

# SISTEM PERSAMAAN LINIER

Eliminasi Gauss Jordan &  
Operasi Baris Elementer

**EKO SUHARYANTO - 081310792300**

**SEKOLAH TINGGI  
MANAJEMEN INFORMATIKA DAN KOMPUTER  
STMIK ERESHA**



# SISTEM PERSAMAAN LINIER

- Matriks  $m \times n$  adalah susunan bilangan yang berbentuk segi empat dimana:

$m$  = banyaknya baris.

$n$  = banyaknya kolom.

$a_{ij}$  = elemen pada baris ke- $i$   
kolom ke- $j$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$



# SISTEM PERSAMAAN LINIER

- Dari sebuah sistem persamaan, dapat dibuat **matriks koefisien** dan **augmented matriksnya**.
- **Matriks koefisien** dan **augmented matriks** adalah cara lain untuk menyatakan suatu sistem persamaan.
- Sistem tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan **operasi baris elementer** untuk mengubah augmented matriks menjadi bentuk eselon baris.

# AUGMENTED MATRIX

**Augmented Matrix** adalah matriks yang semua entrinya berisi koefisien-koefisien SPL yang kemudian diperbesar. Maksud dari diperbesar ialah penambahan sebuah kolom yang berisi hasil dari persamaan Linier atau yang berada di kanan tanda " $=$ ".





# AUGMENTED MATRIX

**Contoh:**

$$15x + 3y + 19z = 74$$

$$5x - 7y + 13z = 22$$

matriks Augmentednya:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 15 & 3 & 19 & 74 \\ 5 & -7 & 13 & 22 \end{array} \right]$$



# Operasi baris elementer (OBE)

- sebuah **prosedur** eliminasi yang didasarkan pada gagasan untuk **mereduksi matriks** menjadi bentuk yang cukup **sederhana** sehingga SPL dapat dipecahkan dengan memeriksa sistem tsb yang pada akhirnya akan menghasilkan **bentuk eselon baris tereduksi**

Heri Nugroho



# Operasi Baris Elementer (OBE)

Mengalikan suatu baris dengan konstanta tak nol

Mempertukarkan dua buah baris

Menambahkan kelipatan suatu baris ke baris lainnya

Sampai didapatkan

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Eselon baris

atau

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Eselon baris tereduksi

# Operasi Baris Elementer (OBE)

- Di setiap baris, angka pertama selain 0 harus 1 (*leading 1*).
- Jika ada baris yang semua elemennya nol, maka harus dikelompokkan di baris akhir dari matriks.
- Jika ada baris yang *leading 1* maka *leading 1* di bawahnya, angka 1-nya harus berada lebih kanan dari *leading 1* di atasnya.
- Jika kolom yang memiliki *leading 1* angka selain 1 adalah nol maka matriks tersebut disebut *Eselon-baris tereduksi*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Operasi Baris Elementer (OBE)

- Dua buah matriks dikatakan **ekivalen baris** jika salah satunya merupakan hasil operasi baris elementer dari matriks lainnya.
- Sebuah matriks dikatakan berbentuk **eselon baris** jika:
  - Baris yang seluruh elemennya nol terletak di lapisan bawah.
  - Baris yang mempunyai elemen bukan nol, elemen bukan nol yang paling kiri adalah 1.
  - Dua baris bukan nol yang berurutan, baris yang di lapisan atas elemen 1 nya lebih ke kiri dibanding elemen 1 baris di lapisan bawahnya.

# Operasi Baris Elementer (OBE)

Contoh Matriks Eselon Baris:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



# Operasi Baris Elementer (OBE)

Sebuah matriks dikatakan berbentuk **eselon baris tereduksi** jika:

- Sudah berbentuk eselon baris.
- Elemen bukan 0 paling kiri (angka 1) dlm setiap baris merupakan satu-satunya elemen bukan 0 (angka 1) dalam kolom ybs.

Ref: [www.konsep.org](http://www.konsep.org)

## Contoh Matriks Eselon Baris Terreduksi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



# Eliminasi Gauss pada Matriks

1. Dari sistem persamaan, tulislah augmented matriksnya.
2. Gunakan operasi baris elementer untuk mendapatkan matriks ekuivalen yang berbentuk **eselon baris**.
3. Dari matriks yang sudah berbentuk eselon baris tersebut tulislah dalam bentuk sistem persamaan.
4. Gunakan substitusi balik untuk mendapatkan penyelesaian sistem tersebut.

# ELIMINASI GAUSS-JORDAN

- Pada eliminasi Gauss-Jordan, operasi baris elementer terhadap augmented matriks dilanjutkan sampai diperoleh bentuk **eselon baris tereduksi**.  
(seperti di bawah ini)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$



# Contoh Eliminasi Gauss-Jordan

$$\begin{array}{l} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B2 \rightarrow -2 \times B1 + B2$$

$$\begin{array}{l} x + y + 2z = 9 \\ 4y - 7z = -17 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B3 \rightarrow -3 \times B1 + B3$$

$$\begin{array}{l} x + y + 2z = 9 \\ 4y - 7z = -17 \\ 3y - 11z = -27 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix}$$

# Contoh (ljt)

$$B2 \rightarrow 1/2 \times B2$$

$$x + y + 2z = 9$$

$$y - 7/2z = -17/2$$

$$3y - 11z = -27$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix}$$

$$B3 \rightarrow -3 \times B2 + B3$$

$$x + y + 2z = 9$$

$$y - 7/2z = -17/2$$

$$-1/2z = -3/2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$



# Contoh (ljt)

$$x + y + 2z = 9$$

$$y - 7/2z = -17/2$$

$$z = 3$$

$$B3 \rightarrow -2 \times B3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B1 \rightarrow -1 \times B2 + B1$$

$$x + 11/2z = 35/2$$

$$y - 7/2z = -17/2$$

$$z = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11/2 & 35/2 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Eliminasi Gauss  $\rightarrow$  matriks segitiga

$$B1 \rightarrow -11/2 \times B3 + B1$$

$$B2 \rightarrow 7/2 \times B3 + B2$$

$$x = 1$$

$$y = 2$$

$$z = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**SEHINGGA**

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$$

Eliminasi Gauss-Jordan  
 $\rightarrow$  matriks identitas

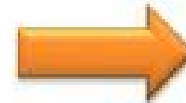
### Contoh soal:

1. Diketahui persamaan linear

$$x + 2y + 3z = 3$$

$$2x + 3y + 2z = 3$$

$$2x + y + 2z = 5$$



$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

Tentukan Nilai x, y dan z

Jawab:

Bentuk persamaan tersebut ke dalam matriks:

Baris ke 2 dikurangi 2 kali baris ke 1

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \end{array} \right]$$

Baris ke-3 dikurangi 2 kali baris ke-1



[Exit](#)

[Home](#)

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{array} \right]$$

Baris ke-3 dikurangi 3 kali baris ke-2

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Baris ke-3 dibagi 8 dan baris ke-2 dibagi -1

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Baris ke-2 dikurangi 4 kali baris ke-3



[Exit](#)

[Home](#)





$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Baris ke-1 dikurangi 3 kali baris ke-3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Baris ke 1 dikurangi 2 kali baris ke2

Maka didapatkan nilai dari  $x = 2$  ,  $y = -1$  , dan  $z = 1$



[Exit](#)

[Home](#)

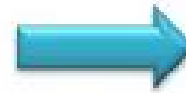
## Contoh soal:

2. Diketahui persamaan linear

$$x + y + 2z = 10$$

$$2x + 3y + 3z = 4$$

$$2x + 4y + 6z = 4$$



$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \end{array} \right]$$

Tentukan Nilai x, y dan z

Jawab:

Bentuk persamaan tersebut ke dalam matriks:

Baris ke 2 dikurangi 2 kali baris ke 1

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & -16 \\ 0 & 2 & 2 & -16 \end{array} \right]$$

Baris ke-3 dikurangi 2 kali baris ke-1



[Exit](#)

[Home](#)



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 10 \\ 0 & -1 & -1 & | & -16 \\ 0 & 0 & 4 & | & 16 \end{bmatrix}$$

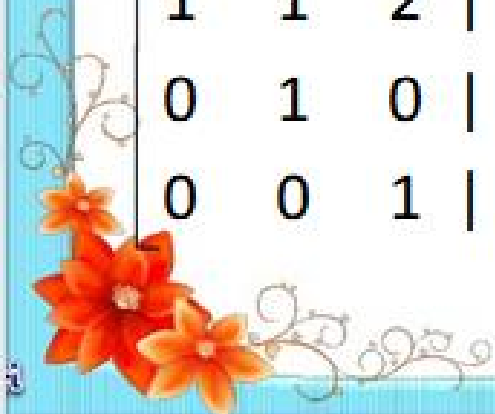
Baris ke-3 dikurangi 2 kali baris ke-2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 10 \\ 0 & 1 & 1 & | & 16 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{bmatrix}$$

Baris ke-3 dibagi 4 dan baris ke-2 dibagi -1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 10 \\ 0 & 1 & 0 & | & 12 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{bmatrix}$$

Baris ke-2 dikurangi 1 kali baris ke-3



[Exit](#)

[Home](#)



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 12 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Baris ke-1 dikurangi 2 kali baris ke-3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 12 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Baris ke 1 dikurangi 1 kali baris ke 2

Maka didapatkan nilai dari  $x = 3$  ,  $y = 12$  ,dan  $z = 1$



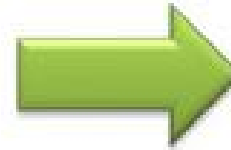
### Contoh soal:

3. Diketahui persamaan linear

$$x + y + z = 2$$

$$x + 3y + 2z = 4$$

$$2x + 2y + z = 4$$



$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Tentukan Nilai x, y dan z

Jawab:

Bentuk persamaan tersebut ke dalam matriks:

Baris ke 2 dikurangi baris ke 1

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -8 \end{array} \right]$$

Baris ke-3 dikurangi 2 kali baris ke-1



[Exit](#)

[Home](#)



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 4 & 3 & | & 8 \end{bmatrix}$$

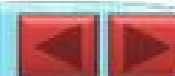
Baris ke-3 dibagi -1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{bmatrix}$$

Baris ke-3 kurangi 2 kali baris ke-2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 2 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{bmatrix}$$

Baris ke-2 dikurangi 1 kali baris ke-3



[Exit](#)

[Home](#)





$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{bmatrix}$$

Baris ke-1 dikurangi 1 kali baris ke-3  
dan Baris ke-2 dibagi 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{bmatrix}$$

Baris ke 1 dikurangi 1 kali baris ke 2

Maka didapatkan nilai dari  $x = -1$  ,  $y = -1$  , dan  $z = 4$



[Exit](#)

[Home](#)

# TUGAS / LATIHAN

Latihan:

1.  $3x + 2y = 5$

$$x + y = 2$$

2.  $2X_1 + X_2 + 4X_3 = 8$

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 = 10$$

$$X_1 + 3X_2 + 3X_3 = 8$$

Widyawan



**Terima kasih**