LAPORAN TUGAS BESAR I

IF2123 ALJABAR LINEAR DAN GEOMETRI

Sistem Persamaan Linier, Determinan, dan Aplikasinya

Disusun oleh:

Farhan Nafis Rayhan (13522037)

Adril Putra Merin (13522068)

Naufal Adnan (13522116)

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung

2022

DAFTAR ISI

BAB I

DESKRIPSI MASALAH

I. Tujuan

Tugas besar ini dibuat untuk memenuhi tugas besar I mata kuliah IF2123 Aljabar Linear dan Geometri. Tujuan dari tugas besar ini adalah sebagai berikut.

1. Membuat satu atau lebih *library* yang diimplementasikan dalam bahasa Java untuk:
    - Menentukan solusi sistem persamaan linear (SPL) dengan metode eliminasi gauss, metode eliminasi gauss-jordan, metode matriks balikan, dan kaidah cramer (khusus untuk n buah peubah dan n buah persamaan).
    - Menentukan determinan matriks dengan metode reduksi baris dan ekspansi kofaktor.
    - Menentukan matriks invers dari sebuah matriks persegi.
2. Menggunakan *library* yang dibuat untuk menyelesaikan persoalan yang dimodelkan dalam SPL, yaitu:
    - Menentukan solusi persoalan interpolasi polinom.
    - Menentukan solusi persoalan interpolasi bicubic spline.
    - Menentukan solusi persoalan regresi linear berganda.

II. Spesifikasi

1. Program dapat menerima masukan (*input*) baik dari *keyboard* maupun membaca masukan dari *file text*. Untuk SPL, masukan dari *keyboard* adalah m, n, koefisien a_{ij} , dan b_i. Masukan dari *file* berbentuk matriks *augmented* tanpa tanda kurung, setiap elemen matriks dipisah oleh spasi. Misalnya,

    3 4.5 2.8 10 12

    -3 7 8.3 11 -4

    0.5 -10 -9 12 0

2. Untuk persoalan menghitung determinan dan matriks balikan, masukan dari *keyboard* adalah n dan koefisien a_{ij}. Masukan dari *file* berbentuk matriks, setiap elemen matriks dipisah oleh spasi. Misalnya,

    3 4.5 2.8

    -3 7 8.3

    0.5 -10 -9

    Luaran (*output*) disesuaikan dengan persoalan (determinan atau invers) dan penghitungan balikan/invers dilakukan dengan metode matriks balikan dan adjoin.

3. Untuk persoalan interpolasi, masukannya jika dari *keyboard* adalah n, (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_n, y_n), dan nilai x yang akan ditaksir nilai fungsinya. Jika masukannya dari *file*, maka titik-titik dinyatakan pada setiap baris tanpa koma dan tanda kurung. Masukan

kemudian dilanjutkan dengan satu buah baris berisi satu buah nilai x yang akan ditaksir menggunakan fungsi interpolasi yang telah didefinisikan. Misalnya jika titik-titik datanya adalah (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513) dan akan mencari nilai y saat x = 8.3, maka di dalam *file text* ditulis sebagai berikut:

8.0 2.0794

9.0 2.1972

9.5 2.2513

8.3

4. Untuk persoalan regresi, masukannya jika dari *keyboard* adalah n (jumlah peubah x), m (jumlah sampel), semua nilai-nilai x_{1i}, x_{2i}, …, x_{ni}, nilai y_i, dan nilai-nilai x_k yang akan ditaksir nilai fungsinya. Jika masukannya dari *file*, maka titik-titik dinyatakan pada setiap baris tanpa koma dan tanda kurung.

5. Untuk persoalan SPL, luaran program adalah solusi SPL. Jika solusinya tunggal, tuliskan nilainya. Jika solusinya tidak ada, tuliskan solusi tidak ada, jika solusinya banyak, maka tuliskan solusinya dalam bentuk parametrik (misalnya $x_4 = -2$, $x_3 = 2s - t$, $x_2 = s$, dan $x_1 = t$).

6. Untuk persoalan polinom interpolasi dan regresi, luarannya adalah persamaan polinom/regresi dan taksiran nilai fungsi pada x yang diberikan. Contoh luaran untuk interpolasi adalah

$$f(x) = -0.0064x^2 + 0.2266x + 0.6762, \quad f(5) = \ldots$$

dan untuk regresi adalah

$$f(x) = -9.5872 + 1.0732x_1, \quad f(x_k) = \ldots$$

7. Untuk persoalan *bicubic spline interpolation*, masukan dari *file text* (.txt) yang berisi matriks berukuran 4 x 4 yang berisi konfigurasi nilai fungsi dan turunan berarah disekitarnya, diikuti dengan nilai a dan b untuk mencari nilai $f(a, b)$.

   Misalnya jika nilai dari $f(0, 0)$, $f(1, 0)$, $f(0, 1)$, $f(1, 1)$, $f_x(0, 0)$, $f_x(1, 0)$, $f_x(0, 1)$, $f_x(1, 1)$, $f_y(0, 0)$, $f_y(1, 0)$, $f_y(0, 1)$, $f_y(1, 1)$, $f_{xy}(0, 0)$, $f_{xy}(1, 0)$, $f_{xy}(0, 1)$, $f_{xy}(1, 1)$ berturut-turut adalah 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 serta nilai a dan b yang dicari berturut-turut adalah 0.5 dan 0.5 maka isi *file text* ditulis sebagai berikut:

   1 2 3 4

   5 6 7 8

   9 10 11 12

   13 14 15 16

   0.5 0.5

   Luaran yang dihasilkan adalah nilai dari $f(0.5, 0.5)$.

8. Luaran program harus dapat ditampilkan pada layar komputer dan dapat disimpan ke dalam *file*.
9. Bahasa program yang digunakan adalah Java. Anda bebas untuk menggunakan versi java apapun dengan catatan di atas java versi 8 (8/9/11/15/17/19/20).
10. Program tidak harus berbasis GUI, cukup *text-based* saja, namun boleh menggunakan GUI (memakai kakas *Eclipse* misalnya).
11. Program dapat dibuat dengan pilihan menu. Urutan menu dan isinya dipersilakan dirancang masing-masing. Misalnya, menu:

    MENU

    1. Sistem Persamaaan Linier
    2. Determinan
    3. Matriks balikan
    4. Interpolasi Polinom
    5. Interpolasi Bicubic Spline
    6. Regresi linier berganda
    7. Keluar

    Untuk pilihan menu nomor 1 ada sub-menu lagi yaitu pilihan metode:

    1. Metode eliminasi Gauss
    2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
    3. Metode matriks balikan
    4. Kaidah Cramer

    Begitu juga untuk pilihan menu nomor 2 dan 3.

BAB II

TEORI SINGKAT

I. Metode Eliminasi Gauss

Metode eliminasi gauss dikenal sebagai salah satu metode untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dan memecahkan matriks dengan mengurangi atau mengeliminasi variabel-variabel dalam sistem tersebut. Berikut langkah-langkah untuk menyelesaikan solusi persamaan dengan metode eliminasi gaus.

1. Bentuk matriks augmented

   Matriks augmented adalah matriks yang terdiri dari matriks koefisien dari sistem persamaan ditambah dengan vektor kolom hasil (vektor konstan). Contoh:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 8 \\ -3x - y + 2z &= -11 \\ -2x + y + 2z &= -3 \end{aligned} \quad \text{Matriks augmented} \rightarrow \quad \left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right|$$

2. Melakukan Operasi Baris Elementer (OBE)

   Operasi Baris Elementer (OBE) dilakukan dengan mengalikan sebuah baris dengan konstanta tidak nol, menukarkan dua buah baris, dan/atau menambahkan sebuah baris dengan kelipatan baris lainnya. OBE ini dilakukan sampai terbentuk sebuah matriks eselon baris, yaitu matriks yang memiliki *leading one* di setiap barisnya kecuali baris yang seluruhnya nol.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{OBE}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

3. Melakukan substitusi mundur (backward substitution)
   Substitusi mundur dilakukan setelah terbentuk matriks eselon baris dimulai dari baris terakhir dan bergerak ke atas.

II. Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Sama halnya dengan metode eliminasi gauss, untuk menyelesaikan SPL dapat digunakan metode eliminasi gauss-jordan yang merupakan pengembangan metode eliminasi gauss. Langkah-langkah pada eliminasi gauss-jordan juga sama halnya dengan eliminasi gauss. Namun, operasi baris elementer (OBE) pada metode eliminasi gauss-jordan dilakukan sampai terbentuk sebuah matriks eselon baris tereduksi, yaitu sebuah matriks eselon baris yang memiliki semua nilai nol di bawah dan di atas *leading one*-nya. Dalam eliminasi gauss-jordan tidak diperlukan lagi substitusi secara mundur untuk memperoleh nilai-nilai variabel. Nilai variabel langsung diperoleh dari matriks augmented akhir (jika solusinya unik), atau dalam bentuk parameter terhadap solusi variabel yang lain. Contoh:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ 4x + 7y + 2z &= 2 \\ 3x + 5y + 2z &= 2 \end{aligned} \quad \text{Matriks Augmented} \rightarrow \quad \left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \end{array}\right| \quad \text{–OBE}\rightarrow \quad \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/32 \end{array}\right| \quad \text{–OBE}\rightarrow \quad \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 15/32 \\ 0 & 1 & 0 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/32 \end{array}\right|$$

Dari bentuk matriks eselon baris tereduksi tersebut kita mendapat solusi dari SPL kita, yaitu x = 15/32, y = -1/8, dan z = 1/32.

III. Determinan

Determinan adalah suatu nilai skalar yang diperoleh dari sebuah matriks persegi (matriks yang memiliki jumlah baris dan kolom yang sama) dan memiliki banyak aplikasi dalam matematika, ilmu fisika, ilmu komputer, dan berbagai bidang lainnya. Determinan matriks persegi umumnya dinyatakan dengan simbol "det(A)" atau "|"A|". Determinan memiliki berbagai fungsi seperti menentukan apakah matriks memiliki solusi unik dalam sistem persamaan linear. Jika determinan nol, maka matriks tersebut tidak memiliki invers, dan sistem persamaan mungkin memiliki solusi tak terbatas atau tidak ada solusi sama sekali. Selain itu, determinan juga dapat digunakan untuk menentukan apakah matriks adalah matriks singular atau non singular. Matriks singular memiliki determinan nol, sedangkan matriks nonsingular memiliki determinan yang tidak sama dengan nol.

IV. Matriks Balikan

Inverse matrix, atau yang sering pula disebut dengan balikan, adalah suatu matriks persegi yang merupakan balikan dari matriks persegi lainya. Untuk suatu matriks A, inversnya yang dituliskan sebagai A^{-1} memenuhi $AA^{-1} = I$. Setiap matriks persegi memiliki invers yang unik, kecuali untuk matriks yang memiliki determinan 0. Matrix yang tidak memiliki invers sering disebut pula dengan matriks singular.

Invers suatu matriks dapat dicari dengan menggunakan metode Gauss-Jordan. Hal ini dapat dilakukan dengan cara menerapkan operasi baris elementer (OBE) pada kedua ruas *[A|I]* hingga diperoleh *[I|A^{-1}].* Apabila saat melakukan OBE terdapat suatu baris yang isinya 0, bisa disimpulkan bahwa matriks tersebut merupakan singular.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right]$$

Invers matriks juga dapat digunakan untuk mencari solusi suatu SPL, metode ini disebut dengan Metode Balikan. Misalkan terdapat suatu SPL dengan matriks koefisien A dan hasil B, maka solusinya dapat dicari dengan

$$Ax = b \rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \rightarrow Ix = A^{-1}b \rightarrow x = A^{-1}b$$

Apabila matriks A singular, solusi dari SPL non-homogen tidak dapat dicari karena ia hanya akan memiliki solusi unik apabila ia memiliki Inverse. Sedangkan untuk SPL homogen, ia hanya akan memiliki solusi trivial jika A memiliki invers. jika tidak, ia akan punya pula solusi non-trivial.

V. Matriks Kofaktor

Matriks kofaktor adalah matriks yang dihasilkan dari sebuah matriks persegi dengan menggantikan setiap elemen dalam matriks tersebut dengan kofaktornya yang sesuai. Kofaktor adalah nilai determinan dari matriks yang dihasilkan dengan menghilangkan baris dan kolom yang mengandung elemen tersebut, dikalikan dengan faktor penentu yang merupakan alternatif dari +1 atau -1, tergantung pada posisi elemen dalam matriks awal. Untuk matriks A dengan ukuran n x n, matriks kofaktor dibentuk oleh semua kofaktor dari elemen-elemen matriks A. Matriks kofaktor A dinotasikan sebagai C atau C(A) dan memiliki ukuran yang sama dengan matriks A.

VI. Matriks Adjoin

Matriks Adjoin adalah transpose dari matriks kofaktor. Salah satu metode untuk menentukan Invers matriks adalah melalui Matriks Adjoin, tepatnya melalui rumus

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A)$$

Untuk menghitung matriks adjoin, kita perlu menghitung kofaktor dari matriks A terlebih dahulu. Kofaktor dari elemen Aij adalah determinan dari matriks yang diperoleh dengan menghilangkan baris i dan kolom j dari matriks A, dikalikan dengan faktor penentu yang tergantung pada posisi elemen tersebut. Setelah kita memiliki semua kofaktor, kita dapat menyusunnya ke dalam matriks dan transposenya.

VII. Kaidah Cramer

Kaidah Cramer adalah metode yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear berukuran n x n dengan matriks koefisien yang berupa matriks persegi. Metode ini memanfaatkan determinan matriks koefisien dan melibatkan perhitungan untuk menentukan nilai setiap variabel dalam sistem persamaan linear. Kaidah Cramer dapat digunakan ketika matriks koefisien memiliki determinan yang tidak sama dengan nol, sehingga matriks tersebut adalah matriks invers yang valid.

Jika Ax = b adalah SPL yang terdiri dari n persamaan linier dengan n peubah (variabel) sedemikian sehingga det(A) ≠ 0, maka SPL tersebut memiliki solusi yang unik yaitu:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

yang dalam hal ini, Aj adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri pada kolom ke-j dari A dengan entri dari matriks

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

VIII. Interpolasi Polinom

Interpolasi polinom adalah metode untuk mengestimasi nilai-nilai antara titik titik data yang ada atau untuk memprediksi nilai di luar rentang data yang telah diberikan. Polinom interpolasi derajat n yang menginterpolasi titik-titik (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). adalah berbentuk $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Jika hanya ada dua titik, (x_0, y_0) dan

(x_1, y_1), maka polinom yang menginterpolasi kedua titik tersebut adalah $p_1(x) = a_0 + a_1x$ yaitu berupa persamaan garis lurus. Jika tersedia tiga titik, (x_0, y_0), (x_1, y_1), dan (x_2, y_2), maka polinom yang menginterpolasi ketiga titik tersebut adalah $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ atau persamaan kuadrat dan kurvanya berupa parabola. Jika tersedia empat titik, (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), dan (x_3, y_3), polinom yang menginterpolasi keempat titik tersebut adalah $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, demikian seterusnya. Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat n untuk n yang lebih tinggi asalkan tersedia $(n+1)$ buah titik data. Dengan menyulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan polinom $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ untuk $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, akan diperoleh n buah sistem persamaan lanjar dalam $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$$\begin{gathered}
a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\
a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\
\ldots \qquad \ldots \\
a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n
\end{gathered}$$

Solusi sistem persamaan lanjar ini, yaitu nilai a_0, a_1, …, a_n, diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang sudah anda pelajari. Sebagai contoh, misalkan diberikan tiga buah titik yaitu (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513). Tentukan polinom interpolasi kuadratik lalu estimasi nilai fungsi pada $x = 9.2$. Polinom kuadratik berbentuk $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Dengan menyulihkan ketiga buah titik data ke dalam polinom tersebut, diperoleh sistem persamaan lanjar yang terbentuk adalah

$$\begin{gathered}
a_0 + 8.0a_1 + 64.00a_2 = 2.0794 \\
a_0 + 9.0a_1 + 81.00a_2 = 2.1972 \\
a_0 + 9.5a_1 + 90.25a_2 = 2.2513
\end{gathered}$$

Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan $a_0 = 0.6762$, $a_1 = 0.2266$, dan $a_2 = -0.0064$. Polinom interpolasi yang melalui ketiga buah titik tersebut adalah $p_2(x) = 0.6762 + 0.2266x - 0.0064x^2$. Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada $x = 9.2$ dapat ditaksir sebagai berikut: $p_2(9.2) = 0.6762 + 0.2266(9.2) - 0.0064(9.2)^2 = 2.2192$.

IX. Regresi Linier Berganda

Pada kebanyakan kasus di dunia nyata, model regresi membutuhkan lebih dari 1 variabel independen. Persoalan seperti ini membutuhkan persamaan yang lebih umum dibandingkan regresi linear biasa, yaitu

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

Dimana setiap β_i melambangkan koefisien dari model regresi linear berganda, dan ϵ adalah besarnya random error dari model ini. Untuk membentuk persamaan regresi linear yang akurat, kita perlu meminimalkan

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1x_{1i} - b_2x_{2i} - \cdots - b_kx_{ki})^2.$$

Hal ini dilakukan dengan cara menurunkan *SSE* terhadap $b_0, b_1, \ldots, b_k$ dan membuatnya menjadi 0. Akan diperoleh *K+1* buah persamaan yaitu *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* yang dirumuskan oleh

$$\begin{aligned}
nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} \quad + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \quad &+ \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki} &&= \sum_{i=1}^{n} y_i \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 \quad + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} &+ \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{ki} &&= \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad &\qquad \vdots &&\qquad \vdots \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{2i} &+ \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 &&= \sum_{i=1}^{n} x_{ki}y_i
\end{aligned}$$

Solusi dari sistem persamaan linier tersebut merupakan koefisien dari model regresi linear berganda yang kita cari.

X. Interpolasi Bicubic Spline

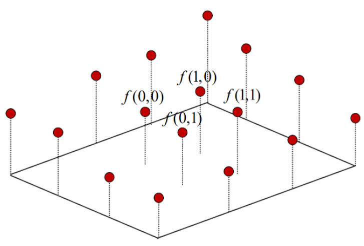
Bicubic spline interpolation adalah metode interpolasi yang digunakan untuk mengaproksimasi fungsi di antara titik-titik data yang diketahui. *Bicubic spline interpolation* melibatkan konsep *spline* dan konstruksi serangkaian polinomial kubik di dalam setiap sel segi empat dari data yang diberikan. Pendekatan ini menciptakan permukaan yang halus dan kontinu, memungkinkan untuk perluasan data secara visual yang lebih akurat daripada metode interpolasi linear.

Dalam pemrosesan menggunakan interpolasi *bicubic spline* digunakan 16 buah titik, 4 titik referensi utama di bagian pusat, dan 12 titik di sekitarnya sebagai aproksimasi turunan dari keempat titik referensi untuk membagun permukaan bikubik. Bentuk pemodelannya adalah sebagai berikut.

Normalization: $f(0,0), f(1,0)$
$f(0,1), f(1,1)$

Model: $f(x,y) = \sum_{j=0}^{3}\sum_{i=0}^{3} a_{ij} x^i y^j$

Solve: a_{ij}



Gambar 3. Pemodelan interpolasi *bicubic spline*.

Selain melibatkan model dasar, juga digunakan model turunan berarah dari kedua sumbu, baik terhadap sumbu *x*, sumbu *y,* maupun keduanya. Persamaan polinomial yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}a_{ij}x^i y^j$$

$$f_x(x,y)=\sum_{j=0}^{3}\sum_{i=1}^{3}a_{ij}ix^{i-1}y^j$$

$$f_y(x,y)=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=0}^{3}a_{ij}jx^i y^{j-1}$$

$$f_{xy}(x,y)=\sum_{j=0}^{3}\sum_{i=0}^{3}a_{ij}ijx^{i-1}y^{j-1}$$

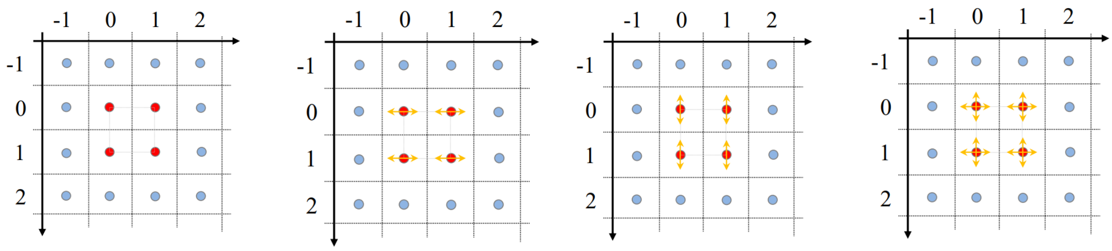
Dengan menggunakan nilai fungsi dan turunan berarah tersebut, dapat terbentuk sebuah matriks solusi *X* yang membentuk persamaan penyelesaian sebagai berikut.

$$y = Xa$$

$$\begin{bmatrix} f(0,0) \\ f(1,0) \\ f(0,1) \\ f(1,1) \\ f_x(0,0) \\ f_x(1,0) \\ f_x(0,1) \\ f_x(1,1) \\ f_y(0,0) \\ f_y(1,0) \\ f_y(0,1) \\ f_y(1,1) \\ f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(1,0) \\ f_{xy}(0,1) \\ f_{xy}(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \\ a_{01} \\ a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{02} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{03} \\ a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

Perlu diketahui bahwa elemen pada matriks *X* adalah nilai dari setiap komponen koefisien a_{ij} yang diperoleh dari persamaan fungsi maupun persamaan turunan yang telah dijelaskan sebelumnya. Sebagai contoh, elemen matriks *X* pada baris 8 kolom ke 2 adalah koefisien dari a_{10} pada ekspansi sigma untuk $f_x(1, 1)$ sehingga diperoleh nilai konstanta $1 \times 1^{1-1} \times 1^0 = 1$, sesuai dengan isi matriks *X*.

Nilai dari vektor *a* dapat dicari dari persamaan $y = Xa$, lalu vektor *a* tersebut digunakan sebagai nilai variabel dalam $f(x, y)$, sehingga terbentuk fungsi interpolasi bicubic sesuai model. Tugas Anda pada studi kasus ini adalah membangun persamaan $f(x, y)$ yang akan digunakan untuk melakukan interpolasi berdasarkan nilai $f(a, b)$ dari masukan matriks 4 x 4. Nilai masukan *a* dan *b* berada dalam rentang [0, 1]. Nilai yang akan diinterpolasi dan turunan berarah disekitarnya dapat diilustrasikan pada titik berwarna merah pada gambar di bawah.



Gambar 4. Nilai fungsi yang akan di interpolasi pada titik merah, turunan berarah terhadap sumbu x, terhadap sumbu y, dan keduanya (kiri ke kanan).

XI. Perbesaran gambar melalui Interpolasi Bikubik

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa interpolasi *bicubic spline* dapat digunakan untuk menciptakan permukaan yang halus pada gambar. Oleh karena itu, selain persamaan dasar $y = Xa$ yang telah dijabarkan, persamaan ini juga dapat menggunakan data sebuah citra untuk menciptakan kualitas gambar yang lebih baik. Misalkan $I(x, y)$ merupakan nilai dari suatu citra gambar pada posisi (x, y), maka dapat digunakan persamaan nilai dan persamaan turunan berarah sebagai berikut.

$$f(x,y) = I(x,y)$$

$$f_x(x,y) = [I(x+1,y) - I(x-1,y)]/2$$

$$f_y(x,y) = [I(x,y+1) - I(x,y-1)]/2$$

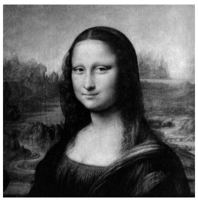
$$f_{xy}(x,y) = [I(x+1,y+1) - I(x-1,y) - I(x,y-1) - I(x,y)]/4$$

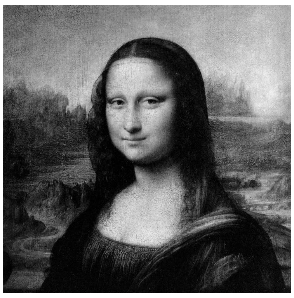
Sistem persamaan tersebut dapat dipetakan menjadi sebuah matriks (dalam hal ini matriks D) dengan gambaran lengkap seperti yang tertera di bawah.

$$y = DI$$

$$\begin{bmatrix} f(0,0) \\ f(1,0) \\ f(0,1) \\ f(1,1) \\ f_x(0,0) \\ f_x(1,0) \\ f_x(0,1) \\ f_x(1,1) \\ f_y(0,0) \\ f_y(1,0) \\ f_y(0,1) \\ f_y(1,1) \\ f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(1,0) \\ f_{xy}(0,1) \\ f_{xy}(1,1) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(-1,-1) \\ I(0,-1) \\ I(1,-1) \\ I(2,-1) \\ I(-1,0) \\ I(0,0) \\ I(1,0) \\ I(2,0) \\ I(-1,1) \\ I(0,1) \\ I(1,1) \\ I(2,1) \\ I(-1,2) \\ I(0,2) \\ I(1,2) \\ I(2,2) \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan kedua persamaan nilai y yang telah disebutkan dan dibahas sebelumnya, dapatkan nilai a yang lebih baik dan akurat dalam pemrosesan citra gambar, kemudian gunakan nilai dan persamaan $f(x, y)$ yang terbentuk untuk memperbaiki kualitas citra gambar monokrom pasca perbesaran dengan skala tertentu dengan melakukan interpolasi *bicubic spline*. Berikut adalah contohnya.





BAB III
IMPLEMENTASI

I. Class Matrix

- Attributes

Nama	Tipe Data	Deskripsi
input	static Scanner	Scanner untuk input pada kelas Matrix
Mat	double[][]	Buffer yang menyimpan elemen matrix
row	integer	Jumlah baris
col	integer	Jumlah kolom

- Methods

Nama	Tipe Data	Parameter	Deskripsi
getRow	public int	-	mendapatkan jumlah baris dari matrix
getCol	public int	-	mendapatkan jumlah kolom dari matrix
getElmt	public double	int i, int j	Mendapatkan elemen Mat[i][j] dari matrix
getLenght	public int	-	Mendapatkan hasil kali jumlah baris dan kolom
getColIdx	public int	int row, double x	mengembalikan nilai index kolom dari letak elemen x pada baris row dan -1 jika elemen tidak ditemukan
getLastRowIdx	public int	-	mengembalikan nilai index baris terakhir matrix
getLastColIdx	public int	-	mengembalikan nilai index kolom terakhir matrix

setElmt	public void	int i, int j, double val	Memasukkan nilai val pada Mat[i][j] matrix
readMatrix	public void	-	Membaca isi elememn matrix
displayMatrix	public void	-	Menampilkan isi elemen matrix
addWith	public void	Matrix M2	menambahkan elemen matrix dengan elemen matrix M2
noSolutions	public boolean	int row	Mengirim True jika matrix tidak memiliki solusi, False jika tidak
countZero	public int	int row	mengembalikan jumlah angka 0 di depan angka bukan 0 di suatu baris. Contoh: 0 0 2 0 0 3 → menghasilkan output 2 (angka 0 di depan ada 2)
swap	public void	int row1, int row2	Menukarkan posisi baris row1 dengan baris row2
getNotZero	public double	int row	Mengembalikan angka pertama bukan nol pada suatu baris
dividedRow	public void	int row, double x	Membagi setiap elemen pada suatu baris dengan suatu konstanta x
negatedZero	public void	-	Mengubah nilai -0.0 pada matrix menjadi 0
sortRowZero	public int	-	Mengurutkan baris berdasarkan jumlah angka 0 di depan dan terurut membesar (semakin banyak angka 0 posisi baris semakin ke bawah), lalu mengembalikan jumlah berapa kali baris ditukarkan
getEselonBaris	public void	-	Mengubah nilai matrix dengan OBE sehingga

			menjadi matrix eselon baris
getEselonBarisTereduksi	public void	-	Mengubah nilai matrix dengan OBE sehingga menjadi matrix eselon baris tereduksi
getCoefficient	public static Matrix	Matrix m	Mengembalikan matrix koefisien dari suatu matrix m augmented
minor	public static Matrix	Matrix m, int r, int c	Mengembalikan matrix minor dari suatu matrix m pada index r, c
determinantWithCofactor	public static double	Matrix m1	Mengembalikan determinan dari matrix m1 dengan metode ekpansi kofaktor
findIdxNotZero	public int	int r	Mengembalikan index kolom dengan elemen tidak 0 pada baris r dan -1 jika tidak ada
determinantWithOBE	public static double	Matrix m1	Mengembalikan determinan dari matrix m1 dengan metode OBE
copyMatrix	public void	Matrix M	Menduplikasi nilai matrix dari M ke matrix ini
transpose	public static Matrix	Matrix m	Mengeluarkan hasil transpose Matrix
multiplyMatrix	public static Matrix	Matrix M1, Matrix M2	Mengeluarkan Matrix MxN yang merupakan hasil perkalian Matrix MxK dengan KxN
isIdentity	public boolean	-	Mengeluarkan apabila matrix ini merupakan matrix identitas
getIdentityMatrix	public static Matrix	int n	Mengirimkan Matrix identitas berukuran NxN
sortRowZeroInvers	public Matrix	Matrix m	Mengurutkan baris berdasarkan jumlah angka 0 di depan dan

			terurut membesar (semakin banyak angka 0 posisi baris semakin ke bawah), disesuaikan untuk matrix [A|I]
getEselonTereduksiInvers	public Matrix	Matrix m	Melakuakn OBE sehingga menjadi matrix eselon baris tereduksi, dalam kasus ini (persegi) ia akan menjadi matrix Identitas
inversWithGaussJordan	public static boolean	Matrix m	Mengubah Matrix m menjadi Inversnya dengan metode OBE. Jika determinannya 0 (tidak memiliki Invers) fungsi akan mengembalikan false dan Matrix tidak berubah. Selain itu fungsi mengembalikan true
inversWithCofactor	public static boolean	Matrix m	Mengubah Matrix m menjadi Inversnya dengan metode kofaktor. Jika determinannya 0 (tidak memiliki Invers) fungsi akan mengembalikan false dan Matrix tidak berubah. Selain itu fungsi mengembalikan true

II. Class SPL

- Attribute
  Class ini tidak memiliki atribut

- Methods

Nama	Tipe Data	Parameter	Deskripsi
cramer	public static Matrix	Matrix m	Mengembalikan solusi persamaan

			SPL pada matrix augmented m dalam bentuk Matrix dengan kaidah cramer
isSolExist	public static boolean	Matrix m	Mengirim True jika SPL memiliki solusi, False jika tidak
isHasilHomogen	public static boolean	Matrix m	Mengirim True jika hasil SPL adalah homogen, False jika tidak
isParametrikSolution	public static boolean	Matrix m, int col	Mengirim True jika solusi suatu variable adalah parametrik, yaitu jika pada suatu kolom matriks tidak ada yang jadi leading one, False jika tidak
gaussElimination	public static String[]	Matrix m	Mengembalikan solusi persamaan SPL pada matrix augmented m dalam bentuk String[] dengan metode eliminasi gauss
gaussJordanElimination	public static String[]	Matrix m	Mengembalikan solusi persamaan SPL pada matrix augmented m dalam bentuk String[] dengan metode eliminasi gauss
metodeBalikan	public static Matrix	Matrix m	Mengembalikan solusi persamaan SPL pada matrix augmented m dalam bentuk matriks Nx1 dengan metode balikan

III. Class Interpolasi

- Attribute

Nama	Tipe Data	Deskripsi
input	static Scanner	Scanner untuk input pada class Interpolasi

- Methods

Nama	Tipe Data	Parameter	Deskripsi
readmPointKeyboard	public static Matrix	-	Membaca integer n lalu membaca n+1 buah titik dari keyboard
getKoefPolinomial	public static double[]	Matrix m	Mengembalikan koefisien polinomial dari matrix augmented n+1 poin
getRangeInterpolasi	public static double[]	double[] koef, double x	Mengembalikan hasil interpolasi dari nilai x yang akan ditaksir dengan fungsi interpolasi
persamaanInterpolasi	public static String	double[] koef	Mengembalikan persamaan interpolasi dalam bentuk String[]
mainInterpolasi	public static void	String[] args	Main program dari class Interpolasi

IV. Class Regresi

- Attribute

Nama	Tipe Data	Deskripsi
input	static Scanner	Scanner untuk input pada class Interpolasi

- Methods

Nama	Tipe Data	Parameter	Deskripsi
readRegresiKeyboard	public static Matrix	-	membaca integer M dan N, lalu membaca matrix peubah regresi. selanjutnya nilai hasil fungsi. Lalu fungsi ini akan mengembalikan matrix Mx(N+2) dengan kolom pertama seluruhnya 1, kolom kedua sampai N+1 berisi matrix peubah, dan kolom terakhir berisi nilai hasil fungsi
readTaksir	public static Matrix	Matrix m	membaca nilai peubah yang ingin ditaksir hasilnya
convertSPLMatrix	public static Matrix	Matrix m	mengubah matrix hasil pembacaan menjadi matrix SPL berukuran (N+1)(N+2) melalui metode Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression
solusiSPL	public static String[]	Matrix m	Mengembalikan solusi persamaan SPL regresi linear pada matrix augmented m dalam bentuk String[] dengan metode eliminasi gauss
vektorRegresi	public static Matrix	String[] solusi	mengubah String[] solusi SPL menjadi bentuk vektor (Matrix Nx1)
yRegresi	public static double	Matrix yk, Matrix vektor	Mengembalikan hasil dari f(Xk), menggunakan matrix Xk berukuran 1x(N+1) dan vektor regresi berukuran (N+1)x1
persamaanRegresi	public static String	String[] SPLSol, double taksir	Melakukan eliminasi gauss pada matrix SPL dan menampilkan persamaan regresi
mainRegresi	public static void	String[] args	Prosedur utama untuk menjalankan class regresi

V. Class InterpolasiBikubik

- Attribute
  Class ini tidak memiliki attribute

- Methods

Nama	Tipe Data	Parameter	Deskripsi
mainInterpolasiBikubik	public static void	String [] args	Main program dari class interpolasi bikubik
constructX	public static void	Matrix X	Mengisi elemen matrix X sesuai rumus bicubic

VI. Class IO

- Attributes

Nama	Tipe Data	Deskripsi
fileName	String	Nama file
sc	private Scanner	Scanner untuk membaca file
scan	public static Scanner	Scanner untuk membaca String
input	public static Scanner	Scanner untuk membaca double
iinput	public static Scanner	Scanner untuk membaca integer

- Methods

Nama	Tipe Data	Parameter	Deskripsi
getFileName	public String	-	Main program dari class interpolasi bikubik

openFile	public void	-	Prosedur untuk membuka file
closeFile	public void	-	Prosedur untuk menutup file
readfileName	public static String	-	Prosedur untuk membaca nama file yang akan dibuka
getRow	public int	-	Mengembalikan banyak baris dalam file
getCol	public int	-	Mengembalikan banyak kolom pada file dengan mengambil jumlah kolom pada baris teratas
readMatrixFromFile	public Matrix	-	Membaca matrix dari file
readPointFromFile	public Matrix	-	Membaca titik dari file
readBicubicSpline	public double[]	-	Membaca masukan bicubic spline dari file
writeStringToFile	public void	String[] res	Menulis data ke dalam file

VII. Class ImageInterpolation

- Attribute
  Class ini tidak memiliki attribute

- Methods

Nama	Tipe Data	Parameter	Deskripsi
mainImageInterpolation	public static void	String [] args	Main program dari class ImageInterpolation

constructD	public static void	Matrix D	Mengisi elemen matrix D sesuai rumus bicubic spline untuk interpolasi gambar
calcRGB	public static double	Matrix mult, double x, double y	Mengembalikan nilai RGB pada titik x, y menggunakan aproksimasi perhitungan bicubic spline. Matrix mult merupakan nilai aij yang relevan pada titik x, y dan sudah dicari sebelumnya.

VIII. Class Main

- Attributes

Nama	Tipe Data	Deskripsi
input	static Scanner	Scanner untuk input integer
scan	static Scanner	Scanner untuk input string

- Methods

Nama	Tipe Data	Parameter	Deskripsi
startingLoading	public static void	-	Menampilkan animasi loading
printOpening	public static void	-	Menampilkan teks opening
printMenu	public static void	-	Menampilkan menu utama
printInputType	public static void	-	Menampilkan tipe masukan

printSPLChoice	public static void	-	Menampilkan menu SPL
printDeterminantChoice	public static void	-	Menampilkan menu determinan
printInverseChoice	public static void	-	Menampilkan menu inverse
printEnterChoice	public static void	-	Menampilkan masukkan pilihan
pressEnterToContinue	public static void	-	Menampilkan press enter to continue
printOutputChoice	public static void	-	Menampilkan pilihan untuk menyimpan hasil
clearScreen	pubilc static void	-	Menghapus isi layar terminal
printInputInvalid	public static void	-	Menampilkan input invalid
main	public static void	String[] args	Program utama dari class Main. pada program ini dapat dipanggil program utama dari kelas lain seperti InterpolasiBikubik, dll.

BAB IV
EKSPERIMEN

I. Solusi SPL *Ax* = *b*

a. Studi Kasus A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- Solusi dengan metode eliminasi gauss:

```
Sistem persamaan linear tidak memiliki solusi
```

- Solusi dengan metode eliminasi gauss-jordan:

```
Sistem persamaan linear tidak memiliki solusi
```

- Solusi dengan metode matriks balikan:

```
Metode balikan gagal karena determinan matrix 0
```

- Solusi dengan metode cramer:

```
Kaidah cramer gagal karena determinan matrix 0
```

b. Studi Kasus B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Solusi dengan metode eliminasi gauss:

```
X1 = 3.0 + t5
X2 = 2.0 t5
X3 = t3, dengan t3 bilangan Real.
X4 = -1.0 + t5
X5 = t5, dengan t5 bilangan Real.
```

- Solusi dengan metode eliminasi gauss-jordan:

```
X1 = 3.0 + t5
X2 = 2.0 t5
X3 = t3, dengan t3 bilangan Real.
X4 = -1.0 + t5
X5 = t5, dengan t5 bilangan Real.
```

- Solusi dengan metode matriks balikan:

```
Metode balikan gagal karena matrix tidak persegi (n x n)
```

- Solusi dengan metode cramer:

```
Kaidah cramer gagal karena matrix tidak persegi (n x n)
```

c. Studi Kasus C

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Solusi dengan metode eliminasi gauss:

```
X1 = t1, dengan t1 bilangan Real.
X2 = 1.0 - t6
X3 = t3, dengan t3 bilangan Real.
X4 = -2.0 - t6
X5 = 1.0 + t6
X6 = t6, dengan t6 bilangan Real.
```

- Solusi dengan metode eliminasi gauss-jordan:

```
X1 = t1, dengan t1 bilangan Real.
X2 = 1.0 - t6
X3 = t3, dengan t3 bilangan Real.
X4 = -2.0 - t6
X5 = 1.0 + t6
X6 = t6, dengan t6 bilangan Real.
```

- Solusi dengan metode matriks balikan:

```
Metode balikan gagal karena matrix tidak persegi (n x n)
```

- Solusi dengan metode cramer:

```
Kaidah cramer gagal karena matrix tidak persegi (n x n)
```

d. Studi Kasus D

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

d.1 Untuk n = 6

- Solusi dengan metode eliminasi gauss:

```
X1 = 36.00000000098032
X2 = -630.0000000292666
X3 = 3360.000000203484
X4 = -7560.000000539232
X5 = 7560.000000603351
X6 = -2772.000000240222
```

- Solusi dengan metode eliminasi gauss-jordan:

```
X1 = 36.00000000098021
X2 = -630.0000000292657
X3 = 3360.000000203484
X4 = -7560.000000539233
X5 = 7560.000000603351
X6 = -2772.000000240222
```

- Solusi dengan metode matriks balikan:

```
X1 = 36.00000
X2 = -629.99995
X3 = 3359.99971
X4 = -7559.99941
X5 = 7559.99952
X6 = -2771.99986
```

- Solusi dengan metode cramer:

```
X1 = 36.00000
X2 = -630.00000
X3 = 3360.00000
X4 = -7560.00000
X5 = 7560.00000
X6 = -2772.00000
```

d.2 Untuk n = 10

- Solusi dengan metode eliminasi gauss:

```
X1 = 99.99035437093698
X2 = -4949.159598718223
X3 = 79181.9852859748
X4 = -600435.4050103598
X5 = 2521731.741596233
X6 = -6304125.909429144
X7 = 9606023.151161604
X8 = -8748135.347572234
X9 = 4373977.470228069
X10 = -923378.5098546298
```

- Solusi dengan metode eliminasi gauss-jordan:

```
X1 = 99.99035437092243
X2 = -4949.159598717495
X3 = 79181.98528597341
X4 = -600435.4050103594
X5 = 2521731.741596233
X6 = -6304125.909429144
X7 = 9606023.151161604
X8 = -8748135.347572234
X9 = 4373977.470228069
X10 = -923378.5098546298
```

- Solusi dengan metode matriks balikan:

```
X1 = 99.99035
X2 = -4949.15960
X3 = 79181.98529
X4 = -600435.40501
X5 = 2521731.74160
X6 = -6304125.90943
X7 = 9606023.15116
X8 = -8748135.34757
X9 = 4373977.47023
X10 = -923378.50985
```

- Solusi dengan metode cramer:

```
X1 = 99.99174
X2 = -4949.22740
X3 = 79182.07024
X4 = -600435.17951
X5 = 2521731.76088
X6 = -6304125.90763
X7 = 9606023.15031
X8 = -8748135.34757
X9 = 4373977.47023
X10 = -923378.50985
```

II. SPL Berbentuk Matriks *Augmented*

a. Kasus A

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

- Solusi dengan metode eliminasi gauss:

```
X1 = -1.0 + t4
X2 = 2.0 t3
X3 = t3, dengan t3 bilangan Real.
X4 = t4, dengan t4 bilangan Real.
```

- Solusi dengan metode eliminasi gauss-jordan:

```
X1 = -1.0 + t4
X2 = 2.0 t3
X3 = t3, dengan t3 bilangan Real.
X4 = t4, dengan t4 bilangan Real.
```

- Solusi dengan metode matriks balikan:

```
Metode balikan gagal karena determinan matrix 0
```

- Solusi dengan metode cramer:

```
Kaidah cramer gagal karena determinan matrix 0
```

b. Kasus B

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Solusi dengan metode eliminasi gauss:

```
X1 = 0.0
X2 = 2.0
X3 = 1.0
X4 = 1.0
```

- Solusi dengan metode eliminasi gauss-jordan:

```
X1 = 0.0
X2 = 2.0
X3 = 1.0
X4 = 1.0
```

- Solusi dengan metode matriks balikan:

```
Metode balikan gagal karena matrix tidak persegi (n x n)
```

- Solusi dengan metode cramer:

```
Kaidah cramer gagal karena matrix tidak persegi (n x n)
```

III. Sistem Persamaan Linear

a. Kasus A

$$
\begin{aligned}
8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\
2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\
x_1 + 6x_3 + 4x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

- Solusi dengan metode eliminasi gauss:

```
X1 = -0.2243243243243241
X2 = 0.1824324324324324
X3 = 0.7094594594594594
X4 = -0.2581081081081081
```

- Solusi dengan metode eliminasi gauss-jordan:

```
X1 = -0.22432432432432392
X2 = 0.18243243243243235
X3 = 0.7094594594594594
X4 = -0.2581081081081081
```

- Solusi dengan metode matriks balikan:

```
X1 = -0.22432
X2 = 0.18243
X3 = 0.70946
X4 = -0.25811
```

- Solusi dengan metode cramer:

```
X1 = -0.22432
X2 = 0.18243
X3 = 0.70946
X4 = -0.25811
```

b. **Kasus B**

$$
\begin{aligned}
x_7 + x_8 + x_9 &= 13.00\\
x_4 + x_5 + x_6 &= 15.00\\
x_1 + x_2 + x_3 &= 8.00\\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_6 + x_8) + 0.61396x_9 &= 14.79\\
0.91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 14.31\\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_2 + x_4) + 0.61396x_1 &= 3.81\\
x_3 + x_6 + x_9 &= 18.00\\
x_2 + x_5 + x_8 &= 12.00\\
x_1 + x_4 + x_7 &= 6.00\\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_2 + x_6) + 0.61396x_3 &= 10.51\\
0.91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 16.13\\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_4 + x_8) + 0.61396x_7 &= 7.04
\end{aligned}
$$

- Solusi dengan metode eliminasi gauss:

```
Sistem persamaan linear tidak memiliki solusi
```

- Solusi dengan metode eliminasi gauss-jordan:

```
Sistem persamaan linear tidak memiliki solusi
```

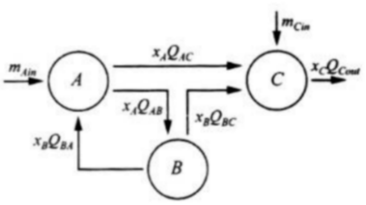
- Solusi dengan metode matriks balikan:

```
Metode balikan gagal karena matrix tidak persegi (n x n)
```

- Solusi dengan metode cramer:

```
Kaidah cramer gagal karena matrix tidak persegi (n x n)
```

IV. Persoalan Sistem Reaktor



$$
\begin{aligned}
\text{A:}&\quad m_{A_{in}} + Q_{BA}x_B - Q_{AB}x_A - Q_{AC}x_A = 0\\
\text{B:}&\quad Q_{AB}x_A - Q_{BA}x_B - Q_{BC}x_B = 0\\
\text{C:}&\quad m_{C_{in}} + Q_{AC}x_A + Q_{BC}x_B - Q_{C_{out}}x_C = 0
\end{aligned}
$$

Tentukan solusi x_A, x_B, x_C dengan menggunakan parameter berikut : Q_{AB} = 40, Q_{AC} = 80, Q_{BA} = 60, Q_{BC} = 20 dan Q_{Cout} = 150 m^3/s dan m_{Ain} = 1300 dan m_{Cin} = 200 *mg/s*.

- Solusi dengan metode eliminasi gauss:

```
X1 = 14.444444444444446
X2 = 7.222222222222223
X3 = 10.0
```

- Solusi dengan metode eliminasi gauss-jordan:

```
X1 = 14.444444444444446
X2 = 7.222222222222223
X3 = 10.0
```

- Solusi dengan metode matriks balikan:

```
X1 = 14.44444
X2 = 7.22222
X3 = 10.00000
```

- Solusi dengan metode cramer:

```
X1 = 14.44444
X2 = 7.22222
X3 = 10.00000
```

V. Studi Kasus Interpolasi

a. Studi Kasus A

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
***f*(*x*)**	0.003	0.067	0.148	0.248	0.370	0.518	0.697

untuk $x = 0.2$

```
f(x) = - 1.8206502627381823E-14 x^6 + 7.669600993076248E-14 x^5 + 0.026041666666541615 x^4 + 9.903189379656396E-14 x^3
+ 0.1973958333332943 x^2 + 0.24000000000000687 x - 0.022976562500000384, f(0.2) = 0.03296093750000005
```

untuk $x = 0.55$

```
f(x) = - 1.8206502627381823E-14 x^6 + 7.669600993076248E-14 x^5 + 0.026041666666541615 x^4 + 9.903189379656396E-14 x^3
+ 0.1973958333332943 x^2 + 0.24000000000000687 x - 0.022976562500000384, f(0.55) = 0.17111865234375
```

untuk $x = 0.85$

```
f(x) = - 1.8206502627381823E-14 x^6 + 7.669600993076248E-14 x^5 + 0.026041666666541615 x^4 + 9.903189379656396E-14 x^3
+ 0.1973958333332943 x^2 + 0.24000000000000687 x - 0.022976562500000384, f(0.85) = 0.33723583984374994
```

untuk $x = 1.28$

```
f(x) = - 1.8206502627381823E-14 x^6 + 7.669600993076248E-14 x^5 + 0.026041666666541615 x^4 + 9.903189379656396E-14 x^3
+ 0.1973958333332943 x^2 + 0.24000000000000687 x - 0.022976562500000384, f(1.28) = 0.6775418375
```

b. Studi Kasus B

Tanggal	Tanggal (desimal)	Jumlah Kasus Baru
17/06/2022	6,567	12.624
30/06/2022	7	21.807
08/07/2022	7,258	38.391
14/07/2022	7,451	54.517
17/07/2022	7,548	51.952
26/07/2022	7,839	28.228
05/08/2022	8,161	35.764
15/08/2022	8,484	20.813
22/08/2022	8,709	12.408
31/08/2022	9	10.534

Tanggal (desimal) = bulan + (tanggal / jumlah hari pada bulan tersebut)

Sebagai contoh, untuk tanggal 17/06/2022 (dibaca: 17 Juni 2022) diperoleh tanggal(desimal) sebagai berikut:

Tanggal (desimal) = 6 + (17/30) = 6,567

- untuk 16/07/2022

```
f(x) = - 140993.71224863594 x^9 + 9372849.23910132 x^8 - 2.754745394206693E8 x^7 + 4.695806315428793E9 x^6 -
5.113187676013275E10 x^5 + 3.6855080717553394E11 x^4 - 1.7568101863613809E12 x^3 + 5.334203055240195E12 x^2 -
 9.346993079172328E12 x + 7.187066071657867E12, f(7.516) = 53537.99609375
```

- untuk 10/08/2022

```
f(x) = - 140993.71224863594 x^9 + 9372849.23910132 x^8 - 2.754745394206693E8 x^7 + 4.695806315428793E9 x^6 -
5.113187676013275E10 x^5 + 3.6855080717553394E11 x^4 - 1.7568101863613809E12 x^3 + 5.334203055240195E12 x^2 -
 9.346993079172328E12 x + 7.187066071657867E12, f(8.322) = 36343.76953125
```

- untuk 05/09/2022

```
f(x) = - 140993.71224863594 x^9 + 9372849.23910132 x^8 - 2.754745394206693E8 x^7 + 4.695806315428793E9 x^6 -
5.113187676013275E10 x^5 + 3.6855080717553394E11 x^4 - 1.7568101863613809E12 x^3 + 5.334203055240195E12 x^2 -
 9.346993079172328E12 x + 7.187066071657867E12, f(9.167) = -667693.21875
```

- Masukan user lainnya:
  tanggal 31/07/2022

```
f(x) = - 140993.71224863594 x^9 + 9372849.23910132 x^8 - 2.754745394206693E8 x^7 + 4.695806315428793E9 x^6 -
5.113187676013275E10 x^5 + 3.6855080717553394E11 x^4 - 1.7568101863613809E12 x^3 + 5.334203055240195E12 x^2 -
 9.346993079172328E12 x + 7.187066071657867E12, f(8.0) = 27752.5625
```

VI. Studi Kasus Regresi Linear Berganda

Diberikan sekumpulan data sesuai pada tabel berikut ini.

Table 12.1: Data for Example 12.1

Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3	Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3
0.90	72.4	76.3	29.18	1.07	23.2	76.8	29.38
0.91	41.6	70.3	29.35	0.94	47.4	86.6	29.35
0.96	34.3	77.1	29.24	1.10	31.5	76.9	29.63
0.89	35.1	68.0	29.27	1.10	10.6	86.3	29.56
1.00	10.7	79.0	29.78	1.10	11.2	86.0	29.48
1.10	12.9	67.4	29.39	0.91	73.3	76.3	29.40
1.15	8.3	66.8	29.69	0.87	75.4	77.9	29.28
1.03	20.1	76.9	29.48	0.78	96.6	78.7	29.29
0.77	72.2	77.7	29.09	0.82	107.4	86.8	29.03
1.07	24.0	67.7	29.60	0.95	54.9	70.9	29.37

Source: Charles T. Hare, "Light-Duty Diesel Emission Correction Factors for Ambient Conditions," EPA-600/2-77-116. U.S. Environmental Protection Agency.

Gunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* untuk mendapatkan regresi linear berganda dari data pada tabel di atas, kemudian estimasi nilai Nitrous Oxide apabila Humidity bernilai 50%, temperatur 76°F, dan tekanan udara sebesar 29.30.

```
f(X) = -3.5077781408835103 - 0.002624990745878327 X1 + 7.989410472218274E-4 X2 + 0.15415503019830143 X3, f(Xk) = 0.9384342262216645
```

VII. Studi Kasus Interpolasi *Bicubic Spline*

$$\begin{pmatrix} 21 & 98 & 125 & 153 \\ 51 & 101 & 161 & 59 \\ 0 & 42 & 72 & 210 \\ 16 & 12 & 81 & 96 \end{pmatrix}$$

```
f(0.0,0.0) = 21.0
```

```
f(0.5,0.5) = 87.796875
```

```
f(0.25,0.75) = 117.732177734375
```

```
f(0.1,0.9) = 128.57518700000003
```

VIII. Studi Kasus Image Interpolation

Gambar 1. Sebuah citra gambar asal (kiri) dan hasil perbesarannya dengan skala 1.5 (kanan).

Gambar 2. Sebuah citra gambar asal (atas) dan hasil perbesarannya dengan skala 1.4 (bawah).

Gambar 3. Sebuah citra gambar asal (atas) dan hasil perbesarannya dengan skala 1.6 (bawah).

BAB V
KESIMPULAN

I. Kesimpulan

Implementasi program yang telah dibuat dapat digunakan untuk mempermudah menyelesaikan persoalan dalam menentukan solusi sistem persamaan linear (SPL) dengan metode eliminasi gauss, metode eliminasi gauss-jordan, metode matriks balikan, dan kaidah cramer (khusus untuk n buah peubah dan buah persamaan). Program juga dapat menentukan determinan matriks dengan metode reduksi baris dan ekspansi kofaktor. Selain itu, menentukan matriks invers dari sebuah matriks persegi juga dapat ditemukan.

Dengan menggunakan *library* yang dibuat, kita dapat menyelesaikan persoalan yang dimodelkan dalam SPL seperti menentukan solusi persoalan interpolasi polinom, menentukan solusi persoalan interpolasi bicubic spline, dan menentukan solusi persoalan regresi linear berganda.

II. Saran

Kami menyadari bahwa dalam pengerjaan tugas besar ini dapat dikembangkan lagi menjadi lebih baik, meliputi:

1. Program yang dibuat sebaiknya dilakukan dengan mendekomposisi persoalan secara mendalam sebelum mengimplementasikannya. Hal ini dapat meningkatkan reusability dari fungsi atau pun prosedur yang dibuat sehingga program lebih modular.
2. Program yang dibuat hendaknya disertai dokumentasi berupa komen singkat yang menjelaskan langkah-langkah atau pun cara bekerjanya sehingga memudahkan dalam proses debugging.
3. Untuk meningkatkan pengalaman pengguna dapat diimplementasikan GUI sehingga lebih *user friendly.*

III. Refleksi

Kami menyadari bahwa dalam pengerjaan tugas besar ini sangat dibutuhkan kerja sama dan komunikasi yang baik sesama anggota kelompok. Koordinasi dan kerja sama yang baik telah dilakukan mulai dari pembagian tugas, penetapan deadline masing-masing individu, hingga diskusi untuk menyelesaikan berbagai persoalan. Selain itu, *time management* juga sangat penting untuk diterapkan mengingat jadwal akademik yang padat dan tiap individu yang memiliki urusan masing-masing dan kepentingan yang berbeda. Kami menyadari bahwa *time management* berperan terhadap jam tidur kami. Oleh karena itu, dengan *time management* yang cukup baik kami merasa sangat *enjoy* dalam pengerjaan tugas besar I ini.

DAFTAR PUSTAKA

Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., & Ye, K. (2011). Probability & Statistics for Engineers & Scientists, 9th ed. Pearson

Dorst, L., Fontijne, D., & Mann, S. (2007). Geometric Algebra for Computer Science. Morgan Kaufmann.

Strang, G. (2006). Linear Algebra and Its Applications. Cengage Learning.