忆 w 在 C_k 上为0, 所以 $g(V_a \cap C_k) \subseteq \{0\} \times R^{m-1}$, 所以 $F \circ g^{-1}$ 中含于 $C_k - C_{k+1}$ 的临界点, 都在 $\{0\} \times R^{m-1}$ 里面, 因此把0赋给 $F \circ g^{-1}$ 的第一个变量, 把 $F \circ g^{-1}$ 视为 $m-1$ 个变量的函数, 用归纳假设就得出其临界值是零测集, 所以 $F \circ g^{-1}$ 的临界值是零测集.

又 $C_k - C_{k+1}$ 可被 $\cup_{a \in C_k - C_{k+1}} V_a$ 覆盖, 且 R^m 是林德洛夫空间, 因此存在可数子覆盖 $\cup_i V_{a_i}$, 根据零测集的可数并还是零测集, 可得 $F(C_k - C_{k+1})$ 是零测集

Step 3: $k > \frac{m}{n} - 1$ 时, $F(C_k)$ 是零测集. 对任何 $a \in U$, 存在一个开方体 E 使得 $a \in E \subseteq U$ (可以先取 a 为球心且在 U 中的球体, 然后找球体的内接正方体). 又因为 U 可被可数个这样的方体覆盖, 所以只需证 $F(C_k \cap \overline{E})$ 是零测集. 设 E 边长为 R , 记 K 是一个足够大的数, 把 E 分成 K^m 个边长为 $\frac{R}{K}$ 的小方体, 记为 Q_i , 在每个 $\overline{Q_i}$ 中取 $a_i \in C_k \cap \overline{Q_i}$ (如果 $C_k \cap \overline{Q_i} = \emptyset$, 那么这个小方体对 F 的临界值的贡献为0, 我们不考虑)

在 a_i 处用Taylor展开给出了

$$\|F(x) - F(a_i)\| \leq A\|x - a_i\|^{k+1} \leq A\sqrt{n^{k+1}}\left(\frac{R}{K}\right)^{k+1} \quad \forall x \in \overline{Q_i}$$

其中 A 依赖于 F 的 $k+1$ 阶偏微分的在 \overline{E} 上的最大值(根据光滑性 $k+1$ 阶偏微分在 $\overline{Q_i}$ 上一致有界), 以及 k 和 m , 总之和 x, i 无关. 因此 $F(\overline{Q_i}) \subseteq B(F(a_i), A\sqrt{n^{k+1}}\frac{R^{k+1}}{K^{k+1}})$, 后者有Lebesgue测度 $m(B(0, 1))A^n n^{\frac{n}{2}(k+1)}(\frac{R}{K})^{n(k+1)}$, 因此

$$m(F(C_k \cap \overline{E})) \leq \sum_{i=1}^{K^m} m(B(0, 1))A^n n^{\frac{n}{2}}\left(\frac{R}{K}\right)^n = CK^{m-(k+1)n}$$

其中 C 是和 K (注意是大写的 K)无关的常数. 取足够大的 K , 上式右边任意小, 因此 $m(F(C_K \cap \overline{E}))$ 是零测集. 证毕.

6.3 Whitney嵌入定理

作为Sard定理的应用, 我们证明任何一个无边光滑流形都能被嵌入到某个欧式空间中:

lemma 6.5

M 是 R^N 的 n 维光滑子流形, 对任何 $v \in R^N - R^{N-1}$ (我们把 R^{N-1} 视为 R^N 中最后一个坐标分量为0的子空间), 令 π_v 是满足 $\ker \pi_v$ 为 v 生成的一维子空间的投影. 当 $N > 2n + 1$ 时, 存在 v 使得 π_v 是到 R^{N-1} 的单射浸入

Proof: 要使 $\pi_v|_M$ 是单的, 只需保证对任何 $p, q \in M (p \neq q)$, 均有 $p - q$ 不平行于 v . 要使 $d\pi_v$ 在 M 上处处是单射, 就需要 $T_p M$ 中所有元素都不在 $\ker(d\pi_v)$ 中, 注意到 π_v 是线性映射, 所以 $d\pi_v$ 也是矩阵表示和 π_v 相同的线性映射. 因此只需令 $T_p M$ 中不包含 $\ker(d\pi_v)$ 除0以外的元素

考虑 $M \times M$ 的闭子集(Problem 1.10)

$$\Delta = \left\{ (p, p) \mid p \in M \right\}$$

记

$$M_0 = \left\{ (p, 0) \in T_p M \mid p \in M \right\}$$

这是 TM 的闭子集(Problem 3.4). 考虑如下映射

$$\kappa : (M \times M) - \Delta \rightarrow RP^{N-1} \quad \kappa(p, q) = [p - q]$$

$$\tau : TM - M_0 \rightarrow RP^{N-1} \quad \tau(p, w) = [w]$$

显然它们都是光滑映射, 且 π_v 是单射当且仅当 $[v]$ 不含于 κ 是值域中. π_v 是浸入当且仅当 v 不含于 τ 的值域中. 又 κ, τ 都是定义域为 $2n < N - 1$ 的光滑流形上的光滑映射, 因此根据Sard定理, 它们的值域都是 RP^{N-1} 中的零测集, 两个零测集的并还是零测的, 因此使得 π_v 不是单射浸入的 v 的等价类 $[v]$ 在 RP^{N-1} 中是零测集. 从这个零测集之外抽一个元素即可.

lemma 6.6

M 是 n 维带边或无边光滑流形, 若存在 N 使得 M 能被单射浸入到 R^N 中, 那么 M 能被逆紧单射浸入到 R^{2n+1} 中(不要忘记逆紧单射浸入是嵌入)

Proof: 对 R^N 的一个一维子空间 S , 记“管子”

$$T_R(S) = \left\{ x \mid d(x, S) < R \right\}$$

通过欧式空间的正交补理论, 设 S 的方向向量为 s , 我们可以显式的写出

$$d(x, S) = \|x - \langle x, s \rangle s\|$$

因此 $T_R(S)$ 是个开子集. 设 $F: M \rightarrow R^N$ 是一个单射浸入, G 是 $R^N \rightarrow B(0, 1)$ 的微分同胚(比如 $\frac{x}{\sqrt{1+\|x\|^2}}$), f 为 M 上光滑无穷函数, 然后定义

$$\Psi(p) = (G \circ F(p), f(p)) \quad M \rightarrow R^N \times R$$

又 $G \circ F$ 也是个单射浸入, 因此 Ψ 和 $d\Psi_p$ 全都是单射. 因此 Ψ 是单射浸入. ψ 是逆紧的, 因为任何一个紧集($R^N \times R$ 中看成有界闭集)的原像, 都存在某个 c 使得这个原像是 $f^{-1}((-\infty, c])$ 的闭子集, 根据 f 是穷竭可知原像是紧的, 这给出了 Ψ 是逆紧的. Proposition 4.8给出了 Ψ 是个嵌入, 且像集含于 $B(0, 1) \times R$, 注意到这是 R^{N-1} 中一个“管子”, S 是坐标轴 x_n (方向向量为 $(0, \dots, 0, 1)$), $R=1$.

以上我们证明了如果 M 有一个到 R^N 的单射浸入, 那么 M 必能被逆紧单射浸入到 R^{N+1} , 且嵌入的值域在某个管子中, 因此不妨设 M 能被逆紧嵌入到 R^{N+1} , 且值域含于某个管子 $T_R(S)$ 中. 如果 $N+1 \leq 2n+1$, 那么证明结束(因为 $R^{N+1} \rightarrow R^{2n+1}$ 的包含映射显然是逆紧嵌入).

如果 $N+1 > 2n+1$, 则存在 $v \in R^{N+1} - R^N$ 使得 $\pi_v: M \rightarrow R^{N-1}$ 是单射浸入, 又不满足这种条件的 v 是零测集, 所以可取 v 不在 S 中, 此时 $\pi_v(S)$ 是 R^{N-1} 的一维子空间, 且 $\pi_v(M)$ 含于某个以 $\pi_v(S)$ 为轴的管子(因为 π 是线性映射), 设为 $T_A(\pi_v(S))$, 只要证明 $\pi_v|_M$ 是逆紧的

设 $K \subseteq R^N$ 是紧子集(因此有界闭), 则存在 R_1 使得 $K \subseteq B(0, R_1)$, 对任何 $x \in \pi_v^{-1}(K)$, 存在 $c \in R$ 使得

$$\pi_v(x) = x - cv$$

(其实 $c = \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|^2}$), 又因为 $\|\pi_v(x)\| \leq R_1$, 设 Y 是 v 对应的线性子空间(因此也是 $\frac{v}{\|v\|}$ 生成的线性子空间), 那么

$$d(x, Y) = \|x - \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|^2} v\| = \|x - cv\|$$

因此 x 含于 $T_{R_1}(Y)$, 因此 $\pi_v^{-1}(K) \subseteq T_{R_1}(Y) \cap T_A(\pi_v(S))$, 两个轴不平行的管子的交集是有界集, 且根据 π_v 连续可得 $\pi_v^{-1}(K)$ 是个闭集, 因此 $M \cap \pi_v^{-1}(K)$ 是有界闭集, 因此在欧式空间中是紧集, 因此 $\pi_v|_M$ 是 $R^{N+1} \rightarrow R^N$ 的逆紧单射浸入, 且值域含于某个 R^N 的管子中.

也就是说, 如果 M 能被逆紧单射浸入到 R^{N+1} , 且值域含于某个 R^{N+1} 的管子中, 那么 M 可被逆紧单射浸入到 R^N , 且值域含于某个 R^N 的管子中, 如果 $N > 2n+1$, 继续上述过程, 直到 $N = 2n+1$, 证毕.

Theorem 6.7 Whitney embedding theorem

n 维光滑流形能被逆紧嵌入到 R^{2n+1}

Proof: 根据Lemma 6.6, 只需找一个欧式空间 R^N 和一个把 M 单射浸入到 R^N 的光滑映射即可. 我们可以考虑足够大的 N 来完成这件事

先考虑 M 是紧流形的情形. 此时可以取有限个开集覆盖 M , 不妨设它们都是正则坐标球体(Problem 1.8), 记为 B_1, \dots, B_m . 这意味着存在坐标卡 (B'_i, φ_i) 使得 $\varphi_i(B'_i) = B(0, 1)$ 或 $B^+(0, 1)$, $\varphi_i(\overline{B}_i)$ 是一个闭球体(因此也是紧集). 记 $\rho_i: M \rightarrow R$ 是在 \overline{B}_i 上为1, $\text{supp} \rho_i \subseteq B'_i$ 的鼓包函数, 定义

$$F(p) = (\rho_1(p)\varphi_1(p), \dots, \rho_m(p)\varphi_m(p), \rho_1, \dots, \rho_m) \quad M \rightarrow R^{nm+m}$$

然后证 F 是单射浸入:

如果 $F(p) = F(q)$, 根据 B_i 覆盖 M 可得存在 i 使得 $p \in B_i$, 又 $\rho_i(p) = \rho_i(q)$, 所以 $q \in \text{supp} \rho_i \subseteq B'_i$, 又

$$\varphi_i(q) = \frac{\rho_i(q)\varphi_i(q)}{\rho_i(q)} = \frac{\rho_i(p)\varphi_i(p)}{\rho_i(p)} = \varphi_i(p)$$

根据 φ 是单射可得 $p = q$

设 $p \in B_i$, 因为在 \bar{B} 上 $\rho_i = 1$, 所以 $d(\rho_i \varphi_i)_p = d(\varphi_i)_p$, 根据 φ_i 是微分同胚可得 $d(\varphi_i)_p$ 是单的, 又

$$dF_p = d(\rho_1 \varphi_1)_p \times \cdots \times d(\rho_m \varphi_m)_p \times d(\rho_1)_p \times \cdots \times d(\rho_m)_p$$

若干映射里面有一个是单射, 则它们的直积也是单射, 因此 dF_p 是单的, 所以 F 是单射浸入

然后考虑 M 非紧的情形. 令 $f: M \rightarrow R$ 是一个穷竭函数. 记

$$M_i = f^{-1}([i, i+1])$$

这是个紧集, 可用有限多个正则坐标球体 U_1, \dots, U_k 覆盖. 记

$$N_i = (U_1 \cup \cdots \cup U_k) \cap f^{-1}((i-0.1, i+1.1))$$

则 N_i 还是 M 的开子流形, 且包含了 M_i . 另外当 $|i-j| \geq 2$ 时, $N_i \cap N_j = \emptyset$. 前面紧流形的情形实际上给出了“能被有限个正则坐标球覆盖的光滑流形”都能被单射浸入到某个欧式空间 R^N 中, 因此 N_i 作为一个 n 维光滑流形, 可以被单射浸入到某个 R^N , 根据 Lemma 6.6, 存在到 $B_i \rightarrow R^{2n+1}$ 的单射浸入 φ_i , 取鼓包函数 ρ_i 满足 ρ_i 在 M_i 的一个开邻域上为 1, 且 $\text{supp} \rho_i \subseteq N_i$, 定义

$$\Psi(p) = \left(\sum_{i \text{ is odd}} \rho_i \varphi_i, \sum_{i \text{ is even}} \rho_i \varphi_i, f(p) \right)$$

下面证明 Ψ 是单射浸入:

如果 $\Psi(p) = \Psi(q)$, 则存在 i 使得 $f(p) = f(q) \in [i, i+1]$, 这给出了 $p, q \in M_i \subseteq N_i$, 如果 i 是奇数, 考察 Ψ 的第一个分量 $\sum_{i \text{ is odd}} \rho_i \varphi_i$, 前面说过 $|i-j| \geq 2$ 时, $N_i \cap N_j = \emptyset$, 因此对所有奇数 j , $\text{supp} \varphi_j$ 互不相交, 所以

$$\varphi_i(p) = \sum_{j \text{ is odd}} \rho_j(p) \varphi_j(p) = \sum_{j \text{ is odd}} \rho_j(q) \varphi_j(q) = \varphi_i(q)$$

根据 φ_i 是单射可得 $p = q$. 如果 i 是偶数, 则考虑 $\sum_{i \text{ is even}} \rho_i \varphi_i$, 同理可得 $p = q$

对任何 $p \in M$, 存在 i 使得 $p \in M_i \subseteq N_i$, 如果 i 是奇数, 根据奇数 N_i 互不相交可得

$$d\left(\sum_{j \text{ is odd}} \rho_j \varphi_j\right)_p = d(\rho_i \varphi_i)_p = d(\varphi_i)_p$$

第一个等号是因为在 p 的邻域内, 只要奇数 $j \neq i$, 都存在 p 的一个邻域 V_j 使得 $V_j \subseteq N_j$, 因此 $\rho_j \varphi_j = 0$. 第二个等号是因为 ρ_i 在 p 的一个邻域内为 1.

根据 φ_i 是微分同胚可得 $d(\varphi_i)_p$ 是单的, 因此

$$dF_p = d\left(\sum_{j \text{ is odd}} \rho_j \varphi_j\right)_p \times d\left(\sum_{j \text{ is even}} \rho_j \varphi_j\right)_p \times df_p = d(\varphi_i)_p \times d\left(\sum_{j \text{ is even}} \rho_j \varphi_j\right)_p \times df_p$$

是单的. i 为偶数的情形同理, 证毕

6.4 Whitney逼近定理

Theorem 6.8 函数的Whitney逼近定理

M 是 n 为带边或不带边光滑流形, $F: M \rightarrow R^k$ 是 M 上的连续函数, 对任何正连续函数 $\delta: M \rightarrow R$, 存在光滑函数 $\tilde{F}: M \rightarrow R^k$ 使得

$$|F(p) - \tilde{F}(p)| < \delta(p)$$

Proof: 对任何 $x \in M$, 令 U_x 是 x 的邻域且满足

$$\delta(y) > \frac{1}{2}\delta(x) \quad |F(y) - F(x)| < \frac{1}{2}\delta(x) \quad \forall y \in U_x$$

由此可得在 U_x 中必有

$$|F(x) - F(y)| < \delta(y)$$

又 M 第二可数, 所以存在可数个这样的 U_{x_i} 覆盖 M , 记为 $V_i = U_{x_i}$, 令 φ_i 是从属于 V_i 的单位分解, 定义

$$\tilde{F}(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(y) F(x_i)$$

显然 \tilde{F} 是光滑的. 对任何 $y \in M$, 都有

$$|\tilde{F}(y) - F(y)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(y) (F(x_i) - F(y)) \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(y) |F(x_i) - F(y)|$$

注意到当 $\varphi_i(y) \neq 0$ 时, 必有 $y \in V_i = U_{x_i}$, 因此 $|F(x_i) - F(y)| < \delta(y)$, 因此

$$= \sum_{y \in \text{supp} \varphi_i} \varphi_i(y) |F(x_i) - F(y)| < \sum_{y \in \text{supp} \varphi_i} \varphi_i(y) \delta(y) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(y) \delta(y) = \delta(y)$$

6.5 横截性

Sard定理的另一个应用是说我们可以对一个光滑映射进行“扰动”, 使得几乎对所有的“扰动”, 扰动后的映射的值域都能和任意一个嵌入子流形“完美的”相交, 不过这里的相交也包括交集是空集的情形, 这种操作乍一听好像没什么意义, 但实际上有很多应用场景, 尤其是在构造嵌入子流形的时候.

Definition 6.9

M, N 是光滑流形, S 是 N 的嵌入子流形, F 是 M 到 N 的光滑映射, 则称 F 和 S **横截相交**, 如果对任何 $p \in F^{-1}(S)$, 均有

$$dF_p T_p M + T_{F(p)} S = T_p N$$

若 K 是 N 的另一个嵌入子流形, 称 K 和 N 横截相交, 如果 K 到 N 的嵌入映射和 S 是横截相交的.

从定义可以看出, 如果 F 的一个淹没, 那么自然和 S 横截相交

Theorem 6.10 横截原像定理

M, N 是光滑流形, S 是 N 的嵌入子流形

- 如果光滑映射 $F : M \rightarrow N$ 和 S 横截相交, 那么 $F^{-1}(S)$ 是 M 的嵌入子流形且余维数和 S 在 N 中的余维数相同
- 一个特殊的情形是 K 是 N 的光滑子流形, 且与 S 横截相交, 那么 $K \cap S$ 是 N 的嵌入子流形

Proof: 对任何 $x \in F^{-1}(S)$, 都能找到 $F(x)$ 附近的一个邻域 U 和函数 $\varphi : U \rightarrow R^k$, 满足 $S \cap U = \varphi^{-1}(0)$, 如果能够说明 0 是 $\varphi \circ F$ 的正则值, 那么 $F^{-1}(S) \cap F^{-1}(U)$ 就是 $F^{-1}(U)$ 的余维数为 k 的正则子流形.

假设 $\varphi(F(x)) = 0$, 要争 $d\varphi_{F(x)} \circ dF_x$ 是 $T_x M$ 到 $T_0 R^k$ 的满射. 任取 $z \in T_0 R^k$, 根据 0 是 φ 的正则值可得存在 $y \in T_{F(x)} N$ 满足

$$d\varphi_{F(x)}(y) = z$$

根据 F 和 S 横截相交可知, 存在 $y_0 \in T_{F(x)} S$ 和 $v \in T_x M$ 满足

$$y = y_0 + dF_x(v)$$

两边复合 $d\varphi_{F(x)}$ 则给出了

$$z = d\varphi_{F(x)} y_0 + d(\varphi \circ F)_x(v)$$

但是 φ 在 S 上为常数, 所以 $d\varphi_{F(x)} y_0 = 0$, 因此 $d(\varphi \circ F)_x$ 是满射

这说明 $F^{-1}(S) \cap F^{-1}(U)$ 是 M 中开子集 $F^{-1}(U)$ 的嵌入子流形, 从而也是 M 上的嵌入子流形且余维数还是 k (理由参考 Proposition 5.5 的证明).

Theorem 6.11 横截性定理

M, N 是光滑流形, S 是 N 的嵌入子流形, 如果映射 $F : M \times P \rightarrow N$ 和 S 横截相交, 那么对 a.e 的 P , 映射 $F_p(x) = F(x, p) : M \rightarrow N$ 都和 S 横截相交

Proof: 令 π 是 $M \times P \rightarrow P$ 的投影, 根据横截原像定理, $F^{-1}(S)$ 是 $M \times P$ 的嵌入子流形 W , 因此 $\pi : W \rightarrow P$ 是光滑映射的, 后文我们默认 π 是定义在 W 上的. 根据 sard 定理, π 的临界值是零测集, 所以只需证: 如果 $p \in P$ 是 π 的正则值, 当且仅当 $F_p(x)$ 和 S 横截相交

任取 $x \in F_p^{-1}(S)$, 令 $q = F_p(x) = F(x, p)$, 只需证

$$T_q N = T_q S + d(F_p)_x T_x M$$

首先根据 F 和 S 横截相交可得

$$T_q N = T_q S + dF_{(x,p)} T_{(x,p)} M \times P \quad (1)$$

由根据 p 是 π 的正则值, 且 $(x, p) \in W$, 我们有

$$T_p S = d\pi_{(x,p)} T_{(x,p)} W \quad (2)$$

用 Problem 6.3 的结果可得 $T_{(x,p)} W = (dF_{(x,p)})^{-1} T_q S$, 从而

$$dF_{(x,p)} T_{(x,p)} W \subseteq T_q S \quad (3)$$

任取 $w \in T_q N$, 需要找到 $v \in T_q S$ 和 $y \in T_x M$ 满足

$$w = v + d(F_p)_x(y)$$

先用(1),得到 $v_1 \in T_q S, (y_1, z_1) \in T_x M \times T_p P \cong T_{(x,p)} M \times P$, 使得

$$w = v_1 + dF_{(x,p)}(y_1, z_1)$$

再用(2), 存在 $(y_2, z_2) \in T_{(x,p)} W$ (视为 $T_{(x,p)} M \times p$ 的子空间)使得

$$z_1 = d\pi_{(x,p)}(y_2, z_2)$$

但 π 是投影映射, 所以 $z_1 = d\pi_{(x,p)}(y_2, z_2) = z_2$, 从而

$$dF_{(x,p)}(y_1, z_1) = dF_{(x,p)}(y_2, z_2) + dF_{(x,p)}(y_1 - y_2, 0)$$

只要把 z_2 改成 z_1 就容易验证

然后考虑包含映射 $\iota_p: M \rightarrow M \times P$, 满足 $\iota_p(x) = (x, p)$, 那么 $F_p(x) = F \circ \iota_p$, 因此

$$d(F_p)_x = dF_{(x,p)} \circ d(\iota_p)_x$$

且注意到 $d(\iota_p)_x(y_1 - y_2) = (y_1 - y_2, 0)$, 从而

$$d(F_p)_x(y_1 - y_2) = dF_{(x,p)}(y_1 - y_2, 0)$$

这给出了

$$w = v_1 + dF_{(x,p)}(y_2, z_2) + d(F_p)_x(y_1 - y_2)$$

根据(3), $v_1 + dF_{(x,p)}(y_2, z_2) \in T_q S$, 因此记 $v = v_1 + dF_{(x,p)}(y_2, z_2), y = y_1 - y_2$, 就得到了

$$w = v + d(F_s)_x(y)$$

从而 F_p 和 S 横截相交, 证毕.

6.6 Exercise

Problem 6.1

M 是 R^N 的 k 维光滑嵌入子流形. S 是 R^N 的嵌入子流形. f 是 M 上的光滑映射. 定义

$$F(x, p) = f(x) + p \quad M \times R^N \rightarrow R^N$$

证明对a.e的 $p \in R^N$, 映射 $f_p(x) = F(x, p)$ 都和 S 横截相交.

Problem 6.2

M 是 R^N 的 k 维光滑嵌入子流形. 证明对任何 $d < N - k$, 必定存在和 M 不相交的 d 维仿射子空间^a
 $d = N - k$ 时是否成立?

^a仿射子空间是线性空间的平移: 一个 d 维线性空间加上一个向量 v

Problem 6.3

M 是 m 维光滑流形, N 是 n 维光滑流形. S 是 N 的嵌入子流形, 且光滑映射 $f : M \rightarrow N$ 与 S 横截相交. 证明对任何 $p \in W = f^{-1}(S)$, 都有

$$T_p W = (df_p)^{-1} T_{f(p)} S$$

第七章 Lie群

7.1 Lie群的定义和性质

Definition 7.1

光滑流形 G 被称为**Lie群**, 如果 G 是群且下列乘法映射 $G \times G \rightarrow G$ 和逆映射 $G \rightarrow G$ 都是光滑的:

$$m(g, h) = gh \quad i(g) = g^{-1}$$

这种定义和下面一种等价:

Proposition 7.2

光滑流形 G 是Lie群当且仅当 G 是群且映射 $G \times G \rightarrow G$:

$$T(g, h) = gh^{-1}$$

是光滑的

Proof: \Rightarrow 注意到

$$T(g, h) = m(g, i(h)) = m \circ (id \times i)$$

根据 i 光滑可得 $(id \times i)$ 在 $G \times G$ 上也光滑, 再根据光滑映射的复合还是光滑的, 就给出了想要的结果

\Leftarrow 任取 $p, q \in G$, 再取它们附近的光滑坐标卡 (U, φ) 和 (V, ψ) , 根据乘积流形的自然光滑结构可知 $(U \times V, \varphi \times \psi)$ 是 $G \times G$ 上的坐标卡, 再取 pq^{-1} 附近的坐标卡 (X, ϕ) , 则有

$$\phi \circ T \circ (\varphi^{-1} \circ \psi^{-1})$$

是 R^{2n} 中某个开集上的光滑函数, 通过缩小 U 和 V 不妨设 $\phi(T(U \times V)) \in \phi(X)$, 这时 $\phi \circ T \circ (\varphi^{-1} \circ \psi^{-1})$ 定义在 $\varphi(U) \times \psi(V)$ 上, 固定 $p = e$ 时, $\phi \circ T \circ (\varphi^{-1} \circ \psi^{-1})$ 是关于 $y \in \psi(V)$ 的光滑函数, 且正是 $i(g) = g^{-1}$ 在坐标卡 (X, ϕ) 和 (V, ψ) 下的表示, 因此 i 是光滑映射

注意到

$$m(g, h) = T(g, i(h)) = T \circ (id \times i)$$

因此乘法运算光滑, 证毕

在抽象代数中我们学习过群作用的概念, 对任何 $g \in G$, 分别定义其左平移作用和右平移作用

$$L_g(h) = gh \quad R_g(h) = hg$$

这两个作用都是光滑的, 可以看做常值映射 $f(x) = g$ 和乘法运算的复合, i.e

$$L_g(h) = m \circ (f \times id) \quad R_g(h) = m \circ (id \times f)$$

注意到 $L_g^{-1} = L_{g^{-1}}, R_g^{-1} = R_{g^{-1}}$, 所以左平移右平移还是微分同胚

7.1.1 Lie群的例子

$GL(n, R)$

回忆 $GL(n, R)$ 可以视为 R^{n^2} 中的开子流形, 且矩阵乘法是 R^{n^2} 中的光滑映射, 因此限制到 $GL(n, R)$ 还是光滑的, 矩阵取逆的光滑性是因为, 对任何非异阵 A , 根据行列式运算的连续性, 都存在 A 的一个邻域 U , 使得对任何 $B \in U$, 均有 $\det(B) \neq 0$, 因此 $\frac{1}{\det(B)}$ 在 U 内是光滑的函数. 另外, 矩阵的伴随运算显然关于各个元素都光滑, 因此伴随运算在 $GL(n, R)$ 上光滑, 从而矩阵逆运算

$$i(B) = \frac{B^*}{\det(B)}$$

在 U 中光滑, 因此取逆运算光滑. 这说明 $GL(n, R)$ 是 Lie 群.

S^1, T^n

S^1 上的元素形如 $e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$, 定义上面的乘法运算为 $e^{i\theta} e^{i\eta} = e^{i(\theta+\eta)}$, 从而 S^1 成为 Lie 群. 又群的直积还是群, 且光滑映射的直积还是光滑的, 我们得到 $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ 也是 Lie 群. 特别地, 它们都是连通 Lie 群.

7.2 Lie子群

G 是一个 Lie 群, 其浸入子流形 H 被称为 Lie 子群, 如果 H 本身还是个 Lie 群. 当然, 要继承 G 的运算和拓扑

lemma 7.3

H 是 Lie 群 G 的开子群, 那么 H 是 G 的嵌入子流形, 且是闭子集.

Proof: 因为 H 是 G 的开子集, 所以嵌入映射 $H \rightarrow G$ 是一个单射浸入(选定一组基底后切映射就是单位矩阵), 且根据 H 是开子集可知嵌入映射还是个 H 到 H 的拓扑同胚. 因此是嵌入子流形.

又因为 G 能写成 H 及 H 的若干个互不相交的左陪集的并, 而 $H \rightarrow aH, a \in G$ 又是一个拓扑同胚, 所以每个左陪集都是开集, 如此 G 便能表示成若干个互不相交的开集的并集(H 和 H 的若干左陪集), 所以 $G-H$ 就是 H 的若干左陪集的并集, 因此 $G-H$ 是开的, 所以 H 是闭子集.

Proposition 7.4

G 是 Lie 群, V 是 G 中单位元 e 的邻域. 则

- V 生成 $^a G$ 的一个开子群
- 如果 V 连通, 则 V 生成 G 的一个连通子群
- 如果 G 连通, 那么 V 生成 G

^a与抽象代数中的定义相同, V 生成的子群是包含 V 的最小的子群

Proof: (a) 设 S 是 V 生成的子群, 则 S 包含 V 中所有元素的逆, 记为 V^{-1} , 又逆运算是 G 的微分同胚, 因此 V^{-1} 也是 e 的开邻域. 记 $U = V \cup V^{-1}$, 这是 e 的开邻域, 且 $U = U^{-1}$, 考虑集合

$$D = \cup_{n=1}^{\infty} U^n$$

我们证明D是个子群, 注意到D中元素形如 $a_1 \cdots a_n, a_i \in U$, 根据 $a_i^{-1} \in U$ 可得 $a_n^{-1} \cdots a_1^{-1} \in D$, 这是 $a_1 \cdots a_n$ 的逆元, 又 $a_1 \cdots a_n \cdot b_1 \cdots b_m \in U^{n+m}$, 因此D是子群, 且包含V, 所以 $S \subseteq D$.

另一方面, 根据S是包含V的子群可得 $U \subseteq S$, 因此 $U^n \subseteq S$, 因此 $D \subseteq S$, 因此 $D = S$, 然后我们说明D是开集. 首先U是开的, 假设 U, U^2, \dots, U^{k-1} 是开的, 那么根据

$$U^k = \cup_{a \in U} aU^{k-1}$$

可得 U^k 是开的, 根据归纳原理可知 U^n 都是开集, 因此D是开集, 这给出了S是开子群

(b)如果V连通, 那么U也是连通的, 且 U^i 有公共点e, 因此 $D = \cup_{i=1}^{\infty} U^i$ 是连通集, 因此V生成连通的子群

(c)如果G连通, S是V生成的子群, 可以把G分解为S和若干S的左陪集的并集, 而根据 $f(x) = gx$ 是G的同胚可知 gS 都是G的开子集, 又每个陪集互不相交, 因此G是若干个互不相交开集的并, 再由G连通可知这些开集里面只有一个非空, 又S非空, 所以 $G = S$

Proposition 7.5

G是Lie群, G_0 是一个包含单位元的连通分支, 那么 G_0 是G的正规子群, 且是唯一一个连通的开子群. G的每个连通分支都微分同胚于 G_0

Proof: 首先要说明 G_0 的确是个子群. 注意到 G_0 生成一个开子群, 设为H. 根据 G_0 连通可知H也是连通的, 因此H只能等于 G_0 , 这说明 G_0 是子群. 注意到同胚不改变连通性, 所以 gG_0, G_0g 还是两个连通分支, 但它们都包含g, 所以二者相等, 这说明 $gG_0g^{-1} = G_0$, 对任何 $g \in G$ 成立, 于是是正规子群

设V是一个连通分支, 任取 $h \in V$, 则 $h^{-1}V$ 是含e的连通分支, 因此 $h^{-1}V = G_0$, 而左平移映射是微分同胚. 从而V微分同胚于 G_0 .

7.3 Lie群同态

Lie群是群, 群之间保持运算的映射叫做同态, 严格定义是: 对任何 $g, h \in G$, 都有

$$\varphi(h)\varphi(g) = \varphi(gh)$$

Lie群同态 是Lie群到Lie群的光滑的群同态. 如果Lie群同态是一个微分同胚, 且其逆映射还是Lie群同态, 那么成为**Lie群同构**

Lie群同态的一个重要性质就是它们作为光滑映射是常秩的

Proposition 7.6

Lie群同态是常秩映射

Proof: 设 $\varphi: G \rightarrow H$ 是Lie群同态, 注意到

$$L_{\varphi(x)}(\varphi(y)) = \varphi(L_x(y))$$

我们固定 $x \in G$, 由此可得

$$d(L_{\varphi(x)})_{\varphi(xy)} \circ d\varphi_y = d\varphi_{xy} \circ d(L_x)_{xy}$$

注意到左平移作用全都是微分同胚, 所以不改变秩, 因此

$$d\varphi_y = d\varphi_{xy} \quad \forall x \in G$$

任取 $z \in G$, 令 $x = zy^{-1}$, 就得出 $d\varphi$ 在 y, z 处的rank相同, 所以是常秩映射.

Corollary 7.7

Lie群同态是Lie群同构当且仅当它是双射

Proof: \Rightarrow 显然

\Leftarrow 用全局秩定理, 则双射的光滑常秩映射是微分同胚.

7.4 Lie群作用

设 G 是群, M 是个集合, 如果有一种运算法则, 记为 \cdot , 满足对任何 $g \in G, x \in M$, 使得 $g \cdot x \in M$, 那么映射 $G \times M \rightarrow M: (g, x) = g \cdot x$ 就是一个映射, 如果这个映射还满足对任何 $g_1, g_2 \in G$, 均有

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$$

那么称这个映射为**左群作用**, 相应的如果 $x \cdot g$ 有意义, 且

$$(x \cdot g_2) \cdot g_1 = x \cdot (g_2 g_1)$$

则称为**右群作用**. 我们把一个群作用记为 $\theta(g, p): G \times M \rightarrow M$, 有时记为 $\theta_g(p)$.

如果 M 是微分流形, G 是Lie群, 群作用是光滑的, 则称为**光滑作用**

和群论中的定义一样, Lie群作用也有轨道, 迷向子群, 可递, 有效这些概念.

Definition 7.8

对任何 $p \in M$, p 的**轨道**定义为

$$\left\{ \theta_g(p) \mid g \in G \right\}$$

也就是 G 中所有元素作用在 p 上得到的结果的全体

p 的**迷向子群**, 或者说**稳定化子**定义为

$$G_p = \left\{ g \in G \mid \theta_g(p) = p \right\}$$

容易验证这是个子群

群作用是**可递的**, 如果对任何 $p, q \in M$, 存在 g 使得 $\theta_g(p) = q$

群作用是**有效的**, 如果对任何 $g \in G, p, q \in M$, $\theta_g(p) = \theta_g(q)$ 时都有 $p = q$

有了群作用, 我们可以定义**轨道映射**:

$$\theta^p(g) = \theta(g, p) \quad G \rightarrow M$$

那么 p 的迷向子群就是 $(\theta^p)^{-1}(p)$, 且轨道映射是 G 到 p 的轨道的满射

Theorem 7.9

θ 是Lie群 G 到光滑流形 M 上的光滑左作用, 对任何 $p \in M$, θ^p 是光滑的常秩映射, 且 p 的迷向子群 G_p 是 G 的逆紧嵌入子流形, 且还是Lie子群. 如果 $G_p = \{e\}$, 那么 θ^p 是单射浸入

Proof: θ^p 是 θ 在固定 p 时的限制, 因此在 G 上光滑, 且

$$\theta_g \circ \theta^p(h) = \theta^p(L_g h)$$

因此

$$d(\theta_g)_{h \cdot p} \circ d(\varphi^p)_h = d(\theta^p)_{gh}$$

然而 θ_g 是 $M \rightarrow M$ 的微分同胚, 所以不改变秩. 因此 φ^p 在 h, gh 处的秩相同, 由 h 的任意性可知 θ^p 常秩. 用常秩水平集定理就知道 G_p 是逆紧嵌入的. 用定义验证可得 G_p 是子群.

若 $g \cdot p = h \cdot p$, 那么 $h^{-1}g \in G_p$, 这给出了 $h^{-1}g = e$, 即 $g = h$, θ^p 是单射. 根据全局秩定理可得 θ^p 是浸入(单射常秩则为浸入).

正交群 $O(n)$

考虑群作用

$$\theta^A(X) = XAX^T$$

那么 G_{I_n} , 即 $(\theta^{I_n})^{-1} = \left\{ A \in GL(n, R) \mid AA^T = I_n \right\}$, 是 $GL(n, R)$ 的嵌入子流形, 记为 $O(n)$, 称为正交群.

第八章 向量场

8.1 流形的向量场

Definition 8.1

M 是光滑流形, M 上的**向量场**是一个映射 $X : M \rightarrow TM$, 且满足

$$\pi \circ X = id_M$$

也就是说 $X(p) \in T_p M$, 我们把 $X(p)$ 记为 X_p . 如果 X 是光滑映射, 则称为**光滑向量场**

我们主要对光滑的向量场感兴趣. 正如 R^n 上的函数那样, X 的支集为 $\{p \in M \mid X_p \neq 0\}$ 的闭包. 如果支集是紧的, 则称 X 具有紧支集

根据 TM 在局部 $\pi^{-1}(U)$ 上能具有基底 $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ 的性质, 我们可以 X 在这组基下面展开, 得到它的系数矩阵. 具体的说, 对任何 $p \in M$, 都能找出一个坐标卡 (U, φ) , 因此 X_p 能写成

$$X_p = \sum_{i=1}^n X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

其中 X^i 称为 X 在坐标卡 (U, φ) 下的**分量函数**. 从而可以给出 X 的光滑性的等价定义:

Proposition 8.2

X 是 M 上的向量场, (U, φ) 是 M 的坐标卡, 则 X 在 U 上光滑当且仅当 X 在这个坐标卡上的分量函数都是 U 上的光滑函数

Proof: \Rightarrow 回忆 TM 的坐标卡 $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$, 其中

$$\tilde{\varphi} \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = (\varphi(p), v_1, \dots, v_n) \in \varphi(U) \times R^n$$

由此根据光滑性的定义可得

$$\tilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \tilde{\varphi} \left(\sum_{i=1}^n X^i(\varphi^{-1}(x)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi^{-1}(x)} \right) = (x, X^1 \circ \varphi^{-1}(x), \dots, X^n \circ \varphi^{-1}(x))$$

是光滑的, 这说明 $X^i \circ \varphi^{-1}(x)$ 是 $\varphi(U)$ 上的光滑函数, 从而根据流形上光滑的定义可得 X^i 是 U 上的光滑函数.

\Leftarrow 由条件可知 $X^i \circ \varphi^{-1}(x)$ 是 $\varphi(U)$ 上的光滑函数, 再根据

$$\tilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x, X^1 \circ \varphi^{-1}(x), \dots, X^n \circ \varphi^{-1}(x))$$

可知 $\tilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}$ 光滑, 也就是说 X 在坐标卡 $(U, \varphi), (\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ 下的坐标表示是光滑的, 从而根据定义可得 X 在 U 上光滑

Lemma 8.3 向量场的延拓

M 是 n 维光滑流形, A 是 M 的闭子集, X 是沿着 A 的光滑向量场. 这句话的意思是说, 对任何 $p \in A$, 存在 p 附近的坐标卡 (U, φ) 和 U 上的光滑向量场 \tilde{X}^U 使得 $\tilde{X}^U|_{A \cap U} = X$

任给一个包含 A 的开集 V , 证明存在 M 上的光滑向量场 F 满足 $F|_A = X, \text{supp} F \subseteq V$

Proof: A 的补是开的, 任何 $p \in A$ 都有一个满足上面题意的坐标邻域 U_p , 它们(和 V 的交)和 A^c 共同构成 M 的开覆盖. 把坐标邻域上的局部光滑向量场用单位分解粘起来. 细节作为习题

作为推论, 一个 $v \in T_p M$ 都能延拓为 M 上的光滑向量场.

M 上光滑向量场的全体记为 $\mathcal{X}(M)$. 显然这是一个线性空间. 除了加法和数乘以外, 我们还能定义向量场 X 和光滑函数 f 的乘法:

$$(fX)(p) = f(p)X_p \in T_p M$$

Proposition 8.4

$f \in C^\infty(M)$, X 是 M 上的光滑向量场, 那么 fX 也是光滑向量场

Proof: 只需注意到 fX 在某个坐标卡 U 内的分量函数为 $f(p)X^i(p)$, 从而根据 f 和 X^i 光滑可知 fX^i 光滑

8.2 标架

Theorem 8.5 怎么得到局部标架

M 是 n 维光滑流形. 那么

- (X_1, \dots, X_k) 是在开子集 U 中处处线性无关的 k -元组. 那么对任何 $p \in U$, 存在 p 的邻域 V 和 V 上的光滑向量场 X_{k+1}, \dots, X_n 使得 (X_1, \dots, X_n) 在 $U \cap V$ 中线性无关
- (v_1, \dots, v_k) 是 $T_p M$ 中 k 个线性无关的元素, 那么存在 p 的一个邻域 U , 和 U 上的一个光滑标架 (X_1, \dots, X_n) , 满足 $X_i(p) = v_i, 1 \leq i \leq k$
- (X_1, \dots, X_n) 是沿一个闭子集 A 的光滑标架, 证明存在 A 的邻域 U , 和 U 上的光滑标架 (Y_1, \dots, Y_n) 满足 $Y_i|_A = X_i$

Proof: (a)

对于这个 p , 把 $Y_i(p)$ 扩充成 R^n 的一组基, 设新扩充的元素为 a_{n-k+1}, \dots, a_n , 然后考虑常值向量 $Y_{n-k+j}(p) = a_{n+k+j}, p \in U \cap V$, 则这 n 个向量构成 n 阶方阵, 且在 p 处行列式非0, 因此根据行列式是 p 的光滑函数可知存在 p 的邻域 V_2 使得在 V_2 上有: 这个行列式非0, 则在 $U \cap (V \cap V_2)$ 上, $Y_i(p), 1 \leq i \leq n$ 都是线性无关的向量, 然后考虑以 Y_i 为系数, $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 为基底的向量场 W_i , 那么这些 W_i 在 $U \cap V \cap V_2$ 中处处线性无关, 且 $X_i = W_i, 1 \leq i \leq k$, 从而找出了 p 的邻域 $V \cap V_2$, 满足 $(X_1, \dots, X_k, W_{k+1}, \dots, W_n)$ 是在 $U \cap (V \cap V_2)$ 中处处线性无关的

(b)取 p 附近的一个坐标卡 (U, φ) , 设 v_i 在这个坐标卡下的系数向量为 $a_i, 1 \leq i \leq k$, 则可给 a_i 扩充成 R^n 的基底, $1 \leq i \leq n$. 然后考虑在 U 上的常值向量场 X_i , 其中 X_i 的分量函数组成的向量就是 a_i , 那么 $X_i(p) = v_i$. 由此便构造出 U 上的光滑标架, 且满足 $X_i(p) = v_i$

(c)我们之前证明过能取 A 的邻域 V_i 和 V_i 上的光滑向量场 Y_i 使得 $Y_i|_A = X_i$, 然后对任何 $p \in A, Y_i(p), 1 \leq i \leq n$ 线性无关, 因此其分量函数组成的 n 阶方阵是非异阵, 从而存在 p 的邻域 U_p 使得这个矩阵在 U_p 上还是非异阵, 从

而 Y_i 在 U_p 上依然是线性无关的. 考虑集合

$$B = \cup_{p \in A} (\cap_{i=1}^n U_p \cap V_i)$$

这是 A 的邻域, 因为开集的有限交还是开的, 开集的无限并也是开的. 从而 $Y_i, 1 \leq i \leq n$ 是 B 上的光滑标架且限制在 A 上就是 $X_i, 1 \leq i \leq n$

标架在切丛中的地位就好比基底在线性空间的地位. 正如线性空间中有一类特殊的基底叫做正交基一样, R^n 的切丛也有正交标架的概念.

Proposition 8.6 Schmidt正交化

设 (X_1, \dots, X_n) 是 R^n 的某个开子集 U 上的光滑标架, 那么存在另一组 U 上的光滑标架 W_1, \dots, W_n 使得 W_1, \dots, W_n 在基底 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 下的系数向量, 是 R^n 的标准正交基

Proof: 根据定义, U 中, X_i 的分量函数都是光滑的, 设 X_i 的分量函数组成的 R^n 中的向量为 Y_i , 那么在每一点 $p \in U$ 处, 这些 Y_i 是 k 个线性无关的 n 维向量(注意到线性无关暗含着这些向量处处非0).

令

$$E_i(p) = \frac{Y_i(p) - \sum_{j=1}^{i-1} E_j(p)(Y_i(p) \cdot Y_j(p))}{\|Y_i(p) - \sum_{j=1}^{i-1} E_j(p)(Y_i(p) \cdot Y_j(p))\|}$$

这其实是线性代数中的Schmidt正交化过程, 因此 $\text{span}\{E_1, \dots, E_j\} = \text{span}\{Y_1, \dots, Y_j\}$, 因此根据 Y_i 的线性无关性可知 $Y_i(p) - \sum_{j=1}^{i-1} E_j(p)(Y_i \cdot Y_j)$ 永远不是0向量. 所以 $E_i(p)$ 在 $U \cap V$ 中光滑, 假设 E_1, \dots, E_{i-1} 都是 U 中的光滑向量值函数, 那么 $Y_i(p) - \sum_{j=1}^{i-1} E_j(p)(Y_i(p) \cdot Y_j(p))$ 光滑且非0, 因此 E_i 也光滑, 从而根据归纳原理可知 E_1, \dots, E_k 都是 U 中的光滑(向量值)函数, 且处处标准正交

Definition 8.7

M 是 n 维光滑流形, 称 M 是可平行化的, 如果 M 上有光滑标架.

可平行化有很多种定义, 比如切丛光滑同构于平凡丛. 毕竟这两种定义是等价的:

8.3 作为导子的向量场

我们知道 $X(p) \in T_p M$, 因此是一个导子. 考虑函数

$$Xf(p) = X_p f \quad M \rightarrow R$$

回忆切向量 X_p 作用在函数 f 上所得到的值, 只和 f 在 p 附近的取值有关. 因此在 p 的邻域 V 上, 有

$$(Xf)(p) = X_p f$$

从而

$$(Xf)|_V = X(f|_V)$$

下面的性质给出了向量场光滑的另一种判据:

Proposition 8.8

X 是 M 上的向量场, 那么下列条件等价:

- (1) X 光滑
- (2) 对任何 $f \in C^\infty(M)$, Xf 光滑
- (3) 对 M 的任一开子集 U 和 U 上的光滑函数 f , 均有 Xf 也是 U 上的光滑函数

Proof: 对任何 $p \in M$, 取附近的坐标卡 (U, φ) , 那么

$$Xf \circ \varphi^{-1}(x) = X_{\varphi^{-1}(x)}f = \sum_{i=1}^n X^i(\varphi^{-1}(x)) \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \Big|_x$$

所以(1) \rightarrow (2)显然成立

(2) \rightarrow (3) 根据 M 的局部紧性, 任取 $p \in U$ 和 p 的邻域 V 满足 $\bar{V} \subseteq U$, 则 \bar{V}^c 和 U 是 M 的开覆盖, 考虑单位分解 $\psi_1 + \psi_2 = 1$, 其中 ψ_2 的支集在 U 中, 那么可知 $\psi_2|_V = 1$, 且 $g = \psi_2(x)f(x) \in C^\infty(M)$, 由此

$$(Xg) \Big|_U = X(g) \Big|_U = Xf$$

根据(2)成立得到 Xg 光滑, 所以 Xf 光滑.

(3) \rightarrow (1): 取 $f = \varphi^i$, 则可得

$$Xf \circ \varphi^{-1}(x) = X_{\varphi^{-1}(x)}f = \sum_{i=1}^n X^i(\varphi^{-1}(x)) \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \Big|_x = X^i(\varphi^{-1}(x))$$

光滑, 因此在坐标卡 (U, φ) 中, X 的第 i 个分量函数光滑, 从而 X 在 U 上光滑, 根据 U 的任意性, X 在 M 上光滑.

8.4 光滑映射与向量场

F 是 M 到 N 的光滑映射, 我们知道对任何一个 M 上的向量场 X , $dF(X)(p) = dF_p(X_p)$ 都是 $N \rightarrow TN$ 的映射, 从而 $dF(X)$ 是 N 上的向量场. 对于 M 上的向量场 X 和 N 上的向量场 Y , 称 X, Y 是 **F -相关的**, 如果

$$dF_p(X_p) = Y_{F(p)} \quad \forall p \in M$$

Proposition 8.9 向量场相关的函数判据

M, N 是光滑流形, F 是 $M \rightarrow N$ 的光滑映射, 那么任给两个光滑向量场 $X \in \mathcal{X}(M), Y \in \mathcal{X}(N)$, X, Y 是 F -相关的, 当且仅当对任何一个定义在 N 的某个开子集 U 上的光滑函数 f , 都有

$$X(f \circ F) = (Yf) \circ F$$

Proof: \Rightarrow 设 f 在 U 上光滑, 任给 $p \in U$, 则有

$$X(f \circ F)(p) = dF_p(X_p)(f) = Y_{F(p)}(f) = (Yf)(F(p)) = (Yf) \circ F(p)$$

\Leftarrow 对任何一个 $p \in M$, 和任何一个 $f \in C^\infty M$, 都有

$$dF_p(X_p)(f) = X(f \circ F)(p) = (Yf) \circ F(p) = (Yf)(F(p)) = Y_{F(p)}(f)$$

因此根据 f 的任意性, $dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$

Proposition 8.10

M, N 是光滑流形, F 是 $M \rightarrow N$ 的微分同胚, 那么任给 $X \in \mathcal{X}(M)$, 存在唯一一个 $Y \in \mathcal{X}(N)$, 使得 X, Y 是 F -相关的

Proof: 此时 dF_p 是双射, 因此 $Y_{F(p)}$ 被 $dF_p(X_p)$ 唯一确定, 再根据 F 是满射可知

$$Y_q = dF_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)})$$

因此 Y 是向量场. 又对任何 $f \in C^\infty(N)$, 均有

$$(Yf)(F(p)) = X(f \circ F)$$

右边是光滑的, 因此 $(Yf) \circ F$ 是光滑的, 在右边复合一个 F^{-1} 不改变光滑性, 因此 Yf 光滑, 从而根据 f 的任意性, Y 光滑. 因此 $Y \in \mathcal{X}(N)$

Definition 8.11

在前一条性质的语境下, 称这个唯一确定的光滑向量场 Y 为 X 在 F 下的前推, 记作 F_*X , 满足

$$(F_*X)_q = dF_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)})$$

8.5 Lie 括号

设 $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, 定义一个向量场

$$[X, Y] = XY - YX \quad [X, Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

根据光滑性的判据, $[X, Y] \in \mathcal{X}(M)$

Proposition 8.12 Lie 括号的性质

设 M 是光滑流形, $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, 则

- 双线性性 $[aX + bY, Z] = [aX, Z] + [bY, Z]$, $[Z, aX + bY] = [Z, aX] + [Z, bY]$
- 反对称性 $[X, Y] = -[Y, X]$
- Jacobian 恒等式 $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$
- $f, g \in C^\infty(M)$, $[fX, gY] = fg[X, Y] + (fXg)Y - (gYf)X$

Proof: (a) 只证明第一个, 另外一个同理

$$[aX + bY, Z] = (aX + bY)Z - Z(aX + bY) = aXZ - ZaX + bYZ - ZbY = [aX, Z] + [bY, Z]$$

(b)

$$[X, Y] = XY - YX = -(YX - XY) = -[Y, X]$$

(c)

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] = X[Y, Z] - [Y, Z]X + Y[Z, X] - [Z, X]Y = XYZ - XZY - YZX + ZYX + YZX - YXZ - ZXY + XZY$$

其中 XZY, YZX 都可消去, 因此

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] = XYZ + ZYX - YXZ - ZXY = [X, Y]Z - Z[X, Y] = -[Z, [X, Y]]$$

(d)

$$[fX, gY]_p(h) = (fX)_p(gY)(h) - (gY)_p(fX)h$$

注意到 $gY(h)$ 是光滑函数 $g(x)(Yh)(x)$, 其中 $(Yh)(x) = Y_x h$, 由此根据导子的运算法则可得

$$\begin{aligned} &= f(p)g(p)X_p(Yh) + f(p)(Yh)(p)X_p g - g(p)(Xh)(p)Y_p f - g(p)f(p)Y_p(Xh) \\ &= f(p)g(p)[X, Y]_p h - g(p)(Yf)(p)Xh + f(p)(Xg)(p)Yh \end{aligned}$$

因此

$$= [fX, gY] = fg[X, Y] - (gYf)X + (fXg)Y$$

Proposition 8.13 Lie括号保持函数相关性不变

设 $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M), Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(N)$, F 是 M 到 N 的光滑映射, 若 X_i, Y_i 是 F -相关的, $1 \leq i \leq 2$, 那么 $[X_1, X_2], [Y_1, Y_2]$ 是 F -相关的

Proof:

$$[X_1, X_2](f \circ F) = X_1 X_2(f \circ F) - X_2 X_1(f \circ F) = X_1[(Y_2 f) \circ F] - X_2[(Y_1 f) \circ F] = Y_1(Y_2 f) \circ F - Y_2(Y_1 f) \circ F = ([Y_1, Y_2]f) \circ F$$

根据向量场相关的函数判据, 证毕

8.6 Lie群的Lie代数

G 是Lie群, G 上的光滑向量场 X 称为左不变的, 如果 X 对任何左平移 L_g 都和 X 是 L_g -相关的, i.e

$$d(L_g)_p(X_p) = X_{gp}$$

又 L_g 是一个微分同胚, 所以可以把上式简写为

$$(L_g)_* X = X$$

注意到 dL_g 是线性映射, 因此

$$d(L_g)_p(aX_p + bY_p) = ad(L_g)_p X_p + bd(L_g)_p Y_p$$

这说明如果 X, Y 是左不变的, 那么 $X + Y$ 也是, 从而 $\mathcal{X}(M)$ 中的左不变向量场构成一个线性子空间. 更重要的性质如下:

Proposition 8.14

左不变向量场在Lie括号运算下封闭, i.e 两个左不变向量场的Lie括号还是左不变的

Proof: 对任何一个左平移 L_g , 根据Lie括号保持相关性不变可知 $[X, Y]$ 和 $[(L_g)_* X, (L_g)_* Y]$ 是 L_g -相关的, 又 $(L_g)_* X = X, (L_g)_* Y = Y$, 所以 $[X, Y]$ 是 L_g -相关的.

一个Lie代数是配备了Lie括号运算 $[\cdot, \cdot]$ 的实线性空间 \mathfrak{g} . 其中括号运算 $[\cdot, \cdot]$ 必须是 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ 的, 且满足

- 双线性性 $[aX + bY, Z] = [aX, Z] + [bY, Z], [Z, aX + bY] = [Z, aX] + [Z, bY]$
- 反对称性 $[X, Y] = -[Y, X]$
- Jacobian 恒等式 $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

\mathfrak{g} 的线性子空间 \mathfrak{f} 被称为**Lie子代数**, 如果 \mathfrak{f} 在 \mathfrak{g} 的括号运算下也是一个Lie代数.

从前面的观察可以看出, 一个Lie群 G 上的左不变向量场的全体, 配备向量场的Lie括号运算 $[X, Y] = XY - YX$ 之后, 就是一个Lie代数, 称为**群 G 的Lie代数**, 记为 $Lie(G)$

Proposition 8.15

G 是Lie群, 则取值映射 $\epsilon : Lie(G) \rightarrow T_e G$, 定义为

$$\epsilon(X) = X_e$$

是一个线性空间的同构. 因此 $Lie(G)$ 是有限维线性空间, 维数是 $\dim G$

Proof: 显然 ϵ 是线性的, 假设 $\epsilon(X) = \epsilon(Y)$, 那么根据左不变性质可知

$$X_g = d(L_g)_e X_e = d(L_g)_e Y_e = Y_g$$

因此 ϵ 是单射. 因此根据线性代数知识可得 $\dim Lie(G) \leq \dim G$

对任何 $Y \in X_e G$, 考虑向量场

$$X_g = (dL_g)_e Y$$

那么 $\epsilon(X) = Y$. 下面验证 X 是光滑的: 任取 $x \in G$, 取一条定义在0附近的光滑曲线 $\gamma(t) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow F$, 其中 $\gamma(0) = e, \gamma'(0) = v$, 则

$$\begin{aligned} (Xf)(x) &= X_x f = d(L_x)_e Y f = Y(f \circ L_x) = \gamma'(0)(f \circ L_x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ L_x \circ \gamma)(t) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(x\gamma(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ m(x, \gamma(t))) \end{aligned}$$

其中 m 表示 G 上的乘法, 此时根据 f, m, γ 的光滑性可以看出 Xf 是光滑的, 因此 X 光滑.

$$d(L_h)_g X_g = d(L_h)_g \circ (dL_g)_e Y = d(L_{hg})_e Y = X_{hg}$$

所以 X 是左不变的, 所以 ϵ 的满射, 从而是线性同构

Corollary 8.16

Lie群上的左不变向量场必定光滑

Proof: 前一个Proposition里面已经证明过了. 核心是以下等式:

$$(Xf)(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ m(x, \gamma(t)))$$

Corollary 8.17

每个Lie群都能平行化. i.e 能找出一个全局标架

其实是能找出**左不变**标架, i.e 标架里的每个元素都是左不变向量场

Proof: 令 G 是 n 维Lie群, 取 $T_e G$ 的一组基, 设为 e_1, \dots, e_n , 则根据线性同构可以知道

$$\epsilon^{-1}(e_1), \dots, \epsilon^{-1}(e_n)$$

是 G 上的 n 个光滑向量场,且处处线性无关. 因此对任何 $p \in G$, 这 n 个向量场在 p 处的取值都能生成 $T_p G$ (因为这 n 个向量线性无关且 $T_p G$ 是 n 维线性空间), 因此 $\epsilon^{-1}(e_i), 1 \leq i \leq n$ 就是一个全局标架

8.7 Lie代数同态

Lie代数同态是一个保持Lie括号运算的, Lie代数之间的线性映射, 即

$$A([X, Y]) = [AX, AY]$$

尽管在一般的流形上, 前推映射要求是微分同胚, 但是在Lie群上, 一个左不变向量场必定能和一个光滑映射共同决定另一个左不变向量场:

Proposition 8.18

G, H 是Lie群, $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ 分别是它们的Lie代数, $F: G \rightarrow H$ 是Lie群同态, 那么对任何 $X \in \mathfrak{g}$, 存在唯一的 $Y \in \mathfrak{h}$ 使得 X, Y 是 F -相关的, 记这个向量场为 F_*X , 那么映射 F_*X 是 \mathfrak{g} 到 \mathfrak{h} 的Lie代数同态.

称为 **F 诱导出的Lie代数同态**

Proof: 如果有这样一个 Y , 那么必定满足 $Y_e = dF_e X_e$, 所以 Y_e 被 X 唯一确定, 又根据左不变性可以知道

$$Y_g = d(L_g)_{F(e)}(dF_e X_e)$$

根据抽象代数知识我们知道 $F(e)$ 就是 H 中的单位元, 但我们写作 $F(e)$ 是为了将它和 G 中的单位元 e 区分开, 避免引起混淆

这说明 Y 由 X_e 唯一确定, 因此若存在, 则必然唯一. 下面定义向量场 Y 满足(和上面一样)

$$Y_g = d(L_g)_{F(e)}(dF_e X_e)$$

先证明 Y 和 X 确实是 F -相关的:

$$dF_p X_p = dF_p \circ d(L_p)_e X_e = d(F \circ L_p)_e X_e$$

注意到 $F \circ L_p(x) = F(px) = F(p)F(x) = L_{F(p)} \circ F$, 因此

$$= d(L_{F(p)})_{F(e)} \circ dF_e(X_e) = d(L_{F(p)})_{F(e)} Y_e = Y_{F(p)}$$

因此 X 和 Y 是 F -相关的.

又

$$d(L_h)_g Y_g = d(L_h)_g \circ d(L_g)_{F(e)}(dF_e X_e) = d(L_{hg})_{F(e)}(dF_e X_e) = Y_{hg}$$

所以 Y 是左不变的, 从而光滑, 所以 $Y \in \mathfrak{h}$.

再根据向量场的Lie括号保持相关性可以知道 F_* 是Lie代数同态.

Proposition 8.19

G 是 Lie 群, 那么 id_G 诱导出的 Lie 代数同态是 $Lie(G)$ 上的恒等映射
 $F_1 : G \rightarrow H, F_2 : H \rightarrow K$ 是 Lie 群同态, 那么

$$(F_2 \circ F_1)_* = (F_2)_* \circ (F_1)_*$$

同构的 Lie 群有同构的 Lie 代数

Proof: (a) 显然, 设 $Y = (id_G)_* X$, 那么根据定义有

$$Y_g = d(L_g)_{id(e)}(d(id_G)_e X_e) = d(L_g)_e X_e = X_g$$

(b) 记 $e_1 = F(e_1)$, 是 H 的单位元,

$$\begin{aligned} ((F_2 \circ F_1)_* X)_g &= d(L_g)_{F_2(e_1)}(d(F_2 \circ F_1)_e X_e) = d(L_g)_{F_2(e_1)} \circ d(F_2)_{e_1} \circ d(F_1)_e X_e \\ &= [(F_2)_*(d(F_1)_e X_e)]_g = [(F_2)_*(d(L_{e_1})_{e_1} \circ d(F_1)_e X_e)]_g \\ &= (F_2)_* \circ (F_1)_* X_g \end{aligned}$$

(c) 设 F_1 是微分同胚, 令 $F_2 = F^{-1}$, 用 (b) 可得结论

Proposition 8.20

G 是 Lie 群, H 是 G 的 Lie 子群. $\iota : H \rightarrow G$ 是包含映射. 那么存在 $Lie(G)$ 的子代数 \mathfrak{h} , 使得 \mathfrak{h} 同构于 $Lie(H)$. 其中

$$\mathfrak{h} = \iota_*(Lie(H)) = \left\{ X \in Lie(G) \mid X_e \in T_e H \right\}$$

Proof: 我们知道 Lie 子群的定义要求 H 是 G 的浸入子流形, 所以 ι 光滑, 且显然是 Lie 群同态, 所以 ι_* 是 $Lie(H) \rightarrow \iota_*(Lie(H))$ 的 Lie 代数同态.

记 $\mathfrak{h} = \iota_*(Lie(H))$, 则 \mathfrak{h} 是 $Lie(G)$ 的子代数, 同构于 $Lie(H)$ (因为 $\iota_* : Lie(H) \rightarrow \iota_*(Lie(H))$ 是线性双射)

只需证明右边的等号. 当 $X_e \in T_e H$ 时, 可以给出一个 H 上的光滑左不变向量场 Y :

$$Y_g = d(L_g)_e(X_e) \quad g \in H$$

且 $(\iota_*(Y))_e = X_e$, 所以

$$\left\{ X \in Lie(G) \mid X_e \in T_e H \right\} \subseteq \iota_*(Lie(H))$$

另一方面, $Lie(H)$ 是维数为 $\dim H$ 的线性空间, 而 $\left\{ X \in Lie(G) \mid X_e \in T_e H \right\}$ 也是维数为 $\dim H$ 的线性空间, 而两个维数相同且有包含关系的线性空间相等, 因此

$$\iota_*(Lie(H)) = \left\{ X \in Lie(G) \mid X_e \in T_e H \right\}$$

8.8 Exercise

Problem 8.1

M 是 n 维带边光滑流形, 那么存在 M 上的光滑向量场 X , 使得 X 在 ∂M 上是处处指向内的. 为其取负号可知存在光滑向量场 X 使得 X 在 ∂M 上处处指向外

第九章 积分曲线与流

9.1 积分曲线

M 是 n 维光滑流形, 给定一个向量场 V , 光滑曲线 $\gamma: J \rightarrow M$ 称为 V 的积分曲线, 如果对于任何 $t \in J$, 都有

$$\gamma'(t) = V_{\gamma(t)}$$

9.1.1 例子

赋予 R^2 标准坐标, $V = \frac{\partial}{\partial x_1}$, 设 $\gamma(t) = (u(t), v(t))$, 那么

$$\gamma'(t) = u'(t) \frac{\partial}{\partial x_1} + v'(t) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

这说明 $\gamma(t)$ 是 V 的积分曲线当且仅当

$$u'(t) = 1 \quad v'(t) = 0 \quad u(t) = a + t \quad v(t) = b$$

其中 a, b 都是常数

9.1.2 存在唯一性

一个自然的问题是, 每个向量场都有积分曲线吗? 从局部上说是的. 先来看一下成为积分曲线的条件: 设 $p \in M$, 取 p 附近的坐标卡 (U, φ) , 则 V 在 U 上有展开

$$V_p = \sum_{i=1}^n V^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^n (\varphi_i \circ \gamma)'(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

因此 γ 是积分曲线意味着

$$\begin{pmatrix} (\varphi_1 \circ \gamma)'(t) = V^1(\gamma(t)) = V^1(\varphi^{-1} \circ (\varphi_1 \circ \gamma(t), \dots, \varphi_n \circ \gamma(t))) \\ (\varphi_2 \circ \gamma)'(t) = V^2(\varphi^{-1} \circ (\varphi_1 \circ \gamma(t), \dots, \varphi_n \circ \gamma(t))) \\ \vdots \\ (\varphi_n \circ \gamma)'(t) = V^n(\varphi^{-1} \circ (\varphi_1 \circ \gamma(t), \dots, \varphi_n \circ \gamma(t))) \end{pmatrix}$$

如果记 $V^i \circ \varphi^{-1} = F^i$, $\varphi_i \circ \gamma(t) = y_i(t)$, $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$, 则有

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) = F^1(y(t)) \\ \vdots \\ y_n'(t) = F^n(y(t)) \end{pmatrix}$$

这是一个一阶常微分方程组, 只要给定初值条件且 V 足够光滑, 那么根据解的存在唯一性定理, 在初值条件附近肯定有唯一解 $y(t)$, 又注意到 $\varphi \circ \gamma = y$, 因此 $\gamma(t) = \varphi^{-1} \circ y(t)$

Theorem 9.1

M 是 n 维微分流形, V 是 M 上的光滑向量场, 那么对任何 $p \in M$, 存在 $\epsilon > 0$, 和光滑曲线 $\gamma(t) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, 满足 γ 是 V 的积分曲线且 $\gamma(0) = p$
存在唯一的积分曲线 γ , 满足 γ 不能成为一个更大区间上的积分曲线, 这样的 γ 称为极大积分曲线

Proof: 沿用上文的记号, 此时 $y(0) = \varphi(p)$, 这就是初值条件, 因此用ode的存在唯一性定理. 可得积分曲线的存在性.

为了说明极大积分曲线的存在性, 先证明对于两个在区间 J 上有定义的积分曲线 $\gamma, \tilde{\gamma}$, 假如二者在某点 $t_0 \in J$ 是相等的, 那么 $\gamma = \tilde{\gamma}$ 在 J 上恒成立.

设 $S = \{t \in J | \tilde{\gamma}(t) - \gamma(t) = 0\}$, 根据连续性可得 S 是个闭集, 且包含了 t_0 . 另一方面, 若 $t_1 \in S$, 那么 $\gamma(t), \tilde{\gamma}(t)$ 在 t_1 附近都是 V 的积分曲线, 但是根据ODE方程组解的唯一性, 存在一个 t_1 的邻域 U 使得在 U 上, $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)$, 从而 S 是开的. 所以 S 在 J 中既开又闭. 又 J 连通, 所以 $S=J$, 因此两个曲线在 J 上取值相同

令 D^p 是所有起点为 p , 且为 V 的积分曲线的存在区间(对任何一个积分曲线 γ , 我们记这个区间为 J_γ)的并集. 定义

$$\theta^p(t) = \gamma(t) \quad t \in J_\gamma$$

这是良定义的, 假设 $t \in J_\gamma \cap J_{\tilde{\gamma}}$, 那么根据 $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = p$ 可以知道 $\gamma = \tilde{\gamma}$ 在 $J_\gamma \cap J_{\tilde{\gamma}}$ 上成立, 也就是说所有在 t 处有定义的积分曲线, 在 t 处的值都一样. 所以 $\theta^p(t) = \gamma(t)$ 是良定义的

又 D^p 是有公共点 0 的连通集合的并集, 因此连通, 是 \mathbb{R} 中的连通集, 从而也是一个区间(第一章习题). 假设 θ^p 还不是极大积分曲线, 那么存在一个严格包含 D^p 的区间 J , 和 J 上定义的 γ , 满足 $\gamma(0) = p$, 且是 V 的积分曲线. 那么根据 D^p 的选法, $J \subseteq D^p$, 从而和 $J \supsetneq D^p$ 矛盾, 从而 $\theta^p(t)$ 就是极大积分曲线.

Proposition 9.2

M, N 是光滑流形, F 是 M 到 N 的光滑映射, $X \in \mathcal{X}(M), Y \in \mathcal{X}(N)$, 则 X, Y 是 F -相关的, 当且仅当 F 把 X 的积分曲线映射为 Y 的积分曲线

Proof: \Rightarrow 设 γ 是 X 的积分曲线, 那么对任何 $f \in C^\infty(N)$, 均有

$$\gamma'(t)(f \circ F) = X_{\gamma(t)}(f \circ F)$$

但左边等于 $\left. \frac{d}{ds} \right|_t f \circ F \circ \gamma(s) = (F \circ \gamma)'(t)f$, 右边等于 $dF_{\gamma(t)}(X_{\gamma(t)})f = Y_{F(\gamma(t))}f$, 因此结合 f 的任意性可得

$$(F \circ \gamma)'(t) = Y_{F(\gamma(t))}$$

\Leftarrow :

$$(F \circ \gamma)'(t)f = Y_{F(\gamma(t))}f$$

而 $(F \circ \gamma)'(t)f = \left. \frac{d}{ds} \right|_t f \circ F \circ \gamma(s) = \gamma'(t)(f \circ F)$, 再根据 γ 是 X 的积分曲线可得

$$(F \circ \gamma)'(t)f = X_{\gamma(t)}(f \circ F) = dF_{\gamma(t)}X_{\gamma(t)}f$$

根据 f 的任意性, 这给出了

$$dF_{\gamma(t)}X_{\gamma(t)} = Y_{F(\gamma(t))}$$

对任何 $p \in M$, 都存在 X 的积分曲线满足 $\gamma(0) = p$, 带入上式可得

$$dF_p X_p = Y_{F(p)}$$

证毕

9.2 流

我们已经知道对任何 $p \in M$, 都有一个极大积分曲线, 设为 $\theta^p(t)$, 存在区间为 J_p , 可以考虑一个映射

$$\theta_t(p) = \theta^p(t)$$

注意到

$$\theta_t \circ \theta_s(p) = \theta_{\theta_s(p)}(t)$$

设 $\theta_s(p) = q$, 那么 $\theta_t \circ \theta_s(p)$ 在 $t=0$ 时为 q , 从而是过 q 的积分曲线. 而 $\theta^p(t+s)$ 也是过 q 的积分曲线(视为关于 t 的函数), 因此根据唯一性, 二者相等, 所以

$$\theta_t \circ \theta_s(p) = \theta^p(t+s) = \theta_{t+s}(p)$$

这说明 θ_t 有某种“加法性质”, 重写上式我们可以得到

$$\theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t+s, p) \quad \theta(0, p) = p$$

也就是说 $\theta_0 = id_M$, 因此当 $t, -t \in \cap_{p \in M} J_p$ 时, 有 $(\theta_t)^{-1} = \theta_{-t}$, 从而 θ_t 都是 M 到 M 的微分同胚.

Theorem 9.3

M 是 n 维微分流形, V 是 M 上的光滑向量场, 那么对任何 $p \in M$, 存在 $\epsilon > 0$, p 的一个邻域 U , 和光滑映射 $\Phi(t, q) : (-\epsilon, \epsilon) \times U \rightarrow M$, 满足:

- 对任何固定的 $q \in U$, $\Phi(t, q)$ 都是向量场 V 的积分曲线, 且起点为 q
- 对任何固定的 t, s , 当 $t+s \in (-\epsilon, \epsilon)$ 时均有 $\Phi(t, \Phi(s, q)) = \Phi(t+s, q)$
- 对任何固定的 $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\psi_t(q) = \Phi(t, q)$ 是 V 到 V 的微分同胚

$\{\psi_t\}_{|t|<\epsilon}$ 称为局部单参数变换群, V 称为无穷小生成元

Proof: 在坐标卡 (U, φ) 上考虑常微分方程组

$$\begin{pmatrix} (\varphi_1 \circ \gamma)'(t) = V^1(\gamma(t)) = V^1(\varphi^{-1} \circ (\varphi_1 \circ \gamma(t), \dots, \varphi_n \circ \gamma(t))) \\ (\varphi_2 \circ \gamma)'(t) = V^2(\varphi^{-1} \circ (\varphi_1 \circ \gamma(t), \dots, \varphi_n \circ \gamma(t))) \\ \vdots \\ (\varphi_n \circ \gamma)'(t) = V^n(\varphi^{-1} \circ (\varphi_1 \circ \gamma(t), \dots, \varphi_n \circ \gamma(t))) \end{pmatrix}$$

如果记 $V^i \circ \varphi^{-1} = F^i$, $\varphi_i \circ \gamma(t) = y_i(t)$, $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$, 则有

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) = F^1(y(t)) \\ \vdots \\ y_n'(t) = F^n(y(t)) \end{pmatrix} \quad y(0) = \varphi(q)$$

根据常微分方程组的存在性, 唯一性和光滑性定理, 存在包含 0 的开区间 J_0 , 和 $\varphi(U)$ 的开子集 U_0 , 使得对任何 $x \in$

U_0 , 都有解 y_x 满足 $y_x(0) = x$, 从而 $\varphi^{-1} \circ y_x$ 就是过 $\varphi^{-1}(x)$ 的积分曲线. 且映射

$$\theta(t, x) = y_x(t)$$

是 $J_0 \times U_0$ 上的光滑映射. 从而令

$$\Phi(t, p) = \varphi^{-1} \circ \theta(t, \varphi(p)) \quad p \in \varphi^{-1}(U_0)$$

光滑映射的复合还是光滑的, 从而 $\Phi(t, p)$ 在 $J_0 \times \varphi^{-1}(U_0)$ 上光滑, 因为 J_0 是包含 0 的开区间, 所以存在 ϵ 使得 $(-\epsilon, \epsilon) \subseteq J_0$, 这就给出了定义在 $(-\epsilon, \epsilon) \times \varphi^{-1}(U_0)$ 上的光滑映射

设 $\Phi(s, q) = x$, 则 $\Phi(t, x)$ 是过 x 的 V 的积分曲线. 但 $\Phi(t + s, q)$ 在 $t = 0$ 时为 x , 且也是 V 的积分曲线, 前面证明了在某点处重合的积分曲线一定在它们的公共定义域上相等, 因此

$$\Phi(t + s, q) = \Phi(t, \Phi(s, q))$$

注意到 $\Phi(0, q) = q$ 对任何 $q \in \varphi^{-1}(U_0)$ 成立, 因此

$$\Phi(t, \Phi(-t, q)) = id \quad \psi_t \circ \psi_{-t} = id_{\varphi^{-1}(U_0)}$$

因此是微分同胚

9.3 完备向量场

光滑向量场生成在局部肯定有单参数变换群, 但是这个单参数变换群未必能在 $t \in R$ 上都有定义. 如果一个向量场能够生成在 $t \in R$ 上都有定义的单参数变换群, 那么称为**完备向量场**, 这样的单参数变换群称为**全局单参数变换群**, 满足如下性质

- $\Phi(t, q)$ 是 $R \times M \rightarrow M$ 的光滑映射, 且固定 q 时, $\Phi(t, q)$ 是 V 的经过 q 的积分曲线
- $\Phi(t, \Phi(s, q)) = \Phi(t + s, q)$
- 对任何 $t \in R$, $\Phi(t, p)$ 都是 M 到 M 的微分同胚

Lemma 9.4 一致时间引理

M 是 n 维光滑流形, V 是 M 上的光滑向量场, $\theta(t, p)$ 是 V 的流, 如果存在一个统一的 $\epsilon > 0$, 使得对任何 $p \in M$, $\theta(t, p)$ 在 $(-\epsilon, \epsilon)$ 上都有定义, 那么向量场 V 是完备的

Proof: 如不然, 则存在一个 p 使得 $\theta(t, p)$ 的定义域的右端点有上界 (左端点有下界的情况同理), 令 b 是 $\theta(t, p)$ 的定义域的上确界, 任取 t_0 满足 $b - \epsilon < t_0 < b$, $q = \theta(t_0, p)$, 根据题意, $\theta(t, q)$ 在 $(-\epsilon, \epsilon)$ 上有定义, 所以考虑另一个曲线

$$\gamma(t) = \begin{cases} \theta(t, p) & -\epsilon < t < b \\ \theta(t - t_0, q) & t_0 - \epsilon \leq t < t_0 + \epsilon \end{cases}$$

下面说明这是良定义的曲线: 因为

$$\theta(t - t_0, q) = \theta(t, \theta(-t_0, q)) = \theta(t, (\theta(t_0, q))^{-1}) = \theta(t, p)$$

(这里用到了 $\theta(-t_0, q) = \theta_{-t_0}(q) = (\theta_{t_0})^{-1}(q) = p$)

根据积分曲线的唯一性, 二者在定义域重合的部分相等

因此 γ 是 V 的积分曲线, 且经过点 p , 而 γ 的定义域右端点 $> b$, 从而得出矛盾

对于左端点有下界的情形, 重复这个过程, 把一个曲线粘贴到 $\theta(t, p)$ 的左边(上文是粘贴到右边), 就能证明左边没有下界

Corollary 9.5

M 是光滑流形, X 是 M 上具备紧支集的平滑向量场, 则 X 完备

Proof: 根据局部单参数变换群的存在性, 对任何 $p \in M$, 存在定义在 $(-\epsilon_p, \epsilon_p) \times U_p$ 上的 V 的流 $\theta_p(t, x)$. 用这些 U_p 覆盖 $\text{supp}V$, 得到有限个子覆盖 U_i , 然后考虑映射

$$\theta(t, q) = \begin{cases} \theta_{p_i}(t, q) & q \in U_{p_i} \cap \text{supp}V \\ 0 & q \notin \text{supp}V \end{cases} \quad |t| < \epsilon$$

其中 $\epsilon = \min \{\epsilon_{p_1}, \dots, \epsilon_{p_m}\}$, θ 是良定义的, 因为在一点处重合的积分曲线在其定义域的交集内相等. 当 $q \in M - \text{supp}V$ 时, 注意到 $M - \text{supp}V$ 是开集, 且 V 在 $M - \text{supp}V$ 上为0, 所以起点为 q 的 V 的积分曲线是常数, 因此可以在整个 \mathbb{R} 上定义为常值函数. 从而每个积分曲线都在 $(-\epsilon, \epsilon)$ 上有定义, 从而 X 是完备的.

Corollary 9.6

Lie群上的左不变向量场都是完备的

Proof: 任取 $g \in G$, 左不变向量场 X 和它本身是 L_g -相关的, 设 $\gamma(t) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G$ 是 X 在 e 附近的光滑曲线, 那么 $L_g \circ \gamma$ 就是在 g 附近 X 的光滑曲线. 这就是一个统一的 ϵ , 因此满足一致时间引理的条件

9.4 Lie导数

Definition 9.7 Lie导数

M 是 n 维光滑流形, W, V 是 M 上的向量场, θ 是 V 的流, 那么 W 关于 V 的Lie导数, 是一个向量场, 逐点定义为

$$(\mathcal{L}_V W)_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)} W_{\theta_t(p)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)} W_{\theta_t(p)} - W_p}{t}$$

如果两个向量场都是光滑的, 那么它们的Lie导数就是Lie括号:

Proposition 9.8

设 X, Y 是光滑流形 M 上的光滑向量场, 那么

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

Hint: 爆算

Proof: 任取光滑函数 $f \in C^\infty(M)$, 那么

$$\mathcal{L}_X Y f = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)} Y_{\theta_t(p)} f = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Y_{\theta_t(p)} (f \circ \theta_{-t}) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [Y(f \circ \theta_{-t})] \circ \theta_t(p)$$

$$Y_{\theta_t(p)} f(\theta_{-t}(p)) = y(\theta_t(p)) \frac{\partial(f \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(\theta_t(p))}$$

设 $Y = \sum_{i=1}^n y_i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}$, 先来对一个 $y_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 计算, 然后根据线性性对 i 求和即可

注意到 p 是个定数, 根据 y 光滑可知 $y(\theta_t(p))$ 在 $t=0$ 附近光滑, 同样的 $\frac{\partial(f \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}$ 在 $t=0$ 附近光滑, 因此

$$\mathcal{L}_X Y f = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{d}{dt} y(\theta_t(p)) \right] \frac{\partial(f \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(\theta_t(p))} + \lim_{t \rightarrow 0} y(\theta_t(p)) \frac{d}{dt} \frac{\partial(f \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(\theta_t(p))}$$

因为 $f \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1}$ 是 $R \times \varphi(U)$ 上的光滑函数, 所以

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial y \circ \varphi^{-1}}{\partial x_j} \Big|_{\varphi(p)} \frac{d\varphi_j \circ \theta_t(p)}{dt} \Big|_{t=0} \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)} + y(p) \frac{d}{dt} \frac{\partial(f \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(\theta_t(p))}$$

设 $X_p = \sum_{j=1}^n X_j(p) \frac{\partial}{\partial x^j}$, 则根据 θ 是积分曲线可以得到

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial y \circ \varphi^{-1}}{\partial x_j} X_j(p) \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)} + y(p) \frac{d}{dt} \frac{\partial(f \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(\theta_t(p))}$$

注意到

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(f \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(\theta_t(p))} = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_j} \Big|_{\varphi(p)} \frac{\partial \varphi_j \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(\theta_t(p))} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_j} \Big|_{\varphi(p)} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_j \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(\theta_t(p))}$$

我们把 $\varphi_j \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1}$ 写成 $\varphi_j \circ \theta(-t, \varphi^{-1}) = F(t, x)$, 则

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\partial(\varphi_j \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(\theta_t(p))} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F(t, x)}{\partial x_i} (\varphi \circ \theta_t(p)) \\ &= \frac{\partial F}{\partial t \partial x_i} (0, \varphi \circ \theta_0(p)) + \sum_k \frac{\partial F(0, x)}{\partial x_i \partial x_k} (0, \varphi \circ \theta_0(p)) \frac{d\varphi_k \circ \theta_t(p)}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t \partial x_i} (0, \varphi \circ \theta_0(p)) + \sum_k \frac{\partial F(0, x)}{\partial x_i \partial x_k} (0, \varphi \circ \theta_0(p)) X_k(\varphi(p)) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_i \partial t} (0, \varphi \circ \theta_0(p)) + \sum_k \frac{\partial \varphi_j \circ \theta_0 \circ \varphi}{\partial x_i \partial x_k} (\varphi \circ \theta_0(p)) X_k(\varphi(p)) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_i \partial t} (0, \varphi \circ \theta_0(p)) + \sum_k \frac{\partial x_j}{\partial x_i \partial x_k} (\varphi \circ \theta_0(p)) X_k(\varphi(p)) = \frac{\partial F}{\partial x_i \partial t} (0, \varphi \circ \theta_0(p)) \end{aligned}$$

注意到

$$\frac{\partial F}{\partial t} (0, x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi_j \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1}(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi_j \circ \gamma(-t) = -\gamma'(0)(\varphi_j)$$

其中 $\gamma(t)$ 是过 $\varphi^{-1}(x)$ 的 X 的积分曲线, 因此 $\gamma'(0) = X_{\gamma(0)} = X_{\varphi^{-1}(x)}$, 令 $x = \varphi \circ \theta_0(p) = \varphi(p)$, 这给出了

$$\frac{\partial F}{\partial t} (0, x) = -X_p(\varphi_j) = -\sum_{k=1}^n X_k(p) \frac{\partial \varphi_j \circ \varphi^{-1}}{\partial x_k} \Big|_{\varphi(p)} = -\sum_{k=1}^n X_k(p) \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \Big|_{\varphi(p)} = -X_j(\varphi^{-1}(x))$$

从而

$$\frac{\partial F}{\partial x_i \partial t} (0, \varphi \circ \theta_0(p)) = \frac{\partial F}{\partial x_i \partial t} (0, \varphi(p)) = -\frac{\partial X_j \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)} = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p X_j$$

由此可得

$$\mathcal{L}_X Y f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i \circ \varphi^{-1}}{\partial x_j} X_j(p) \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)} - y_i(p) \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p X_j \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_j} \Big|_{\varphi(p)}$$

对*i*求和得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X Y f &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i \circ \varphi^{-1}}{\partial x_j} X_j(p) \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p X_j \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_j} \Big|_{\varphi(p)} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial y_i}{\partial x^j} - y_j(p) \frac{\partial X_i}{\partial x^j} \Big|_p \right] \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = [X, Y]_p f\end{aligned}$$

Corollary 9.9

$X, Y \in \mathcal{X}(M)$, 刚才证明了Y关于X的Lie导数就是 $[X, Y]$, 由此可知 $\mathcal{L}_X Y$ 的诸多性质:

- 若F是微分同胚, 则 $F_*(\mathcal{L}_X Y) = \mathcal{L}_{F_* X} F_* Y$
- $\mathcal{L}_X Y = -\mathcal{L}_Y X$
- $\mathcal{L}_X [Y, Z] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z]$

Proof:前两条分别是Lie括号保持函数相关性和反对称性. 最后一条两边展开是Jacobian恒等式, 证毕

第十章 向量丛

先介绍几个特殊的向量丛

10.1 余切丛

前面我们定义切丛 $TM = \coprod_{p \in M} T_p M$, 每个 $T_p M$ 都是一个 n 维线性空间, 然后我们定义另一个几何对象, 称为余切丛, 记为

$$T^*M = \coprod_{p \in M} T_p^* M \quad T_p^* M = (T_p M)^*$$

10.1.1 对偶空间和对偶基

考虑一个 n 维的线性空间 V , 设其基底为 e_1, \dots, e_n . 令 V^* 是 V 上所有线性泛函的全体. 那么任取 $f \in V^*$, 设对任何 $v \in V$, v 的展开为 $v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$, 则根据线性性有

$$f(v) = \sum_{i=1}^n v_i f(e_i)$$

这说明, f 的表现由 $f(e_1), \dots, f(e_n)$ 完全确定. 考虑如下 n 个线性泛函

$$\omega_j(v) = v_j$$

那么 $f(v) = \sum_{i=1}^n f(e_i) \omega_i(v)$, 由此可得

$$f = \sum_{i=1}^n f(e_i) \omega_i$$

这说明 V^* 也是个有限维线性空间, 且维数 $\leq n$. 事实上 $\dim V^* = \dim V$, 这只需说明 ω_j 线性无关. 如果

$$u_1 \omega_1 + \dots + u_n \omega_n = 0 \in V^*$$

(右边的 0 表示把任何 $v \in V$ 都映射为 0 的泛函) 两边作用 e_j 可知

$$u_j = 0$$

因此 ω_j 线性无关. 我们找出了 V^* 的一组基 $\omega_1, \dots, \omega_n$. 因为它们满足

$$\omega_j(e_i) = \delta_{ij}$$

因此 ω_i 又称为 e_i 的对偶基

10.1.2 余切向量

我们把 $T_p M$ 放入刚才对偶空间的框架中, 取 p 附近的坐标卡 (U, φ) , 则 $T_p M$ 在这个坐标卡下有基底 $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$, 这样也能取它们的对偶基, 记为 $\omega_i|_p$ 作为 $(T_p M)^*$ 的基底.

对 p 附近的另一个坐标卡 (V, ψ) , 我们知道若 v_p 在 (U, φ) 下有系数向量 v , 那么在 (V, ψ) 下的系数为

$$J(\psi \circ \varphi^{-1})v$$

设 $\left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \right|_p$ 的对偶基为 $\tilde{\omega}_j$, 那么存在 a_{ij} 使得

$$\omega_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{\omega}_j$$

为了确定 a_{ij} , 两边作用 $\left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \right|_p$ 可得

$$a_{ij} = \omega_i \left(\left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \right|_p \right)$$

解方程

$$J(\psi \circ \varphi^{-1})v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \text{ 第}j\text{行} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

得到 v 是 $J(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1}$ 的第 j 列, 因此

$$a_{ij} = \omega_i \left(\left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \right|_p \right) = \sum_{j=1}^n v_j \omega_i \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) = v_i$$

即 $[J(\psi \circ \varphi^{-1})]^{-1}$ 的第 i 行第 j 列, 这说明

$$\tilde{\omega}_i = \sum_{j=1}^n [J(\psi \circ \varphi^{-1})]_{ij} \omega_j$$

回忆切空间的基变换, 我们知道

$$\left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \right|_p = [J(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1}]_{ij} \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p$$

这也说明两组对偶基的朝着相反方向变换的.

10.1.3 余切丛

有了对偶基就能定义局部坐标卡了

Proposition 10.1

M 是 n 维光滑流形, 则可赋予 T^*M 拓扑结构和光滑结构使得 T^*M 是 $2n$ 维光滑流形

Proof: 取可数个覆盖 M 的坐标卡 (U_i, φ_i) , 则在 $\pi^{-1}(U_i)$ 上, 定义

$$\tilde{\varphi}_i \left(\sum_{i=1}^n v_i \omega_i \right)_p = (\varphi_i(p), v_1, \dots, v_n)$$

定义 T^*M 的开集为

$$\left\{ \tilde{\varphi}_i^{-1}(U) \mid U \in R^{2n} \text{ 是开集, } i \geq 1 \right\}$$

余下的步骤和证明TM是2n维光滑流形一样.

Definition 10.2

M是光滑流形, M上的余向量场是一个映射 $X : M \rightarrow T^*M$, 且满足

$$\pi \circ X = id_M$$

也就是说 $X(p) \in T_p^*M$, 我们把 $X(p)$ 记为 X_p . 如果X是光滑映射, 则称为光滑余向量场

和向量场的情形一样, 对 $p \in M$ 和p附近的坐标卡 (U, φ) , 如果 ω 是一个向量场, 那么

$$\omega_p = \sum_{i=1}^n \omega^i(p) \lambda_i \Big|_p$$

其中 λ_i 是 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 的对偶基. $\omega^i(p)$ 称为分量函数.

Proposition 10.3

ω 是M上的余向量场, (U, φ) 是M的坐标卡, 则 ω 在U上光滑当且仅当 ω 在这个坐标卡上的分量函数都是U上的光滑函数

Proof: 证明和向量场的情形是一样的.

向量场中标架的概念也可以搬运到余向量场上. 设M是n维光滑流形, U是M中的开集, U上的余标架是n个在U上处处线性无关的向量场 $(\omega_1, \dots, \omega_n)$, 换言之它们在每一点 $p \in U$ 都是 T_p^*M 的基底. 如果 $U=M$ 那么称为全局余标架

显然, 如果有一组U上的标架 (E_1, \dots, E_n) , 那么可以逐点通过对偶基诱导出余向量场 $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, 其中 $\epsilon_i|_p$ 是 $E_i|_p$ 的对偶基. 它们的连续性是相关联的

Proposition 10.4

设 (E_1, \dots, E_n) 在U上光滑当且仅当 $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ 在U上光滑

Proof: 设

$$E_i(p) = \sum_{j=1}^n e_{ij}(p) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$$

且

$$\epsilon_i(p) = \sum_{j=1}^n b_{ij}(p) \lambda_j \Big|_p$$

下面寻找 e_{ij} 和 b_{ij} 的关系: 根据对偶基的定义, 可知 $\epsilon_i(E_j) = \delta_{ij}$, 这给出了

$$\delta_{ij} = \sum_{t=1}^n b_{it}(p) \sum_{k=1}^n e_{jk}(p) \lambda_t \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \sum_{t=1}^n b_{it}(p) \sum_{k=1}^n e_{jk}(p) \delta_{tk} = \sum_{j=1}^n b_{it}(p) e_{jt}(p)$$

记矩阵 $B(p) = b_{ij}(p)$, $E(p) = e_{ij}(p)$, 则

$$BE^T = I_n$$

又根据 E_i, ϵ_i 分别是标架和余标架可知B和E处处是非异阵, 因此

$$E^T = B^{-1}$$

从而E光滑当且仅当 E^T 光滑当且仅当 B^{-1} 光滑当且仅当B光滑(因为 $\frac{1}{\det B}$ 光滑且矩阵的伴随运算是光滑映射)

10.1.4 函数的微分

设 f 是 n 维光滑流形 M 上的函数, 且在某个开子集 U 上光滑, 那么对任何 $p \in U$, 都能定义 f 的微分:

$$df_p(v) = v(f) \quad v \in T_p M$$

换言之, df 是 U 上的余切向量场. 注意到这个定义很像切空间之间的切映射. 事实上它们本质是一样的

Proposition 10.5

如果 f 是 M 上的光滑函数, 那么 df 是 M 上的光滑余切向量场

Proof: 设 $p \in M$, 取 p 附近的坐标卡 (U, φ) , 设

$$df_p = \sum_{i=1}^n a^i(p) \lambda_i \Big|_p$$

则两边作用 $\frac{\partial}{\partial x^j}$ 就能得到

$$a^j(p) = df_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j} f$$

因为 f 是光滑函数, $\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$ 是 U 中的光滑向量场, 所以 $a^j(p)$ 在 U 中光滑, 因此 df 在任意的 $p \in M$ 处都光滑, 因此 df 光滑, 而且我们发现

$$df_p = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f \right) \times \lambda_i \Big|_p$$

现在设 f 是坐标分量 φ^j , 那么

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f = \frac{\partial \varphi^j \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$$

因此

$$dx_p^j = \lambda_j \Big|_p$$

原来 $T_p M$ 在坐标卡 (U, φ) 下的对偶基就是 dx^i , $1 \leq i \leq n$, i.e 是对坐标函数的微分. 这给出了

$$df = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f \right) dx^i$$

如果 f 是 R^n 中的某个开集 U 到 R 的函数, 那么直接考虑坐标卡 (U, id) , 每点处的切空间的基底就是关于第 i 个变量的偏微分算子的全体: $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$, 坐标函数 $x^i = x_i$, 因此

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Proposition 10.6

M 是 n 维光滑流形, f 是 M 上的光滑函数, 则 $df = 0$ 当且仅当 f 在 M 的每个连通分支上是常数

Proof: 不妨设 M 连通, 否则在每个连通分支上分别讨论

\Rightarrow 固定 $p \in M$, 考虑集合

$$A = \{q \in M \mid f(q) = f(p)\}$$

对任何 $x \in A$, 取 x 附近的坐标卡 (U, φ) , 不妨设 $\varphi(U) = B(0, 1)$ 且 $\varphi(x) = 0$, 令 $\gamma(t) = t\varphi(y) \in B(0, 1)$, 则有

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= f \circ \varphi^{-1}(\gamma(1)) - f \circ \varphi^{-1}(\gamma(0)) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f \circ \varphi^{-1} \circ \gamma(t) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i}(\gamma(t)) \frac{d}{dt} \gamma_i(t) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi^{-1}(\gamma(t))} f \varphi^i(y) dt \end{aligned}$$

但根据 $df = 0$ 在 U 内成立可得, $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi^{-1}(\gamma(t))} f = 0$, 因此

$$f(y) = f(x) \quad \forall y \in U$$

这说明 A 是开集. 又 $f(p)$ 是 \mathbb{R} 中的闭集, 所以 $f^{-1}(f(p))$ 是 M 中的闭集, 这说明 A 既开又闭, 又 M 连通, 所以 $A=M$, 所以 f 是常值, $f(q) = f(p)$ 对任何 $q \in M$ 成立

\Leftarrow : 取坐标卡 (U, φ) , 如果 f 恒为常数那么 $f \circ \varphi^{-1}$ 在 $\varphi(U)$ 上恒为常数, 所以

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f = \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)} = 0 \quad \forall p \in U$$

这说明

$$df = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f \right) dx^i = 0$$

在 U 上成立, 又根据 U 的任意性, $df = 0$ 在 M 上恒成立

10.1.5 向量场的拉回

M, N 是光滑流形, F 是 M 到 N 的光滑映射, 那么 F 的切映射 $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ 是线性映射. 通过对偶空间, 我们可以定义对偶映射

$$dF_p^*(\omega)(v) = \omega(dF_p v) \quad \omega \in T_{F(p)}^* N$$

那么 $dF_p^* : T_{F(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$ 就是一个线性映射. 称为 **F 在 p 点的拉回**

Definition 10.7

设 ω 是 N 上的余向量场, F 是 $M \rightarrow N$ 的光滑映射, 定义

$$(F^* \omega)_p = dF_p^*(\omega_{F(p)})$$

则 $F^* \omega$ 称为 ω 被 **F** 的拉回

Proposition 10.8

u 是 N 上连续实值函数, ω 是 N 上的余向量场, 那么

$$F^*(u\omega) = (u \circ F) F^* \omega$$

其中 $(u\omega)_p = u(p)\omega_p$. 如果 u 光滑, 那么

$$F^* du = d(u \circ F)$$

Proof:

$$(F^* u\omega)_p = dF_p^* u \circ F(p) \omega_{F(p)} = (u \circ F(p)) dF_p^* \omega_{F(p)} = u \circ F F^* \omega$$

如果 u 光滑, 那么把 $\omega = du$ 带入上式, 并令上式的 $u=1$, 可得

$$F^* du = F^* du$$

$$(F^* du)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = du(dF_p \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p)$$

注意到在基底 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 和 $\frac{\partial}{\partial y^j}$ 下, dF_p 是一个矩阵, 设为 a_{ij} , 则

$$a_{ij} = \frac{\partial \psi_i \circ F \circ \varphi^{-1}}{\partial x_j} \quad dF_p \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_{j=1}^m a_{ji} \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)}$$

可以在对偶基 $dy^i \Big|_{F(p)}$ 下展开 du , 设

$$du = \sum_{k=1}^m u_k dy^k \quad u_k = \frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_{F(p)} u$$

则

$$du(dF_p \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p) = \sum_{k=1}^m u_k a_{ki}$$

因此当在 dx^i 下展开 $F^* du$ 时, dx^i 的系数为 $\sum_{k=1}^m u_k a_{ki}$

还可以展开

$$\begin{aligned} d(u \circ F) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial (u \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ F)}{\partial x^i} dx^i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (u \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} dx^i \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^m \frac{\partial u \circ \psi^{-1}}{\partial x_j} (\psi \circ F \circ \varphi^{-1} \varphi(p)) \frac{\partial \psi_j \circ F \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i} \right] dx^i = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^m u_j a_{ji} \right] dx^i \end{aligned}$$

从而 $d(u \circ F)$, $F^*(du)$ 在基底 dx^i 下的展开的系数向量是一样的, 因此二者相等.

Proposition 10.9

M, N 是光滑流形, $F: M \rightarrow N$ 是光滑映射, ω 是 N 上的连续余向量场. 那么 $F^*\omega$ 是连续的. 如果 ω 光滑, 那么 $F^*\omega$ 也光滑

Proof: 取 $F(p)$ 附近的坐标卡 (V, ψ) , 则在这组坐标卡下有对偶基 dy^i , 且

$$(F^*\omega)_p = F^* \left(\sum_{i=1}^n \omega^i(p) dy^i \right) = \sum_{i=1}^n \omega^i(F(p)) F^* dy^i = \sum_{i=1}^n \omega^i(F(p)) d(y^i \circ F)$$

因为 ω^i 连续, 所以 $F^*\omega$ 也连续. 如果 ω 光滑, 那么 ω^i 光滑. 再结合 $d(y^i \circ F)$ 光滑可得 $F^*\omega$ 在 $F^{-1}(V)$ 上光滑, 因而根据 V 的任意性可得 $F^*\omega$ 在 M 上光滑

10.2 向量丛

前面介绍的切丛和余切丛都可以视为向量丛:

Definition 10.10

M 是 n 维光滑流形, 一个 M 上秩为 k 的向量丛是一个拓扑空间 E 和一个连续满射的投影映射 $\pi : E \rightarrow M$, 满足下列条件:

- 对任何 $p \in M$, 纤维 $E_p = \pi^{-1}(p)$ 是 k 维线性空间
- 对任何 $p \in M$, 存在 p 的邻域 U 和一个 $\pi^{-1}(U) \rightarrow U \times R^k$ 的拓扑同胚 ψ_α , 称为 E 的局部平凡化, 满足
 - $\pi_U \circ \psi_\alpha = \pi$, 其中 π_U 是 $U \times R^k \rightarrow U$ 的投影
 - 对任何 $p \in U, \psi_\alpha|_{\pi^{-1}(p)} : \pi^{-1}(p) \rightarrow \{p\} \times R^k$ 是线性同构

E 是总空间, M 是底空间.

如果局部平凡化映射是微分同胚, 那么 E 称为 M 上的光滑向量丛. 如果有一个局部平凡化的定义域是整个 E , i.e E 可以微分同胚于 $M \times R^k$, 则称 E 是光滑平凡丛.

Proposition 10.11 连接函数

设 E 是 M 上秩为 k 的光滑向量丛, 假设有两个局部平凡化 ψ_α, ψ_β , 满足 U_α, U_β 相交, 那么存在一个光滑函数 $\tau : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, R)$, 使得

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(p, v) = (p, \tau(p)v) \quad p \in U_\alpha \cap U_\beta$$

Proof: 我们知道对固定的 p , ψ_α, ψ_β 都是 $E_p \rightarrow \{p\} \times R^k$ 的线性同构, 因此

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(p, v)$$

是关于 v 的线性映射, 假设

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(p, v) = (p, \tau(p)v)$$

那么 $\tau(p)$ 必须是一个 k 阶实方阵, 类似的可以得到 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p, v) = (p, \theta(p)v)$, 从而 $\tau(p)\theta(p) = I_k$, 因此 $\tau(p) \in GL(k, R)$. 又取 v =第 i 个分量为1, 其他分量为0的向量, 可得

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(p, v) = (p, \tau(p)_{1i}, \dots, \tau(p)_{ki})$$

根据 $\psi_\alpha \circ \psi_\beta$ 是 $U_\alpha \cap U_\beta \times R^k \rightarrow U_\alpha \cap U_\beta \times R^k$ 的微分同胚可得, 固定 R^k 中的 v 时, $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(p, v) = (p, \tau(p)_{1i}, \dots, \tau(p)_{ki})$ 是关于 p 的光滑函数, 所以每个分量光滑, 从而 $\tau(p)_{1i}, \dots, \tau(p)_{ki}$ 光滑, 根据 i 的任意性可得 $\tau(p)$ 是光滑矩阵, 因此是光滑映射, 而且在每一点 p 处都是非异阵.

Proposition 10.12

M 是 n 维光滑流形, 则 TM, T^*M 是 M 上rank为 n 的光滑向量丛.

Proof: 回忆 TM 的坐标卡 $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$, 之前说明过 $\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times R^n$ 是微分同胚. 又注意到

$$\tilde{\varphi}(v_p + u_p) = \tilde{\varphi}\left(\sum_{i=1}^n (v_i + u_i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p\right) = (\varphi(p), v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) = (\varphi(p), v) + (\varphi(p), u) = \tilde{\varphi}(v_p) + \tilde{\varphi}(u_p)$$

因此这就是局部平凡化. 且直接验证可得局部平凡化之间的连接函数, 就是对应坐标函数 ψ, φ 的jacobian矩阵. 验证这一点的过程和求 $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ 的过程一样的. 又纤维 $(TM)_p = T_p M$, 显然是 n 维线性空间. 因此 E 是 M 上的光滑向量丛

T^*M 同理, 此时连接函数应该是前面jacobian矩阵的逆矩阵, 因为切空间的基底和其对偶基在转移映射下的变化趋势是相反的, 详见前面余切丛部分的叙述

10.3 Exercise

Problem 10.1

M 是 n 维光滑流形. 如果存在光滑映射 $f : TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$ 使得 $f|_{T_p M}$ 是到 $\{p\} \times \mathbb{R}^n$ 的线性同构, 证明 f 是微分同胚

[Hint: 先说明 f 是双射. 根据全局秩定理, 只需说明 f 是常秩的, 用坐标卡 $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ 和 $(U \times \mathbb{R}^n, \varphi \times id)$ 直接验证]

第十一章 张量积

设 V_1, \dots, V_n, W 都是线性空间, 映射 $F : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ 满足: 对每个 V_i , 当固定 V_i 之外其他 V_j 中的元素时, F 是 $V_i \rightarrow W$ 的线性映射. 这样的 F 称为多线性映射

Definition 11.1

$V_1, \dots, V_n, W_1, \dots, W_k$ 分别是线性空间, F, G 分别是 $V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow R, W_1 \times \dots \times W_k \rightarrow R$ 的多线性映射. 则可以定义 F, G 的张量积:

$$F \otimes G(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_k) = F(v_1, \dots, v_n)G(w_1, \dots, w_k)$$

这是一个 $V_1 \times \dots \times V_n \times W_1 \times \dots \times W_k \rightarrow R$ 的映射. 根据实数乘法的结合律和交换律, 这还是一个多线性映射

张量积的运算也满足结合律, 设有3个多线性函数 F, G, H . 则

$$(F \otimes G) \otimes H(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_m) = F(v_1, \dots, v_n)G(w_1, \dots, w_k)H(u_1, \dots, u_m) = F \otimes (G \otimes H)(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_m)$$

所以多个映射做张量积的时候, 我们可以省略括号, 直接写

$$F_1 \otimes F_2 \otimes \dots \otimes F_n$$

Proposition 11.2

若 $f_1^1, \dots, f_i^{d_i}$ 是 V_i^* 的一组基, 那么

$$\{f_1^{i_1} \otimes \dots \otimes f_k^{i_k} \otimes \dots \otimes f_n^{i_n} | 1 \leq i_j \leq d_j, 1 \leq j \leq n\}$$

是 $V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow R$ 的多线性函数空间的一组基

Proof: 设它们在 V_i 中的对偶基为 $v_i^j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d_i$. 设

$$\sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n} f_1^{i_1} \otimes \dots \otimes f_k^{i_k} \otimes \dots \otimes f_n^{i_n} = 0$$

两边作用 $(v_1^{j_1}, \dots, v_n^{j_n})$ 则给出了

$$a_{j_1 \dots j_n} = 0$$

根据 j_1, \dots, j_n 的任意性就得到 $a_{i_1 \dots i_n} = 0$ 成立, 因此这些函数线性无关. 对 $V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow R$ 的任一多线性函数 F , 我们知道

$$F(v_1, \dots, v_n) = \sum_{i_1} e_1^{i_1} F(v_1^{i_1}, v_2, \dots, v_n) \quad v_1 = \sum_{i_1} e_1^{i_1} v_1^{i_1}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i_1, i_2} e_1^{i_1} e_2^{i_2} F(v_1^{i_1}, v_2^{i_2}, v_3, \dots, v_n) \quad v_2 = \sum_{i_2} e_2^{i_2} v_2^{i_2} \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_n} e_1^{i_1} \cdots e_n^{i_n} F(v_1^{i_1}, \dots, v_n^{i_n})
\end{aligned}$$

因此F被F在 $(v_1^{i_1}, \dots, v_n^{i_n})$ 上的表现完全确定. 又

$$e_1^{i_1} \cdots e_n^{i_n} = f_1^{i_1} \otimes \cdots \otimes f_n^{i_n}(v_1, \dots, v_n)$$

所以

$$F = \sum_{i_1, \dots, i_n} F(v_1^{i_1}, \dots, v_n^{i_n}) f_1^{i_1} \otimes \cdots \otimes f_n^{i_n}(v_1, \dots, v_n)$$

也就是说F是 $f_1^{i_1} \otimes \cdots \otimes f_n^{i_n}(v_1, \dots, v_n)$ 的线性组合, 因此 $f_1^{i_1} \otimes \cdots \otimes f_n^{i_n}(v_1, \dots, v_n)$ 不仅线性无关还能生成整个 $V_1 \times \cdots \times V_n \rightarrow R$ 的多线性函数空间, 从而是一组基

从而, 我们定义

$$V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^*$$

是 $V_1 \times \cdots \times V_n \rightarrow R$ 的多线性映射的全体.

11.1 张量

现在考虑一个特殊的情形: 给定一个有限维线性空间V, k个V的直积 $V \times \cdots \times V$ 到R的多线性映射的全体就是

$$V^* \otimes \cdots \otimes V^*$$

这样的元素称为**协变k-张量**

因为V是有限维空间, 所以 $(V^*)^* = V$, 因此 $V^* \times \cdots \times V^*$ 到R的多线性映射的全体就是

$$V \otimes \cdots \otimes V$$

这样的元素称为**逆变-k张量**

一般地, 对于k个 V^* 和l个V的直积, 我们定义它到R上的多线性映射的全体为

$$T^{k,l}V = V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$$

这样的元素全体称为**(k,l)-型混合张量**

11.1.1 对称张量

V是有限维线性空间, α 是V上的协变k-张量, 称它是**对称的**, 如果对任何一个输入 (v_1, \dots, v_k) , 交换 v_i 的顺序并不改变其值. i.e 对任何一个k置换 σ , 均有

$$\alpha(v_1, \dots, v_k) = \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

设 $\sigma \alpha(v_1, \dots, v_k) = \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$, 那么 α 是对称的, 当且仅当对任何k-置换 σ , 均有

$$\alpha = \sigma \alpha$$

注意到对任何2个k-置换 τ, σ , 有 $\tau(\sigma \alpha) = \tau \sigma \alpha$

一个协变 k -张量未必是对称的, 但是我们可以把 $\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$ 取平均得到一个对称张量, 具体的说:

Proposition 11.3

α 是协变 k -张量. 定义

$$Sym(\alpha) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma \alpha$$

则 $Sym(\alpha)$ 是对称的. 且 α 对称当且仅当 $\alpha = Sym(\alpha)$

Proof: 注意到对任何一个固定的 $\tau \in S_k$, 都有

$$\tau Sym(\alpha) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \tau \sigma \alpha$$

而 τ 是双射, 所以

$$\{\tau \sigma | \sigma \in S_k\} = S_k$$

这给出了

$$\tau Sym(\alpha) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \pi \alpha = Sym(\alpha)$$

$\Rightarrow \alpha$ 对称说明 $Sym(\alpha) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma \alpha = \alpha$

$\Leftarrow \alpha = Sym(\alpha)$, $Sym(\alpha)$ 本身是对称的所以 α 也对称

11.1.2 交错张量

Definition 11.4

设 α 是协变 k -张量, 则 α 称为**交错的**, 如果交换自变量的任何两个分量都会导致符号的变换: i.e

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

以上是用交换两个分量来定义的交错张量. 实际上也可以用置换的语言来定义交错张量. 对一个 $\sigma \in S_n$, 记 $sgn(\sigma)$ 是 σ 的符号(奇置换时为-1, 偶置换为1). 那么可定义 α 是交错张量, 如果对任何 $\sigma \in S_n$, 有

$$\alpha = sgn(\sigma) \cdot \sigma \alpha$$

Proposition 11.5

以上两种定义等价

Proof: 回忆群论的知识, 对于 S_n , sgn 实际上是 S_n 到乘法群 $\{-1, 1\}$ 的同态, 而且每个置换都能分解成对换(只交换两个元素)的乘积.

\Rightarrow 假设 α 在对换之下改变符号(这是第一种定义), 那么对任何 $\sigma \in S_n$, 变成对换的乘积, 设为

$$\sigma = a_1 a_2 \cdots a_m$$

其中 $a_i \in S_n$ 且只交换两个元素, 则有 $sgn(\sigma) = (-1)^m$, $sgn(a_i) = -1$.

$$sgn(\sigma) \sigma \alpha = (-1)^{m a_1 \cdots a_{m-1}} (a_m \alpha) = (-1)^m (-1)^{a_1 \cdots a_{m-1}} \alpha$$

继续消去 a_{m-1} :

$$= (-1)^m (-1)^2 (a_1 \cdots a_{m-2} \alpha)$$

继续这个过程得到

$$= (-1)^{m+m} \alpha = \alpha$$

\Leftarrow 只交换第 i 个和第 j 个元素(其他不变)的对换在 S_n 中, 设为 σ , 则 $\text{sgn}(\sigma) = -1$, 从而

$$\alpha = -^\sigma \alpha$$

这说明

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

11.2 张量场

前面建立的框架可以运用在 M 是 n 维光滑流形的情形上. 定义 M 上的协变 k -张量丛为

$$T^k T^* M = \coprod_{p \in M} T^k T_p^* M$$

M 上的逆变 k -张量丛为

$$T^k T M = \coprod_{p \in M} T^k T_p M$$

(k, l) 型混合张量丛为

$$T^{(k, l)} T M = \coprod_{p \in M} T^{k, l}(T_p M)$$

Proposition 11.6

可以赋予 $T^{k, l} T M$ 合适的拓扑结构和光滑结构, 使得 $T^{(k, l)} T M$ 是 M 上的光滑向量丛. rank为 n^{k+l}

Proof: 对任何 $p \in M$, 都存在 p 附近的坐标卡 (U, φ) 使得在 U 上, $T^{k, l} T_q M$ 中的元素可以表示为

$$X_q = \sum_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l} A_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(q) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_q \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \Big|_q \otimes dx^{j_1} \Big|_q \otimes \cdots \otimes dx^{j_l} \Big|_q \quad q \in U$$

定义映射

$$\tilde{\varphi}(X_q) = (\varphi(q), A_{1 \dots 1}^{1 \dots 1}, A_{1 2 \dots 1}^{1 \dots 1}, \dots, A_{n \dots n}^{n \dots n}) \in \varphi(U) \times R^{n^{(k+l)}}$$

现在取 M 的一组坐标卡覆盖 (U_i, φ_i) , 定义 $T^{k, l} T M$ 中的开集为

$$\left\{ \tilde{\varphi}_i^1(U) \mid U \text{ 是 } R^{n+n^{(k+l)}} \text{ 中的开集} \right\}$$

其他步骤和证明 TM 是向量丛的过程一样.

张量场 X 就是张量丛到 M 的映射, 满足

$$\pi \circ X = id_M$$

其中 π 是张量丛到 M 的投影

对任何 $p \in M$, 都存在 p 附近的坐标卡 (U, φ) 使得在 U 上, X 能表示为

$$X_q = \sum_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l} A_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(q) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_q \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \Big|_q \otimes dx^{j_1} \Big|_q \otimes \dots \otimes dx^{j_l} \Big|_q \quad q \in U$$

则 X_q 在 U 上的坐标表示为

$$\tilde{\varphi} \circ X_q \circ \varphi^{-1}(x) = (x, A_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(\varphi^{-1}(x)))$$

其中 $A_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$ 按照字符串 $i_1 \dots i_k j_1 \dots j_l$ 的递增顺序排序, 因此可以给出张量场 X 光滑性的判据

Proposition 11.7

X 是 M 上的张量场, 则下面的叙述等价

- X 光滑
- 在每个坐标卡下, X 的分量函数光滑

Proof: 根据

$$\tilde{\varphi} \circ X_q \circ \varphi^{-1}(x) = (x, A_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(\varphi^{-1}(x)))$$

可知左右两边的光滑性是等价的, 再根据坐标卡之间转移映射的光滑性, 可以知道 X 光滑等价于对任何一个坐标卡, X 的分量函数都光滑

我们知道一个余切向量场作用在一个向量场上就是 $M \rightarrow R$ 的函数. 一个向量场作用在余切向量场上也是 $M \rightarrow R$ 的函数, 这暗示了张量场光滑性的第二个判据

Proposition 11.8

X 是 M 上的 (k, l) -型张量场, 则下列叙述等价

- X 光滑
- 对任何光滑向量场 A_1, \dots, A_l 和光滑余切向量场 W_1, \dots, W_k , 有

$$X(W_1, \dots, W_k, A_1, \dots, A_l)$$

是 M 上的光滑函数

Proof:

$$X_q = \sum_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l} X_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(q) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_q \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \Big|_q \otimes dx^{j_1} \Big|_q \otimes \dots \otimes dx^{j_l} \Big|_q \quad q \in U$$

设

$$W_t = \sum_{m=1}^n w_{mt}(q) dx^m \quad A_t = \sum_{m=1}^n a_{mt}(q) \frac{\partial}{\partial x^m}$$

代入 X_q 可得

$$X(W_1, \dots, W_k, A_1, \dots, A_l) = \sum_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l} X_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(q) w_{1i_1}(q) \dots w_{ki_k}(q) a_{1j_1}(q) \dots a_{lj_l}(q)$$

\Rightarrow 如果 X 光滑, 那么 $X_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$ 在 U 上光滑, 再根据光滑函数的乘积还光滑可得 $X(W_1, \dots, W_k, A_1, \dots, A_l)$ 在 U 中光滑

\Leftarrow 取 $W_t = dx^{i_t}, A_t = \frac{\partial}{\partial x^{j_t}}$, 代入 X 可得

$$X_q(W_1, \dots, W_k, A_1, \dots, A_l) = X_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(q)$$

左边光滑所以右边光滑, 再根据 $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l$ 的任意性可得 X 的每个分量函数都光滑, 证毕

11.3 协变张量场的拉回

我们可以把拉回映射推广到协变张量场上. 设 M, N 是光滑流形, F 是 $M \rightarrow N$ 的光滑映射, 那么对 $\omega \in T^k T_{F(p)}^* N$, 可以考虑这个协变 k -张量的拉回:

$$dF_p^* \omega(v_1, \dots, v_k) = \omega(dF_p v_1, \dots, dF_p v_k)$$

回忆 M 上的协变 k -张量丛 $T^k T^* M = \coprod_{p \in M} T^k T_p^* M$. 记 α 是一个 $M \rightarrow T^k T^* M$ 的协变张量场. 定义 α 的拉回为

$$(F^* \alpha)_p = dF_p^*(\alpha_{F(p)})$$

其中 $\alpha_{F(p)}$ 就是 α 在 $F(p)$ 处的取值.

Proposition 11.9

M, N, P 都是光滑流形, $F: M \rightarrow N, G: N \rightarrow P$ 都是光滑映射. A, B 是 N 上的(连续)协变张量场, f 是 N 上的实值函数

- $F^*(fB) = (f \circ F)F^*B$
- $F^*(A \otimes B) = F^*A \otimes F^*B$
- $F^*(A + B) = F^*A + F^*B$
- F^*B 是连续的张量场, 若 B 光滑则 F^*B 也光滑
- $(G \circ F)^*B = F^* \circ G^*B$
- $id^*B = B$

Proof: (a) 设 B 是 k 阶协变张量场,

$$\begin{aligned} (F^*fB)_p(v_1, \dots, v_k) &= dF_p^*(f(F(p))B_{F(p)})(v_1, \dots, v_k) \\ &= f(F(p))B(dF_p v_1, \dots, dF_p v_k) = (f \circ F)_p(F^*B)_p \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (F^*(A \otimes B))_p(w_1, \dots, w_l, v_1, \dots, v_k) &= A_{F(p)} \otimes B_{F(p)}(dF w_1, \dots, dF w_l, dF v_1, \dots, dF v_k) \\ &= A_{F(p)}(dF w_1, \dots, dF w_l) B_{F(p)}(dF v_1, \dots, dF v_k) = F^*A(w_1, \dots, w_l) F^*B(v_1, \dots, v_k) = F^*A \otimes F^*B(w_1, \dots, w_l, v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

(c) 由余切空间的线性性立即得出结论

(d) 和余切向量的情形是差不多的,

$$\tilde{\varphi} \circ (F^*B) \circ \varphi^{-1}(x) = \tilde{\varphi} \circ (F^*B)_{\varphi^{-1}(x)}$$

$\tilde{\varphi} \circ (F^*B)_{\varphi^{-1}(x)}$ 是 x 和 $(F^*B)_{\varphi^{-1}(x)}$ 的所有分量函数的直积, 要获得其每个分量只需将其作用在 $(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}})$ 上, 这给出了

$$\tilde{\varphi} \circ (F^*B) \circ \varphi^{-1}(x) = (x, B(dF_{\varphi^{-1}(x)} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, dF_{\varphi^{-1}(x)} \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}))$$

设 (V, ψ) 是 $F(p)$ 附近的坐标卡, 且 B 在这组坐标卡下有坐标表示 $B_{j_1 \dots j_k}$, 那么

$$\begin{aligned} B(dF_{\varphi^{-1}(x)} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, dF_{\varphi^{-1}(x)} \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}) &= \sum_{j_1, \dots, j_k} B_{j_1 \dots j_k}(F(\varphi^{-1}(x))) dy^{j_1}(dF_{\varphi^{-1}(x)} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}) \otimes \dots \otimes dy^{j_k}(dF_{\varphi^{-1}(x)} \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k} B_{j_1 \dots j_k}(F(\varphi^{-1}(x))) \Gamma_{j_1 i_1}(\varphi^{-1}(x)) \dots \Gamma_{j_k i_k}(\varphi^{-1}(x)) \end{aligned}$$

其中 Γ 是 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ 的Jacobian矩阵, 因此是光滑矩阵函数. 这根据 B 的分量函数连续可得 $\tilde{\varphi} \circ (F^*B) \circ \varphi^{-1}$ 连续, 左

右分别复合连续函数 $\tilde{\varphi}^{-1}$ 和 φ 就说明 F^*B_p 的一个邻域内连续. 根据 p 的任意性, F^*B 连续

如果 B 光滑, 那么 B 的分量函数都光滑, 因此 $\tilde{\varphi} \circ (F^*B) \circ \varphi^{-1}$ 光滑, 从而 F^*B 光滑

(e)

$$\begin{aligned} ((G \circ F)^*B)_p(v_1, \dots, v_k) &= B_{G \circ F(p)}(dG_{F(p)} \circ dF_p v_1, \dots, dG_{F(p)} \circ dF_p v_k) \\ &= (G^*B)_{F(p)}(dF_p v_1, \dots, dF_p v_k) = F^* \circ (G^*B)_p(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

(f)显然

11.4 张量场的Lie导数

设 $p \in M$, V 是 M 上的光滑向量场, θ 是 V 在 p 附近的局部流, A 是光滑的协变张量场, 那么可以定义

$$(\mathcal{L}_V A)_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\theta_t^* A)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(\theta_t)_p^* A_{\theta_t(p)} - A_p}{t}$$

Proposition 11.10

f 是 M 上的光滑函数, A, B 是 M 上的光滑张量场, 那么

- $\mathcal{L}_V f = Vf$
- $\mathcal{L}_V(fA) = (\mathcal{L}_V f)A + f\mathcal{L}_V A$
- $\mathcal{L}_V(A \otimes B) = (\mathcal{L}_V A) \otimes B + A \otimes \mathcal{L}_V B$
- X_1, \dots, X_k 是光滑向量场, A 是光滑的 k 阶协变张量场, 那么

$$\mathcal{L}_V(A(X_1, \dots, X_k)) = (\mathcal{L}_V A)(X_1, \dots, X_k) + A(\mathcal{L}_V X_1, \dots, X_k) + \dots + A(X_1, \dots, \mathcal{L}_V X_k)$$

[Hint: 最后一条爆算]

Proof: (a)

$$(\mathcal{L}_V f)_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\theta_t^* f)_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \circ \theta_t(p)$$

设 $\gamma(t) = \theta_t(p)$, 那么根据 θ 是积分曲线可得 $\gamma'(0) = V_p$, 因此

$$= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \circ \gamma(t) = \gamma'(0)f = V_p f$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V(fA) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\theta_t^* fA)_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \theta_t(p))(\theta_t^* A)_p \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f \circ \theta_t(p))(\theta_t^* A)_p - f(p)(\theta_t^* A)_p}{t} + \frac{f(p)(\theta_t^* A)_p - f(p)A_p}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f \circ \theta_t - f(p)}{t} \lim_{t \rightarrow 0} (\theta_t^* A)_p + f(p) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(\theta_t)_p^* A_{\theta_t(p)} - A_p}{t} \\ &= (\mathcal{L}_V f)A + f\mathcal{L}_V A \end{aligned}$$

(c)根据拉回映射和张量积运算的相容性可得:

$$\mathcal{L}_V(A \otimes B) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\theta_t^* A \otimes \theta_t^* B)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\theta_t^* A \otimes \theta_t^* B - A_p \otimes \theta_t^* B}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A_p \otimes \theta_t^* B - A_p \otimes B_p}{t}$$

根据张量积运算的多线性性

$$= \mathcal{L}_V A \otimes B + A \otimes \mathcal{L}_V B$$

(d)

$$\mathcal{L}_V(A(X_1, \dots, X_k)) = V[A(X_1, \dots, X_k)]$$

设在 p 附近,

$$A = \sum_{i_1 \dots i_k} A_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k} \quad X_t(q) = \sum_{j=1}^n a_{tj}(q) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$V = \sum_{m=1}^n v_m(q) \frac{\partial}{\partial x^m}$$

$$(\theta_t^* A)_p(X_1, \dots, X_k) = A_{\theta_t}(d(\theta_t)_p X_1, \dots, d(\theta_t)_p X_k)$$

注意到对每个 t , θ 都是微分同胚且 θ 关于 t 和 p 都光滑, 对足够小的 t 都有 $\theta_t(p) \in U$, 因此考虑可设

$$J\varphi \circ \theta_t(\varphi^{-1}(x)) = c_{ij}(t, \varphi^{-1}(x)) = C$$

则

$$(\theta_t^* A)_p(X_1, \dots, X_k) = \sum_{i_1 \dots i_k} A_{i_1 \dots i_k}(\theta_t) dx^{i_1}(d(\theta_t)_p X_1) \dots dx^{i_k}(d(\theta_t)_p X_k)$$

$$= \sum_{i_1 \dots i_k} A_{i_1 \dots i_k}(\theta_t) \left(\sum_{v=1}^n c_{i_1 v} a_{1v} \right) \dots \left(\sum_{v=1}^n c_{i_k v} a_{kv} \right)$$

$$A(X_1, \dots, X_k) = \sum_{i_1 \dots i_k} A_{i_1 \dots i_k} a_{1i_1} \dots a_{ki_k}$$

$$V[A(X_1, \dots, X_k)]_p = \sum_{m=1}^n \sum_{i_1 \dots i_k} v_m(p) \frac{\partial}{\partial x^m} A_{i_1 \dots i_k} \cdot a_{1i_1} \dots a_{ki_k}$$

$$+ \sum_{i_1 \dots i_k} \sum_{m=1}^n A_{i_1 \dots i_k} v_m(p) \frac{\partial}{\partial x^m} a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \dots a_{ki_k} + \dots + \sum_{i_1 \dots i_k} \sum_{m=1}^n A_{i_1 \dots i_k} a_{1i_1} \dots v_m(p) \frac{\partial}{\partial x^m} a_{ki_k}$$

那么

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\theta_t^* A)_p(X_1, \dots, X_k) &= \sum_{i_1 \dots i_k} \frac{d}{dt} A_{i_1 \dots i_k}(\theta_t) \left(\sum_{v=1}^n c_{i_1 v} a_{1v} \right) \dots \left(\sum_{v=1}^n c_{i_k v} a_{kv} \right) \\ &+ \sum_{i_1 \dots i_k} A_{i_1 \dots i_k}(\theta_t) \left(\sum_{v=1}^n \frac{d}{dt} c_{i_1 v} a_{1v} \right) \dots \left(\sum_{v=1}^n c_{i_k v} a_{kv} \right) + \dots + \sum_{i_1 \dots i_k} A_{i_1 \dots i_k}(\theta_t) \left(\sum_{v=1}^n c_{i_1 v} a_{1v} \right) \dots \left(\sum_{v=1}^n \frac{d}{dt} c_{i_k v} a_{kv} \right) \end{aligned}$$

首先注意到,

$$\frac{d}{dt} A_{i_1 \dots i_k}(\theta_t) = \frac{d}{dt} A_{i_1 \dots i_k}(\theta_t) \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \theta_t = \sum_{m=1}^n \frac{\partial A_{i_1 \dots i_k} \circ \varphi^{-1}}{\partial x^m} \frac{\partial \varphi_m \circ \theta_t}{\partial t} \Big|_{t=0}$$

那么根据 $\frac{\partial}{\partial x^m}$ 的定义和 θ 是 V 的流可得

$$= \sum_{m=1}^n \frac{\partial}{\partial x^m} A_{i_1 \dots i_k} v_m(p)$$

有根据 $t \rightarrow 0$ 时, $\varphi \circ \theta_t(\varphi^{-1}(x)) = x$, 和 θ 的光滑性可以知道 $\lim_{t \rightarrow 0} J\varphi \circ \theta_t(\varphi^{-1}(x)) = I_n$, 因此 $t \rightarrow 0$ 时, $c_{ij} = \delta_{ij}$. 另一方面根据光滑性又可以知道

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} c_{ij}(t, p) = [J \frac{d}{dt} \varphi \circ \theta_t(\varphi^{-1}(x)) = J(v_1(\varphi^{-1}(x)), \dots, v_n(\varphi^{-1}(x)))]_{ij} = \frac{\partial v_i \circ \varphi^{-1}(x)}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p v_i$$

如此便给出了

$$\mathcal{L}_V A(X_1, \dots, X_k) = \sum_{i_1 \dots i_k} \sum_{m=1}^n \frac{\partial}{\partial x^m} A_{i_1 \dots i_k} v_m(p) a_{1i_1} \dots a_{ki_k} + \sum_{i_1 \dots i_k} A_{i_1 \dots i_k}(p) \left(\sum_{m=1}^n \frac{\partial}{\partial x^m} \Big|_p v_{i_1} a_{1m} \right) a_{2i_2} \dots a_{ki_k} + \dots$$

$$+ \sum_{i_1 \dots i_k} A_{i_1 \dots i_k}(p) a_{1i_1} \dots a_{k-1, i_{k-1}} \left(\sum_{m=1}^n \frac{\partial}{\partial x^m} \Big|_p v_{i_k} a_{km} \right)$$

我们发现两个蓝色的部分是相等的. 然后我们看两个橙色部分的差, 这等于

$$\sum_{i_2, \dots, i_k} a_{2i_2} \dots a_{ki_k} A_{i_1 \dots i_k} \sum_{m=1}^n [v_m(p) \frac{\partial}{\partial x^m} a_{1i_1} - \frac{\partial}{\partial x^m} \Big|_p v_{i_1} a_{1m}]$$

这恰好是 $[V, X_1]$ 关于 $\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_p$ 的坐标分量, 又根据 X_j 的展开可知 $dx^{i_j}(X_j) = a_{ji_j}$, 也就是说上式

$$\begin{aligned} &= \sum_{i_1, \dots, i_k} A_{i_1 \dots i_k}(p) dx^{i_1}([V, X_1]) dx^{i_2}(X_2) \dots dx^{i_k}(X_k) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k} A_{i_1 \dots i_k}(p) dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}([V, X_1], X_2, \dots, X_k) = A([V, X_1], X_2, \dots, X_k) \end{aligned}$$

对于其他类似的项做同样的处理, 就能得到

$$V[A(X_1, \dots, X_k)] - \mathcal{L}_V A(X_1, \dots, X_k) = A([V, X_1], X_2, \dots, X_k) + A(X_1, [V, X_2], X_3, \dots, X_k) + \dots + A(X_1, \dots, X_{k-1}, [V, X_k])$$

再根据光滑向量场的Lie导数就是Lie括号可得

$$V[A(X_1, \dots, X_k)] - \mathcal{L}_V A(X_1, \dots, X_k) = A(\mathcal{L}_V X_1, X_2, \dots, X_k) + A(X_1, \mathcal{L}_V X_2, X_3, \dots, X_k) + \dots + A(X_1, \dots, X_{k-1}, \mathcal{L}_V X_k)$$

Corollary 11.11

通过上述推导, 我们获得了 $\mathcal{L}_V A$ 的作用法则:

$$\mathcal{L}_V A(X_1, \dots, X_k) = V(A(X_1, \dots, X_k)) - A([V, X_1], X_2, \dots, X_k) - A(X_1, \dots, [V, X_k])$$

有了这个就不一定要按照定义计算协变张量场的Lie导数了

第十二章 微分形式

12.1 交错张量

回忆一下前面学过的交错张量, 它们是随着调换输入向量的分量时会导致符号发生特定变化的协变张量. 对于一个线性空间 V , 我们把上面的 k -阶交错张量称为 **k 阶外形式**, 记为

$$\Lambda^k(V^*)$$

下面给出一些判定 k 阶协变张量是交错张量的充要条件

Lemma 12.1

α 是 n 维线性空间 V 上的 k 阶协变张量, 下列叙述等价

- α 是交错的
- $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$ 在 (v_1, \dots, v_k) 线性相关时成立
- 当自变量的两个分量相等时, α 在这个变量上的值为0:

$$\alpha(v_1, \dots, w, \dots, w, \dots, v_k) = 0$$

Proof: (3) \Rightarrow (2) 假设 v_r 能被其他分量线性表出, 那么

$$\begin{aligned}\alpha(v_1, \dots, v_r, \dots, v_k) &= \alpha(v_1, \dots, \sum_{j \neq r} a_j v_j, \dots, v_k) \\ &= \sum_{j \neq r} a_j \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_k)\end{aligned}$$

然而 $(v_1, \dots, v_j, \dots, v_k)$ 里面第 j 个分量和第 r 个分量都是 v_j , 所以必定为0, 因此 $\alpha(v_1, \dots, v_r, \dots, v_k) = 0$

(2) \Rightarrow (3): k 个变量里面有两个分量相等, 可以设是第 j 和第 i 个. 那么这组变量肯定是线性相关的, 因为第 j 个分量可以用第 i 个分量线性表出(因为二者相等), 因此 $\alpha(v_1, \dots, w, \dots, w, \dots, v_k) = 0$

这说明了(2)(3)等价.

(1) \Rightarrow (3): 如果是交错的, 且自变量的两个分量相等(设为第 i 和第 j 个), 则

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

但交换这两个分量不改变自变量的值, 因为这两个分量相同, 所以右边等于 $-\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k)$, 因此 $\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_k) = 0$

(3) \Rightarrow (1): 显然有

$$\alpha(v_1, \dots, v_i - v_j, \dots, v_j - v_i, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_i - v_j, \dots, v_i - v_j, \dots, v_k) = 0$$

左边根据多线性性拆开第*i*个分量, 可得

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j - v_i, \dots, v_k) - \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j - v_i, \dots, v_k) = 0$$

再拆第*j*个分量, 并利用(3)

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) - 0 - 0 + \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) = 0$$

这就是交错张量的原始定义, 因此(1)(3)也等价, 证毕

上一章我们讨论了如何用取平均值的办法把一个协变张量变成对称的, 此处也能用类似的思想把一个协变张量变成交错的, 设 α 是协变*k*-张量, 定义

$$Alt(\alpha) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} sgn(\sigma) \alpha^{\sigma}$$

Proposition 12.2

$Alt(\alpha)$ 是交错的

$\alpha = Alt(\alpha)$ 当且仅当 α 是交错的

Proof:

$$\tau Alt(\alpha) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} sgn(\sigma) \tau^{\sigma} \alpha = \frac{1}{k!} \sum_{\pi} \frac{sgn(\pi)}{sgn(\tau)} \pi \alpha$$

又 $sgn(\tau) = \frac{1}{sgn(\tau)}$, 这给出了

$$= sgn(\tau) \frac{1}{k!} \sum_{\pi} sgn(\pi) \pi \alpha = sgn(\tau) Alt(\alpha)$$

如果 α 交错, 那么

$$Alt(\alpha) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} \alpha = \alpha$$

如果 $\alpha = Alt(\alpha)$, 那么根据 $Alt(\alpha)$ 交错可得 α 交错

Proposition 12.3

给出两个协变张量 ω, η , 则

$$Alt(Alt(\omega) \otimes \eta) = Alt(\omega \otimes \eta)$$

Proof:

$$\begin{aligned} Alt(Alt(\omega) \otimes \eta)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) &= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\pi} sgn(\pi) Alt(\omega)(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \eta(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}) \\ &= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\pi} sgn(\pi) \frac{1}{k!} \sum_{\tau} sgn(\tau) (\omega)(v_{\pi\tau(1)}, \dots, v_{\pi\tau(k)}) \eta(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} sgn(\pi\tau) \omega \otimes \eta(v_{\pi\tau(1)}, \dots, v_{\pi\tau(k)}, v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}) \end{aligned}$$

对于每个给定的 $\tau \in S_k$, 都能给出一个 S_{k+l} 上的一一对应

$$\delta(i) = \begin{cases} \pi(i) & i > k \\ \pi\tau(i) & i \leq k \end{cases} \quad \text{sgn}(\delta) = \text{sgn}(\pi\tau)$$

这说明

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\delta \in S_{k+l}} \text{sgn}(\delta)^\delta (\omega \otimes \eta)(v_1, \dots, v_{k+l})$$

内部的求和与 τ 无关, 因此

$$= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\delta \in S_{k+l}} \text{sgn}(\delta)^\delta (\omega \otimes \eta)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \text{Alt}(\omega \otimes \eta)(v_1, \dots, v_{k+l})$$

12.2 初等交错张量

设有一个 k 元组 $I = (i_1, \dots, i_k)$, 称 I 为长为 k 的多重指标, $\sigma \in S_k$, 记 $I_\sigma = (u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)})$, 考虑一个 $\Lambda^k(V^*)$ 上的元素, 其运算法则为

$$\epsilon^I(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \epsilon^{i_1}(v_1) & \cdots & \epsilon^{i_1}(v_k) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \epsilon^{i_k}(v_1) & \cdots & \epsilon^{i_k}(v_k) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1^{i_1} & \cdots & v_k^{i_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ v_1^{i_k} & \cdots & v_k^{i_k} \end{pmatrix}$$

其中 ϵ^i 是 $E_i \in V$ 的对偶基, v_i^j 是元素 v_i 在 E_i 展开下, E_k 的系数

显然 ϵ^I 是一个交错张量, 因为对换某个 v_i, v_j 的顺序就会调换行列式的某两列, 根据行列式的运算规则知道交换两列会变成原行列式的相反数.

这样的 ϵ^I 的全体称为初等交错张量. 现在引入两个长为 k 的多重指标 I, J , 定义

$$\delta_J^I = \det \begin{pmatrix} \delta_{j_1}^{i_1} & \cdots & \delta_{j_k}^{i_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \delta_{j_1}^{i_k} & \cdots & \delta_{j_k}^{i_k} \end{pmatrix}$$

Proposition 12.4

$$\delta_J^I = \begin{cases} \text{sgn}(\sigma) & \text{如果 } I, J \text{ 各自没有重复元素, 且存在某个置换 } \sigma \in S_k \text{ 使得 } I = J_\sigma \\ 0 & \text{I 或 J 中存在重复元素, 或 I 不是 J 的置换} \end{cases}$$

Proof: 先看第一个情形, 我们证明 δ_J^I 有类似于群同态的性质: 设 $\sigma, \tau \in S_k$, $I = J_\sigma, J = T_\tau$, 那么 $I = T_{\tau\sigma}$, $j_m = t_{\tau(m)}, i_m = j_{\sigma(m)}$, 这给出了

$$\delta_T^I = \det \begin{pmatrix} \delta_{t_1}^{i_1} & \cdots & \delta_{t_k}^{i_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \delta_{t_1}^{i_k} & \cdots & \delta_{t_k}^{i_k} \end{pmatrix}$$

又注意到

$$\begin{pmatrix} \delta_{j_1}^{i_1} & \cdots & \delta_{j_k}^{i_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \delta_{j_1}^{i_k} & \cdots & \delta_{j_k}^{i_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{t_1}^{j_1} & \cdots & \delta_{t_k}^{j_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \delta_{t_1}^{j_k} & \cdots & \delta_{t_k}^{j_k} \end{pmatrix} = \{a_{mn}\}$$

那么

$$a_{mn} = \sum_{u=1}^k \delta_{j_u}^{i_m} \delta_{t_n}^{j_u}$$

而 $a_{mn} = 1$ 当且仅当存在某个 u 使得 $i_m = j_u = t_n$, 这说明 $n = \tau(u), u = \sigma(m)$, 从而给出了 $n = \tau\sigma(m)$, 又 $i_m = t_{\tau\sigma(m)}$, 从而 $i_m = t_n$, 所以 $\delta_{t_n}^{i_m} = 1$, 因此

$$\begin{pmatrix} \delta_{j_1}^{i_1} & \cdots & \delta_{j_k}^{i_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \delta_{j_1}^{i_k} & \cdots & \delta_{j_k}^{i_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{t_1}^{j_1} & \cdots & \delta_{t_k}^{j_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \delta_{t_1}^{j_k} & \cdots & \delta_{t_k}^{j_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{t_1}^{i_1} & \cdots & \delta_{t_k}^{i_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \delta_{t_1}^{i_k} & \cdots & \delta_{t_k}^{i_k} \end{pmatrix}$$

根据行列式的乘法法则, 我们得到

$$\delta_J^I \delta_T^J = \delta_T^I$$

又因为每个置换都能分解成若干对换的乘积, 且 sgn 函数是 S_k 上的群同态, 所以我们只需证明对任何一个对换 $(m, n) \in S_k$, 都有

$$\delta_{I(m,n)}^I = -1$$

这是显然的, 因为这个矩阵不为0的元素只有 $(m, n), (n, m)$ 和除去第 m 行和第 n 行的对角线, 通过调换第 m 行和第 n 行就能得到单位阵, 行列式为1. 而这样的调换会让行列式变成相反数, 因此原行列式的值为-1

然后看第二种情形, 如果 I 或 J 中的某一个存在重复元素, 则 δ_J^I 的行列式中某两行或某两列一样, 因此行列式为0. 另一方面, 如果 I 不是 J 的置换, 那么把 I, J 视为集合, 则 $I \neq J$ (如果 I, J 中的元素相同, 那么考虑置换 σ : 把 m 映射到 i_m 在 J 中对应元素的下标, 这说明 J 是 I 的置换), 因此要么存在在 I 中但不在 J 中的元素, 要么存在在 J 中但不在 I 中的元素, 前者导致矩阵某一行全为0, 后者导致某一列全为0, 无论哪种情况都会导致行列式为0.

Proposition 12.5

E_i 是 V 的基底, ϵ^i 是 V^* 中的对偶基, 那么

- 如果 I 有重复的元素, 则 $\epsilon^I = 0$
- 如果 $J = I_\sigma$ 对某个 $\sigma \in S_k$ 成立, 则 $\epsilon^I = \text{sgn}(\sigma) \epsilon^J$
- $\epsilon^I(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) = \delta_J^I$

Proof: (a) 设 I 中的 $i_m = i_n$, 那么 $\epsilon^I(v_1, \dots, v_k)$ 的第 m, n 行相等, 因此行列式为0

(b)

$$\epsilon^J(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} v_1^{i_{\sigma(1)}} & \cdots & v_k^{i_{\sigma(1)}} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ v_1^{i_{\sigma(k)}} & \cdots & v_k^{i_{\sigma(k)}} \end{pmatrix}$$

又注意到

$$\begin{pmatrix} \delta_{\sigma(1)}^1 & \cdots & \delta_{\sigma(k)}^1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \delta_{\sigma(1)}^k & \cdots & \delta_{\sigma(k)}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{i_{\sigma(1)}} & \cdots & v_k^{i_{\sigma(1)}} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ v_1^{i_{\sigma(k)}} & \cdots & v_k^{i_{\sigma(k)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^{i_1} & \cdots & v_k^{i_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ v_1^{i_k} & \cdots & v_k^{i_k} \end{pmatrix}$$

两边取行列式得到

$$\text{sgn}(\sigma^{-1}) \epsilon^J(v_1, \dots, v_k) = \epsilon^I(v_1, \dots, v_k)$$

又 $\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)$, 所以结论乘积

(c) 这是显然的, 因为 $\epsilon^i(E_j) = \delta_j^i$

Proposition 12.6

V 是 n 维线性空间, E_i 是 V 的基, ϵ^i 是 E_i 的对偶基, 则 $\Lambda^k(V^*)$ 的一组基底为

$$\left\{ \epsilon^{(i_1 \cdots i_k)} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_k \right\}$$

我们也把上述指标 $I = (i_1 \cdots i_k)$ 记为**递增指标**

此时 $\dim \Lambda^k(V^*) = C_n^k$

Proof: 任取一个交错张量 $F \in \Lambda^k(V^*)$, 设

$$v_i = \sum_{m=1}^n v_{im} E_m$$

那么

$$F(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k} v_{1i_1} \cdots v_{ki_k} F(E_{i_1} \cdots E_{i_k})$$

又 F 是交错张量, 所以可以把每个 $F(E_{i_1} \cdots E_{i_k})$ 都改成自变量指标的递增顺序, 这只会引起符号的变更, 因此

$$\begin{aligned} F(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \left[\sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \right] v_{1i_1} \cdots v_{ki_k} F(E_{i_1} \cdots E_{i_k}) \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \left[\sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \right] F(E_{i_1} \cdots E_{i_k}) \epsilon^{i_1 \cdots i_k}(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

这说明

$$F = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \left[\sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \right] F(E_{i_1} \cdots E_{i_k}) \epsilon^{i_1 \cdots i_k}$$

因此 $\left\{ \epsilon^{(i_1 \cdots i_k)} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_k \right\}$ 生成 $\Lambda^k(V^*)$

只需证明线性无关, 假设

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \cdots i_k} \epsilon^{i_1 \cdots i_k} = 0$$

注意到对两个不同的长为 k 的递增指标 I, J , I, J 作为集合必定不是相同的(因为有限整数集升序排列是唯一的, 如果 I, J 作为集合相同, 那么把它们升序排列可知作为递增指标也有 $I=J$), 两边作用在 $(E_{j_1}, \dots, E_{j_k})$ 上, 其中 $j_1 < \cdots < j_k$, 可以知道

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \cdots i_k} \delta_{j_1 \cdots j_k}^{i_1 \cdots i_k} = 0$$

以上求和只有 $\delta_{j_1 \cdots j_k}^{j_1 \cdots j_k}$ 不等于0, 因此 $a_{j_1 \cdots j_k} = 0$, 从而根据 j_1, \dots, j_k 的任意性, 对每个递增指标 (i_1, \dots, i_k) 都有 $a_{i_1 \cdots i_k} = 0$, 因此线性无关

Proposition 12.7 交错张量和线性变换的相容性

V 是 n 维线性空间, $\omega \in \Lambda^n(V^*)$, T 是 $V \rightarrow V$ 的线性变换, 那么

$$\omega(Tv_1, \dots, Tv_n) = (\det T) \omega(v_1, \dots, v_n)$$

Proof: 首先我们回忆线性变换的行列式是良定义这件事. 当我们给 V 选好一组基时, 设 T 的表示矩阵为 A , 然后选另一组基, 表示矩阵为 B , 然后我们可以给出两组基的过渡矩阵 P , 此时有

$$A = P^{-1}BP \quad \det A = \det B$$

因此线性变换的行列式和基底的选取无关. 随便选定一组基底 e_1, \dots, e_n , 那么线性变换 T 可以表示成矩阵 A_{ij} , $\det T = \det A$.

首先注意到 $\Lambda^n(V^*)$ 是一维空间, 因此可设 $\omega = c\epsilon^1 \wedge \dots \wedge \epsilon^n$, 其中 ϵ^i 是 e_i 的对偶基.

Step 1: 先证明 $v_i = e_i$ 时结论成立, 注意到 Te_i 在基底 e_i 下的表示是矩阵 A 的第 i 列向量, 记为 A_i

$$\begin{aligned} \omega(Te_1, \dots, Te_n) &= \omega(A_1, \dots, A_n) = c\epsilon^1 \wedge \dots \wedge \epsilon^n(A_1, \dots, A_n) = c \det \begin{pmatrix} \epsilon^1(A_1) & \dots & \epsilon^1(A_n) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \epsilon^n(A_1) & \dots & \epsilon^n(A_n) \end{pmatrix} \\ &= c \det \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = c \det(A_{ij}) = c \det T = \det T c \epsilon^1 \wedge \dots \wedge \epsilon^n(e_1, \dots, e_n) = \det T \omega(e_1, \dots, e_n) \end{aligned}$$

Step 2: 证明当 (v_1, \dots, v_n) 是 (e_1, \dots, e_n) 的置换时结论成立, 假设 $v_i = e_{\sigma(i)}$, $\sigma \in S_n$, 则

$$\omega(Tv_1, \dots, Tv_n) = \text{sgn}(\sigma) \omega(Te_1, \dots, Te_n) = \text{sgn}(\sigma) \det T \omega(e_1, \dots, e_n) = \det T \omega(v_1, \dots, v_n)$$

Step 3: 证明当 $v_i \in \{e_1, \dots, e_n\}$ 时结论成立, 假设 v_i 中有两个相同的元素, 欲证的等式两边都是0, 结论成立. 如果 v_i 各不相同, 那么 v_i 是 e_i 的置换, 此时转化为Step 2.

Step 4: 推广到一半情形: 设 $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$, 则根据多线性性

$$\omega(Tv_1, \dots, Tv_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n} \omega(Te_{i_1}, \dots, Te_{i_n})$$

注意到 $e_{i_j} \in \{e_1, \dots, e_n\}$, 因此用Step 3可以给出

$$\omega(Tv_1, \dots, Tv_n) = \det T \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \det T \omega(v_1, \dots, v_n)$$

12.3 楔积

Definition 12.8

设 $\omega \in \Lambda^k(V^*), \eta \in \Lambda^l(V^*)$, 定义

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta) \in \Lambda^{k+l}(V^*)$$

\wedge 运算称为楔积, 或外积

lemma 12.9

V 是 n 维线性空间, ϵ^i 是 V^* 的一组基, 对任何多重指标 $I = (i_1, \dots, i_k), J = (j_1, \dots, j_l)$, 都有

$$\epsilon^I \wedge \epsilon^J = \epsilon^{IJ}$$

其中 $IJ = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$.

Proof: 设 E_i 是 ϵ^i 的对偶基, 那么只需证

$$\epsilon^I \wedge \epsilon^J(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}) = \epsilon^{IJ}(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}})$$

记 $P = (p_1, \dots, p_{k+l})$. 如果 P 中有 IJ 所没有的元素, 那么两边都是 0. 如果 IJ 中有 P 所有没有的元素, 那么两边也都是 0. 所以只需设 P 和 IJ 作为集合是相同的. 这样的话 P 总能通过一个 S_{k+l} 中的置换变为 IJ . 因此我们先考虑作为多重指标, $P = IJ$ 的情形, 如果 $I \cap J \neq \emptyset$, 那么 $(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}})$ 至少两个元素相等, 但是左右两边都是交错张量, 因此作用在这种自变量上的值都是 0, 因而相等. 从而不妨设 P 中没有重复的指标, 这也暗示了 $I \cap J = \emptyset$

此时右边根据定义, 值为 1. 只需证明左边为 1:

$$\begin{aligned} \epsilon^I \wedge \epsilon^J(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}) &= \epsilon^I \wedge \epsilon^J(E_{i_1}, \dots, E_{i_k}, E_{j_1}, \dots, E_{j_l}) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \text{sgn}(\pi) \pi(\epsilon^I \otimes \epsilon^J)(E_{i_1}, \dots, E_{i_k}, E_{j_1}, \dots, E_{j_l}) \end{aligned}$$

如果 π 把 I 中的某一元素换到了 J 中的元素里面, 那么此时必有 $\epsilon^I(E_{\pi(i_1)}, \dots, E_{\pi(i_k)}) = 0$, 同理如果 π 把 J 中的某一元素换到了 I 中的元素里面, 必有 $\epsilon^J(E_{\pi(j_1)}, \dots, E_{\pi(j_l)}) = 0$

因此上述求和的单项不为 0, 当且仅当 π 保持 $\pi(I) \in I, \pi(J) \in J$, 而这当且仅当存在 $\sigma \in S_k, \tau \in S_l$ 使得

$$\pi = \sigma\tau$$

其中 τ 是 $\{k+1, \dots, k+l\}$ 的置换(可以视为 $\tau(k+j) = k + \tau(j)$)

对一个方向, 可以直接定义 $\sigma(i) = \pi(i), \tau(j-k) = \pi(j) - k$, 那么 $\sigma\tau = \pi$. 另一个方向显然是对的

从而

$$\begin{aligned} \epsilon^I \wedge \epsilon^J(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}) &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\tau, \sigma} \text{sgn}(\sigma\tau) \epsilon^I(E_{i_1}, \dots, E_{i_k}) \times \epsilon^J(E_{j_1}, \dots, E_{j_l}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} \epsilon^I(E_{i_1}, \dots, E_{i_k}) \frac{1}{l!} \sum_{\tau} \epsilon^J(E_{j_1}, \dots, E_{j_l}) = 1 \end{aligned}$$

现在看如果 P 是 IJ 的置换的情形, 此时设 $IJ = P_\sigma$, 那么根据交错张量的性质可得

$$\epsilon^I \wedge \epsilon^J(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}) = \text{sgn}(\sigma) \epsilon^I \wedge \epsilon^J(E_{i_1}, \dots, E_{i_k}, E_{j_1}, \dots, E_{j_l}) = \text{sgn}(\sigma) \epsilon^{IJ}(E_{i_1}, \dots, E_{i_k}, E_{j_1}, \dots, E_{j_l}) = \epsilon^{IJ}(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}})$$

第二个等号是用的 $P = IJ$ 的情形. 证毕

Proposition 12.10

$\omega, \omega', \eta, \eta', \xi$ 都是交错张量, 那么

- 对 $a, b \in R$, 都有

$$(a\omega + b\omega') \wedge \eta = a\omega \wedge \eta + b\omega' \wedge \eta$$

$$\eta \wedge (a\omega + b\omega') = a\eta \wedge \omega + b\eta \wedge \omega'$$

- 结合律: $\omega \wedge (\eta \wedge \xi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \xi$
- 若 $\omega \in \Lambda^k(V^*), \eta \in \Lambda^l(V^*)$, 则

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$$

- ϵ^i 是 V^* 的一组基, $I = (i_1, \dots, i_k)$ 是任意一个多重指标, 那么

$$\epsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \epsilon^{i_k} = \epsilon^I$$

- 对任何余向量 $\omega_1, \dots, \omega_k$, 和向量 v_1, \dots, v_k , 都有

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k(v_1, \dots, v_k) = \det(\omega^j(v_i))$$

•

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n = \frac{(r_1 + \dots + r_n)!}{r_1! \dots r_n!} \text{Alt}(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_n)$$

Proof: (a) 这是根据 \otimes 的双线性性得到的

(b) 根据双线性性, 只需证

$$\epsilon^I \wedge (\epsilon^J \wedge \epsilon^K) = (\epsilon^I \wedge \epsilon^J) \wedge \epsilon^K$$

根据前面的引理, 左右两边都等于 ϵ^{IJK} , 证毕

(c) 根据双线性性, 只需证对长为 k 的多重指标 I 和长为 l 的多重指标 J , 有

$$\epsilon^I \wedge \epsilon^J = (-1)^{kl} \epsilon^J \wedge \epsilon^I$$

左边是 ϵ^{IJ} , 右边是 $(-1)^{kl} \epsilon^{JI}$. 设 σ 是把 $(1, 2, \dots, k, k+1, \dots, k+l)$ 变为 $(k+1, \dots, k+l, 1, 2, \dots, k)$ 的置换, 则 $J I = (I J)_\sigma$, 且 $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{kl}$, 根据 $\epsilon^{IJ} = \text{sgn}(\sigma) \epsilon^{JI}$ 可知结论成立

(d) 这是上一个 Lemma 和结合律的直接推广

(e) 根据多线性性, 只需证对任何 i_1, \dots, i_k , 都有

$$\epsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \epsilon^{i_k}(v_1, \dots, v_k) = \det(v_i^{i_j})$$

根据 (d) 可得左边是 $\epsilon^{i_1 \dots i_k}(v_1, \dots, v_k)$, 根据其定义可知显然成立.

(f) 用数学归纳法, 显然 $n=2$ 时成立, 假设 $n=k-1$ 时成立, 那么

$$\begin{aligned} \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n &= [\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{k-1}] \wedge \alpha_k = \frac{(r_1 + \dots + r_{k-1} + r_k)!}{(r_1 + \dots + r_{k-1})! r_k!} \text{Alt}\left(\frac{(r_1 + \dots + r_{k-1})!}{r_1! \dots r_{k-1}!} \text{Alt}(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_{k-1}) \otimes \alpha_k\right) \\ &= \frac{(r_1 + \dots + r_n)!}{r_1! \dots r_n!} \text{Alt}(\text{Alt}(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_{k-1}) \otimes \alpha_k) \end{aligned}$$

此时只需证 $\text{Alt}(\text{Alt}(\omega) \otimes \eta) = \text{Alt}(\omega \otimes \eta)$, 前面已经证明过, 因此 $n=k$ 时结论成立, 根据归纳原理, 结论对任何正整数成立

12.4 内乘

对任何 $v \in V$, 都能定义一个 $\Lambda^k(V^*) \rightarrow \Lambda^{k-1}(V^*)$ 的映射 i_v :

$$i_v \alpha(v_1, \dots, v_{k-1}) = \alpha(v, v_1, \dots, v_{k-1})$$

容易证明 i_v 具备如下性质

Proposition 12.11

$$i_v \circ i_v = 0$$

若 $\omega \in \Lambda^k(V^*), \eta \in \Lambda^l(V^*)$, 则

$$i_v(\omega \wedge \eta) = (i_v \omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (i_v \eta)$$

Proof: 只证明第二条.

$$i_v(\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{k+l-1}) = \omega \wedge \eta(v, v_1, \dots, v_{k+l-1})$$

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma} \sigma(\omega \otimes \eta)(v, v_1, \dots, v_{k+l-1})$$

把求和分为两组, 一个是 $\sigma^{-1}(1) \geq k+1$ 的置换, 另一个是 $\sigma^{-1}(1) \leq k$ 的置换, 那么

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma^{-1}(1) \leq k} \text{sgn}(\sigma) \sigma(\omega \otimes \eta)(v, v_1, \dots, v_{k+l-1}) + \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma^{-1}(1) \geq k+1} \text{sgn}(\sigma) \sigma(\omega \otimes \eta)(v, v_1, \dots, v_{k+l-1})$$

$$(i_v \omega) \wedge \eta(v_1, \dots, v_{k+l-1}) = \frac{1}{(k-1)!l!} \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) (i_v \omega \otimes \eta)(v_1, \dots, v_{k+l-1})$$

$$= \frac{1}{(k-1)!l!} \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) (\omega \otimes \eta)(v, v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k+l-1)})$$

下面来看蓝色的部分, 记 $u_j = v_{j+1}, v_0 = v$, 继续拆解求和

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{i=1}^k \sum_{\sigma(i)=1} \text{sgn}(\sigma) (\omega \otimes \eta)(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k+l)}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{i=1}^k \sum_{\sigma(i)=1} \text{sgn}(\sigma) (\omega \otimes \eta)(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k+l)})$$

交换 $i-1$ 次, 把 $u_{\sigma(i)} = u_1 = v_0$ 换到第一个:

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{i=1}^k \sum_{\sigma(i)=1} \text{sgn}(\sigma) (-1)^{i-1} (\omega \otimes \eta)(u_{\sigma(i)}, u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k+l)})$$

考虑如下 $\sigma \in \{S_{k+l} | \sigma(i) = 1\}$ 和 $\pi \in S_{k+l-1}$ 的一一对应:

$$\pi(j) = \begin{cases} \sigma(j) - 1 & j < i \\ \sigma(j+1) - 1 & j \geq i \end{cases}$$

则 $\text{sgn}(\sigma) (-1)^{i-1} = \text{sgn}(\pi)$, 于是蓝色部分可以继续化简

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{i=1}^k \sum_{\pi \in S_{k+l-1}} \text{sgn}(\pi) (\omega \otimes \eta)(v, v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k+l-1)})$$

最内层和求和与i无关, 约去一个k就得到

$$= \frac{1}{(k-1)!!} \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi)(\omega \otimes \eta)(v, v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k+l-1)}) = (i_v \omega) \wedge \eta(v_1, \dots, v_{k+l-1})$$

然后

$$\omega \wedge (i_v \eta)(v_1, \dots, v_{k+l-1}) = \frac{1}{k!(l-1)!} \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) \omega \otimes \eta(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}, v, v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l-1)})$$

再看橙色部分, 记 $u_j = v_{j+1}, v_0 = v$, 那么

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{j=1}^l \sum_{\sigma(k+j)=1} \text{sgn}(\sigma)^{\sigma}(\omega \otimes \eta)(u_1, u_2, \dots, u_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{j=1}^l \sum_{\sigma(k+j)=1} \text{sgn}(\sigma)(\omega \otimes \eta)(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(k+l)})$$

把 $u_{k+j} = u_1 = v_0 = v$ 替换 $j-1$ 次换到第 $k+1$ 个, 根据 η 的交错性得到:

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{j=1}^l \sum_{\sigma(k+j)=1} \text{sgn}(\sigma)(-1)^{j-1} \omega \otimes \eta(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)}, v, \dots, u_{\sigma(k+l)})$$

考虑一一对应:

$$\pi(i) = \begin{cases} \sigma(i) - 1 & i < k+j \\ \sigma(i+1) - 1 & i \geq k+j \end{cases} \quad \sigma \in \left\{ S_{k+l} \mid \sigma(k+j) = 1 \right\}$$

那么 $\text{sgn}(\sigma)(-1)^{k+j-1} = \text{sgn}(\pi)$ (因为 v 位于第 $k+1$ 个位置, 所以要多加一个 k 次方), 从而橙色部分

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{j=1}^l \sum_{\pi \in S_{k+l-1}} \text{sgn}(\pi)(-1)^k \omega \otimes \eta(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}, v, \dots, v_{\pi(k+l-1)})$$

最最内层的求和与j无关, 所以可以约去一个1, 得出

$$= \frac{(-1)^k}{k!(l-1)!} \sum_{\pi \in S_{k+l-1}} \text{sgn}(\pi)^{\pi}(\omega \otimes i_v \eta)(v_1, \dots, v_{k+l-1}) = (-1)^k \omega \wedge i_v \eta$$

12.5 流形上的微分形式

现在我们把前面建立的框架运用在光滑流形 M 的协变 k -张量上. 定义

$$\Lambda^k T^*M = \coprod_{p \in M} \Lambda^k T_p^*M$$

这是个光滑向量丛. 它的每个连续的截面都被称为一个微分 k -形式, 我们把所有的光滑 k -形式记为

$$\Omega^k(M)$$

Proposition 12.12

证明可以赋予 $\Lambda^k T^*M$ 拓扑结构和光滑结构, 使得 $\Lambda^k T^*M$ 是 M 上 rank 为 C_n^k 的光滑向量丛

我们注意到微分形式是特殊的协变张量场, 因此可以定义拉回映射.

Lemma 12.13

设 M 是 m 维光滑流形, N 是 n 维光滑流形, $F : M \rightarrow N$ 是光滑映射, 则

- $F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ 是关于 \mathbb{R} 线性的
- $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*\omega \wedge F^*\eta$
- 在任意坐标卡中, 都有

$$F^*\left(\sum_I \omega_I dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}\right) = \sum_I (\omega_I \circ F) d(y^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(y^{i_k} \circ F)$$

Proof: 前两条性质都是 F^* 和 \otimes 相容性的自然继承. 对于第3条, 先用 $F^*(fB) = (f \circ F)F^*B$, 把左边化为

$$\sum_I (\omega_I \circ F) F^*(dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k})$$

回忆 $F^*du = d(u \circ F)$, 我们知道 $F^*(dy^i) = d(y^i \circ F)$. 然后根据

$$dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k} = \frac{k!}{1! \cdots 1!} \text{Alt}(y^{i_1} \otimes \cdots \otimes y^{i_k})$$

以及 F^* 和 \otimes 相容性和多线性性可知

$$F^*(dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}) = d(y^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(y^{i_k} \circ F)$$

12.6 外微分**Proposition 12.14**

对 R^n 中的任一光滑形式 $\omega = \sum_J \omega_J dx^J$, 定义 R^n 的外微分为

$$d(\omega) = \sum_J d\omega_J \wedge dx^J$$

则

- d 是线性映射
- ω, η 分别是光滑的 k, l -形式, 那么

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta)$$

- $d \circ d = 0$
- d 与拉回映射相容: 若 U, V 是 R^n 或 H^n 的开集, $F : U \rightarrow V$ 是光滑映射, 那么

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega) \quad \forall \omega \in \Omega^k(V)$$

Proof: (a)显然

(b)设 $\omega = \sum_J \omega_J dx^J, \eta = \sum_K \eta_K dx^K$, 那么

$$\omega \wedge \eta = \sum_{J,K} \omega_J \eta_K dx^{JK}$$

因此

$$\begin{aligned}
 d(\omega \wedge \eta) &= \sum_{J,K} d(\omega_J \eta_K) \wedge x^{JK} = \sum_{J,K} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_J}{\partial x_i} \eta_K dx^i \wedge dx^{JK} + \sum_{J,K} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \eta_K}{\partial x_i} \omega_J dx^i \wedge dx^{JK} \\
 &= \left(\sum_J \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_J}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^J \right) \wedge \left(\sum_K \eta_K dx^K \right) + \sum_{J,K} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \eta_K}{\partial x_i} \omega_J (-1)^k dx^J \wedge dx^i \wedge dx^K \\
 d\omega \wedge \eta + (-1)^k \left(\sum_J \omega_J dx^J \right) \left(\sum_K \sum_{i=1}^n \frac{\partial \eta_K}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^K \right) &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta)
 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
 dd\omega &= d\left(\sum_J \frac{\partial \omega_J}{\partial x_i} dx^{iJ}\right) \\
 &= \sum_J \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_i \partial x_j} dx^j \wedge dx^{iJ} \\
 &= \sum_J \sum_{i < j} \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_i \partial x_j} dx^j \wedge dx^{iJ} + \sum_J \sum_{i > j} \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_i \partial x_j} dx^j \wedge dx^{iJ} + \sum_J \sum_{i=j} \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_i \partial x_j} dx^j \wedge dx^{iJ}
 \end{aligned}$$

根据 ω_J 光滑可得 $\frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_j \partial x_i}$, 又 $dx^i \wedge dx^{iJ} = dx^{iiJ} = 0$, 因此

$$dd\omega = \sum_J \sum_{i < j} \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_i \partial x_j} dx^j \wedge dx^{iJ} + \sum_J \sum_{i > j} \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_i \partial x_j} dx^j \wedge dx^{iJ}$$

交换第2个求和中的 i, j :

$$\begin{aligned}
 dd\omega &= \sum_J \sum_{i < j} \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_i \partial x_j} dx^j \wedge dx^{iJ} + \sum_J \sum_{j > i} \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_j \partial x_i} dx^i \wedge dx^{jJ} \\
 &= \sum_J \sum_{i < j} \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_i \partial x_j} (dx^j \wedge dx^{iJ} + dx^i \wedge dx^{jJ}) = \sum_J \sum_{i < j} \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_i \partial x_j} \times 0 = 0
 \end{aligned}$$

(d)根据Lemma 12.13,

$$\begin{aligned}
 F^*\left(\sum_J \omega_J dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}\right) &= \sum_J \omega_J \circ F d(x^{j_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(x^{j_k} \circ F) \\
 &= \sum_J \omega_J \circ F dF_{j_1} \wedge \cdots \wedge dF_{j_k}
 \end{aligned}$$

我们注意到

$$\begin{aligned}
 d(d\alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_m) &= (dd\alpha_i) \wedge \cdots \wedge d\alpha_m + (-1)^{r_1} d\alpha_1 \wedge d(d\alpha_2 \cdots \wedge d\alpha_m) \quad \alpha_i \in \Omega^{r_i}(R^n) \\
 &= (-1)^{r_1} d\alpha_1 \wedge d(d\alpha_2 \cdots \wedge d\alpha_m)
 \end{aligned}$$

继续上述步骤

$$= (-1)^{r_1+r_2} d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 \wedge d(d\alpha_3 \cdots \wedge d\alpha_m)$$

继续

$$= (-1)^{r_1+r_2+\cdots+r_{m-1}} d\alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_{m-1} \wedge d(d\alpha_m) = 0$$

所以

$$d(F^*\omega) = \sum_J d(\omega_J \circ F) dF_{j_1} \wedge \cdots \wedge dF_{j_k} + (-1)^0 \omega_J \circ F d(dF_{j_1} \wedge \cdots \wedge dF_{j_k})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_J d(\omega_J \circ F) dF_{j_1} \wedge \cdots \wedge dF_{j_k} = \sum_J \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{\partial \omega_J}{\partial x_j}(F) \frac{\partial F_j}{\partial x_i} dx^i \wedge dF_{j_1} \wedge \cdots \wedge dF_{j_k} \\
&= \sum_J \sum_{j=1}^k \frac{\partial \omega_J}{\partial x_j}(F) dF_j \wedge dF_{j_1} \wedge \cdots \wedge dF_{j_k} = \sum_J \sum_{j=1}^k \frac{\partial \omega_J}{\partial x_j}(F) d(x^j \circ F_j) \wedge d(x^{j_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(x^{j_k} \circ F)
\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
F^*(d\omega) &= F^*\left(\sum_J \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_J}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^J\right) \\
&= \sum_J \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_J}{\partial x_i}(F) d(x^i \circ F) \wedge d(x^{j_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(x^{j_k} \circ F)
\end{aligned}$$

因此 $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$

Theorem 12.15

M 是 n 维光滑流形, 存在唯一的线性算子 $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$, 满足:

- d 在 \mathbb{R} 上线性
- 对 $\omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M)$, 有

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$$

(注意到如果 k, l 有一个为 0, 那楔积就变成数乘)

- $d \circ d = 0$
- 对任何 $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$, df 是 f 的微分, i.e $df(X) = Xf$

在任何光滑坐标卡中, 有

$$d\left(\sum_I \omega_I dx^I\right) = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I$$

Proof: 先证明存在性. 设 $p \in M$, 取 p 附近的坐标卡 (U, φ) , 定义

$$d\omega = \varphi^* d(\varphi^{-1*} \omega)$$

其中右边的 d 是 \mathbb{R}^n 中的外微分运算.

首先需要验证这种定义不依赖于坐标卡的选取. 设 p 附近还有一个坐标卡 (V, ψ) , 那么在 $U \cap V$ 上有

$$\varphi^* d(\varphi^{-1*} \omega) = \psi^* \circ \psi^{-1*} \circ \varphi^* d(\varphi^{-1*} \omega) = \psi^* d(\psi^{-1*} \circ \varphi^* \circ \varphi^{-1*} \omega) = \psi^* d(\psi^{-1*} \omega)$$

又 $(\varphi^{-1*} \omega)$ 光滑且 φ 光滑, 因此 $d\omega$ 光滑. 且根据 d 的性质可得定理中的性质都成立

然后证明唯一性. 先说明 d 由 ω 在 p 附近的表现确定. 假如在 p 的邻域 U 中有 $\omega_1 = \omega_2$, 我们证明 $d\omega_1 = d\omega_2$. 令 $\eta = \omega_1 - \omega_2$, ψ 是在 p 的一个更小的邻域中为 1 的鼓包函数且 $\text{supp} \psi \in U$, 那么 $\psi\eta = 0$ 恒成立, 这给出了

$$0 = d(\psi\eta) = d\psi\eta - \psi d\eta$$

由 ψ 在 p 附近为 1 可得 $d\psi = 0$, 因此 $d\eta = 0, d\omega_1 = d\omega_2$

对任何的 $p \in M$, 取 p 附近的坐标卡 (U, φ) . 对 U 中的 $\omega = \sum_I \omega_I dx^I$, 我们用鼓包函数把它延拓到整个 M 上的光滑函数微分形式 $\tilde{\omega}$, 且 $\text{supp} \tilde{\omega} \subseteq U$,

$$d\omega_p = d\tilde{\omega}_p = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I$$

这说明 $d\omega$ 在 p 处的取值被右边唯一确定, 因此 d 是唯一的

Proposition 12.16

$F : M \rightarrow N$ 是光滑映射, 对任何 k , $F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ 都和外微分运算相容:

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$$

Proof: 我们证明这种拉回逐点的相等. 任取 $p \in M$, 取 $F(p)$ 附近的坐标卡 (U, φ) , 则根据外微分的定义:

$$d\omega = \varphi^* d(\varphi^{-1*}\omega)$$

$$F^*(d\omega) = F^*\varphi^* d(\varphi^{-1*}\omega) = (\varphi \circ F)^* d(\varphi^{-1*}\omega)$$

取 p 附近的坐标卡 (V, ψ) , 则给出了

$$F^*(d\omega) = (\varphi \circ F \circ \psi^{-1} \circ \psi)^* d(\varphi^{-1*}\omega)_p$$

$$= \psi^*(\varphi \circ F \circ \psi^{-1})^* d(\varphi^{-1*}\omega)$$

根据 R^n 中外微分和拉回的相容性, 这给出了

$$= \psi^* d((\varphi^{-1} \circ \varphi \circ F \circ \psi^{-1})\omega) = \psi^* d(\psi^{-1*} F^*\omega) = d(F^*\omega)$$

最后一个等号是外微分的定义.

12.7 微分形式的Lie导数

上一章中我们定义了张量场的Lie导数, 而微分形式是特殊张量场, 所以可以考虑微分形式的Lie导数.

Proposition 12.17

M 是光滑流形, $V \in \mathcal{X}(M)$, ω, η 是 M 上的光滑微分形式, 那么

$$\mathcal{L}_V(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}_V(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_V\eta$$

Proof: 根据 $Alt(\alpha)$ 的定义, Alt 是关于 α 的线性映射, 因此根据 Proposition 11.10 和 Lie 导数的线性性, 有

$$\mathcal{L}_V(Alt(\omega \otimes \eta)) = Alt(\mathcal{L}_V(\omega \otimes \eta)) = Alt(\mathcal{L}_V\omega \otimes \eta) + Alt(\omega \otimes \mathcal{L}_V\eta)$$

另一方面, 设 ω, η 分别是 k, l -形式, 那么 $\mathcal{L}_V\omega, \mathcal{L}_V\eta$ 分别是 k, l -形式, 两边乘以 $\frac{(k+l)!}{k!l!}$, 根据楔积的定义, 结论成立

Theorem 12.18 Cartan 神奇公式

M 是光滑流形, V 是 M 上的光滑向量场, ω 是 M 上的光滑形式, 那么

$$\mathcal{L}_V\omega = i_V(d\omega) + d(i_V\omega)$$

这个公式极为重要, 否则不会为之起一个这么神奇的名字

Proof: 用数学归纳法, 首先证明结论对光滑的 0-形式成立. 注意到光滑 0-形式是光滑函数, 设为 f , 则

$$\mathcal{L}_V f = Vf \quad i_V(df) + d(i_V f)$$

而 $i_V f$ 是 $\Omega^{-1}(M)$ 中的元素, 而这个空间是平凡的空间, 只有0, 所以 $i_V f = 0$, 另一方面 $df \in \Omega^1(M)$, 因此 $i_V(df) \in \Omega^0(M)$, 且根据定义(df 的定义在第10章查看)有

$$i_V(df) = df(V) = Vf$$

因此 $\mathcal{L}_V f = i_V(df) + d(i_V f)$

然后设结论对所有 $0, 1, \dots, k-1$ 形式成立, 令 $\omega \in \Omega^k(M)$, 则在局部可设

$$\omega = \sum_J \omega_J dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} = \sum_J dx^{j_1} \wedge \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}$$

根据Lie导数的线性性, 只需证

$$\mathcal{L}_V(dx^{j_1} \wedge \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) = i_V d(dx^{j_1} \wedge \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) + d(i_V dx^{j_1} \wedge \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k})$$

左边为

$$\mathcal{L}_V(dx^{j_1}) \wedge \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} + dx^{j_1} \wedge \mathcal{L}_V \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}$$

使用归纳假设得到

$$= d(i_V dx^{j_1}) \wedge \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} + dx^{j_1} \wedge i_V d(\omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) + dx^{j_1} \wedge d(i_V \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k})$$

等号右边用Proposition 12.11给出了

$$\begin{aligned} &= -i_V(dx^{j_1} \wedge d(\omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k})) + d(i_V(dx^{j_1}) \wedge \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} - dx^{j_1} \wedge i_V \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) \\ &= -(i_V dx^{j_1}) \wedge d(\omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) + dx^{j_1} \wedge i_V d(\omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) + d(i_V dx^{j_1}) \wedge \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} \\ &\quad + (-1)^0 i_V dx^{j_1} \wedge d(\omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) - d(dx^{j_1} \wedge i_V \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) \\ &= d(i_V dx^{j_1}) \wedge \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} + dx^{j_1} \wedge i_V d(\omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) - d(dx^{j_1} \wedge i_V \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) \\ &= d(i_V dx^{j_1}) \wedge \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} + dx^{j_1} \wedge i_V d(\omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) + dx^{j_1} \wedge d(i_V \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) \end{aligned}$$

Corollary 12.19

外微分和Lie导数可以交换次序

$$\mathcal{L}_V(d\omega) = d(\mathcal{L}_V \omega)$$

Proof:

$$\mathcal{L}_V(d\omega) = i_V(dd\omega) + d(i_V d\omega) = d(i_V d\omega)$$

$$d(\mathcal{L}_V \omega) = d(i_V \omega) + dd(i_V \omega) = d(i_V d\omega)$$

第十三章 流形的定向

13.1 线性空间的定向

Definition 13.1

对于有限维线性空间 V 的两组有序基, $(e_1, \dots, e_n), (v_1, \dots, v_n)$, 如果两组基底的转移矩阵^a的行列式是正的, 则称两个基底是**一致定向**的. 我们强调有序基, 正是因为基底的排列顺序会对转移矩阵的行列式产生符号变换的影响. 容易验证一致定向是基底之间的等价关系.

线性空间 V 的**方向**是 V 上某一组有序基的等价类.

给定一组基 (E_1, \dots, E_n) , 其等价类 $[E_1, \dots, E_n]$ 称为 E_1, \dots, E_n 确定的**方向**. 对另一组基底 (v_1, \dots, v_n) , 如果它在这个等价类里面, 则称为**保持定向**的, 否则称为**反转定向**的.

^a线性代数中也称为过渡矩阵

13.2 流形的定向

流形上的切空间具有线性结构, 所以我们可以把线性空间的定向套用在切空间的定向中. 这样, 每个 $T_p M$ 都存在了一个方向, 不过线性空间的“方向”不止一个, 所以任何一种这样为 $T_p M$ 赋予方向的操作, 都可以说是为 $T_p M$ “确定”了一个方向, 所以这种操作可称为 M 的一个**逐点定向**

Definition 13.2

M 是 n 带边或无边维光滑流形, M 有一个逐点定向. 记 E_i 是 TM 上的局部标架(设定义域为 U). 称 E_i 是**保持定向**的, 如果对任何 $p \in U$, 都有基底 $(E_1|_p, \dots, E_n|_p)$ 在 $T_p M$ 中是保持定向的. 否则称为**反转定向**的

显然逐点定向有无穷多种, 因为每个 $T_p M$ 都有不止一个方向, 我们想要选取其中“好”的逐点定向. 比如:

Definition 13.3

M 上的一个逐点定向是**连续**的, 如果对任何 $p \in M$, 存在 p 的邻域 U 和 U 上的局部标架 E_i , 使得 E_i 是保持定向的

一个连续的逐点定向称为 M 的一个**定向**, 如果 M 上存在定向, 则称 M 是**可定向**的

看起来有点抽象, 如果我们要为 M 构造一个“定向”, 就要考虑连续的逐点定向. 而连续的逐点定向来自于 M 上局部的标架. 所以, 假如对任何 $p \in M$, 都能找到 p 的邻域 U 上的光滑标架 E^p , 那么我们就给 $T_p M, p \in U$ 都赋予一个方向, 就设置为 $[E_1^p, \dots, E_n^p]$. 所有这样的 U 覆盖 M , 这样就给 M 赋予了一个逐点定向. 但其中的问题是, 当两个光滑标架 E, W , 具有重叠的定义域时, 即它们的定义域 U, V 有非空交集的时候, 我们需要保证 E^p, W^p 给出的方向是一致的, i.e. E^p, W^p 之间的转移矩阵具备正的行列式.

另一方面每个坐标卡 (U, φ) 都给出了一个局部标架 $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$, 假设还有个坐标卡 (V, ψ) 满足 $U \cap V \neq \emptyset$, 那么对

任何 $p \in U \cap V$, 就有两个基底

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\right) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n}\Big|_p\right)$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p f = \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)} \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\Big|_p f = \frac{\partial f \circ \psi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{\psi(p)}$$

这两组基底之间的转移矩阵就是转移映射的jacobian矩阵, 因此要使得这些坐标卡决定的方向是良定义的, 就要求转移映射的jacobian的行列式为正, 这样我们就找到了M的一个连续的逐点定向.

另一方面, 如果M是可定向的, 那么必定存在着一组坐标卡使得这组坐标卡之间的转移映射的jacobian矩阵的行列式都是正数. 请读者先思考怎么给出证明

Proposition 13.4

M可定向, 那么存在一组光滑坐标卡 (U, φ) 使得坐标卡之间的转移映射的jacobian行列式都是正数

Proof: 对任何 $p \in M$, 存在p的邻域X和X上的连续标架 $(E_1(q), \dots, E_n(q)), q \in X$. 另外取p附近的坐标卡 (U, φ) , 再取p的预紧连通邻域 $V \subseteq U$ 满足 $\bar{V} \subseteq U$, 通过缩小U不妨设 $U \subseteq X$, 如此存在矩阵 $a_{ij}(q)$ 使得

$$E_i(q) = \sum_{k=1}^n a_{ij}(q) \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_q$$

在 \bar{V} 上, $\det(a_{ij})$ 不变号, 如果恒负, 则通过交换前两个坐标的顺序, 不妨设 $\det(a_{ij}) > 0$ 恒成立, 对一个 $\epsilon > 0$, 根据Whitney逼近定理, 存在U上的光滑函数 $\tilde{a}_{ij}(q)$ 使得 $|\tilde{a}_{ij} - a_{ij}| < \epsilon$, 取 ϵ 足够小使得在 \bar{V} (这是个紧集) 上有

$$\det(\tilde{a}_{ij}) > 0$$

记 $A(q) = \{a_{ij}(q)\}, \tilde{A}(q) = \{\tilde{a}_{ij}(q)\}$,

这样给出了一组新标架

$$W_i(q) = \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{ij}(q) \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_q$$

且 W_i, E_i 之间的转移矩阵为

$$A \cdot \tilde{A}^{-1}$$

行列式为正数, 因此 W_i, E_i 在V上决定的方向是相同的, 又 $\det \tilde{A}(q) > 0$, 因此在V上, E_i 和 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 决定的方向是相同的. 这样就找到了p附近的一个坐标卡 (V, φ) . 使之在V中和M的某个保持定向的局部标架决定的方向是一样的, 为了表示方便, 我们把 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 决定的方向称为坐标卡 (V, φ) 决定的方向.

根据p的任意性, 就找到了一组覆盖M的坐标卡, 记为 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$

然后我们证明这组坐标卡的转移映射的jacobian行列式都是正的. 假设 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 任取 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ 根据刚才 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 的构造, 存在p附近的邻域X,Y和上面的保持定向的连续标架 E_i, W_i 使得 E_i 和 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 的定向是一样的, W_i 和 (U_β, φ_β) 的定向是一样的, 设 E_i 和 $\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}$ 的转移矩阵是 $A(q)$, W_i 和 $\frac{\partial}{\partial x_\beta^i}$ 的转移矩阵是 $B(q)$, E_i, W_i 之间的转移矩阵为 $C(q)$, 那么 $\frac{\partial}{\partial x_\beta^i}, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}$ 之间的转移矩阵就是

$$A(q)C(q)B(q)^{-1}$$

另一方面在第三章中我们知道转移矩阵为 $J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})$, 因此

$$J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(q)) = A(q)C(q)B(q)^{-1} \quad \forall q \in U_\alpha \cap U_\beta$$

两边取行列式, 右边为正数(因为 E_i, W_i 保持定向, 所以在 $X \cap Y$ 上的转移矩阵行列式 C 为正), 所以左边为正数, 证毕

Theorem 13.5 可定向的坐标卡判据

M 是 n 维光滑流形, M 是可定向的, 当且仅当存在一组和 M 的光滑结构相容的坐标卡, 能覆盖 M 且转移映射的jacobian矩阵行列式为正的. i.e.存在一个光滑图册, 使得图册中的任何两个坐标卡之间的转移映射的jacobian矩阵都是正的.

这个定向称为坐标卡确定的定向, 这种图册也称为**定向坐标覆盖**

由于这个原因, 有些书籍也把定向坐标覆盖的存在性作为可定向的定义.

此外, 如果 M 是定向的微分流形, (U, φ) 是坐标卡, 如果基底 $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ 是 $T_p M$ 中保持定向的, 对任何 $p \in U$ 成立, 则称坐标卡 (U, φ) 是一个**定向坐标卡**

Proof: \Rightarrow Proposition 13.4

\Leftarrow 每个坐标卡 (U, φ) 都给出了一个局部标架 $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$, 假设还有个坐标卡 (V, ψ) 满足 $U \cap V \neq \emptyset$, 那么对任何 $p \in U \cap V$, 就有两个基底

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\right) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n}|_p\right)$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p f = \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i}|_{\varphi(p)} \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}|_p f = \frac{\partial f \circ \psi^{-1}}{\partial x_i}|_{\psi(p)}$$

这两组基底之间的转移矩阵就是转移映射的jacobian矩阵, 行列式为正数, 所以对任何 $p \in M$, 取 p 的附近的坐标卡 (U, φ) , 可以逐点的为 $T_p M$ 赋予定向为 $[\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}]$, 这种定向是良定义的, 因为两组基底之间的转移矩阵就是转移映射的jacobian矩阵行列式为正数. 且这个定向就是连续的逐点定向, 因为这个逐点定向在每一点 $p \in U$ 都等于光滑标架 $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ 决定的定向 $[\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p]$

13.3 定向的其他性质

前面建立的一套抽象的“定向”的定义, 其实等价于定向坐标覆盖的存在性. 这给出了判定光滑流形能否定向的充要条件. 下面我们从另一些角度, 给出关于定向的性质

Proposition 13.6 定向的微分形式判据

M 是 n 维光滑流形, 则 M 可定向当且仅当 M 上存在处处非0的光滑 n -形式

对一个微分形式 ω , 称 ω 为**定向形式**, 如果对任何 $p \in M$, ω 把某一组保持定向的有序基映射为正数, 这等价于任何一组保持定向的有序基都被映射为正数, 因为保持定向的有序基之间的过渡矩阵具备正的行列式

Proof: \Rightarrow 可定向说明存在定向坐标覆盖, 又光滑流形能被可数个坐标卡覆盖, 因此可以取其中覆盖 M 的可数个, 记为 $\{(U_i, \varphi_i)\}$, 仍是一组定向坐标覆盖. 对任何 $p \in M$, 取覆盖 p 的定向坐标卡 (U_i, φ_i) , 定义 U_i 上的 n -形式为

$$\omega_i = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

其中 dx^i 为 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 的对偶基. 然后取从属于 U_i 的单位分解 ψ_i , 定义

$$\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \omega_i$$

对任何 $p \in M$, 设 $p \in U_i$, 假设 $p \in U_j$, 则由

$$\omega_j = d\tilde{x}^1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^n = \det J(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

可得如果 $p \in \text{supp} \psi_j$, 那么必有 $\omega_j = \det J(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, 系数 $\neq 0$, 因此

$$\omega(p) = \sum_{j, p \in \text{supp} \psi_j} \psi_j \det J(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

根据 $\psi_j \geq 0$ 且不全为 0 可得 $\omega(p)$ 的系数 > 0 , 因此处处非 0

\Leftarrow 对任何一点 p , 取 p 附近的坐标卡 (U, φ) , 通过欧式空间的局部连通性, 缩小 U 不妨设 U 是连通的, 根据 p 的任意性, 这些坐标卡覆盖 M , 所以可以取可数子覆盖记为 (U_i, φ_i) , 从而在 U_i 上定义

$$f_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$$

右边非 0, 又 U_i 连通, 所以 f_i 恒正或恒负, 通过交换坐标顺序, 不妨设 f_i 恒正. 再根据

$$f_j = f_i \det J(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})$$

可得 $\det J(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) > 0$, 因此 (U_i, φ_i) 是定向坐标覆盖. 这个定向又称为 ω 诱导的定向

比如说对欧式空间 R^n , 我们知道它能被一个单独的坐标卡 (R^n, id) 覆盖, 因此可以考虑在每点处的切空间给出一个方向(回忆线性空间的方向是有序基的等价类):

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right]$$

那么微分形式

$$\omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

就是 R^n 上的定向形式.

Proposition 13.7

可平行化的光滑流形可定向

Proof: 设光滑流形维数为 n . 可平行化是说存在 n 个处处线性无关的光滑向量场. 因此是一组全局标架 (E_1, \dots, E_n) , 为 $T_p M$ 赋予定向

$$[E_1|_p, \dots, E_n|_p]$$

这就是 M 的一组连续的逐点定向.

Definition 13.8

M, N 是定向光滑流形, $F: M \rightarrow N$ 是局部微分同胚(这意味着 M, N 维数相同), 由此可知对任何 $p \in M$, $dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ 都是线性同构. 如果对任何 $p \in M$, dF_p 都把 $T_p M$ 中保持定向的有序基映射为 $T_{F(p)} N$ 中保持定向的有序基, 那么称 F 是保持定向的, 否则称为反转定向的

关于保持定向的光滑映射, 有如下性质

Proposition 13.9

M, N 是定向光滑流形, $F: M \rightarrow N$ 是局部微分同胚, 则下列叙述等价

- F 是保持定向的
- 对 M, N 的任何两个定向坐标卡, F 在这两组坐标卡下的坐标表示, 具有正的 jacobian 行列式
- 对 N 中任意定向形式 ω , $F^* \omega$ 都是 M 上的定向形式

Proof: (a) \rightarrow (b) (U, φ) 和 (V, ψ) , 则 $dF_p(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p), 1 \leq i \leq n$ 是 $T_{F(p)} N$ 中保持定向的有序基, 又 (V, ψ) 是定向坐

标卡, 所以 $(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}|_{F(p)})$ 也是保持定向的有序基, 因此这两组有序基之间的过渡矩阵 W_p 的行列式为正, 然而 $W_p = (J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}))^{-1}$, 因此 $\det J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) > 0$

(b) \rightarrow (c) 对任何 $p \in M$, 取 p 附近的定向坐标卡 (U, φ) . 那么

$$F^*\omega(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}) = \omega(dF_p \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, dF_p \frac{\partial}{\partial x^n})$$

再取 $F(p)$ 附近的定向坐标卡 (V, ψ) , 则 dF_p 在这两组坐标卡下的表示矩阵 W_p 具有正的行列式, 且 $dF_p \frac{\partial}{\partial x^i}$ 到 $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}|_{F(p)}$ 的转移矩阵是 W_p^{-1} , 因此 $dF_p \frac{\partial}{\partial x^i}$ 是保持定向的有序基, 因此 $\omega(dF_p \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, dF_p \frac{\partial}{\partial x^n}) > 0$

(c) \rightarrow (a) 对 $T_p M$ 中的任何一组保持定向的有序基 E_1, \dots, E_n , 都有

$$F^*\omega(E_1, \dots, E_n) > 0$$

因此

$$\omega(dF_p E_1, \dots, dF_p E_n) > 0$$

又 ω 是定向形式, 所以根据定向形式的定义, $dF_p E_1, \dots, dF_p E_n$ 作为一个有序基, 必须是保持定向的

Proposition 13.10 拉回映射给出的定向

M, N 是光滑流形, F 是 $M \rightarrow N$ 的局部微分同胚. N 是可定向的, 那么 M 也可定向, 且存在一个定向使得 $F : M \rightarrow N$ 是保持定向的

Proof: 设 N 是 n 维流形. 则 N 中存在处处非0的光滑 n -形式 ω , 根据 dF_p 是双射可得

$$F^*\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(x_1, \dots, x_n) \quad v_i = (dF_p)^{-1}x_i$$

等号右边不恒为0, 所以左边不恒为0, 因此 $F^*\omega$ 是处处非0的. 又 F 是光滑映射, 所以 $F^*\omega$ 光滑, 因此 M 可定向, 容易验证 $F^*\omega$ 诱导出的定向就能使 F 变成保持定向的光滑映射.

13.4 子流形的定向

Proposition 13.11

M 是可定向的 n 维光滑流形. S 是 M 的 $n-1$ 维浸入子流形, 且 N 是一个无处与 S 相切的向量场, 则 S 存在一个定向使得对任何 $p \in S$, (E_1, \dots, E_{n-1}) 是 $T_p S$ 中保持定向的基底, 当且仅当 $(N_p, E_1, \dots, E_{n-1})$ 是 $T_p M$ 中保持定向的基底. 记 $\iota : S \rightarrow M$ 为包含映射, 若 ω 是 M 中的定向 n -形式, 则 $\iota^*(i_N \omega)$ 是 S 上的定向 $(n-1)$ -形式

Proof: 设 ω 是 M 上的定向形式(光滑), 则 $\sigma = \iota^*(i_N \omega)$ 是 S 上的光滑 $(n-1)$ -形式, 对 $T_p S$ 中的基底 (E_1, \dots, E_{n-1}) , 由 N_p 不在 $T_p S$ 中(因为 N 和 S 无处相切)可得 $(N_p, E_1, \dots, E_{n-1})$ 是 $T_p M$ 的基底, 且

$$\sigma_p(E_1, \dots, E_{n-1}) = \omega(N_p, E_1, \dots, E_{n-1})$$

则 σ 就是 S 上的处处非0的光滑 $(n-1)$ -形式, 因此 S 可定向. 且左边 > 0 当且仅当右边 > 0 , 证毕

Corollary 13.12 边界的定向

M 是 n 维光滑带边流形, 且 M 可定向, 那么 ∂M 可定向, 且每个在 ∂M 上指向外向量场在 ∂M 上诱导出相同的定向.

由任何一个 ∂M 指向外的向量场决定的定向称为诱导定向或Stokes定向

Proof: 根据Problem 8.1, 取 M 上的光滑向量场 X , 满足 X 在 ∂M 上处处指向外, 然后取 M 上的某个定向 n -形式, 则根据Proposition 13.11,

$$\iota^*(i_X\omega)$$

就是 ∂M 上处处非0的微分形式, 因此 ∂M 可定向.

对另一个在 ∂M 上处处指向外的向量场 Y , 我们知道在 $T_p M$ 中, 有序基

$$(X_p, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}) \quad (Y_p, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}})$$

之间的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{Y_p^n}{X_p^n} & Y_p^1 - X_p^1 \frac{Y_p^n}{X_p^n} & \dots & Y_p^{n-1} - X_p^{n-1} \frac{Y_p^n}{X_p^n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

其中 X_p^i, Y_p^i 是 X, Y 在基底 $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ 下的系数, 由 X, Y 指向外可得 $X_p^n, Y_p^n > 0$, 因此上述矩阵的行列式为正的.

因此 $\omega(X_p, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}})$ 和 $\omega(Y_p, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}})$ 符号相同, 所以 $\iota^*(i_X\omega), \iota^*(i_Y\omega)$ 确定的定向是一样的

Example 13.13 ∂H^n 的诱导定向

注意到向量场

$$X = -\frac{\partial}{\partial x_n} \in \mathcal{X}(H^n)$$

因为 X 是 $\mathcal{X}(R^n)$ 的向量场 $-\frac{\partial}{\partial x_n}$ 在 H^n 的限制. 然后我们考虑欧式空间的标准定向 $[e_1, \dots, e_n]$, 可以找出对应的一个 H^n 的定向形式为

$$\omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

则 $\iota^*(i_X\omega)$ 就是 ∂H^n 的诱导定向. 我们发现 $T_p \partial H^n$ 的有序基 $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}})$ 满足

$$\begin{aligned} \iota^*(i_X\omega)(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}) &= \omega(-\frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}) \\ &= -\omega(\frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}) = (-1)(-1)^{n-1} \det(I_n) = (-1)^n \end{aligned}$$

因此当 n 是偶数时, $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}})$ 保持定向, 当 n 为奇数时, 反转定向.

13.5 Exercise

Problem 13.1

证明Lie群可定向

第十四章 流形上的积分

14.1 坐标卡内紧支n-形式的积分

流形上的积分对象是最高次的微分形式.

Definition 14.1 R^n 中n-形式的积分

D 是 R^n 的开子集, \overline{D} 上的任何一个连续的n-形式都能写作

$$\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \quad f \in C(\overline{D})$$

定义 ω 在 D 上的积分为

$$\int_D \omega = \int_D f dx_1 \cdots dx_n$$

右边代表 f 在 D 上的Lebesgue积分

要定义流形上的积分, 我们也是要把微分形式拉回到 R^n 上再计算的:

Definition 14.2 流形上的积分

M 是 n 维光滑流形, (U, φ) 是一个坐标卡, 且要么是保持定向, 要么是反转定向. ω 是支集在 U 中的n-形式, 那么定义

$$\int_M \omega = \pm \int_{\varphi(U)} \varphi^{-1*} \omega$$

其中右边是正号, 如果 φ 保持定向. 否则取负号

Proposition 14.3

上述积分的定义不依赖于坐标卡的选取(只要坐标卡的坐标邻域包含 ω 的支集)

Proof:

$$\int_{\varphi(U)} \varphi^* \omega$$

设 ω 在坐标卡 (U, φ) 下的表示为

$$\omega_p = g(p) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

那么 $\varphi^{-1*} \omega$ 的系数为

$$\varphi^{-1*} \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) = \omega \left(d\varphi^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right), \dots, d\varphi^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right)$$

$\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U$ 是光滑映射, $d\varphi^{-1}$ 在坐标卡 (R^n, id) , (U, φ) 下的表示为

$$J(\varphi \circ \varphi^{-1} \circ id)(x) = I_n$$

因此 $d\varphi^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_j}|_{\varphi(p)}) = \frac{\partial}{\partial x^j}|_p$, 这说明

$$\varphi^{-1*}\omega(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}) = g(\varphi^{-1}(x))$$

从而

$$\int_U \omega = \int_{\varphi(U)} g(\varphi^{-1}(x)) dx_1 \cdots dx_n$$

在另一组坐标卡 (V, ψ) 下假设

$$\omega = h(p)d\tilde{x}^1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}^n$$

则

$$\psi^{-1*}\omega(\frac{\partial}{\partial x_j}|_{\varphi(p)}) = h(\psi^{-1}(x))$$

从而

$$\int_V \omega = \int_{\psi(V)} h(\psi^{-1}(x)) dx_1 \cdots dx_n$$

然后我们寻找 h 和 g 的关系. 注意到

$$h(p)d\tilde{x}^1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}^n = g(p)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

两边作用在 $(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n})$ 上, 可得

$$h(p) = g(p)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n})$$

再根据 $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} = \sum_{j=1}^n [J(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1}]_{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{j=1}^n [J(\varphi \circ \psi^{-1})]_{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}$, 因此

$$h(p) = g(p)\det(J(\varphi \circ \psi^{-1}))$$

从而

$$\int_V \omega = \int_{\psi(V)} g(\psi^{-1}(x))\det(J(\varphi \circ \psi^{-1}))(\psi^{-1}(x)) dx_1 \cdots dx_n$$

令 $\psi^{-1}(x) = \varphi^{-1}(y)$, 则通过变量代换公式可得

$$= \int_{\varphi(U \cap V)} g(\varphi^{-1}(y)) dy_1 \cdots dy_n$$

根据 ω 的支集在 $U \cap V$ 中, 可知 g 的支集在 $U \cap V$ 中, 因此 $g \circ \varphi^{-1}$ 的支集在 $\varphi(U \cap V)$ 中, 所以上式积分区域能变成 $\varphi(U)$, 且不改变积分的值. 证毕

14.2 紧支 n -形式的积分

Definition 14.4

设 M 是 n 维光滑流形, ω 是 M 上具有紧支集的 n -形式, 那么可以定义

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^m \int_M \psi_i \omega$$

其中 U_i 是定向坐标卡的坐标邻域对 $\text{supp} \omega$ 的有限覆盖. ψ_i 是从属于 U_i 的单位分解.

Proposition 14.5

上述积分与坐标邻域和单位分解的选取无关

Hint: 两组单位分解求交集, 构造一个更细的单位分解

Proof: 设有两个这样的单位分解, 即

$$\sum_{i=1}^k \int_M \psi_i \omega \quad \sum_{j=1}^m \int_M \varphi_j \omega$$

考虑 $A_{ij} = U_i \cap V_j$, 则 $\cup_{i,j} A_{ij}$ 覆盖了 $\text{supp} \omega$. 构造一组从属于 A_{ij} 的单位分解 ρ_{ij} , 则作为支集在一个坐标邻域内的光滑形式 $\psi_i \omega$, 我们有 $\psi_i \omega = \sum_{t,j=1}^m \psi_i \rho_{tj} \omega$, 根据拉回映射的线性性我们知道作为紧支集在 U_i 中的光滑形式的积分,

$$\int_M \psi_i \omega = \sum_{t,j=1}^m \int_M \psi_i \rho_{tj} \omega$$

两边求和

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \int_M \psi_i \omega &= \sum_{i,t,j} \int_M \psi_i \rho_{tj} \omega \\ &= \sum_{t,j=1}^m \sum_{i=1}^k \int_M \psi_i \rho_{tj} \omega \end{aligned}$$

内层的求和可以作为 k 个支集在 V_j 中的紧支 n -形式的积分, 具有线性性, 因此

$$= \sum_{t,j=1}^m \int_M \sum_{i=1}^k \psi_i \rho_{tj} \omega = \sum_{t,j=1}^m \int_M \rho_{tj} \omega$$

同理可得

$$\sum_{j=1}^m \int_M \varphi_j \omega = \sum_{t,j=1}^m \int_M \rho_{tj} \omega$$

因此和单位分解的选取无关

Proposition 14.6

$\varphi: M \rightarrow N$ 是微分同胚. ω 是 N 上的最高次形式, 则

$$\int_M \varphi^* \omega = \pm \int_N \omega$$

Proof: 只需在局部坐标卡中证明, 只需运用 R^n 中的变量代换公式即可

14.3 Stokes定理**Theorem 14.7 Stokes's theorem**

M 是 n 维带边光滑流形. ω 是 M 上紧支光滑的 $(n-1)$ -形式, 那么

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

等式右边严格意义上是 $\int_{\partial M} \iota_{\partial M}^* \omega$, 即 ω 在包含映射 $\iota_{\partial M}$ 下的拉回在 ∂M 上的积分, 其中 ∂M 的定向选取为 M 的诱导定向 (Stokes 定向)

Proof: 我们先来证明 $M = H^n$ 的情形, 设存在 R 使得 $\text{supp} \omega \in [-R, R]^{n-1} \times [0, R]$. 则存在 H^n 上的光滑函数 $f(x)$ 使

得

$$\omega = \sum_{j=1}^n f(x)_j dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

其中 $\widehat{dx_j}$ 表示没有 dx_j 这个元素.

外微分运算一次得到

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

根据 \wedge 运算的性质, 内部求和中不为0的项仅有 $i = j$, 从而

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} (-1)^{j-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

这给出了

$$\int_{R_+^n} d\omega = \sum_{j=1}^n \int_{[-R, R]^{n-1} \times [0, R]} \frac{\partial f}{\partial x_j} (-1)^{j-1} dx_1 \cdots dx_n$$

对第 j 项($1 \leq j \leq n-1$), 我们用Fubini定理先对 x_j 积分:

$$\int_{-R}^R \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots, x_n) dx_j = f(x_1, \dots, R, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, -R, \dots, x_n) = 0 \quad \text{因为这两个点都落在支集外面}$$

所以再对其他 $n-1$ 个变量积分也还是0, 从而

$$\int_{R_+^n} d\omega = (-1)^{n-1} \int_{[-R, R]^{n-1}} \int_0^R \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n dx_1 \cdots dx_{n-1} = (-1)^n \int_{[-R, R]^{n-1}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

另一方面, 我们要计算 $\iota^* \omega \in \Omega^{n-1}(\partial H^n)$, 其系数为

$$\begin{aligned} \iota_{\partial M}^* \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right) &= \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right) = \sum_{j=1}^n f_j(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n f_j(x) \delta_{12 \dots (n-1)}^{I_j} \end{aligned}$$

其中 I_j 表示前 n 个正整数去掉 j 之后升序排列. 对 $1 \leq j \leq n-1$, I_j 都不是 $(1, 2, \dots, n-1)$ 的置换(因为里面少了 j , 多了 n), 因此 $\delta_{12 \dots (n-1)}^{I_j} = 0$, 这意味着

$$\iota_{\partial M}^* \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right) = f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$$

从而

$$\iota_{\partial M}^* \omega = f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$$

这一点也可以从另一个角度解释:

$$\begin{aligned} \iota_{\partial M}^* \omega &= \sum_{j=1}^n (f_j \circ \iota_{\partial M}) \iota_{\partial M}^* (dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n) \\ &= \sum_{j=1}^n f_j(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) d(x_1 \circ \iota) \wedge \cdots \wedge \widehat{d(x_j \circ \iota_{\partial M})} \wedge \cdots \wedge d(x_n \circ \iota_{\partial M}) \end{aligned}$$

注意到 $x_n \circ \iota_{\partial M} = 0$, 因此 $d(x_n \circ \iota_{\partial M}) = 0$, 从而上述求和只有最后一项不是0, 且注意到 $x_i \circ \iota_{\partial M} = x_i, 1 \leq i \leq n-1$,

所以:

$$\iota_{\partial M}^* \omega = f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$$

因此它的积分就是

$$\int_{\partial H^n} f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$$

我们注意到 ∂H^n 和 R^{n-1} 在映射 $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = (x_1, \dots, x_{n-1})$ 下成为微分同胚, 因此 $(\partial H^n, \varphi)$ 是 ∂H^n 的一个坐标卡, 且覆盖 $\text{supp} f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$, 又 R^{n-1} 上有一个保持定向的光滑形式 $\alpha = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$, 有序基 $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}})$ 是保持定向的, 且

$$\varphi^* \alpha(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}) = \alpha(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}) = 1 > 0$$

但是在 ∂H^n 中, $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}})$ 保持定向当且仅当 n 为偶数, 所以 n 是偶数时, φ 保持定向, 否则反转定向, 因此根据流形上的积分的定义, 拉回的时候要把定向考虑进去:

$$\begin{aligned} \int_{\partial H^n} f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} &= (-1)^n \int_{R^{n-1}} f(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1})) dx_1 \cdots dx_{n-1} \\ &= (-1)^n \int_{R^{n-1}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \cdots dx_{n-1} \end{aligned}$$

又 $f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ 的支集在 $[-R, R]^{n-1}$ 中, 从而

$$\int_{\partial H^n} \iota^* \omega = (-1)^n \int_{[-R, R]^{n-1}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

于是

$$\int_{H^n} d\omega = \int_{\partial H^n} \omega$$

对于 $M = R^n$ 的情形同理, 这时候两边积分都是0.

然后我们考虑在某个坐标卡 (U, φ) 中紧支的光滑形式 ω , 不妨设 $\varphi(U) = B^+(0, 1)$, 那么 $\varphi(U)$ 在映射 $g: \frac{x}{\sqrt{1+\|x\|^2}}$ 下微分同胚于 H^n , 因此不妨设 $\varphi(U) = H^n$, 且保持定向. 则有

$$\int_M d\omega = \int_{H^n} (\varphi^{-1})^* d\omega = \int_{H^n} d((\varphi^{-1})^* \omega) = \int_{\partial H^n} (\varphi^{-1})^* \omega = \int_{\partial M} \omega$$

坐标卡反转定向的情形同理.

然后我们考虑一般的带边流形 M . 取一组坐标卡 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, 不妨设 $\varphi_\alpha(U_\alpha) = R^n$ 或 H^n , 设覆盖 $\text{supp} \omega$ 的有限个单位分解为 ψ_i , 根据定义有

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \sum_{i=1}^k \int_M \psi_i d\omega \\ &= \int_{\partial M} \iota_{\partial M}^* \omega = \sum_{i=1}^k \int_{\partial M} \iota_{\partial M}^* (\psi_i \omega) = \sum_{i=1}^k \int_M d(\psi_i \omega) \\ &= \sum_{i=1}^k \int_M d(\psi_i) \omega + \int_{i=1}^k \psi_i d\omega = \int_M d(\sum_{i=1}^k \psi_i) \omega + \int_M d\omega \\ &= \int_M d(1) \omega + \int_M d\omega = \int_M d\omega \end{aligned}$$

14.4 Exercise

Problem 14.1

考虑 R^2 上的光滑2-形式

$$\omega = xdy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + zdx \wedge dy$$

计算

$$\int_{S^2} \iota_{S^2}^* \omega$$

参考文献

- [1] James Munkres. Topology. 2014
- [2] John M. Lee. Introduction to Smooth Manifolds.