It’s MyniGold!!!!! 课后题配套解答

2026 年 2 月 9 日

目录

第一章　微分流形

Problem 1.1

紧Hausdorff空间到Hausdorff上的逆紧映射都是闭映射

Proof: 对闭集K, 根据紧T2空间的闭子集也是紧集可以知道K是紧的, 根据连续映射保持紧性可得$f(K)$也是紧的. 而T2空间的紧集是闭的, 因此是闭映射

Problem 1.2

M,N都是局部紧Hasudorff空间, $f: M \to N$是逆紧映射, 证明f是闭的

Proof:Consider the one-point compactification of M,N: $X = M \cup \{\infty_x\}, Y = N \cup \{\infty_y\}$. Then X,Y are T2 and compact. Define

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in M \\ \infty_y & x = \infty_x \end{cases}$$

We prove $\overline{f}$ is continuous. Notice that an open set U in Y is either an open set in N or Y-C, where C is a compact set in N, in the first case $\overline{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ is obviously open in M, hence by the definition of X, it is open in X. In the second case, $\overline{f}^{-1}(U) = X - \overline{f}^{-1}(C) = X - f^{-1}(C)$. Since f is proper, we know $X - f^{-1}(C)$ is open in X, hence $\overline{f}$ is continuous.

But X is compact, hence every closed set K is compact, hence $\overline{f}(K)$ compact in Y, hence closed in Y. Thus $\overline{f}$ is closed.

To show f is closed, we choose a closed set $K \subseteq M$, then $M - K$ is an open set in M, hence open in X.hence $K \cup \{\infty_x\} = X - (M - K)$ is closed in X. Hence $\overline{f}(K \cup \{\infty_x\}) = f(K) \cup \infty_y$ is closed in Y. Hence by $f(K) = [f(K) \cup \infty_y] \cap N$ we know the right hand side is a closed set in N[since by the one-point compactification theorem, the topology of N is the same as the subspace topology induced by the topology of Y], hence $f(K)$ is closed in N.

Problem 1.3

设$B(0,1)$是R^n中的开球, 证明$B(0,1)$和R^n微分同胚. 记H^n是最后一个分量非负的点的全体, 证明$B_+(0,1) = B(0,1) \cap H^n$和$H^n$微分同胚, 由此得出对一个光滑流形M上的任意坐标卡(U,φ), 可以设$\varphi(U) = R^n$或H^n

Proof: 令

$$f = \frac{x}{\sqrt{1-|x|^2}} \qquad f^{-1} = \frac{x}{\sqrt{1+|x|^2}}$$

Problem 1.4

证明对一个连通的拓扑流形M, 任取其中两点p,q, 都存在一个$M \to M$的同胚ψ使得$\psi(p) = q$

Proof: 之前用英文写的, 我懒得翻译了. First we show that the conclusion holds if p, q lie in a common chart (f, U, B), where B is unit ball and $f(p) = 0$. Since $f(U) = B$, we know $\|f(q)\| < 1$, hence we can choose $\|f(q)\| < r < 1$, and consider $B_r = \{x \big| \|x\| < r\}$. For any $y \in B_r$, consider a line $t\frac{(y-f(q))}{\|y-f(q)\|} + f(q)$ start from $f(q)$, we can find the intersection of this line and ∂B_r:

$$r^2 = t^2 + 2t < \frac{y - f(q)}{\|y - f(q)\|}, f(q) > + \|f(q)\|^2$$

Notice that this equation has 2 roots,1 positive 1 negative, we let t_y is the positive one：

$$t_y = \frac{-2 < y - f(q), f(q) > + \sqrt{< y - f(q), f(q) >^2 + 4r^2 - 4\|f(q)\|^2}}{2\|y - f(q)\|}$$

cosnider

$$g(y) = \frac{y - f(q)}{t_y}$$

It's easy to see that g is continuous if we define $g(f(q)) = 0$. And $g\big|_{\partial B_r} = Identity$, Now we find g^{-1}. Notice that if $g(y) = z$, then $\|z\| = \frac{\|y-f(q)\|}{t_y}$, hence the opint

$$\frac{y - f(q)}{\|z\|} + f(q) \in \partial B_r$$

And by $y - f(q)//z$, we have $y - f(q) = vz$,

$$\|\frac{vz}{\|z\|} + f(q)\| = r$$

Solve this equation we know

$$v = \frac{-2 < z, f(q) > + \sqrt{< z, f(q) >^2 + 4r^2 - 4\|f(q)\|^2}}{2\|z\|}$$

Hence

$$g^{-1}(z) = \frac{-2 < z, f(q) > + \sqrt{< z, f(q) >^2 + 4r^2 - 4\|f(q)\|^2}}{2\|z\|} z + f(q)$$

And thus $g(y)$ is a homeomorphism of $\overline{B}_r$ to itself.
Now consider a map

$$F(x) = \begin{cases} x & x \in M - f^{-1}(B_r) \\ f^{-1} \circ g \circ f(x) & x \in f^{-1}(\overline{B}_r) \end{cases} \qquad x \in U$$

This map is well defined, since $f(\partial f^{-1}(B_r)) = \partial B_r$, and $[M - f^{-1}(B_r)] \cap [f^{-1}(\overline{B}_r)] \subseteq \partial f^{-1}(B_r)$, since g is identity on ∂B_r, we know $f^{-1} \circ g \circ f$ is identity on $[M - f^{-1}(B_r)] \cap [f^{-1}(\overline{B}_r)]$.
By pasting Lemma, we know F is continuous and

$$F^{-1} = \begin{cases} x & x \in M - f^{-1}(B_r) \\ f \circ g^{-1} \circ f^{-1}(\overline{B_r}) & x \in f^{-1}(\overline{B_r}) \end{cases}$$

Is also continuous by pasting lemma, hence F is a homeomorphism of M and $F(p) = f^{-1}(g(f(p))) = f^{-1}(g(0)) = f^{-1}(f(q)) = q$.
We have solved the case when p,q lies in a common chart. Now we consider the general case: by (2b), we know M is path connected. consider a path $f : [0, 1] \to M$ that $f(0) = p, f(1) = q$, then $f([0, 1])$ is a compact set in M, for every $f(t)$, we choose a chart (g_t, U_t, B), and those U_t is a open covering of $f([0, 1])$, yields a finite sub-covering : $\cup_{n=1}^{N} U_{t_n}$, for any subset K_1 of $\{1, 2, ..., N\}$, we show that there exists a $t_j \in K_1^c$ and a $t_i \in K_1$

s.t. $U_{t_i} \cap U_{t_j} \neq \emptyset$. If not, then there are 2 disjoint open sets

$$\cup_{i\in K_1} U_{t_i} \qquad \cup_{i\in K_1^c} U_{t_i}$$

And by the definition of subspace topology,

$$f([0,1]) = \{\cup_{i\in K_1}[U_{t_i} \cap f([0,1])]\} \cup \{\cup_{i\in K_1^c}[U_{t_i} \cap f([0,1])]\}$$

The left-hand-side is connected but the left-hand-side is a disjoint union of open set in $f([0,1])$, a contradiction with connectness.

initially, choose i s.t $p \in U_{t_i}$, let $K_1 = \{t_i\}$, there exists $t_j \in K_1^c$ that $U_{t_i} \cap U_{t_j} \neq \emptyset$, choose $p_1 \in U_{t_i} \cap U_{t_j}$, then for any fixed $y \in U_{t_j}$, we know there exits homeomorphism f_y s.t $f_y(p_1) = y$. And by case1 we konw there exists homeomorphism f_0 s.t $f_0(p) = p_1$, hence $f_y \circ f_0(p) = y$. Hence the conclusion holds for any $y \in U_{t_i} \cup U_{t_j}$[Holds for U_{t_i} is because $p \in U_{t_i}$ so we can use case1 directly], so we add t_j into K_1, then the conclusion holds for any $y \in \cup_{i\in K_1} U_{t_i}$

Now assume our K_1 has k numbers, which means the conclusion holds for any $y \in \cup_{i\in K_1} U_{t_i}$, then by the above observation, if $k < N$, there exists $t_j \in K_1^c$ and $t_i \in K_1$ s.t $U_{t_i} \cap U_{t_j} \neq \emptyset$, we choose $p_k \in U_{t_i} \cap U_{t_j}$, then for ny fixed $y \in U_{t_j}$, we know there exits homeomorphism f_y s.t $f_y(p_j) = y$. But p_j also in U_{t_i} and $t_i \in K_1$, which means there exits homeomorphism f s.t $f(p) = p_j$, hence $f_y \circ f(p) = y$, so we add t_j into K_1, now K_1 has k+1 elements and the conclusion holds for any $y \in \cup_{i\in K_1} U_{t_i}$

continue this process until K_1 has N elements, whcih means the conclusion holds for any $y \in \cup_{i\in K_1} U_{t_i} = \cup_{n=1}^{N} U_{t_n}$

Notice that there exists t_i s.t $q \in U_{t_i}$, we completed the proof

Problem 1.5

R上的连通集一定是区间.

Proof: 注意到R上有大小关系. 设I是R中的连通集. 记

$$a = inf\{x|x \in I\} \qquad b = sup\{x|x \in I\}$$

那么对任何$y \in (-\infty, a) \cup (b, \infty)$, 都有$y \notin I$. 下面证明$(a,b) \subseteq I$. 假设存在$x \in (a,b)$使得$x \notin I$, 那么对任何$z \in I$,z要么$< x$, 要么$> x$, 因此

$$I = [I \cap (a-1, x)] \cup [I \cap (x, b+1)]$$

因此I被写成了两个I中开集的并(子空间拓扑),且这两个开集互不相交, 从而和I的连通性矛盾, 因此$x \in I$, 从而$(a,b) \subseteq I$

因此情况总共有四种

$$I = \begin{cases} (a,b) & a,b \notin I \\ [a,b) & a \in I, b \notin I \\ (a,b] & a \notin I, b \in I \\ [a,b] & a,b \in I \end{cases}$$

无论哪种情况, I都是区间

Problem 1.6

M是拓扑空间,$\mathcal{X}$是M中一族局部有限的集合, 证明$\{\overline{X}\}_{X\in\mathcal{X}}$也是局部有限的

Proof:任取$x \in M$, 根据局部有限性设有$\mathcal{X}$中和x的某个邻域V相交n个集合, 记为$X_1, .., X_n$. 则对$\mathcal{X}$中的其他Y, 我们证明$\overline{Y} \cap V = \emptyset$, 这将给出V至多和$\overline{X}_1, .., \overline{X}_n$相交, 从而完成证明

假设$\overline{Y} \cap V \neq \emptyset$, 那么和V相交的点肯定是Y的边界点, 设$y \in \partial Y \cap V$, 根据y是V的内点(因为V是开集), 存在邻域K使得$y \in K \subseteq V$另一方面根据$y \in \partial Y$可得 $K \cap Y \neq \emptyset$, 这给出了$K \cap Y \subseteq V \cap Y$, 和$V \cap Y = \emptyset$矛盾. 因此$\overline{Y} \cap V = \emptyset$, 对$\mathcal{X}$中除了$X_1, .., X_n$之外的Y都成立, 因此V至多和$\overline{X}_1, .., \overline{X}_n$交集非空, 因此根据x的任意性, $\{\overline{X}\}_{X \in \mathcal{X}}$也是局部有限的

Problem 1.7

M是光滑流形, 证明任何一组坐标覆盖, 都能抽出可数个坐标卡, 形成一个新的坐标覆盖.

Proof: 取M的可数预紧拓扑基, 记为$\{B_i\}_{i=1}$, 根据预紧性, 存在有限个坐标卡覆盖$\overline{B_i}$, 因此也覆盖B_i. 把这些坐标卡收集起来, 是可数个(因为可数个有限集的并还是可数集), 且根据$\cup_{i=1}^{\infty} B_i = M$可得这些坐标卡也覆盖M.

Problem 1.8

M是光滑流形, 证明存在一组可数拓扑基$\mathcal{B}$, 满足对任何$B \in \mathcal{B}$, 都存在一个坐标卡(B', φ)和$r < 1$, 满足

$$\varphi(B') = B(0,1) \qquad \varphi(B) = B(0,r) \qquad \varphi(\overline{B}) = \overline{B(0,r)}$$

对于边界坐标卡的情形, 要改成

$$\varphi(B') = B^+(0,1) \qquad \varphi(B) = B^+(0,r) \qquad \varphi(\overline{B}) = \overline{B^+(0,r)}$$

这样的B称为**正则坐标球体**

Proof: 根据上一题, M能被可数个坐标卡覆盖, 不妨设每个坐标函数都把对应的坐标邻域映射为单位球(如果是内坐标卡)或$B^+(0,1)$(如果是边界坐标卡), 设这些坐标卡为(U_i, φ_i).

对一个坐标卡(U_i, φ_i), 如果是内坐标卡, 则取$B(0,1)$内的所有“球心坐标分量全为有理数, 半径也为有理数”的开球体, 共可数个, 可以设为B_{ij}. 如果是边界坐标卡, 则取$B^+(0,1)$内, 含于$(B^+(0,1))^o$内的所有“球心坐标分量全为有理数, 半径也为有理数, 闭包含于$\varphi_i(U_i)$”的开球体, 共可数个. 和含于$B^+(0,1)$内的所有“球心最后一个分量为0, 其他坐标分量为有理数, 半径也为有理数, 闭包含于$\varphi_i(U_i)$”的开球体与H^n的交集, 这是可数个半球. 从而记这些开球体和半球体的全体为B_{ij}

下面证明

$$\{\varphi_i^{-1}(B_{ij})\}_{i,j=1}$$

是一组拓扑基. 设U是x的邻域. 那么x必定含于某个坐标卡中, 设为(U_i, φ_i), 则$U \cap U_i$也是x的邻域, 所以$\varphi_i(U \cap U_i)$是$\varphi_i(x)$的邻域. 如果$\varphi_i(x) \notin \partial H^n$, 则根据有理数的稠密性, 存在一个半径为有理数, 球心坐标分量为有理数且闭包含于$\varphi_i(U \cap U_i) \cap \{x | x_n > 0\}$(这是$R^n$中的开集)的开球B, 而且根据定义, 这个开球必定是$\{B_{ij}\}_{j=1}$中的某一个, 又φ_i是同胚, 所$\varphi_i^{-1}(B)$是 $\{\varphi_i^{-1}(B_{ij})\}_{i,j=1}$中的某一个, 且是x在$U$中的开邻域.

如果$\varphi_i(x) \in \partial H^n$, 又$\varphi_i(U \cap U_i)$是$H^n$的开子集, 所以存在$R^n$的开子集V使得$\varphi_i(U \cap U_i) = V \cap H^n$, 然后考虑一个有理坐标(其中最后一个左边分量为0), 有理半径且包含$\varphi_i(x)$的球体$B \subseteq V$(满足闭包也在V中), 则$B \cap H^n$必定是$\{B_{ij}\}_{j=1}$中的某一个, 因此$\varphi_i^{-1}(B)$是 $\{\varphi_i^{-1}(B_{ij})\}_{i,j=1}$中的某一个, 且是x在$U$中的开邻域.

因此$\{\varphi_i^{-1}(B_{ij})\}_{i,j=1}$是一组可数拓扑基

然后我们为拓扑基中的每个元素寻找一个合适的坐标映射. 对固定的B_{ij}, 根据$\varphi_i(U_i)$的开性(要么是$B(0,1)$要么是$B^+(0,1)$)和$\overline{B_{ij}} \subseteq \varphi_i(U_i)$, 可知存在一个有理数r和$B_{ij}$同球心(设为$q_{ij}$),同类型(意为要么是开球, 要么是半球),

且半径为r的球体C_{ij}使得$C_{ij} \subseteq \varphi_i(U_i)$, 考虑映射

$$\psi_{ij}(x) = \frac{\varphi_i(x) - q_{ij}}{r}$$

则ψ_{ij}把$\varphi_i^{-1}(C_{ij})$映射为$B(0,1)$, 且把$\varphi_i^{-1}(B_{ij})$映射为某个半径< 1的球体. 且坐标卡$(\varphi_i^{-1}(C_{ij}), \psi_{ij})$和M的光滑结构相容(因为$\psi$是$\varphi_i$复合上一个平移与伸缩, 都是$R^n$中的光滑同胚).

Problem 1.9

M是拓扑空间, $\mathcal{X}$是一组局部有限的集合, 证明$\mathcal{X}$中的取并和取闭包能交换次序:

$$\overline{\cup_{X\in\mathcal{X}} X} = \cup_{X\in\mathcal{X}} \overline{X}$$

Hint:右边显然含于左边, 要证明反向的包含, 则可考虑任意极限点,然后用Problem 1.6的结论.

Proof: 只需证左边含于右边. 对任何$y \in \overline{\cup_{X\in\mathcal{X}} X}$, 我们知道对y的任意邻域U都有$U \cap \cup_{X\in\mathcal{X}} X \neq \emptyset$, 又$\cup_{X\in\mathcal{X}} \overline{X}$也局部有限, 所以存在y的邻域$U_0$使得$U_0$只和有限多个$\overline{X}$相交, 记为$\overline{X}_1, .., \overline{X}_k$, 又$U \cap U_0$必须和$\cup_{X\in\mathcal{X}} \overline{X}$相交, 且含于$U_0$, 因此$U \cap U_0$能且只能和$\overline{X}_1, .., \overline{X}_k$相交. 因此对y对任意邻域U,

$$U \cap \cup_{i=1}^k \overline{X}_i \neq \emptyset$$

而有限个闭集的并还是闭的, 因此

$$y \in \overline{\cup_{i=1}^k \overline{X}_i} = \cup_{i=1}^k \overline{X}_i \subseteq \cup_{X\in\mathcal{X}} \overline{X}$$

Problem 1.10

M是T2的拓扑空间, 考虑$M \times M$上自然的乘积拓扑, 证明对角线

$$\triangle = \left\{ (p,p) \middle| p \in M \right\}$$

是$M \times M$中的闭集.

Proof:

$$\triangle^c = \{(x,y) \big| x \neq y\}$$

根据分离性, 存在x,y的互不相交的邻域U,V. 则$U \times V \subseteq \triangle^c$, 因此$\triangle^c$是开的, 从而$\triangle$是闭的

第二章　光滑映射

Problem 2.1

M是光滑流形, A,B是M中互不相交的闭子集, 证明存在光滑函数$f: M \to R$. 使得f在A上恒为1, 在B上恒为0

Proof: A^c, B^c覆盖了M, 记f_A, f_B是从属于这个覆盖的单位分解, 且$supp f_A \subseteq A^c, supp f_B \subseteq B^c$, 那么根据$f_A + f_B = 1$可得$f_B$在A上必须是1, 且在$B$上为0, 从而$f_B$就是要找的光滑函数.

第三章 切向量

Problem 3.1

设M,N是光滑流形, $F: M \to N$是光滑映射, $\gamma: J \to M$是光滑曲线. 则对任何$t_0 \in J$, $F \circ \gamma$在t_0处的速度向量为

$$(F \circ \gamma)'(t_0) = dF_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0))$$

Proof:

$$(F \circ \gamma)'(t_0) = d(F \circ \gamma)(\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0}) = dF_{\gamma(t_0)} \circ d\gamma_{t_0}(\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0}) = dF_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0))$$

Problem 3.2

M,N是有边或无边光滑流形. $F: M \to N$是光滑映射, 则$dF_p = 0$对任何$p \in M$成立, 当且仅当F在M的每个连通分支上都是常数

Proof:$\Rightarrow$ 取M的连通分支K, 这是M的开子集, 且$F(M)$是N的连通子集, 所以必定含于某个连通分支中, 因此不妨设M,N都是连通的光滑流形. 固定一个$q \in M$, 令

$$A = \left\{ y \in M \middle| F(y) = F(q) \right\}$$

下面说明A是开集: 任取$p \in A$, 取p附近的坐标卡(U, φ), 不妨设$\varphi(U) = B(0,1)$或$B^+(0,1)$, 无论哪种情况都能推出U连通. 取$F(p) = F(q)$附近的坐标卡(V, ψ), 通过缩小U, 不妨设$F \circ \varphi(U) \subseteq V$. 那么在坐标卡$(U, \varphi), (V, \psi)$下F的坐标表示

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x) \qquad x \in \varphi(U) = B^+(0,1)\text{或}B(0,1)$$

是光滑的(不要忘记在$B^+(0,1)$上光滑意为可以延拓到$B^+(0,1)$的某个邻域上的光滑函数)

那么dF_p在这两个坐标卡下的坐标表示的jacobian矩阵就是0矩阵, 这说明$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x)$在$\varphi(U)$的内部的一阶偏导数全是0, 这给出了$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x)$在$\varphi(U)$的内部(注意这是个连通集)是常数, 因此根据连续性可得在$\varphi(U)$上是常数

因此F在U上是常数, 又$F(p) = F(q)$,因此$U \subseteq A$. 因此A是M的开子集

又N中的单点集是闭集, 所以

$$A^c = \left\{ y \in M \middle| F(y) \neq F(q) \right\} = F^{-1}(N - \{F(q)\})$$

是开的, 由此可得$M = A^c \cup A$, 是两个不交开集的并.如果A, A^c都不是空的, 就与M的连通性矛盾. 又$q \in A$, 所以$A^c = \emptyset$, 所以$M = A$, 因此F在M上是常值函数, 值为$F(q)$

$\Leftarrow$ 如果都是常数, 那么对任何$p \in M$, 取p附近的坐标卡(U, φ)和$F(p)$附近的坐标卡(V, ψ), 则$J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) = O$, 因此$dF_p = O$, 根据p的任意性可得结论成立.

Problem 3.3

M,N是有边或无边光滑流形. $F: M \to N$是微分同胚, 证明M和N具有相同的维数

Proof:微分同胚的切映射是切空间之间的线性同构, 两个线性空间同构必须满足二者维数相同

Problem 3.4

M是光滑流形, 证明集合

$$M_0 = \left\{(p,0) \in TM \middle| p \in M\right\}$$

是TM的闭子集

Proof: 任取$(p,v) \in M_0^c$, 则$v \neq 0$, 在M中取p附近的坐标卡(U,φ). 考虑坐标映射

$$\tilde{\varphi}((p,v)) = (\varphi(p), v_1, ..., v_n)$$

考虑$\varphi(U) \times R^n$中的一个开子集

$$\varphi(U) \times B(v,\epsilon)$$

其中ϵ满足$B(v,\epsilon)$和0没有交点, 则

$$\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(U) \times B(v,\epsilon))$$

是TM中的开集(因为TM的拓扑保证了$\tilde{\varphi}$是同胚), 其中的元素为

$$\left\{(p,u) \in TM \middle| p \in U, u \in B(v,\epsilon)\right\}$$

和M_0无交点, 因此含于M_0^c, 从而M_0^c是开的, 因此M_0是闭的

第四章　浸入，淹没和嵌入

Problem 4.1

M是n维无边光滑流形，N是n维带边流形，$F: M \to N$是光滑映射．证明如果$p \in M$满足dF_p是非异阵(意为其坐标表示的Jacobian矩阵是非异阵)，那么$F(p) \in IntN$

Proof: 假设$p \in \partial N$，那么存在一个边界坐标卡(V, ψ)，使得$\psi(V) = B(0,1) \cap H^n$，且$\psi_n(p) = 0$，i.e $\psi(p) \in \partial H^n \cap B(0,1)$，且

$$J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})$$

在0处是非异阵．记$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$为h，则h在$B(0,1)$上光滑．

根据反函数定理，存在0的邻域X，和Y,使得h的反函数存在，且是在Y上光滑的，记为g，i.e h是X到Y的微分同胚．Y也是0的开邻域，且含于$\psi(V)$．但是$\psi(V)$只包含那些第n个分量大于等于0的点．而0的任意开邻域都包含一些第n个分量小于0的点，因此矛盾．所以p不可能位于边界坐标卡中，因此只能是内点．

Problem 4.2

M是紧光滑流形，证明不存在$M \to R^k, k > 0$的光滑淹没

Proof:如果有，那么$F(M)$是R^k中的紧集，因此是有界闭集．又淹没是开映射，所以$F(M)$还是开的，又R^k连通，所以$F(M) = R^k$(因为既开又闭)，但这和紧性矛盾，所以没有．

Problem 4.3

证明拓扑覆盖映射$\pi: E \to M$是proper(逆紧)的，当且仅当其纤维是有限的

Proof: $\Rightarrow$ 对任何$p \in M$，存在p的邻域U使得π在$\pi^{-1}(U)$的每个连通分支上的限制都是到U的拓扑同胚．注意连通分支是开集，所以形成了π^{-1}的开覆盖，根据π逆紧，且单点集是紧的可得$\pi^{-1}(p)$是紧的，且$\pi^{-1}(U)$的连通分支构成了$\pi^{-1}(p)$的开覆盖，必有有限子覆盖$V_1, .., V_n$．

从而每个$\pi\big|_{V_i}$是拓扑同胚，V_i是$\pi^{-1}(U)$的连通分支．假设除了这n个外，还有其他连通分支V，那么$\pi\Big|_V$也是到U的同胚，从而$\pi^{-1}(p) \cap V \neq \emptyset$．但是$\pi^{-1}(p)$完全被$V_1, .., V_n$覆盖，这说明V至少和其中某一个$V_j$相交，两个不同连通分支相交是不可能的，因此$\pi^{-1}(U)$总共就n个连通分支．根据$\pi$在$V_i$上是同胚可得$V_i$包含且仅包含一个满足$\pi(x) = p$的x，所以$\pi^{-1}(p)$总共n个点，有限

$\Leftarrow$ 沿用上文的记号，$\pi^{-1}(U)$的每个连通分支都包含且仅包含一个$\pi^{-1}(p)$中的元素，设$\pi^{-1}(p)$有n个元素，那么$\pi^{-1}(U)$有n个连通分支$V_1, .., V_n$．先证明一个引理

不同纤维的元素个数是相同的

显然对任何$q \in U$，$\pi^{-1}(p), \pi^{-1}(q)$有同样多的元素．所以当$\pi^{-1}(p)$有n个元素时，其邻域中的所有点的纤维都有n个

元素, i.e

$$U_i = \left\{ p \in M \middle| \pi^{-1}(p)\text{有i个元素} \right\}$$

是开的. 又纤维都是有限的, 所以

$$M = \cup_{i=1}^{\infty} U_i$$

这是可数个互不相交的开集的并, 但M连通, 所以只能有一个非空, 又$p \in U_n$, 所以$M = U_n$

设K是M中的紧集, 要证明$\pi^{-1}(K)$是E中的紧集. 设$\cup_\alpha W_\alpha$是$\pi^{-1}(K)$的一组开覆盖. 设每个$y \in K$满足π是局部同胚的邻域为U_y

对任何$y \in K$, $\pi^{-1}(U_y)$是若干个连通开集, 有n个连通分支$V_y^1, .., V_y^n$, 又$\pi^{-1}(y) \subseteq \cup_\alpha W_\alpha$, 所以取n个$\alpha_y^n$使得每个$W_{\alpha_y^i} \cap V_y^i$都包含$\pi^{-1}(y)$中的一个点(这是可以做到的, 因为$\cup_\alpha W_\alpha$覆盖了$\pi^{-1}(y)$). 注意到$\pi$是开映射, 所以

$$X_y = \cap_{i=1}^n \pi(W_{\alpha_y^i} \cap V_y^i)$$

依然包含y的开集,即含于U_y又含于$\cup_\alpha \pi(W_\alpha)$, 又$\cup_{y\in K} X_y$是K的开覆盖, 所以有有限子覆盖

$$X_{y_1}, .., X_{y_k}$$

而$\pi^{-1}(X_{y_j}) \subseteq \pi^{-1}(U_{y_j})$, 所以

$$\pi^{-1}(y_j) \subseteq \cup_{i=1}^n V_{y_j}^i$$

而且根据π是$V_{y_j}^i$上的同胚可知若$\pi^{-1}(X_{y_j})$中的某个$x \in V_{y_j}^i$(对于某个i是一定成立的), 则有$x \in W_{\alpha_{y_j}^i} \cap V_{y_j}^i$, 从而$\pi^{-1}(X_{y_j}) \subseteq \cup_{i=1}^n W_{\alpha_{y_j}^i}$, 这给出了

$$\pi^{-1}(K) \subseteq \cup_{j=1}^k \pi^{-1}(X_{y_j}) \subseteq \cup_{j=1}^k \cup_{i=1}^n W_{\alpha_{y_j}^i}$$

因此最右边就是想找的有限子覆盖, 证毕

Problem 4.4

证明局部微分同胚是开映射

Proof: 对M中的开集U, 任取$q \in f(U)$, 则存在$p \in U$使得$f(p) = q$. 根据U是开集可得存在p的邻域$V \subseteq U$. 又p存在邻域K使得$f\big|_K$是微分同胚, 所以$f(V \cap K)$是N中的开集, 且含于$f(U)$, 因此任何$q \in f(U)$都是$f(U)$的内点, 从而$f(U)$是开的

Problem 4.4

证明淹没是开映射

Proof: 如果F是淹没, 存在坐标卡(U, φ)和$F(p)$的坐标卡(V, ψ)使得 $F(U) \subseteq V$, 且在这两组坐标卡下, 有坐标表示:

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x_1, .., x_m) = (x_1, .., x_n)$$

又因为微分同胚是开映射,且开映射和开映射的复合还是开映射, 所以只需证$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$是开映射. 对任何$x \in \varphi(U)$, 存在t使得$B(x,t) \subseteq \varphi(U)$, 从而

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(B(x,t)) = \{(x_1, ..., x_n) \big(x_1, .., x_n, .., x_m\big) \subseteq B(x,t)\} = \{(y_1, .., y_n) \Big| y_1^2 + \cdots + y_n^2 < t^2\}$$

后者是R^n中半径为t的开球, 且含于$\psi \circ F(U)$. 因此$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$是开映射.

Problem 4.5

M是紧的光滑流形,N是连通的光滑流形,则每个$M \to N$的淹没都是满射.

Proof: 紧空间上的连续映射是闭映射, 所以$f(M)$是N中的闭子集.如果f不是满射, 那么$f(M)^c$是非空开集. 又M是它本身中的开集, 且淹没是开映射, 所以$f(M)$也是开的, 因此

$$N = f(M) \cup f(M)^c$$

是两个互不相交开集的并, 和N连通矛盾

第五章　子流形

Problem 5.1

S是M的嵌入子流形, 那么对任何一个$f \in C^\infty(S)$, 都存在S在M中的邻域U, 使得存在$g \in C^\infty(U)$且$g\big|_S = f$

Proof: 对任何$p \in S$, 存在M在p附近的坐标卡(U, φ)使得

$$\varphi^i(p) = 0 \qquad n < i \leq m$$

且$(U \cap S, \tilde{\varphi})$是S在p附近的一个光滑坐标卡, 其中

$$\tilde{\varphi}(p) = (\varphi^1(p), .., \varphi^n(p)) \qquad \tilde{\varphi}^{-1}(x_1, .., x_n) = \varphi^{-1}(x_1, .., x_n, 0, .., 0)$$

通过缩小U和平移不妨设$\varphi(U) = B(0, r)$且$\varphi(p) = 0$, 在U上定义一个函数

$$g(q) = f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(\varphi^1(q), .., \varphi^n(q))$$

那么

$$g \circ \varphi^{-1}(x_1, .., x_m) = f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x_1, .., x_n)$$

是光滑的, 所以g是U上的光滑函数, 且$g\big|_S = f$. 记这个开集U是U_p, g为g_p,

令$U = \cup_{p \in S} U_p$, 则U是S的开邻域且U_p是U的一组开覆盖, 考虑其上的单位分解, 那么

$$g = \sum_{p \in S} \psi_p(x) g_p(x) \in C^\infty(U)$$

就是要找的函数

Problem 5.2

上一题中, 如果S到M的嵌入是proper(逆紧)的, 那么证明g可以是$C^\infty(M)$的

Proof: 局部紧T2空间上的逆紧映射是闭映射, 因此S是M中的闭集, 从而U_p和S^c共同构成了一组单位分解, 此时$\psi_p \in C^\infty(M)$, 且$\sum_{p \in S} \psi_p$在S上为1, 所以

$$g(x) = \sum_{p \in S} \psi_p(x) g_p(x) \in C^\infty(U) \in C^\infty(M)$$

就是要找的函数

第六章 Sard定理

Problem 6.1

M是R^N的k维光滑嵌入子流形. S是R^N的嵌入子流形. f是M上的光滑映射. 定义

$$F(x,p) = f(x) + p \qquad M \times R^N \to R^N$$

证明对a.e的$p \in R^N$, 映射$f_p(x) = F(x,p)$都和S横截相交.

Proof: 显然

$$F(x,p) = f(x) + p$$

是$M \times R^N \to R^N$的淹没, 因此必定和S横截相交, 根据横截性定理可以立即得出结论

Problem 6.2

M是R^N的k维光滑嵌入子流形. 证明对任何$d < N - k$, 必定存在和M不相交的d维仿射子空间[a]
$d = N - k$时是否成立?

[a]仿射子空间是线性空间的平移: 一个d维线性空间加上一个向量v

Proof: 设L是一个d维子空间, 则L是R^N的嵌入子流形(因为线性映射是常秩的, 且L可以写作某个线性映射的Ker, 用常秩水平集定理即可得出结论). 根据Problem 6.1的结论, 对a.e的$p \in R^N$,

$$f(x,a) = x + a \qquad M \to R^N$$

都和L横截相交. 如果$M+a\cap L$不等于空集, 那么$f^{-1}(L)$就是M的嵌入子流形, 且余维数$= N-d > k$. 但是M是k维的流形, 这说明$f^{-1}(L)$的维数是负的, 因此矛盾, 所以对a.e 的$a \in R^N$, $M + a \cap L = \emptyset$, 因此

$$M \cap L - a = \emptyset$$

而$L - a$就是一个仿射子空间.

$d = N - k$时不成立, 考虑映射$f(x,y) = x^3 - y$, 那么$df = \begin{pmatrix} 3x^2 & y \end{pmatrix}$, 从而在在$x^3 - y = 1$上, df总不是O矩阵, 从而1是f的正则点, 所以$f^{-1}(1)$是R^2的嵌入子流形, 又任何直线$y = kx + b$总会和$y = x^3 - 1$相交(因为三次方程总有实根), 所以不存在和M不相交的仿射子空间

Problem 6.3

M是m维光滑流形, N是n维光滑流形. S是N的嵌入子流形, 且光滑映射$f : M \to N$与S横截相交. 证明对任何$p \in W = f^{-1}(S)$, 都有

$$T_pW = (df_p)^{-1}T_{f(p)}S$$

Proof: S是N的正则子流形. 我们任取$p \in W$, 则存在$f(p)$的邻域U和$\varphi : U \to R^k$使得$S \cap U = \varphi^{-1}(0)$是$\varphi$的正则水

平集. 换言之φ是一个local defining map

然后说明 0是$\varphi \circ f$的正则值.

注意到如果$\varphi(f(p)) = 0$则$p \in f^{-1}(S) \cap f^{-1}(U) = W \cap f^{-1}(U)$, , 我们需要证明$d\varphi_{f(p)} \circ df_p T_p M$是$T_0 R^k$

首先根据横截相交得到

$$df_p T_p M + T_{f(p)} S = T_{f(p)} N = T_{f(p)} U$$

又$f(p) \in S \cap U$是φ的正则点, 所以$d\varphi_{f(p)} T_{f(p)} U = T_0 R^k$(正则点处的切映射是满的)

上式两边复合$d\varphi_{f(p)}$, 需要注意到$d\varphi_{f(p)} T_{f(p)} S = 0$(因为$\varphi$在S上是常数0), 因此

$$d\varphi_{f(p)} \circ df_p T_p M = T_0 R^k$$

这说明, 0是$\varphi \circ f$的正则值, $\varphi \circ f$在$f^{-1}(U)$上是 $f^{-1}(U) \cap W$的local defining map. 如此可以知道

$$T_p W = ker(d\varphi_{f(p)} \circ df_p)$$

又$d\varphi_{f(p)} \circ df_p((df_p)^{-1}(T_{f(p)} S)) = d\varphi_{f(p)}(T_{f(p)} S) = 0$, 因此$T_p W \supseteq (df_p)^{-1}(T_{f(p)} S)$

另一方面$T_{f(p)} S = ker d\varphi_{f(p)}$, 且$d\varphi_{f(p)}(df_p T_p W) = 0$, 因此$df_p T_p W \subseteq T_{f(p)} S$, 因此只能有

$$T_p W = (df_p)^{-1}(T_{f(p)} S)$$

第七章　Lie群

Problem 7.1

令$det: GL(n,R)\to R$是行列式函数, 求det的切映射:
(a)对任何$A\in M(n,R)$, 都有

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} det(I_n+tA)=tr(A)$$

Hint: 多项式在0处的一阶导数就是一次项系数, 这个多项式的一次项系数是多少?
(b)对$X\in GL(n,R)$, 根据$GL(n,R)$是R^{n^2}的开子集可知$T_XGL(n,R)\cong M(n,R)$. 证明

$$d(det_X)(B)=(detX)tr(X^{-1}B)$$

Proof:(a)一次项系数是$tr(A)$

(b)用速度向量计算切映射$d(det_X)(B)$,

$$d(det_X)(B)=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} der(X+tB)=\frac{d}{dt}(detX)(I_n+tX^{-1}B)=(detX)tr(X^{-1}B)$$

Problem 7.2

令

$$SL(n,R)=\left\{A\in GL(n,R)\middle|det(A)=1\right\}$$

证明$SL(n,R)$可以成为$GL(n,R)$的嵌入子流形, 求$SL(n,R)$的维数

Proof: 根据Problem 7.1, $d(det)_X$对任何$X\in GL(n,R)$都不是零映射, 又R在每一点处的切空间都是一维的, 所以det是个淹没, 所以det在$GL(n,R)$上是常秩映射, 用常秩水平集定理可得$SL(n,R)$是$GL(n,R)$的n^2-1维嵌入子流形.

Problem 7.3

$$f: GL(n,R)\to GL(n,R)\qquad f(X)=X^TX$$

(a)证明f是光滑映射, 且$df_X(A)=X^TA+A^TX$
(b)求f的rank

Proof:(a)f的每个分量都是关于X的每个分量的光滑函数, 因此f光滑.

$$df_X(A)=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(X+tA)=\frac{d}{dt}(X+tA)^T(X+tA)=A^TX+X^TA$$

(b)注意到$df_X(A)$是个对称阵. 且n阶实对称阵的全体的维数是 $\frac{n(n+1)}{2}$. 只需证 $h(A)=X^TA+A^TX$ 是 R^{n^2} 到全

体实对称矩阵的满射. 由于X可逆, 令 $A=(X^T)^{-1}W/2$, 从而 $A^TX=W/2$ 且

$$X^TA+A^TX=W$$

所以df_X是满射, 因此秩为 $\frac{n(n+1)}{2}$

Problem 7.4

求映射$A\to A^{-1}$的切映射和rank. 定义域为$GL(n,R)$

Hint: 爆算略难, 考虑$F(t)=(A+tX)^{-1}$, 则$F(t)(A+tX)=I_n$, 两边微分. 回忆对足够接近0的t, $A+tX$都是非异阵

Proof: 记$A\to A^{-1}$的映射为T. 那么

$$dT_A(X)=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}F(t)$$

又对$F(t)(A+tX)=I_n$两边求导可得

$$F'(0)A+F(0)X=O$$

从而

$$dT_A(X)=-A^{-1}XA^{-1}$$

显然是常秩的, 因为$T=T^{-1}$, 因此T是微分同胚. 从而rank为n^2. 或者通过$-A^{-1}(-AWA)A^{-1}=W$可得dT_A是满射.

Problem 7.5

求正交群$O(n)$的维数

Proof: 容易验证F是群作用, 其中A是Lie群$GL(n,R)$中的元素, M是光滑流形$GL(n,R)$中的元素:

$$F:(A,M)\to A^TMA$$

而轨道映射是常秩映射, 而O_n是$M=I_n$时的迷向子群, 从而根据常秩水平集定理, $O(n)$是$GL(n,R)$的嵌入子流形, 而根据Problem 7.3,$F:(A,I_n)\to A^TA$的rank为$\frac{n(n+1)}{2}$, 所以

$$dimO(n)=n^2-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

第八章　向量场

Problem 8.1

M是n维带边光滑流形, 那么存在M上的光滑向量场X, 使得X在∂M上是处处指向内的. 为其取负号可知存在光滑向量场X使得X在∂M上处处指向外

Proof:∂M可被可数个边界坐标卡覆盖, 记为$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, 定义$U_\alpha$上的向量场

$$X_\alpha(p) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}\Big|_p \qquad p \in U_i$$

则X_α在U_α上光滑, 且在$\partial M \cap U_\alpha$上指向内.

考虑从属于U_α的单位分解ψ_α, 那么可以构造出一个$\cup_\alpha U_\alpha$上的光滑向量场

$$X = \sum_\alpha \psi_\alpha(p) X_\alpha(p)$$

取一个边界定义函数f, 对任何$p \in \partial M$, 根据$X_\alpha(p)$指向内可得$X_\alpha f > 0$, 因此

$$X_p f > 0$$

因此在$p \in \partial M$处, X是指向内的. 又∂M是M的闭子集, 且X是∂M的一个邻域$\cup_\alpha U_\alpha$上的光滑向量场, 因此根据向量场的延拓定理, 存在M上的光滑向量场Y使得$Y\big|_{\partial M} = X$, 从而Y在∂M上是处处指向内的.

$-Y$是在∂M上处处指向外的光滑向量场.

第九章　积分曲线与流

第十章　向量丛

Problem 10.1

M是n维光滑流形. 如果存在光滑映射$f: TM \to M \times R^n$使得$f|_{T_pM}$是到$\{p\} \times R^n$的线性同构, 证明f是微分同胚

[Hint: 先说明f是双射. 根据全局秩定理, 只需说明f是常秩的,用坐标卡$(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$和$(U \times R^n, \varphi \times id)$直接验证]

Proof: 显然f是双射, 又

$$\varphi \times id \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x_1, .., x_n, v_1, .., v_n) = \varphi \times id \circ f \circ (\varphi^{-1}(x), \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x^i}) = (x, Tv) \qquad v = (v_1, .., v_n)$$

根据f在T_pM上是线性同构可得T是线性同构, 因此

$$J(\varphi \times id \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}) = \begin{cases} I_n & O \\ O & T \end{cases}$$

从而f是常秩的, 根据全局秩定理, f是微分同胚.

Problem 10.2

M是n维光滑流形, M上存在n个处处线性无关的光滑向量场, 当且仅当TM丛同构于$M \times R^n$

Hint: 任意向量场都能用这n个向量场的线性组合表示, 证明这个线性组合的系数光滑, 然后考虑这个向量到它的系数的对应.

Proof: $\Rightarrow$ 设$X_1, .., X_n$是处处线性无关的光滑向量场, 对任何$(p, v) \in TM$, 根据线性无关性和$dimM = n$, 存在唯一的一组实数a_i满足

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i(p)$$

定义

$$f(p, v) = \{p\} \times (a_1, .., a_n) \qquad TM \to M \times R^n$$

下面验证f是光滑的,

$$\varphi \times id \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x_1, .., x_n, v_1, .., v_n) = \varphi \times id \circ f(\varphi^{-1}x, \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x^i})$$

然后我们计算$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x^i}$在$X_i$下的系数, 首先设$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \frac{\partial}{\partial x^i}$, 设

$$\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i,j=1}^{n} a_i x_{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

则

$$v = X^T a$$

又X_i之间线性无关且光滑, 从而X^T是非异阵, 且在p的邻域上光滑, 因此$a = X^{-T}v$,

$$\varphi \times id \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x_1, .., x_n, v_1, .., v_n) = (x, X^{-T}(\varphi^{-1}(x))v)$$

光滑. 根据Problem 10.1, f是丛同构.

$\Leftarrow$ 记e_i是R^n中的标准正交向量, 定义

$$X_i(p) = f^{-1}(\{p\} \times e_i)$$

根据f^{-1}光滑可得X_i都是光滑的, 又f是丛同构, 所以$X_i(p)$线性无关, 对任何$p \in M$成立, 从而X_i就是处处线性无关的光滑向量场

第十一章　张量积

第十二章 微分形式

Problem 12.1

f是R^n上的光滑函数, $\omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, $X = \nabla f$, 求$\mathcal{L}_X\omega$

Proof: 用cartan神奇公式,

$$\mathcal{L}_X\omega = i_X d\omega + d(i_X\omega) = d(i_X\omega)$$

其中$i_X\omega$是R^n上的(n-1)-形式, 因此考虑它在$dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n (1 \leq j \leq n$是光滑n-1形式的基底)下的系数(记为$\omega_j$):

$$\omega_j = i_X\omega(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \widehat{\frac{\partial}{\partial x^j}}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n(\frac{\partial}{\partial x_i}, ..., \widehat{\frac{\partial}{\partial x^j}}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n})$$

根据余切向量楔积的运算法则, 我们知道只要上式的每个求和项缺失的不是$\frac{\partial}{\partial x^i}$, 那么就为0, i.e 只有i=j时才不等于0, 结合内乘的性质就能知道

$$\omega_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n(\frac{\partial}{\partial x_j}, ..., \widehat{\frac{\partial}{\partial x^j}}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n})$$

调换j-1次

$$= (-1)^{j-1} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n})$$

再次根据楔积的运算法则, 这给出了

$$\omega_j = (-1)^{j-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

因此

$$i_X\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n$$

外微分一次就能得到$\mathcal{L}_X\omega$:

$$\mathcal{L}_X\omega = d(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n)$$

因为当$i \neq j$时, 必定有$dx^i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n = 0$, 所以

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} dx^j \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n$$

调换j-1次给出了

$$\mathcal{L}_X\omega = \triangle f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

Problem 12.2

$X=\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$是$R^n$上的向量场,

$$\omega=\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}x_idx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx_n$$

计算$\mathcal{L}_X\omega$

Proof:

$$d\omega=ndx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

继续使用cartan神奇公式

$$\mathcal{L}_X\omega=i_X(ndx^1\wedge\cdots\wedge dx^n)+d(i_X\omega)$$

借助上一问的结论(把f看成$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2$)我们知道

$$i_X(ndx^1\wedge\cdots\wedge dx^n)=n\sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}x_jdx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^j}\wedge\cdots\wedge dx^n$$

然后计算

$$i_Xx_idx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx_n(\frac{\partial}{\partial x^1},...,\widehat{\frac{\partial}{\partial x^k}}...,\widehat{\frac{\partial}{\partial x^j}},...,\frac{\partial}{\partial x^n})\qquad k<j$$

$$=x_i\sum_{m=1}^n x_mdx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx_n(\frac{\partial}{\partial x^m},\frac{\partial}{\partial x^1},...,\widehat{\frac{\partial}{\partial x^k}}...,\widehat{\frac{\partial}{\partial x^j}},...,\frac{\partial}{\partial x^n})\qquad k<j$$

要使上式中的求和不为0, 则k,j 必须有一个是i, m必须等于k,j里面的另一个(也就是不为i的那个), 否则自变量将含有两个相同的分量. 若k=i, 则m=j, 此时

$$=x_ix_j(-1)^{j-2}\qquad m>i$$

如果$j=i$, 则$m=k$, 此时$=x_ix_k(-1)^{k-1}$且$m<i$, 从而

$$i_X\omega=\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}x_i\sum_{k<j=i}x_k(-1)^{k-1}dx^1\cdots\widehat{dx^k}\cdots\wedge\widehat{dx^i}\cdots\wedge dx^n+\sum_{i=k<j}x_j(-1)^{j-2}dx^1\cdots\wedge\widehat{dx^i}\cdots\widehat{dx^j}\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$d(i_X\omega)=\sum_{i=1}^n\sum_{k<i}(-1)^{i-1+k-1}x_idx^k\wedge dx^1\cdots\widehat{dx^k}\cdots\wedge\widehat{dx^i}\cdots\wedge dx^n+(-1)^{i-1+k-1}x_kdx^i\wedge dx^1\cdots\widehat{dx^k}\cdots\wedge\widehat{dx^i}\cdots\wedge dx^n$$
$$+\sum_{j>i}(-1)^{i-1+j-2}x_idx^j\wedge dx^1\cdots\widehat{dx^i}\cdots\wedge\widehat{dx^j}\cdots\wedge dx^n+(-1)^{i-1+j-2}x_jdx^i\wedge dx^1\cdots\widehat{dx^i}\cdots\wedge\widehat{dx^j}\cdots\wedge dx^n$$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{k<i}(-1)^{i-1}x_idx^1\cdots\wedge\widehat{dx^i}\cdots\wedge dx^n+(-1)^kx_kdx^1\cdots\widehat{dx^k}\wedge\cdots\wedge dx^n$$
$$+\sum_{j>i}(-1)^{i-1}x_idx^1\cdots\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n+(-1)^{j-2}x_jdx^1\wedge\widehat{dx^j}\cdots\wedge dx^n$$

$$=\sum_{i=1}^n(n-1)(-1)^{i-1}x_idx^1\cdots\wedge\widehat{dx^i}\cdots\wedge dx^n+\sum_{i=1}^n[\sum_{k=1}^n(-1)^kx_kdx^1\cdots\widehat{dx^k}\wedge\cdots\wedge dx^n]-\sum_{i=1}^n(-1)^ix_idx^1\cdots\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=\sum_{i=1}^3 n(-1)^{i-1}x_idx^1\cdots\wedge\widehat{dx^i}\cdots\wedge dx^n+n\sum_{i=1}^n(-1)^ix_idx^1\cdots\wedge\widehat{dx^i}\cdots\wedge dx^n=0$$

所以

$$\mathcal{L}_X\omega = n\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}x_j dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^j}\wedge\cdots\wedge dx^n = n\omega$$

第十三章　流形的定向

Problem 13.1

证明Lie群可定向

Proof:设G是n维Lie群, 则根据G的Lie代数维数也是n可得G上存在n个处处线性无关的光滑左不变向量场, 因此这些向量场确定的逐点定向就是连续的, 从而Lie群可定向

Problem 13.2

F是光滑流形之间保持定向的局部微分同胚, 当且仅当对任何$p \in M$, 存在一组T_pM的有序基, 使得dF_p把它映射为$T_{F(p)}N$的有序基. i.e dF把任何一组有序基映射为有序基, 当且仅当dF把某一组有序基映射为有序基

Proof:$\Rightarrow$ 显然.

$\Leftarrow$ 设dF_p把有序基$(e_1, .., e_n)$映射为$T_{F(p)}N$中的有序基. 我们考虑使用Proposition 13.9的(b). 任取M,N的定向坐标卡$(U, \varphi), (V, \psi)$, 只需证

$$detJ(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) > 0$$

因为$(\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, .., \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p)$是$T_pM$中保持定向的有序基,$(\frac{\partial}{\partial y^1}\big|_{F(p)}, .., \frac{\partial}{\partial y^n}\big|_p)$是$T_{F(p)}N$中保持定向的有序基 . 那么根据线性空间保持定向的定义, 设$e_j = W\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p$, 那么$detW > 0$.

根据题设, $J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})W$把$(e_1, .., e_n)$映射到一组保持定向的有序基$(s_1, ..., s_n)$, 而$(\frac{\partial}{\partial y^1}\big|_{F(p)}, .., \frac{\partial}{\partial y^n}\big|_p)$是$T_{F(p)}N$中保持定向的有序基, 则由二者的转移矩阵为$J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})W$, 可得

$$detJ(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})detW > 0$$

因此

$$detJ(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) > 0$$

Problem 13.3

$F : M \to N$是光滑流形之间的微分同胚, 且N, M是可定向的. 如果F是保持定向的, 那么对N的一组定向坐标卡(U, φ), $(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$是M上的一个定向坐标卡

Proof: 注意到对M上的任何一个坐标卡(V, ψ), $\varphi \circ F \circ \psi^{-1}$光滑(因为F光滑), 且$\psi \circ F^{-1} \circ \varphi^{-1}$光滑(因为$F^{-1}$光滑), 因此$(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$的确是M上的一个光滑坐标卡. 下面只需证它是保持定向的. 这显然, 因为任取M的定向坐标卡(V, ψ), 则这两个坐标卡之间基底的转移矩阵为

$$detJ(\varphi \circ F \circ \psi^{-1})$$

根据F保持定向可知上式大于0, 因此$(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$在$T_pM$中对应的基底是保持定向的.

Problem 13.4

M是可定向光滑流形, (U,φ)是M的坐标卡且U连通, 证明(U,φ)要么保持定向, 要么反转定向

Proof: 考虑M上保持定向的光滑n-形式ω, 对任何$p\in U$, 我们知道存在光滑函数$f\in C^\infty(U)$使得

$$\omega_p = f(p)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

(U,φ)在p处诱导的基底为$\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p,..,\frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p$, 因此

$$f(p)=\omega_p(\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p,..,\frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p)$$

根据ω非0可知$f(p)\neq 0$, 又U连通, 所以$f(p)$要么恒正要么恒负, 因此$\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p,..,\frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p$要么对所有$p\in U$都是$T_pM$中保持定向的基底, 要么对所有$p\in U$都是反转定向的基底.

Problem 13.5

证明可定向性是微分同胚下的不变量, i.e. 若M,N是光滑流形, 且M是可定向的, F是$M\to N$是微分同胚, 那么N也是可定向的

Proof: 取M的一组定向坐标覆盖$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, 则容易验证

$$(f(U_\alpha),\varphi_\alpha\circ f^{-1})$$

是N的定向坐标覆盖.

Problem 13.6

M是光滑流形, 证明若$M\times R$可定向, 则M可定向. 继而通过令$M\times R^n=M\times R^{n-1}\times R$证明: 如果$M\times R^k$可定向, 则M可定向

Proof：用M的坐标卡$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$和R上的自然光滑结构诱导出$M\times R$上的坐标覆盖$(U_\alpha\times R,\varphi_\alpha\times id)$, 根据可定向的充要条件, 存在和这一组坐标覆盖相容的坐标覆盖(V_β,ψ_β)使得这一组坐标卡的转移映射的行列式均是正的. 又注意到

$$(\varphi_\alpha\times id)\circ\psi_\beta^{-1}=(\varphi_\alpha\times id)\circ\psi_\gamma^{-1}\circ(\psi_\gamma\circ\psi_\beta^{-1})$$

两边取Jacobian行列式, 根据$detJ(\psi_\gamma\circ\psi_\beta^{-1})>0$可以给出:

$detJ((\varphi_\alpha\times id)\circ\psi_\beta^{-1}$和$detJ(\varphi_\alpha\times id)\circ\psi_\gamma^{-1})$同号, 对任何定向坐标卡$(V_\beta,\psi_\beta)$和自然坐标卡$(U_\alpha\times R,\varphi_\alpha\times id)$

因此, 我们定义新的映射

$$\tilde{\varphi_a}=\begin{cases}\varphi_a & detJ((\varphi_\alpha\times id)\circ\psi_\beta^{-1}>0\\ (-\varphi_a^1,\varphi_a^2....,\varphi_a^m) & detJ((\varphi_\alpha\times id)\circ\psi_\beta^{-1}<0\end{cases}$$

显然这种定义不改变微分同胚性质, 所以$\{(U_\alpha,\tilde{\varphi_\alpha})\}$还是一个M的光滑坐标覆盖, 且

$$(\tilde{\varphi_\alpha}\times id)\circ(\tilde{\varphi_\omega}\times id)^{-1}=(\tilde{\varphi_\alpha}\times id)\circ\psi_\beta^{-1}\circ\psi_\beta\circ(\tilde{\varphi_\omega}\times id)^{-1}$$

两边取Jacobian行列式, 根据$\tilde{\varphi_\alpha}$的取法, 右边大于0, 得到左边

$$detJ(\tilde{\varphi_\alpha}\circ\tilde{\varphi_\omega}\times id)>0$$

因此根据分块对角阵的行列式计算公式, 可以得出$detJ(\tilde{\varphi_\alpha}\circ\tilde{\varphi_\omega})>0$, 对任何$\omega,\alpha$成立, 因此$(U_\alpha,\tilde{\varphi_\alpha})$是M的一组

定向坐标覆盖, M可定向.

现在设$N=R^n$, 那么$M\times R^n$可以定向, 又在自然坐标卡下, $M\times R^n$微分同胚于$(M\times R^{n-1})\times R$. 因此$M\times R^{n-1}$可定向, 继续进行下去, 得到$M\times R$可定向, 然后就可得出$M$可定向

Problem 13.7

M是光滑流形, 且M可定向. 证明M的任一开子集可定向.

Proof: 取M的一组定向坐标覆盖$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, 设U是M的开子集, 那么$(U_\alpha\cap U,\varphi_\alpha)$是U的定向坐标覆盖

Problem 13.8

证明$M\times N$可定向时, M,N都可定向.
Hint:为了证明M可定向, 取N中的坐标卡(U,φ)满足$\varphi(U)=R^n$, 根据第一章的习题这是可以做到的, 然后考察$M\times U$怎么转化为Problem 13.6的情形. 至于N, 可以考虑$N\times M$和$M\times N$之间的微分同胚

Proof:取一个N的坐标卡(V,ψ)使得$\psi(V)$是球心位于原点的单位球体(这很容易做到), 然后考虑$f(p,q)=(p,\psi(q))$和$g(x)=\frac{x}{\sqrt{1-\|x\|^2}},x\in B(0,1)$. 那么$M\times V$在映射$(id\times g)\circ f$下微分同胚于$M\times R^n$, 因此$M\times R^n$可定向, 从而M可定向

用自然坐标卡容易验证坐标翻转:$(p,q)\to(q,p)$是$M\times N\to N\times M$的微分同胚: 取(U,φ)是M的坐标卡, (V,ψ)是N的坐标卡, 那么坐标翻转在这坐标卡$(U\times V,\varphi\times\psi),(V\times U,\psi\times\varphi)$下的表示为

$$(\psi,\varphi)\circ(\psi^{-1},\varphi^{-1})=id$$

所以坐标翻转是微分同胚

因此$N\times M$也是可定向的, 前面证明了可定向直积流形的第一个分量可以定向, 因此N可定向, 证毕

Problem 13.9

M,N是光滑流形, 证明$M\times N$可定向当且仅当M,N都可定向

Proof: 只需证$\Leftarrow$, 取M的一个定向坐标覆盖$\{U_\alpha,\varphi_\alpha\}$和N的一个定向坐标覆盖$\{V_\omega,\psi_\omega\}$, 那么$\{U_\alpha\times V_\omega,\varphi_\alpha\times\psi_\omega\}$是$M\times N$上相容的坐标卡, 且定义了$M\times N$上的光滑结构. 下面证明这组坐标卡是定向的坐标覆盖,

$$J(\varphi_\alpha\times\psi_\omega\circ(\varphi_\beta\times\psi_\gamma)^{-1})=\begin{pmatrix}J\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1} & O\\ O & J\psi_\omega\circ\psi_\gamma^{-1}\end{pmatrix}$$

两边求行列式可得

$$det((\varphi_\alpha\times\psi_\omega\circ(\varphi_\beta\times\psi_\gamma)^{-1}))=detJ\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}\cdot detJ\psi_\omega\circ\psi_\gamma^{-1}>0$$

因此$M\times N$是可定向的.

Problem 13.10

M是光滑流形, 证明无论M是否可以定向, TM,T^*M都是可定向的

Proof: 根据Definition 3.11后面的论证,

$$\tilde{\psi}\circ\tilde{\varphi}^{-1}(x_1,..,x_n,v_1,..,v_n)=(\psi\circ\varphi^{-1}(x),J(\psi\circ\varphi^{-1})v)$$

因此

$$J(\tilde{\psi}\circ\tilde{\varphi}^{-1})=\begin{pmatrix}J(\psi\circ\varphi^{-1}) & O\\ O & (\psi\circ\varphi^{-1})\end{pmatrix}$$

其行列式是$\{detJ(\psi\circ\varphi^{-1})\}^2>0$.

T^*M的情形是同理的, 转移映射的jacobian矩阵也是分块对角阵, 且两个分块是相同的

第十四章　流形上的积分

Problem 14.1

考虑R^2上的光滑2-形式

$$\omega = xdy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + zdx \wedge dy$$

计算

$$\int_{S^2} \iota_{S^2}^* \omega$$

Proof:

$$\int_{S^2} \iota_{S^2}^* \omega = \int_{\overline{B(0,1)}} d\omega = \int_{\overline{B(0,1)}} dx \wedge dy \wedge dz + 2ydx \wedge dy \wedge dz + dx \wedge dy \wedge dz$$

$$= 2\int_{\overline{B(0,1)}} (1+y)dxdydz = 2\int_{\overline{B(0,1)}} dxdydz = \frac{8}{3}\pi$$

Problem 14.2

M是n维定向无边流形, α, β分别是s-形式和(n-s)-形式, X是M上紧支的光滑向量场, 证明

$$\int_M (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta = -\int_M \alpha \wedge (\mathcal{L}_X \beta)$$

Proof:

$$\int_M (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \int_M \alpha \wedge (\mathcal{L}_X \beta) = \int_M \mathcal{L}_X (\alpha \wedge \beta)$$

用cartan神奇公式

$$= \int_M i_X(d(\alpha \wedge \beta)) + \int_M d(i_X(\alpha \wedge \beta))$$

$d(\alpha \wedge \beta) = 0$因为$\alpha \wedge \beta$已经是最高次形式. 从而对第二个积分用stokes定理可得

$$\int_M (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \int_M \alpha \wedge (\mathcal{L}_X \beta) = \int_\emptyset i_X(\alpha \wedge \beta) = 0$$

第十五章 Riemann流形

Problem 15.1

(M,g)是n维Riemann流形, X是M上的光滑向量场, 证明在局部坐标卡(U,φ)下,

$$div(X)=\frac{1}{\sqrt{detg}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}(X_i\sqrt{detg_{ij}})$$

Proof:根据定义, 只需计算$d(i_XdV_g)$, 注意到i_XdV_g是n-1形式, 因此我们只需考虑其在$dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^j}\wedge\cdots\wedge dx^n$下的系数$\omega_j$:

$$\omega_j=(i_XdV_g)(\frac{\partial}{\partial x^1},...,\frac{\partial}{\partial x^{j-1}},\frac{\partial}{\partial x^{j+1}},...,\frac{\partial}{\partial x^n})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{detg}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n(X_i(p)\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^1},...,\frac{\partial}{\partial x^{j-1}},\frac{\partial}{\partial x^{j+1}},...,\frac{\partial}{\partial x^n})$$

显然, 只有i=j时才不是0, 所以

$$=\sqrt{detg}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n(X_j(p)\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^1},...,\frac{\partial}{\partial x^{j-1}},\frac{\partial}{\partial x^{j+1}},...,\frac{\partial}{\partial x^n})=(-1)^{j-1}X_i(p)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n(\frac{\partial}{\partial x^1},...,\frac{\partial}{\partial x^n})$$

$$=(-1)^{j-1}\sqrt{detg}X_i$$

$$i_XdV_g=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sqrt{detg}X_jdx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^j}\wedge\cdots\wedge dx^n$$

根据外微分运算的局部表示:

$$d(i_XdV_g)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}(X_j\sqrt{detg})dx^i\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^j}\wedge\cdots\wedge dx^n$$

只有$i=j$时才不为0, 因此

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\partial}{\partial x^j}(X_j\sqrt{detg})dx^j\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^j}\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^j}(X_j\sqrt{detg})dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=\frac{1}{\sqrt{detg}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}(X_i\sqrt{detg_{ij}})dV_g$$

因此

$$div(X)=\frac{1}{\sqrt{detg}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}(X_i\sqrt{detg_{ij}})$$

Problem 15.2

(M,g)是n维Riemann流形, X是M上的光滑向量场, $f\in C^\infty(M)$, 证明

$$<gradf,X>_g=\sum_{k=1}^n X_k\frac{\partial f}{\partial x^k}\qquad div(fX)=fdivX+<gradf,X>_g$$

Proof:

$$div(fX)=\frac{1}{\sqrt{detg}}\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x^i}(fX_i\sqrt{detg_{ij}})$$

根据$\frac{\partial}{\partial x^i}$的运算法则(莱布尼茨法则), 可得

$$div(fX)=f\frac{1}{\sqrt{detg}}\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x^i}(X_i\sqrt{detg_{ij}})+\frac{1}{\sqrt{detg}}\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x^i}f\times X_i\sqrt{detg_{ij}}$$

$$=fdivX+\sum_{i=1}^n X_i\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

又

$$<gradf,X>_g=\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(gradf)_iX_j=\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\sum_{k=1}^n g^{ki}\frac{\partial f}{\partial x^k})X_j$$

$$=\sum_{k,j=1}^n X_j\frac{\partial f}{\partial x^k}\sum_{i=1}^n g_{ij}g^{ki}=\sum_{k,j=1}^n X_j\frac{\partial f}{\partial x^k}\delta_{kj}=\sum_{k=1}^n X_k\frac{\partial f}{\partial x^k}$$

证毕

Problem 15.3

(M,g)是n维Riemann流形, X是M上的完备向量场, Ω是M的开子集, ϕ_t是X生成的流, 对任何$\rho\in C^\infty(R\times M)$, 证明

$$\frac{d}{dt}\int_{\phi_t(\Omega)}\rho_t dV_g=\int_{\phi_t(\Omega)}\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho_tX)\,dV_g$$

Proof:根据单位分解我们不妨设$supp\rho_t$可以被单一坐标卡(U,φ)覆盖. 用Proposition 14.7 把ϕ_t从积分区域放进被积函数:

$$\int_{\phi_t(\Omega)}\rho_t dV_g=\int_\Omega\phi_t^*(\rho_t dV_g)=\int_\Omega\rho_t\circ\phi_t\phi_t^*dV_g$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\phi_t(\Omega)}\rho_t dV_g=\frac{d}{dt}\int_\Omega\rho_t\circ\phi_t\sqrt{det(g_{ij}\circ\phi_t)}det(D\phi_t)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=\int_\Omega\frac{d}{dt}\rho_t\circ\phi_t\times\sqrt{det(g_{ij}\circ\phi_t)}det(D\phi_t)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n+\int_\Omega\rho_t\circ\phi_t\frac{d}{dt}\sqrt{det(g_{ij}\circ\phi_t)}det(D\phi_t)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=\int_\Omega\phi_t\circ\phi_t\cdot\phi_t^*(dV_g)+\int_\Omega\rho_t\circ\phi_t\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}\phi_t^*dV_g$$

$$=\int_\Omega\frac{\partial\rho_t}{\partial t}(\phi_t)+\sum_{i=1}^n\frac{\partial\rho_t}{\partial x^i}\frac{d\phi_t^i}{dt}\phi_t^*(dV_g)+\int_\Omega\rho_t\circ\phi_t\phi_{t_0}^*\mathcal{L}_XdV_g$$

$$=\int_\Omega\frac{\partial\rho_t}{\partial t}(\phi_t)+\sum_{i=1}^n\frac{\partial\rho_t}{\partial x^i}X_i(\phi_t)\phi_t^*(dV_g)+\int_\Omega\rho_t\circ\phi_t\phi_{t_0}^*(i_X(ddV_g)+d(i_XdV_g))$$

$$=\int_\Omega\frac{\partial\rho_t}{\partial t}(\phi_t)+<grad\rho_t\circ\phi_t,X\circ\phi_t>_g\phi_t^*(dV_g)+\int_\Omega\rho_t\circ\phi_t\phi_{t_0}^*d(i_XdV_g)$$

$$= \int_{\Omega} \frac{\partial \rho_t}{\partial t}(\phi_t) + < grad\rho_t \circ \phi_t, X \circ \phi_t >_g \phi_t^*(dV_g) + \int_{\Omega} \rho_t \circ \phi_t \phi_{t_0}^* divX dV_g$$

$$= \int_{\Omega} \frac{\partial \rho_t}{\partial t}(\phi_t) + < grad\rho_t \circ \phi_t, X \circ \phi_t >_g \phi_t^*(dV_g) + \int_{\Omega} \rho_t \circ \phi_t (divX) \circ \phi_t \phi_{t_0}^* dV_g$$

$$= \int_{\Omega} \frac{\partial \rho_t}{\partial t}(\phi_t) + div(\rho_t X) \circ \phi_t \phi_{t_0}^* dV_g = \int_{\phi_t(\Omega)} \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho_t X)\, dV_g$$

Problem 15.4

(M,g)是n维Riemann流形, X是M上的光滑向量场, N是沿∂M的单位外法向量场. $f \in C^\infty(M)$, $\tilde{g}$为∂M上由g诱导的Riemann度量. 证明分部积分公式

$$\int_M < gradf, X >_g dV_g = \int_{\partial M} f < X, N >_g dV_{\tilde{g}} - \int_M f divX\, dV_g$$

Proof:

$$\int_M < gradf, X >_g dV_g + \int_M f divX\, dV_g = \int_M div(fX) dV_g$$

用Gauss定理给出了

$$= \int_{\partial M} < fX, N >_g \; dV_{\tilde{g}} = \int_{\partial M} f < X, N >_g \; dV_{\tilde{g}}$$

Problem 15.5

(M,g)是n维Riemann流形, $u \in C^\infty(M)$, 定义

$$\triangle u = div(gradu)$$

证明$\triangle u$在局部坐标卡(U,φ)下有表示

$$\triangle u = \frac{1}{\sqrt{detg}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}(\sum_{j=1}^n g^{ij}\sqrt{detg}\frac{\partial u}{\partial x^j})$$

Remark:应该注意的是, 有的文献将上述定义的相反数作为laplace算子的定义, 这里我们采取和欧式空间一致的定义方法, 不加负号

Problem 15.6

考虑$M(4,R)$, 将其和R^{16}视为等同, 考虑如下拓扑空间

$$M = \{A \in M(4,R) \Big| rankA = 1, A^T = A, a_{ii} \geq 0, 1 \leq i \leq 4, \sum_{1 \leq i,j \leq 4} a_{ij}^2 = 1\}$$

记x是R^4中的列向量, 定义

$$\phi(x) = xx^T \qquad R^4 \to M(4,R)$$

- 证明$\phi : R^4 - \{0\} \to M(4,R)$是浸入
- 证明M是$M(4,R)$的嵌入子流形
- 计算$\frac{\int_M dV_g}{\int_{S^3} dV_h}$, 其中g,h分别是$R^{16}$, R^4中的欧式度量在M和S^3上诱导出的Riemann度量

Proof:(a)首先计算$d\phi_x$, 任取$x \in R^4 - \{0\}$, $a \in R^4$, 那么当t足够小时, $x + ta \in R^4 - \{0\}$, 从而

$$d\phi_x(a) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (x+ta)(x+ta)^T = ax^T + xa^T$$

如果$d\phi_x(a)=0$, 那么
$$ax^T=-xa^T$$
记$A=ax^T$, 则A是反对称阵, 因此主对角线为0, 而主对角线的元素分别是$a_1x_1,..,a_4x_4$, 而$x_i\neq 0$, 因此$a_i=0,1\leq i\leq 4$, 从而$a=0$, 因此$d\phi_x$是单射. 因此ϕ是个浸入

(b)设$A\in M$, 根据矩阵的合同标准型和rankA=1, 存在非异阵C使得
$$A=C\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}C^T=C\begin{pmatrix}c^T&&&\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=cc^T$$
其中c是C的第一列. 再根据$\sum_{i,j}a_{ij}^2=1$可得$(\sum_{i=1}^4 c_i^2)^2=1$, 因此$c\in S^3$

又显然$\phi(S^3)\subseteq M$, 这说明
$$\phi\Big|_{S^3}\to M$$
是满射

参考文献

[1] James Munkres. Topology. 2014

[2] John M. Lee. Introduction to Smooth Manifolds.