It’s MyniGold!!!!!

2026 年 2 月 9 日

读前必看

版本说明

该版本为稳定版, 相比尝鲜版, 增加了一些内容: 第十章增加了丛同态的内容. 增加了Riemann流形的内容. 同时更改了一些错误, 增加了一些习题.

致谢

本讲义除了参考文献中列出的资料外, 还参考了王作勤老师在科大讲授微分流形的资料http://staff.ustc.edu.cn/wangzuoq/Courses/23F-Manifolds/index.html和科大微分流形的考试题, 王文龙老师在南开讲授微分流形的作业题和期末考试题. 在此对各位老师及相关人士致以衷心的感谢, 并且本人承诺这些引用仅用于学习交流, 完全没有任何商业用途.

前言

为什么要写

该讲义[1]作为督促本人学习“微分流形”课程的副产品, 编写的动机完全来自于本人的一拍脑袋决策. 属于是自娱自乐之作, 不属于严肃的教学用书, 也无任何主观的学习建议, 主要面向乐子人观看.

首先这门课内容很多, 单说拓扑流形都能牵扯出一大批比较冷门的性质. 所以必然涉及到很多的定义, 定理和性质, 编写这份讲义, 也是从笔者的视角梳理这些繁杂的结论, 旨在突出学习的主线. 为什么要这样做呢, 因为修这门课之前笔者用GTM218自学过微分流形, 但是GTM218每一章动辄几十个结论是在让人眼花缭乱, 一章读下来很难弄清楚哪些结论是这门课中“细枝末节”的内容. 所以借此修课的机会, 重新整理一下这门课的脉络, 突出主次.

其次这门课大定理也很多, 而且相当一部分定理的证明非常之逆天. 只靠阅读或者听老师讲解很难把握其中的精髓. 自己动(敲)手(键)写(盘)能够“实操”一遍, 看看哪些地方是真正困难的点. 虽然敲完可能接着就忘了, 但敲没敲过是不一样的.

最后一个动机是希望能给自己的学习经历做一个记录, 我不希望学完之后只留下一个分数和日常做过的作业, 至少这份讲义是能比考试成绩和平时作业更有力的说明我学过这门课.

怎么写的

接下来说说本书的架构, 其实这总体上是基于GTM218前16章抄写的,并参考了[5] 不过在内容方面我做了一些取舍, 保留了大部分的重要结论, 然后把书中的某些(其实不少)Exercise和Problem都作为讲义中的结论呈现. 写证明的时候也是得到了相当程度的锻炼. 另一方面, 作为分析人我没有保留太多关于代数和拓扑的内容, 比如

[1]或称为学习笔记更贴切

在GTM218中占据较大篇幅的覆盖空间, 且比较忽视例子的建设, 比如“单射浸入但不是嵌入”的例子, 课本和老师上课都讲过, 但我没在这份讲义上记录, 因为我懒.

当然并非所有内容都是抄的, 一部分结论用不同于课本的方法证明的, 还有一些内容融合了我本人的理解. 比如GTM218对流形定向的定义是“连续的逐点定向”, 但有些课本, 比如[4]给出的定义是定向坐标覆盖的存在性. 我在对应章节用一个定理说明这两种定义的等价性.

这份讲义的不足之处还是有很多的, 除了上文提及的缺少例子之外, 还包括:

- 数量不充分的习题. 这些习题也是从互联网各处选取的, 比如GTM218的课后题, [5]的作业题, 和本学期任课老师布置的作业和期末复习题. 由于时间问题我没有做很多, 因为我希望把我做过的习题都配置一份全套解答.
- 不少的笔误. 由于制作仓促且缺乏审核人员, 有笔误应该是情理之中的.
- 可能存在的错误. 毕竟笔者并非万能, 一些地方存在错误也是可以理解的, 但基本上是无问题的.
- 某些章节的组织. 比如积分曲线一章, 我对自己组织的行文并不满意, 等以后有时间应该会修改

为什么叫 Mynigold

本讲义的命名背后也是一件有意思的事情, 当我把想写讲义的事情告诉一位友人时, 得到的答复是“Differential Manifold Done Right”, 相信很多人熟悉这个名字, 因为有一本讲解线性代数的书叫做“Linear Algebra Done Right”, 不过我着实不敢这样命名, 所以选择了一个相对娱乐化的名字, 灵感来自于“It's MyGo!!!!![2]”, 把Manifold和MyGo的字母组合了一下.

联系方式与勘误

无论是正文还是习题, 稳定版都接受勘误和建议, 来信时只需明确指出错误出现的地点, 但并不需要提出解决方案. 请联系:

Farewell2006@qq.com

希望措辞是礼貌友善的, 如果你在阅读的过程中觉得像持了石一样难受, 请立即关闭并删除该文件, 同时向专业医生进行咨询, 本人无任何责任. 不要为了宣泄情绪发一封邮件来骂我.

未来的打算与更新

笔者有忙碌的个人生活, 但本着做了就要负责到底的原则, 稳定版也会不定期的进行更新, 自然包括修正各种意想不到的错误, 选择更多有意思的习题, 当然会配套解答. 还可能更新关于Riemann几何的内容(画饼), 有兴趣可关注本人的个人主页:

farewell2006.github.io

[2]一部广为人知的电视动画作品. 什么? 你不知道?

目录

第一章 微分流形

1.1 拓扑流形

1.1.1 局部欧式空间

对一个拓扑空间X, 称X是n维局部欧式空间, 如果对任何$x \in X$, 存在X的邻域U和一个U到R^n中的开集V的同胚映射φ, 我们称(U, V, φ)是**x附近的**一个**坐标卡**, U叫做**坐标邻域**, φ叫做**坐标函数**或**坐标映射**. 根据定义有$\varphi(U) = V$, 有时候也略写为(U, φ). 需要注意的是, 当提及局部欧式空间, 我们总是默认它的维数是固定的, 也就是说不能存在两个不同的坐标卡$(U, \varphi), (V, \psi)$使得φ和ψ分别把U,V映射到R^n和R^m中的开集

这个定义是在说, X中每个足够小的"局部"都"长得像"欧式空间的某个开集, 严格的说, 任取$x \in X$, 根据定义存在x的邻域U和同胚φ, $\varphi(U)$是R^n中的开集. 而且, 同胚限制在开子集还是同胚, 所以每个U中的开子集V都和R^n中的开集$\varphi(V)$同胚

通过这个同胚, 我们可以从R^n的性质中推导出X的性质:

Proposition 1.1

n维局部欧式空间是局部紧[a]的

[a] 每个点都存在一个邻域U, U含于某个紧子集中

通过取开球里的较小闭球能证明R^n局部紧, 然后利用同胚保持紧性(其实是连续映射保持紧性), 就能给出证明

Proposition 1.2

n维局部欧式空间是局部道路连通的

n维欧式空间是局部道路连通的, 因此这个局部被一个同胚逆映射回去还是局部道路连通.

Proposition 1.3

局部道路连通的连通空间X, 一定是道路连通的

这个性质的证明也比较容易. 对任何$y \in X$.y都有有道路连通的邻域. 因此固定一个x, 考虑集合

$$A = \left\{ y \in X \middle| x, y\text{可以被某条道路连接} \right\}$$

那么任取$y \in A$, 都有一个邻域U使得U中任意点z都能和y道路连接, 把这个道路和x到y的道路连接起来就得到x和z的道路, 因此$z \in A$, 从而$U \subseteq A$. 这说明A是开集

A^c是不能和x之间有道路连接的点的全体, 又X局部道路连通, 任取$y \in A^c$, y有道路连通的邻域U, 如果存在$z \in U$使得$z \notin A^c$, 则z能和x道路连接. 而$z \in U$所以也能和y道路连接, 这两条道路连接起来就得到x到y的道路, 因此$y \in A$, 这与$y \in A^c$矛盾. 因此$U \subseteq A^c$, 从而A^c也是开集. 根据$X = A \cup A^c$可知, 如果A, A^c都非空, 则和X的连通

性矛盾. 因此只能有一个非空. 又$x \in A$, 所以A非空, 因此$X = A \cup \emptyset = A$, 这说明X中所有点都能和x道路连接. 根据道路连接的传递性, X是道路连通的

Proposition 1.4

局部欧式空间是正则的

Proof: 正则性衡量的是点和闭集的分离性质. 根据[1]的Lemma 31.1, 只需要验证对任何开集U和任何的$x \in U$, 存在x的邻域V使得$\overline{V} \subseteq U$. 取x附近的坐标卡(K, φ), 从而$U \cap K$还是开集, 所以存在r使得$B(\varphi(x), r) \subseteq \varphi(K \cap U)$, 考虑开集

$$V = \varphi^{-1}(B(\varphi(x), r/2))$$

根据φ是同胚可得

$$\overline{V} = \overline{\varphi^{-1}(B(\varphi(x), r/2))} = \varphi^{-1}(\overline{B(\varphi(x), r/2)}) \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(K \cap U))$$

从而$\overline{V} \subseteq U$, 所以这个V就是满足条件的x的邻域.

1.1.2 拓扑流形

对于一个n维局部欧式空间X, 为其添加两个额外条件:

- T2性质: 任取不同的$x, y \in X$, 存在互不相交的开集A,B使得$x \in A, y \in B$
- 第二可数性质: X存在可数拓扑基

这样的X称为**n维拓扑流形**, 满足T2性质的空间称为Hausdorff空间, 第二可数性质也称为A2性质.

在众多优良的拓扑性质当中, T2性都是不可或缺的, 比如我们刚才知道局部欧式空间正则. 加上T2和A2性质之后就能把正则提升到正规:

Proposition 1.5

每个拓扑流形都是正规空间

Proof: 用[1]的Theorem 32.1, 前面说明了局部欧式空间正则, 加上第二可数性质就得到了正规

Proposition 1.6

拓扑流形X连通, 当且仅当X道路连通

Proof: 道路连通一定连通. 反过来, 根据Proposition 1.2和Proposition 1.3可得到道路连通

Proposition 1.7

拓扑流形M有可数预紧[a]拓扑基

[a] 一个集合在X中是预紧的, 如果它在X中的闭包是紧的

Proof: 根据第二可数性, 取可数拓扑基, 记为A_i. 任何一个$x \in M$, 根据局部紧性, 存在预紧的邻域U,i.e U含于M的某个紧子集K.又T2空间的紧子集肯定是闭的, 所以$\overline{U} \subseteq K$. K是紧空间, 所以其闭子集$\overline{U}$是紧的. 根据拓扑基的性质, 取一个$\{A_i\}_{i=1}$中的某个拓扑基, 记为V_x, 满足

$$x \in V_x \subseteq U$$

则

$$\overline{V}_x \subseteq \overline{U} \subseteq K$$

因此$\overline{V_x}$紧, 从而V_x预紧. 这样根据x的任意性, 每个x都有一个$V_x \in \{A_i\}_{i=1}$, 且V_x是预紧的.

另一方面, 对V_x, 我们把$\{A_i\}_{i=1}$中含于V_x的元素全部放进去, 设$A_j \subseteq V_x$, 则$\overline{A_j} \subseteq \overline{V_x}$, 因此$A_j$预紧. 记$V_x$和这些(含于$V_x$的)$A_j$的全体为$P_x$, 考虑集合

$$\mathcal{P} = \cup_{x\in M} P_x$$

注意到$\mathcal{P}$中的元素都是$\{A_i\}_{i=1}$中的, 所以$\mathcal{P}$是可数集$\{A_i\}_{i=1}$的子集, 还是可数的.而且其中的元素都是预紧的. 下面证明$\mathcal{P}$是拓扑基.

只需验证对任何开集U和$x \in U$, 存在$V \in \mathcal{P}$使得$x \in P \subseteq U$.

首先我们取对应的V_x, 那么$V_x \cap U$还是开集, 根据$\{A_i\}_{i=1}$是拓扑基可得存在$A_i \subseteq V_x \cap U$且$x \in A_i$, 那么这个$A_i \in P_x$, 因此$A_i \in \mathcal{P}$, 证毕

Proposition 1.8

拓扑流形M总有一个由紧集构成的**穷竭**,i.e 存在紧集序列X_i满足

$$M = \cup_{i=1}^{\infty} X_i \qquad X_i \subseteq IntX_{i+1}$$

Proof:找出可数预紧拓扑基, 记为U_i, 记

$$X_1 = \overline{U_1}$$

假设我们已经得到了紧集$X_2, .., X_{n-1}$使得$U_j \subseteq X_j$且$X_i \subseteq IntX_{i+1}, 1 \leq i \leq n-2$, 则根据$X_{n-1}$是紧集可得存在有限个$U_1, .., U_{m_n}$覆盖$X_{n-1}$, 令

$$X_n = \overline{U_1 \cup \cdots \cup U_{m_n} \cup U_n}$$

则这是m_n+1个开集的并集, 因此和闭包可以交换次序, 从而X_n是紧的且$X_{n-1} \subseteq IntX_n$, 根据数学归纳法可得X_i就是M的穷竭

Proposition 1.9

每个拓扑流形仿紧. 事实上对拓扑流形M和M的开覆盖$\mathcal{X}$. 对M的任一组拓扑基$\mathcal{B}$, 都存在由$\mathcal{B}$中元素组成的$\mathcal{X}$的加细. 且这个加细是可数的, 局部有限的.

Proof: 取前面的穷竭记为K_j, 定义

$$V_j = K_{j+1} - IntK_j \qquad W_j = IntK_{j+2} - K_{j-1}$$

则V_j, W_j分别是紧集(因为是紧集K_{j+1}的闭子集)和开集, 且$V_j \subseteq W_j$.

任取$x \in V_j$, 则存在$A_x \in \mathcal{X}$, 且$x \in A_x$. 根据$\mathcal{B}$是拓扑基可得存在B_x使得

$$x \in B_x \subseteq A_x \cap W_j$$

则当$x \in V_j$变动时$\cup_{x\in V_j} B_x$是V_j的开覆盖, 取有限子覆盖记为C_j. 那么$\cup_{j=1}^{\infty} C_j$是$\mathcal{X}$的加细还是可数的

只需证局部有限性. 注意W_j只可能和W_{j-1}, W_{j+1}交集非空, 且C_j中的元素都含于W_j. 任取$x \in M$, 存在j使得$x \in W_j$, 从而W_j和$\cup_{j=1} C_j$中至多和C_{j-1}, C_{j+1}中的元素相交, 这些只有有限多个

1.1.3 带边流形

我们前面考虑的流形M都是开集, 因为每个点x附近都有一个坐标邻域U, 所以每个点都是M的内点. 不过很多几何对象本身并不是开的. 比如说R^n中的单位闭球体. 或者第n个分量≥ 0的全体. 它们除了内点以外还有边界点. 我

们希望把这类拓扑空间, 也放入流形的框架下, 这就引出了如下概念:

Definition 1.10

M是一个拓扑空间. 设对任何一个$x \in M$, 都存在一个邻域U和一个映射φ, 满足φ是U到H^n的某个开子集的同胚. 如果$\varphi(U) \cap \partial H^n = \emptyset$, i.e $\varphi(U)$是R^n中的开集, 那么称(U,φ)为**内坐标卡**, 否则称为**边界坐标卡**. 对$x \in M$, 如果存在坐标卡(U,φ), 使得$x \in \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \partial H^n)$, 则称x是M的**边界点**, 边界点的全体记为∂M. 其他点称为M的内点, 内点的全体记为$IntM$. M称为n维**带边流形**

以上定义有两处让人疑惑的地方, 首先, $\varphi(U) \cap \partial H^n = \emptyset$能得出$\varphi(U)$是$R^n$的开集吗? 这个事实并不明显. 假设$W \cap \partial H^n = \emptyset$且是$H^n$中的开集, 那么存在$R^n$中的开集V使得$U = H^n \partial V$. 另一方面, W中每个点的最后一个分量必须严格> 0(因为$W \subseteq H^n$且和∂H^n不交), 这意味着

$$U = U \cap \{x|x_n > 0\} = V \cap \{x|x_n > 0\} \cap H^n$$

而$\{x|x_n > 0\} \subseteq H^n$, 所以$U = V \cap \{x|x_n > 0\}$, 又$\{x|x_n > 0\}$是$R^n$的开子集, 所以U是$R^n$的开子集

另一个问题是, 边界点这个概念是不是良定义的?

Proposition 1.11

M是n维带边流形, 则M的边界点是一个良定义的概念. 也就是说, 若对某个边界坐标卡(U,φ), 有$x \in \varphi^{-1}(\partial H^n)$. 那么对x附近的任意坐标卡$(V,\psi)$, (V,ψ)必须是边界坐标卡且$x \in \psi^{-1}(\partial H^n)$

目前我们还没有足够的工具证明这个命题. 本书在证明该命题之前, 都不会用到这个命题, 因为后文的研究对象都是光滑流形. 稍后我们将证明一个弱化的情形: 对于光滑流形来说, 边界点确实是良定义的概念.

1.2 光滑结构

为了在流形上使用分析学的技术, 比如求微分, 求积分, 这要求我们考虑流形上具备一定“光滑”性质的函数, 但是流形是一个拓扑对象, 光滑则是分析学上的概念, 为了将二者联系起来, 我们称一个函数$f : X \to R$在$p \in X$处是光滑的, 如果对任何的包含x的坐标卡(U,φ), $f \circ \varphi^{-1}$都是$\varphi(U)$上的光滑函数, 这里的光滑就是R^n中的集合上的函数光滑的含义[1]

这样的定义好像有点麻烦, 因为要对每个包含x的坐标卡进行光滑性验证, 这样做法有时成本很高. 但是我们发现, 对任何两个这样的坐标卡$(U,\varphi), (V,\varphi)$, 有

$$f \circ \varphi^{-1} = f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1} \qquad y \in \varphi(U \cap V)$$

所以只要$\psi \circ \varphi^{-1}$作为R^n的某两个开集之间的映射, 是光滑的, 那么根据R^n中光滑映射的复合还是光滑的, 我们只需对$f \circ \psi^{-1}$验证光滑性, 就能得到$f \circ \varphi^{-1}$的光滑性. 这就引出了**光滑相容**的概念: M是n维拓扑流形, $(U,\varphi), (V,\psi)$是M中的两个坐标卡, 且$U \cap V \neq \emptyset$, $\psi \circ \varphi^{-1}$叫做**转移映射**, 显然是$\varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$的同胚. 称这两个坐标卡是**光滑相容**的, 如果转移映射是微分同胚(也就是说转移映射及其逆映射都是光滑函数). 如果有一组坐标卡, 它们的坐标邻域能够覆盖M, 那么称这组坐标卡是一个**图册**, 或**坐标覆盖**, 如果图册中的所有坐标卡都是光滑相容的, 就称之为光滑图册. 一个光滑图册是**极大**的, 如果它包含了所有和它里面的坐标卡光滑相容的坐标卡, 极大的光滑图册称为**光滑结构**, 一个拓扑流形M和光滑结构$\mathcal{A}$合起来称为光滑流形.

值得注意的是, 一个拓扑流形上未必仅有一个光滑结构. 比如说, (R, id)自己组成一个光滑图册, (R, x^3)自己又组成一个光滑图册, 但是$id \circ x^{\frac{1}{3}}$在0处不光滑, 所以这两个坐标卡不是光滑相容的, 不可能含于同一个极大图册中, 所以包含它们的极大图册肯定是两个不同的极大图册, 也就是说R上至少存在两种光滑结构

[1] f在集合A上光滑, 意味着对任何$x \in A$, 存在x的邻域U和U上的无穷次可微的函数g, 使得$g|_{U \cap A} = f$. 如果A是开集那么可以取U是A本身

Proposition 1.12

M是n维拓扑流形(无论带边与否), $\mathcal{A}$是一M上的一个光滑图册, 那么存在M上存在一个唯一的光滑结构, 且包含$\mathcal{A}$. 这个光滑结构称为$\mathcal{A}$**诱导的光滑结构**

Proof: 我们把所有与$\mathcal{A}$中坐标卡相容的坐标卡全都放进一个集合$\overline{\mathcal{A}}$中. 显然$\mathcal{A}\subseteq\overline{\mathcal{A}}$. 下面证明$\overline{\mathcal{A}}$是一个光滑图册. 任取$\overline{\mathcal{A}}$中的两个坐标卡$(U,\varphi),(V,\psi)$. 设$p\in U\cap V$, 取p附近的$\mathcal{A}$中的坐标卡$(K,\xi)$, 则

$$\varphi\circ\psi^{-1}=[\varphi\circ\xi^{-1}]\circ[\xi\circ\psi^{-1}]$$

又$(U,\varphi),(V,\psi)$各自和(K,ξ)光滑相容, 所以$\varphi\circ\psi^{-1}$在p的邻域$U\cap V\cap K$上光滑. 根据p的任意性, $\varphi\circ\psi^{-1}$光滑. 因此$\overline{\mathcal{A}}$还是图册.

然后证明$\overline{\mathcal{A}}$的极大性, 假设有一个不同的包含$\mathcal{A}$的图册$\mathcal{B}$, 则$\mathcal{B}$中任意坐标卡都和$\mathcal{A}$中坐标卡光滑相容, 根据$\overline{\mathcal{A}}$的定义, 这个坐标卡必须在$\overline{\mathcal{A}}$里, 从而$\mathcal{B}\subseteq\overline{\mathcal{A}}$.

这说明$\overline{\mathcal{A}}$的确是一个光滑结构, 然后证明$\overline{\mathcal{A}}$的唯一性. 假设有一个不同的包含$\mathcal{A}$的光滑结构$\mathcal{B}$, 那么$\mathcal{B}$也是个包含$\mathcal{A}$的图册, 则根据$\overline{\mathcal{A}}$的极大性可得 $\mathcal{B}\subseteq\overline{\mathcal{A}}$. 又$\mathcal{B}$也是极大的, 且$\overline{\mathcal{A}}$是个包含$\mathcal{A}$的图册, 所以根据极大性$\overline{\mathcal{A}}\subseteq\mathcal{B}$, 因此二者只能相等

下面的推论说明有时候不同的图册会诱导出同样的光滑结构.

Corollary 1.13

M是n维拓扑流形(无论带边与否), 两个图册诱导出同一光滑结构, 当且仅当它们是光滑相容的(i.e它们的并集还是个图册)

Proof: $\Rightarrow$ 如果诱导出同一光滑结构, 那么两个图册在同一光滑结构中, 同一光滑结构的任两个坐标卡都是光滑相容的

$\Leftarrow$ 如果两个图册A,B光滑相容, 那么它们的并集还是个图册, 这个图册诱导出的光滑结构C包含了A,B. 从而根据A,B诱导出的光滑结构的唯一性, C就是A,B诱导出的光滑结构

Proposition 1.14

M是n维带边光滑流形, 则M的边界点是一个良定义的概念. 也就是说, 若对某个边界坐标卡(U,φ), 有$x\in\varphi^{-1}(\partial H^n)$. 那么对x附近的任意坐标卡$(V,\psi)$, (V,ψ)必须是边界坐标卡且$x\in\psi^{-1}(\partial H^n)$

Proof: 假设$\psi(x)\notin\partial H^n$, 那么$\psi(x)\in\psi(V\cap U)\cap\{x|x_n>0\}$. 又$\psi(V\cap U)$是$H^n$中的开集(因为$U\cap V$是V的开子集且$\psi$是同胚), 所以存在$R^n$中的开集K使得$\psi(V\cap U)=K\cap H^n$, 因此存在$\psi(x)$的邻域$B=B(\psi(x),r)\subseteq K\cap H^n=\psi(V\cap U)$. 把$\varphi\circ\psi^{-1}$看成B上的光滑映射, 记为$\pi$

那么根据光滑相容可得$\eta=\pi^{-1}$也是光滑的, 根据光滑的定义, $\eta=\pi^{-1}$在$\pi(B)$的某个开邻域上光滑. 因此

$$id_B=\eta\circ\pi$$

两边取jacobian矩阵得到

$$I_n=D\eta(\pi(y))\circ D\pi(y)\qquad y=\psi(x)$$

因此π在x处的jacobian是非异阵, 因此根据数学分析中的反函数定理可得在π在$\psi(x)$附近是开映射, 把π看成$B\to R^n$的光滑映射, 则存在x的邻域P使得$\pi(P)$是R^n中的开集. 又$\pi(\psi(x))=\varphi(x)\in\partial H^n$, 所以$\pi(P)$作为$\varphi(x)$的邻域, 必定存在第n个分量$<0$的点. 但$\pi(P)=\varphi\circ\psi^{-1}(P)\subseteq H^n$, 不存在第n个分量$<0$的点, 矛盾. 因此$x\in\psi^{-1}(\partial H^n)$. 这也暗示了所有覆盖x的坐标卡必须是边界坐标卡(因为值域和∂H^n交集非空)

Proposition 1.15

M是n维光滑带边流形. x是M的内点, 那么x含于某个内坐标卡

Proof:任意取x附近的一个坐标卡(V,ψ). 如果这是个内坐标卡, 那么什么也不需要证明. 只需设这是个边界坐标卡.

既然x是内点, 那么$\psi(x)\notin\partial H^n$, 照抄上面的第一段, 存在$R^n$中$\psi(x)$的开邻域B,且$B\subseteq\psi(V)$. 根据$\psi$是同胚可得$\psi^{-1}(B)$是V中的开集. 又V是M的开子集, 所以$\psi^{-1}(B)$是M的开子集, 还是x的邻域, 因此$(\psi^{-1}(B),\psi)$还是一个坐标卡. 根据$\psi$和其他函数的相容性, 这个坐标卡和其他坐标卡也是光滑相容的, 且B是R^n中的开集, 所以这是个内坐标卡

1.3 理解光滑坐标卡

根据前面的定义, 只要拓扑流形M上的两个图册是相容的, 那么它们诱导出的光滑结构一样. 当给出M的一个图册A(或者说, 坐标覆盖A)$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$时, 如果你觉得这个坐标覆盖不好, 那么可以换一个和坐标覆盖A相容的坐标覆盖B, 来研究M. 这并不改变M上的光滑结构, 所以并不会改变光滑流形M本身的性质.

光滑坐标卡是一个非常灵活的概念. 给定一个n维光滑流形M, 对于$x\in IntM$, 我们知道内对坐标卡(U,φ). $\varphi(U)$是$\varphi(x)$在R^n中的邻域, 因此存在一个球体$B(\varphi(x),r)\subseteq\varphi(U)$, 令$K=\varphi^{-1}(B(\varphi(x),r))$, 则根据同胚可得K是x的邻域, 因此$(K,\varphi)$是个坐标卡. 且根据$\varphi$和其他坐标函数的相容性, 这个坐标卡是光滑坐标卡. 且把x的坐标邻域K映射为一个球体. 因此以后取x附近的坐标卡时, 可以

取x附近的坐标卡(U,φ)使得$\varphi(U)$是R^n中的开球

此外, 通过平移和伸缩, 定义$\psi(y)=\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{r}$, 则$\psi^{-1}(z)=\varphi^{-1}(zr+\varphi(x))$. 根据平移和伸缩都是特殊的微分同胚可知, 坐标卡(K,ψ)也是个光滑坐标卡. 因此以后取x附近的坐标卡时, 可以

取x附近的坐标卡(U,φ)使得$\varphi(U)$是R^n中的单位开球$B(0,1)$

或者更一般的, 如果有开集V包含了$\varphi(U)$, 且有一个V上的光滑同胚f,满足f^{-1}也光滑那么$(U,f\circ\varphi(U))$还能成为一个坐标卡, 因为对任何坐标映射ϕ,$f\circ\varphi\circ\phi^{-1},\phi\circ\varphi^{-1}\circ f^{-1}$还是光滑的.

除了对$\varphi(U)$进行微分同胚, 我们还能缩小U, 比如说给定一个开集K, $x\in K\cap U$, 那么$\varphi|_{K\cap U}$还是同胚, 从而$(U\cap K,\varphi)$就是坐标邻域在K中的一个坐标卡. 所以以后遇到x的邻域K时, 可以

取x附近的坐标卡(U,φ), 不妨设$U\subseteq K$

对于边界坐标卡来说, 道理是类似的. 假设$x\in\partial M$. 那么x必定含于一个边界坐标卡(U,φ), 设存在R^n中的开集K使得$\varphi(U)=K\cap H^n$. 那么由$\varphi(x)\in K$可得存在r使得$B(\varphi(x),r)\subseteq K$, 因此

$$B^+=B^+(\varphi(x),r)\subseteq\varphi(U)$$

B^+是H^n的开集, 因此$K=\varphi^{-1}(B^+)$也是开的, 且包含x, 根据φ和其他坐标映射的相容性, 可得(K,φ)也是x的边界坐标卡, 且$\varphi(K)=B^+(\varphi(x),r)$是个半球体. 因此以后取x附近的坐标卡时, 可以

取x附近的坐标卡(U,φ)使得$\varphi(U)$是H^n中的半球体

此外, 通过平移和伸缩, 定义$\psi(y)=\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{r}$, 可以

取x附近的坐标卡(U,φ)使得$\varphi(U)$是R^n中的单位半开球$B^+(0,1)=B(0,1)\cap H^n$

另外, 无论是边界坐标卡还是内坐标卡, 我们可以交换坐标函数的某两个分量(边界坐标卡的情形, 最后一个坐标轴不能和其他轴交换), 这个变换对任意内坐标卡都是同胚, 所以交换分量之后得到的映射还是同胚. 这种交换坐

标的操作能给转移映射的研究带来很多有利条件.

还有给坐标函数做减法的方法, 比如给定p附近的坐标卡(U,φ), 令$\psi(q)=\varphi(q)-\varphi(p)$, 则$(U,\psi)$还是p附近的坐标卡且$\psi(p)=0$. 因此在需要时可以:

$$\text{不妨设}\varphi(p)=0.$$

另一个重要的事情是可以取坐标卡(U,φ)使得$\varphi(U)=R^n$或H^n, 具体地说, 如果(U,φ)是内坐标卡, 首先不妨设$\varphi(U)=B(0,1)$, 然后考虑

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-\|x\|^2}}$$

那么$(U,f\circ\varphi)$就是把U同胚到R^n的光滑坐标卡. 如果(U,φ)是边界坐标卡, 那么不妨设$\varphi(U)=B^+(0,1)$, 则$f\circ\varphi(U)=H^n$, 因此我们可取M的坐标覆盖, 使得每个坐标邻域要么同胚于R^n(内坐标卡), 要么同胚与H^n(边界坐标卡)

我们以上都是对一个固定的$x\in M$, 构造了一个新坐标卡, 记为(U_x,φ_x). 如何给出一个M的新的图册? 显然只需考虑坐标覆盖$\{(U_x,\varphi_x)\}_{x\in M}$. 它们的相容性由"它们都在M的光滑结构中"这一事实保证. 下面我们看一个经典的应用:

Proposition 1.16

M是n维光滑带边流形, 那么∂M是n-1维不带边的光滑流形

Proof: 在M的图册中取所有边界坐标卡, 记为$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, 不妨设$\varphi_\alpha(U_\alpha)=B^+(0,1)$

定义

$$V_\alpha=U_\alpha\cap\partial M$$

根据子空间拓扑的定义, V_α是∂M中的开集, 且所有V_α覆盖了∂M, 这是因为:

对任何$x\in\partial M$, 如果$x\in U_\alpha$, 则$x\in U_\alpha\cap\varphi_\alpha^{-1}(\partial H^n)\subseteq U_\alpha\cap\partial M=V_\alpha$.

另一方面如果$x\in V_\alpha$, 则$x\in U_\alpha$, 结合x是边界点可以知道$x\in\varphi_\alpha^{-1}(\partial H^n)$, 所以实际上

$$V_\alpha=U_\alpha\cap\varphi_\alpha^{-1}(\partial H^n)$$

定义坐标函数

$$\psi_\alpha(z)=\pi\circ\varphi_\alpha(z)\qquad\forall z\in V_\alpha$$

其中π是$R^n\to R^{n-1}$前n-1个分量的投影. 那么

$$\psi_\alpha(V_\alpha)=\pi(B^+(0,1))=\left\{(x_1,..,x_{n-1})\middle|\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2<1\right\}$$

后者是R^{n-1}的单位开球, 因此是开集且ψ_α是一一的, 根据φ_α是同胚可得ψ_α也是同胚. 且

$$\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}(x_1,..,x_{n-1})=\pi\circ\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}(x_1,..,x_{n-1},0)$$

根据$\pi,\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$光滑, 可得$\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}$光滑, 因此$\{(V_\alpha,\psi_\alpha)\}_\alpha$是$\partial M$的坐标覆盖, 全是内坐标卡. 因此$\partial M$是n-1维无边光滑流形

1.4 构造新的流形

假设有两个光滑流形M,N, 我们可以定义$M\times N$上的光滑结构, 使之成为一个光滑流形.

Proposition 1.17 乘积流形

M是m维不带边光滑流形, N是n维不带边光滑流形, 则可以赋予$M \times N$一个光滑结构使其成为m+n维光滑流形

Proof: 设有M的坐标覆盖$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, N的坐标覆盖$(V_\beta, \psi_\beta)$, 则

$$(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)$$

是$M \times N$的坐标覆盖. 局部欧式性质是显然的, 因为两个开集的乘积是乘积空间的开集, 两个同胚的乘积是乘积空间的同胚, 而相容性则是因为

$$\varphi_\alpha \times \psi_\beta \circ (\varphi_\xi \times \psi_\gamma)^{-1} = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\xi^{-1}) \times (\psi_\beta \circ \psi_\gamma^{-1})$$

还是光滑的

Proposition 1.18 流形的开子集

M是n维光滑流形, U是M的开子集, 则在子空间拓扑下, U是n维光滑流形

Proof: 对任何$p \in M$, 存在M中p附近的坐标卡(V_p, ψ_p), 则$\{(U \cap V_p, \psi_p)\}_{p \in U}$ 就是一个图册. 从而决定了一个唯一的光滑结构.

1.5 光滑流形的例子

1.5.1 RP^n

考虑$R^{n+1} - \{0\}$上的等价关系:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists t \in R \; s.t. \; x = ty$$

也就是说$x \sim y$ 当且仅当它们在同一条直线上. 等价类的全体记为RP^n, 称为**n维射影空间**. 把$[x]$记为x所在的等价类. 记$\pi(x) = [x]$是$R^{n+1} \to RP^n$的商映射, 我们赋予RP^n一个拓扑:

$$\text{U是}RP^n\text{中的开集, 当且仅当}\pi^{-1}(U)\text{是}R^{n+1} - \{0\}\text{中的开集}$$

要证明RP^n是T2和A2的. 为此我们先说明商映射是开的. 任取$X \in R^{n+1} - \{0\}$是一个开集, 则

$$\pi^{-1}(\pi(X)) = \left\{ y \in R^{n+1} - \{0\} \middle| \exists x \in X, t \in R \; s.t \; y = tx \right\} = \cup_{t \in R - \{0\}} tX$$

其中$tX = \left\{ tx \middle| x \in X \right\}$, 注意到映射$f(x) = tx (t \neq 0)$给出了$R^{n+1} \to R^{n+1}$的同胚, 因此tX都是开集, 因此$\pi^{-1}(\pi(X))$是开集, 根据定义, $\pi(X)$是RP^n中的开集

现在我们可以证明第二可数性质, 取$R^{n+1} - \{0\}$的可数拓扑基记为B_i, 则显然$\{\pi(B_i)\}_{i=1}^\infty$就是$RP^n$的可数拓扑基. 因此$RP^n$是第二可数的.

然后考虑乘积空间$R^{n+1} - \{0\} \times R^{n+1} - \{0\}$, 考虑上面的一个子集

$$D = \left\{ (x, y) \middle| x \sim y \right\}$$

我们证明它是闭的. 假设(u, v)是D中某个点列(x^n, y^n)的极限点, 那么我们可以通过R^{n+1}的拓扑得到$x^n \to u, y^n \to v$, 根据定义, u和v的分量都不能全为0, 因此可设$u_i \neq 0, v_j \neq 0$, 那么可以知道对足够大的n, 都有 $x_i^n \neq 0, y_j^n \neq 0$,

因此$t_n = \frac{x_j^n}{y_j^n}$, 根据$x^n, y^n$收敛可以给出$t_n$收敛,不妨设收敛到t, 因此

$$x_n = t_n y_n \Rightarrow u = tv$$

又u,v都不是0, 因此t必定不为0, 从而$(u, v) \in D$. 这说明D是个闭集

从而对任何$[x], [y] \in RP^n$, 我们证明T2性质. 注意到当$[x] \neq [y]$时, $(x, y) \in D^c$, 因此根据乘积拓扑的拓扑基, 存在x和y在$R^{n+1} - 0$的邻域U,V使得$U \times V \subseteq D^c$, 继而$\pi(U), \pi(V)$是RP^n中[x],[y]的邻域. 如果$\pi(U) \cap \pi(V) \neq \emptyset$, 则存在$p \in U, q \in V$使得$[p] = [q]$, 这说明$(p, q) \in D$, 这与$U \times V \subseteq D^c$矛盾. 因此$\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$, 这证明了T2性质

然后我们给出一组坐标卡, 并验证相容性, 从而给出RP^n是n维光滑流形.令

$$U_i = \left\{[x]\middle|x_i \neq 0\right\}$$

这是RP^n的开集, 因为这是开集$\{x \in R^{n+1} - 0 | x_i \neq 0\}$在开映射$\pi$下的像. 定义

$$\varphi_i([x_1, .., x_{n+1}]) = (\frac{x_1}{x_i}, .., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, .., \frac{x_{n+1}}{x_i})$$

显然

$$\varphi_i^{-1}(y_1, .., y_n) = [y_1, .., y_{i-1}, 1, y_i, .., y_n]$$

容易验证$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$是光滑映射, 因此$(U_i, \varphi_i)$是$RP^n$的光滑图册, 因此$RP^n$是n维光滑流形.

1.5.2 S^n

接下来看一个简单的例子: R^{n+1}中的单位球面S^n, 显然这是A2T2的, 因为A2,T2性质可以被子空间继承.

定义开集

$$U_i^+ = \{x \in S^n | x_i > 0\} \qquad U_i^- = \{x \in S^n | x_i < 0\}$$

它们是S^n的开集, 是因为它们是开集$\{x \in R^{n+1} | x_i > 0\}, \{x \in R^{n+1} | x_i < 0\}$ 和S^n的交集, 因而是子空间拓扑的开集

定义

$$\varphi_i(x) = (x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n+1}) \qquad \text{扔掉第i个分量}$$

这是$U_i^\pm$到$B^n(0, 1)$的同胚. 容易验证$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$是光滑的. 因此$(U_i^\pm, \varphi_i)$是$S^n$的图册.

1.6 Appendix: review of topology

1.6.1 覆盖映射

设E,X都是连通且局部道路连通的拓扑空间(因此是全局道路连通的), $\pi : E \to X$是连续满射, 则π称为**覆盖映射**, 如果对任何$p \in X$, 都存在p的邻域U, 使得π限制在$\pi^{-1}(U)$的每个连通分支上都是到U的同胚, 我们称这样的U是**被π均匀覆盖**的, $\pi^{-1}(U)$的每个连通分支称为**U的层**

1.6.2 逆紧

Definition 1.19

拓扑空间$X \to Y$的映射F(没说连续)是逆紧(proper)的, 如果紧集的原像还是紧集

逆紧映射往往成为“定义域为紧集”的良好替代.

1.7 Exercise

Problem 1.1

紧Hausdorff空间到Hausdorff上的逆紧映射都是闭映射

Problem 1.2

M,N都是局部紧Hasudorff空间, $f: M \to N$是逆紧映射, 证明f是闭的

Hint: 单点紧化之后给映射补充定义, 然后用前一个习题的结论

Problem 1.3

设$B(0,1)$是R^n中的开球, 证明$B(0,1)$和R^n微分同胚. 记H^n是最后一个分量非负的点的全体, 证明$B_+(0,1) = B(0,1) \cap H^n$和$H^n$微分同胚, 由此得出对一个光滑流形M上的任意坐标卡(U,φ), 可以设$\varphi(U) = R^n$或H^n

Hint:把映射$f = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$推广到$R^n$

Problem 1.4

证明对一个连通的拓扑流形M, 任取其中两点p,q, 都存在一个$M \to M$的同胚ψ使得$\psi(p) = q$

Problem 1.5

R上的连通集一定是区间.

Problem 1.6

M是拓扑空间,$\mathcal{X}$是M中一族局部有限的集合, 证明$\{\overline{X}\}_{X\in\mathcal{X}}$也是局部有限的

Problem 1.7

M是光滑流形, 证明任何一组坐标覆盖, 都能抽出可数个坐标卡, 形成一个新的坐标覆盖.

Problem 1.8

M是光滑流形, 证明存在一组可数拓扑基$\mathcal{B}$, 满足对任何$B \in \mathcal{B}$, 都存在一个坐标卡(B',φ)和$r < 1$, 满足

$$\varphi(B') = B(0,1) \qquad \varphi(B) = B(0,r) \qquad \varphi(\overline{B}) = \overline{B(0,r)}$$

对于边界坐标卡的情形, 要改成

$$\varphi(B') = B^+(0,1) \qquad \varphi(B) = B^+(0,r) \qquad \varphi(\overline{B}) = \overline{B^+(0,r)}$$

这样的B称为**正则坐标球体**

Problem 1.9

M是拓扑空间, $\mathcal{X}$是一组局部有限的集合, 证明$\mathcal{X}$中的取并和取闭包能交换次序:

$$\overline{\cup_{X\in\mathcal{X}} X} = \cup_{X\in\mathcal{X}} \overline{X}$$

Hint:右边显然含于左边, 要证明反向的包含, 则可考虑任意极限点,然后用Problem 1.6的结论.

Problem 1.10

M是T2的拓扑空间, 考虑$M \times M$上自然的乘积拓扑, 证明对角线

$$\triangle = \left\{(p,p)\middle|p \in M\right\}$$

是$M \times M$中的闭集.

第二章 光滑映射

2.1 光滑性的刻画

有了光滑结构，我们就能把光滑的概念推广到流形上去．给定一个n维光滑流形M，称f是$M \to R^k$的光滑函数，如果对任何$p \in M$，都存在一个包含p的坐标卡(U, φ)使得$f \circ \varphi^{-1}$是$\varphi(U)$上的光滑函数．

注意到，根据转移映射的光滑性，这等价于对M中的任何光滑坐标卡(V, ψ)，$f \circ \psi^{-1}$都是光滑函数．其中$f \circ \varphi^{-1}$是f在(U, φ)下的**坐标表示**，可以发现f在不同坐标卡下的坐标表示未必相同．所以我们在提及坐标表示的时候，必须要明确是关于哪一个坐标卡的．

我们可以光滑函数的概念推广到流形之间的映射．设M,N是微分流形，$f : M \to N$是光滑的，如果对任何$p \in M$，存在p附近的坐标卡(U, φ)和$f(p)$附近的坐标卡(V, ψ)使得$f(U) \subseteq V$，且在$\varphi(U)$上有

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \text{ 光滑}$$

我们称这个函数为f在坐标卡$(U, \varphi), (V, \psi)$下的**坐标表示**

Proposition 2.1

光滑映射必定连续

Proof: 对任何$p \in M$，沿用前面的记号，我们知道

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$$

在$\varphi(U)$上光滑，所以连续，又ψ, φ都是同胚，所以两边复合ψ^{-1}, φ之后得到F在U上连续，根据p的任意性可得F处处连续

Proposition 2.2

F是$M \to N$的光滑函数，等价于对M,N的任何光滑坐标卡$(U, \varphi), (V, \psi)$，均有

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} \text{ 在其定义域内光滑}$$

Proof: $\Leftarrow$ 对任何$p \in M$，取一对使得 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$光滑的坐标卡$(U, \varphi), (V, \psi)$，因为$F^{-1}(V) \cap U$是p的邻域(因为根据连续性，$F^{-1}(U)$是开的)，令$K = U \cap F^{-1}(V)$，则$(K, \varphi)$还是p附近的坐标卡且$\varphi(K) \subseteq V$，F在$(K, \varphi), (V, \psi)$下的坐标表示还是$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$，因此光滑，根据p的任意性，这是光滑性的最初定义，证毕

$\Rightarrow$ 假设存在p，$F(p)$附近的坐标卡$(U, \xi), (V, \eta)$使得

$$\eta \circ F \circ \xi^{-1}$$

在$\varphi(U)$上光滑, 那么根据转移映射$\psi\circ\eta^{-1},\xi\circ\varphi^{-1}$的光滑性可得

$$\psi\circ\eta^{-1}\circ\eta\circ F\circ\xi^{-1}\circ\xi\circ\varphi^{-1}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\text{ 光滑}$$

Proposition 2.3 光滑性是局部的性质

设F是光滑流形$M\to N$的光滑映射. 那么

- 如果对任何$p\in M$, 存在p的邻域U使得$F\big|_U$是光滑的, 则F在M上光滑
- 如果F光滑, 那么F限制在M的任一开子集上都是光滑的

Proof: (a)任取$p\in M$, 因为U是M的开子流形, 根据第一章构造的开子流形的图册, 对于M中p附近的坐标卡(V,ψ), $(U\cap V,\psi)$是U中包含p的坐标卡, 因此根据光滑的定义, 存在$F(p)$附近的坐标卡(K,φ)使得

$$\varphi\circ F\Big|_U\circ\psi^{-1}=\varphi\circ F\circ\psi^{-1}$$

是$\psi(U\cap F^{-1}(V))$上的光滑函数, 又$U\cap F^{-1}(V)$是p的邻域, 从而$(U\cap F^{-1}(V),\psi)$是M中p附近的坐标卡, 根据p的任意性, 每个p都能找出M中p附近的坐标卡, 和N中$F(p)$附近的坐标卡, 使得F在这两个坐标卡下的坐标表示为光滑函数, 这就是光滑的定义

(b)显然的. 对任何$p\in U$, 取M中p附近的坐标卡(V,ψ), 则$(U\cap V,\psi)$是U中p附近的坐标卡, 再取N中$F(p)$附近的坐标卡(K,φ), 那么

$$\varphi\circ F\Big|_U\circ\psi^{-1}=\varphi\circ F\circ\psi^{-1}$$

右边根据F的光滑性是光滑的, 所以左边光滑, 因此根据p的任意性, $F\big|_U$光滑

Corollary 2.4

M,N, P是光滑流形, 那么

- $M\to N$的常值映射光滑
- M上的恒等映射光滑
- U是M的开子集, 则$U\to M$的光滑映射还是光滑的
- $F:M\to N,G:N\to P$都光滑, 那么$G\circ F:M\to P$光滑
- $M_1\times\cdots\times M_n$是乘积流形, π是到M_i的投影映射, 那么π光滑
- $M_1\times\cdots\times M_n$是乘积流形, $F_i:N\to M_i$是光滑映射, 那么$F_1\times\cdots\times F_n$是$N\to M_1\times\cdots\times M_n$的光滑映射

Proof:前两个很容易

(c)对任何$p\in U$, 存在M中p附近的坐标卡(V,φ), 则$(U\cap V,\varphi)$是U中p附近的坐标卡, 从而

$$\varphi\circ\iota\circ\varphi^{-1}=id\qquad x\in\varphi(U\cap V)$$

(d)取$p,F(p),G(p)$附近的坐标卡$(U,\varphi),(V,\psi),(K,\xi)$, 那么

$$\xi\circ G\circ F\circ\varphi=(\xi\circ G\circ\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ F\circ\varphi)$$

右边光滑, 所以左边光滑

(e) 回忆乘积流形的坐标卡, 可取$(U_1\times\cdots\times U_n,\varphi_1\times\cdots\times\varphi_n)$, 其中$(U_i,\varphi_i)$是$M_i$中的坐标卡, 那么$\pi$的一个坐标表示为

$$\varphi_i\circ\pi\circ(\varphi_1^{-1},..,\varphi_n^{-1})(x_1,..,x_n)=x_r$$

其中x_i是R^{r_i}维的向量, 且含于$\varphi_i(U_i)$. 以上映射显然光滑

(f) 取N中p附近的坐标卡(V,ψ), $(F_1(p),..,F_n(p))$附近的坐标卡$(U_1\times\cdots\times U_n,\varphi_1\times\cdots\times\varphi_n)$

然后注意到

$$\varphi_1\times\cdots\times\varphi_n\circ F_1\times\cdots\times F_n\circ\psi^{-1}=\varphi_1\circ F_1\circ\psi^{-1}\times\cdots\times\varphi_n\circ F_n\circ\psi^{-1}$$

欧式空间开集上的光滑函数的直积还是光滑的, 因此证毕

Proposition 2.5

设$M_1,..,M_n$是光滑流形, $F:N\to M_1\times\cdots\times M_n$是光滑映射, 当且仅当对每个i, 到$M_i$的投影映射$\pi_i$, 均有$F_i=\pi\circ F$是$N\to M_i$的光滑映射

Proof: $\Rightarrow$ 投影映射显然光滑, 再根据光滑映射的复合还是光滑可知证毕.

$\Leftarrow$

$$F=(\pi\circ F_1,..,\pi\circ F_n)$$

是$\pi\circ F_i$的直积, 从而也是光滑的.

2.2　微分同胚

Definition 2.6

M,N是两个光滑流形, $F:M\to N$是光滑映射, 且是同胚, 如果$F^{-1}:N\to M$也是光滑的, 则称F是**微分同胚**

以下的结论是显然的, 留给读者自行验证:

Proposition 2.7

- 微分同胚是拓扑同胚, 因此是开映射和闭映射
- 微分同胚和复合还是微分同胚
- 有限个微分同胚的直积映射还是微分同胚
- 微分同胚f限制在开子流形U上还是到$f|_U$的值域的微分同胚,无论流形是不是带边的
- 流形之间的“微分同胚”是等价关系(自反性, 对称性, 传递性)

2.3　单位分解

微分流形是一个聚焦于局部的几何对象. 下面我们介绍一个有用的工具, 叫做单位分解. 能够把局部性质粘贴到整体, 也能把整体化解到局部.

Definition 2.8 Partition of unity

M是光滑流形, 那么任意给出M的一组开覆盖$\{U_\alpha\}$, 都存在一组光滑函数ψ_α, 使得

- $0\le\psi_\alpha\le 1$
- $supp\psi_\alpha\subseteq U_\alpha$而且是局部有限的, 也就是说, 对任意点$p\in M$, 存在p的邻域Q使得Q只和有限多个$supp\psi_\alpha$相交
- $\sum_\alpha\psi_\alpha=1$ 在M上恒成立

为了证明单位分解的存在性, 我们先给出一些技术性的引理:

Lemma 2.9

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$

是R上的光滑函数

Proof: 在$t > 0$时, 用数学归纳法可知

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2n}}$$

其中P_n是关于t的多项式, 因此这个函数光滑

在$t = 0$时, 用数学归纳法可得$f^n(0) = 0$(因为可以用$t > 0$的情形令给出$f^{(n)}(t)$, 归纳假设$f^{(n)}(0) = 0$, 可用来计算$f^{(n+1)}(0) = 0$)

$t < 0$是, 各阶微分都是0

Lemma 2.10

对任何$r_1 < r_2$, 存在光滑函数$h : R \to R$, 使得$h(t) = 1$当$t \le r_1$时成立, $h(t) = 0$在$t \ge r_2$时成立, 在其他地方$0 < h(t) < 1$

Proof: 令f是前一个Lemma构造的光滑函数,

$$h(t) = \frac{f(r_2 - t)}{f(r_2 - t) + f(t - r_1)}$$

下面我们把这个结果推广到高维:

Lemma 2.11

对任何$0 < r_1 < r_2$, 存在光滑函数$h : R^n \to R$, 使得H在$\overline{B(0, r_1)}$上为1, 在$B(0, r_2)^c$上为0. 其他地方满足$0 < H(x) < 1$

Proof: 设h是前一个lemma中的光滑函数, 令

$$H(x) = h(|x|)$$

光滑性有疑问的地方在于0附近, 但此时$H(x) = 1$恒成立, 所以各阶偏导数都是0

Theorem 2.12 单位分解的存在性

M是带边或不带边光滑流形, $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$是M的一组开覆盖, 则存在从属于$\mathcal{X}$的单位分解

Proof: 注意到每个X_α都是一个光滑流形, 根据Problem 1.8, 存在可数个正则坐标球体作为拓扑基, 记为$\mathcal{B}_\alpha$. 容易证明$\mathcal{B} = \cup_\alpha \mathcal{B}_\alpha$是M的拓扑基, 因此根据Proposition 1.9, 存在可数个开集$B_i \in \mathcal{B}$, 使得$\{B_i\}$是$\mathcal{X}$的加细且是局部有限的. 根据Problem 1.6, $\{\overline{B_i}\}_{i=1}$也是局部有限的.

根据正则坐标球的性质, 对任何B_i($B_i \subseteq$ 某个$\mathcal{X}_\alpha$,因为B_i是加细), 根据正则坐标球的定义: 存在一个$B_i' \subseteq \mathcal{X}_\alpha$和光滑的坐标映射$\varphi_i$使得

$$\varphi_i(\overline{B_i}) = \overline{B(0, r_i)} \qquad \varphi_i(B_i') = B(0, 1)$$

定义映射

$$f_i(p) = \begin{cases} H_i \circ \varphi_i & p \in B_i' \\ 0 & p \in M - \overline{B_i} \end{cases}$$

其中H_i是在$\overline{B(0,r_i)}$上为1, 在$B(0,1)^c$上为0, 其他地方$0 < H_i < 1$的光滑函数. 则根据H_i的性质可得上述定义在$p \in B_i' \cap (M - \overline{B_i})$上没有歧义($f_i = 0$). 我们发现

$$suppf_i = \overline{B_i}$$

定义

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \qquad M \to R$$

根据$\overline{B_i}$局部有限可得对任何$x \in M$, 使得$f_i(x) \neq 0$的i在x的某个邻域V中只有有限多个, 所以以上求和在V上只有有限个非0, 因此是V上的光滑函数. 根据x的任意性可得f是M上的光滑函数的

又f必定非负, 因为对任何$x \in M$, 都存在i使得$x \in B_i$. 所以可以另

$$g_i = \frac{f_i}{f}$$

还是M上光滑函数. 且

$$0 \leq g_i \leq 1 \qquad suppg_i = \overline{B_i} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} g_i = 1$$

然后我们重新设置g_i的指标, 又因为每个B_i'都含于某个$\mathcal{X}_\alpha$中, 所以对任何i, 都存在某个指标$\alpha(i) \in \Gamma$使得$B_i' \subseteq X_{\alpha(i)}$, 对每个i都取定这样的$\alpha(i)$. 考虑映射

$$f(i) = \alpha(i) \qquad \text{尽管可能有多个}X_\alpha\text{包含}B_i\text{, 但我们只考虑固定其中的某一个作为}\alpha(i)\text{,从而f是单值函数}$$

对每个$\alpha \in \Gamma$, 定义

$$\psi_\alpha = \sum_{i:\alpha(i)=\alpha} g_i$$

从而根据Problem 1.9,

$$supp\psi_\alpha = \overline{\cup_{\alpha(i)=\alpha} B_i} = \cup_{\alpha(i)=\alpha} \overline{B_i} \subseteq X_\alpha$$

然后说明局部有限性, 定义

$$B(\beta) = \left\{ i \middle| f(i) = \beta \right\}$$

则对不同的α, β, 都有$B(\alpha) \cap B(\beta) = 0$, 否则存在i使得 $f(i)$是多值的, 矛盾. 又显然有$\cup_\alpha B(\alpha) = \{1, .., n, ..\}$. 根据$\overline{B_i}$的局部有限性, 对任何$x \in M$, 存在邻域V使得V只和有限多个$\overline{B}_i$相交(设为$i_1, .., i_m$). 所以V至多和包含$\overline{B}_{i_1}, .., \overline{B}_{i_m}$的$supp\psi_\alpha$相交, 又根据$B(\alpha) \cap B(\beta) = 0$可得每个$supp\psi_\alpha$中包含的$\overline{B}_i$都是互不相同的, 也就是说除了$supp\psi_{\alpha(i_1)}, ..supp\psi_{\alpha(i_m)}$之外, 其他$supp\psi_\alpha$都是由和V不交的$\overline{B}_i$的并集组成的,

所以包含$\overline{B}_{i_1}, .., \overline{B}_{i_m}$ 的$supp\psi_\alpha$至多有m个, 从而$supp\psi_\alpha$局部有限.

$$0 \leq \psi_\alpha(p) \leq \sum_{i=1} g_i(p) = 1$$

且ψ还是光滑函数.

$$1 = \sum_{i=1} g_i = \sum_\alpha \sum_{i:\alpha(i)=\alpha} g_i = \sum_\alpha \psi_\alpha$$

2.3.1 单位分解的应用

下面给出单位分解的几个应用:

Proposition 2.13 鼓包函数

M是光滑流形, A是M的闭子集, U是A的一个邻域, 那么存在一个$f \in C^\infty(M)$使得$suppf \subseteq U$且$f\big|_A = 1$
Hint: U和A^c构成M的开覆盖, 取从属于这个覆盖的单位分解, 记为ψ_1, ψ_2, 哪一个可以直接作为f?
实在不会可以参考[2]的Proposition 2.25

Proposition 2.14

M是带边或不带边光滑流形, A是M的闭子集, $f: A \to R^k$是光滑函数[a]. 证明对任何包含A的开集U, 都存在M上的光滑函数$\tilde{f}$, 满足$\tilde{f}\big|_A = f, supp\tilde{f} \subseteq U$

[a]意为, 对任何一点$p \in A$, 存在p在M中的邻域U和U上的光滑函数g使得$g\big|_{A\cap U} = f$

Proof:存在鼓包函数h满足h在A上为1, 且$supph \subseteq U$, 若把f在A^c上定义为0, 则$hf \in C^\infty(M)$, 且

$$supphf \subseteq U \qquad hf\Big|_A = f$$

Proposition 2.15 穷竭的存在性

M是光滑流形, 证明存在$f \in C^\infty(M)$使得对任何$c \in R$, $f^{-1}((-\infty, c])$都是紧的. 这样的f称为M的**穷竭**

Proof:因为M有可数预紧拓扑基, 记为 B_i, 考虑从属于 B_i的单位分解, 记为 ψ_i, 定义

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i\psi_i(x)$$

因为$Supp\psi_i$ 局部有限, 所以f在每个点附近的某个邻域内都只是有限个光滑函数的求和, 从而f也光滑. 且 $f(x) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) = 1$. 只需证 $f^{-1}((-\infty, c])$是紧的
取 $N > c$, 如果$p \notin \cup_{i=1}^N \overline{B_i}$, 那么 $\psi_i(p) = 0$ 对 $1 \leq i \leq N$成立, 因此

$$f(p) = \sum_{i=N+1} i\psi_i(p) \geq (N+1) \sum_{i=N+1} \psi_i(p) = (N+1)(\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(p)) = N+1 > c$$

所以 $f(p) < c$ 意味着 $p \in \cup_{i=1}^N \overline{B_i}$, 后者是个紧集. 所以 $f^{-1}((-\infty, c])$ 含于某个紧集. 另一方面, $f^{-1}((-\infty, c])$ 是闭集, hence $f^{-1}((-\infty, c])$ 所以是紧集.

2.4 Exercise

Problem 2.1

M是光滑流形, A,B是M中互不相交的闭子集, 证明存在光滑函数$f: M \to R$. 使得f在A上恒为1, 在B上恒为0

第三章　切向量

3.1　R^n中的导子

对任何$a \in R^n$, 一个映射$\omega \in C^\infty(R^n) \to R$被称为在a处的**导子**, 如果$\omega$是线性的且

$$\omega(fg) = f\omega(g) + \omega(f)g \qquad \forall f, g \in C^\infty(R^n)$$

导子有如下明显性质:

Proposition 3.1

如果f是常值函数, 那么$\omega(f) = 0$

如果$f(a) = g(a) = 0$, ω是在a处的导子, 那么$\omega(fg) = 0$

Proof：如果f是常数, 那么根据导子在R上的线性性可得$\omega(f) = f\omega(1)$, 所以只需证$\omega(1) = 0$, 注意到

$$\omega(1) = \omega(1 \cdot 1) = \omega(1) + \omega(1) = 2\omega(1) \qquad \omega(1) = 0$$

第二点容易证明:

$$\omega(fg) = \omega(f)g(a) + f(a)\omega(g) = 0$$

显然点a处的导子的全体构成线性空间, 记为T_aR^n. 所以一个本能的问题是: 这个空间是有限维的吗?

首先来看一些特殊的导子: 对任何$a \in R^n$和向量$v \in R^n$, 考虑映射

$$D_{v_a}f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(a+tv)$$

那么,

$$D_{v_a}f = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

D_{v_a}就是点a处的导子, 且将f映射到在a点关于向量v的方向导数.

为了进一步观察导子的映射性质, 我们可以对函数f进行局部Taylor展开:

$$f(x) = f(a) + Df(a)\cdot(x-a) + (x-a)^T D^2 f(t_x x + (1-t_x)a)(x-a)$$

设ω是在a处的导子, 那么

$$\omega(f) = \omega(f(a)) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\omega(x_i - a_i) + \omega((x-a)^T D^2 f(t_x x + (1-t_x)a)(x-a))$$

根据导子的性质, 我们知道

$$\omega(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\omega(x_i) + \sum_{i,j}^{n} \omega((x_i - a_i)D^2 f_{ij}(\theta)(x_j - a_j))$$

最后一项为0, 从而

$$\omega(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\omega(x_i)$$

我们把上式右边写成抽象算子的形式:

$$\omega(f) = \sum_{i=1}^{n} \omega(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{x=a}(f)$$

注意到$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x=a}$作为导子是固定的, 和$\omega$的取值无关. 也就是说, ω被n个实数$\omega(x_1), .., \omega(x_n)$唯一确定. 从而$\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_{x=a}\right\}_{1\le i\le n}$张成了 T_aR^n.

Proposition 3.2

T_aR^n是n维空间, 线性同构于R^n, 因此偏微分算子

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{x=a} \qquad 1 \le i \le n$$

成为T_aR^n的一组基

Proof: 考虑映射

$$F(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{x=a} = D_{v_a}$$

根据前面的推理, F是个线性满射, 毕竟只要让$v_i = \omega(x_i)$就有$F(v_a) = \omega$, 而且F也是个单射, 若

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{x=a} = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{x=a}$$

两边同时作用在函数$f(x_1, .., x_n) = x_k$上, 注意到

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_i}\bigg|_{x=a} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & else \end{cases}$$

所以$v_k = w_k, 1 \le k \le n$, 这说明$v = w$, 因此F是单射. 从而我们导出了R^n到T_aR^n的同构

3.2　切空间

3.2.1　切空间的维数和基底

设M是n维光滑流形, 对$p \in M$, 一个映射$v \in C^\infty(M) \to R$被称为p处的**导子**, 如果v是R上的线性映射, 且

$$v(fg) = v(f)g + fv(g) \qquad \forall f, g \in C^\infty M$$

模仿Proposition 3.1的方法, 不难验证, 点p处导子的全体构成线性空间, 且

Proposition 3.3

如果f是常值映射，那么$\omega(f)=0$
如果$f(a)=g(a)=0$, ω是在a处的导子，那么$\omega(fg)=0$

问题在于如何确定切空间的维数和基底．注意到M是局部欧式空间，所以我们可以借助微分同胚，把T_pM映射到T_aR^n，考虑映射

$$dF : T_pM \to T_pN$$

满足对任何$g \in C^\infty(N), X_p \in T_pM$, $dF(X_p)$是满足下列关系的切向量

$$dF(X_p)(g) = X_p(g \circ f)$$

dF_p就叫做**切映射**，容易验证基本性质如下：

Proposition 3.4

dF_p是线性映射
$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$
作为推论，当F是微分同胚时，$(dF_p)^{-1} = dF^{-1}_{F(p)}$

Proposition 3.5

设M是n维带边或无边光滑流形，$p \in M$．$f, g \in C^\infty(M)$．如果在p的某个邻域U中，$f = g$，则对任何$v \in T_pM$，都有$vf = vg$

Proof: 令$h = f - g$，则h在U中为0．考虑一个鼓包函数ψ，在h的支集中为1，且$supp\psi \subseteq M - \{p\}$，则$\psi h = h$(这是因为当h不为0的时候，$\psi = 1$)，再根据$\psi(p) = h(p) = 0$和Proposition 3.3可知$v(h) = v(\psi h) = 0$，因此$vf = vg$

Proposition 3.6 开子流形的切空间

M是带边或不带边的n维光滑流形，U是M的开子集，记$\iota : U \to M$是包含映射．则对任何$p \in U$，$d\iota_p$都是$T_pU \to T_pM$的同构

Proof: 取$v \in T_pU$，如果$d\iota_p(v) = 0$，那么取p的邻域B满足$\overline{B} \subseteq U$，根据光滑函数的延拓定理，存在$\tilde{f} \in C^\infty(M)$使得$\tilde{f}|_{\overline{B}} = f$．把f和$\tilde{f}|_U$视为光滑流形U上的光滑函数，注意到二者在B上相等．则根据Proposition 3.5可得

$$vf = v(\tilde{f}\Big|_U)$$

从而

$$vf = v(\tilde{f}\Big|_U) = v(\tilde{f} \circ \iota) = d\iota_p(\tilde{f}) = 0$$

因此v=0．然后证明$d\iota_p$是满射．对任何$w \in T_pM$，定义$v \in T_pU$为

$$vf = w\tilde{f}$$

其中$\tilde{f}$是任何一个在$\overline{B}$上=f的$C^\infty(M)$函数，根据Proposition 3.5，$w\tilde{f}$是良定义的，因此vf是良定义的，且显然是个导子．又对任何$g \in C^\infty(M)$，都有

$$d\iota_p(v)g = v(g \circ \iota)$$

因为$g\big|_B = g\circ\iota$, 所以根据v的定义有

$$v(g\circ\iota) = wg$$

因此

$$d\iota_p(v)g = wg$$

因此$d\iota_p = w$, 因此$d\iota_p$是线性同构

Proposition 3.7

如果M是n维光滑(无边)流形, 那么T_pM是n维空间, 当选定一组坐标卡(U,φ)时, 其基底可以表示为

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p \qquad 1\le i\le n$$

其中$\frac{\partial}{\partial x^i}f = \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}\big|_{\varphi(p)}$, 注意区分i的位置是上面还是下面, 在下面就表示欧式空间中对第i个变量的偏微分运算

Proof:对任何$p\in M$, 考虑p附近的一个坐标卡(U,φ). 和映射$d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}$, 那么根据它是线性同构可知,

$$d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\varphi(p)}$$

成为T_pM的一组基底, 注意到

$$d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\varphi(p)}(f) = \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\varphi(p)}(f\circ\varphi^{-1})$$

所以我们可以把$d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)}$更方便的记为$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}$, 其中

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(p)} f = \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\varphi(p)}(f\circ\varphi^{-1})$$

3.2.2 边界点处的切空间

Lemma 3.8

设$\iota: H^n\to R^n$是包含映射, 那么对任何$a\in\partial H^n$, $d\iota_a: T_aH^n\to T_aR^n$是线性同构.

Proof: 先证明$d\iota_a$是单射, 假如

$$d\iota_a(v) = 0$$

则对任何$f\in C^\infty(H^n)$, 根据光滑的定义, 存在H^n在R^n中的邻域V和V上的光滑函数g使得$g\big|_{H^n} = f$. 因此根据Proposition 2.14, 可以延拓到整个R^n上的光滑函数(还记为g), 且在H^n上依然为f. 从而$g\circ\iota = f$, 因此

$$vf = v(g\circ\iota) = d\iota_a(v)(g) = 0(g) = 0 \qquad \forall f\in C^\infty(H^n)$$

这给出了v=0, 所以$d\iota_a$是单射. 为了说明是满射, 任取$w\in T_aR^n$, 定义$v\in T_aH^n$:

$$vf = wg$$

在基底下展开w, 可设$w=\sum_{i=1}^n w_i\frac{\partial}{\partial x_i}$, 那么

$$vf=\sum_{i=1}^n w_i\frac{\partial g}{\partial x_i}|_a$$

容易说明这是良定义的, 假设有另一个光滑函数h满足在H^n上=f, 则$\left.\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|_{a+\mathbf{t}}=\left.\frac{\partial h}{\partial x_i}\right|_{a+\mathbf{t}}$对任何$\mathbf{t}=(0,..,0,t),t>0$成立, 令$t\to 0$根据光滑性可得$\frac{\partial g}{\partial x_i}|_a=\frac{\partial h}{\partial x_i}|_a$, 因此vf的取值和延拓的选取无关. 且显然v满足导子的所有性质.

而且注意到$w=d\iota_a(v)$, 这是因为, 对任何$f\in R^n$, f都是$f\circ\iota$的延拓, 因此$v(f\circ\iota)=wf$, 即$d\iota_a(f)=wf$.

Proposition 3.9

M是n维光滑带边流形, 则M在每一点处的切空间都同构于R^n

Proof: 如果p是M的内点, 则p含于某个内坐标卡中(Proposition 1.15), 设为(U,φ), 则U微分同胚于R^n的某个开集, U本身是n维无边光滑流形, 因此根据前面的结论有$T_pM\cong T_pU\cong R^n$. 第一个同构是Proposition 3.6, 第二个同构是Proposition 3.7

如果p是M的边界点, 那么设有边界坐标卡(U,φ), 可得

$$T_pM\cong T_pU\cong T_{\varphi(p)}\varphi(U)\cong T_{\varphi(p)}H^n\cong T_{\varphi(p)}R^n$$

其中第一个同构是Proposition 3.6, 第二个同构是Proposition 3.4($\varphi:U\to\varphi(U)$是微分同胚), 第三个同构是Proposition 3.6($\varphi(U)$是H^n的开子集), 第四个同构是Lemma 3.8

Proposition 3.10 乘积流形的切空间

设$M_1,..,M_n$是光滑流形,维数分别为$d_1+\cdots+d_n$, $\pi_i:M_1\times\cdots\times M_n\to M_i$是投影映射. 则

$$T_{(p_1,...,p_n)}M_1\times\cdots\times M_n\cong T_{p_1}M_1\oplus\cdots\oplus T_{p_n}M_n$$

其中同构可以由

$$\alpha(v)=(d(\pi_1)_p(v),...,d(\pi_n)_p(v))\qquad p=(p_1,..,p_n)$$

给出.

Proof: 显然,

$$\alpha(T_{(p_1,..,p_n)}M_1\times\cdots\times M_n)\subseteq T_{p_1}M_1\oplus\cdots\oplus T_{p_n}M_n$$

取p_i附近的坐标卡(U_i,φ_i), 则$(U_1\times\cdots\times U_n,\varphi_1\times\cdots\times\varphi_n)$是$M_1\times\cdots\times M_n$在p附近的坐标卡, 从而可以找出基底

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p,1\le i\le d_1+\cdots+d_n$$

我们只需观察α在基底上的表现, 注意到

$$d(\pi_j)_p(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p)(f)=\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p(f\circ\pi_j)=\left.\frac{\partial f\circ\pi_j\circ(\varphi_1^{-1}\times\cdots\varphi_n^{-1})(x_1,.,x_{d_1},x_{d_1+1},..,\cdots,..,x_{\sum_i d_i})}{\partial x_i}\right|_{\varphi_1(p_1)\times\cdots\times\varphi_n(p_n)}$$

记$t_i=\sum_{j=1}^{i-1}d_i,t_1=0$, $x_{[p,q]}$是截取x中第p个到第q个分量. 则

$$d(\pi_j)_p(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p)(f)=\left.\frac{\partial f\circ\pi_j\circ(\varphi_1^{-1}(x_{[t_0+1,t_1]})\times\cdots\varphi_n^{-1}(x_{[t_d+1,t_{d+1}]}))}{\partial x^i}\right|_{\varphi_1(p_1)\times\cdots\times\varphi_n(p_n)}$$

$$= \frac{\partial f\circ\varphi_j^{-1}(x_{[t_j+1,t_{j+1}]})}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi_j(p_j)} = \begin{cases} 0 & i\notin[t_j+1,t_{j+1}] \\ \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_{\varphi_j(p_j)} f & i=t_j+k, k\le d_j \end{cases}$$

因此

$$\alpha(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^{t_i+k_i}}\bigg|_p) = (\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}\bigg|_{p_1},...,\frac{\partial}{\partial x^{k_n}}\bigg|_{p_n}) \qquad 1\le k_i\le d_i$$

因此$T_{p_1}M_1\oplus\cdots\oplus T_{p_n}M_n$的基底含于$\alpha$的值域中, 根据线性性可知$\alpha$是满射. 定义域和值域都是$\sum_{i=1}^n d_i$维的线性空间, 所以$\alpha$也是单射, 因此是同构

3.3 切空间的相关计算

3.3.1 基变换的表示矩阵

我们发现要想给出切空间的一组具体的基底, 要依赖于局部坐标卡的选取. 所以选取不同坐标卡的时候, 基底可能不相同. 这就涉及到线性代数的另一个经典问题: 基底的变换矩阵

对$p\in M$, 我们再取p附近的另一个光滑坐标卡(V,ψ), 那么还有另一组基底$\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p$, 满足

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^i}\bigg|_p f = \frac{\partial(f\circ\psi^{-1})}{\partial x_i}\bigg|_{\psi(p)}$$

想办法变出$f\circ\varphi^{-1}$, 通过添一项去一项的技巧可得

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^i}\bigg|_p f = \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1}\circ[\varphi\circ\psi^{-1}])}{\partial x_i}\bigg|_{\psi(p)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_j}(\varphi(p))\frac{\partial(\varphi\circ\psi^{-1})_j}{\partial x_i}\bigg|_{\psi(p)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_j}\bigg|_{\varphi(p)}\frac{\partial(\varphi\circ\psi^{-1})_j}{\partial x_i}\bigg|_{\psi(p)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(\varphi\circ\psi^{-1})_j}{\partial x_i}\bigg|_{\psi(p)}\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p f$$

那么任给一个$\omega\in T_pM$, 都有旧基下的表示

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^i}\bigg|_p$$

从而在新基下的表示为

$$\omega = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_i\frac{\partial(\varphi\circ\psi^{-1})_j}{\partial x_i}\bigg|_{\psi(p)}\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial(\varphi\circ\psi^{-1})_j}{\partial x_i}\bigg|_{\psi(p)}\right]\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p f$$

从矩阵的角度讲, 如果把ω在旧基下的展开视为列向量$(v_1,...,v_n)^T$, 那么新基底下的列向量就是

$$J(\varphi\circ\psi^{-1})\cdot(v_1,...,v_n)^T$$

3.3.2 切映射的表示矩阵

因为dF_p是m维线性空间T_pM到n维线性空间$T_{F(p)}N$的线性映射, 所以当为这两个空间选好基底之后, dF_p就能写成矩阵的形式. 设p附近的坐标卡为(U,φ), $f(p)$附近的坐标卡为(V,ψ), 那么任意切向量$X_p\in T_pM$都能写作

$$X_p = \sum_{i=1}^{m} v_i\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$$

从而任取$g \in C^\infty(N)$, 有

$$dF_pX_p(g) = X_p(g \circ F) = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial g \circ F \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)}$$

凑出$g \circ \psi^{-1}$:

$$= \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)}$$

$$= \sum_{i=1}^m v_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial g \circ \psi^{-1}}{\partial x_j}\Big|_{\psi(F(p))} \frac{\partial(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_j}{\partial x_i}(\varphi(p))$$

令$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j}\Big|_{F(p)}$是$T_{F(p)}N$在坐标卡$(V, \psi)$下的基底, 那么

$$dF_pX_p(g) = \sum_{i=1}^m v_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_j}{\partial x_i}(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\Big|_{F(p)} g$$

$$= \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_j}{\partial x_i}(\varphi(p))\right] \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\Big|_{F(p)} g$$

X_p在基底$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$下的坐标为$(v_1, .., v_m)^T$, 从而 dF_pX_p在基底$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\Big|_{F(p)}$下的坐标, 看成一个列向量的话, 是

$$J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \cdot (v_1, .., v_m)^T$$

因为转移映射的jacobian矩阵都是非异阵, 所以假设$p, f(p)$附近有别的坐标卡(X, η)和(Y, ϕ), 那么

$$J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) = J(\psi \circ \phi^{-1})J(\phi \circ F \circ \varphi^{-1})J(\varphi \circ \eta^{-1})$$

这说明, 对$p \in M$, F在任何一组坐标卡下的坐标表示的Jacobian矩阵拥有相同的秩,也就是说这个秩不依赖于坐标卡的选取, 从而它只和F的本身有关. 因此我们把这个秩称为F的秩, 关于秩的结果我们将在下一章中介绍

3.4　切丛

Definition 3.11

M是n维光滑流形, 切丛TM定义为

$$TM = \left\{v_p \middle| p \in M, v_p \in T_pM\right\}$$

我们需要给TM定义一个拓扑结构. 考虑投影映射

$$\pi(v_p) = p \qquad TM \to M$$

对任何一个M上的坐标卡(U, φ), 设$p \in U$, 且$v_p = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$, 考虑映射

$$\tilde{\varphi}(v_p) = (\varphi^1(p), .., \varphi^n(p), v_1, ..., v_n) \in R^{2n}$$

$$\tilde{\varphi}^{-1}(x_1, .., x_n, v_1, .., v_n) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi^{-1}(x)}$$

那么显然$\tilde{\varphi}$是$\pi^{-1}(U) \to R^{2n}$的双射. 因为M能被可数个坐标卡覆盖, 所以我们定义TM的拓扑为使得所有$\tilde{\varphi}$都连续

的最弱的拓扑, 此时TM成为了2n维的局部欧式空间.

且$(\pi^{-1}(U),\tilde{\varphi})$是TM的一组坐标卡. 下面验证相容性: 设有两个坐标卡$(\pi^{-1}(U),\tilde{\varphi}),(\pi^{-1}(V),\tilde{\psi})$, 那么

$$\tilde{\psi}\circ\tilde{\varphi}^{-1}(x_1,..,x_n,v_1,..,v_n)=(\psi\circ\varphi^{-1}(x),J(\psi\circ\varphi^{-1})v)$$

根据ψ,φ的光滑性可得转移映射是光滑的, 因此这组坐标卡光滑相容.

Propsoition 3.12

在这组拓扑下, π是连续的, 且是光滑的.

Proof:只需证对任何开集U, $\pi^{-1}(U)$都是开集. 因为有可数个坐标卡$(\pi^{-1}(U_i),\tilde{\varphi}_i)$, 且$\pi^{-1}(U_i)$都是开集, 所以任给$x\in\pi^{-1}(U)$, 存在i使得$\pi(x)\in U_i$, 取$\pi(x)$在$U_i\cap U$中的邻域$V_i$, 根据$\tilde{\varphi}_i$连续可得

$$\pi^{-1}(V_i)=\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(V_i)\times R^n)$$

是开的, 且$x\in\pi^{-1}(V_i)\subseteq\pi^{-1}(U)$, 从而$\pi^{-1}(U)$是开集. 从而$\pi$连续.

为了看出π光滑, 只需注意到因为(U_i,φ_i)覆盖M, 因此只需对每个i验证π的光滑性:

$$\varphi_i\circ\pi\circ\tilde{\varphi}^{-1}(x_1,..,x_n,v_1,..,v_n)=(x_1,..,x_n)$$

由此TM成为了一个拓扑空间. 其实它是$T2$的, 这是因为, 对任何的p,q和$v_p\in T_pM,v_q\in T_qM$, 如果$p\neq q$, 那么根据M的T2性质, 存在p,q的互不相交的邻域A,B,从而$\pi^{-1}(A),\pi^{-1}(B)$是v_p,v_q的不相交的邻域.. 如果$p=q$, 且$v_p\neq v_q$, 假设$p=q\in U_i$, 则根据R^{2n}的T2性存在$\tilde{\varphi}(v_p),\tilde{\varphi}_i(v_q)$的不相交的邻域, 用$\tilde{\varphi}^{-1}$映回去会得到$v_p,v_q$的互不相交的邻域. 因此$TM$是Hausdorff空间

TM的第二可数性质是容易证明的, U_i覆盖M, 且都是第二可数的(因为第二可数能被开子集继承),由此可得$\tilde{\varphi}_i^{-1}(U_i)$第二可数, 这是TM的可数开覆盖, 即$TM=\cup_{i=1}^{n}\tilde{\varphi}^{-1}(U_i)$, 把$\tilde{\varphi}^{-1}(U_i)$的可数拓扑基全拿出来就得到TM的拓扑基, 可数个可数集的并集还是可数集, 所以这就是TM的拓扑基.

以上, 我们证明了TM在某个拓扑下能够称为2n维光滑流形, 且投影映射$\pi:TM\to M$是光滑映射.

3.5　曲线的切线

作为切映射的一个特殊情况, 我们考虑一个微分流形M上的曲线的“切线”. 回忆曲线$\gamma(t)$的定义, 它是R中某个区间J到M的连续映射, 如果γ还是光滑的, 那么称γ是M上的一条**光滑曲线**. 定义γ在t_0处的**速度向量**为

$$d\gamma(\frac{d}{dt}\Big|_{t_0})\in T_{\gamma(t_0)}M$$

记为$\gamma'(\mathbf{t_0})$, 注意不要和导数混淆, 尽管它们有类似的形式:

取$\gamma(t_0)$附近的坐标卡(U,φ), 则γ在t_0附近有坐标表示

$$\widetilde{\gamma}(t)=(\varphi_1\circ\gamma(t),..,\varphi_n\circ\gamma(t))$$

然后考虑这个切向量$d\gamma(\frac{d}{dt}\Big|_{t_0})$在f上的作用:

$$d\gamma(\frac{d}{dt}\Big|_{t_0})(f)=\frac{d}{dt}\Big|_{t_0}(f\circ\gamma(t))=\frac{d}{dt}\Big|_{t_0}(f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ\gamma(t))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(\gamma(t_0))}\frac{d\varphi_i\circ\gamma}{dt}\Big|_{t_0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{d\varphi_i \circ \gamma}{dt}\Big|_{t_0} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t_0)} f$$

我们发现这个切向量的系数就是

$$\widetilde{\gamma}'(t_0) = (\frac{d\varphi_1 \circ \gamma}{dt}\Big|_{t_0}, .., \frac{d\varphi_n \circ \gamma}{dt}\Big|_{t_0})$$

Proposition 3.13

M是有边或无边n维光滑流形, $p \in M$, 则对任何$v \in T_pM$, v都是某条曲线的速度向量

Proof:如果$p \in IntM$, 则取p附近的坐标卡(U, φ), 不妨设$\varphi(U) = B(0,1), \varphi(p) = 0$. 设$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$, 令

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}(tv_1, .., tv_n)$$

则存在ϵ使得当$t \in (-\epsilon, \epsilon)$时, $(tv_1, .., tv_n) \in B(0,1)$, 从而$\gamma$在坐标卡$(U, \varphi)$下的坐标表示

$$\widetilde{\gamma}(t) = (tv_1, .., tv_n)$$

因此其在$t = 0$的速度向量在基底$\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{\gamma(0)}$下的系数就是

$$\widetilde{\gamma}'(t) = (v_1, .., v_n)$$

即

$$d\gamma(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

(注意到$\gamma(0) = \varphi^{-1}(0) = p$) 因此$p \in IntM$的情形证毕

如果$p \in \partial M$, 取p附近的坐标卡(U, φ), 不妨设$\varphi(U) = B^+(0,1)$, 那么$(tv_1, .., tv_n) \in \varphi(U)$当且仅当$tv_n \geq 0$. 因此如果$v_n \geq 0$, 则考虑

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}(tv_1, .., tv_n)$$

则存在ϵ使得当$t \in [0, \epsilon)$时, $(tv_1, .., tv_n) \in B^+(0,1)$, 从而$\gamma$可定义在区间$[0, \epsilon)$上, 且

$$\widetilde{\gamma}(t) = (tv_1, .., tv_n)$$

剩余步骤同$p \in IntM$的情形.

如果$v_n < 0$, 则存在ϵ使得当$t \in (-\epsilon, 0]$时, $(tv_1, .., tv_n) \in B^+(0,1)$, 剩余步骤同上

Theorem 3.14 用曲线计算切映射的取值

设M,N是光滑流形, $F: M \to N$是光滑映射, $v \in T_pM$. 则对任意一条满足$\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$的光滑曲线$\gamma$, 都有

$$dF_p(v) = (F \circ \gamma)'(0)$$

Proof:

$$dF_p(v)(f) = v(f \circ F) = d\gamma(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0})(f \circ F) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f \circ (F \circ \gamma)) = d(F \circ \gamma)(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0})f \qquad \forall f \in C^{\infty}(M)$$

右边的$d(F \circ \gamma)(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0})$就是$(F \circ \gamma)'(0)$

3.6 Exercise

Problem 3.1

设M,N是光滑流形, $F: M \to N$是光滑映射, $\gamma: J \to M$是光滑曲线. 则对任何$t_0 \in J$, $F \circ \gamma$在t_0处的速度向量为

$$(F \circ \gamma)'(t_0) = dF_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0))$$

Remark: 这是[2]的Proposition 3.24

Problem 3.2

M,N是有边或无边光滑流形. $F: M \to N$是光滑映射, 则$dF_p = 0$对任何$p \in M$成立, 当且仅当F在M的每个连通分支上都是常数

Problem 3.3

M,N是有边或无边光滑流形. $F: M \to N$是微分同胚, 证明M和N具有相同的维数

Remark: 一个偏分析学的证明可参考[2]的Theorem 2.17

Problem 3.4

M是光滑流形, 证明集合

$$M_0 = \left\{(p, 0) \in TM \middle| p \in M\right\}$$

是TM的闭子集

第四章　浸入, 淹没和嵌入

4.1　常秩映射

Definition 4.1

M, N分别是m维和n维光滑流形, $F: M \to N$是光滑映射. 对任何$p \in M$, 线性映射dF_p的秩称为F在p处的**秩**, 根据线性代数知识, 它是F的在p和$F(p)$附近任意两个坐标卡下的坐标表示$\widetilde{F}$的jacobian矩阵的秩(上一章的讨论证明了秩不依赖于坐标卡的选取)
如果F在每一点$p \in M$处的秩都是一样的, 则称F为**常秩映射**. 显然有两种特殊的常秩映射:一种dF_p恒为单射, 此时称F为**浸入**. 另一种是dF_p恒为满射, 称F为**淹没**. 根据线性代数知识可得浸入的秩为m且必有$m \leq n$, 淹没的秩为n且必有$m \geq n$

对于dF_p是满射或单射的情形, 我们可以得出在p的邻域里面, dF都是满射或单射. 也就是说, 使得dF_p为满射或单射的p的全体必定是M的开子集

Proposition 4.2

M是m维光滑流形, N是n维光滑流形, $p \in M$. 如果dF_p是单的, 那么存在p的邻域U使得dF在U上是单的, i.e F在U上是个浸入
如果dF_p是满的, 那么存在p的邻域U使得dF在U上是满的, i.e F在U上是个淹没

Proof: 取p,$F(p)$附近的坐标卡$(U, \varphi), (V, \psi)$. 如果dF_p是单的, 那么

$$J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x)$$

在$\varphi(p)$处的rank为m, 从而存在m阶子矩阵$T(x)$满足$T(\varphi(p)) = 0$, 根据行列式的连续性, 在$\varphi(p)$的某个邻域K中$T(x)$都是非异阵, 因此$J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})$是列满秩矩阵, 因此秩恒为m(因为有m阶非异子矩阵且jacobian矩阵的rank至多为m), 因此在$\varphi^{-1}(K)$中dF是单射, 从而是浸入

如果dF_p是满的, 那么

$$J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x)$$

在$\varphi(p)$处的rank为n, 从而存在n阶子矩阵$T(x)$满足$T(\varphi(p)) = 0$, 根据行列式的连续性, 在$\varphi(p)$的某个邻域K中$T(x)$都是非异阵, 因此$J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})$是列满秩矩阵, 因此秩恒为n(因为有n阶非异子矩阵且jacobian矩阵的rank至多为n), 因此在$\varphi^{-1}(K)$中dF是满射, 从而是淹没

还有一类特殊的映射, 满足dF_p处处都是可逆的线性映射, 此时必有m=n, 可以证明F是**局部微分同胚**:

Definition 4.3 局部微分同胚

$F: M \to N$光滑流形之间的光滑映射. 如果对任何$p \in M$, 都存在p的邻域U使得$F|_U : U \to F(U)$是微分同胚, 那么称F为局部微分同胚.

Proposition 4.4 流形的反函数定理

M,N是n维光滑流形,M不带边. 对任何$p \in M$, dF_p都是$T_pM \to T_pN$的双射, 那么F是局部微分同胚

Proof: 任取$p \in M$, 取p和$F(p)$附近的坐标卡$(U,\varphi),(V,\psi)$, 通过缩小U不妨设$\varphi(U) \subseteq V$. 则

$$J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})$$

在$\varphi(p)$处是非异阵, 根据数学分析中的反函数定理, 存在$\varphi(p)$的邻域K和$\psi(F(p))$的邻域$Q \subseteq \psi(V)$使得

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : K \to Q$$

是可逆的, 且其逆映射$f : Q \to K$也是光滑函数. 定义

$$g(q) = \varphi^{-1} \circ f \circ \psi(q) \qquad q \in \psi^{-1}(Q)$$

显然g是$\psi^{-1}(Q)$上的光滑映射. 且对$p \in \varphi^{-1}(K)$, 有

$$g(F(p)) = \varphi^{-1} \circ f \circ \psi(F(p))$$

根据f的定义, 可知

$$f(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x)) = x \qquad \forall x \in K$$

因此对任何$p \in \varphi^{-1}(K)$, 必有

$$f(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(f(p))) = f(p)$$

从而

$$g(F(p)) = \varphi^{-1} \circ \varphi(p) = p$$

同理可得$F \circ g = id_{\psi^{-1}(Q)}$, 这给出了F是$\varphi^{-1}(K) \to \psi^{-1}(Q)$的微分同胚.

4.1.1 常秩定理

反函数定理其实是一个更一般的定理的特殊形式:

Theorem 4.5 常秩定理

M,N是m, n维光滑流形.$F : M \to N$是秩为r的光滑映射. 那么对任何$p \in M$, 存在坐标卡(U,φ)和$F(p)$的坐标卡(V,ψ)使得 $F(U) \subseteq V$, 且在这两组坐标卡下, 有坐标表示:

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x_1,..,x_m) = (x_1,..,x_r,0,..,0)$$

这称为**F的局部标准型**

Proof: 先证明$p = 0, F(p) = 0$, M,N分别是R^m, R^n的开子集的情形. 此时$DF(0)$的rank为r, 这意味着存在r阶非异子矩阵, 通过交换坐标轴[1], 不妨设$DF(0)$的前r行r列子矩阵就是非异阵. 记R^m中的坐标为$(x,y) = (x_1,..,x_r,y_1,..,y_{m-r})$, R^n中的坐标为$(v,w) = (v_1,...,v_r,w_1,..,w_{n-r})$. 那么

$$F(x,y) = (Q(x,y), R(x,y))$$

其中Q是F的前r个分量, R是F的后n-r个分量. 且$Q(x,y)$关于x的jacobian矩阵$\frac{\partial Q_i}{\partial x_j}(0,0)$就是$DF(0)$的前r行r列矩阵,

[1] 第一章中说明了这种变换给出的坐标卡和流形的光滑结构相容

因此是非异阵. 考虑映射$\varphi(x,y)=(Q(x,y),y):U\to R^m$, 那么

$$D\varphi(0,0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial Q_i}{\partial x_j}(0,0) & \frac{\partial Q_i}{\partial y_j}(0,0)\\ O & I_{m-r}\end{pmatrix}$$

因此$D\varphi$在(0,0)处为非异阵. 注意我们设$F(0)=0$, 所以$Q(0)=0,\varphi(0,0)=0$. 根据反函数定理, 存在0的邻域$U_0,\tilde{U}_0$使得

$$\varphi:U_0\to\tilde{U}_0$$

是微分同胚. 通过缩小U_0不妨设$\tilde{U}_0$是开正方体$(-\delta,\delta)^m$. 记

$$\varphi^{-1}(x,y)=(A(x,y),B(x,y))\qquad A:\tilde{U}_0\to R^r,B:\tilde{U}_0\to R^{m-r}$$

则

$$(x,y)=\varphi(A(x,y),B(x,y))=(Q(A(x,y),B(x,y)),B(x,y))$$

则$y=B(x,y),x=Q(A(x,y),B(x,y))=Q(A(x,y),y)$, 从而

$$\varphi^{-1}(x,y)=(A(x,y),y)$$

另一方面还能知道$Q(A(x,y),y)=x$, 所以

$$F\circ\varphi^{-1}(x,y)=(Q(\varphi^{-1}),R(\varphi^{-1}))=(Q(A(x,y),y),\tilde{R}(x,y))=(x,\tilde{R}(x,y))\qquad\tilde{R}=R\circ\varphi^{-1}:\tilde{U}_0\to R^{n-r}$$

计算它的jacobian矩阵给出了

$$D(F\circ\varphi^{-1})\begin{pmatrix}I_r & O\\ \frac{\partial\tilde{R}_i}{\partial x_j} & \frac{\partial\tilde{R}_i}{\partial y_j}\end{pmatrix}$$

复合一个微分同胚不改变$DF(0)$的rank(秩为r), 而上述矩阵的前r行r列是单位阵, 能通过初等行变换化为

$$\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & \frac{\partial\tilde{R}_i}{\partial y_j}\end{pmatrix}$$

这个矩阵的rank还是r, 因此右下分块必须是rank0的矩阵, 也就是说必须是O, 因此$\tilde{R}$是和y无关的函数, 因此根据$\tilde{U}_0$是开正方体可得

$$\tilde{R}(x,y)=\tilde{R}(x,0)$$

把$\tilde{R}(x,0)$记为$S(x)$, 那么

$$F\circ\varphi^{-1}(x,y)=(x,S(x))$$

然后取0的一个邻域

$$V_0=\left\{(v,w)\in N\middle|(v,0)\in\tilde{U}_0\right\}$$

又因为$\tilde{U}_0=(-\delta,\delta)^m$, 可得

$$F\circ\varphi^{-1}(\tilde{U}_0)\subseteq V_0$$

从而根据φ是微分同胚可知

$$F(U_0)\subseteq V_0$$

定义$\psi:V_0\to R^n$为

$$\psi(v,w)=(v,w-S(v))$$

则

$$\psi^{-1}(x,y)=(x,y+S(x))$$

因此ψ是$V_0\to\psi(V_0)$的微分同胚. 我们知道$(U_0,\varphi),(V_0,\psi)$都是和R^m,R^n的光滑结构相容, 所以自然是光滑坐标卡, 且在这两组坐标卡下,

$$\psi\circ F\circ\varphi^{-1}(x_1,.,x_r,y_1,..,y_{m-r})=(x_1,..,x_r,S(x)-S(x))=(x_1,..,x_r,0,..,0)\qquad(x,y)\in\tilde{U}_0$$

把y_j改成x_{r+j}, 就证明了欧式空间开集的情形.

然后考虑一般的情形, 设$p,F(p)$附近有坐标卡$(U,\xi),(V,\eta)$, 不妨设$\xi(p)=0,\eta(F(p))=0$, 那么

$$\eta\circ F\circ\xi^{-1}$$

是欧式空间开集之间的常秩映射, 就能用刚才的情形得到U_0,V_0和微分同胚ψ,φ使得

$$\psi\circ\eta\circ F\circ\xi^{-1}\circ\varphi^{-1}:\varphi(U_0)\to\psi(V_0)$$

具有形式

$$\psi\circ\eta\circ F\circ\xi^{-1}\circ\varphi^{-1}(x_1,..,x_m)=(x_1,..,x_r,0,..,0)$$

通过缩小U和V不妨设$\xi(U)\subseteq U_0,\eta(V)\subseteq V_0,F(U)\subseteq V$. 那么考虑坐标卡$(U,\varphi\circ\xi),(V,\psi\circ\eta)$, 根据$\varphi,\psi$是微分同胚可得这两个新坐标卡分别与M,N的光滑结构相容, 从而F在这两个坐标卡下的表示就具有我们想要的形式, 证毕

4.1.2 带边流形的常秩定理

现在设M是m维带边光滑流形, N是n维无边光滑流形. $F:M\to N$是光滑映射. 那么对于$p\in\partial M$的情形, F的坐标表示不能再成为欧式空间开集上的光滑函数, 而是一个不开不闭的集合A上的光滑函数, 需要结合光滑函数的定义, 利用A的邻域上的光滑函数$\tilde{F}$, 去得到F的局部标准型. 此处我们只考虑F是浸入的情形. 一般的常秩情形虽然也能得到F的局部标准型, 但证明比较复杂, 而且后文用不上.

如果N也是带边光滑流形, 这时的情况会复杂得多, F不一定能写成类似无边流形时的局部标准型

Theorem 4.6 边界点附近的局部标准型

M是m维光滑带边流形, N是n维光滑流形(无边). $F:M\to N$是浸入. 那么对任何$p\in\partial M$, 存在边界坐标卡(U,φ)和$F(P)$附近的坐标卡(V,ψ)满足$F(U)\subseteq V$, 且

$$\psi\circ F\circ\varphi^{-1}(x_1,..,x_m)=(x_1,..,x_r,0,..,0)$$

Proof: 和普通常秩定理的情形一样, 我们只需证明M,N分别是H^m,R^n的开子集, 且$F(p)=0,p=0$的情况(证明完这个情况之后可以照抄常秩定理的过程)

M是H^m的开子集所以存在r使得$B^+(0,r)\subseteq M$. 又F在$B^+(0,r)$上光滑, 所以存在$B^+(0,r)$在R^m中的邻域U和U上的光滑函数$\tilde{F}$满足$\tilde{F}|_{B^+(0,r)}=F$. 通过缩小r, 不妨设$B(0,r)\subseteq U$.

下面证明$d\tilde{F}_0=dF_0$. 设ι是$H^m\to R^m$的包含映射, 那么$F=\tilde{F}\circ\iota$, 所以

$$dF_0=d\tilde{F}_0\circ d\iota_0$$

Lemma 3.8证明了$d\iota_0:T_0H^m\to T_0R^m$是线性同构, 因此$dF_0$是单射可以推出$d\tilde{F}_0$是单射, 所以根据Proposition 4.2, $\tilde{F}$在0附近是个浸入, 通过缩小r, 不妨设$\tilde{F}$在$B(0,r)$上是浸入.

则有R^m, R^n中的坐标卡$(U_0, \varphi), (V_0, \psi)$使得

$$\psi \circ \tilde{F} \circ \varphi^{-1}(x_1, .., x_m) = (x_1, .., x_m, 0, .., 0)$$

(回忆浸入的rank必须为m) 通过缩小U_0, V_0不妨设$U_0 \subseteq B(0, r), \tilde{F}(U_0) \subseteq V_0$.

但是$\varphi(U_0 \cap H^m)$不一定在上半平面上. 我们需要做出一些调整: 首先根据φ是微分同胚可得$\varphi^{-1} \times id_{R^{n-m}}$是$\varphi(U_0) \times R^{n-m}$上的微分同胚, 令$\psi_0 = (\varphi^{-1} \times id_{R^{n-m}}) \circ \psi$, 则$\psi_0$是0的某个邻域K上的微分同胚, 从而

$$\psi_0 \circ F(x) = (\varphi^{-1} \times id_{R^{n-m}}) \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1} \circ \varphi(x)$$

$$= (\varphi^{-1} \times id_{R^{n-m}}) \circ \psi \circ \tilde{F} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi(x)$$

$$= (\varphi^{-1} \times id_{R^{n-m}})(\varphi(x), 0, .., 0)$$

$$= (x_1, ..x_m, 0, .., 0) \qquad \forall x \in U_0$$

根据U_0是R^m中开集, 可取r_2使得$B^+(0, r_2) \subseteq U_0 \cap B^+(0, r)$,且$\tilde{F}(B(0, r_2)) \subseteq K$ 则在坐标卡$(B^+(0, r_2), id_{H^m})$和(K, ψ_0), 满足$F(B^+(0, r_2)) = \tilde{F}(B^+(0, r_2)) \subseteq \tilde{F}(B(0, r_2)) \subseteq K$, 且

$$\psi_0 \circ F(x_1, .., x_m) = (x_1, .., x_m, 0, .., 0)$$

如果F是常秩的, 那么判定F是否是浸入/淹没/嵌入的条件可以非常简单:

Theorem 4.7 全局秩定理

M,N是光滑流形, $F : M \to N$是光滑常秩映射. 那么

- F是满射, 则F是淹没
- F是单射, 则F是浸入
- F是双射, 则F是微分同胚

Proof: 写出F的局部标准型

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x_1, .., x_m) = (x_1, .., x_r, 0, .., 0)$$

如果F是满射, 那么根据ψ, φ都是双射可得$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$必须是满射, 因此标准型的右边不能有0,这说明$r \geq n$, 所以$rankF \geq n$, 因此$rankF = n$, 因此$dF$是满射, 从而F是淹没

如果F是单射, 那么根据ψ, φ都是双射可得$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$必须是单射, 从而$r \geq m$. 因此$r = m$. 因此

$$J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}$$

所以dF是单射, 从而F是浸入

如果F是双射, 那么F既是淹没也是浸入, 所以dF_p是双射, 所以F是局部微分同胚. 又F是双射所以有F^{-1}, 只需证F^{-1}光滑. 对任何$q \in N$, 所以根据局部微分同胚可以取$p = F^{-1}(q)$的某个邻域U满足F是$U \to F(U)$的微分同胚.

再结合同胚是开映射可得$F(U)$是q的邻域. 又$F^{-1}|_{F(U)}$光滑(因为局部微分同胚), 所以根据p的任意性, F^{-1}光滑, 所以F是微分同胚

4.2　嵌入

有一种特殊的浸入, i.e 如果F是光滑流形M,N之间的浸入, 且$F: M \to F(M)$是拓扑同胚的话, 就称F是**嵌入**.

下面列出了一些使得单射浸入能成为嵌入的充分条件:

Proposition 4.8

M是m维光滑流形, N是n维光滑流形, $F: M \to N$是光滑单射浸入. 那么下面任何一条都能推出F是个嵌入

- F是开映射或闭映射
- F逆紧
- M是紧的
- $\partial M = \emptyset$且$m = n$

Proof: (1) 如果F是开映射, 那么F^{-1}连续, 因此F是拓扑同胚. 如果F是闭映射, 对任何一个M中的开集U, 都可知道$F(U) = F(M) - F(M - U)$, 其中M-U是闭的, 因此$F(M - U)$是闭的, 所以$F(U)$是开的, 所以F也是开映射, 所以F^{-1}连续, 所以F同胚

(2)F是局部紧T2空间M上的逆紧映射, 根据第一章习题可得F是闭的, 由(1)可得结论

(3)根据第一章习题可得F是闭的, 由(1)可得结论

(4)此时根据m=n可得F是浸入也是淹没. 所以是局部微分同胚, 因此根据本章习题4.4, F是开映射, 由(1)可得结论.

4.3　Exercises

Problem 4.1

M是n维无边光滑流形, N是n维带边流形, $F: M \to N$是光滑映射. 证明如果$p \in M$满足dF_p是非异阵(意为其坐标表示的Jacobian矩阵是非异阵), 那么$F(p) \in IntN$

Problem 4.2

M是紧光滑流形, 证明不存在$M \to R^k, k > 0$的光滑淹没

Problem 4.3

证明拓扑覆盖映射$\pi: E \to M$是proper(逆紧)的, 当且仅当其纤维是有限的

Problem 4.4

证明局部微分同胚是开映射

Problem 4.4

证明淹没是开映射

Problem 4.5

M是紧的光滑流形,N是连通的光滑流形,则每个$M \to N$的淹没都是满射.

第五章　子流形

5.1　嵌入子流形

上一章我们介绍了一个光滑映射什么时候能成为嵌入: 单射浸入且是到像集的同胚. 借此我们可以定义一类子流形:

Definition 5.1

M是n维光滑流形, S是M的一个子集, 且在子空间拓扑下成为一个光滑流形. 如果包含映射$\iota: S \to M$是嵌入, 则称S是M的**嵌入子流形**

5.1.1　嵌入子流形的结构

嵌入子流形S在每个局部都能看成M的切片:

Theorem 5.2

M是n维光滑流形, S是M的子集. 则S是M的k维嵌入子流形, 当且仅当对任何$p \in S$, 存在M中p附近的坐标卡(U, φ)使得

$$U \cap S = \left\{ q \in U \middle| \varphi^i(q) = 0, k+1 \leq i \leq n \right\}$$

Proof: $\Rightarrow$ 因为$\iota: S \to M$是嵌入, 所以是浸入, 所以rank为k. 常秩定理给出了存在S中p附近的坐标卡(V, ψ)和M中的坐标卡(U, φ)使得

$$\varphi \circ \iota \circ \psi^{-1}(x_1, .., x_k) = (x_1, ..., x_k, 0, .., 0)$$

这意味着对任何的$q \in V$, 不妨设$\psi(q) = x$, 则有

$$\varphi(q) = \varphi \circ \iota \circ \psi^{-1}(x) = (x_1, ., x_k, 0, .., 0)$$

也就是说对V中的q, $\varphi(q)$的后n-k的分量确实均为0.

因为V是S的开子集, 在子空间拓扑下, 存在M的开子集K使得$V = K \cap S$, 又存在r使得$B_n(0, r) \subseteq \varphi(U)$, $B_k(0, r) \subseteq \psi(V)$, 因此通过缩小U和V不妨设$\varphi(U) = B_n(0, r)$, $\psi(V) = B_k(0, r)$, 则

$$U \cap S \subseteq \left\{ q \in U \middle| \varphi^i(q) = 0, k+1 \leq i \leq n \right\}$$

只需再证明反方向的包含. 任取$q \in U$, 且有$\varphi^i(q) = 0, k+1 \leq i \leq n$, 可设

$$(x_1, .., x_k, 0, .., 0) = \varphi(q)$$

从而$\sum_{i=1}^{k}|x_i|^2 < r^2$, 这给出了$\varphi(q) = (x_1,..,x_k) \in B_k(0,r) = \psi(V)$, 那么根据$\varphi$是双射可得

$$\psi^{-1}(x_1,..,x_k) = \varphi^{-1}(x_1,.,x_k,0,..,0) = q$$

所以$q \in S$, 因此

$$U \cap S = \left\{q \in U \middle| \varphi^i(q) = 0, k+1 \le i \le n\right\}$$

$\Leftarrow$ 显然S是T2且第二可数, 这都由M继承而来. 又对任何$p \in S$, 存在M中p附近的坐标卡(U,φ)使得

$$U \cap S = \left\{q \in U \middle| \varphi^i(q) = 0, k+1 \le i \le n\right\}$$

通过缩小U不妨设$\varphi(U)$是某个球体$B(0,r)$, 令

$$\tilde{\varphi}(q) = (\varphi^1(q),..,\varphi^k(q)) \qquad q \in U \cap S$$

显然$\tilde{\varphi}$连续, 又可定义

$$h(x_1,..,x_k) = \varphi^{-1}(x_1,..,x_k,0,..,0)$$

所以可知h和$\tilde{\varphi}$互逆, 从而$\tilde{\varphi}$成为一个$U \cap S \to B_k(0,r)$的同胚, 记$V = U \cap S$, 则$(V,\tilde{\varphi})$就是S中p附近的一个坐标卡, 从而S是局部欧式空间, 维数是k. 在子空间拓扑下, $\iota : S \to S$显然是一个同胚. 下面我们赋予S光滑结构: 我们刚才取的坐标卡就是光滑相容的. 注意到对任何$(V,\tilde{\varphi})$和$(K,\tilde{\psi})$, 根据这两个坐标卡的构造,

$$V = U \cap S \qquad \tilde{\varphi}(p) = (\varphi^1(p),..,\varphi^k(p)) \qquad K = X \cap S \qquad \tilde{\psi}(p) = (\psi^1(p),..,\psi^k(p))$$

其中$(U,\varphi),(X,\psi)$都是满足题意的M中的坐标卡. 这给出了

$$\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1}(x_1,..,x_k) = \tilde{\varphi} \circ \psi^{-1}(x_1,..,x_k,0,..,0)$$

$$= (\varphi^1 \circ \psi^{-1}(x_1,.,x_k,0,..,0),....,\varphi^k \circ \psi^{-1}(x_1,.,x_k,0,..,0))$$

根据φ和ψ的光滑相容性, 可得$\varphi^i \circ \psi^{-1}$都光滑, 因此S的不同坐标卡光滑相容, 又这种坐标卡可以覆盖S, 因此是一个图册, 决定了唯一的光滑结构且直接计算得到

$$\varphi \circ \iota \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x_1,..,x_k) = (x_1,..,x_k,0,..,0)$$

因此ι是个浸入, 从而成为一个嵌入, 从而S是M的维数为k的嵌入子流形

5.1.2 水平集

了解了嵌入子流形的结构之后, 我们来看如何构造嵌入子流形. 首先介绍水平集的概念. 对一个映射$F: M \to N$, 和$c \in N$, $F^{-1}(c)$称为F在c处的**水平集**, 当然有可能是空集

Theorem 5.3 常秩水平集定理

M是m维光滑流形, N是n维光滑流形, $F: M \to N$是秩为r的常秩映射, $c \in F(M)$, 那么$F^{-1}(c)$是M的m-r维嵌入子流形

Proof: 常秩定理给出了, 对任何$p \in F^{-1}(c)$, 存在M中p附近的坐标卡(U,φ)和N中$F(p)$附近的坐标卡(V,ψ)使得

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x_1,....,x_m) = (x_1,..,x_r,0,..,0)$$

不妨设$\psi(c)=0$, 那么对$p\in U$, 则又$F(p)=c$当且仅当

$$\varphi^1(p)=\cdots=\varphi^r(p)=0$$

因此

$$p\in F^{-1}(c)\cap U\Leftrightarrow\varphi^1(p)=\cdots=\varphi^r(p)=0$$

通过交换坐标顺序, 把前r个换到后r个, 记令新函数$\tilde{\varphi}=(\varphi^{r+1},..,\varphi^m,\varphi^1,..,\varphi^r)$, 第一章已经说过$(U,\tilde{\varphi})$还是M中的光滑坐标卡, 且由上可得

$$U\cap F^{-1}(c)=\left\{q\in U\middle|\tilde{\varphi}^i(q)=0,m-r+1\leq q\leq m\right\}$$

因此根据嵌入子流形的结构定理, $F^{-1}(c)$是M的n-r维嵌入子流形.

由上可知光滑浸入的水平集肯定是嵌入子流形, 事实上只要F在每个$p\in F^{-1}(c)$处的切映射都是满射, 就能得到$F^{-1}(c)$是嵌入子流形, 这样的p称为**正则点**, 这样的c称为**正则值**. 不是正则点的点称为**临界点**, 不是正则值的值称为**临界值**. 正则值的水平集称为**正则水平集**

Theorem 5.4 正则水平集定理

M是m维光滑流形, N是n维光滑流形, $F:M\to N$是光滑映射, c是F的正则值, 那么$F^{-1}(c)$是M的m-n维嵌入子流形

Proof: Proposition 4.2说明使得dF_p是满射的p的全体是M的开子集U, 且显然$F^{-1}(c)\subseteq U$(因为$F^{-1}(c)$全都是F的正则点). 又U是M的开子集, 从而$F|_U:U\to N$是光滑映射, 且根据U的性质可得$F|_U$是浸入, 从而根据常秩水平集定理, $F^{-1}(c)$是U的嵌入子流形, 维数为$dimU-n=m-n$.

又U是M的开子集, 所以包含映射$\iota_U:U\to M$是光滑嵌入. 又$\iota:F^{-1}(c)\to U$也是光滑嵌入, 所以二者的复合: $F^{-1}(c)\to M$还是光滑嵌入, 因此$F^{-1}(c)$是M的m-n维嵌入子流形

Proposition 5.5

S是m维光滑流形M的子集. 那么S是M的k维嵌入子流形, 当且仅当对任何$p\in S$, 存在p在M中的邻域U和光滑淹没$\Phi:U\to R^{m-k}$满足

$$U\cap S=\Phi^{-1}(0)$$

Proof: $\Rightarrow$ 在p附近存在M的坐标卡(U,φ)使得

$$U\cap S=\left\{q\in U\middle|\varphi^i(q)=0,k+1\leq i\leq m\right\}$$

定义

$$\Phi(q)=(\varphi^{k+1}(q),..,\varphi^m(q))\qquad U\to R^{m-k}$$

则把U视为光滑流形时, U可被一个坐标卡(U,φ)覆盖, 因此Φ的坐标表示为

$$\Phi\circ\varphi^{-1}(x_1,..,x_m)=(x_{k+1},..,x_m)$$

因此$J(\Phi\circ\varphi^{-1})$在$\varphi(U)$中是满秩的,秩为m-k, 从而是个淹没. 且

$$q\in U\cap S\qquad 当且仅当\qquad \Phi(q)=0$$

$\Leftarrow$ 根据正则水平集或常秩水平集定理, $U\cap S$是U的$m-(m-k)=k$维嵌入子流形, 所以对任何$p\in S\cap U$,存在U中

的坐标卡(V,ψ)使得

$$V\cap S=\left\{q\in V\middle|\psi^i(q)=0,k+1\leq i\leq m\right\}$$

而U作为M的开子集, 其光滑结构和M的光滑结构是相容的, 所以U中的坐标卡都是M中的坐标卡, 所以(V,ψ)是M中的坐标卡. 根据p的任意性, 用正则子流形的结构定理就能得出结论.

如果$S\subseteq M$是嵌入子流形, 且光滑映射$\Phi:M\to N$满足S是Φ的一个正则水平集, 那么Φ称为**S的定义映射**. 一般的, 如果存在M的开子集U和光滑映射$\Phi:U\to N$, 使得$S\cap U$是Φ的某个正则水平集, 则Φ称为**S的局部定义映射**. 前一个性质说明嵌入子流形的每一点附近都有一个局部定义映射.

5.2　嵌入子流形的性质

Proposition 5.6 在定义域上的限制

S是m维光滑流形M的k维嵌入子流形, F是M上的光滑映射, 则$F\Big|_S$ 也是光滑映射

Proof:

$$F\Big|_S=F\circ\iota$$

而光滑映射的复合还是光滑的, 所以$F\Big|_S$ 光滑.

另一种方式是用嵌入子流形的结构定理, 对任何$p\in S$, 存在坐标卡(U,φ)使得

$$S\cap U=\left\{q\in U\middle|\varphi^i(q)=0,k+1\leq i\leq m\right\}$$

且$(V,\tilde{\varphi})$就是S中p附近的坐标卡(其中$V=U\cap S$, $\tilde{\varphi}(q)=(\varphi^1(q),..,\varphi^k(q))$), 因此

$$F\Big|_S\circ\tilde{\varphi}^{-1}(x_1,..,x_k)=F\circ\varphi^{-1}(x_1,..,x_k,0,..,0)$$

右边光滑, 所以左边光滑, 根据p的任意性, $F|_S$光滑

Proposition 5.7 在值域上的限制

M是m维光滑流形,N是n维光滑流形, 且S是N的k维嵌入子流形, $F:M\to N$是光滑映射, 且$F(M)\subseteq S$, 则把F视为$M\to S$的映射时, 也是光滑的

Proof:对任何$F(p)\in S$, 存在N中$F(p)$附近的坐标卡(U,φ)使得

$$U\cap S=\left\{q\in U\middle|\varphi^i(q)=0,k+1\leq i\leq n\right\}$$

令$\tilde{\varphi}=(\varphi^1,..,\varphi^k)$, 那么$(U\cap S,\tilde{\varphi})$是S中$F(p)$附近的坐标卡, 记$\pi$是$R^n$到前k个分量的投影,显然$\pi:R^n\to R^k$光滑, 因此有

$$\tilde{\varphi}\circ F\circ\psi^{-1}=\pi\circ\varphi\circ F\circ\psi^{-1}$$

右边光滑, 所以左边光滑.

下面的结论告诉我们, 使得S成为M的嵌入子流形的光滑结构是唯一的

Proposition 5.8

M是m维光滑流形, S是M的k维嵌入子流形, 则Theorem 5.2给出的光滑结构是唯一一个使得S成为M的嵌入子流形的光滑结构

Proof: 假设还有另一组光滑结构, 在这个光滑结构下S记为$\tilde{S}$, 这个光滑结构下的包含映射记为$\tilde{\imath}$, 则根据$\tilde{\imath}:\tilde{S}\to M$光滑且$\tilde{\imath}(\tilde{S})=S$, S是M的嵌入子流形, 可利用Proposition 5.7得到

$$\tilde{\imath}:\tilde{S}\to S$$

是光滑映射. 取$\tilde{S}$中的任意坐标卡(U,φ), 和S中的任意坐标卡(V,ψ), 则根据$\tilde{\imath}$光滑可得

$$\psi\circ\varphi^{-1}=\psi\circ\tilde{\imath}\circ\varphi^{-1}$$

右边光滑所以左边光滑.

另一方面, $\tilde{\imath}$在$\tilde{S}$上是嵌入所以常秩, 又$\tilde{\imath}:\tilde{S}\to S$是双射, 所以根据全局秩定理, $\tilde{\imath}:\tilde{S}\to S$是微分同胚. 因此有光滑逆映射,逆映射就是$S\to\tilde{S}$的恒等映射$id$, 所以id是光滑的, 因此

$$\varphi\circ\psi^{-1}=\varphi\circ id\circ\psi^{-1}$$

右边光滑所以左边光滑, 因此 $\tilde{S}$中的任意坐标卡和S中的任意坐标卡(V,ψ)是光滑相容的, 因此它们决定的光滑结构是相同的, 从而$\tilde{S}$和S的光滑结构一样, 证毕.

5.3　子流形的切空间

假设S是M的子流形, 那么我们可以把T_pS视为$d\iota_p(T_pS)$等同, 从而T_pS成为了T_pM的线性子空间, 这个子空间有一些特殊的性质:

Proposition 5.9

M是m维光滑流形, S是M的k维嵌入子流形, U是M中的开集, N是n维光滑流形. 如果$\Phi:U\to N$是S的一个局部定义映射(这给出了k=m-n), 那么对任何$p\in S\cap U$, 都有

$$T_pS=Ker\ d\Phi_p=\left\{v\in T_pM\middle|d\Phi_p(v)=0\right\}$$

Proof: 根据局部定义映射的定义, $S\cap U$是Φ的某个正则值的水平集, 设为$\Phi^{-1}(c)$. 则$\Phi|_{S\cap U}$是常值函数(注意到还是光滑的, 因为$S\cap U$是U的嵌入子流形), 因此对任何$v\in T_pS$, 都可以知道

$$d\Phi_p(v)(f)=v(f\circ\Phi)$$

而$f\circ\Phi$在$S\cap U$上为c,而$S\cap U$是p在S中的一个邻域, 所以根据$v\in T_pS$可得$v(f\circ\Phi)=0$, 因此根据f的任意性可知$v\in Ker\ d\Phi_p$, 从而

$$T_pS\subseteq Ker\ d\Phi_p$$

又$d\Phi_p$是一个m维流形到n维流形的切映射, 且对任何$p\in S\cap U=\Phi^{-1}(c)$, $d\Phi_p$都是满射, 因此$d\Phi_p$的rank为n. 所以$dim(Ker\ d\Phi_p)=m-n$.

另一方面, $S\cap U$是U的m-n维嵌入子流形(正则水平集定理), 因此$dimT_pS=m-n$, 所以T_pS和$Ker\ d\Phi_p$是维数相同的线性空间. 又$T_pS\subseteq Ker\ d\Phi_p$, 所以二者必须相等.

Proposition 5.10 常秩水平集的切空间

S是某个$M \to N$的常秩映射Φ的水平集(因此S是M的嵌入子流形), 证明

$$T_pS = Ker\ d\Phi_p \qquad \forall p \in S$$

Proof: 既然是水平集, 那么可设$S = \Phi^{-1}(c)$, 同上, 对任何$v \in T_pS$, 都可以知道

$$d\Phi_p(v)(f) = v(f \circ \Phi)$$

而$f \circ \Phi$在S上为常数$f(c)$, 因此$d\Phi_p(v)(f) = 0$, 所以根据f的任意性 $v \in Ker\ d\Phi_p$. 另一方面, 设$rank\Phi = r$, 则

$$dimKer\ d\Phi_p = dimM - r \qquad dimS = m - r$$

因此$dimT_pS = dimM - r$, 再根据$T_pS \subseteq Ker\ d\Phi_p$可得$T_pS = Ker\ d\Phi_p$

5.4 作为嵌入子流形的∂M

Theorem 5.11 ∂M是嵌入子流形

M是n维带边光滑流形, 前面已经证明∂M是n-1维无边光滑流形. 事实上∂M是M的嵌入子流形

Proof: 回忆∂M上的光滑结构. 对任何$p \in \partial M$, 存在M中p附近的边界坐标卡(U, φ), 从而可以定义∂M中p附近的坐标卡

$$(U \cap \varphi^{-1}(H^n), \pi \circ \varphi)$$

其中π是R^n到前n-1个分量的投影, $(\pi \circ \varphi)^{-1}(x_1, ..., x_{n-1}) = (x_1, .., x_{n-1}, 0)$. 以上内容可参考Proposition 1.16, 在子空间拓扑下, $\iota : \partial M \to \partial M$显然是拓扑同胚.

又

$$\varphi \circ \iota \circ (\pi \circ \varphi)^{-1}(x_1, .., x_{n-1}) = \varphi \circ \iota \circ \varphi^{-1}(x_1, .., x_{n-1}, 0) = (x_1, .., x_{n-1}, 0)$$

所以ι是浸入, 因此ι是嵌入. 从而∂M在Proposition 1.16的光滑结构下成为嵌入子流形.

另一个方法:

根据Proposition 1.14, $q \in U \cap \partial M$当且仅当

$$\varphi^n(q) = 0$$

所以存在光滑结构使得∂M可以成为M的嵌入子流形, 由第一种方法可得Proposition 1.16的光滑结构也能使∂M成为嵌入子流形, 所以根据光滑结构的唯一性, ∂M的光滑结构就是Proposition 1.16的光滑结构

我们可以给带边流形边界处的切空间的元素进行分类. 定义$v \in T_pM - T_p\partial M$为**内切向量**, 如果存在光滑曲线$\gamma : [0, \epsilon) \to M$满足$\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. 定义$v \in T_pM - T_p\partial M$为**外切向量**, 如果存在光滑曲线$\gamma : (-\epsilon, 0] \to M$满足$\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$

Proposition 5.12

M是n维带边光滑流形, $p \in \partial M$, 则边界坐标卡(U,φ)给出了一组基底$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$. 如果把$v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$和$(v_1,..,v_n)$视为等同, 那么

- $T_p\partial M$=$\left\{v \in T_pM \middle| v_n = 0\right\}$
- 内切向量=$\left\{v \in T_pM \middle| v_n > 0\right\}$
- 外切向量=$\left\{v \in T_pM \middle| v_n < 0\right\}$

显然这三个集合互不相交, 且并集为T_pM,而且由定义可得内切向量和外切向量不依赖于坐标卡的选取

Proof: 首先看$T_p\partial M$

注意到

$$U \cap \partial M = \left\{q \in U \middle| \varphi^n(q) = 0\right\}$$

且$\varphi^n \circ \varphi^{-1}(x_1,...,x_n) = x_n$, 所以$\varphi^n$是个淹没, 且$U \cap \partial M$是$\varphi^n$在0处的水平集, 因此$\varphi^n$是$\partial M$的局部定义映射, 根据Proposition 5.9,

$$T_p\partial M = Ker\ d\varphi^n_p$$

任取$v \in Ker\ d\varphi^n_p$, 那么可设$v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$, 且

$$d\varphi^n_p(v)(f) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \varphi^n) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f \circ \varphi^n \circ \varphi^{-1}(x_1,..,x_n)}{\partial x_i} \qquad \forall f \in C^\infty(R)$$

$$= \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_i} = v_n \frac{df}{dx}\Big|_{x_n}$$

因此$d\varphi^n_p(v) = 0$当且仅当$v_n = 0$, 第一条证毕

然后看内切向量. 根据内切向量的定义, v是内切向量当且仅当存在光滑曲线$\gamma : [0,\epsilon) \to M$, 满足$\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. 那么根据3.5节的内容可知

$$(v_1,..,v_n) = (\frac{d\varphi^1 \circ \gamma}{dt}\Big|_{t=0},...,\frac{d\varphi^n \circ \gamma}{dt}\Big|_{t=0})$$

注意到$\varphi^n(q) > 0$因为$\varphi(U) \in H^n$, 且$\varphi^n(p) = 0$因为$p \in \partial M$, 因此用极限的保号性可知

$$\frac{d\varphi^n \circ \gamma}{dt}\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi^n \circ \gamma(t) - 0}{t} \geq 0$$

又内切向量不能在$T_p\partial M$里, 所以$\frac{d\varphi^n \circ \gamma}{dt}\Big|_{t=0}$必须$>0$. 这说明内切向量含于$\left\{v \in T_pM \middle| v_n > 0\right\}$. 反过来, 不妨设$\varphi(U) = B^+(0,1), \varphi(p) = 0$, 设$v$满足$v_n > 0$, 因为U是p的邻域, 所以存在$\epsilon$使得当$t \in [0,\epsilon)$时, $(tv_1,..,tv_n) \in \varphi(U)$, 定义

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}(tv_1,..,tv_n)$$

则$\gamma'(0) = (v_1,..,v_n)$, 因此$\left\{v \in T_pM \middle| v_n > 0\right\}$含于内切向量, 从而两个集合相互包含, 因此相等

然后看外切向量, 根据外切向量的定义,v是内切向量当且仅当存在光滑曲线$\gamma : (-\epsilon,0] \to M$, 满足$\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. 那么根据3.5节的内容可知

$$(v_1,..,v_n) = (\frac{d\varphi^1 \circ \gamma}{dt}\Big|_{t=0},...,\frac{d\varphi^n \circ \gamma}{dt}\Big|_{t=0})$$

注意到$\varphi^n(q)>0$因为$\varphi(U)\in H^n$,且$\varphi^n(p)=0$因为$p\in\partial M$, 因此极限的保号性可知

$$\left.\frac{d\varphi^n\circ\gamma}{dt}\right|_{t=0}=\lim_{t\to 0^-}\frac{\varphi^n\circ\gamma(t)-0}{t}\leq 0\qquad (\text{分子非负, 分母非正})$$

又外切向量不能在$T_p\partial M$里, 所以$v_n<0$, 这说明外切向量含于$\left\{v\in T_pM\middle|v_n<0\right\}$.

反过来, 设v满足$v_n<0$, 不妨设$\varphi(U)=B^+(0,1),\varphi(p)=0$, 因为U是p的邻域, 所以存在$\epsilon$使得当$t\in(-\epsilon,0]$时, $(tv_1,..,tv_n)\in\varphi(U)=B^+(0,1)$(t不能是正数, 因为$v_n<0$, 而要落在半球内需要保证最后一个分量非负), 定义

$$\gamma(t)=\varphi^{-1}(tv_1,..,tv_n)$$

则$\gamma(0)=\varphi^{-1}(0)=p,\gamma'(0)=(v_1,..,v_n)$, 因此$\left\{v\in T_pM\middle|v_n<0\right\}$含于外切向量, 从而两个集合相互包含, 因此相等

Proposition 5.13 边界定义映射

M是n维带边光滑流形, 则存在一个光滑函数$f:M\to[0,\infty)$, 满足$f^{-1}(0)=\partial M$, 且0是f的正则值(i.e df_p在$p\in\partial M$处的rank为1, i.e $df_p\neq 0,\forall p\in\partial M$). f称为**边界定义映射**

Proof: 取可数个覆盖M的坐标卡, 设为(U_i,φ_i), 定义

$$f_i(p)=\begin{cases}1 & U_i\text{是内坐标卡}\\ \varphi_i^n(p) & U_i\text{是边界坐标卡}\end{cases}\qquad\forall p\in U_i$$

因此, $f_i(p)>0$当且仅当$p\in IntM$, $f_i(p)=0$当且仅当$p\in\partial M$. 令ψ_i是从属于U_i的单位分解, 定义

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i f_i$$

显然$f\geq 0$且$f^{-1}(0)=\partial M$, 只需证$p\in\partial M$都是f的正则点. 设$v\in T_pM$是一个指向内的向量, 把包含p的U_i都找出来, 则$f_i(p)=0$成立, 且

$$d(f_i)_p(v)=d(\varphi_i^n)_p(v)$$

在坐标卡(U_i,φ_i)中考虑基底$(\frac{\partial}{\partial x^i})$, 则$v$有展开

$$v=\sum_{j=1}^n v_j^i\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$$

从而对任何$g\in C^\infty([0,\infty))$, 都有

$$d(\varphi_i^n)_p(v)(g)=v(g\circ\varphi_i^n)=\sum_{j=1}^n v_j\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p g\circ\varphi_i^n$$

$$=\sum_{j=1}^n v_j^i\left.\frac{\partial g\circ\varphi_i^n\circ\varphi_i^{-1}}{\partial x_j}\right|_{\varphi(p)}=\sum_{j=1}^n v_j^i\left.\frac{\partial g(x_n)}{\partial x_j}\right|_{\varphi(p)}=v_n^i\frac{\partial g}{\partial x}|_{\varphi_i^n(p)}$$

所以结合$\varphi_i^n(p)=0$可得

$$d(f_i)_p(v)=v_n^i\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_0\neq 0$$

又

$$\begin{aligned}df_p(v) &= \sum_{p\in U_i} f_i(p)d(\psi_i)_p(v) + \psi_i(p)d(f_i)_p(v)\\ &= \sum_{p\in U_i} \psi_i(p)d(f_i)_p(v)\end{aligned}$$

刚才已经得出$d(f_i)_p(v)$是$T_0[0,\infty)$中的$v_n^i\frac{\partial}{\partial x}|_0$，且根据v是指向内的可知$v_n^i$都是正数，又使得$\psi_i(p)\neq 0$的i只有有限个，而有限个$v_n^i$(正数)相加还是正数，因此$df_p$满射(因为$T_0[0,\to)$是一维空间)，因此p是正则点,0 是正则值

Proposition 5.14 用边界定义映射对切向量分类

M是n维带边光滑流形，$p\in\partial M$. 则对任何一个边界定义映射f，$v\in T_pM$是指向内的，当且仅当$vf>0$. 指向外，当且仅当$vf<0$. $v\in T_p\partial M$，当且仅当$vf=0$

Proof: 取p附近的边界坐标卡(U,φ)，不妨设$\varphi(U)=B^+(0,1),\varphi(p)=0$，那么注意到

$$vf=\sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)}$$

对$i\neq n$，我们有

$$\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)}=\lim_{h\to 0}\frac{f\circ\varphi^{-1}(0...,0,h,0,..,0)-f\circ\varphi^{-1}(0,...,0)}{h}$$

如果把$f\circ\varphi^{-1}(...,h,..,0)$记为$g(h)$，那么$g(h)\geq 0$，且在$(-1,1)$中可微，$g(0)=0$，从而根据可导极值点必定是逐点可以给出$g'(0)=0$，从而$\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)}=0$，这给出了

$$vf=v_n\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_n}\Big|_0$$

又根据极限的保号性，

$$\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_n}\Big|_0=\lim_{h\to 0+}\frac{f\circ\varphi^{-1}(0,..,0,h)-f\circ\varphi^{-1}(0,...,0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f\circ\varphi^{-1}(0,..,0,h)-f(p)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f\circ\varphi^{-1}(0,..,0,h)}{h}\geq 0$$

(因为$f\geq 0$) 如果$\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_n}\Big|_0=0$，则任取$h\in C^\infty([0,\infty))$,

$$\begin{aligned}df_p(v)(h)=v(h\circ f)&=\sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial h\circ f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)=0}\\ &=\sum_{i=1}^n v_i\frac{dh}{dt}|_0\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_0=\frac{dh}{dt}(0)v_n\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_n}\Big|_0=0\end{aligned}$$

这将给出$df_p(v)=0$恒成立，与p是f的正则点矛盾，所以$\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_n}\Big|_0>0$，因此由

$$vf=v_n\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_n}\Big|_0$$

可以知道，v指向内当且仅当$v_n>0$当且仅当$vf>0$

v指向外当且仅当$v_n<0$当且仅当$vf<0$. $v\in T_p\partial M$当且仅当$v_n=0$当且仅当$vf=0$

5.5 Exercise

Problem 5.1

S是M的嵌入子流形, 那么对任何一个$f \in C^\infty(S)$, 都存在S在M中的邻域U, 使得存在$g \in C^\infty(U)$且$g\big|_S = f$

Problem 5.2

上一题中, 如果S到M的嵌入是proper(逆紧)的, 那么证明g可以是$C^\infty(M)$的

第六章 Sard定理

6.1 零测集

在实分析中我们接触了零测集的概念, 它们代表了一类“可忽略”的集合, 在光滑流形上我们有时也要考虑除去流形上“可忽略”的一些点, 因此可以把零测集引入到光滑流形上来. 通过光滑流形与欧式空间局部同胚的特性, 我们可以定义光滑流形M上的零测集的概念:

Definition 6.1

M是n维光滑流形, A是M的子集. 称A为零测集, 如果存在一组M的坐标卡$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$使得$U_\alpha$覆盖A且满足$\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha)$是$R^n$中的零测集

流形上的零测集这个概念是良定义的, 在说明这件事之前, 我们需要一个引理, 它是实分析中“绝对连续函数把零测集映射为零测集”在高维空间下的推广, 当然此处我们只需考虑光滑函数:

Lemma 6.2

A是R^n中的零测集, F是$A \to R^n$的光滑映射, 那么$F(A \cap U)$是R^n中的零测集.

Proof: $m(A \cap U) = 0$, 因此$A \cap U$也是零测集, 从而我们不妨设$A \subseteq U$, 对任何$p \in A$, 都存在一个邻域$U_p \subseteq U$, 使得存在U_p上的光滑函数F_p, 满足$F_p|_{A\cap U_p} = F$, 再取以p球心, 半径足够小的一个球体V_p, 满足$\overline{V}_p \subseteq U_p$, 那么$\cup_{p\in A} V_p$组成了A的开覆盖, 根据$R^n$林德洛夫性质, 可以取可数子覆盖$\cup_{j=1}^{n} V_{p_j}$, 在每个$V_{p_j}$上, 我们知道$\overline{V}_{p_j} \subseteq U_{p_j}$, 因此存在常数$C_j$使得

$$\|F(x) - F(y)\| = \|F_{p_j}(x) - F_{p_j}(y)\| \leq C_j |x - y| \qquad x, y \in V_{p_j}$$

又$F(A) = \cup_{i=1}^{\infty} F(A \cap V_{p_j})$, 那么根据可数个零测集的并还是零测集, 可以知道只需证$F(A \cap V_{p_j})$是零测集, 因此不妨设$A \in V_{p_j}$.

根据A是零测集, 则对任何的$\epsilon > 0$, 存在一组覆盖A的开正方体Q_i使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(Q_i) < \epsilon$$

则由$A \subseteq V_{p_j}$可得$Q_i \cap V_{p_j}$还是A的开覆盖(j是固定的), 取定$x_i \in Q_i \cap V_{p_j}$, 则对任何$y \in Q_i \cap V_{p_j}$, 都有

$$\|F(x_i) - F(y)\| \leq C_j \|x_i - y\| \leq C_j \sqrt{n} d_i$$

其中d_i是Q_i的边长.

这说明$F(Q_i\cap V_{p_j})\subseteq B(F(x_i),C_j\sqrt{n}d_i)$, 从而

$$m(F(A))=m(\cup_{i=1}^{\infty}F(Q_i\cap V_{p_j}))\le\sum_{i=1}^{\infty}m(Q_i\cap V_{p_j})\le\sum_{i=1}^{\infty}m(B(F(x_i),C_j\sqrt{n}d_i))=m(B(0,1))C_j^n n^{\frac{n}{2}}\sum_{i=1}^{\infty}d_i^n$$

$$=m(B(0,1))C_j^n n^{\frac{n}{2}}\sum_{i=1}^{\infty}m(Q_i)<m(B(0,1))C_j^n n^{\frac{n}{2}}\epsilon$$

根据ϵ的任意性, 可以知道$F(A)$是R^n中的零测集.

然后我们可以说明光滑流形上的“零测集”是良定义的概念:

Proposition 6.3

M是n维带边或不带边光滑流形, 如果A是M上的零测集, 那么对于任何一组覆盖A的坐标卡(V_β,ψ_β), 均有$\psi_\beta(V_\beta\cap A)$是$R^n$中的零测集(n是M的维数)

Proof: 如果A是零测集, 根据定义, 可得存在一组覆盖A的坐标卡

$$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$$

满足$\varphi_\alpha(U_\alpha)$是R^n中的零测集. 那么根据M的第二可数性质, 可以选取$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$的可数子覆盖, 记为$(U_i,\varphi_i)$, 则

$$\psi_\beta(V_\beta\cap A)=\cup_{i=1}^{\infty}\psi_\beta(V_\beta\cap A\cap U_i)=\cup_{i=1}^{\infty}(\psi_\beta\circ\varphi_i^{-1})\circ\varphi_i(V_\beta\cap A\cap U_i)$$

$\varphi_i(V_\beta\cap A\cap U_i)$是零测集$\varphi_i(A\cap U_i)$的子集, 因此也是零测的, 因此用Lemma 6.2可得$(\psi_\beta\circ\varphi_i^{-1})\circ\varphi_i(V_\beta\cap A\cap U_i)$是$R^n$中的零测集, 而可数个零测集的并还是零测集, 因此$\psi_\beta(V_\beta\cap A)$是零测集

6.2　Sard定理

Theorem 6.4 Sard's theorem

M, N是带边或不带边光滑流形, F是M到N的光滑映射, 那么F的临界值的全体在N中是零测集

Proof: 令m=dimM, n=dimN. 对m用数学归纳法. 当$m=0$时, 如果n=0, 则F没有临界点(切空间是0维的), 如果$n>0$, 那么$F(M)$是可数集, 自然零测.

现在固定m,假设定理对1,2,...,m-1成立. 因为光滑流形可被可数个坐标卡覆盖, 所以只需证明F是R^m或H^m的开子集U到R^n的光滑函数的情形即可.

记$C\subseteq U$是F的临界点的全体, 定义

$$C_k=\left\{x\in C\middle|F\text{的所有i阶偏导数在x处为}0,1\le i\le k\right\}$$

根据F的光滑性, 可知F的各阶偏导数连续, 因此C_k都是闭集, 下面通过3步证明$F(C)$是R^n中的零测集

- $F(C-C_1)$零测
- $F(C_i-C_{i+1})$零测
- 对$k>\frac{m}{n}-1$, $F(C_k)$零测. 需要这一步是因为, 有可能存在任意阶偏导数都是0的点, 这显然不属于任何一个C_k-C_{k+1}

Step 1: 因为C_1是闭的, 所以我们可以把U换为$U-C_1$, 并令$C_1=\emptyset$, 然后证明$F(C)$是零测集. 此时任取$a\in C$, 根据$C_1=\emptyset$可得F的某个一阶偏导数在a处非0, 通过交换坐标轴的顺序不妨设$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a)\neq 0$, 考虑坐标换元$(u(x),v(x))=(u(x),v_2,..,v_m)$, 其中

$$u(x)=F_1(x)\qquad v_2=x_2\qquad \cdots\qquad v_m=x_m$$

则根据(u,v)关于x的jacobian在a处非异可得存在a在U中的邻域U_a使得映射

$$g:(x_1,..,x_m)\to(u,v_2,..,v_m)=(F_1(x),x_2,..,x_m)$$

是微分同胚, 在U_a中取V_a满足$\overline{V}_a$是紧的. 继而对任何$y\in g(V_\alpha)$, 存在唯一的$x\in V_a$使得

$$(y_1,..,y_m)=(F_1(x),x_2..,x_m)=g(x)$$

$$F\circ g^{-1}(y_1,..,y_n)=(y_1,F_2(x),..F_n(x))=(y_1,F_2\circ g^{-1}(y),..F_n\circ g^{-1}(y))$$

因此作为y的函数, $F\circ g^{-1}$的jacobian为

$$\begin{pmatrix}1 & O\\ * & \left\{\frac{\partial F_i\circ g^{-1}}{\partial y_j}\right\}_{i,j\geq 2}\end{pmatrix}$$

又g是V_a上的微分同胚, 所以DF满秩当且仅当$D(F\circ g^{-1})$满秩, 所以 $F\circ g^{-1}$在$g(\overline{V_a})$上的临界值就是F在$\overline{V_a}$上的临界值.

固定y_1, 则$F\circ g^{-1}$可以视为$(\{y_1\}\times R^{m-1})\cap\overline{V}_a$上的光滑函数, 且临界点是那些满足$rank\left\{\frac{\partial F_i\circ g^{-1}}{\partial y_j}\right\}_{i,j\geq 2}<n-1$的点, 根据归纳假设$F\circ g^{-1}$在$(\{y_1\}\times R^{m-1})\cap\overline{V}_a$上的临界值(记为$C(y_1)$)为$R^{n-1}$的零测集, 根据Fubini定理, $F\circ g^{-1}$在$\overline{V}_a$上的临界值的测度为

$$m(F(C\cap\overline{V}_a))=m(F\circ g^{-1}\text{在}g(\overline{V}_a)\text{的临界值})=\int_{-\infty}^{\infty}m(C(y_1))\,dy_1=0$$

又C可被$\cup_{a\in C}V_a$覆盖, 且R^m是林德洛夫空间, 因此存在可数子覆盖$\cup_i V_{a_i}$, 因此

$$m(F(C))\leq\sum_{i=1}^{\infty}m(F(C\cap\overline{V}_{a_i}))=0$$

Step 2: 证明$F(C_k-C_{k+1})$是零测集. 任取$x\in C_k-C_{k+1}$, 存在某个模长为k的重指标α(i.e $|\alpha|=k$), 满足$w=\partial^\alpha f$在C_k中为0, 且w的某个分量的某个一阶偏导数在a处非0. 通过交换坐标轴, 不妨设$\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\neq 0$. 则定义

$$g:(x_1,..,x_m)\to(w_1(x),x_2,..,x_m)$$

同step1的证明, 可以给出在a的某个邻域V_a中(V_a同上), 使得g是微分同胚. 回忆w在C_k上为0, 所以$g(V_a\cap C_k)\subseteq\{0\}\times R^{m-1}$, 所以$F\circ g^{-1}$中含于$C_k-C_{k+1}$的临界点, 都在$\{0\}\times R^{m-1}$里面, 因此把0赋给$F\circ g^{-1}$的第一个变量, 把$F\circ g^{-1}$视为m-1个变量的函数, 用归纳假设就得出其临界值是零测集, 所以$F\circ g^{-1}$的临界值是零测集.

又C_k-C_{k+1}可被$\cup_{a\in C_k-C_{k+1}}V_a$覆盖, 且$R^m$是林德洛夫空间, 因此存在可数子覆盖$\cup_i V_{a_i}$, 根据零测集的可数并还是零测集, 可得$F(C_k-C_{k+1})$是零测集

Step 3: $k>\frac{m}{n}-1$时, $F(C_k)$是零测集. 对任何$a\in U$, 存在一个开方体E使得$a\in E\subseteq U$(可以先取a为球心且在U中的球体, 然后找球体的内接正方体). 又因为U可被可数个这样的方体覆盖, 所以只需证$F(C_k\cap\overline{E})$是零测集. 设E边长为R, 记K是一个足够大的数, 把E分成K^m个边长为$\frac{R}{K}$的小方体, 记为Q_i, 在每个$\overline{Q}_i$中取$a_i\in C_k\cap\overline{Q_i}$(如果$C_k\cap\overline{Q_i}=\emptyset$, 那么这个小方体对F的临界值的贡献为0, 我们不考虑)

在a_i处用Taylor展开给出了

$$\|F(x)-F(a_i)\| \leq A\|x-a_i\|^{k+1} \leq A\sqrt{n^{k+1}}(\frac{R}{K})^{k+1} \qquad \forall x \in \overline{Q_i}$$

其中A依赖于F的k+1阶偏微分的在$\overline{E}$上的最大值(根据光滑性k+1阶偏微分在$\overline{Q}_i$上一致有界), 以及k和m, 总之和x,i无关. 因此$F(\overline{Q}_i) \subseteq \overline{B(F(a_i), A\sqrt{n^{k+1}}\frac{R^{k+1}}{K^{k+1}})}$, 后者有Lebesgue测度$m(B(0,1))A^n n^{\frac{n}{2}(k+1)}(\frac{R}{K})^{n(k+1)}$, 因此

$$m(F(C_k \cap \overline{E})) \leq \sum_{i=1}^{K^m} m(B(0,1))A^n n^{\frac{n}{2}}(\frac{R}{K})^n = CK^{m-(k+1)n}$$

其中C是和K(注意是大写的K)无关的常数. 取足够大的K, 上式右边任意小, 因此$m(F(C_K \cap \overline{E}))$是零测集. 证毕.

6.3　Whitney嵌入定理

作为Sard定理的应用, 我们证明任何一个无边光滑流形都能被嵌入到某个欧式空间中:

lemma 6.5

M是R^N的n维光滑子流形, 对任何$v \in R^N - R^{N-1}$(我们把R^{N-1}视为R^N中最后一个坐标分量为0的子空间), 令π_v是满足$ker\pi_v$为v生成的一维子空间的投影. 当$N > 2n+1$时, 存在v使得π_v是到R^{N-1}的单射浸入

Proof: 要使$\pi_v\big|_M$是单的, 只需保证对任何$p,q \in M(p \neq q)$, 均有$p-q$不平行于v. 要使$d\pi_v$在M上处处是单射, 就需要T_pM中所有元素都不在$Ker(d\pi_v)$中, 注意到π_v是线性映射, 所以$d\pi_v$也是矩阵表示和π_v相同的线性映射. 因此只需令T_pM中不包含$Ker(d\pi_v)$除0以外的元素

考虑$M \times M$的闭子集(Problem 1.10)

$$\triangle = \left\{(p,p)\middle| p \in M\right\}$$

记

$$M_0 = \left\{(p,0) \in T_pM \middle| p \in M\right\}$$

这是TM的闭子集(Problem 3.4). 考虑如下映射

$$\kappa : (M \times M) - \triangle \to RP^{N-1} \qquad \kappa(p,q) = [p-q]$$

$$\tau : TM - M_0 \to RP^{N-1} \qquad \tau(p,w) = [w]$$

显然它们都是光滑映射, 且π_v是单射当且仅当$[v]$不含于κ是值域中. π_v是浸入当且仅当v不含于τ的值域中. 又κ,τ都是定义域为$2n < N-1$的光滑流形上的光滑映射, 因此根据Sard定理, 它们的值域都是RP^{N-1}中的零测集, 两个零测集的并还是零测的, 因此使得π_v不是单射浸入的v的等价类$[v]$在RP^{N-1}中是零测集. 从这个零测集之外抽一个元素即可.

lemma 6.6

M是n维带边或无边光滑流形, 若存在N使得M能被单射浸入到R^N中, 那么M能被逆紧单射浸入到R^{2n+1}中(不要忘记逆紧单射浸入是嵌入)

Proof:对R^N的一个一维子空间S, 记“管子”

$$T_R(S) = \left\{x \middle| d(x,S) < R\right\}$$

通过欧式空间的正交补理论, 设S的方向向量为s, 我们可以显式的写出

$$d(x,S)=\|x-<x,s>s\|$$

因此$T_R(S)$是个开子集. 设$F:M\to R^N$是一个单射浸入, G是$R^N\to B(0,1)$的微分同胚(比如$\frac{x}{\sqrt{1+\|x\|^2}}$), f为M上光滑穷竭函数, 然后定义

$$\Psi(p)=(G\circ F(p),f(p))\qquad M\to R^N\times R$$

又$G\circ F$也是个单射浸入, 因此Ψ和$d\Psi_p$全都是单射. 因此Ψ是单射浸入. ψ是逆紧的, 因为任何一个紧集($R^N\times R$中可以看成有界闭集)的原像, 都存在某个c使得这个原像是$f^{-1}((-\infty,c])$的闭子集, 根据f是穷竭可知原像是紧的, 这给出了Ψ是逆紧的. Proposition 4.8给出了Ψ是个嵌入, 且像集含于$B(0,1)\times R$, 注意到这是R^{N-1}中一个"管子", S是坐标轴x_n(方向向量为$(0,..,0,1)$), R=1.

以上我们证明了如果M有一个到R^N的单射浸入, 那么M必能能被逆紧单射浸入到R^{N+1}, 且嵌入的值域在某个管子中, 因此不妨设M能被逆紧嵌入到R^{N+1}, 且值域含于某个管子$T_R(S)$中. 如果$N+1\le 2n+1$, 那么证明结束(因为$R^{N+1}\to R^{2n+1}$的包含映射显然是逆紧嵌入).

如果$N+1>2n+1$, 则存在$v\in R^{N+1}-R^N$使得$\pi_v:M\to R^{N-1}$是单射浸入, 又不满足这种条件的v是零测集, 所以可取v不在S中, 此时$\pi_v(S)$是R^{N-1}的一维子空间, 且$\pi_v(M)$含于某个以$\pi_v(S)$为轴的管子(因为π是线性映射), 设为$T_A(\pi_v(S))$, 只要证明$\pi_v\big|_M$是逆紧的

设$K\subseteq R^N$是紧子集(因此有界闭), 则存在R_1使得$K\subseteq B(0,R_1)$, 对任何$x\in\pi_v^{-1}(K)$, 存在$c\in R$使得

$$\pi_v(x)=x-cv$$

(其实$c=\frac{<v,x>}{\|v\|}$), 又因为$\|\pi_v(x)\|R_1$, 设Y是v对应的线性子空间(因此也是$\frac{v}{\|v\|}$生成的线性子空间), 那么

$$d(x,Y)=\|x-\frac{<x,v>}{\|v\|}v\|=\|x-cv\|$$

因此x含于$T_{R_1}(Y)$, 因此$\pi_v^{-1}(K)\subseteq T_{R_1}(Y)\cap T_A(\pi_v(S))$, 两个轴不平行的管子的交集是有界集, 且根据$\pi_v$连续可得$\pi_v^{-1}(K)$是个闭集, 因此$M\cap\pi_v^{-1}(K)$是有界闭集, 因此在欧式空间中是紧集, 因此$\pi_v\big|_M$是$R^{N+1}\to R^N$的逆紧单射浸入, 且值域含于某个$R^N$的管子中.

也就是说, 如果M能被逆紧单射浸入到R^{N+1}, 且值域含于某个R^{N+1}的管子中, 那么M可被逆紧单射浸入到R^N, 且值域含于某个R^N的管子中, 如果$N>2n+1$, 继续上述过程, 直到$N=2n+1$, 证毕.

Theorem 6.7 Whitney embedding theorem

n维光滑流形能被逆紧嵌入到R^{2n+1}

Proof: 根据Lemma 6.6, 只需找一个欧式空间R^N和一个把M单射浸入到R^N的光滑映射即可. 我们可以考虑足够大的N来完成这件事

先考虑M是紧流形的情形. 此时可以取有限个开集覆盖M, 不妨设它们都是正则坐标球体(Problem1.8), 记为$B_1,..,B_m$. 这意味着存在坐标卡(B_i',φ_i)使得$\varphi_i(B_i')=B(0,1)$或$B^+(0,1)$, $\varphi_i(\overline{B}_i)$是一个闭球体(因此也是紧集). 记$\rho_i:M\to R$是在$\overline{B}_i$上为1, $supp\rho_i\subseteq B_i'$的鼓包函数, 定义

$$F(p)=(\rho_1(p)\varphi_1(p),...,\rho_m\varphi_m,\rho_1,..,\rho_m)\qquad M\to R^{nm+m}$$

然后证F是单射浸入:

如果$F(p)=F(q)$, 根据B_i覆盖M可得存在i使得$p\in B_i$, 又$\rho_i(p)=\rho_i(q)$, 所以 $q\in supp\rho_i\subseteq B_i'$, 又

$$\varphi_i(q)=\frac{\rho_i(q)\varphi_i(q)}{\rho_i(q)}=\frac{\rho_i(p)\varphi_i(p)}{\rho_i(p)}=\varphi_i(p)$$

根据φ是单射可得$p=q$

设$p\in B_i$, 因为在$\overline{B}$上$\rho_i=1$, 所以$d(\rho_i\varphi_i)_p=d(\varphi_i)_p$, 根据$\varphi_i$是微分同胚可得$d(\varphi_i)_p$是单的, 又

$$dF_p=d(\rho_1\varphi_1)_p\times\cdots\times d(\rho_m\varphi_m)_p\times d(\rho_1)_p\times\cdots\times d(\rho_m)_p$$

若干映射里面有一个是单射, 则它们的直积也是单射, 因此dF_p是单的, 所以F是单射浸入

然后考虑M非紧的情形. 令$f:M\to R$是一个穷竭函数. 记

$$M_i=f^{-1}([i,i+1])$$

这是个紧集, 可用有限多个正则坐标球体$U_1,..,U_k$覆盖. 记

$$N_i=(U_1\cup\cdots\cup U_k)\cap f^{-1}((i-0.1,i+1.1))$$

则N_i还是M的开子流形,且包含了M_i. 另外当$|i-j|\geq 2$时, $N_i\cap N_j=\emptyset$. 前面紧流形的情形实际上给出了“能被有限个正则坐标球覆盖的光滑流形”都能被单射浸入到某个欧式空间R^N中, 因此N_i作为一个n维光滑流形, 可以被单射浸入到某个R^N, 根据Lemma 6.6, 存在到$B_i\to R^{2n+1}$的单射浸入φ_i, 取鼓包函数ρ_i满足ρ_i在M_i的一个开邻域上为1, 且$supp\rho_i\subseteq N_i$, 定义

$$\Psi(p)=(\sum_{i\ is\ odd}\rho_i\varphi_i,\sum_{i\ is\ even}\rho_i\varphi_i,f(p))$$

下面证明Ψ是单射浸入:

如果$\Psi(p)=\Psi(q)$, 则存在i使得$f(p)=f(q)\in[i,i+1]$, 这给出了$p,q\in M_i\subseteq N_i$, 如果i是奇数, 考察Ψ的第一个分量$\sum_{i\ is\ odd}\rho_i\varphi_i$, 前面说过$|i-j|\geq 2$时,$N_i\cap N_j=\emptyset$, 因此对所有奇数j,$supp\varphi_j$互不相交, 所以

$$\varphi_i(p)=\sum_{j\ is\ odd}\rho_j(p)\varphi_j(p)=\sum_{j\ is\ odd}\rho_j(q)\varphi_j(q)=\varphi_i(q)$$

根据φ_i是单射可得$p=q$. 如果i是偶数, 则考虑$\sum_{i\ is\ even}\rho_i\varphi_i$, 同理可得$p=q$

对任何$p\in M$, 存在i使得$p\in M_i\subseteq N_i$, 如果i是奇数, 根据奇数N_i互不相交可得

$$d(\sum_{j\ is\ odd}\rho_j\varphi_j)_p=d(\rho_i\varphi_i)=d(\varphi_i)_p$$

第一个等号是因为在p的邻域内, 只要奇数$j\neq i$, 都存在p的一个邻域V_j使得$V_j\subseteq N_j$, 因此$\rho_j\varphi_j=0$. 第二个等号是因为ρ_i在p的一个邻域内为1.

根据φ_i是微分同胚可得$d(\varphi_i)_p$是单的, 因此

$$dF_p=d(\sum_{j\ is\ odd}\rho_j\varphi_j)_p\times d(\sum_{j\ is\ even}\rho_j\varphi_j)_p\times df_p=d(\varphi_i)_p\times d(\sum_{j\ is\ even}\rho_j\varphi_j)_p\times df_p$$

是单的. i为偶数的情形同理, 证毕

6.4 Whitney逼近定理

Theorem 6.8 函数的Whitney逼近定理

M是n为带边或不带边光滑流形, $F : M \to R^k$是M上的连续函数, 对任何正的连续函数$\delta : M \to R$, 存在光滑函数$\tilde{F} : M \to R^k$使得

$$|F(p) - \tilde{F}(p)| < \delta(p)$$

Proof: 对任何$x \in M$, 令U_x是x的邻域且满足

$$\delta(y) > \frac{1}{2}\delta(x) \qquad |F(y) - F(x)| < \frac{1}{2}(x)\delta \qquad \forall y \in U_x$$

由此可得在U_x中必有

$$|F(x) - F(y)| < \delta(y)$$

又M第二可数, 所以存在可数个这样的U_{x_i}覆盖M, 记为$V_i = U_{x_i}$, 令φ_i是从属于V_i的单位分解, 定义

$$\tilde{F}(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(y)F(x_i)$$

显然$\tilde{F}$是光滑的. 对任何$y \in M$, 都有

$$|\tilde{F}(y) - F(y)| = |\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(y)(F(x_i) - F(y))| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(y)|F(x_i) - F(y)|$$

注意到当$\varphi_i(y) \neq 0$时, 必有$y \in V_i = U_{x_i}$, 因此$|F(x_i) - F(y)| < \delta(y)$, 因此

$$= \sum_{y \in supp\varphi_i} \varphi_i(y)|F(x_i) - F(y)| < \sum_{y \in supp\varphi_i} \varphi_i(y)\delta(y) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(y)\delta(y) = \delta(y)$$

6.5 横截性

Sard定理的另一个应用是说我们可以对一个光滑映射进行“扰动”, 使得几乎对所有的“扰动”, 扰动后的映射的值域都能和任意一个嵌入子流形”完美的”相交, 不过这里的相交也包括交集是空集的情形, 这种操作乍一听好像没什么意义, 但实际上有很多应用场景, 尤其是在构造嵌入子流形的时候.

Definition 6.9

M,N是光滑流形, S是N的嵌入子流形, F是M到N的光滑映射, 则称F和S**横截相交**, 如果对任何$p \in F^{-1}(S)$, 均有

$$dF_pT_pN + T_{F(p)}S = T_pN$$

若K是N的另一个嵌入子流形, 称K和N横截相交, 如果K到N的嵌入映射和S是横截相交的.

从定义可以看出, 如果F的一个淹没, 那么自然和S横截相交

Theorem 6.10 横截原像定理

M,N是光滑流形, S是N的嵌入子流形

- 如果光滑映射$F:M\to N$和S横截相交, 那么$F^{-1}(S)$是M的嵌入子流形且余维数和S在N中的余维数相同
- 一个特殊的情形是K是N的光滑子流形, 且与S横截相交, 那么$K\cap S$是N的嵌入子流形

Proof:对任何$x\in F^{-1}(S)$, 都能找到$F(x)$附近的一个邻域U和函数$\varphi:U\to R^k$, 满足$S\cap U=\varphi^{-1}(0)$, 如果能够说明0是$\varphi\circ F$的正则值, 那么$F^{-1}(S)\cap F^{-1}(U)$就是$F^{-1}(U)$的余维数为k的正则子流形.

假设$\varphi(F(x))=0$, 要争$d\varphi_{F(x)}\circ dF_x$是$T_xM$到$T_0R^k$的满射. 任取$z\in T_0R^k$, 根据0是$\varphi$的正则值可得存在$y\in T_{F(x)}N$满足

$$d\varphi_{F(x)}(y)=z$$

根据F和S横截相交可知, 存在$y_0\in T_{F(x)}S$和$v\in T_xM$满足

$$y=y_0+dF_x(v)$$

两边复合$d\varphi_{F(x)}$则给出了

$$z=d\varphi_{F(x)}y_0+d(\varphi\circ F)_x(v)$$

但是φ在S上为常数, 所以$d\varphi_{F(x)}y_0=0$, 因此$d(\varphi\circ F)_x$是满射

这说明$F^{-1}(S)\cap F^{-1}(U)$是M中开子集$F^{-1}(U)$的嵌入子流形, 从而也是M上的嵌入子流形且余维数还是k(理由参考Proposition 5.5的证明).

Theorem 6.11 横截性定理

M,N是光滑流形, S是N的嵌入子流形, 如果映射$F:M\times P\to N$和S横截相交, 那么对a.e的P, 映射$F_p(x)=F(x,p):M\to N$都和S横截相交

Proof: 令π是$M\to P\to P$的投影, 根据横截原像定理, $F^{-1}(S)$是$M\times P$的嵌入子流形W, 因此$\pi:W\to P$是光滑映射的, 后文我们默认π是定义在W上的. 根据sard定理,π的临界值是零测集, 所以只需证: 如果$p\in P$是π的正则值, 当且仅当$F_p(x)$和S横截相交

任取$x\in F_p^{-1}(S)$, 令$q=F_p(x)=F(x,p)$, 只需证

$$T_qN=T_qS+d(F_p)_xT_xM$$

首先根据F和S横截相交可得

$$T_qN=T_qS+dF_{(x,p)}T_{(x,p)}M\times P \qquad (1)$$

由根据p是π的正则值, 且$(x,p)\in W$, 我们有

$$T_pS=d\pi_{(x,p)}T_{(x,p)}W \qquad (2)$$

用Problem 6.3的结果可得$T_{(x,p)}W=(dF_{(x,p)})^{-1}T_qS$, 从而

$$dF_{(x,p)}T_{(x,p)}W\subseteq T_qS \qquad (3)$$

任取$w\in T_qN$, 需要找到$v\in T_qS$和$y\in T_xM$满足

$$w=v+d(F_p)_x(y)$$

先用(1),得到$v_1 \in T_qS, (y_1, z_1) \in T_xM \times T_pP \cong T_{(x,p)}M \times P$, 使得

$$w = v_1 + dF_{(x,p)}(y_1, z_1)$$

再用(2), 存在$(y_2, z_2) \in T_{(x,p)}W$(视为$T_{(x,p)}M \times p$的子空间)使得

$$z_1 = d\pi_{(x,p)}(y_2, z_2)$$

但π是投影映射, 所以$z_1 = d\pi_{(x,p)}(y_2, z_2) = z_2$, 从而

$$dF_{(x,p)}(y_1, z_1) = dF_{(x,p)}(y_2, z_2) + dF_{(x,p)}(y_1 - y_2, 0)$$

只要把z_2改成z_1就容易验证

然后考虑包含映射$\iota_p : M \to M \times P$, 满足$\iota_p(x) = (x, p)$, 那么$F_p(x) = F \circ \iota_p$, 因此

$$d(F_p)_x = dF_{(x,p)} \circ d(\iota_p)_x$$

且注意到$d(\iota_p)_x(y_1 - y_2) = (y_1 - y_2, 0)$, 从而

$$d(F_p)_x(y_1 - y_2) = dF_{(x,p)}(y_1 - y_2, 0)$$

这给出了

$$w = v_1 + dF_{(x,p)}(y_2, z_2) + d(F_p)_x(y_1 - y_2)$$

根据(3), $v_1 + dF_{(x,p)}(y_2, z_2) \in T_qS$, 因此记$v = v_1 + dF_{(x,p)}(y_2, z_2), y = y_1 - y_2$, 就得到了

$$w = v + d(F_s)_x(y)$$

从而F_p和S横截相交, 证毕.

6.6 Exercise

Problem 6.1

M是R^N的k维光滑嵌入子流形. S是R^N的嵌入子流形. f是M上的光滑映射. 定义

$$F(x, p) = f(x) + p \qquad M \times R^N \to R^N$$

证明对a.e的$p \in R^N$, 映射$f_p(x) = F(x, p)$都和S横截相交.

Problem 6.2

M是R^N的k维光滑嵌入子流形. 证明对任何$d < N - k$, 必定存在和M不相交的d维仿射子空间[a]
$d = N - k$时是否成立?

[a]仿射子空间是线性空间的平移: 一个d维线性空间加上一个向量v

Problem 6.3

M是m维光滑流形, N是n维光滑流形. S是N的嵌入子流形, 且光滑映射$f: M \to N$与S横截相交. 证明对任何$p \in W = f^{-1}(S)$, 都有

$$T_pW = (df_p)^{-1}T_{f(p)}S$$

第七章 Lie群

7.1 Lie群的定义和性质

Definition 7.1

光滑流形G被称为**Lie群**, 如果G是群且下列乘法映射 $G \times G \to G$ 和逆映射$G \to G$ 都是光滑的:

$$m(g,h) = gh \qquad i(g) = g^{-1}$$

这种定义和下面一种等价:

Proposition 7.2

光滑流形G是Lie群当且仅当G时群且映射$G \times G \to G$:

$$T(g,h) = gh^{-1}$$

是光滑的

Proof:$\Rightarrow$ 注意到

$$T(g,h) = m(g, i(h)) = m \circ (id \times i)$$

根据i光滑可得$(id \times i)$在$G \times G$上也光滑, 再根据光滑映射的复合还是光滑的, 就给出了想要的结果

$\Leftarrow$ 任取$p, q \in G$, 再取它们附近的光滑坐标卡(U, φ)和(V, ψ), 根据乘积流形的自然光滑结构可知$(U \times V, \varphi \times \psi)$是$G \times G$上的坐标卡, 再取$pq^{-1}$附近的坐标卡$(X, \phi)$, 则有

$$\phi \circ T \circ (\varphi^{-1} \circ \psi^{-1})$$

是R^{2n}中某个开集上的光滑函数, 通过缩小U和V不妨设$\phi(T(U \times V)) \in \phi(X)$, 这时$\phi \circ T \circ (\varphi^{-1} \circ \psi^{-1})$定义在$\varphi(U) \times \psi(V)$上, 固定$p = e$时,$\phi \circ T \circ (\varphi^{-1} \circ \psi^{-1})$是关于$y \in \psi(V)$的光滑函数, 且正是$i(g) = g^{-1}$在坐标卡$(X, \phi)$和$(V, \psi)$下的表示, 因此i是光滑映射

注意到

$$m(g,h) = T(g, i(h)) = T \circ (id \times i)$$

因此乘法运算光滑, 证毕

在抽象代数中我们学习过群作用的概念, 对任何$g \in G$, 分别定义其左平移作用和右平移作用

$$L_g(h) = gh \qquad R_g(h) = hg$$

这两个作用都是光滑的, 可以看做常值映射$f(x)=g$和乘法运算的复合, i.e

$$L_g(h)=m\circ(f\times id)\qquad R_g(h)=m\circ(id\times f)$$

注意到$L_g^{-1}=L_{g^{-1}},R_g^{-1}=R_{g^{-1}}$, 所以左平移右平移还是微分同胚

7.1.1 Lie群的例子

$GL(n,R)$

回忆$GL(n,R)$可以视为R^{n^2}中的开子流形, 且矩阵乘法是R^{n^2}中的光滑映射, 因此限制到$GL(n,R)$还是光滑的, 矩阵取逆的光滑性是因为, 对任何非异阵A, 根据行列式运算的连续性, 都存在A的一个邻域U, 使得对任何$B\in U$, 均有$det(B)\neq 0$, 因此$\frac{1}{det(B)}$在U内是光滑的函数. 另外, 矩阵的伴随运算显然关于各个元素都光滑, 因此伴随运算在$GL(n,R)$上光滑, 从而矩阵逆运算

$$i(B)=\frac{B^*}{det(B)}$$

在U中光滑, 因此取逆运算光滑. 这说明$GL(n,R)$是Lie群.

S^1,T^n

S^1上的元素形如$e^{i\theta},\theta\in[0,2\pi]$, 定义上面的乘法运算为$e^{i\theta}e^{i\eta}=e^{i(\theta+\eta)}$, 从而$S^1$成为Lie群. 又群的直积还是群, 且光滑映射的直积还是光滑的, 我们得到$T^n=S^1\times\cdots S^1$也是Lie群. 特别地, 它们都是连通Lie群.

7.2 Lie子群

G是一个Lie群, 其浸入子流形H被称为Lie子群, 如果H本身还是个Lie群. 当然, 要继承G的运算和拓扑

lemma 7.3

H是Lie群G的开子群, 那么H是G的嵌入子流形, 且是闭子集.

Proof:因为H是G的开子集, 所以嵌入映射$H\to G$是一个单射浸入(选定一组基底后切映射就是单位矩阵), 且根据H是开子集可知嵌入映射还是个H到H的拓扑同胚. 因此是嵌入子流形.

又因为G能写成H及H的若干个互不相交的左陪集的并, 而$H\to aH,a\in G$又是一个拓扑同胚, 所以每个左陪集都是开集, 如此G便能表示成若干个互不相交的开集的并集(H和H的若干左陪集), 所以G-H就是H的若干左陪集的并集, 因此$G-H$是开的, 所以H是闭子集.

Proposition 7.4

G是Lie群, V是G中单位元e的邻域.则

- V生成[a]G的一个开子群
- 如果V连通, 则V生成G的一个连通子群
- 如果G连通, 那么V生成G

[a]与抽象代数中的定义相同, V生成的子群是包含V的最小的子群

Proof:(a) 设S是V生成的子群, 则S包含V中所有元素的逆, 记为V^{-1}, 又逆运算是G的微分同胚, 因此V^{-1}也是e的开邻域. 记$U=V\cup V^{-1}$, 这是e的开邻域, 且$U=U^{-1}$, 考虑集合

$$D=\cup_{n=1}^{\infty}U^n$$

我们证明D是个子群, 注意到D中元素形如$a_1\cdots a_n, a_i\in U$, 根据$a_i^{-1}\in U$可得$a_n^{-1}\cdots a_1^{-1}\in D$, 这是$a_1\cdots a_n$的逆元, 又$a_1\cdots a_n\cdot b_1\cdots b_m\in U^{n+m}$, 因此D是子群, 且包含V, 所以$S\subseteq D$.

另一方面, 根据S是包含V的子群可得$U\subseteq S$, 因此$U^n\subseteq S$, 因此$D\subseteq S$, 因此$D=S$, 然后我们说明D是开集. 首先U是开的, 假设$U,U^2,..,U^{k-1}$是开的, 那么根据

$$U^k=\cup_{a\in U}aU^{k-1}$$

可得U^k是开的, 根据归纳原理可知U^n都是开集, 因此D是开集, 这给出了S是开子群

(b)如果V连通, 那么U也是连通的, 且U^i有公共点e, 因此$D=\cup_{i=1}^{\infty}U^i$是连通集, 因此V生成连通的子群

(c)如果G连通, S是V生成的子群, 可以把G分解为S和若干S的左陪集的并集, 而根据$f(x)=gx$是G的同胚可知gS都是G的开子集, 又每个陪集互不相交, 因此G是若干个互不相交开集的并, 再由G连通可知这些开集里面只有一个非空, 又S非空, 所以$G=S$

Proposition 7.5

G是Lie群, G_0是一个包含单位元的连通分支, 那么G_0是G的正规子群, 且是唯一一个连通的开子群. G的每个连通分支都微分同胚于G_0

Proof: 首先要说明G_0的确是个子群. 注意到G_0生成一个开子群, 设为H. 根据G_0连通可知H也是连通的, 因此H只能等于G_0, 这说明G_0是子群. 注意到同胚不改变连通性, 所以gG_0, G_0g还是两个连通分支, 但它们都包含g, 所以二者相等, 这说明$gG_0g^{-1}=G_0$, 对任何$g\in G$成立, 于是是正规子群

设V是一个连通分支, 任取$h\in V$, 则$h^{-1}V$是含e的连通分支, 因此$h^{-1}V=G_0$, 而左平移映射是微分同胚. 从而V微分同胚于G_0.

7.3　Lie群同态

Lie群是群, 群之间保持运算的映射叫做同态, 严格定义是: 对任何$g,h\in G$, 都有

$$\varphi(h)\varphi(g)=\varphi(gh)$$

Lie群同态 是Lie群到Lie群的光滑的群同态. 如果Lie群同态是一个微分同胚, 且其逆映射还是Lie群同态, 那么成为**Lie群同构**

Lie群同态的一个重要性质就是它们作为光滑映射是常秩的

Proposition 7.6

Lie群同态是常秩映射

Proof: 设$\varphi:G\to H$是Lie群同态, 注意到

$$L_{\varphi(x)}(\varphi(y))=\varphi(L_x(y))$$

我们固定$x\in G$, 由此可得

$$d(L_{\varphi(x)})_{\varphi(xy)}\circ d\varphi_y=d\varphi_{xy}\circ d(L_x)_{xy}$$

注意到左平移作用全都是微分同胚, 所以不改变秩, 因此

$$d\varphi_y=d\varphi_{xy}\qquad\forall x\in G$$

任取$z \in G$, 令$x = zy^{-1}$, 就得出$d\varphi$在y,z处的rank相同, 所以是常秩映射.

Corollary 7.7

Lie群同态是Lie群同构当且仅当它是双射

Proof:$\Rightarrow$ 显然

$\Leftarrow$ 用全局秩定理, 则双射的光滑常秩映射是微分同胚.

7.4 Lie群作用

设G是群, M是个集合, 如果有一种运算法则,记为$'\cdot'$, 满足对任何$g \in G, x \in M$, 使得$g \cdot x \in M$, 那么映射$G \times M \to M : (g, x) = g \cdot x$ 就是一个映射, 如果这个映射还满足对任何$g_1, g_2 \in G$, 均有

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$$

那么称这个映射为**左群作用**, 相应的如果$x \cdot g$有意义, 且

$$(x \cdot g_2) \cdot g_1 = x \cdot (g_2 g_1)$$

则称为**右群作用**. 我们把一个群作用记为$\theta(g, p) : G \times M \to M$, 有时记为$\theta_g(p)$.

如果M是微分流形, G是Lie群, 群作用是光滑的, 则称为**光滑作用**

和群论中的定义一样, Lie群作用也有轨道, 迷向子群, 可递, 有效这些概念.

Definition 7.8

对任何$p \in M$, p的**轨道**定义为

$$\left\{\theta_g(p) \middle| g \in G\right\}$$

也就是G中所有元素作用在p上得到的结果的全体
p的**迷向子群**, 或者说**稳定化子**定义为

$$G_p = \left\{g \in G \middle| \theta_g(p) = p\right\}$$

容易验证这是个子群
群作用是**可递**的, 如果对任何$p, q \in M$, 存在g使得$\theta_g(p) = q$
群作用是**有效的**, 如果对任何$g \in G, p, q \in M$, $\theta_g(p) = \theta_g(p)$时都有$p = q$

有了群作用, 我们可以定义**轨道映射**:

$$\theta^p(g) = \theta(g, p) \qquad G \to M$$

那么p的迷向子群就是$(\theta^p)^{-1}(p)$, 且轨道映射是G到p的轨道的满射

Theorem 7.9

θ是Lie群G到光滑流形M上的光滑左作用, 对任何$p \in M$, θ^p是光滑的常秩映射, 且p的迷向子群G_p是G的逆紧嵌入子流形, 且还是Lie子群. 如果$G_p = \{e\}$, 那么θ^p是单射浸入

Proof: θ^p是θ在固定p时的限制, 因此在G上光滑, 且

$$\theta_g \circ \theta^p(h) = \theta^p(L_g h)$$

因此

$$d(\theta_g)_{h\cdot p} \circ d(\varphi^p)_h = d(\theta^p)_{gh}$$

然而θ_g是$M \to M$的微分同胚, 所以不改变秩. 因此φ^p在h, gh处的秩相同, 由h的任意性可知θ^p常秩. 用常秩水平集定理就知道G_p是逆紧嵌入的. 用定义验证可得G_p是子群.

若$g \cdot p = h \cdot p$, 那么$h^{-1}g \in G_p$, 这给出了$h^{-1}g = e$, 即$g = h$, θ^p是单射. 根据全局秩定理可得θ^p是浸入(单射常秩则为浸入).

正交群$O(n)$

考虑群作用

$$\theta^A(X) = XAX^T$$

那么G_{I_n}, 即$(\theta^{I_n})^{-1} = \left\{A \in GL(n,R)\middle| AA^T = I_n\right\}$, 是$GL(n,R)$的嵌入子流形, 记为$O(n)$, 称为正交群.

7.5 Exercise

Problem 7.1

令$det : GL(n,R) \to R$是行列式函数, 求det的切映射:

(a)对任何$A \in M(n,R)$, 都有

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} det(I_n + tA) = tr(A)$$

Hint: 多项式在0处的一阶导数就是一次项系数, 这个多项式的一次项系数是多少?

(b)对$X \in GL(n,R)$, 根据$GL(n,R)$是R^{n^2}的开子集可知$T_X GL(n,R) \cong M(n,R)$. 证明

$$d(det_X)(B) = (detX)tr(X^{-1}B)$$

Problem 7.2

令

$$SL(n,R) = \left\{A \in GL(n,R)\middle| det(A) = 1\right\}$$

证明$SL(n,R)$可以成为$GL(n,R)$的嵌入子流形, 求$SL(n,R)$的维数

Problem 7.3

$$f : GL(n,R) \to GL(n,R) \qquad f(X) = X^T X$$

(a)证明f是光滑映射, 且$df_X(A) = X^T A + A^T X$

(b)求f的rank

Problem 7.4

求映射$A \to A^{-1}$的切映射和rank. 定义域为$GL(n,R)$

Hint: 爆算略难, 考虑$F(t) = (A+tX)^{-1}$, 则$F(t)(A+tX) = I_n$, 两边微分. 回忆对足够接近0的t, $A+tX$都是非异阵

Problem 7.5

求正交群$O(n)$的维数

第八章　向量场

8.1　流形的向量场

Definition 8.1

M是光滑流形, M上的**向量场**是一个映射$X:M\to TM$, 且满足

$$\pi\circ X=id_M$$

也就是说$X(p)\in T_pM$, 我们把$X(p)$记为X_p. 如果X是光滑映射, 则称为**光滑向量场**

我们主要对光滑的向量场感兴趣. 正如R^n上的函数那样, X的支集为$\{p\in M|X_p\neq 0\}$的闭包. 如果支集是紧的, 则称X具有紧支集

根据TM在局部$\pi^{-1}(U)$上能具有基底$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$的性质, 我们可以$X$在这组基下面展开, 得到它的系数矩阵. 具体的说, 对任何$p\in M$, 都能找出一个坐标卡(U,φ), 因此X_p能写成

$$X_p=\sum_{i=1}^n X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

其中X^i称为X在坐标卡(U,φ)下的**分量函数**. 从而可以给出X的光滑性的等价定义:

Proposition 8.2

X是M上的向量场, (U,φ)是M的坐标卡, 则X在U上光滑当且仅当X在这个坐标卡上的分量函数都是U上的光滑函数

Proof: $\Rightarrow$ 回忆TM的坐标卡$(\pi^{-1}(U),\tilde{\varphi})$, 其中

$$\tilde{\varphi}(\sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p)=(\varphi(p),v_1,..,v_n)\in\varphi(U)\times R^n$$

由此根据光滑性的定义可得

$$\tilde{\varphi}\circ X\circ\varphi^{-1}(x_1,..,x_n)=\tilde{\varphi}(\sum_{i=1}^n X^i(\varphi^{-1}(x))\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi^{-1}(x)})=(x,X^1\circ\varphi^{-1}(x),..,X^n\circ\varphi^{-1}(x))$$

是光滑的, 这说明$X^i\circ\varphi^{-1}(x)$是$\varphi(U)$上的光滑函数, 从而根据流形上光滑的定义可得X^i是U上的光滑函数.

$\Leftarrow$ 由条件可知$X^i\circ\varphi^{-1}(x)$是$\varphi(U)$上的光滑函数, 再根据

$$\tilde{\varphi}\circ X\circ\varphi^{-1}(x_1,..,x_n)=(x,X^1\circ\varphi^{-1}(x),..,X^n\circ\varphi^{-1}(x))$$

可知$\tilde{\varphi}\circ X\circ\varphi^{-1}$光滑，也就是说X在坐标卡$(U,\varphi),(\pi^{-1}(U),\tilde{\varphi})$下的坐标表示是光滑的，从而根据定义可得X在U上光滑

Lemma 8.3 向量场的延拓

M是n维光滑流形,A是M的闭子集，X是沿着A的光滑向量场．这句话的意思是说，对任何$p\in A$，存在p附近的坐标卡(U,φ)和U上的光滑向量场$\tilde{X}^U$使得$\tilde{X}^U|_{A\cap U}=X$
任给一个包含A的开集V，证明存在M上的光滑向量场F满足$F|_A=X$，$suppF\subseteq V$

Proof: A的补是开的，任何$p\in A$都有一个满足上面题意的坐标邻域U_p，它们(和V的交)和A^c共同构成M的开覆盖．把坐标邻域上的局部光滑向量场用单位分解粘起来．细节作为习题

作为推论，一个$v\in T_pM$都能延拓为M上的光滑向量场．

M上光滑向量场的全体记为$\mathscr{X}(M)$．显然这是一个线性空间．除了加法和数乘以外，我们还能定义向量场X和光滑函数f的乘法:

$$(fX)(p)=f(p)X_p\in T_pM$$

Proposition 8.4

$f\in C^\infty(M)$，X是M上的光滑向量场，那么fX也是光滑向量场

Proof: 只需注意到fX在某个坐标卡U内的分量函数为$f(p)X^i(p)$，从而根据f和X^i光滑可知fX^i光滑

8.2　标架

Theorem 8.5 怎么得到局部标架

M是n维光滑流形．那么

- $(X_1,..,X_k)$是在开子集U中处处线性无关的k-元组．那么对任何$p\in U$，存在p的邻域V和V上的光滑向量场$X_{k+1},..,X_n$使得$(X_1,..,X_n)$在$U\cap V$中线性无关
- $(v_1,..,v_k)$是T_pM中k个线性无关的元素，那么存在p的一个邻域U，和U上的一个光滑标架$(X_1,..,X_n)$，满足$X_i(p)=v_i,1\le i\le k$
- $(X_1,..,X_n)$是沿一个闭子集A的光滑标架，证明存在A的邻域U，和U上的光滑标架$(Y_1,..,Y_n)$满足$Y_i\Big|_A=X_i$

Proof: (a)

对于这个p，把$Y_i(p)$扩充成R^n的一组基，设新扩充的元素为$a_{n-k+1},..,a_n$，然后考虑常值向量$Y_{n-k+j}(p)=a_{n+k+j},p\in U\cap V$，则这n个向量构成n阶方阵，且在p处行列式非0，因此根据行列式是p的光滑函数可知存在p的邻域V_2使得在V_2上有：这个行列式非0，则在$U\cap(V\cap V_2)$上，$Y_i(p),1\le i\le n$都是线性无关的向量，然后考虑以Y_i为系数，$\frac{\partial}{\partial x^i}$为基底的向量场$W_i$，那么这些$W_i$在$U\cap V\cap V_2$中处处线性无关，且$X_i=W_i,1\le i\le k$，从而找出了p的邻域$V\cap V_2$，满足$(X_1,..,X_k,W_{k+1},..,W_n)$是在$U\cap(V\cap V_2)$中处处线性无关的

(b)取p附近的一个坐标卡(U,φ)，设v_i在这个坐标卡下的系数向量为$a_i,1\le i\le k$，则可给a_i扩充成R^n的基底,$1\le i\le n$．然后考虑在U上的常值向量场X_i，其中X_i的分量函数组成的向量就是a_i,那么$X_i(p)=v_i$．由此便构造出U上的光滑标架，且满足$X_i(p)=v_i$

(c)我们之前证明过能取A的邻域V_i和V_i上的光滑向量场Y_i使得$Y_i|_A=X_i$，然后对任何$p\in A$，$Y_i(p),1\le i\le n$线性无关，因此其分量函数组成的n阶方阵是非异阵，从而存在p的邻域U_p使得这个矩阵在U_p上还是非异阵，从

而Y_i在U_p上依然是线性无关的. 考虑集合

$$B = \cup_{p\in A}(\cap_{i=1}^{n} U_p \cap V_i)$$

这是A的邻域, 因为开集的有限交还是开的, 开集的无限并也是开的. 从而$Y_i, 1 \le i \le n$是B上的光滑标架且限制在A上就是$X_i, 1 \le i \le n$

标架在切丛中的地位就好比基底在线性空间的地位. 正如线性空间中有一类特殊的基底叫做正交基一样, R^n的切丛也有正交标架的概念.

Proposition 8.6 Schmidt正交化

设$(X_1, .., X_n)$是R^n的某个开子集U上的光滑标架, 那么存在另一组U上的光滑标架$W_1, .., W_n$使得$W_1, .., W_n$在基底$\frac{\partial}{\partial x_i}$下的系数向量, 是$R^n$的标准正交基

Proof:根据定义, U中, X_i的分量函数都是光滑的, 设X_i的分量函数组成的R^n中的向量为Y_i, 那么在每一点$p \in U$处, 这些Y_i是k个线性无关的n维向量(注意到线性无关暗含着这些向量处处非0).

令

$$E_i(p) = \frac{Y_i(p) - \sum_{j=1}^{i-1} E_j(p)(Y_i(p)\cdot Y_j(p))}{\|Y_i(p) - \sum_{j=1}^{i-1} E_j(p)(Y_i(p)\cdot Y_j(p))\|}$$

这其实是线性代数中的Schmidt正交化过程, 因此$span\{E_1, .., E_j\} = span\{Y_1, .., Y_j\}$, 因此根据$Y_i$的线性无关性可知$Y_i(p) - \sum_{j=1}^{i-1} E_j(p)(Y_i \cdot Y_j)$永远不是0向量. 所以$E_1(p)$在$U \cap V$中光滑, 假设$E_1, .., E_{i-1}$都是$U$中的光滑向量值函数, 那么$Y_i(p) - \sum_{j=1}^{i-1} E_j(p)(Y_i(p)\cdot Y_j(p))$光滑且非0, 因此$E_i$也光滑, 从而根据归纳原理可知$E_1, .., E_k$都是$U$中的光滑(向量值)函数, 且处处标准正交

Definition 8.7

M是n维光滑流形, 称M是**可平行化**的, 如果M上有光滑标架.

可平行化有很多种定义, 比如切丛光滑同构于平凡丛. 毕竟这两种定义是等价的:

8.3 作为导子的向量场

我们知道$X(p) \in T_pM$, 因此是一个导子. 考虑函数

$$Xf(p) = X_pf \qquad M \to R$$

回忆切向量X_p作用在函数f上所得到的值, 只和f在p附近的取值有关. 因此在p的邻域V上, 有

$$(Xf)(p) = X_pf$$

从而

$$(Xf)\big|_V = X(f\big|_V)$$

下面的性质给出了向量场光滑的另一种判据:

Proposition 8.8

X是M上的向量场, 那么下列条件等价:
(1)X光滑
(2)对任何$f\in C^{\infty}(M)$, Xf光滑
(3)对M的任一开子集U和U上的光滑函数f, 均有Xf也是U上的光滑函数

Proof:对任何$p\in M$, 取附近的坐标卡(U,φ), 那么

$$Xf\circ\varphi^{-1}(x)=X_{\varphi^{-1}(x)}f=\sum_{i=1}^{n}X^i(\varphi^{-1}(x))\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_x$$

所以(1) $\to$ (2)显然成立

(2) $\to$ (3) 根据M的局部紧性, 任取$p\in U$和p的邻域V满足$\overline{V}\subseteq U$, 则$\overline{V}^c$和U是M的开覆盖, 考虑单位分解$\psi_1+\psi_2=1$, 其中ψ_2的支集在U中, 那么可知$\psi_2|_V=1$, 且$g=\psi_2(x)f(x)\in C^{\infty}(M)$, 由此

$$(Xg)\Big|_U=X(g\Big|_U)=Xf$$

根据(2)成立得到Xg光滑, 所以Xf光滑.

(3) $\to$ (1) :取$f=\varphi^i$, 则可得

$$Xf\circ\varphi^{-1}(x)=X_{\varphi^{-1}(x)}f=\sum_{i=1}^{n}X^i(\varphi^{-1}(x))\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_x=X^i(\varphi^{-1}(x))$$

光滑, 因此在坐标卡(U,φ)中, X的第i个分量函数光滑, 从而X在U上光滑, 根据U的任意性, X在M山光滑.

8.4 光滑映射与向量场

F是M到N的光滑映射, 我们知道对任何一个M上的向量场X, $dF(X)(p)=dF_p(X_p)$都是$N\to TN$的映射, 从而$dF(X)$是N上的向量场. 对于M上的向量场X和N上的向量场Y, 称X,Y是**F-相关**的, 如果

$$dF_p(X_p)=Y_{F(p)}\qquad\forall p\in M$$

Proposition 8.9 向量场相关的函数判据

M,N是光滑流形, F是$M\to N$的光滑映射, 那么任给两个光滑向量场$X\in\mathscr{X}(M),Y\in\mathscr{X}(N)$, X,Y是F-相关的, 当且仅当对任何一个定义在N的某个开子集U上的光滑函数f, 都有

$$X(f\circ F)=(Yf)\circ F$$

Proof: $\Rightarrow$ 设f在U上光滑, 任给$p\in U$, 则有

$$X(f\circ F)(p)=dF_p(X_p)(f)=Y_{F(p)}(f)=(Yf)(F(p))=(Yf)\circ F(p)$$

$\Leftarrow$ 对任何一个$p\in M$, 和任何一个$f\in C^{\infty}M$, 都有

$$dF_p(X_p)(f)=X(f\circ F)(p)=(Yf)\circ F(p)=(Yf)(F(p))=Y_{F(p)}(f)$$

因此根据f的任意性, $dF_p(X_p)=Y_{F(p)}$

Proposition 8.10

M,N是光滑流形，F是$M \to N$的微分同胚，那么任给$X \in \mathscr{X}(M)$,存在唯一一个$Y \in \mathscr{X}(N)$，使得X,Y是F-相关的

Proof:此时dF_p是双射，因此$Y_{F(p)}$被$dF_p(X_p)$唯一确定，再根据F是满射可知

$$Y_q = dF_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)})$$

因此Y是向量场. 又对任何$f \in C^\infty(N)$，均有

$$(Yf)(F(p)) = X(f \circ F)$$

右边是光滑的，因此$(Yf) \circ F$是光滑的，在右边复合一个F^{-1}不改变光滑性，因此Yf光滑，从而根据f的任意性，Y光滑. 因此$Y \in \mathscr{X}(N)$

Definition 8.11

在前一条性质的语境下，称这个唯一确定的光滑向量场Y为**X在F下的前推**，记作F_*X，满足

$$(F_*X)_q = dF_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)})$$

8.5 Lie括号

设$X, Y \in \mathscr{X}(M)$，定义一个向量场

$$[X, Y] = XY - YX \qquad [X, Y]_p f = X_P(Yf) - Y_p(Xf)$$

根据光滑性的判据，$[X, Y] \in \mathscr{X}(M)$

Proposition 8.12 Lie括号的性质

设M是光滑流形，$X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$，则

- 双线性性 $[aX + bY, Z] = [aX, Z] + [bY, Z], [Z, aX + bY] = [Z, aX] + [Z, bY]$
- 反对称性 $[X, Y] = -[Y, X]$
- Jacobian 恒等式 $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$
- $f, g \in C^\infty(M)$, $[fX, gY] = fg[X, Y] + (fXg)Y - (gYf)X$

Proof:(a)只证明第一个，另外一个同理

$$[aX + bY, Z] = (aX + bY)Z - Z(aX + bY) = aXZ - ZaX + bYZ - ZbY = [aX, Z] + [bY, Z]$$

(b)

$$[X, Y] = XY - YX = -(YX - XY) = -[Y, X]$$

(c)

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] = X[Y, Z] - [Y, Z]X + Y[Z, X] - [Z, X]Y = XYZ - XZY - YZX + ZYX + YZX - YXZ - ZXY + XZY$$

其中XZY, YZX都可消去，因此

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] = XYZ + ZYX - YXZ - ZXY = [X, Y]Z - Z[X, Y] = -[Z, [X, Y]]$$

(d)

$$[fX, gY]_p(h) = (fX)_p(gY)(h) - (gY)_p(fX)h$$

注意到$gY(h)$是光滑函数$g(x)(Yh)(x)$, 其中$(Yh)(x) = Y_x h$, 由此根据导子的运算法则可得

$$= f(p)g(p)X_p(Yh) + f(p)(Yh)(p)X_p g - g(p)(Xh)(p)Y_p f - g(p)f(p)Y_p(Xh)$$

$$= f(p)g(p)[X, Y]_p h - g(p)(Yf)(p)Xh + f(p)(Xg)(p)Yh$$

因此

$$= [fX, gY] = fg[X, Y] - (gYf)X + (fXg)Y$$

Proposition 8.13 Lie括号保持函数相关性不变

设$X_1, X_2 \in \mathscr{X}(M), Y_1, Y_2 \in \mathscr{X}(N)$, F是M到N的光滑映射, 若$X_i, Y_i$是F-相关的, $1 \leq i \leq 2$, 那么$[X_1, X_2], [Y_1, Y_2]$是F-相关的

Proof:

$$[X_1, X_2](f \circ F) = X_1X_2(f \circ F) - X_2X_1(f \circ F) = X_1[(Y_2 f) \circ F] - X_2[(Y_1 f) \circ F] = Y_1(Y_2 f) \circ F - Y_2(Y_1 f) \circ F = ([Y_1, Y_2]f) \circ F$$

根据向量场相关的函数判据, 证毕

8.6 Lie群的Lie代数

G是Lie群, G上的光滑向量场X称为**左不变的**, 如果X对任何左平移L_g都和X是L_g-相关的, i.e

$$d(L_g)_p(X_p) = X_{gp}$$

又L_g是一个微分同胚, 所以可以把上式简写为

$$(L_g)_* X = X$$

注意到dL_g是线性映射, 因此

$$d(L_g)_p(aX_p + bY_p) = ad(L_g)_p X_p + bd(L_g)_p Y_p$$

这说明如果X,Y是左不变的, 那么$X + Y$也是, 从而$\mathscr{X}(M)$中的左不变向量场构成一个线性子空间. 更重要的性质如下:

Proposition 8.14

左不变向量场在Lie括号运算下封闭, i.e 两个左不变向量场的Lie括号还是左不变的

Proof: 对任何一个左平移L_g, 根据Lie括号保持相关性不变可知$[X, Y]$和$[(L_g)_* X, (L_g)_* Y]$是L_g-相关的, 又$(L_g)_* X = X, (L_g)_* Y = Y$, 所以$[X, Y], [X, Y]$是$L_g-$相关的.

一个**Lie代数**是配备了Lie括号运算[]的实线性空间$\mathfrak{g}$. 其中括号运算[]必须是$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$的, 且满足

- 双线性性 $[aX + bY, Z] = [aX, Z] + [bY, Z], [Z, aX + bY] = [Z, aX] + [Z, bY]$
- 反对称性 $[X, Y] = -[Y, X]$
- Jacobian 恒等式 $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

$\mathfrak{g}$的线性子空间$\mathfrak{f}$被称为**Lie子代数**, 如果$\mathfrak{f}$在$\mathfrak{g}$的括号运算下也是一个Lie代数.

从前面的观察可以看出, 一个Lie群G上的左不变向量场的全体, 配备向量场的Lie括号运算$[X,Y]=XY-YX$之后, 就是一个Lie代数, 称为**群G的Lie代数**, 记为$Lie(G)$

Proposition 8.15

G是Lie群, 则**取值映射** $\epsilon: Lie(G)\to T_eG$, 定义为

$$\epsilon(X)=X_e$$

是一个线性空间的同构. 因此$Lie(G)$是有限维线性空间, 维数是$dimG$

Proof: 显然ϵ是线性的, 假设$\epsilon(X)=\epsilon(Y)$, 那么根据左不变性质可知

$$X_g=d(L_g)_eX_e=d(L_g)_eY_e=Y_g$$

因此ϵ是单射. 因此根据线性代数知识可得$dimLie(G)\le dimG$

对任何$Y\in X_eG$, 考虑向量场

$$X_g=(dL_g)_eY$$

那么$\epsilon(X)=Y$. 下面验证X是光滑的: 任取$x\in G$, 取一条定义在0附近的光滑曲线$\gamma(t):(-\epsilon,\epsilon)\to F$, 其中$\gamma(0)=e,\gamma'(0)=v$, 则

$$(Xf)(x)=X_xf=d(L_x)_eYf=Y(f\circ L_x)=\gamma'(0)(f\circ L_x)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f\circ L_x\circ\gamma)(t)$$

$$=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f(x\gamma(t))=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f\circ m(x,\gamma(t)))$$

其中m表示G上的乘法, 此时根据f,m, γ的光滑性可以看出Xf是光滑的, 因此X光滑.

$$d(L_h)_gX_g=d(L_h)_g\circ(dL_g)_eY=d(L_{hg})_eY=X_{hg}$$

所以X是左不变的, 所以ϵ的满射, 从而是线性同构

Corollary 8.16

Lie群上的左不变向量场必定光滑

Proof: 前一个Proposition里面已经证明过了. 核心是以下等式:

$$(Xf)(x)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f\circ m(x,\gamma(t)))$$

Corollary 8.17

每个Lie群都能平行化. i.e 能找出一个全局标架
其实是能找出**左不变**标架, i.e 标架里的每个元素都是左不变向量场

Proof: 令G是n维Lie群, 取T_eG的一组基, 设为$e_1,..,e_n$, 则根据线性同构可以知道

$$\epsilon^{-1}(e_1),..,\epsilon^{-1}(e_n)$$

是G上的n个光滑向量场,且处处线性无关. 因此对任何$p \in G$, 这n个向量场在p处的取值都能生成T_pG(因为这n个向量线性无关且T_pG是n维线性空间), 因此$\epsilon^{-1}(e_i), 1 \le i \le n$就是一个全局标架

8.7 Lie代数同态

Lie代数同态是一个保持Lie括号运算的, Lie代数之间的线性映射, 即

$$A([X,Y]) = [AX, AY]$$

尽管在一般的流形上, 前推映射要求是微分同胚, 但是在Lie群上, 一个左不变向量场必定能和一个光滑映射共同决定另一个左不变向量场:

Proposition 8.18

G,H是Lie群, $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$分别是它们的Lie代数, $F: G \to H$是Lie群同态, 那么对任何$X \in \mathfrak{g}$, 存在唯一的$Y \in \mathfrak{h}$使得X,Y是F-相关的, 记这个向量场为F_*X, 那么映射F_*X是$\mathfrak{g}$到$\mathfrak{h}$的Lie代数同态.
称为**F诱导出的Lie代数同态**

Proof: 如果有这样一个Y, 那么必定满足$Y_e = dF_eX_e$, 所以Y_e被X唯一确定, 又根据左不变性可以知道

$$Y_g = d(L_g)_{F(e)}(dF_eX_e)$$

根据抽象代数知识我们知道$F(e)$就是H中的单位元, 但我们写作$F(e)$是为了将它和G中的单位元e区分开, 避免引起混淆

这说明Y由X_e唯一确定, 因此若存在, 则必然唯一. 下面定义向量场Y满足(和上面一样)

$$Y_g = d(L_g)_{F(e)}(dF_eX_e)$$

先证明Y和X确实是F-相关的:

$$dF_pX_p = dF_p \circ d(L_p)_eX_e = d(F \circ L_p)_eX_e$$

注意到$F \circ L_p(x) = F(px) = F(p)F(x) = L_{F(p)} \circ F$, 因此

$$= d(L_{F(p)})_{F(e)} \circ dF_e(X_e) = d(L_{F(p)})_{F(e)}Y_e = Y_{F(p)}$$

因此X和Y是F-相关的.

又

$$d(L_h)_gY_g = d(L_h)_g \circ d(L_g)_{F(e)}(dF_eX_e) = d(L_{hg})_{F(e)}(dF_eX_e) = Y_{hg}$$

所以Y是左不变的, 从而光滑, 所以$Y \in \mathfrak{h}$.

再根据向量场的Lie括号保持相关性可以知道F_*是Lie代数同态.

Proposition 8.19

G是Lie群, 那么id_G诱导出的Lie代数同态是$Lie(G)$上的恒等映射

$F_1 : G \to H, F_2 : H \to K$是Lie群同态, 那么

$$(F_2 \circ F_1)_* = (F_2)_* \circ (F_1)_*$$

同构的Lie群有同构的Lie代数

Proof:(a)显然, 设$Y = (id_G)_* X$, 那么根据定义有

$$Y_g = d(L_g)_{id(e)}(d(id_G)_e X_e) = d(L_g)_e X_e = X_g$$

(b)记$e_1 = F(e_1)$, 是H的单位元,

$$((F_2 \circ F_1)_* X)_g = d(L_g)_{F_2(e_1)}(d(F_2 \circ F_1)_e X_e) = d(L_g)_{F_2(e_1)} \circ d(F_2)_{e_1} \circ d(F_1)_e X_e$$

$$= [(F_2)_*(d(F_1)_e X_e)]_g = [(F_2)_*(d(L_{e_1})_{e_1} \circ d(F_1)_e X_e)]_g$$

$$= (F_{2*} \circ F_{1*} X)_g$$

(c)设F_1是微分同胚, 令$F_2 = F^{-1}$, 用(b)可得结论

Proposition 8.20

G是Lie群, H是G的Lie子群. $\iota : H \to G$是包含映射. 那么存在$Lie(G)$的子代数$\mathfrak{h}$, 使得$\mathfrak{h}$同构于$Lie(H)$. 其中

$$\mathfrak{h} = \iota_*(Lie(H)) = \left\{ X \in Lie(G) \middle| X_e \in T_e H \right\}$$

Proof: 我们知道Lie子群的定义要求H是G的浸入子流形, 所以ι光滑, 且显然是Lie群同态, 所以ι_*是$Lie(H) \to \iota(Lie(H))$的Lie代数同态.

记$\mathfrak{h} = \iota_*(Lie(H))$, 则$\mathfrak{h}$是$Lie(G)$的子代数, 同构于$Lie(H)$(因为$\iota_* : Lie(H) \to \iota_*(Lie(H))$是线性双射)

只需证明右边的等号. 当$X_e \in T_e H$时, 可以给出一个H上的光滑左不变向量场Y :

$$Y_g = d(L_g)_e(X_e) \qquad g \in H$$

且$(\iota_*(Y))_e = X_e$, 所以

$$\left\{ X \in Lie(G) \middle| X_e \in T_e H \right\} \subseteq \iota_*(Lie(H))$$

另一方面, $Lie(H)$是维数为$dim H$的线性空间, 而$\left\{ X \in Lie(G) \middle| X_e \in T_e H \right\}$也是维数为dimH的线性空间, 而两个维数相同且有包含关系的线性空间相等, 因此

$$\iota_*(Lie(H)) = \left\{ X \in Lie(G) \middle| X_e \in T_e H \right\}$$

8.8 Exercise

Problem 8.1

M是n维带边光滑流形, 那么存在M上的光滑向量场X, 使得X在∂M上是处处指向内的. 为其取负号可知存在光滑向量场X使得X在∂M上处处指向外

Problem 8.2

M是n维光滑流形, X,Y是M上的光滑向量场, (U,φ)是M的坐标卡. 证明在这组坐标卡下, $[X,Y]$具有局部坐标表示

$$[X,Y]=\sum_{j=1}[\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial b_j}{\partial x^i}-b_i\frac{\partial a_j}{\partial x^i}]\frac{\partial}{\partial x^j}\qquad X=\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial x^i}\qquad Y=\sum_{i=1}b_i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

第九章　积分曲线与流

9.1　积分曲线

M是n维光滑流形, 给定一个向量场V, 光滑曲线$\gamma : J \to M$称为**V的积分曲线**, 如果对任何$t \in J$, 都有

$$\gamma'(t) = V_{\gamma(t)}$$

9.1.1　例子

赋予R^2标准坐标, $V = \frac{\partial}{\partial x_1}$, 设$\gamma(t) = (u(t), v(t))$, 那么

$$\gamma'(t) = u'(t)\frac{\partial}{\partial x_1} + v'(t)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

这说明$\gamma(t)$是V的积分曲线当且仅当

$$u'(t) = 1 \qquad v'(t) = 0 \qquad u(t) = a + t \qquad v(t) = b$$

其中a,b都是常数

9.1.2　存在唯一性

一个自然的问题是, 每个向量场都有积分曲线吗? 从局部上说是的. 先来看一下成为积分曲线的条件: 设$p \in M$, 取p附近的坐标卡(U, φ), 则V在U上有展开

$$V_p = \sum_{i=1}^{n} V^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i \circ \gamma)'(t)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

因此γ是积分曲线意味着

$$\begin{pmatrix} (\varphi_1 \circ \gamma)'(t) = V^1(\gamma(t)) = V^1(\varphi^{-1} \circ (\varphi_1 \circ \gamma(t), .., \varphi_n \circ \gamma(t))) \\ (\varphi_2 \circ \gamma)'(t) = V^2(\varphi^{-1} \circ (\varphi_1 \circ \gamma(t), .., \varphi_n \circ \gamma(t))) \\ \vdots \\ (\varphi_n \circ \gamma)'(t) = V^n(\varphi^{-1} \circ (\varphi_1 \circ \gamma(t), .., \varphi_n \circ \gamma(t))) \end{pmatrix}$$

如果记$V^i \circ \varphi^{-1} = F^i$, $\varphi_i \circ \gamma(t) = y_i(t)$, $y(t) = (y_1(t), .., y_n(t))$, 则有

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) = F^1(y(t)) \\ \vdots \\ y_n'(t) = F^n(y(t)) \end{pmatrix}$$

这是一个一阶常微分方程组, 只要给定初值条件且V足够光滑, 那么根据解的存在唯一性定理, 在初值条件附近肯定有唯一解$y(t)$, 又注意到$\varphi \circ \gamma = y$, 因此$\gamma(t) = \varphi^{-1} \circ y(t)$

Theorem 9.1

M是n维微分流形, V是M上的光滑向量场, 那么对任何$p \in M$, 存在$\epsilon > 0$, 和光滑曲线$\gamma(t) : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, 满足$\gamma$是V的积分曲线且$\gamma(0) = p$
存在唯一的积分曲线γ, 满足γ不能成为一个更大区间上的积分曲线, 这样的γ称为**极大积分曲线**

Proof: 沿用上文的记号, 此时$y(0) = \varphi(p)$, 这就是初值条件, 因此用ode的存在唯一性定理. 可得积分曲线的存在性.

为了说明极大积分曲线的存在性, 先证明对于两个在区间J上有定义的积分曲线$\gamma, \tilde{\gamma}$, 假如二者在某点$t_0 \in J$是相等的, 那么$\gamma = \tilde{\gamma}$在J上恒成立.

设$S = \left\{t \in J \middle| \tilde{\gamma}(t) - \gamma(t) = 0\right\}$, 根据连续性可得S是个闭集, 且包含了$t_0$. 另一方面, 若$t_1 \in S$, 那么$\gamma(t), \tilde{\gamma}(t)$在$t_1$附近都是V的积分曲线, 但是根据ODE方程组解的唯一性, 存在一个t_1的邻域U使得在U上, $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)$, 从而S是开的. 所以S在J中既开又闭. 又J连通, 所以S=J, 因此两个曲线在J上取值相同

令D^p是所有起点为p, 且为V的积分曲线的存在区间(对任何一个积分曲线γ, 我们记这个区间为J_γ)的并集. 定义

$$\theta^p(t) = \gamma(t) \qquad t \in J_\gamma$$

这是良定义的, 假设$t \in J_\gamma \cap J_{\tilde{\gamma}}$, 那么根据$\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = p$可以知道$\gamma = \tilde{\gamma}$在$J_\gamma \cap J_{\tilde{\gamma}}$上成立, 也就是说所有在t处有定义的积分曲线, 在t处的值都一样. 所以$\theta^p(t) = \gamma(t)$是良定义的

又D^p是有公共点0的连通集合的并集, 因此连通, 是R中的连通集, 从而也是一个区间(第一章习题). 假设θ^p还不是极大积分曲线, 那么存在一个严格包含D^p的区间J, 和J上定义的γ, 满足$\gamma(0) = p$, 且是V的积分曲线. 那么根据D^p的选法, $J \subseteq D^p$, 从而和$J \supsetneq D^p$矛盾, 从而$\theta^p(t)$就是极大积分曲线.

Proposition 9.2

M,N是光滑流形, F是M到N的光滑映射, $X \in \mathscr{X}(M), Y \in \mathscr{X}(N)$, 则X,Y是F-相关的, 当且仅当F把X的积分曲线映射为Y的积分曲线

Proof: $\Rightarrow$ 设γ是X的积分曲线, 那么对任何$f \in C^\infty(N)$, 均有

$$\gamma'(t)(f \circ F) = X_{\gamma(t)}(f \circ F)$$

但左边等于$\frac{d}{ds}\Big|_t f \circ F \circ \gamma(s) = (F \circ \gamma)'(t)f$, 右边等于$dF_{\gamma(t)}(X_{\gamma(t)})f = Y_{F(\gamma(t))}f$, 因此结合f的任意性可得

$$(F \circ \gamma)'(t) = Y_{F(\gamma(t))}$$

$\Leftarrow$:

$$(F \circ \gamma)'(t)f = Y_{F(\gamma(t))}f$$

而$(F \circ \gamma)'(t)f = \frac{d}{ds}\Big|_t f \circ F \circ \gamma(s) = \gamma'(t)(f \circ F)$, 再根据$\gamma$是X的积分曲线可得

$$(F \circ \gamma)'(t)f = X_{\gamma(t)}(f \circ F) = dF_{\gamma(t)}X_{\gamma(t)}f$$

根据f的任意性, 这给出了

$$dF_{\gamma(t)}X_{\gamma(t)} = Y_{F(\gamma(t))}$$

对任何$p \in M$, 都存在X的积分曲线满足$\gamma(0) = p$, 带入上式可得

$$dF_p X_p = Y_{F(p)}$$

证毕

9.2 流

我们已经知道对任何$p \in M$, 都有一个极大积分曲线, 设为$\theta^p(t)$, 存在区间为J_p, 可以考虑一个映射

$$\theta_t(p) = \theta^p(t)$$

注意到

$$\theta_t \circ \theta_s(p) = \theta_{\theta_s(p)}(t)$$

设$\theta_s(p) = q$, 那么$\theta_t \circ \theta_s(p)$在t=0时为q, 从而是经过q的积分曲线. 而$\theta^p(t+s)$也是经过q的积分曲线(视为关于t的函数), 因此根据唯一性,二者相等, 所以

$$\theta_t \circ \theta_s(p) = \theta^p(t+s) = \theta_{t+s}(p)$$

这说明θ_t有某种“加法性质”, 重写上式我们可以得到

$$\theta(t, \theta(s,p)) = \theta(t+s, p) \qquad \theta(0,p) = p$$

也就是说$\theta_0 = id_M$, 因此当$t, -t \in \cap_{p\in M} J_p$时,有$(\theta_t)^{-1} = \theta_{-t}$, 从而$\theta_t$都是M到M的微分同胚.

Theorem 9.3

M是n维微分流形, V是M上的光滑向量场, 那么对任何$p \in M$, 存在$\epsilon > 0$, p的一个邻域U, 和光滑映射$\Phi(t,q) : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M$, 满足:

- 对任何固定的$q \in U$, $\Phi(t,q)$都是向量场V的积分曲线, 且起点为q
- 对任何固定的t,s,当$t+s \in (-\epsilon, \epsilon)$时均有$\Phi(t, \Phi(s,q)) = \Phi(t+s, q)$
- 对任何固定的$t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\psi_t(q) = \Phi(t,q)$是V到V的微分同胚

$\{\psi_t\}_{|t|<\epsilon}$称为**局部单参数变换群** ,V称为**无穷小生成元**

Proof: 在坐标卡(U, φ)上考虑常微分方程组

$$\begin{pmatrix} (\varphi_1 \circ \gamma)'(t) = V^1(\gamma(t)) = V^1(\varphi^{-1} \circ (\varphi_1 \circ \gamma(t), .., \varphi_n \circ \gamma(t))) \\ (\varphi_2 \circ \gamma)'(t) = V^2(\varphi^{-1} \circ (\varphi_1 \circ \gamma(t), .., \varphi_n \circ \gamma(t))) \\ \vdots \\ (\varphi_n \circ \gamma)'(t) = V^n(\varphi^{-1} \circ (\varphi_1 \circ \gamma(t), .., \varphi_n \circ \gamma(t))) \end{pmatrix}$$

如果记$V^i \circ \varphi^{-1} = F^i$, $\varphi_i \circ \gamma(t) = y_i(t)$, $y(t) = (y_1(t), .., y_n(t))$, 则有

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) = F^1(y(t)) \\ \vdots \\ y_n'(t) = F^n(y(t)) \end{pmatrix} \qquad y(0) = \varphi(q)$$

根据常微分方程组的存在性, 唯一性和光滑性定理, 存在包含0的开区间J_0, 和$\varphi(U)$的开子集U_0, 使得对任何$x \in$

U_0, 都有解y_x满足$y_x(0) = x$, 从而$\varphi^{-1} \circ y_x$就是过$\varphi^{-1}(x)$的积分曲线. 且映射

$$\theta(t, x) = y_x(t)$$

是$J_0 \times U_0$上的光滑映射. 从而令

$$\Phi(t, p) = \varphi^{-1} \circ \theta(t, \varphi(p)) \qquad p \in \varphi^{-1}(U_0)$$

光滑映射的复合还是光滑的, 从而$\Phi(t, p)$在$J_0 \times \varphi^{-1}(U_0)$上光滑, 因为$J_0$是包含0的开区间, 所以存在$\epsilon$使得$(-\epsilon, \epsilon) \subseteq J_0$, 这就给出了定义在$(-\epsilon, \epsilon) \times \varphi^{-1}(U_0)$上的光滑映射

设$\Phi(s, q) = x$, 则$\Phi(t, x)$是过x的V的积分曲线. 但$\Phi(t + s, q)$在$t = 0$时为x, 且也是V的积分曲线, 前面证明了在某点处重合的积分曲线一定在它们的公共定义域上相等, 因此

$$\Phi(t + s, q) = \Phi(t, \Phi(s, q))$$

注意到$\Phi(0, q) = q$对任何$q \in \varphi^{-1}(U_0)$成立, 因此

$$\Phi(t, \Phi(-t, q)) = id \qquad \psi_t \circ \psi_{-t} = id_{\varphi^{-1}(U_0)}$$

因此是微分同胚

9.3 完备向量场

光滑向量场生成在局部肯定有单参数变换群, 但是这个单参数变换群未必能在$t \in R$上都有定义. 如果一个向量场能够生成在$t \in R$上都有定义的单参数变换群, 那么称为**完备向量场**, 这样的单参数变换群称为**全局单参数变换群**, 满足如下性质

- $\Phi(t, q)$是$R \times M \to M$的光滑映射, 且固定q时, $\Phi(t, q)$是V的经过q的积分曲线
- $\Phi(t, \Phi(s, q)) = \Phi(t + s, q)$
- 对任何$t \in R$, $\Phi(t, p)$都是M到M的微分同胚

Lemma 9.4 一致时间引理

M是n维光滑流形, V是M上的光滑向量场, $\theta(t, p)$是V的流, 如果存在一个统一的$\epsilon > 0$, 使得对任何$p \in M$, $\theta(t, p)$在$(-\epsilon, \epsilon)$上都有定义, 那么向量场V是完备的

Proof: 如不然, 则存在一个p使得$\theta(t, p)$的定义域的右端点有上界(左端点有下界的情况同理), 令b是$\theta(t, p)$的定义域的上确界, 任取t_0满足$b - \epsilon < t_0 < b$, $q = \theta(t_0, p)$, 根据题意, $\theta(t, q)$在$(-\epsilon, \epsilon)$上有定义, 所以考虑另一个曲线

$$\gamma(t) = \begin{cases} \theta(t, p) & -\epsilon < t < b \\ \theta(t - t_0, q) & t_0 - \epsilon \le t < t_0 + \epsilon \end{cases}$$

下面说明这是良定义的曲线: 因为

$$\theta(t - t_0, q) = \theta(t, \theta(-t_0, q)) = \theta(t, (\theta(t_0, q)^{-1})) = \theta(t, p)$$

(这里用到了 $\theta(-t_0, q) = \theta_{-t_0}(q) = (\theta_{t_0})^{-1}(q) = p$)

根据积分曲线的唯一性, 二者在定义域重合的部分相等

因此γ是V的积分曲线, 且经过点p, 而γ的定义域右端点$> b$, 从而得出矛盾

对于左端点有下界的情形, 重复这个过程, 把一个曲线粘贴到$\theta(t,p)$的左边(上文是粘贴到右边), 就能证明左边没有下界

Corollary 9.5

M是光滑流形, X是M上具备紧支集的光滑向量场, 则X完备

Proof:根据局部单参数变换群的存在性, 对任何$p\in M$, 存在定义在$(-\epsilon_p,\epsilon_p)\times U_p$上的V的流$\theta_p(t,x)$. 用这些$U_p$覆盖$suppV$, 得到有限个子覆盖$U_i$, 然后考虑映射

$$\theta(t,q)=\begin{cases}\theta_{p_i}(t,q) & q\in U_{p_i}\cap suppV \\ 0 & q\notin suppV\end{cases}\qquad |t|<\epsilon$$

其中$\epsilon=min\{\epsilon_{p_1},...,\epsilon_{q_m}\}$, θ是良定义的, 因为在一点处重合的积分曲线在其定义域的交集内相等. 当$q\in M-suppV$时, 注意到$M-suppV$是开集, 且V在$M-suppV$上为0, 所以起点为q的V的积分曲线是常数, 因此可以在整个R上定义为常值函数. 从而每个积分曲线都在$(-\epsilon,\epsilon)$上有定义, 从而X是完备的.

Corollary 9.6

Lie群上的左不变向量场都是完备的

Proof: 任取$g\in G$, 左不变向量场X和它本身是L_g-相关的, 设$\gamma(t):(-\epsilon,\epsilon)\to G$是X在e附近的光滑曲线, 那么$L_g\circ\gamma$就是在g附近X的光滑曲线. 这就是一个统一的$\epsilon$, 因此满足一致时间引理的条件

9.4 Lie导数

Definition 9.7 Lie导数

M是n维光滑流形, W,V是M上的向量场, θ是V的流, 那么**W关于V的Lie导数**, 是一个向量场, 逐点定义为

$$(\mathcal{L}_V W)_p=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}W_{\theta_t(p)}=\lim_{t\to 0}\frac{d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}W_{\theta_t(p)}-W_p}{t}$$

如果两个向量场都是光滑的, 那么它们的Lie导数就是Lie括号:

Proposition 9.8

设X,Y是光滑流形M上的光滑向量场, 那么

$$\mathcal{L}_X Y=[X,Y]$$

Hint:爆算

Proof: 任取光滑函数$f\in C^\infty(M)$, 那么

$$\mathcal{L}_X Yf=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}Y_{\theta_t(p)}f=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}Y_{\theta_t(p)}(f\circ\theta_{-t})=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}[Y(f\circ\theta_{-t})]\circ\theta_t(p)$$

$$Y_{\theta_t(p)}f(\theta_{-t}(p))=y(\theta_t(p))\frac{\partial(f\circ\theta_{-t}\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(\theta_t(p))}$$

设$Y=\sum_{i=1}^n y_i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}$, 先来对一个$y_i\frac{\partial}{\partial x^i}$计算, 然后根据线性性对i求和即可

注意到p是个定数, 根据y光滑可知$y(\theta_t(p))$在t=0附近光滑, 同样的$\frac{\partial(f\circ\theta_{-t}\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}$在t=0附近光滑, 因此

$$\mathcal{L}_XYf=\lim_{t\to 0}[\frac{d}{dt}y(\theta_t(p))]\frac{\partial(f\circ\theta_{-t}\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(\theta_t(p))}+\lim_{t\to 0}y(\theta_t(p))\frac{d}{dt}\frac{\partial(f\circ\theta_{-t}\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(\theta_t(p))}$$

因为$f\circ\theta_{-t}\circ\varphi^{-1}$是$R\times\varphi(U)$上的光滑函数, 所以

$$=\sum_{j=1}^n\frac{\partial y\circ\varphi^{-1}}{\partial x_j}\Big|_{\varphi(p)}\frac{d\varphi_j\circ\theta_t(p)}{dt}\Big|_{t=0}\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)}+y(p)\frac{d}{dt}\frac{\partial(f\circ\theta_{-t}\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(\theta_t(p))}$$

设$X_p=\sum_{j=1}^n X_j(p)\frac{\partial}{\partial x^j}$, 则根据$\theta$是积分曲线可以得到

$$=\sum_{j=1}^n\frac{\partial y\circ\varphi^{-1}}{\partial x_j}X_j(p)\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)}+y(p)\frac{d}{dt}\frac{\partial(f\circ\theta_{-t}\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(\theta_t(p))}$$

注意到

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(f\circ\theta_{-t}\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(\theta_t(p))}=\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^n\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_j}\Big|_{\varphi(p)}\frac{\partial\varphi_j\circ\theta_{-t}\circ\varphi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(\theta_t(p))}=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_j}\Big|_{\varphi(p)}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_j\circ\theta_{-t}\circ\varphi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(\theta_t(p))}$$

我们把$\varphi_j\circ\theta_{-t}\circ\varphi^{-1}$写成$\varphi_j\circ\theta(-t,\varphi^{-1})=F(t,x)$, 则

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\varphi_j\circ\theta_{-t}\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(\theta_t(p))}=\frac{d}{dt}\frac{\partial F(t,x)}{\partial x_i}(\varphi\circ\theta_t(p))$$

$$=\frac{\partial F}{\partial t\partial x_i}(0,\varphi\circ\theta_0(p))+\sum_k\frac{\partial F(0,x)}{\partial x_i\partial x_k}(0,\varphi\circ\theta_0(p))\frac{d\varphi_k\circ\theta_t(p)}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$=\frac{\partial F}{\partial t\partial x_i}(0,\varphi\circ\theta_0(p))+\sum_k\frac{\partial F(0,x)}{\partial x_i\partial x_k}(0,\varphi\circ\theta_0(p))X_k(\varphi(p))$$

$$=\frac{\partial F}{\partial x_i\partial t}(0,\varphi\circ\theta_0(p))+\sum_k\frac{\partial\varphi_j\circ\theta_0\circ\varphi}{\partial x_i\partial x_k}(\varphi\circ\theta_0(p))X_k(\varphi(p))$$

$$=\frac{\partial F}{\partial x_i\partial t}(0,\varphi\circ\theta_0(p))+\sum_k\frac{\partial x_j}{\partial x_i\partial x_k}(\varphi\circ\theta_0(p))X_k(\varphi(p))=\frac{\partial F}{\partial x_i\partial t}(0,\varphi\circ\theta_0(p))$$

注意到

$$\frac{\partial F}{\partial t}(0,x)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_j\circ\theta_{-t}\circ\varphi^{-1}(x)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_j\circ\gamma(-t)=-\gamma'(0)(\varphi_j)$$

其中$\gamma(t)$是过$\varphi^{-1}(x)$的X的积分曲线, 因此$\gamma'(0)=X_{\gamma(0)}=X_{\varphi^{-1}(x)}$, 令$x=\varphi\circ\theta_0(p)=\varphi(p)$, 这给出了

$$\frac{\partial F}{\partial t}(0,x)=-X_p(\varphi_j)=-\sum_{k=1}^n X_k(p)\frac{\partial\varphi_j\circ\varphi^{-1}}{\partial x_k}\Big|_{\varphi(p)}=-\sum_{k=1}^n X_k(p)\frac{\partial x_j}{\partial x_k}\Big|_{\varphi(p)}=-X_j(\varphi^{-1}(x))$$

从而

$$\frac{\partial F}{\partial x_i\partial t}(0,\varphi\circ\theta_0(p))=\frac{\partial F}{\partial x_i\partial t}(0,\varphi(p))=-\frac{\partial X_j\circ\varphi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)}=\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p X_j$$

由此可得

$$\mathcal{L}_XYf=\sum_{j=1}^n\frac{\partial y_i\circ\varphi^{-1}}{\partial x_j}X_j(p)\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)}-y_i(p)\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p X_j\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_j}\Big|_{\varphi(p)}$$

对i求和得到

$$\mathcal{L}_X Y f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i \circ \varphi^{-1}}{\partial x_j} X_j(p) \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i}\bigg|_{\varphi(p)} - \sum_{i=1}\sum_{j=1} y_i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p X_j \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_j}\bigg|_{\varphi(p)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [\sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial y_i}{\partial x^j} - y_j(p) \frac{\partial X_i}{\partial x^j}\bigg|_p] \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = [X, Y]_p f$$

Corollary 9.9

$X, Y \in \mathscr{X}(M)$, 刚才证明了Y关于X的Lie导数就是$[X, Y]$, 由此可知$\mathcal{L}_X Y$的诸多性质:

- 若F是微分同胚, 则$F_*(\mathcal{L}_X Y) = \mathcal{L}_{F_* X} F_* Y$
- $\mathcal{L}_X Y = -\mathcal{L}_Y X$
- $\mathcal{L}_X [Y, Z] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z]$

Proof:前两条分别是Lie括号保持函数相关性和反对称性. 最后一条两边展开是Jacobian恒等式, 证毕

第十章　向量丛

先介绍几个特殊的向量丛

10.1　余切丛

前面我们定义切丛$TM = \coprod_{p\in M} T_pM$, 每个$T_pM$都是一个n维线性空间, 然后我们定义另一个几何对象, 称为**余切丛**, 记为

$$T^*M = \coprod_{p\in M} T_p^*M \qquad T_p^*M = (T_pM)^*$$

10.1.1　对偶空间和对偶基

考虑一个n维的线性空间V, 设其基底为$e_1, .., e_n$. 令V^*是V上所有线性泛函的全体. 那么任取$f \in V^*$, 设对任何$v \in V$, v的展开为$v_1e_1 + \cdots + v_ne_n$, 则根据线性性有

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i f(e_i)$$

这说明, f的表现由$f(e_1), .., f(e_n)$完全确定. 考虑如下n个线性泛函

$$\omega_j(v) = v_j$$

那么$f(v) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\omega_i(v)$, 由此可得

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\omega_i$$

这说明V^*也是个有限维线性空间, 且维数$\leq n$. 事实上$dimV^* = dimV$, 这只需说明ω_j线性无关. 如果

$$u_1\omega_1 + \cdots + u_n\omega_n = 0 \in V^*$$

(右边的0表示把任何$v \in V$都映射为0的泛函)两边作用e_j可知

$$u_j = 0$$

因此ω_j线性无关. 我们找出了V^*的一组基$\omega_1, .., \omega_n$. 因为它们满足

$$\omega_j(e_i) = \delta_{ij}$$

因此ω_i又称为e_i的**对偶基**

10.1.2 余切向量

我们把T_pM放入刚才对偶空间的框架中, 取p附近的坐标卡(U,φ), 则T_pM在这个坐标卡下有基底$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$, 这样也能取它们的对偶基, 记为$\omega_i\big|_p$作为$(T_pM)^*$的基底.

对p附近的另一个坐标卡(V,ψ), 我们知道若v_p在(U,φ)下有系数向量v, 那么在(V,ψ)下的系数为

$$J(\psi\circ\varphi^{-1})v$$

设$\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^j}\big|_p$的对偶基为$\tilde{\omega}_j$, 那么存在$a_{ij}$使得

$$\omega_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\tilde{\omega}_j$$

为了确定a_{ij}, 两边作用$\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_j}\Big|_p$可得

$$a_{ij}=\omega_i(\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_j}\Big|_p)$$

解方程

$$J(\psi\circ\varphi^{-1})v=\begin{pmatrix}0&\\ \vdots&\\ 0&\\ 1&\text{第j行}\\ 0&\\ \vdots&\\ 0&\end{pmatrix}$$

得到v是$J(\psi\circ\varphi^{-1})^{-1}$的第j列, 因此

$$a_{ij}=\omega_i(\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_j}\Big|_p)=\sum_{j=1}^{n}v_j\omega_i(\frac{\partial}{\partial x^j})=v_i$$

即$[J(\psi\circ\varphi^{-1})]^{-1}$的第i行第j列, 这说明

$$\tilde{\omega}_i=\sum_{j=1}^{n}[J(\psi\circ\varphi^{-1})]_{ij}\omega_j$$

回忆切空间的基变换, 我们知道

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^j}=[J(\psi\circ\varphi^{-1})^{-1}]_{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}$$

这也说明两组对偶基的朝着相反方向变换的.

10.1.3 余切丛

有了对偶基就能定义局部坐标卡了

Propsoition 10.1

M是n维光滑流形, 则可赋予T^*M拓扑结构和光滑结构使得T^*M是2n维光滑流形

Proof: 取可数个覆盖M的坐标卡(U_i,φ_i), 则在$\pi^{-1}(U_i)$上, 定义

$$\tilde{\varphi}_i(\sum_{i=1}^{n}v_i\omega_i\Big|_p)=(\varphi_i(p),v_1,..,v_n)$$

定义T^*M的开集为

$$\left\{\tilde{\varphi}_i^{-1}(U)\middle|U \in R^{2n}\text{是开集}, i \geq 1\right\}$$

余下的步骤和证明TM是2n维光滑流形一样.

Definition 10.2

M是光滑流形, M上的**余向量场**是一个映射$X : M \to T^*M$, 且满足

$$\pi \circ X = id_M$$

也就是说$X(p) \in T_p^*M$, 我们把$X(p)$记为X_p. 如果X是光滑映射, 则称为**光滑余向量场**

和向量场的情形一样, 对$p \in M$和p附近的坐标卡(U, φ), 如果ω是一个向量场, 那么

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{n} \omega^i(p)\lambda_i\Big|_p$$

其中λ_i是$\frac{\partial}{\partial x^i}$的对偶基. $\omega^i(p)$称为**分量函数**.

Proposition 10.3

ω是M上的余向量场, (U, φ)是M的坐标卡, 则ω在U上光滑当且仅当ω在这个坐标卡上的分量函数都是U上的光滑函数

Proof: 证明和向量场的情形是一样的.

向量场中标架的概念也可以搬运到余向量场上. 设M是n维光滑流形, U是M中的开集, U上的**余标架**是n个在U上处处线性无关的向量场$(\omega_1, .., \omega_n)$, 换言之它们在每一点$p \in U$都是T_p^*M的基底. 如果U=M那么称为**全局余标架**

显然, 如果有一组U上的标架$(E_1, .., E_n)$, 那么可以逐点通过对偶基诱导出一组余向量场$(\epsilon_1, ..., \epsilon_n)$, 其中$\epsilon_i\big|_p$是$E_i\big|_p$的对偶基. 它们的连续性是相关联的

Proposition 10.4

设$(E_1, .., E_n)$在U上光滑当且仅当$(\epsilon_1, ..., \epsilon_n)$在U上光滑

Proof: 设

$$E_i(p) = \sum_{j=1}^{n} e_{ij}(p)\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p$$

且

$$\epsilon_i(p) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(p)\lambda_j\Big|_p$$

下面寻找e_{ij}和b_{ij}的关系: 根据对偶基的定义, 可知$\epsilon_i(E_j) = \delta_{ij}$, 这给出了

$$\delta_{ij} = \sum_{t=1} b_{it}(p)\sum_{k=1} e_{jk}(p)\lambda_t(\frac{\partial}{\partial x^k}) = \sum_{t=1} b_{it}(p)\sum_{k=1} e_{jk}(p)\delta_{tk} = \sum_{j=1} b_{it}(p)e_{jt}(p)$$

记矩阵$B(p) = b_{ij}(p), E(p) = e_{ij}(p)$, 则

$$BE^T = I_n$$

又根据E_i, ϵ_i分别是标架和余标架可知B和E处处是非异阵, 因此

$$E^T = B^{-1}$$

从而E光滑当且仅当E^T光滑当且仅当B^{-1}光滑当且仅当B光滑(因为$\frac{1}{detB}$光滑且矩阵的伴随运算是光滑映射)

10.1.4　函数的微分

设f是n维光滑流形M上的函数, 且在某个开子集U上光滑, 那么对任何$p \in U$, 都能定义**f的微分**:

$$df_p(v) = v(f) \qquad v \in T_pM$$

换言之, df是U上的余切向量场. 注意到这个定义很像切空间之间的切映射. 事实上它们本质是一样的

Proposition 10.5

如果f是M上的光滑函数, 那么df是M上的光滑余切向量场

Proof: 设$p \in M$, 取p附近的坐标卡(U, φ), 设

$$df_p = \sum_{i=1}^n a^i(p)\lambda_i\Big|_p$$

则两边作用$\frac{\partial}{\partial x^j}$就能得到

$$a^j(p) = df_p(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial}{\partial x^j}f$$

因为f是光滑函数, $\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p$是U中的光滑向量场, 所以$a^j(p)$在U中光滑, 因此$df$在任意的$p \in M$处都光滑, 因此df光滑, 而且我们发现

$$df_p = \sum_{i=1}^n (\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p f) \times \lambda_i\Big|_p$$

现在设f是坐标分量φ^j, 那么

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p f = \frac{\partial \varphi^j \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$$

因此

$$dx_p^j = \lambda_j\Big|_p$$

原来T_pM在坐标卡(U, φ)下的对偶基就是$dx^i, 1 \le i \le n$, i.e 是对坐标函数的微分. 这给出了

$$df = \sum_{i=1}^n (\frac{\partial}{\partial x^i}f)dx^i$$

如果f是R^n中的某个开集U到R的函数, 那么直接考虑坐标卡(U, id), 每点处的切空间的基底就是关于第i个变量的偏微分算子的全体:$\frac{\partial}{\partial x_1}, .., \frac{\partial}{\partial x_n}$, 坐标函数$x^i = x_i$, 因此

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$$

Proposition 10.6

M是n维光滑流形, f是M上的光滑函数, 则$df = 0$当且仅当f在M的每个连通分支上是常数

Proof: 不妨设M连通, 否则在每个连通分支上分别讨论

$\Rightarrow$ 固定$p \in M$, 考虑集合

$$A = \{q \in M \big| f(q) = f(p)\}$$

对任何$x \in A$, 取x附近的坐标卡(U,φ), 不妨设$\varphi(U)=B(0,1)$且$\varphi(x)=0$, 令$\gamma(t)=t\varphi(y)\in B(0,1)$, 则有

$$f(y)-f(x)=f\circ\varphi^{-1}(\gamma(1))-f\circ\varphi^{-1}(\gamma(0))=\int_0^1\frac{d}{dt}f\circ\varphi^{-1}\circ\gamma(t)\,dt$$

$$=\int_0^1\sum_{i=1}^n\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_i}(\gamma(t))\frac{d}{dt}\gamma_i(t)\,dt=\int_0^1\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi^{-1}(\gamma(t))}f\varphi^i(y)\,dt$$

但根据$df=0$在U内成立可得, $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{\varphi^{-1}(\gamma(t))}f=0$, 因此

$$f(y)=f(x)\qquad\forall y\in U$$

这说明A是开集. 又$f(p)$是R中的闭集, 所以$f^{-1}(f(p))$是M中的闭集, 这说明A既开又闭, 又M连通, 所以A=M, 所以f是常值, $f(q)=f(p)$对任何$q\in M$成立

$\Leftarrow$: 取坐标卡(U,φ), 如果f恒为常数那么$f\circ\varphi^{-1}$在$\varphi(U)$上恒为常数, 所以

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p f=\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_i}\bigg|_{\varphi(p)}=0\qquad\forall p\in U$$

这说明

$$df=\sum_{i=1}^n(\frac{\partial}{\partial x^i}f)dx^i=0$$

在U上成立, 又根据U的任意性, $df=0$在M上恒成立

10.1.5 向量场的拉回

M,N是光滑流形, F是M到N的光滑映射, 那么F的切映射$dF_p:T_pM\to T_{F(p)}N$是线性映射. 通过对偶空间, 我们可以定义对偶映射

$$dF_p^*(\omega)(v)=\omega(dF_pv)\qquad\omega\in T_{F(p)}^*N$$

那么$dF_p^*:T_{F(p)}^*N\to T_p^*M$就是一个线性映射. 称为**F在p点的拉回**

Definition 10.7

设ω是N上的余向量场, F是$M\to N$的光滑映射, 定义

$$(F^*\omega)_p=dF_p^*(\omega_{F(p)})$$

则$F^*\omega$称为ω**被F的拉回**

Proposition 10.8

u是N上连续实值函数, ω是N上的余向量场, 那么

$$F^*(u\omega)=(u\circ F)F^*\omega$$

其中$(u\omega)_p=u(p)\omega_p$. 如果u光滑, 那么

$$F^*du=d(u\circ F)$$

Proof:

$$(F^*u\omega)_p=dF_p^*u\circ F(p)\omega_{F(p)}=(u\circ F(p))dF_p^*\omega_{F(p)}=u\circ FF^*\omega$$

如果u光滑, 那么把$\omega = du$带入上式, 并令上式的u=1, 可得

$$F^* du = F^* du$$

$$(F^* du)_p(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p) = du(dF_p \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p)$$

注意到在基底$\frac{\partial}{\partial x^i}$和$\frac{\partial}{\partial y^i}$下, dF_p是一个矩阵, 设为a_{ij}, 则

$$a_{ij} = \frac{\partial \psi_i \circ F \circ \varphi^{-1}}{\partial x_j} \qquad dF_p \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \sum_{j=1}^m a_{ji} \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{F(p)}$$

可以在对偶基$dy^i\Big|_{F(p)}$下展开du, 设

$$du = \sum_{k=1}^m u_k dy^k \qquad u_k = \frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_{F(p)} u$$

则

$$du(dF_p \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p) = \sum_{k=1}^m u_k a_{ki}$$

因此当在dx^i下展开$F^* du$时, dx^i的系数为$\sum_{k=1}^m u_k a_{ki}$

还可以展开

$$d(u \circ F) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(u \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ F)}{\partial x^i} dx^i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(u \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} dx^i$$

$$= \sum_{i=1}^n [\sum_{j=1}^m \frac{\partial u \circ \psi^{-1}}{\partial x_j}(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}\varphi(p)) \frac{\partial \psi_k \circ F \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i}] dx^i = \sum_{i=1}^n [\sum_{j=1}^m u_k a_{ki}] dx^i$$

从而$d(u \circ F)$, $F^*(du)$在基底dx^i下的展开的系数向量是一样的, 因此二者相等.

Proposition 10.9

M,N是光滑流形, $F : M \to N$是光滑映射, ω是N上的连续余向量场. 那么$F^*\omega$是连续的. 如果ω光滑, 那么$F^*\omega$也光滑

Proof:取$F(p)$附近的坐标卡(V, ψ), 则在这组坐标卡下有对偶基dy^i, 且

$$(F^*\omega)_p = F^*(\sum_{i=1}^n \omega^i(p) dy^i) = \sum_{i=1}^n \omega^i(F(p)) F^* dy^i = \sum_{i=1}^n \omega^i(F(p)) d(y^i \circ F)$$

因为ω^i连续, 所以$F^*\omega$也连续. 如果ω光滑, 那么ω^i光滑. 再结合$d(y^i \circ F)$光滑可得$F^*\omega$在$F^{-1}(V)$上光滑, 因而根据V的任意性可得$F^*\omega$在M上光滑

10.2　向量丛

前面介绍的切丛和余切丛都可以视为向量丛:

Deinition 10.10

M是n维光滑流形, 一个**M上秩为k的向量丛**是一个拓扑空间E和一个连续满射的**投影映射**$\pi : E \to M$, 满足下列条件:

- 对任何$p \in M$, 纤维$E_p = \pi^{-1}(p)$是k维线性空间
- 对任何$p \in M$, 存在p的邻域U和一个$\pi^{-1}(U) \to U \times R^k$的拓扑同胚$\psi_\alpha$, 称为E的**局部平凡化**, 满足
  - $\pi_U \circ \psi_\alpha = \pi$, 其中$\pi_U$是$U \times R^k \to U$的投影
  - 对任何$p \in U$,$\psi_\alpha\big|_{\pi^{-1}(p)} : \pi^{-1}(p) \to \{p\} \times R^k$是线性同构

E是**总空间**, M是**底空间**.

如果局部平凡化映射是微分同胚, 那么E称为M上的**光滑向量丛**. 如果有一个局部平凡化的定义域是整个E, i.e E可以微分同胚于$M \times R^k$, 则称E是**光滑平凡丛**.

Proposition 10.11 连接函数

设E是M上秩为k的光滑向量丛, 假设有两个局部平凡化ψ_α, ψ_β, 满足U_α, U_β相交, 那么存在一个光滑函数$\tau : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, R)$, 使得

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(p, v) = (p, \tau(p)v) \qquad p \in U_\alpha \cap U_\beta$$

Proof: 我们知道对固定的p, ψ_α, ψ_β都是$E_p \to \{p\} \times R^k$的线性同构, 因此

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(p, v)$$

是关于v的线性映射, 假设

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(p, v) = (p, \tau(p)v)$$

那么$\tau(p)$必须是一个k阶实方阵,类似的可以得到$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p, v) = (p, \theta(p)v)$, 从而$\tau(p)\theta(p) = I_k$, 因此$\in GL(k, R)$. 又取v=第i个分量为1,其他分量为0的向量, 可得

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(p, v) = (p, \tau(p)_{1i}, .., \tau(p)_{ki})$$

根据$\psi_\alpha \circ \psi_\beta$是$U_\alpha \cap U_\beta \times R^k \to U_\alpha \cap U_\beta \times R^k$的微分同胚可得, 固定$R^k$中的v时, $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(p, v) = (p, \tau(p)_{1i}, .., \tau(p)_{ki})$是关于p的光滑函数, 所以每个分量光滑, 从而$\tau(p)_{1i}, .., \tau(p)_{ki}$光滑, 根据i的任意性可得$\tau(p)$是光滑矩阵, 因此是光滑映射,而且在每一点p处都是非异阵.

Proposition 10.12

M是n维光滑流形, 则TM, T^*M是M上rank为n的光滑向量丛.

Proof:回忆TM的坐标卡$(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$, 之前说明过$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to U \times R^k$是微分同胚. 又注意到

$$\tilde{\varphi}(v_p + u_p) = \tilde{\varphi}(\sum_{i=1}^{n}(v_i + u_i)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p) = (\varphi(p), v_1 + u_1, .., v_n + u_n) = (\varphi(p), v) + (\varphi(p), u) = \tilde{\varphi}(v_p) + \tilde{\varphi}(u_p)$$

因此这就是局部平凡化. 且直接验证可得局部平凡化之间的连接函数, 就是对应坐标函数ψ, φ的jacobian矩阵. 验证这一点的过程和求$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$的过程一样的. 又纤维$(TM)_p = T_pM$, 显然是n维线性空间. 因此E是M上的光滑向量丛

T^*M同理, 此时连接函数应该是前面jacobian矩阵的逆矩阵, 因为切空间的基底和其对偶基在转移映射下的变化趋势是相反的, 详见前面余切丛部分的叙述

10.3　截面

设$\pi : E \to M$是一个向量丛, **E的截面**是一个连续映射$\sigma : M \to E$, 满足

$$\pi \circ \sigma = id_M$$

0截面是满足$\sigma(p) = 0 \in E_p$的映射, 我们马上就将看出0截面也是一个截面:

Proposition 10.13

证明0截面确实是连续映射,如果E还是M上的光滑向量丛, 证明0截面还是光滑映射

Proof: 对E中的一个开集V, 只需证明$\sigma^{-1}(V)$还是开的. 只需证任取p满足$(p,0) \in V$, 都存在p的邻域K使得$\sigma(K) \subseteq V$. 为此, 取p在M中的邻域U和$\pi^{-1}(U) \to U \times R^k$的局部平凡化$\Phi$, 通过缩小U(此时还是$\pi^{-1}(U) \to U \times R^k$的同胚), 不妨设$\pi^{-1}(U) \subseteq V$, 那么对任何$q \in U$, 根据

$$\Phi \circ \sigma(q) = q \times 0$$

我们知道

$$\sigma(U) \subseteq \Phi^{-1}(U \times 0) \subseteq \pi^{-1}(U) \subseteq V \qquad U \subseteq \sigma^{-1}(V)$$

因此σ连续

如果E还是光滑向量丛, 任取$p \in M$和p附近的局部平凡化$\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times R^k$, 那么根据

$$\Phi \circ \sigma(q) = q \times 0 \in U \times R^k$$

我们知道

$$\sigma(q) = \Phi^{-1} \circ \iota(q) \qquad \iota(q) = q \times 0 \in U \times R^k$$

这是两个光滑函数Φ^{-1}, ι的复合, 因此σ在p的邻域U上光滑, 因此在M上光滑

10.4　丛同态

设$\pi : E \to M, \pi' : E' \to M'$是两个向量丛, 连续函数$F : E \to E'$称为**丛同态**, 如果$F : E_p \to E'_{F(p)}$是线性的, 且存在映射$f : M \to M'$满足$\pi' \circ F = f \circ \pi$, i.e 下列图表是交换图

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "f"'] & M' \end{tikzcd}$$

此时我们称**F覆盖f**, 如果F覆盖id_M, 则称F是**M上的丛同态**. 一般地, 如果F的逆是$E' \to E$的光滑丛同态, 则称F是**光滑丛同构**.

Proposition 10.14

$\pi : E \to M, \pi' : E' \to M'$是两个向量丛, $F : E \to E'$是覆盖f的丛同态, 那么f连续且被F唯一确定, 当向量丛和F都光滑的时候, f也光滑

Proof: 取E的0截面σ, 则$\sigma : M \to E$是光滑映射, 且

$$f = \pi' \circ F \circ \sigma$$

Proposition 10.15

E, E'是光滑流形M上光滑向量丛, 且$F : E \to E'$是光滑的双射丛同态, 证明F是丛同构

Proof:根据丛同态的定义, F覆盖了$f = id_M$,

对任何$p \in M$, 取p附近的局部平凡化$\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times R^k$注意到$\Phi \circ F \circ \Phi^{-1}(p, v)$的第一个分量肯定是$f(p) = id_M(p) = p$, 且第二个分量肯定是v在某个矩阵$K_p$下的像$K_p v$,再根据$\Phi, \Psi$是微分同胚和F是双射丛同态可得$K_p$是非异阵,而且$K_p$光滑. i.e

$$\Phi \circ F \circ \Phi^{-1}(p, v) = (p, K_p v)$$

因此

$$d(\Phi \circ F \circ \Phi^{-1}) = \begin{pmatrix} df & O \\ O & K_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & K_p \end{pmatrix}$$

又K_p是k阶非异阵, 所以$d(\Phi \circ F \circ \Phi^{-1})$永远满秩, 又复合局部微分同胚不改变rank, 因此F实际上是一个淹没, 常秩, 因此根据全局秩定理, F是微分同胚, 因此是丛同构.

10.5 Exercise

Problem 10.1

M是n维光滑流形. 如果存在光滑映射$f : TM \to M \times R^n$使得$f|_{T_pM}$是到$\{p\} \times R^n$的线性同构, 证明f是微分同胚

[Hint: 先说明f是双射. 根据全局秩定理, 只需说明f是常秩的,用坐标卡$(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$和$(U \times R^n, \varphi \times id)$直接验证]

Problem 10.2

M是n维光滑流形, M上存在n个处处线性无关的光滑向量场, 当且仅当TM丛同构于$M \times R^n$

Hint: 任意向量场都能用这n个向量场的线性组合表示, 证明这个线性组合的系数光滑, 然后考虑这个向量到它的系数的对应.

第十一章 张量积

设$V_1,..,V_n,W$都是线性空间，映射$F : V_1\times\cdots\times V_n\to W$ 满足:对每个V_i，当固定V_i之外其他V_j中的元素时，F是$V_i\to W$的线性映射. 这样的F称为**多线性映射**

Definition 11.1

$V_1,..,V_n,W_1,..,W_k$分别是线性空间, F,G分别是$V_1\times\cdots\times V_n\to R, W_1\times\cdots\times W_k\to R$的多线性映射. 则可以定义**F,G的张量积**:

$$F\otimes G(v_1,..,v_n,w_1,..,w_k)=F(v_1,..,v_n)G(w_1,..,w_k)$$

这是一个$V_1\times\cdots\times V_n\times W_1\times\cdots\times W_k\to R$的映射. 根据实数乘法的结合律和交换律, 这还是一个多线性映射

张量积的运算也满足结合律, 设有3个多线性函数F,G,H. 则

$$(F\otimes G)\otimes H(v_1,..,v_n,w_1,..,w_k,u_1,..,u_m)=F(v_1,..,v_n)G(w_1,..,w_k)H(u_1,..,u_m)=F\otimes(G\otimes H)(v_1,..,v_n,w_1,..,w_k,u_1,..,u_m)$$

所以多个映射做张量积的时候, 我们可以省略括号, 直接写

$$F_1\otimes F_2\otimes\cdots\otimes F_n$$

Proposition 11.2

若$f_i^1,..,f_i^{d_i}$是V_i^*的一组基, 那么

$$\left\{f_1^{i_1}\otimes\cdots\otimes f_k^{i_k}\otimes\cdots\otimes f_n^{i_n}\middle|1\le i_j\le d_j,1\le j\le n\right\}$$

是$V_1\times\cdots\times V_n\to R$的多线性函数空间的一组基

Proof: 设它们在V_i中的对偶基为$v_i^j,1\le i\le n,1\le j\le d_i$. 设

$$\sum_{i_1,..,i_n}a_{i_1\cdots a_{i_n}}f_1^{i_1}\otimes\cdots\otimes f_k^{i_k}\otimes\cdots\otimes f_n^{i_n}=0$$

两边作用$(v_1^{j_1},..,v_n^{j_n})$则给出了

$$a_{j_1\cdots a_{j_n}}=0$$

根据$j_1,..,j_n$的任意性就得到$a_{i_1\cdots a_{i_n}}=0$成立, 因此这些函数线性无关. 对$V_1\times\cdots\times V_n\to R$的任一多线性函数F, 我们知道

$$F(v_1,...,v_n)=\sum_{i_1}e_1^{i_1}F(v_1^{i_1},v_2,..,v_n)\qquad v_1=\sum_{i_1}e_1^{i_1}v_1^{i_1}$$

$$= \sum_{i_1,i_2} e_1^{i_1} e_2^{i_2} F(v_1^{i_1}, v_2^{i_2}, v_3, .., v_n) \qquad v_2 = \sum_{i_2} e_2^{i_2} v_2^{i_2}$$

$$= \sum_{i_1,..,i_n} e_1^{i_1} \cdots e_n^{i_n} F(v_1^{i_1}, .., v_n^{i_n})$$

因此F被F在$(v_1^{i_1}, .., v_n^{i_n})$上的表现完全确定. 又

$$e_1^{i_1} \cdots e_n^{i_n} = f_1^{i_1} \otimes \cdots \otimes f_n^{i_n}(v_1, .., v_n)$$

所以

$$F = \sum_{i_1,..,i_n} F(v_1^{i_1}, .., v_n^{i_n}) f_1^{i_1} \otimes \cdots \otimes f_n^{i_n}(v_1, .., v_n)$$

也就是说F是$f_1^{i_1} \otimes \cdots \otimes f_n^{i_n}(v_1, .., v_n)$的线性组合, 因此$f_1^{i_1} \otimes \cdots \otimes f_n^{i_n}(v_1, .., v_n)$不仅线性无关还能生成整个$V_1 \times \cdots \times V_n \to R$的多线性函数空间, 从而是一组基

从而, 我们定义

$$V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^*$$

是$V_1 \times \cdots \times V_n \to R$的多线性映射的全体.

11.1 张量

现在考虑一个特殊的情形: 给定一个有限维线性空间V, k个V的直积$V \times \cdots \times V$到R的多线性映射的全体就是

$$V^* \otimes \cdots \otimes V^*$$

这样的元素称为**协变k-张量**

因为V是有限维空间, 所以$(V^*)^* = V$, 因此$V^* \times \cdots \times V^*$到R的多线性映射的全体就是

$$V \otimes \cdots \otimes V$$

这样的元素称为**逆变-k张量**

一般地, 对于k个V^*和l个V的直积, 我们定义它到R上的多线性映射的全体为

$$T^{k,l}V = V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$$

这样的元素全体称为**(k,l)-型混合张量**

11.1.1 对称张量

V是有限维线性空间, α是V上的协变k-张量, 称它是**对称**的, 如果对任何一个输入$(v_1, ..., v_k)$, 交换v_i的顺序并不改变其值. i.e 对任何一个k置换σ, 均有

$$\alpha(v_1, ..., v_k) = \alpha(v_{\sigma(1)}, .., v_{\sigma(k)})$$

设${}^\sigma\alpha(v_1, .., v_k) = \alpha(v_{\sigma(1)}, .., v_{\sigma(k)})$, 那么$\alpha$是对称的, 当且仅当对任何k-置换$\sigma$, 均有

$$\alpha =^\sigma \alpha$$

注意到对任何2个k-置换τ, σ, 有${}^\tau({}^\sigma\alpha) =^{\tau\sigma} \alpha$

一个协变k-张量未必是对称的, 但是我们可以把$\alpha(v_{\sigma(1)},..,v_{\sigma(k)})$取平均得到一个对称张量, 具体的说:

Proposition 11.3

α是协变k-张量. 定义

$$Sym(\alpha)=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}{}^{\sigma}\alpha$$

则$Sym(\alpha)$是对称的. 且α对称当且仅当$\alpha=Sym(\alpha)$

Proof: 注意到对任何一个固定的$\tau\in S_k$, 都有

$${}^{\tau}Sym(\alpha)=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}{}^{\tau\sigma}\alpha$$

而τ是双射, 所以

$$\{\tau\sigma|\sigma\in S_k\}=S_k$$

这给出了

$${}^{\tau}Sym(\alpha)=\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}{}^{\pi}\alpha=Sym(\alpha)$$

$\Rightarrow$ α对称说明$Sym(\alpha)=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\alpha=\alpha$

$\Leftarrow$ $\alpha=Sym(\alpha)$, $Sym(\alpha)$本身是对称的所以α也对称

11.1.2　交错张量

Definition 11.4

设α是协变k-张量, 则α称为**交错**的, 如果交换自变量的任何两个分量都会导致符号的变换: i.e

$$\alpha(v_1,..,v_i,..,v_j,..,v_n)=-\alpha(v_1,..,v_j,..,v_i,..,v_n)$$

以上是用交换两个分量来定义的交错张量. 实际上也可以用置换的语言来定义交错张量. 对一个$\sigma\in S_n$, 记$sgn(\sigma)$是σ的符号(奇置换时为-1, 偶置换为1). 那么可定义α是交错张量, 如果对任何$\sigma\in S_n$, 有

$$\alpha=sgn(\sigma)\cdot{}^{\sigma}\alpha$$

Proposition 11.5

以上两种定义等价

Proof: 回忆群论的知识, 对于S_n, sgn实际上是S_n到乘法群$\{-1,1\}$的同态, 而且每个置换都能分解成对换(只交换两个元素)的乘积.

$\Rightarrow$ 假设α在对换之下改变符号(这是第一种定义), 那么对任何$\sigma\in S_n$, 变成对换的乘积, 设为

$$\sigma=a_1a_2\cdots a_m$$

其中$a_i\in S_n$且只交换两个元素, 则有$sgn(\sigma)=(-1)^m, sgn(a_i)=-1$.

$$sgn(\sigma)^{\sigma}\alpha=(-1)^{m\,a_1\cdots a_{m-1}}({}^{a_m}\alpha)=(-1)^m(-1)^{a_1\cdots a_{m-1}}\alpha$$

继续消去a_{m-1}:

$$= (-1)^m(-1)^2({}^{a_1 \cdots a_{m-2}}\alpha)$$

继续这个过程得到

$$= (-1)^{m+m}\alpha = \alpha$$

$\Leftarrow$ 只交换第i个和第j个元素(其他不变)的对换在S_n中, 设为σ, 则$sgn(\sigma) = -1$, 从而

$$\alpha = -^{\sigma}\alpha$$

这说明

$$\alpha(v_1, .., v_i, .., v_j, .., v_n) = -\alpha(v_1, .., v_j, .., v_i, .., v_n)$$

11.2　张量场

前面建立的框架可以运用在M是n维光滑流形的情形上. 定义M上的**协变k-张量丛**为

$$T^k T^* M = \coprod_{p \in M} T^k T_p^* M$$

M上的**逆变k-张量丛**为

$$T^k TM = \coprod_{p \in M} T^k T_p M$$

(k-l)型混合张量丛为

$$T^{(k,l)} TM = \coprod_{p \in M} T^{k,l}(T_p M)$$

Proposition 11.6

可以赋予$T^{k,l}TM$合适的拓扑结构和光滑结构, 使得$T^{(k,l)}TM$是M上的光滑向量丛. rank为n^{k+l}

Proof: 对任何$p \in M$, 都存在p附近的坐标卡(U, φ)使得在U上, $T^{k,l}T_qM$中的元素可以表示为

$$X_q = \sum_{i_1,..,i_k,j_1,...,j_l} A^{j_1 \cdots j_l}_{i_1 \cdots i_k}(q) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\bigg|_q \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\bigg|_q \otimes dx^{j_1}\bigg|_q \otimes \cdots \otimes dx^{j_l}\bigg|_q \qquad q \in U$$

定义映射

$$\tilde{\varphi}(X_q) = (\varphi(q), A^{1\cdots 1}_{1\cdots 1}, A^{1\cdots 1}_{12\cdots 1}, .., A^{n\cdots n}_{n\cdots n}) \in \varphi(U) \times R^{n^{(k+l)}}$$

现在取M的一组坐标卡覆盖(U_i, φ_i), 定义$T^{k,l}TM$中的开集为

$$\left\{ \tilde{\varphi}_i^1(U) \middle| U\text{是}R^{n+n^{(k+l)}}\text{中的开集} \right\}$$

其他步骤和证明TM是向量丛的过程一样.

张量场X就是张量丛到M的映射, 满足

$$\pi \circ X = id_M$$

其中π是张量丛到M的投影

对任何$p \in M$, 都存在p附近的坐标卡(U, φ)使得在U上, X能表示为

$$X_q = \sum_{i_1,..,i_k,j_1,...,j_l} A^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k}(q)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\bigg|_q \otimes\cdots\otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\bigg|_q \otimes dx^{j_1}\bigg|_q \otimes\cdots\otimes dx^{j_l}\bigg|_q \qquad q\in U$$

则X_q在U上的坐标表示为

$$\tilde{\varphi}\circ X_q\circ\varphi^{-1}(x) = (x, A^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k}(\varphi^{-1}(x)))$$

其中$A^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k}$按照字符串$i_1\cdots i_k j_1\cdots j_k$的递增顺序排序, 因此可以给出张量场X光滑性的判据

Proposition 11.7

X是M上的张量场, 则下面的叙述等价

- X光滑
- 在每个坐标卡下, X的分量函数光滑

Proof: 根据

$$\tilde{\varphi}\circ X_q\circ\varphi^{-1}(x) = (x, A^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k}(\varphi^{-1}(x)))$$

可知左右两边的光滑性是等价的, 再根据坐标卡之间转移映射的光滑性, 可以知道X光滑等价于对任何一个坐标卡, X的分量函数都光滑

我们知道一个余切向量场作用在一个向量场上就是$M\to R$的函数. 一个向量场作用在余切向量场上也是$M\to R$的函数, 这暗示了张量场光滑性的第二个判据

Proposition 11.8

X是M上的$(k, l)-$型张量场, 则下列叙述等价

- X光滑
- 对任何光滑向量场$A_1, .., A_l$和光滑余切向量场$W_1, ..., W_k$, 有

$$X(W_1, .., W_k, A_1, .., A_l)$$

  是M上的光滑函数

Proof:

$$X_q = \sum_{i_1,..,i_k,j_1,...,j_l} X^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k}(q)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\bigg|_q \otimes\cdots\otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\bigg|_q \otimes dx^{j_1}\bigg|_q \otimes\cdots\otimes dx^{j_l}\bigg|_q \qquad q\in U$$

设

$$W_t = \sum_{m=1}^{n} w_{mt}(q)dx^m \qquad A_t = \sum_{m=1}^{n} a_{mt}(q)\frac{\partial}{\partial x^m}$$

代入X_q可得

$$X(W_1, .., W_k, A_1, .., A_l) = \sum_{i_1,..,i_k,j_1,...,j_l} X^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k}(q)w_{1i_1}(q)\cdots w_{ki_k}(q)a_{1j_1}(q)\cdots a_{lj_l}(q)$$

$\Rightarrow$ 如果X光滑, 那么$X^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k}$在U上光滑, 再根据光滑函数的乘积还光滑可得$X(W_1, .., W_k, A_1, .., A_l)$在U中光滑

$\Leftarrow$ 取$W_t = dx^{i_t}, A_t = \frac{\partial}{\partial x^{j_t}}$, 代入X可得

$$X_q(W_1, .., W_k, A_1, .., A_l) = X^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k}(q)$$

左边光滑所以右边光滑, 再根据$i_1, .., i_k, j_1, .., j_l$的任意性可得X的每个分量函数都光滑, 证毕

11.3　协变张量场的拉回

我们可以把拉回映射推广到协变张量场上. 设M,N是光滑流形, F是$M \to N$的光滑映射, 那么对$\omega \in T^k T^*_{F(p)} N$, 可以考虑这个协变k-张量的拉回:

$$dF_{p^*}\omega(v_1,..,v_k) = \omega(dF_p v_1,...,dF_p v_k)$$

回忆M上的协变k-张量丛$T^kT^*M = \coprod_{p\in M} T^kT^*_pM$. 记$\alpha$是一个$M \to T^kT^*M$的协变张量场. 定义$\alpha$的拉回为

$$(F^*\alpha)_p = dF^*_p(\alpha_{F(p)})$$

其中$\alpha_{F(p)}$就是α在$F(p)$处的取值.

Proposition 11.9

M,N,P都是光滑流形, $F: M \to N, G: N \to P$都是光滑映射. A,B是N上的(连续)协变张量场, f是N上的实值函数

- $F^*(fB) = (f\circ F)F^*B$
- $F^*(A\otimes B) = F^*A \otimes F^*B$
- $F^*(A+B) = F^*A + F^*B$
- F^*B是连续的张量场, 若B光滑则F^*B也光滑
- $(G\circ F)^*B = F^* \circ G^*B$
- $id^*B = B$

Proof:(a)设B是k阶协变张量场,

$$(F^*fB)_p(v_1,..,v_k) = dF^*_p(f(F(p))B_{F(p)})(v_1,..,v_k)$$

$$= f(F(p))B(dF_pv_1,..,dF_pv_k) = (f\circ F)_p(F^*B)_p$$

(b)

$$(F^*(A\otimes B))_p(w_1,..,w_l,v_1,..,v_k) = A_{F(p)} \otimes B_{F(p)}(dFw_1,..,dFw_l,dF_pv_1,..,dFv_k)$$

$$= A_{F(p)}(dFw_1,..,dFw_l)B_{F(p)}(dF_pv_1,..,dFv_k) = F^*A(w_1,.,w_l)F^*B(v_1,..,v_k) = F^*A\otimes F^*B(w_1,..,w_l,v_1,..,v_k)$$

(c)由余切空间的线性性立即得出结论

(d)和余切向量的情形是差不多的,

$$\tilde{\varphi}\circ(F^*B)\circ\varphi^{-1}(x) = \tilde{\varphi}\circ(F^*B)_{\varphi^{-1}(x)}$$

$\tilde{\varphi}\circ(F^*B)_{\varphi^{-1}(x)}$是x和$(F^*B)_{\varphi^{-1}(x)}$的所有分量函数的直积, 要获得其每个分量只需将其作用在$(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},..,\frac{\partial}{\partial x^{i_k}})$上, 这给出了

$$\tilde{\varphi}\circ(F^*B)\circ\varphi^{-1}(x) = (x, B(dF_{\varphi^{-1}(x)}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},..,dF_{\varphi^{-1}(x)}\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}))$$

设(V,ψ)是$F(p)$附近的坐标卡, 且B在这组坐标卡下有坐标表示$B_{j_1\cdots j_k}$,那么

$$B(dF_{\varphi^{-1}(x)}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},..,dF_{\varphi^{-1}(x)}\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}) = \sum_{j_1,..,j_k} B_{j_1\cdots j_k}(F(\varphi^{-1}(x)))dy^{j_1}(dF_{\varphi^{-1}(x)}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}})\otimes\cdots\otimes dy^{j_k}(dF_{\varphi^{-1}(x)}\frac{\partial}{\partial x^{i_k}})$$

$$= \sum_{j_1,..,j_k} B_{j_1\cdots j_k}(F(\varphi^{-1}(x)))\Gamma_{j_1i_1}(\varphi^{-1}(x))\cdots\Gamma_{j_ki_k}(\varphi^{-1}(x))$$

其中Γ是$\psi\circ F\circ\varphi^{-1}$的Jacobian矩阵, 因此是光滑矩阵函数. 这根据B的分量函数连续可得$\tilde{\varphi}\circ(F^*B)\circ\varphi^{-1}$连续, 左

右分别复合连续函数$\tilde{\varphi}^{-1}$和φ就说明F^*Bp的一个邻域内连续. 根据p的任意性, F^*B连续

如果B光滑, 那么B的分量函数都光滑, 因此$\tilde{\varphi}\circ(F^*B)\circ\varphi^{-1}$光滑, 从而$F^*B$光滑

(e)

$$((G\circ F)^*B)_p(v_1,..,v_k)=B_{G\circ F(p)}(dG_{F(p)}\circ dF_pv_1,..,dG_{F(p)}\circ dF_pv_k)$$
$$=(G^*B)_{F(p)}(dF_pv_1,..,dF_pv_k)=F^*\circ(G^*B)_p(v_1,..,v_k)$$

(f)显然

11.4　张量场的Lie导数

设$p\in M$, V是M上的光滑向量场, θ是V在p附近的局部流, A是光滑的协变张量场, 那么可以定义

$$(\mathcal{L}_VA)_p=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\theta_t^*A)_p=\lim_{t\to 0}\frac{d(\theta_t)_p^*A_{\theta_t(p)}-A_p}{t}$$

Proposition 11.10

f是M上的光滑函数, A,B是M上的光滑张量场, 那么

- $\mathcal{L}_Vf=Vf$
- $\mathcal{L}_V(fA)=(\mathcal{L}_Vf)A+f\mathcal{L}_VA$
- $\mathcal{L}_V(A\otimes B)=(\mathcal{L}_VA)\otimes B+A\otimes\mathcal{L}_VB$
- $X_1,..,X_k$是光滑向量场, A是光滑的k阶协变张量场, 那么

$$\mathcal{L}_V(A(X_1,..,X_k))=(\mathcal{L}_VA)(X_1,..,X_k)+A(\mathcal{L}_VX_1,..,X_k)+\cdots+A(X_1,..,\mathcal{L}_VX_k)$$

[Hint: 最后一条爆算]

Proof: (a)

$$(\mathcal{L}_Vf)_p=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\theta_t^*f)_p=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}f\circ\theta_t(p)$$

设$\gamma(t)=\theta_t(p)$, 那么根据θ是积分曲线可得$\gamma'(0)=V_p$, 因此

$$=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}f\circ\gamma(t)=\gamma'(0)f=V_pf$$

(b)

$$\mathcal{L}_V(fA)=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\theta_t^*fA)_p=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(f\circ\theta_t(p))(\theta_t^*A)_p$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{(f\circ\theta_t(p))(\theta_t^*A)_p-f(p)(\theta_t^*A)_p}{t}+\frac{f(p)(\theta_t^*A)_p-f(p)A_p}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{f\circ\theta_t-f(p)}{t}\lim_{t\to 0}(\theta_t^*A)_p+f(p)\lim_{t\to 0}\frac{d(\theta_t)_p^*A_{\theta_t(p)}-A_p}{t}$$
$$=(\mathcal{L}_Vf)A+f\mathcal{L}_VA$$

(c)根据拉回映射和张量积运算的相容性可得:

$$\mathcal{L}_V(A\otimes B)=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\theta_t^*A\otimes\theta_t^*B)_p=\lim_{t\to 0}\frac{\theta_t^*A\otimes\theta_t^*B-A_p\otimes\theta_t^*B}{t}+\lim_{t\to 0}\frac{A_p\otimes\theta_t^*B-A_p\otimes B_p}{t}$$

根据张量积运算的多线性性

$$=\mathcal{L}_VA\otimes B+A\otimes\mathcal{L}_VB$$

(d)

$$\mathcal{L}_V(A(X_1,..,X_k)) = V[A(X_1,..,X_k)]$$

设在p附近,

$$A = \sum_{i_1\cdots i_k} A_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k} \qquad X_t(q) = \sum_{j=1}^{n} a_{tj}(q)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$V = \sum_{m=1}^{n} v_m(q)\frac{\partial}{\partial x^m}$$

$$(\theta_t^* A)_p(X_1,..,X_k) = A_{\theta_t}(d(\theta_t)_p X_1,..,d(\theta_t)_p X_k)$$

注意到对每个t, θ都是微分同胚且θ关于t和p都光滑, 对足够小的t都有$\theta_t(p) \in U$, 因此考虑可设

$$J\varphi \circ \theta_t(\varphi^{-1}(x)) = c_{ij}(t, \varphi^{-1}(x)) = C$$

则

$$(\theta_t^* A)_p(X_1,..,X_k) = \sum_{i_1\cdots i_k} A_{i_1\cdots i_k}(\theta_t) dx^{i_1}(d(\theta_t)_p X_1)\cdots dx^{i_k}(d(\theta_t)_p X_k)$$

$$= \sum_{i_1\cdots i_k} A_{i_1\cdots i_k}(\theta_t)(\sum_{v=1}^{n} c_{i_1 v} a_{1v})\cdots(\sum_{v=1}^{n} c_{i_k v} a_{kv})$$

$$A(X_1,..,X_k) = \sum_{i_1\cdots i_k} A_{i_1\cdots i_k} a_{1i_1}\cdots a_{ki_k}$$

$$V[A(X_1,..,X_k)]_p = \sum_{m=1}^{n}\sum_{i_1\cdots i_k} v_m(p)\frac{\partial}{\partial x^m} A_{i_1\cdots i_k}\cdot a_{1i_1}\cdots a_{ki_k}$$

$$+ \sum_{i_1\cdots i_k}\sum_{m=1}^{n} A_{i_1\cdots i_k} v_m(p)\frac{\partial}{\partial x^m} a_{1i_1}\cdot a_{2i_2}\cdots a_{ki_k} + \cdots + \sum_{i_1\cdots i_k}\sum_{m=1}^{n} A_{i_1\cdots i_k} a_{1i_1}\cdots v_m(p)\frac{\partial}{\partial x^m} a_{ki_k}$$

那么

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\theta_t^* A)_p(X_1,..,X_k) = \sum_{i_1\cdots i_k}\frac{d}{dt} A_{i_1\cdots i_k}(\theta_t)(\sum_{v=1}^{n} c_{i_1 v} a_{1v})\cdots(\sum_{v=1}^{n} c_{i_k v} a_{kv})$$

$$+ \sum_{i_1\cdots i_k} A_{i_1\cdots i_k}(\theta_t)(\sum_{v=1}^{n}\frac{d}{dt} c_{i_1 v} a_{1v})\cdots(\sum_{v=1}^{n} c_{i_k v} a_{kv}) + \cdots + \sum_{i_1\cdots i_k} A_{i_1\cdots i_k}(\theta_t)(\sum_{v=1}^{n} c_{i_1 v} a_{1v})\cdots(\sum_{v=1}^{n}\frac{d}{dt} c_{i_k v} a_{kv})$$

首先注意到,

$$\frac{d}{dt} A_{i_1\cdots i_k}(\theta_t) = \frac{d}{dt} A_{i_1\cdots i_k}(\theta_t)\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ\theta_t = \sum_{m=1}^{n}\frac{\partial A_{i_1\cdots i_k}\circ\varphi^{-1}}{\partial x_m}\frac{\partial\varphi_m\circ\theta_t}{dt}\Big|_{t=0}$$

那么根据$\frac{\partial}{\partial x^m}$的定义和$\theta$是V的流可得

$$= \sum_{m=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^m} A_{i_1\cdots i_k} v_m(p)$$

有根据$t \to 0$时, $\varphi\circ\theta_t(\varphi^{-1}(x)) = x$, 和$\theta$的光滑性可以知道$\lim_{t\to 0} J\varphi\circ\theta_t(\varphi^{-1}(x)) = I_n$, 因此$t \to 0$时, $c_{ij} = \delta_{ij}$. 另一方面根据光滑性又可以知道

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} c_{ij}(t,p) = [J\frac{d}{dt}\varphi\circ\theta_t(\varphi^{-1}(x)) = J(v_1(\varphi^{-1}(x)),..,v_n(\varphi^{-1}(x)))]_{ij} = \frac{\partial v_i\circ\varphi^{-1}(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p v_i$$

如此便给出了

$$\mathcal{L}_V A(X_1,..,X_k) = \sum_{i_1\cdots i_k}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^m} A_{i_1\cdots i_k} v_m(p) a_{1i_1}\cdots a_{ki_k} + \sum_{i_1\cdots i_k} A_{i_1\cdots i_k}(p)(\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_p v_{i1} a_{1m}) a_{2i_2}\cdots a_{ki_k} + \cdots$$

$$+\sum_{i_1\cdots i_k} A_{i_1\cdots i_k}(p)a_{1i_1}\cdots a_{k-1,i_{k-1}}(\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_p v_{i_k}a_{km})$$

我们发现两个蓝色的部分是相等的. 然后我们看两个橙色部分的差, 这等于

$$\sum_{i_2,..,i_k}^{n} a_{2i_2}\cdots a_{ki_k}A_{i_1\cdots i_k}\sum_{m=1}^{n}[v_m(p)\frac{\partial}{\partial x^m}a_{1i_1}-\frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_p v_{i_1}a_{1m}]$$

这恰好是$[V,X_1]$关于$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\big|_p$的坐标分量, 又根据$X_j$的展开可知$dx^{i_j}(X_j)=a_{ji_j}$, 也就是说上式

$$=\sum_{i_1,..,i_k} A_{i_1\cdots i_k}(p)dx^{i_1}([V,X_1])dx^{i_2}(X_2)\cdots dx^{i_k}(X_k)$$

$$=\sum_{i_1,..,i_k} A_{i_1\cdots i_k}(p)dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_k}([V,X_1],X_2,..,X_k)=A([V,X_1],X_2,..,X_k)$$

对于其他类似的项做同样的处理, 就能得到

$$V[A(X_1,..,X_k)]-\mathcal{L}_VA(X_1,..,X_k)=A([V,X_1],X_2,..,X_k)+A(X_1,[V,X_2],X_3,..,X_k)+\cdots+A(X_1,..,X_{k-1},[V,X_k])$$

再根据光滑向量场的Lie导数就是Lie括号可得

$$V[A(X_1,..,X_k)]-\mathcal{L}_VA(X_1,..,X_k)=A(\mathcal{L}_VX_1,X_2,..,X_k)+A(X_1,\mathcal{L}_VX_2,X_3,..,X_k)+\cdots+A(X_1,..,X_{k-1},\mathcal{L}_VX_k)$$

Corollary 11.11

通过上述推导, 我们获得了$\mathcal{L}_VA$的作用法则:

$$\mathcal{L}_VA(X_1,..,X_k)=V(A(X_1,..,X_k))-A([V,X_1],X_2,..,X_k)-A(X_1,..,[V,X_k])$$

有了这个就不一定要按照定义计算协变张量场的Lie导数了

第十二章 微分形式

12.1 交错张量

回忆一下前面学过的交错张量, 它们是随着调换输入向量的分量时会导致符号发生特定变化的协变张量. 对于一个线性空间V, 我们把上面的k-阶交错张量称为**k阶外形式**, 记为

$$\Lambda^k(V^*)$$

下面给出一些判定k阶协变张量是交错张量的充要条件

Lemma 12.1

α是n维线性空间V上的k阶协变张量, 下列叙述等价

- α是交错的
- $\alpha(v_1,..,v_k)=0$在$(v_1,..,v_k)$线性相关时成立
- 当自变量的两个分量相等时, α在这个变量上的值为0:

$$\alpha(v_1,..,w,..,w,...,v_k)=0$$

Proof: (3) $\Rightarrow$ (2) 假设v_r能被其他分量线性表出, 那么

$$\alpha(v_1,.,v_r,..,v_k)=\alpha(v_1,..,\sum_{j\neq r}a_jv_j,...,v_k)$$

$$=\sum_{j\neq r}a_j\alpha(v_1,...,v_j,..,v_k)$$

然而$(v_1,...,v_j,..,v_k)$里面第j个分量和第r个分量都是v_j, 所以必定为0, 因此$\alpha(v_1,.,v_r,..,v_k)=0$

(2) $\Rightarrow$ (3): k个变量里面有两个分量相等,可以设是第j和第i个. 那么这组变量肯定是线性相关的, 因为第j个分量可以用第i个分量线性表出(因为二者相等), 因此$\alpha(v_1,..,w,..,w,...,v_k)=0$

这说明了(2)(3)等价.

(1) $\Rightarrow$ (3):如果是交错的, 且自变量的两个分量相等(设为第i和第j个), 则

$$\alpha(v_1,..,v_i,..,v_j,..,v_k)=-\alpha(v_1,..,v_j,..,v_i,..,v_k)$$

但交换这两个分量不改变自变量的值, 因为这两个分量相同, 所以右边等于$-\alpha(v_1,.,v_i,.,v_j,..,v_k)$, 因此$\alpha(v_1,.,v_r,..,v_k)=0$

$(3) \Rightarrow (1)$：显然有

$$\alpha(v_1,..,v_i-v_j,..,v_j-v_i,..,v_k) = -\alpha(v_1,..,v_i-v_j,..,v_i-v_j,..,v_k) = 0$$

左边根据多线性性拆开第i个分量, 可得

$$\alpha(v_1,..,v_i,..,v_j-v_i,..,v_k) - \alpha(v_1,..,v_j,..,v_j-v_i,..,v_k) = 0$$

再拆第j个分量, 并利用(3)

$$\alpha(v_1,..,v_i,..,v_j,..,v_k) - 0 - 0 + \alpha(v_1,..,v_j,..,v_i,..,v_k) = 0$$

这就是交错张量的原始定义, 因此(1)(3)也等价, 证毕

上一章我们讨论了如何用取平均值的办法把一个协变张量变成对称的, 此处也能用类似的思想把一个协变张量变成交错的, 设α是协变k-张量, 定义

$$Alt(\alpha) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma} sgn(\sigma)^{\sigma}\alpha$$

Proposition 12.2

$Alt(\alpha)$是交错的

$\alpha = Alt(\alpha)$当且仅当α是交错的

Proof:

$${}^{\tau}Alt(\alpha) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma} sgn(\sigma)^{\tau\sigma}\alpha = \frac{1}{k!}\sum_{\pi}\frac{sgn(\pi)}{sgn(\tau)}{}^{\pi}\alpha$$

又$sgn(\tau) = \frac{1}{sgn(\tau)}$, 这给出了

$$= sgn(\tau)\frac{1}{k!}\sum_{\pi} sgn(\pi)^{\pi}\alpha = sgn(\tau)Alt(\alpha)$$

如果α交错, 那么

$$Alt(\alpha) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma}\alpha = \alpha$$

如果$\alpha = Alt(\alpha)$, 那么根据$Alt(\alpha)$交错可得α交错

Proposition 12.3

给出两个协变张量ω, η, 则

$$Alt(Alt(\omega)\otimes\eta) = Alt(\omega\otimes\eta)$$

Proof:

$$Alt(Alt(\omega)\otimes\eta)(v_1,..,v_k,v_{k+1},..,v_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!}\sum_{\pi} sgn(\pi)Alt(\omega)(v_{\pi(1)},..,v_{\pi(k)})\eta(v_{\pi(k+1)},..,v_{\pi(k+l)})$$

$$= \frac{1}{(k+l)!}\sum_{\pi} sgn(\pi)\frac{1}{k!}\sum_{\tau} sgn(\tau)(\omega)(v_{\pi(\tau(1))},..,v_{\pi\tau(k)})\eta(v_{\pi(k+1)},..,v_{\pi(k+l)})$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{\tau\in S_k}\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\pi\in S_{k+l}} sgn(\pi\tau)\omega\otimes\eta(v_{\pi\tau(1)},..,v_{\pi\tau(k)},v_{\pi(k+1)},..,v_{\pi(k+l)})$$

对于每个给定的$\tau \in S_k$, 都能给出一个S_{k+l}上的一一对应

$$\delta(i)=\begin{cases}\pi(i) & i>k\\ \pi\tau(i) & i\le k\end{cases}\qquad sgn(\delta)=sgn(\pi\tau)$$

这说明

$$=\frac{1}{k!}\sum_{\tau\in S_k}\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\delta\in S_{k+l}}sgn(\delta)^{\delta}(\omega\otimes\eta)(v_1,..,v_{k+l})$$

内部的求和与τ无关, 因此

$$=\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\delta\in S_{k+l}}sgn(\delta)^{\delta}(\omega\otimes\eta)(v_1,..,v_{k+l})=Alt(\omega\otimes\eta)(v_1,..,v_{k+l})$$

12.2　初等交错张量

设有一个k元组$I=(i_1,..,i_k)$, 称I为**长为k的多重指标**, $\sigma\in S_k$, 记$I_\sigma=(u_{\sigma(1)},..,i_{\sigma(k)})$, 考虑一个$\Lambda^k(V^*)$上的元素, 其运算法则为

$$\epsilon^I(v_1,..,v_k)=det\begin{pmatrix}\epsilon^{i_1}(v_1) & \cdots & \epsilon^{i_1}(v_k)\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \epsilon^{i_k}(v_1) & \cdots & \epsilon^{i_k}(v_k)\end{pmatrix}=det\begin{pmatrix}v_1^{i_1} & \cdots & v_k^{i_1}\\ \vdots & \dots & \vdots\\ v_1^{i_k} & \cdots & v_k^{i_k}\end{pmatrix}$$

其中ϵ^i是$E_i\in V$的对偶基, v_i^j是元素v_i在E_i展开下, E_k的系数

显然ϵ^I是一个交错张量, 因为对换某个v_i,v_j的顺序就会调换行列式的某两列, 根据行列式的运算规则知道交换两列会变成原行列式的相反数.

这样的ϵ^I的全体称为**初等交错张量**. 现在引入两个长为k的多重指标I,J, 定义

$$\delta_J^I=det\begin{pmatrix}\delta_{j_1}^{i_1} & \cdots & \delta_{j_k}^{i_1}\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \delta_{j_1}^{i_k} & \cdots & \delta_{j_k}^{i_k}\end{pmatrix}$$

Proposition 12.4

$$\delta_J^I=\begin{cases}sgn(\sigma) & \text{如果I,J各自没有重复元素, 且存在某个置换}\sigma\in S_k\text{使得}I=J_\sigma\\ 0 & \text{I或J中存在重复元素, 或I不是J的置换}\end{cases}$$

Proof: 先看第一个情形, 我们证明δ_J^I有类似于群同态的性质: 设$\sigma,\tau\in S_k$, $I=J_\sigma,J=T_\tau$, 那么$I=T_{\tau\sigma}$, $j_m=t_{\tau(m)},i_m=j_{\sigma(m)}$, 这给出了

$$\delta_T^I=det\begin{pmatrix}\delta_{t_1}^{i_1} & \cdots & \delta_{t_k}^{i_1}\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \delta_{t_1}^{i_k} & \cdots & \delta_{t_k}^{i_k}\end{pmatrix}$$

又注意到

$$\begin{pmatrix}\delta_{j_1}^{i_1} & \cdots & \delta_{j_k}^{i_1}\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \delta_{j_1}^{i_k} & \cdots & \delta_{j_k}^{i_k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_{t_1}^{j_1} & \cdots & \delta_{t_k}^{j_1}\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \delta_{t_1}^{j_k} & \cdots & \delta_{t_k}^{j_k}\end{pmatrix}=\{a_{mn}\}$$

那么

$$a_{mn} = \sum_{u=1}^{k} \delta_{j_u}^{i_m} \delta_{t_n}^{j_u}$$

而$a_{mn} = 1$当且仅当存在某个u使得$i_m = j_u = t_n$，这说明$n = \tau(u), u = \sigma(m)$，从而给出了$n = \tau\sigma(m)$，又$i_m = t_{\tau\sigma(m)}$，从而$i_m = t_n$，所以$\delta_{t_n}^{i_m} = 1$，因此

$$\begin{pmatrix} \delta_{j_1}^{i_1} & \cdots & \delta_{j_k}^{i_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \delta_{j_1}^{i_k} & \cdots & \delta_{j_k}^{i_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{t_1}^{j_1} & \cdots & \delta_{t_k}^{j_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \delta_{t_1}^{j_k} & \cdots & \delta_{t_k}^{j_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{t_1}^{i_1} & \cdots & \delta_{t_k}^{i_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \delta_{t_1}^{i_k} & \cdots & \delta_{t_k}^{i_k} \end{pmatrix}$$

根据行列式的乘法法则，我们得到

$$\delta_J^I \delta_T^J = \delta_T^I$$

又因为每个置换都能分解成若干对换的乘积，且sgn函数是S_k上的群同态，所以我们只需证明对任何一个对换$(m,n) \in S_k$，都有

$$\delta_{I_{(mn)}}^I = -1$$

这是显然的，因为这个矩阵不为0的元素只有$(m,n),(n,m)$和除去第m行和第n行的对角线，通过调换第m行和第n行就能得到单位阵，行列式为1. 而这样的调换会让行列式变成相反数，因此原行列式的值为-1

然后看第二种情形,如果I或J中的某一个存在重复元素，则δ_J^I的行列式中某两行或某两列一样，因此行列式为0. 另一方面，如果I不是J的置换，那么把I,J视为集合，则$I \neq J$(如果I,J中的元素相同，那么考虑置换σ : 把m映射到i_m在J中对应元素的下标，这说明J是I的置换)，因此要么存在在I中但不在J中的元素，要么存在在J中但不在I中的元素，前者导致矩阵某一行为0，后者导致某一列为0，无论哪种情况都会导致行列式为0.

Proposition 12.5

E_i是V的基底，ϵ^i是V^*中的对偶基，那么

- 如果I有重复的元素，则$\epsilon^I = 0$
- 如果$J = I_\sigma$对某个$\sigma \in S_k$成立，则$\epsilon^I = sgn(\sigma)\epsilon^J$
- $\epsilon^I(E_{j_1},..,E_{j_k}) = \delta_J^I$

Proof:(a) 设I中的$i_m = i_n$，那么$\epsilon^I(v_1,..,v_k)$的第m, n行相等，因此行列式为0

(b)

$$\epsilon^J(v_1,..,v_k) = det \begin{pmatrix} v_1^{i_{\sigma(1)}} & \cdots & v_k^{i_{\sigma(1)}} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ v_1^{i_{\sigma(k)}} & \cdots & v_k^{i_{\sigma(k)}} \end{pmatrix}$$

又注意到

$$\begin{pmatrix} \delta_{\sigma(1)}^1 & \cdots & \delta_{\sigma(k)}^1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \delta_{\sigma(1)}^k & \cdots & \delta_{\sigma(k)}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{i_{\sigma(1)}} & \cdots & v_k^{i_{\sigma(1)}} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ v_1^{i_{\sigma(k)}} & \cdots & v_k^{i_{\sigma(k)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^{i_1} & \cdots & v_k^{i_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ v_1^{i_k} & \cdots & v_k^{i_k} \end{pmatrix}$$

两边取行列式得到

$$sgn(\sigma^{-1})\epsilon^J(v_1,..,v_k) = \epsilon^I(v_1,..,v_k)$$

又$sgn(\sigma^{-1}) = sgn(\sigma)$，所以结论乘积

(c)这是显然的，因为$\epsilon^i(E_j) = \delta_j^i$

Proposition 12.6

V是n维线性空间，E_i是V的基，ϵ^i是E_i的对偶基，则 $\Lambda^k(V^*)$的一组基底为

$$\left\{\epsilon^{(i_1\cdots i_k)}\middle| i_1<i_2<\cdots<i_k\right\}$$

我们也把上述指标$I=(i_1\cdots i_k)$记为**递增指标**

此时$dim\Lambda^k(V^*)=C_n^k$

Proof: 任取一个交错张量$F\in\Lambda^k(V^*)$，设

$$v_i=\sum_{m=1}^n v_{im}E_m$$

那么

$$F(v_1,...,v_k)=\sum_{i_1,...,i_k} v_{1i_1}\cdots v_{ki_k}F(E_{i_1}\cdots E_{i_k})$$

又F是交错张量，所以可以把每个$F(E_{i_1}\cdots E_{i_k})$都改成自变量指标的递增顺序，这只会引起符号的变更，因此

$$F(v_1,...,v_k)=\sum_{i_1<\cdots<i_k}[\sum_{\sigma\in S_k}sgn(\sigma)]v_{1i_1}\cdots v_{ki_k}F(E_{i_1}\cdots E_{i_k})$$

$$=\sum_{i_1<\cdots<i_k}[\sum_{\sigma\in S_k}sgn(\sigma)]F(E_{i_1}\cdots E_{i_k})\epsilon^{i_1\cdots i_k}(v_1,..,v_k)$$

这说明

$$F=\sum_{i_1<\cdots<i_k}[\sum_{\sigma\in S_k}sgn(\sigma)]F(E_{i_1}\cdots E_{i_k})\epsilon^{i_1\cdots i_k}$$

因此$\left\{\epsilon^{(i_1\cdots i_k)}\middle| i_1<i_2<\cdots<i_k\right\}$生成$\Lambda^k(V^*)$

只需证明线性无关，假设

$$\sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots a_{i_k}}\epsilon^{i_1\cdots i_k}=0$$

注意到对两个不同的长为k的递增指标I,J，I,J作为集合必定不是相同的(因为有限整数集合升序排列是唯一的,如果I,J作为集合相同，那么把它们升序排列可知作为递增指标也有I=J)，两边作用在$(E_{j_1},...,E_{j_k})$上，其中$j_1<\cdots<j_k$，可以知道

$$\sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots a_{i_k}}\delta^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_k}=0$$

以上求和只有$\delta^{j_1\cdots j_k}_{j_1\cdots j_k}$不等于0，因此$a_{j_1\cdots j_k}=0$，从而根据$j_1,..,j_k$的任意性，对每个递增指标$(i_1,..,i_k)$都有$a_{i_1\cdots i_k}=0$，因此线性无关

Proposition 12.7 交错张量和线性变换的相容性

V是n维线性空间，$\omega\in\Lambda^n(V^*)$，T是$V\to V$的线性变换，那么

$$\omega(Tv_1,..,Tv_n)=(detT)\omega(v_1,...,v_n)$$

Proof: 首先我们回忆线性变换的行列式是良定义这件事. 当我们给V选好一组基时，设T的表示矩阵为A，然后选另一组基，表示矩阵为B，然后我们可以给出两组基的过渡矩阵P,此时有

$$A=P^{-1}BP\qquad detA=detB$$

因此线性变换的行列式和基底的选取无关. 随便选定一组基底$e_1,..,e_n$, 那么线性变换T可以表示成矩阵A_{ij}, detT=detA.

首先注意到$\Lambda^n(V^*)$是一维空间, 因此可设$\omega = c\epsilon^1\wedge\cdots\wedge\epsilon^n$, 其中$\epsilon^i$是$e_i$的对偶基.

Step 1:先证明$v_i = e_i$时结论成立, 注意到Te_i在基底e_i下的表示是矩阵A的第i列向量, 记为A_i

$$\omega(Te_1,..,Te_n) = \omega(A_1,..,A_n) = c\epsilon^1\wedge\cdots\wedge\epsilon^n(A_1,..,A_n) = cdet\begin{pmatrix}\epsilon^1(A_1) & \cdots & \epsilon^1(A_n)\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \epsilon^n(A_1) & \cdots & \epsilon^n(A_n)\end{pmatrix}$$

$$= cdet\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1n}\\ \vdots & \dots & \vdots\\ A_{n1} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix} = cdet(A_{ij}) = cdetT = detTc\epsilon^1\wedge\cdots\wedge\epsilon^n(e_1,...,e_n) = detT\omega(e_1,..,e_n)$$

Step 2: 证明当$(v_1,..,v_n)$是$(e_1,..,e_n)$的置换时结论成立, 假设$v_i = e_{\sigma(i)}, \sigma\in S_n$, 则

$$\omega(Tv_1,..,Tv_n) = sgn(\sigma)\omega(Te_1,..,Te_n) = sgn(\sigma)detT\omega(e_1,..,e_n) = detT\omega(v_1,..,v_n)$$

Step 3: 证明当$v_i\in\{e_1,..,e_n\}$时结论成立, 假设v_i中有两个相同的元素, 欲证的等式两边都是0, 结论成立. 如果v_i各不相同, 那么v_i是e_i的置换, 此时转化为Step2.

Step 4: 推广到一半情形: 设$v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j$, 则根据多线性性

$$\omega(Tv_1,..,Tv_n) = \sum_{i_1,..,i_n=1}^n a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}\omega(Te_{i_1},..,Te_{i_n})$$

注意到$e_{i_j}\in\{e_1,..,e_n\}$, 因此用Step 3可以给出

$$\omega(Tv_1,..,Tv_n) = detT\sum_{i_1,...,i_n=1}^n a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}\omega(e_{i_1},..,e_{i_n}) = detT\omega(v_1,...,v_n)$$

12.3　楔积

Definition 12.8

设$\omega\in\Lambda^k(V^*), \eta\in\Lambda^l(V^*)$, 定义

$$\omega\wedge\eta = \frac{(k+l)!}{k!l!}Alt(\omega\otimes\eta)\in\Lambda^{k+l}(V^*)$$

$\wedge$运算称为**楔积**,或**外积**

lemma 12.9

V是n维线性空间, ϵ^i是V^*的一组基, 对任何多重指标$I=(i_1,..,i_k), J=(j_1,..,j_l)$, 都有

$$\epsilon^I\wedge\epsilon^J = \epsilon^{IJ}$$

其中$IJ = (i_1,...,i_k,j_1,..,j_l)$.

Proof:设E_i是ϵ^i的对偶基, 那么只需证

$$\epsilon^I\wedge\epsilon^J(E_{p_1},..,E_{p_{k+l}})=\epsilon^{IJ}(E_{p_1},..,E_{p_{k+l}})$$

记$P=(p_1,..,p_{k+l})$. 如果P中有IJ所没有的元素, 那么两边都是0. 如果IJ中有P所有没有的元素, 那么两边也都是0. 所以只需设P和IJ作为集合是相同的. 这样的话P总能通过一个S_{k+l}中的置换变为IJ. 因此我们先考虑作为多重指标,$P=IJ$的情形, 如果$I\cap J\neq\emptyset$, 那么$(E_{p_1},..,E_{p_{k+l}})$至少两个元素相等, 但是左右两边都是交错张量, 因此作用在这种自变量上的值都是0, 因而相等. 从而不妨设P中没有重复的指标, 这也暗示了$I\cap J=\emptyset$

此时右边根据定义, 值为1. 只需证明左边为1:

$$\epsilon^I\wedge E^J(E_{p_1},..,E_{p_{k+l}})=\epsilon^I\wedge\epsilon^J(E_{i_1},..,E_{i_k},E_{j_1}...,E_{j_l})$$

$$=\frac{1}{k!l!}\sum_{\pi\in S_{k+l}}sgn(\pi)^{\pi}(\epsilon^I\otimes\epsilon^J)(E_{i_1},..,E_{i_k},E_{j_1}...,E_{j_l})$$

如果π把I中的某一元素换到了J中的元素里面, 那么此时必有$\epsilon^I(E_{\pi(i_1)},..,E_{\pi(i_k)})=0$, 同理如果$\pi$把J的某一元素换到了I中的元素里面, 必有$\epsilon^J(E_{\pi(j_1)},..,E_{\pi(j_l)})=0$

因此上述求和的单项不为0, 当且仅当π保持$\pi(I)\in I,\pi(J)\in J$, 而这当且仅当存在$\sigma\in S_k,\tau\in S_l$使得

$$\pi=\sigma\tau$$

其中τ是$\{k+1,..,k+l\}$的置换(可以视为$\tau(k+j)=k+\tau(j)$)

对一个方向,可以直接定义$\sigma(i)=\pi(i),\tau(j-k)=\pi(j)-k$, 那么$\sigma\tau=\pi$. 另一个方向显然是对的

从而

$$\epsilon^I\wedge E^J(E_{p_1},..,E_{p_{k+l}})=\frac{1}{k!l!}\sum_{\tau,\sigma}sgn(\sigma\tau)^{\sigma}\epsilon^I(E_{i_1},..,E_{i_k})\times^{\tau}\epsilon^J(E_{j_1},..,E_{j_l})$$

$$=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma}\epsilon^I(E_{i_1},..,E_{i_k})\frac{1}{l!}\sum_{\tau}\epsilon^J(E_{j_1},..,E_{j_l})=1$$

现在看如果P是IJ的置换的情形, 此时设$IJ=P_\sigma$, 那么根据交错张量的性质可得

$$\epsilon^I\wedge\epsilon^J(E_{p_1},..,E_{p_{k+l}})=sgn(\sigma)\epsilon^I\wedge\epsilon^J(E_{i_1},..,E_{i_k},E_{j_1}...,E_{j_l})=sgn(\sigma)\epsilon^{IJ}(E_{i_1},..,E_{i_k},E_{j_1}...,E_{j_l})=\epsilon^{IJ}(E_{p_1},..,E_{p_{k+l}})$$

第二个等号是用的$P=IJ$的情形. 证毕

Proposition 12.10

$\omega, \omega', \eta, \eta', \xi$都是交错张量, 那么

- 对$a, b \in R$, 都有

$$(a\omega + b\omega') \wedge \eta = a\omega \wedge \eta + b\omega' \wedge \eta$$

$$\eta \wedge (a\omega + b\omega') = a\eta \wedge \omega + b\eta \wedge \omega'$$

- 结合律: $\omega \wedge (\eta \wedge \xi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \xi$
- 若$\omega \in \Lambda^k(V^*), \eta \in \Lambda^l(V^*)$, 则

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$$

- ϵ^i是V^*的一组基, $I = (i_1, .., i_k)$是任意一个多重指标, 那么

$$\epsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_k} = \epsilon^I$$

- 对任何余向量$\omega_1, .., \omega_k$, 和向量$v_1, .., v_k$, 都有

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k(v_1, .., v_k) = det(\omega^j(v_i))$$

- $$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n = \frac{(r_1 + \cdots + r_n)!}{r_1! \cdots r_n!} Alt(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n)$$

Proof:(a)这是根据$\otimes$的双线性性得到的

(b)根据双线性性, 只需证

$$\epsilon^I \wedge (\epsilon^J \wedge \epsilon^K) = (\epsilon^I \wedge \epsilon^J) \wedge \epsilon^K$$

根据前面的引理, 左右两边都等于ϵ^{IJK}, 证毕

(c)根据双线性性, 只需证对长为k的多重指标I和长为l的多重指标J, 有

$$\epsilon^I \wedge \epsilon^J = (-1)^{kl} \epsilon^J \wedge \epsilon^I$$

左边是ϵ^{IJ}, 右边是$(-1)^{kl}\epsilon^{JI}$. 设σ是把$(1, 2, .., k, k+1, .., k+l)$变为$(k+1, .., k+l, 1, 2, .., k)$的置换, 则$JI = (IJ)_\sigma$, 且$sgn(\sigma) = (-1)^{kl}$, 根据$\epsilon^{IJ} = sgn(\sigma)\epsilon^{JI}$可知结论成立

(d)这是上一个Lemma和结合律的直接推广

(e)根据多线性性, 只需证对任何$i_1, .., i_k$, 都有

$$\epsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_k}(v_1, .., v_k) = det(v_i^{i_j})$$

根据(d)可得左边是$\epsilon^{i_1 \cdots i_k}(v_1, .., v_k)$, 根据其定义可知显然成立.

(f)用数学归纳法, 显然n=2时成立, 假设n=k-1时成立, 那么

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n = [\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{k-1}] \wedge \alpha_k = \frac{(r_1 + \cdots + r_{k-1} + r_k)!}{(r_1 + \cdots + r_{k-1})! r_n!} Alt(\frac{(r_1 + \cdots + r_{k-1})!}{r_1! \cdots r_{k-1}!} Alt(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{k-1}) \otimes \alpha_k)$$

$$= \frac{(r_1 + \cdots + r_n)!}{r_1! \cdots r_n!} Alt(Alt(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{k-1}) \otimes \alpha_k)$$

此时只需证$Alt(Alt(\omega) \otimes \eta) = Alt(\omega \otimes \eta)$, 前面已经证明过, 因此n=k时结论成立, 根据归纳原理, 结论对任何正整数成立

12.4　内乘

对任何$v \in V$, 都能定义一个$\Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k-1}(V^*)$的映射$i_v$:

$$i_v\alpha(v_1, .., v_{k-1}) = \alpha(v, v_1, .., v_{k-1})$$

容易证明i_v具备如下性质

Proposition 12.11

$i_v \circ i_v = 0$
若$\omega \in \Lambda^k(V^*), \eta \in \Lambda^l(V^*)$, 则

$$i_v(\omega \wedge \eta) = (i_v\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (i_v\eta)$$

Proof: 只证明第二条.

$$i_v(\omega \wedge \eta)(v_1, .., v_{k+l-1}) = \omega \wedge \eta(v, v_1, .., v_{k+l-1})$$

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_\sigma {}^\sigma(\omega \otimes \eta)(v, v_1, .., v_{k+l-1})$$

把求和分为两组, 一个是$\sigma^{-1}(1) >= k+1$的置换, 另一个是$\sigma^{-1}(1) \leq k$的置换, 那么

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma^{-1}(1) \leq k} sgn(\sigma)^\sigma(\omega \otimes \eta)(v, v_1, .., v_{k+l-1}) + \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma^{-1}(1) \geq k} sgn(\sigma)^\sigma(\omega \otimes \eta)(v, v_1, .., v_{k+l-1})$$

$$(i_v\omega) \wedge \eta(v_1, .., v_{k+l-1}) = \frac{1}{(k-1)!l!} \sum_\pi sgn(\pi)^\pi(i_v\omega \otimes \eta)(v_1, ..., v_{k+l-1})$$

$$= \frac{1}{(k-1)!l!} \sum_\pi sgn(\pi)(\omega \otimes \eta)(v, v_{\pi(1)}, ..., v_{\pi(k+l-1)})$$

下面来看蓝色的部分, 记$u_j = v_{j+1}, v_0 = v$, 继续拆解求和

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{i=1}^k \sum_{\sigma(i)=1} sgn(\sigma)(\omega \otimes \eta)(u_{\sigma(1)}, .., u_{\sigma(k+l)}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{i=1}^k \sum_{\sigma(i)=1} sgn(\sigma)(\omega \otimes \eta)(u_{\sigma(1)}, .., u_{\sigma(k+l)})$$

交换i-1次, 把$u_{\sigma(i)} = u_1 = v_0$换到第一个:

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{i=1}^k \sum_{\sigma(i)=1} sgn(\sigma)(-1)^{i-1}(\omega \otimes \eta)(u_{\sigma(i)}, u_{\sigma(1)}, .., u_{\sigma(k+l)})$$

考虑如下$\sigma \in \{S_{k+l} | \sigma(i) = 1\}$和$\pi \in S_{k+l-1}$的一一对应:

$$\pi(j) = \begin{cases} \sigma(j) - 1 & j < i \\ \sigma(j+1) - 1 & j \geq i \end{cases}$$

则$sgn(\sigma)(-1)^{i-1} = sgn(\pi)$, 于是蓝色部分可以继续化简

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{i=1}^k \sum_{\pi \in S_{k+l-1}} sgn(\pi)(\omega \otimes \eta)(v, v_{\pi(1)}, ..., v_{\pi(k+l-1)})$$

最内层和求和与i无关, 约去一个k就得到

$$= \frac{1}{(k-1)!l!}\sum_{\pi} sgn(\pi)(\omega\otimes\eta)(v, v_{\pi(1)}, ..., v_{\pi(k+l-1)}) = (i_v\omega)\wedge\eta(v_1, .., v_{k+l-1})$$

然后

$$\omega\wedge(i_v\eta)(v_1, .., v_{k+l-1}) = \frac{1}{k!(l-1)!}\sum_{\pi} sgn(\pi)\omega\otimes\eta(v_{\pi(1)}, .., v_{\pi(k)}, v, v_{\pi(k+1)}, .., v_{\pi(k+l-1)})$$

再看橙色部分,记$u_j = v_{j+1}, v_0 = v$, 那么

$$= \frac{1}{k!l!}\sum_{j=1}^{l}\sum_{\sigma(k+j)=1} sgn(\sigma)^{\sigma}(\omega\otimes\eta)(u_1, u_2, .., u_{k+l}) = \frac{1}{k!l!}\sum_{j=1}^{l}\sum_{\sigma(k+j)=1} sgn(\sigma)(\omega\otimes\eta)(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, .., u_{\sigma(k+l)})$$

把$u_{k+j} = u_1 = v_0 = v$替换$j-1$次换到第k+1个, 根据η的交错性得到:

$$= \frac{1}{k!l!}\sum_{j=1}^{l}\sum_{\sigma(k+j)=1} sgn(\sigma)(-1)^{j-1}\omega\otimes\eta(u_\sigma(1), ..u_{\sigma(k)}, v, ..u_\sigma(k+l))$$

考虑一一对应:

$$\pi(i) = \begin{cases}\sigma(i)-1 & i<k+j\\ \sigma(i+1)-1 & i\geq k+j\end{cases}\qquad \sigma\in\left\{S_{k+l}\middle|\sigma(k+j)=1\right\}$$

那么$sgn(\sigma)(-1)^{k+j-1} = sgn(\pi)$(因为v位于第k+1个位置, 所以要多加一个k次方), 从而橙色部分

$$= \frac{1}{k!l!}\sum_{j=1}^{l}\sum_{\pi\in S_{k+l-1}} sgn(\pi)(-1)^{k}\omega\otimes\eta(v_{\pi(1)}, .., v_{\pi(k)}, v, .., v_{\pi(k+l-1)})$$

最最内层的求和与j无关, 所以可以约去一个l, 得出

$$= \frac{(-1)^k}{k!(l-1)!}\sum_{\pi\in S_{k+l-1}} sgn(\pi)^{\pi}(\omega\otimes i_v\eta)(v_1, .., v_{k+l-1}) = (-1)^k\omega\wedge i_v\eta$$

12.5 流形上的微分形式

现在我们把前面建立的框架运用在光滑流形M的协变k-张量上. 定义

$$\Lambda^k T^*M = \coprod_{p\in M}\Lambda^k T_p^*M$$

这是个光滑向量丛. 它的每个连续的截面都被称为一个**微分k-形式**, 我们把所有的光滑k-形式记为

$$\Omega^k(M)$$

Proposition 12.12

证明可以赋予Λ^kT^*M拓扑结构和光滑结构, 使得Λ^kT^*M是M上rank为C_n^k的光滑向量丛

我们注意到微分形式是特殊的协变张量场, 因此可以定义拉回映射.

Lemma 12.13

设M是m维光滑流形, N是n维光滑流形, $F:M\to N$是光滑映射,则

- $F^*:\Omega^k(N)\to\Omega^k(M)$是关于R线性的
- $F^*(\omega\wedge\eta)=F^*\omega\wedge F^*\eta$
- 在任意坐标卡中, 都有

$$F^*(\sum_I \omega_I dy^{i_1}\wedge\cdots\wedge dy^{i_k})=\sum_I(\omega_I\circ F)d(y^{i_1}\circ F)\wedge\cdots\wedge d(y^{i_k}\circ F)$$

Proof: 前两条性质都是F^*和$\otimes$相容性的自然继承. 对于第3条, 先用$F^*(fB)=(f\circ F)F^*B$, 把左边化为

$$\sum_I(\omega_I\circ F)F^*(dy^{i_1}\wedge\cdots\wedge dy^{i_k})$$

回忆$F^*du=d(u\circ F)$, 我们知道$F^*(dy^i)=d(y^i\circ F)$. 然后根据

$$dy^{i_1}\wedge\cdots\wedge dy^{i_k}=\frac{k!}{1!\cdots 1!}Alt(y^{i_1}\otimes\cdots\otimes y^{i_k})$$

以及F^*和$\otimes$相容性和多线性性可知

$$F^*(dy^{i_1}\wedge\cdots\wedge dy^{i_k})=d(y^{i_1}\circ F)\wedge\cdots\wedge d(y^{i_k}\circ F)$$

Proposition 12.14

$F:M\to N$是n维光滑流形之间的光滑映射, 那么对任何两组坐标卡$(U,\varphi),(V,\psi)$, 记dx^i,dy^i分别为其对应的对偶基, 那么

$$F^*(udy^1\wedge\cdots\wedge dy^n)=(u\circ F)detDFdx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

Proof: 只需证

$$F^*(dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n)=(detDF)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

我们只需证上式逐点的相等. 对任何$p\in M$, 我们知道n-形式是最高次形式, 且$\Lambda^n(T_p^*M)=1$, 因此存在f_p使得

$$F^*(dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n)_p=f_p dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

两边作用于$(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p,...,\frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$就可解出$f_p$:

$$f_p=F^*(dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n)_p(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p,...,\frac{\partial}{\partial x^n}|_p)=dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n(dF_p\frac{\partial}{\partial x^1}|_p,...dF_p\frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$$

而在选定基底$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p,\frac{\partial}{\partial y^i}|_{F(p)}$后, dF_p的矩阵表示为

$$J(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})$$

因此

$$dF_p\frac{\partial}{\partial x^i}|_p=\sum_{j=1}^n J(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})_{ij}\frac{\partial}{\partial y^j}|_{F(p)}$$

用Proposition 12.7可得

$$dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n(dF_p\frac{\partial}{\partial x^1}|_p,...dF_p\frac{\partial}{\partial x^n}|_p)=det(J(\psi\circ F\circ\varphi^{-1}))dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n(\frac{\partial}{\partial y^1}|_{F(p)},...,\frac{\partial}{\partial y^n}|_{F(p)})$$

$$= det(DF)$$

因此$f_p = det(DF)$对任何$p \in M$成立,证毕

12.6　外微分

Proposition 12.15

对R^n中的任一光滑形式$\omega = \sum_J \omega\, dx^J$, 定义$R^n$的外微分为

$$d(\omega) = \sum_J d\omega_J \wedge dx^J$$

则

- d是线性映射
- ω, η分别是光滑的k,l-形式, 那么

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta)$$

- $d \circ d = 0$
- d与拉回映射相容: 若U,V是R^n或H^n的开集, $F: U \to V$是光滑映射, 那么

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega^k(V)$$

Proof: (a)显然

(b)设$\omega = \sum_J \omega_J dx^J, \eta = \sum_K \eta_K dx^K$, 那么

$$\omega \wedge \eta = \sum_{J,K} \omega_J \eta_K dx^{JK}$$

因此

$$d(\omega \wedge \eta) = \sum_{J,K} d(\omega_J \eta_K) \wedge x^{JK} = \sum_{J,K} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_J}{\partial x_i} \eta_K dx^i \wedge dx^{JK} + \sum_{J,K} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \eta_K}{\partial x_i} \omega_J dx^i \wedge dx^{JK}$$

$$= (\sum_J \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_J}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^J) \wedge (\sum_K \eta_K dx^K) + \sum_{J,K} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \eta_K}{\partial x_i} \omega_J (-1)^k dx^J \wedge dx^i \wedge dx^K$$

$$d\omega \wedge \eta + (-1)^k (\sum_J \omega_J dx^J)(\sum_K \sum_{i=1}^n \frac{\partial \eta_K}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^K) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta)$$

(c)

$$dd\omega = d(\sum_J \frac{\partial \omega_J}{\partial x_i} dx^{iJ})$$

$$= \sum_J \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_i x_j} dx^j \wedge dx^{iJ}$$

$$= \sum_J \sum_{i<j} \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_i x_j} dx^j \wedge dx^{iJ} + \sum_J \sum_{i>j} \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_i x_j} dx^j \wedge dx^{iJ} + \sum_J \sum_{i=j} \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_i x_j} dx^j \wedge dx^{iJ}$$

根据ω_J光滑可得$\frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_i x_j} = \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_j x_i}$, 又$dx^i \wedge dx^{iJ} = dx^{iiJ} = 0$, 因此

$$dd\omega = \sum_J \sum_{i<j} \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_i x_j} dx^j \wedge dx^{iJ} + \sum_J \sum_{i>j} \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_i x_j} dx^j \wedge dx^{iJ}$$

交换第2个求和中的i,j:

$$dd\omega = \sum_J \sum_{i<j} \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_i x_j} dx^j \wedge dx^{iJ} + \sum_J \sum_{j>i} \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_j x_i} dx^i \wedge dx^{jJ}$$

$$= \sum_J \sum_{i<j} \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_i x_j} (dx^j \wedge dx^{iJ} + dx^i \wedge dx^{jJ}) = \sum_J \sum_{i<j} \frac{\partial^2 \omega_J}{\partial x_i x_j} \times 0 = 0$$

(d)根据Lemma 12.13,

$$F^*(\sum_J \omega_J dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) = \sum_J \omega_J \circ F d(x^{j_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(x^{j_k} \circ F)$$

$$= \sum_J \omega_J \circ F dF_{j_1} \wedge \cdots \wedge dF_{j_k}$$

我们注意到

$$d(d\alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_m) = (dd\alpha_i) \wedge \cdots \wedge d\alpha_m + (-1)^{r_1} d\alpha_1 \wedge d(d\alpha_2 \cdots \wedge d\alpha_m) \qquad \alpha_i \in \Omega^{r_i}(R^n)$$

$$= (-1)^{r_1} d\alpha_1 \wedge d(d\alpha_2 \cdots \wedge d\alpha_m)$$

继续上述步骤

$$= (-1)^{r_1+r_2} d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 \wedge d(d\alpha_3 \cdots \wedge d\alpha_m)$$

继续

$$= (-1)^{r_1+r_2+\cdots+r_{m-1}} d\alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_{m-1} \wedge d(d\alpha_m) = 0$$

所以

$$d(F^*\omega) = \sum_J d(\omega_J \circ F) dF_{j_1} \wedge \cdots \wedge dF_{j_k} + (-1)^0 \omega_J \circ F d(dF_{j_1} \wedge \cdots \wedge dF_{j_k})$$

$$= \sum_J d(\omega_J \circ F) dF_{j_1} \wedge \cdots \wedge dF_{j_k} = \sum_J \sum_{i=1}^n \sum_{j=1} \frac{\partial \omega_J}{\partial x_j}(F) \frac{\partial F_j}{\partial x_i} dx^i \wedge dF_{j_1} \wedge \cdots \wedge dF_{j_k}$$

$$= \sum_J \sum_{j=1} \frac{\partial \omega_J}{\partial x_j}(F) dF_j \wedge dF_{j_1} \wedge \cdots \wedge dF_{j_k} = \sum_J \sum_{j=1} \frac{\partial \omega_J}{\partial x_j}(F) d(x^j \circ F_j) \wedge d(x^{j_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(x^{j_k} \circ F)$$

另一方面,

$$F^*(d\omega) = F^*(\sum_J \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_J}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^J)$$

$$= \sum_J \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_J}{\partial x_i}(F) d(x^i \circ F) \wedge d(x^{j_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(x^{j_k} \circ F)$$

因此$F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$

Theorem 12.16

M是n维光滑流形, 存在唯一的线性算子$d:\Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M)$, 满足:

- d在R上线性
- 对$\omega\in\Omega^k(M),\eta\in\Omega^l(M)$, 有

$$d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge d\eta$$

  (注意到如果k,l 有一个为0, 那楔积就变成数乘)
- $d\circ d=0$
- 对任何$f\in C^\infty(M)=\Omega^0(M)$, df是f的微分, i.e $df(X)=Xf$

在任何光滑坐标卡中, 有

$$d(\sum_I\omega_I dx^I)=\sum_I d\omega_I\wedge dx^I$$

Proof:先证明存在性. 设$p\in M$, 取p附近的坐标卡(U,φ), 定义

$$d\omega=\varphi^*d(\varphi^{-1*}\omega)$$

其中右边的d是R^n中的外微分运算.

首先需要验证这种定义不依赖于坐标卡的选取. 设p附近还有一个坐标卡(V,ψ), 那么在$U\cap V$上有

$$\varphi^*d(\varphi^{-1*}\omega)=\psi^*\circ\psi^{-1*}\circ\varphi^*d(\varphi^{-1*}\omega)=\psi^*d(\psi^{-1*}\circ\varphi^*\circ\varphi^{-1*}\omega)=\psi^*d(\psi^{-1*}\omega)$$

又$(\varphi^{-1*}\omega$光滑且φ光滑, 因此$d\omega$光滑. 且根据d的性质可得定理中的性质都成立

然后证明唯一性. 先说明d由ω在p附近的表现确定. 假如在p的邻域U中有$\omega_1=\omega_2$, 我们证明$d\omega_1=d\omega_2$. 令$\eta=\omega_1-\omega_2$, ψ是在p的一个更小的邻域中为1的鼓包函数且$supp\psi\in U$, 那么$\psi\eta=0$恒成立, 这给出了

$$0=d(\psi\eta)=d\psi\eta-\psi d\eta$$

由ψ在p附近为1可得$d\psi=0$, 因此$d\eta=0,d\omega_1=d\omega_2$

对任何的$p\in M$, 取p附近的坐标卡(U,φ). 对U中的$\omega=\sum_I\omega_I dx^I$, 我们用鼓包函数把它延拓到整个M上的光滑函数微分形式$\tilde{\omega}$, 且$supp\tilde{\omega}\subseteq U$,

$$d\omega_p=d\tilde{\omega}_p=\sum_I d\omega_I\wedge dx^I$$

这说明$d\omega$在p处的取值被右边唯一确定, 因此d是唯一的

Proposition 12.17

$F:M\to N$是光滑映射, 对任何k, $F^*:\Omega^k(N)\to\Omega^k(M)$都和外微分运算相容:

$$F^*(d\omega)=d(F^*\omega)$$

Proof:我们证明这种拉回逐点的相等. 任取$p\in M$, 取$F(p)$附近的坐标卡(U,φ), 则根据外微分的定义:

$$d\omega=\varphi^*d(\varphi^{-1*}\omega)$$

$$F^*(d\omega)=F^*\varphi^*d(\varphi^{-1*}\omega)=(\varphi\circ F)^*d(\varphi^{-1*}\omega)$$

取p附近的坐标卡(V,ψ), 则给出了

$$F^*(d\omega)=(\varphi\circ F\circ\psi^{-1}\circ\psi)^*d(\varphi^{-1*}\omega)_p$$

$$=\psi^*(\varphi\circ F\circ\psi^{-1})^*d(\varphi^{-1*}\omega)$$

根据R^n中外微分和拉回的相容性, 这给出了

$$=\psi^*d((\varphi^{-1}\circ\varphi\circ F\circ\psi^{-1})\omega)=\psi^*d(\psi^{-1*}F^*\omega)=d(F^*\omega)$$

最后一个等号是外微分的定义.

12.7　微分形式的Lie导数

上一章中我们定义了张量场的Lie导数, 而微分形式是特殊张量场, 所以可以考虑微分形式的Lie导数.

Proposition 12.18

M是光滑流形, $V\in\mathscr{X}(M)$, ω,η是M上的光滑微分形式, 那么

$$\mathcal{L}_V(\omega\wedge\eta)=\mathcal{L}_V(\omega)\wedge\eta+\omega\wedge\mathcal{L}_V\eta$$

Proof: 根据$Alt(\alpha)$的定义, Alt是关于α的线性映射, 因此根据Proposition 11.10 和Lie导数的线性性, 有

$$\mathcal{L}_V(Alt(\omega\otimes\eta))=Alt(\mathcal{L}_V(\omega\otimes\eta))=Alt(\mathcal{L}_V\omega\otimes\eta)+Alt(\omega\otimes\mathcal{L}_V\eta)$$

另一方面,设ω,η分别是k,l-形式, 那么$\mathcal{L}_V\omega,\mathcal{L}_V\eta$分别是k,l-形式, 两边乘以$\frac{(k+l)!}{k!l!}$, 根据楔积的定义, 结论成立

Theorem 12.19 Cartan 神奇公式

M是光滑流形, V是M上的光滑向量场, ω是M上的光滑形式, 那么

$$\mathcal{L}_V\omega=i_V(d\omega)+d(i_V\omega)$$

这个公式极为重要, 否则不会为之起一个这么神奇的名字

Proof: 用数学归纳法, 首先证明结论对光滑的0-形式成立. 注意到光滑0-形式是光滑函数, 设为f, 则

$$\mathcal{L}_Vf=Vf\qquad i_V(df)+d(i_Vf)$$

而i_Vf是$\Omega^{-1}(M)$中的元素, 而这个空间是平凡的空间, 只有0, 所以$i_Vf=0$, 另一方面 $df\in\Omega^1(M)$, 因此$i_V(df)\in\Omega^0(M)$, 且根据定义(df的定义在第10章查看)有

$$i_V(df)=df(V)=Vf$$

因此$\mathcal{L}_Vf=i_V(df)+d(i_Vf)$

然后设结论对所有0,1,..,k-1形式成立, 令$\omega\in\Omega^k(M)$, 则在局部可设

$$\omega=\sum_J\omega_Jdx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}=\sum_J dx^{j_1}\wedge\omega_Jdx^{j_2}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}$$

根据Lie导数的线性性, 只需证

$$\mathcal{L}_V(dx^{j_1} \wedge \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) = i_V d(dx^{j_1} \wedge \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) + d(i_V dx^{j_1} \wedge \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k})$$

左边为

$$\mathcal{L}_V(dx^{j_1}) \wedge \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} + dx^{j_1} \wedge \mathcal{L}_V \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}$$

使用归纳假设得到

$$= d(i_V x^{j_1}) \wedge \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} + dx^{j_1} \wedge i_V d(\omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) + dx^{j_1} \wedge d(i_V \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k})$$

等号右边用Proposition 12.11给出了

$$= -i_V(dx^{j_1} \wedge d(\omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k})) + d(i_V(dx^{j_1}) \wedge \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} - dx^{j_1} \wedge i_V \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k})$$

$$\begin{aligned}
&= -(i_V dx^{j_1}) \wedge d(\omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) + dx^{j_1} \wedge i_V d(\omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) + d(i_V dx^{j_1}) \wedge \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} \\
&\quad + (-1)^0 i_V dx^{j_1} \wedge d(\omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) - d(dx^{j_1} \wedge i_V \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) \\
&= d(i_V dx^{j_1}) \wedge \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} + dx^{j_1} \wedge i_V d(\omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) - d(dx^{j_1} \wedge i_V \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) \\
&= d(i_V dx^{j_1}) \wedge \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} + dx^{j_1} \wedge i_V d(\omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) + dx^{j_1} \wedge d(i_V \omega_J dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k})
\end{aligned}$$

Corollary 12.20

外微分和Lie导数可以交换次序

$$\mathcal{L}_V(d\omega) = d(\mathcal{L}_V \omega)$$

Proof:

$$\mathcal{L}V(d\omega) = i_V(dd\omega) + d(i_V d\omega) = d(i_V d\omega)$$

$$d(\mathcal{L}_V \omega) = d(i_V \omega) + dd(i_V \omega) = d(i_V d\omega)$$

12.8 Exerxcise

Problem 12.1

f是R^n上的光滑函数, $\omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, $X = \nabla f$, 求$\mathcal{L}_X \omega$

Problem 12.2

$X = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$是$R^n$上的向量场,

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

计算$\mathcal{L}_X \omega$

第十三章　流形的定向

13.1　线性空间的定向

Definition 13.1

对于有限维线性空间V的两组有序基, $(e_1, .., e_n), (v_1, .., v_n)$, 如果两组基底的转移矩阵[a]的行列式是正的, 则称两个基底是**一致定向**的. 我们强调有序基, 正是因为基底的排列顺序会对转移矩阵的行列式产生符号变换的影响. 容易验证一致定向是基底之间的等价关系.
线性空间V的**方向**是V上某一组有序基的等价类.
给定一组基$(E_1, .., E_n)$, 其等价类$[E_1, .., E_n]$称为$E_1, ..., E_n$**确定的方向**. 对另一组基底$(v_1, .., v_n)$, 如果它在这个等价类里面, 则称为**保持定向**的, 否则称为**反转定向**的.

[a]线性代数中也称为过渡矩阵

13.2　流形的定向

流形上的切空间具有线性结构, 所以我们可以把线性空间的定向套用在切空间的定向中. 这样, 每个T_pM都存在了一个方向, 不过线性空间的"方向"不止一个, 所以任何一种这样为T_pM赋予方向的操作, 都可以说是为T_pM"确定"了一个方向, 所以这种操作可称为M的一个**逐点定向**

Definition 13.2

M是n带边或无边维光滑流形, M有一个逐点定向. 记E_i是TM上的局部标架(设定义域为U). 称E_i是**保持定向**的, 如果对任何$p \in U$, 都有基底$(E_1\big|_p, ..., E_n\big|_p)$在$T_pM$中是保持定向的. 否则称为**反转定向**的

显然逐点定向有无穷多种, 因为每个T_pM都有不止一个方向, 我们想要选取其中"好"的逐点定向. 比如:

Definition 13.3

M上的一个逐点定向是**连续**的, 如果对任何$p \in M$, 存在p的邻域U和U上的局部标架E_i, 使得E_i是保持定向的
一个连续的逐点定向称为M的一个**定向**, 如果M上存在定向, 则称M是**可定向**的

看起来有点抽象, 如果我们要为M构造一个"定向", 就要考虑连续的逐点定向. 而连续的逐点定向来自于M上局部的标架. 所以, 假如对任何$p \in M$, 都能找到p的邻域U上的光滑标架E^p, 那么我们就能给$T_pM, p \in U$都赋予一个方向, 就设置为$[E_1^p, .., E_n^p]$. 所有这样的U覆盖M,这样就给M赋予了一个逐点定向. 但其中的问题是, 当两个光滑标架E, W, 具有重叠的定义域时, 即它们的定义域U,V有非空交集的时候, 我们需要保证E^p, W^p给出的方向是一致的, i.e E^p, W^p之间的转移矩阵具备正的行列式.

另一方面每个坐标卡(U, φ)都给出了一个局部标架$(\frac{\partial}{\partial x^1}, .., \frac{\partial}{\partial x^n})$, 假设还有个坐标卡$(V, \psi)$满足$U \cap V \neq \emptyset$, 那么对

任何$p \in U \cap V$, 就有两个基底

$$(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}|_p) \qquad (\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n}|_p)$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p f = \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i}|_{\varphi(p)} \qquad \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\bigg|_p f = \frac{\partial f \circ \psi^{-1}}{\partial x_i}|_{\psi(p)}$$

这两组基底之间的转移矩阵就是转移映射的jacobian矩阵, 因此要使的这些坐标卡决定的方向是良定义的, 就要求转移映射的jacobian的行列式为正, 这样我们就找到了M的一个连续的逐点定向.

另一方面, 如果M是可定向的, 那么必定存在着一组坐标卡使得这组坐标卡之间的转移映射的jacobian矩阵的行列式都是正数. 请读者先思考怎么给出证明

Proposition 13.4

M可定向, 那么存在一组光滑坐标卡(U, φ)使得坐标卡之间的转移映射的jacobian行列式都是正数

Proof: 对任何$p \in M$, 存在p的邻域X和X上的连续标架$(E_1(q), .., E_n(q)), q \in X$. 另外取p附近的坐标卡$(U, \varphi)$, 再取p的预紧连通邻域$V \subseteq U$满足$\overline{V} \subseteq U$, 通过缩小U不妨设$U \subseteq X$, 如此存在矩阵$a_{ij}(q)$使得

$$E_i(q) = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}(q) \frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_q$$

在$\overline{V}$上, $det(a_{ij})$不变号, 如果恒负, 则通过交换前两个坐标的顺序, 不妨设$det(a_{ij}) > 0$恒成立, 对一个$\epsilon > 0$, 根据Whitney逼近定理, 存在U上的光滑函数$\tilde{a}_{ij}(q)$使得$|\tilde{a}_{ij} - a_{ij}| < \epsilon$, 取$\epsilon$足够小使得在$\overline{V}$(这是个紧集)上有

$$det(\widetilde{a_{ij}}) > 0$$

记$A(q) = \{a_{ij}(q)\}, \widetilde{A}(q) = \{\widetilde{a}_{ij}(q)\}$,

这样给出了一组新标架

$$W_i(q) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(q) \frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_q$$

且W_i, E_i之间的转移矩阵为

$$A \cdot \tilde{A}^{-1}$$

行列式为正数, 因此W_i, E_i在V上决定的方向是相同的, 又$det\tilde{A}(q) > 0$, 因此在V上, E_i和$\frac{\partial}{\partial x^i}$决定的方向是相同的. 这样就找到了p附近的一个坐标卡(V, φ). 使之在V中和M的某个保持定向的局部标架决定的方向是一样的, 为了表示方便, 我们把$\frac{\partial}{\partial x^i}$决定的方向称为坐标卡$(V, \varphi)$决定的方向.

根据p的任意性, 就找到了一组覆盖M的坐标卡, 记为$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$

然后我们证明这组坐标卡的转移映射的jacobian行列式都是正的. 假设$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 任取$p \in U_\alpha \cap U_\beta$根据刚才$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$的构造, 存在p附近的邻域X,Y和上面的保持定向的连续标架E_i, W_i使得E_i和$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$的定向是一样的, W_i和(U_β, φ_β)的定向是一样的, 设E_i和$\frac{\partial}{\partial x^i_\alpha}$的转移矩阵是$A(q)$, W_i和$\frac{\partial}{\partial x^i_\beta}$的转移矩阵是$B(q)$, E_i, W_i之间的转移矩阵为$C(q)$, 那么$\frac{\partial}{\partial x^i_\beta}, \frac{\partial}{\partial x^i_\alpha}$之间的转移矩阵就是

$$A(q)C(q)B(q)^{-1}$$

另一方面在第三章中我们知道转移矩阵为$J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})$, 因此

$$J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(q)) = A(q)C(q)B(q)^{-1} \qquad \forall q \in U_\alpha \cap U_\beta$$

两边取行列式, 右边为正数(因为E_i, W_i保持定向, 所以在$X \cap Y$上的转移矩阵行列式C为正), 所以左边为正数, 证毕

Theorem 13.5 可定向的坐标卡判据

M是n维光滑流形, M是可定向的, 当且仅当存在一组和M的光滑结构相容的坐标卡, 能覆盖M且转移映射的jacobian矩阵行列式为正的. i.e存在一个光滑图册, 使得图册中的任何两个坐标卡之间的转移映射的jacobian矩阵都是正的.
这个定向称为坐标卡确定的定向, 这种图册也称为**定向坐标覆盖**
由于这个原因, 有些书籍也把定向坐标覆盖的存在性作为可定向的定义.
此外, 如果M是定向的微分流形, (U,φ)是坐标卡, 如果基底$\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$是$T_pM$中保持定向的, 对任何$p \in U$成立, 则称坐标卡$(U,\varphi)$是一个**定向坐标卡**

Proof: $\Rightarrow$ Proposition 13.4

$\Leftarrow$ 每个坐标卡(U,φ)都给出了一个局部标架$(\frac{\partial}{\partial x^1},..,\frac{\partial}{\partial x^n})$, 假设还有个坐标卡$(V,\psi)$满足$U \cap V \neq \emptyset$, 那么对任何$p \in U \cap V$, 就有两个基底

$$(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p,..,\frac{\partial}{\partial x^n}|_p) \qquad (\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1}|_p,..,\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n}|_p)$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p f = \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)} \qquad \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\bigg|_p f = \frac{\partial f \circ \psi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{\psi(p)}$$

这两组基底之间的转移矩阵就是转移映射的jacobian矩阵, 行列式为正数, 所以对任何$p \in M$, 取p的附近的坐标卡(U,φ), 可以逐点的为T_pM赋予定向为$[\frac{\partial}{\partial x^1},..,\frac{\partial}{\partial x^n}]$, 这种定向是良定义的, 因为两组基底之间的转移矩阵就是转移映射的jacobian矩阵行列式为正数. 且这个定向就是连续的逐点定向, 因为这个逐点定向在每一点$p \in U$都等于光滑标架$(\frac{\partial}{\partial x^1},..,\frac{\partial}{\partial x^n})$决定的定向$[\frac{\partial}{\partial x^1}|_p,..,\frac{\partial}{\partial x^n}|_p]$

13.3　定向的其他性质

前面建立的一套抽象的“定向”的定义, 其实等价于定向坐标覆盖的存在性. 这给出了判定光滑流形能否定向的充要条件. 下面我们从另一些角度, 给出关于定向的性质

Proposition 13.6 定向的微分形式判据

M是n维光滑流形, 则M可定向当且仅当M上存在处处非0的光滑 n-形式
对一个微分形式ω, 称ω为**定向形式**, 如果对任何$p \in M$, ω把某一组保持定向的有序基映射为正数, 这等价于任何一组保持定向的有序基都被映射为正数, 因为保持定向的有序基之间的过渡矩阵具备正的行列式

Proof: $\Rightarrow$ 可定向说明存在定向坐标覆盖, 又光滑流形能被可数个坐标卡覆盖, 因此可以取其中覆盖M的可数个, 记为$\{(U_i,\varphi_i)\}$, 仍是一组定向坐标覆盖. 对任何$p \in M$, 取覆盖p的定向坐标卡(U_i,φ_i), 定义U_i上的n-形式为

$$\omega_i = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

其中dx^i为$\frac{\partial}{\partial x^i}$的对偶基. 然后取从属于$U_i$的单位分解$\psi_i$, 定义

$$\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \omega_i$$

对任何$p \in M$, 设$p \in U_i$, 假设$p \in U_j$, 则由

$$\omega_j = d\tilde{x}^1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}^n = detJ(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

可得如果$p \in supp\psi_j$, 那么必有$\omega_j = detJ(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, 系数¿0, 因此

$$\omega(p) = \sum_{j, p \in supp\psi_j} \psi_j detJ(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

根据$\psi_j \geq 0$且不全为0可得$\omega(p)$的系数> 0, 因此处处非0

$\Leftarrow$ 对任何一点p, 取p附近的坐标卡(U, φ), 通过欧式空间的局部连通性, 缩小U不妨设U是连通的, 根据p的任意性, 这些坐标卡覆盖M, 所以可以取可数子覆盖记为(U_i, φ_i), 从而在U_i上定义

$$f_i = \omega(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n})$$

右边非0, 又U_i连通, 所以f_i恒正或恒负, 通过交换坐标顺序, 不妨设f_i恒正. 再根据

$$f_j = f_i detJ(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})$$

可得$detJ(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) > 0$, 因此$(U_i, \varphi_i)$是定向坐标覆盖. 这个定向又称为$\omega$**诱导的定向**

比如说对欧式空间R^n, 我们知道它能被一个单独的坐标卡(R^n, id)覆盖, 因此可以考虑在每点处的切空间给出一个方向(回忆线性空间的方向是有序基的等价类):

$$[\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}]$$

那么微分形式

$$\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

就是R^n上的定向形式.

Proposition 13.7

可平行化的光滑流形可定向

Proof: 设光滑流形维数为n. 可平行化是说存在n个处处线性无关的光滑向量场. 因此是一组全局标架$(E_1, ..., E_n)$, 为T_pM赋予定向

$$[E_1\big|_p, ..., E_n\big|_p]$$

这就是M的一组连续的逐点定向.

Definition 13.8

M,N是定向光滑流形, $F: M \to N$是局部微分同胚(这意味着M,N维数相同), 由此可知对任何$p \in M$, $dF_p: T_pM \to T_{F(p)}N$都是线性同构. 如果对任何$p \in M$, dF_p都把T_pM中保持定向的有序基映射为$T_{F(p)}N$中保持定向的有序基, 那么称F是**保持定向**的, 否则称为**反转定向**的

关于保持定向的光滑映射, 有如下性质

Proposition 13.9

M,N是定向光滑流形, $F: M \to N$是局部微分同胚, 则下列叙述等价

- F是保持定向的
- 对M,N的任何两个定向坐标卡, F在这两组坐标卡下的坐标表示, 具有正的jacobian行列式
- 对N中任意定向形式ω, $F^*\omega$都是M上的定向形式

Proof: $(a) \to (b)$ (U, φ)和(V, ψ), 则$dF_p(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p), 1 \leq i \leq n$是 $T_{F(p)}N$中保持定向的有序基, 又(V, ψ)是定向坐

标卡, 所以$(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}|_{F(p)})$也是保持定向的有序基, 因此这两组有序基之间的过渡矩阵W_p的行列式为正, 然而$W_p = (J(\psi\circ F\circ\varphi^{-1}))^{-1}$, 因此$detJ(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})>0$

$(b)\to(c)$ 对任何$p\in M$, 取p附近的定向坐标卡(U,φ). 那么

$$F^*\omega(\frac{\partial}{\partial x^1},..,\frac{\partial}{\partial x^n}) = \omega(dF_p\frac{\partial}{\partial x^1},...,dF_p\frac{\partial}{\partial x^n})$$

再取$F(p)$附近的定向坐标卡(V,ψ), 则dF_p在这两组坐标卡下的表示矩阵W_p具有正的行列式, 且$dF_p\frac{\partial}{\partial x^i}$到$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}|_{F(p)}$的转移矩阵是$W_p^{-1}$, 因此$dF_p\frac{\partial}{\partial x^i}$是保持定向的有序基, 因此$\omega(dF_p\frac{\partial}{\partial x^1},...,dF_p\frac{\partial}{\partial x^n})>0$

$(c)\to(a)$ 对T_pM中的任何一组保持定向的有序基$E_1,..,E_n$, 都有

$$F^*\omega(E_1,..,E_n)>0$$

因此

$$\omega(dF_pE_1,...,dF_pE_n)>0$$

又ω是定向形式, 所以根据定向形式的定义, $dF_pE_1,...,dF_pE_n$作为一个有序基, 必须是保持定向的

Proposition 13.10 拉回映射给出的定向

M,N是光滑流形, F是$M\to N$的局部微分同胚. N是可定向的, 那么M也可定向, 且存在一个定向使得$F: M\to N$是保持定向的

Proof: 设N是n维流形. 则N中存在处处非0的光滑n-形式ω, 根据dF_p是双射可得

$$F^*\omega(v_1,..,v_n) = \omega(x_1,..,x_n) \qquad v_i = (dF_p)^{-1}x_i$$

等号右边不恒为0, 所以左边不恒为0, 因此$F^*\omega$是处处非0的. 又F是光滑映射, 所以$F^*\omega$光滑, 因此M可定向, 容易验证$F^*\omega$诱导出的定向就能使F变成保持定向的光滑映射.

13.4 子流形的定向

Proposition 13.11

M是可定向的n维光滑流形. S是M的n-1维浸入子流形, 且N是一个无处与S相切的向量场, 则S存在一个定向使得对任何$p\in S$, $(E_1,...,E_{n-1})$是T_pS中保持定向的基底, 当且仅当$(N_p,E_1,...,E_n)$是T_pM中保持定向的基底. 记$\iota: S\to M$为包含映射, 若ω是M中的定向n-形式, 则$\iota^*(i_N\omega)$是S上的定向$(n-1)-$形式

Proof: 设ω是M上的定向形式(光滑), 则$\sigma = \iota^*(i_N\omega)$是S上的光滑$(n-1)-$形式, 对$T_pS$中的基底$(E_1,..,E_{n-1})$, 由$N_p$不在$T_pS$中(因为N和S无处相切)可得$(N_p,E_1,..,E_{n-1})$是$T_pM$的基底, 且

$$\sigma_p(E_1,..,E_{n-1}) = \omega(N_p,E_1,..,E_{n-1})$$

则σ就是S上的处处非0的光滑$(n-1)-$形式, 因此S可定向. 且左边>0当且仅当右边>0, 证毕

Corollary 13.12 边界的定向

M是n维光滑带边流形, 且M可定向, 那么∂M可定向, 且每个在∂M上指向外向量场在∂M上诱导出相同的定向.

由任何一个∂M指向外的向量场决定的定向称为**诱导定向或Stokes定向**

Proof: 根据Problem 8.1, 取M上的光滑向量场X, 满足X在∂M上处处指向外, 然后取M上的某个定向n-形式, 则根据Proposition 13.11,

$$\iota^*(i_X\omega)$$

就是∂M上处处非0的微分形式, 因此∂M可定向.

对另一个在∂M上处处指向外的向量场Y, 我们知道在T_pM中 ,有序基

$$(X_p, \frac{\partial}{\partial x^1}, .., \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}) \qquad (Y_p, \frac{\partial}{\partial x^1}, .., \frac{\partial}{\partial x^{n-1}})$$

之间的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{Y_p^n}{X_p^n} & Y_p^1 - X_p^1\frac{Y_p^n}{X_p^n} & \cdots & Y_p^{n-1} - X_p^{n-1}\frac{Y_p^n}{X_p^n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

其中X_p^i, Y_p^i是X,Y在基底$(\frac{\partial}{\partial x^1}, .., \frac{\partial}{\partial x^n})$下的系数, 由X,Y指向外可得$X_p^n, Y_p^n > 0$, 因此上述矩阵的行列式为正的.

因此$\omega(X_p, \frac{\partial}{\partial x^1}, .., \frac{\partial}{\partial x^{n-1}})$和$\omega(Y_p, \frac{\partial}{\partial x^1}, .., \frac{\partial}{\partial x^{n-1}})$符号相同, 所以$\iota^*(i_X\omega), \iota^*(i_Y\omega)$确定的定向是一样的

Example 13.13 ∂H^n的诱导定向

注意到向量场

$$X = -\frac{\partial}{\partial x_n} \in \mathscr{X}(H^n)$$

因为X是$\mathscr{X}(R^n)$的向量场$-\frac{\partial}{\partial x_n}$在$H^n$的限制. 然后我们考虑欧式空间的标准定向$[e_1, .., e_n]$, 可以找出对应的一个$H^n$的定向形式为

$$\omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

则$\iota^*(i_X\omega)$就是∂H^n的诱导定向. 我们发现$T_p\partial H^n$的有序基$(\frac{\partial}{\partial x_1}, .., \frac{\partial}{\partial x_{n-1}})$满足

$$\iota^*(i_X\omega)(\frac{\partial}{\partial x_1}, .., \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}) = \omega(-\frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_1}, .., \frac{\partial}{\partial x_{n-1}})$$

$$= -\omega(\frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_1}, .., \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}) = (-1)(-1)^{n-1}det(I_n) = (-1)^n$$

因此当n是偶数时, $(\frac{\partial}{\partial x_1}, .., \frac{\partial}{\partial x_{n-1}})$保持定向, 当n为奇数时, 反转定向.

13.5 Exercise

Problem 13.1

证明Lie群可定向

Problem 13.2

F是光滑流形之间保持定向的局部微分同胚, 当且仅当对任何$p \in M$, 存在一组T_pM的有序基, 使得dF_p把它映射为$T_{F(p)}N$的有序基. i.e dF把任何一组有序基映射为有序基, 当且仅当dF把某一组有序基映射为有序基

Problem 13.3

$F: M \to N$是光滑流形之间的微分同胚, 且N, M是可定向的. 如果F是保持定向的, 那么对N的一组定向坐标卡(U, φ), $(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$是M上的一个定向坐标卡

Problem 13.4

M是可定向光滑流形, (U, φ)是M的坐标卡且U连通, 证明(U, φ)要么保持定向, 要么反转定向

Problem 13.5

证明可定向性是微分同胚下的不变量, i.e. 若M,N是光滑流形, 且M是可定向的, F是$M \to N$是微分同胚, 那么N也是可定向的

Problem 13.6

M是光滑流形, 证明若$M \times R$可定向, 则M可定向. 继而通过令$M \times R^n = M \times R^{n-1} \times R$证明: 如果$M \times R^k$可定向, 则M可定向

Problem 13.7

M是光滑流形, 且M可定向. 证明M的任一开子集可定向.

Problem 13.8

证明$M \times N$可定向时, M,N都可定向.
Hint:为了证明M可定向, 取N中的坐标卡(U, φ)满足$\varphi(U) = R^n$, 根据第一章的习题这是可以做到的, 然后考察$M \times U$怎么转化为Problem 13.6的情形. 至于N, 可以考虑$N \times M$和$M \times N$之间的微分同胚

Problem 13.9

M,N是光滑流形, 证明$M \times N$可定向当且仅当M,N都可定向

Problem 13.10

M是光滑流形, 证明无论M是否可以定向, TM, T^*M都是可定向的

第十四章　流形上的积分

14.1　坐标卡内紧支n-形式的积分

流形上的积分对象是最高次的微分形式.

Definition 14.1 R^n **中n-形式的积分**

D是R^n的子集,满足∂D是Lebesgue零测集. 这样的集合D称为**积分区域**. $\overline{D}$上的任何一个连续的n-形式都能写作

$$\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \qquad f \in C(\overline{D})$$

定义ω在D上的积分为

$$\int_D \omega = \int_D f dx_1 \cdots dx_n$$

右边代表f在D上的Lebesgue积分

要定义流形上的积分, 我们也是要把微分形式拉回到R^n上再计算的:

Definition 14.2 流形上的积分

M是n维光滑流形, (U, φ)是一个坐标卡, 且要么是保持定向, 要么是反转定向. ω是支集在U中的n-形式, 那么定义

$$\int_M \omega = \pm \int_{\varphi(U)} \varphi^{-1*}\omega$$

其中右边是正号, 如果φ保持定向. 否则取负号

注意了, 这里定义的紧支形式ω, 必须满足其支集含于某个“定向坐标卡”或“反转定向”坐标卡.

Proposition 14.3

上述积分的定义不依赖于坐标卡的选取(只要坐标卡的坐标邻域包含ω的支集)

Proof:

$$\int_{\varphi(U)} \varphi^* \omega$$

设ω在坐标卡(U, φ)下的表示为

$$\omega_p = g(p) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

那么$\varphi^{-1*}\omega$的系数为

$$\varphi^{-1*}\omega(\frac{\partial}{\partial x_1}, .., \frac{\partial}{\partial x_n}) = \omega(d\varphi^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_1}), ..., d\varphi^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_n}))$$

$\varphi^{-1}:\varphi(U)\to U$是光滑映射, $d\varphi^{-1}$在坐标卡$(R^n,id),(U,\varphi)$下的表示为

$$J(\varphi\circ\varphi^{-1}\circ id)(x)=I_n$$

因此$d\varphi^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_j}|_{\varphi(p)})=\frac{\partial}{\partial x^j}|_p$, 这说明

$$\varphi^{-1*}\omega(\frac{\partial}{\partial x_1},..,\frac{\partial}{\partial x_n})=g(\varphi^{-1}(x))$$

从而

$$\int_U\omega=\int_{\varphi(U)}g(\varphi^{-1}(x))\,dx_1\cdots dx_n$$

在另一组坐标卡(V,ψ)下假设

$$\omega=h(p)d\tilde{x}^1\wedge\cdots\wedge d\tilde{x}^n$$

则

$$\psi^{-1*}\omega(\frac{\partial}{\partial x_j}|_{\varphi(p)})=h(\psi^{-1}(x))$$

从而

$$\int_V\omega=\int_{\psi(V)}h(\psi^{-1}(x))\,dx_1\cdots dx_n$$

然后我们寻找h和g的关系. 注意到

$$h(p)d\tilde{x}^1\wedge\cdots\wedge d\tilde{x}^n=g(p)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

两边作用在$(\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^1},...,\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^n})$上, 可得

$$h(p)=g(p)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n(\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^1},...,\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^n})$$

再根据$\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^i}=\sum_{j=1}^n[J(\psi\circ\varphi^{-1})^{-1}]_{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}=\sum_{j=1}^n[J(\varphi\circ\psi^{-1})]_{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}$, 因此

$$h(p)=g(p)det(J(\varphi\circ\psi^{-1}))$$

从而

$$\int_V\omega=\int_{\psi(V)}g(\psi^{-1}(x))det(J(\varphi\circ\psi^{-1}))(\psi^{-1}(x))\,dx_1\cdots dx_n$$

令$\psi^{-1}(x)=\varphi^{-1}(y)$, 则通过变量代换公式可得

$$=\int_{\varphi(U\cap V)}g(\varphi^{-1}(y))\,dy_1\cdots dy_n$$

根据ω的支集在$U\cap V$中, 可知g的支集在$U\cap V$中, 因此$g\circ\varphi^{-1}$的支集在$\varphi(U\cap V)$中, 所以上式积分区域能变成$\varphi(U)$, 且不改变积分的值. 证毕

Proposition 14.4 R^n拉回映射下“被积函数”的不变性

D,E是R^n中的两个开的积分区域, $\varphi:\overline{D}\to\overline{E}$的光滑映射, 且$\varphi:D\to E$是保持定向或反转定向的微分同胚, 那么对$\overline{E}$上的任何n-形式$\omega$, 都有

$$\int_D\varphi^*\omega=\pm\int_E\omega$$

如果φ保持定向, 取正号. 否则取负号.

Proof:因为欧式空间的开子集能被单个坐标卡覆盖, 因此设

$$\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

根据Definition 14.1,

$$\int_E \omega = \int_E f dx_1 \cdots dx_n$$

又根据Proposition 12.14

$$\varphi^* \omega = f \circ \varphi det J\varphi dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

那么根据Definition 14.1,

$$\int_D \varphi^* \omega = \pm \int_D f \circ \varphi |det J\varphi| dx_1 \cdots dx_n$$

其中当φ保持定向, 即$det J\varphi > 0$恒成立时, 取正号. 如果反转定向, 即$det J\varphi < 0$, 取负号. 然后用Lebesgue积分的变量代换公式(参考[3])可得

$$\int_D \varphi^* \omega = \pm \int_{\varphi(D)} f dx_1 \cdots dx_n = \pm \int_E \omega$$

14.2　紧支n-形式的积分

Definition 14.5

设M是n维光滑流形, ω是M上具有紧支集的n-形式, 那么可以定义

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^m \int_M \psi_i \omega$$

其中U_i是定向坐标卡的坐标邻域对$supp\omega$的有限覆盖. ψ_i是从属于U_i的单位分解.

这里需要说说明的是, 选择的覆盖必须是定向坐标卡的坐标邻域. 根据上一章的知识, 我们知道光滑流形M可定向当且仅当存在一组覆盖M的定向坐标卡, 所以覆盖$supp\omega$的定向坐标卡是存在的.

Proposition 14.6

上述积分与坐标邻域和单位分解的选取无关

Hint: 两组单位分解求交集, 构造一个更细的单位分解

Proof:设有两个这样的单位分解, 即

$$\sum_{i=1}^k \int_M \psi_i \omega \qquad \sum_{j=1}^m \int_M \varphi_i \omega$$

考虑$A_{ij} = U_i \cap V_j$, 则$\cup_{i,j} A_{ij}$覆盖了$supp\omega$. 构造一组从属于A_{ij}的单位分解ρ_{ij}, 则作为支集在一个坐标邻域内的光滑形式$\psi_i \omega$, 我们有$\psi_i \omega = \sum_{t,j=1}^m \psi_i \rho_{tj} \omega$, 根据拉回映射的线性性我们知道作为紧支集在$U_i$中的光滑形式的积分,

$$\int_M \psi_i \omega = \sum_{t,j=1}^m \int_M \psi_i \rho_{tj} \omega$$

两边求和

$$\sum_{i=1}^k \int_M \psi_i \omega = \sum_{i,t,j} \int_M \psi_i \rho_{tj} \omega$$

$$= \sum_{t,j=1}^m \sum_{i=1}^k \int_M \psi_i \rho_{tj} \omega$$

内层的求和可以作为k个支集在V_j中的紧支n-形式的积分, 具有线性性, 因此

$$= \sum_{t,j=1}^{m} \int_M \sum_{i=1}^{k} \psi_i \rho_{tj}\omega = \sum_{t,j=1} \int_M \rho_{tj}\omega$$

同理可得

$$\sum_{j=1}^{m} \int_M \varphi_i\omega = \sum_{t,j=1} \int_M \rho_{tj}\omega$$

因此和单位分解的选取无关

Proposition 14.7

$F: M \to N$是微分同胚. ω是N上的最高次形式, 则

$$\int_M F^*\omega = \pm \int_N \omega$$

Proof: 先设$supp\omega$可被单个坐标卡(U, φ)覆盖, 则$(F^{-1}(V), \psi \circ F)$就是覆盖$suppF^*\omega$的保持定向(或反转定向)坐标卡(如果F保持定向则这个坐标卡保持定向, 否则反转定向). 不妨设是保持定向的. 则

$$\int_M F^*\omega = \int_{\psi(V)} (\psi \circ F)^{-1*} F^*\omega = \int_{\psi(V)} (F^{-1} \circ \psi^{-1})^* F^*\omega$$

$$= \int_{\psi(V)} \psi^{-1*}\omega = \int_N \omega$$

然后考虑一般的情形, 设$\omega = \sum_\alpha \psi_\alpha \omega$, 那么

$$\int_M F^*\omega = \int_M \sum_\alpha F^*(\psi_\alpha\omega) = \sum_\alpha \int_N \psi_\alpha\omega = \int_N \omega$$

14.3 Stokes定理

Theorem 14.8 Stokes's theorem

M是n维带边光滑流形. ω是M上紧支光滑的(n-1)-形式, 那么

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

等式右边严格意义上是$\int_{\partial M} \iota_{\partial M}^*\omega$, 即$\omega$在包含映射$\iota_{\partial M}$下的拉回在$\partial M$上的积分, 其中$\partial M$的定向选取为M的诱导定向(Stokes定向)

Proof: 我们先来证明$M = H^n$的情形, 设存在R使得$supp\omega \in [-R, R]^{n-1} \times [0, R]$. 则存在$H^n$上的光滑函数$f(x)$使得

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} f(x)_j dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

其中$\widehat{dx_j}$表示没有dx_j这个元素.

外微分运算一次得到

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

根据∧运算的性质, 内部求和中不为0的项仅有$i=j$, 从而

$$d\omega=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_j}\wedge\cdots\wedge dx_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(-1)^{j-1}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$$

这给出了

$$\int_{R_+^n}d\omega=\sum_{j=1}^{n}\int_{[-R,R]^{n-1}\times[0,R]}\frac{\partial f}{\partial x_j}(-1)^{j-1}\,dx_1\cdots dx_n$$

对第j项($1\le j\le n-1$), 我们用Fubini定理先对x_j积分:

$$\int_{-R}^{R}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,..,x_{j-1},x_j,..,x_n)\,dx_j=f(x_1,..,R,..,x_n)-f(x_1,..,-R,..,x_n)=0\qquad\text{因为这两个点都落在支集外面}$$

所以再对其他n-1个变量积分也还是0, 从而

$$\int_{R_+^n}d\omega=(-1)^{n-1}\int_{[-R,R]^{n-1}}\int_0^R\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_ndx_1\cdots dx_{n-1}=(-1)^n\int_{[-R,R]^{n-1}}f(x_1,..,x_{n-1},0)\,dx_1\cdots dx_{n-1}$$

另一方面, 我们要计算$\iota^*\omega\in\Omega^{n-1}(\partial H^n)$, 其系数为

$$\iota_{\partial M}^*\omega(\frac{\partial}{\partial x_1},..,\frac{\partial}{\partial x_{n-1}})=\omega(\frac{\partial}{x_1},..,\frac{\partial}{\partial x_{n-1}})=\sum_{j=1}^{n}f_j(x)dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_j}\wedge\cdots\wedge dx_n(\frac{\partial}{x_1},..,\frac{\partial}{\partial x_{n-1}})$$

$$=\sum_{j=1}^{n}f_j(x)\delta_{12\cdots(n-1)}^{I_j}$$

其中I_j表示前n个正整数去掉j之后升序排列. 对$1\le j\le n-1$, I_j都不是$(1,2,..,n-1)$的置换(因为里面少了j,多了n), 因此$\delta_{12\cdots(n-1)}^{I_j}=0$, 这意味着

$$\iota_{\partial M}^*\omega(\frac{\partial}{\partial x_1},..,\frac{\partial}{\partial x_{n-1}})=f_n(x_1,..,x_{n-1},0)$$

从而

$$\iota_{\partial M}^*\omega=f_n(x_1,..,x_{n-1},0)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{n-1}$$

这一点也可以从另一个角度解释:

$$\iota_{\partial M}^*\omega=\sum_{j=1}^{n}(f_j\circ\iota_{\partial M})\iota_{\partial M}^*(dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_j}\wedge\cdots\wedge dx_n)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}f_j(x_1,..,x_{n-1},0)d(x_1\circ\iota)\wedge\cdots\wedge\widehat{d(x_j\circ\iota_{\partial M})}\wedge\cdots\wedge d(x_n\circ\iota_{\partial M}))$$

注意到$x_n\circ\iota_{\partial M}=0$, 因此$d(x_n\circ\iota_{\partial M})=0$, 从而上述求和只有最后一项不是0, 且注意到$x_i\circ\iota_{\partial M}=x_i,1\le i\le n-1$, 所以：

$$\iota_{\partial M}^*\omega=f_n(x_1,.,x_{n-1},0)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{n-1}$$

因此它的积分就是

$$\int_{\partial H^n}f(x_1,...,x_{n-1},0)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{n-1}$$

我们注意到∂H^n和R^{n-1}在映射$\varphi(x_1,..,x_{n-1},0)=(x_1,..,x_{n-1})$下成为微分同胚, 因此$(\partial H^n,\varphi)$是$\partial H^n$的一个坐标卡, 且覆盖$suppf(x_1,.,x_{n-1},0)$, 又 R^{n-1}上有一个保持定向的光滑形式$\alpha=dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{n-1}$, 有序基$(\frac{\partial}{\partial x^1},..,\frac{\partial}{\partial x^{n-1}})$是

保持定向的，且

$$\varphi^*\alpha(\frac{\partial}{\partial x^1},..,\frac{\partial}{\partial x^{n-1}})=\alpha(\frac{\partial}{\partial x^1},..,\frac{\partial}{\partial x^{n-1}})=1>0$$

但是在∂H^n中，$(\frac{\partial}{\partial x^1},..,\frac{\partial}{\partial x^{n-1}})$保持定向当且仅当n为偶数，所以n是偶数时，$\varphi$保持定向，否则反转定向，因此根据流形上的积分的定义，拉回的时候要把定向考虑进去:

$$\int_{\partial H^n} f(x_1,...,x_{n-1},0)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{n-1}=(-1)^n\int_{R^{n-1}} f(\varphi^{-1}(x_1,.,x_{n-1}))\,dx_1\cdots dx_{n-1}$$

$$=(-1)^n\int_{R^{n-1}} f(x_1,.,x_{n-1},0)\,dx_1\cdots dx_{n-1}$$

又$f(x_1,..,x_{n-1},0)$的支集在$[-R,R]^{n-1}$中，从而

$$\int_{\partial H^n}\iota^*\omega=(-1)^n\int_{[-R,R]^{n-1}} f(x_1,.,x_{n-1},0)\,dx_1\cdots dx_{n-1}$$

于是

$$\int_{H^n} d\omega=\int_{\partial H^n}\omega$$

对于$M=R^n$的情形同理，这时候两边积分都是0.

然后我们考虑在某个坐标卡(U,φ)中紧支的光滑形式ω，不妨设$\varphi(U)=B^+(0,1)$，那么$\varphi(U)$在映射$g:\frac{x}{\sqrt{1+\|x\|^2}}$下微分同胚于$H^n$，因此不妨设$\varphi(U)=H^n$，且保持定向. 则有

$$\int_M d\omega=\int_{H^n}(\varphi^{-1})^*d\omega=\int_{H^n} d((\varphi^{-1})^*\omega)=\int_{\partial H^n}(\varphi^{-1})^*\omega=\int_{\partial M}\omega$$

坐标卡反转定向的情形同理.

然后我们考虑一般的带边流形M. 取一组坐标卡$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$，不妨设$\varphi_\alpha(U_\alpha)=R^n$或$H^n$，设覆盖$supp\omega$的有限个单位分解为$\psi_i$，根据定义有

$$\int_M d\omega=\sum_{i=1}^k\int_M\psi_i d\omega$$

$$=\int_{\partial M}\iota_{\partial M}^*\omega=\sum_{i=1}^k\int_{\partial M}\iota_{\partial M}^*(\psi_i\omega)=\sum_{i=1}^k\int_M d(\psi_i\omega)$$

$$=\sum_{i=1}^k\int_M d(\psi_i)\omega+\int_{i=1}^k\psi d\omega=\int_M d(\sum_{i=1}^k\psi_i)\omega+\int_M d\omega$$

$$=\int_M d(1)\omega+\int_M d\omega=\int_M d\omega$$

14.4 Exercise

Problem 14.1

考虑R^2上的光滑2-形式

$$\omega=xdy\wedge dz+y^2dz\wedge dx+zdx\wedge dy$$

计算

$$\int_{S^2}\iota_{S^2}^*\omega$$

Problem 14.2

M是n维定向无边流形, α, β分别是s-形式和(n-s)-形式, X是M上紧支的光滑向量场, 证明

$$\int_M (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta = -\int_M \alpha \wedge (\mathcal{L}_X \beta)$$

第十五章　Riemann流形

前面几章我们建立了关于光滑流形的一般框架, 现在我们来把这个框架应用到一类特殊的流形上.

15.1　Riemann度量

Definition 15.1

M是带边或不带边的n维光滑流形, g是M上的一个光滑2阶协变张量场, 记g_p是g在$p \in M$处的取值, g称为**Riemann度量**, 如果对任何$p \in M$, 均有如下条件成立

- 正定性:对任何$v \in T_pM$,$g_p(v,v) \geq 0$, 等号成立当且仅当$v = 0$
- 对称性:$g_p(u,v) = g_p(v,u)$, 对任何$u, v \in T_pM$成立

对任何$p \in M$, 取p附近的坐标卡(U, φ), 则g在U中可以写作

$$g = \sum_{i,j}^{n} g_{ij} dx^i \otimes dx^j \qquad g_{ij} \in C^\infty(M)$$

我们利用g的对称性, 两边分别作用$(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l})$和$(\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k})$, 就会得出

$$g_{kl} = g_{lk}$$

也就是说如果把g的系数看成一个矩阵, 则这个矩阵是对称阵.

然后我们考虑一般的$v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 则用正定性可以得出

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} v_i v_j \geq 0$$

且等号成立当且仅当$v_1 = \cdots = v_n = 0$, 这说明g的系数矩阵还是正定阵.

反过来给定一个正定阵$A = a_{ij}$和一个坐标卡(U, φ), 我们取这个坐标卡对应的对偶基$dx^1, .., dx^n$, 就能构造一个U上的光滑二阶协变张量场

$$g = \sum_{i,j} a_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

继而我们可以把它通过单位分解粘贴到一起, 变成M上的光滑2阶协变张量场, 这说明光滑流形上都存在Riemann度量.

Proposition 15.2

M是n维无边或带边光滑流形, 则M上必定存在Riemann度量

Proof:因为流形第二可数, 所以必定能够被可数个坐标卡覆盖, 取可数个能够覆盖M的坐标卡$(U_\alpha, V_\alpha, \varphi_\alpha)$, 那么可

以定义U_α上的一个2阶协变张量

$$g_\alpha = \sum_{i=1}^{n} dx_\alpha^i \otimes dx_\alpha^i$$

考虑从属于U_α的单位分解 $\{\psi_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}$, i.e $supp\psi_\alpha$ 是局部有限的, 且$supp\psi_\alpha \in U_\alpha$对任何$p \in M$成立, 且$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \psi_\alpha = 1, 0 \le \psi_\alpha \le 1$

自然, $\psi_\alpha g_\alpha$是一个定义在M上的2阶协变张量(因为$supp\psi_\alpha$含于 g_α的定义域), 因此考虑

$$g = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \psi_\alpha g_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \psi_\alpha \sum_{i=1}^{n} dx_\alpha^i \otimes dx_\alpha^i$$

根据局部有限性, 可知求和在任何一点都只有有限项, 因此是良定义的. 且显然有(若$p \notin U_\alpha$, 那么$\psi_\alpha = 0$)

$$g(X_p, Y_p) = \sum_{p \in U_\alpha} \psi_\alpha \sum_{i=1}^{n} dx_\alpha^i(X_p) dx_\alpha^i(Y_p)$$

$$= \sum_{p \in U_\alpha} \psi_\alpha \sum_{i=1}^{n} dx_\alpha^i(Y_p) dx_\alpha^i(X_p) = \sum_{p \in U_\alpha} \psi_\alpha \sum_{i=1}^{n} dx_\alpha^i \otimes dx_\alpha^i(Y_p, X_p) = g(Y_p, X_p)$$

因此g是**对称**的,接下来验证光滑半正定性: 任取一个点y. 再任取$X_y \in T_y M$, 只需考虑$y \in supp\psi_\alpha$对应的α(共有有限多个), 任取这样的一个α, 注意到y必定含于以上的某个坐标卡, 不妨设为$(U_\beta, V_\beta, \varphi_\beta)$, 那么$U_\beta \cap U_\alpha$, 因此必定存在一个矩阵 $B = (b_{jk})_{j,k=1}^{n}$(B和α, β的选取有关), 使得

$$dx_\alpha^i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} dx_\beta^k$$

而且B作为关于$p \in U_\beta \cap U_\alpha$的矩阵函数, 根据转移映射的光滑性可知B是光滑的, 这给出了

$$\sum_{i=1}^{n} dx_\alpha^i \otimes dx_\alpha^i = \sum_{i}^{n} (\sum_{k=1}^{n} b_{ik} dx_\beta^k) \otimes (\sum_{k=1}^{n} b_{ik} dx_\beta^k)$$

且是光滑协变2-张量场. 这对任何α都成立. 因此g是**光滑**的, 且

$$\sum_{i=1}^{n} dx_\alpha^i \otimes dx_\alpha^i(X_y, X_y) = \sum_{i}^{n} (\sum_{k=1}^{n} b_{ik} dx_\beta^k(X_y)) \times (\sum_{k=1}^{n} b_{ik} dx_\beta^k(X_y)) \ge 0$$

而在U_β上, 自然有

$$\sum_{i=1}^{n} dx_\beta^i \otimes dx_\beta^i(X_y, X_y) = \sum_{i=1}^{n} (dx_\beta^i(X_y))^2 \ge 0$$

结合$\psi_\alpha \ge 0$可得g是半正定的.

下面证明g是严格正定的, 对$y \in M$, 取ψ_α使得$\psi_\alpha(y) > 0$, 根据

$$g(X_y, X_y) \ge \psi_\alpha(y) \sum_{i=1}^{n} (X_y(dx_\alpha^i))^2$$

可以知道$g(X_y, X_y) = 0$必定给出$(dx_\alpha^i(X_y))^2 = 0$, 对任何$1 \le i \le n$成立, 根据线性代数知识可得$X_y = 0$, 因此g是**正定**的, 成为一个Riemann度量.

15.2 Riemann流形

上一节已经证明光滑流形上的Riemann度量是广泛存在的. 我们把光滑流形M和其上的某个Riemann度量g合起来, 记为(M, g), 称为**Riemann流形**

根据线性代数知识, 我们注意到g_p实际上是T_pM中的一个内积(注意到双线性性直接被“协变张量”这个条件所满足), 因此我们可以把内积空间中的概念搬到Riemann流形的切空间上来

Definition 15.3

对$v \in T_pM$, 定义v的**长度或模长或范数**为

$$\|v\| = \sqrt{g_p(v, v)}$$

称v是**单位向量**, 如果$\|v\| = 1$

$v, w \in T_pM$, 则存在唯一的$\theta \in [0, \pi]$满足

$$cos\theta = \frac{g_p(u, w)}{\|u\|\|w\|}$$

θ称为**u,w之间的夹角**, 如果$g_p(u, w) = 0$, 则称u,w是**正交的**

对于Riemann流形M, 如果S是M的嵌入子流形, 那么我们考虑拉回映射ι^*和S上的光滑2阶协变张量场$\iota^* g$, 则我们注意到任取$v, u \in T_pS$, 都有

$$\iota^* g_p(u, w) = g_p(d\iota(u), d\iota(v)) = g_p(d\iota(v), d\iota(u)) = \iota^* g_p(w, u)$$

$$\iota^* g_p(u, u) = g_p(d\iota_p u, d\iota_p u) \geq 0$$

又$d\iota_p$是单射, 所以上式取等号当且仅当u=0, 从而$\iota^* g$是S上的Riemann度量, 因此$(S, \iota^* g)$自然成为一个Riemann流形

Proposition 15.4 正交标架的存在性

(M, g)是n维Riemann流形,X_i是M的开子集U上的光滑标架, 那么存在另一组光滑标架E_i满足

$$< E_i\Big|_p, E_j\Big|_p >_g = \delta_{ij} \qquad span\{X_1, ..X_k\} = span\{E_1, ..., E_k\} \qquad \forall 1 \leq k \leq n$$

Proof: 同Gram-Schidt过程, 根据X_i是系数光滑可知E_i都是光滑的, 证毕.

15.3 切丛余切丛之间的丛同构

Riemann度量的一个应用是证明光滑流形的切丛和余切丛之间是丛同构的. 具体的说, 给出Riemann流形M上的一点p, 和$v \in T_pM$, 我们可以定义一个余切向量

$$u_p(w) = g_p(v, w) \qquad \forall w \in T_pM$$

根据p的任意性我们定义了M上的一个余切向量场, 仍记为u.给定一个坐标卡(U, φ), 我们可以找出这组坐标下切空间的基底$\frac{\partial}{\partial x^1}, .., \frac{\partial}{\partial x^n}$, 及其对偶基$dx^1, .., dx^n$, 然后我们可以获取$u_p$在基底$dx^i$下的系数$u_i$为

$$u_p(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p) = g_p(v, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p) = \sum_{k=1}^n g_{ki} v_k = \sum_{k=1}^n g_{ik} v_k$$

也就是说

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

根据g光滑可得右边关于p在U中光滑, 因此u_p 在基底dx^i下的系数在U中光滑, 因此u在U中光滑, 因此u是在M上光滑的余切向量场, 记为$\widehat{g}(v)$. 如果$\widetilde{g}(v) = \widetilde{g}(u)$, 那么可得

$$g_p(v_p, w) = g_p(u_p, w) \forall w \in T_pM$$

因此令$w = u_p - v_p$, 根据正定性可得$v_p = u_p$, 因此v=u, 所以$\widehat{g}$是单射.

反正, 如果有一个光滑的余切向量场ω, 我们可以定义一个向量场v满足

$$g_p(v_p, w) = \omega_p(w) \qquad \forall w \in T_pM$$

我们把v记为$\widetilde{g}(\omega)$, 显然$\widehat{g}$是单射, 假如$v = \widetilde{g}(\omega) = \widetilde{g}(\eta) = u$, 那么

$$g_p(u_p, w) = g_p(v_p, w) \qquad \forall w \in T_pM$$

令$w = u_p - v_p$, 则可得$g_p(u_p - v_p, u_p - v_p) = 0$, 因此$u_p = v_p$恒成立, 所以u=v

我们设在局部坐标卡(U, φ)中, $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i$,$w = \sum_{i=1}^\infty w_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 那么

$$\sum_{i,j=1}^n g_{ij} v_i w_j = g_p(v_p, w) = \omega_p(w) = \sum_{i=1}^n \omega_i w_i$$

固定k, 令$w_i = \delta_{ik}$, 那么

$$\sum_{i=1}^n g_{ki} v_i = \sum_{i=1}^n g_{ik} v_i = \omega_k$$

因此

$$\begin{pmatrix} v_1(p) \\ \vdots \\ v_n(p) \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1(p) \\ \vdots \\ \omega_n(p) \end{pmatrix} \qquad (2)$$

又因为g光滑, 所以系数矩阵G也光滑, 又G正定, 所以G^{-1}在U中光滑, 所以$v_i(p)$在U中光滑, 所以$\widetilde{g}(\omega)$是M上的光滑向量场. 而且显然, 当$\widetilde{g}$限制在T_pM^*上时, 是到T_pM的线性映射, 又$\widetilde{g}$是单的, 所以根据这两个空间维数相同可知是线性同构.

又我们发现$\widehat{g}$和$\widetilde{g}$互为逆映射, 所以$\widehat{g}$是双射.

Proposition 15.5

$\widehat{g}$是$TM \to T^*M$的丛同构.

Proof: 我们只需验证$\widehat{g}$是光滑的, 然后用Proposition 10.15(光滑双射丛同态是丛同构), 就能得出结论.

任取TM, T^*M上的坐标卡,$(U, \tilde{\varphi})$, $(U, \widehat{\varphi})$, 其中

$$\tilde{\varphi}(v_p = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p) = (\varphi_p, v_1, ..., v_n) \qquad \widehat{\varphi}(\omega_p = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_p^i) = (\varphi_p, \omega_1, .., \omega_n)$$

前文已经给出$\widetilde{g}(v)$的关于dx^i的系数为

$$g_p(v_p, \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p) = \sum_{k=1} g_{ki}v_k$$

因此

$$\widetilde{\varphi}\circ\widehat{g}\circ\widetilde{\varphi}^{-1}(x_1,..,x_n,v_1,..,v_n) = (x_1,...,x_n,\sum_{k=1} g_{k1}\circ\varphi^{-1}(x)v_k,..,\sum_{k=1}^{n} g_{kn}\circ\varphi^{-1}(x)v_k)$$

注意到$g_{ij}\circ\varphi^{-1}$依然光滑, 所以$\widetilde{g}$是光滑映射, 因此成为丛同构

15.4 函数的梯度

通过上一节的(1)(2)我们知道, 给定基底$(\frac{\partial}{\partial x^i})$和对偶基$(dx^i)$, 和一个向量场$v$,则$\widehat{g}(v)$在$(dx^i)$下的坐标向量就是G和v在$(\frac{\partial}{\partial x^i})$的坐标向量的矩阵乘法. $\widetilde{g}^{-1}(\omega) = \tilde{g}(\omega)$在在$(\frac{\partial}{\partial x^i})$的坐标向量就是$G^{-1}$和$\omega$在$dx^i$下的坐标向量的矩阵乘法

为了方便, 我们也记为

$$\omega^\sharp = \widetilde{g}^{-1}(\omega) \qquad v^\flat = \widetilde{g}(v)$$

其中♯的发音为sharp, ♭的发音为flat. 我们有时候也把同构$\widetilde{g}$称为**音符同构**,接下来我们考虑一种特殊的向量场

Definition 15.6

M是Riemann流形, g为其Riemann度量,$f\in C^\infty(M)$, 那么定义**f的梯度**, 记为$gradf$, 为

$$gradf = (df)^\sharp$$

如果记g^{ij}是G^{-1}是各个元素(注意也是对称阵), 则根据df在局部为$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$, 可以给出

$$gradf = \sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}$$

根据♯的定义, 我们可以给出gradf的如下性质:

Proposition 15.7

对任何M上的光滑向量场X, 都有

$$g_p(gradf, X) = X_pf$$

Proof: 根据定义, gradf满足对任何$w\in T_pM$, 有

$$g_p(gradf_p, w) = df(w)$$

令$w = X_p$, 再根据

$$df(X_p) = df_p(\sum_{i=1}^n X_i\frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum_{i=1}^n X_i\frac{\partial f}{\partial x^i} = X_pf$$

可以立即得出结论

Corollary 15.8

(M,g)是Riemann流形, f是M上的光滑函数, c是f的正则值, $p\in f^{-1}(c)$是f的正则点.

- 设$v\in T_pM$是单位向量, 那么满足vf极大值的v与$gradf$共线
- $gradf$和$f^{-1}(c)$是正交的

Proof:(a)

$$vf = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p$$

记$x = (v_1, .., v_n), y = (\frac{\partial f}{\partial x^1}\Big|_p, .., \frac{\partial f}{\partial x^n}\Big|_p)$, 则问题等价于求解

$$max < x, y > \qquad x^T G x = 1$$

又注意到G是正定阵, 因此可以开根号, 记正定阵U满足$U^2 = G$, 所以

$$< x, y > = < U^{-1}Ux, y > = < Ux, U^{-1\,T} y > = < Ux, U^{-1}y >$$

又U是$R^n \to R^n$双射, 因此换元$Ux = z, u = U^{-1}y$, 则问题变成

$$max < z, u > \qquad \|z\| = 1$$

这个问题是简单的, Cauchy-Schwartz不等式给出了最大值当且仅当

$$z = \frac{u}{\|u\|}$$

i.e

$$Ux = \frac{U^{-1}y}{\|U^{-1}y\|}$$

$$x = \frac{U^{-2}y}{\|U^{-1}y\|} = \frac{G^{-1}y}{\|Uy\|}$$

而$G^{-1}y$恰好是$gradf\big|_p$, 证毕

(b)正则水平集定理给出了$f^{-1}(c)$是嵌入子流形, 因此任取$v \in T_p(f^{-1}(c))$, 我们知道$vf = 0$(因为f在$f^{-1}(c)$上是常数), 结合gradf的性质可以给出

$$< gradf, v >_g = vf = 0$$

15.5 体积形式与边界定向

Theorem 15.9

(M, g)是定向的Riemann流形, 存在唯一的光滑且保持定向的n-形式ω_g, 称为**Riemann体积形式**, 满足

$$\omega_g(E_1, ..., E_n) = 1$$

M上的任何正交的局部标架成立.

Proof: 我们知道光滑流形上的局部标架是广泛存在的,i.e. 对任何一个$p \in M$, 存在p的邻域U使得U上有一个光滑标架, 详见Theorem 8.5. 然后通过Proposition 15.4我们就得到了U上的正交标架, 通过调换顺序可设这个正交标架是保持定向的, 记为$E_1, .., E_n$, 考虑在U上的对偶基$\epsilon^1, .., \epsilon^n$, 定义

$$\omega = \epsilon^1 \wedge \cdots \wedge \epsilon^n$$

那么根据p的定义, ω在每个点p处都有定义且在p的某个邻域中光滑, 需要说明ω是良定义的(不依赖于正交标架的

选取). 设有另一组保持定向正交标架$\tilde{E}_1, .., \tilde{E}_n$, 和对偶基$\tilde{\epsilon^i}$和微分形式

$$\tilde{\omega}_g = \tilde{\epsilon^1} \wedge \cdots \wedge \tilde{\epsilon^n}$$

那么存在矩阵A使得

$$\tilde{E}_i = A_{ij} E_j$$

根据$\tilde{E}_i$也标准正交且保持定向可知A是$SO(n)$中的元素. 从而

$$\omega_g(\tilde{E}_1, .., \tilde{E}_n) = det(\epsilon^i(\sum_{k=1}^n A_{jk} E_k)) = det(A_{ij}) = detA = 1 = \tilde{\omega}_g(\tilde{E}_1, .., \tilde{E}_n)$$

因此ω的定义不依赖于标价的选取. 从而是M上的光滑的n-形式, 且保持定向(因为把定向标架映射为正数). 下面证明唯一性:

考虑U上的保持定向的正交标架, 记为$E_1, .., E_n$, 考虑在U上的对偶基$\epsilon^1, .., \epsilon^n$, 则根据$\Lambda^n(T_p^* M)$是一维空间可知

$$\omega_p = f(p)\epsilon^1 \wedge \cdots \wedge \epsilon^n$$

又根据ω光滑可得f是光滑函数, 两边作用于$E_1, ..E_n$上可知f=1在U中恒成立, 因此

$$\omega = \epsilon^1 \wedge \cdots \wedge \epsilon^n$$

任意满足题意的ω都具有等号右边的形式, 因此是唯一的.

Proposition 15.10

(M, g)是n维光滑Riemann流形, 那么在每个坐标卡(U, φ)中, 体积形式ω_g都有如下坐标表示

$$\omega_g = \sqrt{det(g_{ij})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

Proof: 把$\sqrt{det(g_{ij})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$记为$\eta$, 我们只需证$\eta$把保持定向的正交标架映射为1, 根据前面的唯一性就得到了结论

注意到$dx^1, .., dx^n$是(U, φ)中的一组对偶基, $E_1, .., E_n$是任何一组局部的正交标架, 对偶基为$\epsilon^1, .., \epsilon^n$, 则存在矩阵$B$使得

$$E_i = \sum_{j=1}^n B_{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

根据$< E_i, E_j >_g = \delta_{ij}$可知

$$\sum_{k,l} g_{kl} B_{ik} B_{jl} = \delta_{ij}$$

这给出了

$$B^T G B = I_n$$

两边取行列式可得

$$detB = \sqrt{det(g_{ij})}^{-1}$$

则根据Proposition 12.7可得

$$\eta(E_1, .., E_n) = \sqrt{det(g_{ij})} det(B) \eta(\frac{\partial}{\partial x^1}, .., \frac{\partial}{\partial x^n}) = \sqrt{det(g_{ij})} det(B) = 1$$

Proposition 15.11

(M,g)是n维Riemann流形, S是M的浸入子流形, $\tilde{g}$是S上通过g诱导的Riemann度量, 设N是沿S的光滑单位法向量场, 那么在N诱导的S的定向下, $(S,\tilde{g})$的体积形式为

$$\omega_{\tilde{g}} = \iota_S^*(i_N\omega_g)$$

Proof: 取$E_1,..,E_{n-1}$为S中保持定向的标准正交标架, 其中保持定向意为

$$\omega_g(N, d\iota_S E_1,..,d\iota_S E_{n-1}) = 1$$

注意到

$$\iota_S^*(i_N\omega_g)(E_1,..,E_{n-1}) = \omega_g(N, d\iota_S E_1,..,d\iota_S E_{n-1}) = 1$$

所以根据体积形式的唯一性, $\iota_S^*(i_N\omega_g)$就是$(S,\tilde{g})$的体积形式

Proposition 15.12

(M,g)是n维带边Riemann流形, 存在唯一的在∂M上指向外的光滑单位法向量场N

Proof: 任意光滑流形都有边界定义映射(详见第五章)f. 满足$f \geq 0, \partial M = f^{-1}(0)$且0是f的正则值. 根据Corollary 15.8, $gradf$就是和∂M正交的向量场, 因此是法向量场. 又∂M是嵌入子流形, 所以$gradf$在∂M上还是光滑的. 又$gradf \neq 0$恒成立, 且

$$gradf\big|_p f = \sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} > 0 \qquad \forall p \in \partial M$$

其中g^{ij}是g_{ij}的逆矩阵, 因此还是正定的. 上式的严格不等号是因为$(\frac{\partial f}{\partial x^1},..,\frac{\partial f}{\partial x^n})$不是0向量, $gradf\big|_p = 0$, 和$gradf$在∂M上非0矛盾. 又f本身是边界定义映射, 且$gradf\big|_p f > 0$, 根据Theorem 5.14,, $gradf$在$p \in \partial M$上处处指向内, 因此

$$-\frac{gradf}{\|gradf\|}$$

就是光滑的单位外法向量场.

15.6 Riemann流形上的积分

设(M,g)是Riemann流形, 根据体积形式的存在唯一性, 我们把ω_g记作dV_g, 如果把$C^\infty(M)$和$\Omega^n(M)$看成M上rank为1的向量丛, 那么考虑映射

$$*f = f dV_g \qquad C^\infty(M) \to \Omega^n(M)$$

显然$*$是双射, 且光滑, 所以$*$是丛同构.

然后考虑

$$\beta(X) = i_X dV_g \qquad \mathscr{X}(M) \to \Omega^{n-1}(M)$$

显然β是光滑双射, 从而也是丛同构.

Proposition 15.13

(M,g)是Riemann流形, S是M的余维数为1的浸入子流形, 定向由单位法向量场N确定. $\tilde{g}$是S上由g诱导的度量, 则

$$\iota_S^*(\beta(X)) = < X, N >_g dV_{\tilde{g}}$$

Proof: 定义

$$X^{\perp} =< X, N >_g N \qquad X^{\top} = X - X^{\perp}$$

i.e 我们把X分成平行于N的部分和垂直于N的部分. 从而

$$\beta(X) = \beta(X^{\perp}) + \beta(X^{\top}) = i_{X^{\perp}} dV_g + i_{X^{\top}} dV_g$$

两边作用ι_S^*给出了

$$\iota_S^*(\beta(X)) =< X, N >_g \iota_S^*(i_N dV_g) + \iota_S^*(i_{X^{\top}} dV_g)$$

$$=< X, N >_g dV_{\tilde{g}} + \iota_S^*(i_{X^{\top}} dV_g)$$

只需证最后一项为0, 对任何正交的标架$E_1, .., E_{n-1}$,

$$\iota_S^*(i_{X^{\top}} dV_g)(E_1, .., E_{n-1}) = dV_g(X^{\top}, d\iota_S E_1, .., d\iota_S E_{n-1})$$

又$X_p^{\top}$和N_p正交, 所以$X_p^{\top} \in span\{d\iota_S E_1, .., d\iota_S E_{n-1}\}$, 因此$(X^{\top}, d\iota_S E_1, .., d\iota_S E_{n-1})$线性相关, 因此$dV_g$作用在其上为0, 证毕

Definition 15.14 散度

$$divX = *^{-1} d(\beta(X)) \qquad \mathscr{X}(M) \to C^{\infty}(M)$$

从而

$$(divX)dV_g = d(\beta(X)) = d(i_X dV_g)$$

对R^n的情形, 设向量场$F = (F_1, ..., F_n)$, 则

$$\beta(F) = i_F(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i=1} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

$$d(\beta(F)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge \cdots dx_n$$

因此

$$divF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

Riemann流形上有特殊的结构:内积. 因此我们可以建立正交的概念和内外法向量的概念. 根据我们在欧式空间中的经验, 我们现在可以证明数学分析中的Gauss定理

Theorem 15.15 Gauss's Theorem

(M, g)是定向的Riemann流形, 对M上的任意紧支光滑向量场X,

$$\int_M (divX) dV_g = \int_{\partial M} < X, N >_g dV_{\tilde{g}}$$

Proof:直接使用Stoke定理

$$\int_M (divX) dV_g = \int_M d(i_X dV_g) = \int_{\partial M} \iota_{\partial M}^*(i_X dV_g) = \int_{\partial M} < X, N >_g dV_{\tilde{g}}$$

15.7 Exercise

Problem 15.1

(M,g)是n维Riemann流形, X是M上的光滑向量场, 证明在局部坐标卡(U,φ)下,

$$div(X)=\frac{1}{\sqrt{detg}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}(X_i\sqrt{detg_{ij}})$$

Problem 15.2

(M,g)是n维Riemann流形, X是M上的光滑向量场, $f\in C^\infty(M)$, 证明

$$<gradf,X>_g=\sum_{k=1}^{n}X_k\frac{\partial f}{\partial x^k}\qquad div(fX)=fdivX+<gradf,X>_g$$

Problem 15.3

(M,g)是n维Riemann流形, X是M上的完备向量场, Ω是M的开子集, ϕ_t是X生成的流, 对任何$\rho\in C^\infty(R\times M)$, 证明

$$\frac{d}{dt}\int_{\phi_t(\Omega)}\rho_t dV_g=\int_{\phi_t(\Omega)}\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho_t X)\,dV_g$$

Problem 15.4

(M,g)是n维Riemann流形, X是M上的光滑向量场, N是沿∂M的单位外法向量场. $f\in C^\infty(M)$, $\tilde{g}$为∂M上由g诱导的Riemann度量. 证明分部积分公式

$$\int_M<gradf,X>_g dV_g=\int_{\partial M}f<X,N>_g dV_{\tilde{g}}-\int_M fdivX\,dV_g$$

Problem 15.5

(M,g)是n维Riemann流形, $u\in C^\infty(M)$, 定义

$$\triangle u=div(gradu)$$

证明$\triangle u$在局部坐标卡(U,φ)下有表示

$$\triangle u=\frac{1}{\sqrt{detg}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sum_{j=1}^{n}g^{ij}\sqrt{detg}\frac{\partial u}{\partial x^j})$$

Reamrk:应该注意的是, 有的文献将上述定义的相反数作为laplace算子的定义, 这里我们采取和欧式空间一致的定义方法, 不加负号

参考文献

[1] MUNKRES J R. Topology[M]. 2nd ed. Edinburgh: Pearson Education Limited, 2014.

[2] LEE J M. Introduction to Smooth Manifolds[M]. 2nd ed. New York: Springer, 2012.

[3] FOLLAND G B. Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications[M]. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1999.

[4] 梅加强. 流形与几何初步[M]. 2版. 北京：科学出版社，2025：307.

[5] http://staff.ustc.edu.cn/ wangzuoq/Courses/23F-Manifolds/index.html