SISTEM PERSAMAAN LINIER

Tujuan :
Mhs Mampu membedakan sistem persamaan linear dg Substitusi, OBE dan Eliminasi

EKO SUHARYANTO - 081310792300

SEKOLAH TINGGI
MANAJEMEN INFORMATIKA DAN KOMPUTER
STMIK ERESHA

PERSAMAAN LINIER

- Sebuah garis dalam bidang x dan y secara umum dapat ditulis dalam bentuk
- $a_1x + a_2y = b$
- Secara lebih umum didefinisikan sebuah persamaan linier dengan *n* buah variabel
- $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$
- Dimana $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ adalah konstanta bilangan real

CONTOH PERSAMAAN LINIER

- $x + 3y = 7$
- $y = 1/2x + 3z + 1$
- $x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$
- $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$

BUKAN PERSAMAAN LINIER

- Persamaan linier tidak melibatkan suatu hasil kali ataupun akar variabel. Contoh:
- $x + 3y^2 = 7$
- $y - \sin x = 0$
- $3x + 2y - z + xz = 4$
- $x_1^{1/2} + 2x_2 + x_3 = 1$

SISTEM PERSAMAAN LINIER (SPL)

- Sebuah himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linier di dalam variabel-variabel x_1 x_2, x_3, … x_n disebut dengan sistem persamaan linier atau sistem linier.
- Urutan bilangan s_1, s_2, s_3,… s_n dinamakan sebuah pemecahan dari sistem tersebut jika $x_1=s_1$, $x_2=s_2$, $x_3=s_3$, …. $x_n=s_n$ adalah sebuah pemecahan dari tiap-tiap persamaan dalam sistem tersebut

CONTOH SPL

- $4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$
- $3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$

- Mempunyai pemecahan $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$
- Tetapi $x_1 = 1$, $x_2 = 8$, $x_3 = 1$ bukan pemecahan
- Mengapa??

MENCARI PENYELESAIAN SPL

- Grafik
- Substitusi
- Eliminasi
- Metode Gauss
- Metode Gauss-Jordan

METODE GRAFIK

- **Langkah I**
  - Gambarkan grafik masing – masing persamaan pada bidang Cartesius.
- **Langkah 2**
  a. Jika kedua garis berpotongan pada satu titik maka himpunan penyelesaiannya tepat memiliki satu anggota
  b. Jika kedua garis sejajar, maka himpunan penyelesaiaannya tidak memilki anggota. Dikatakan himpunan penyelesaiannya adalah himpunan kosong
  c. Jika kedua garis berimpit maka himpunan penyelesaiaannya memiliki anggota yang tak hingga banyaknya

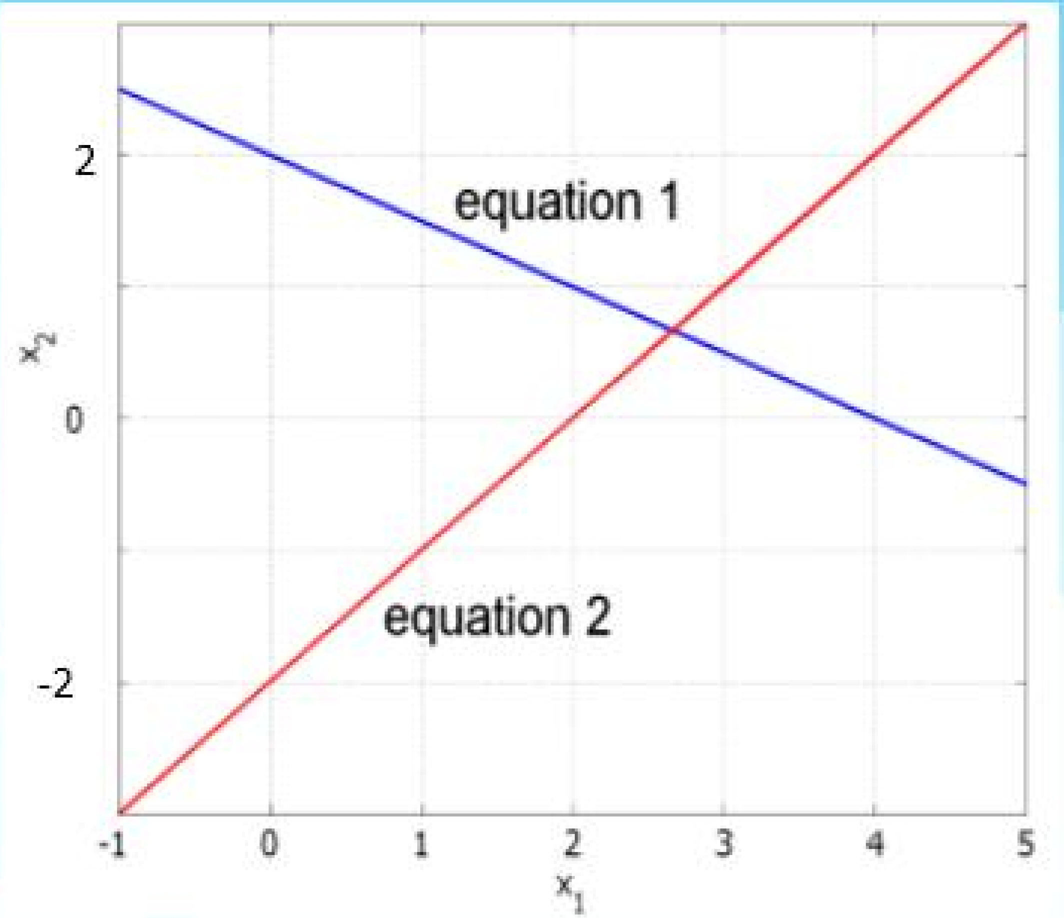
MEMILIKI SOLUSI

- Equation1:

  $x_1 + 2x_2 = 4$

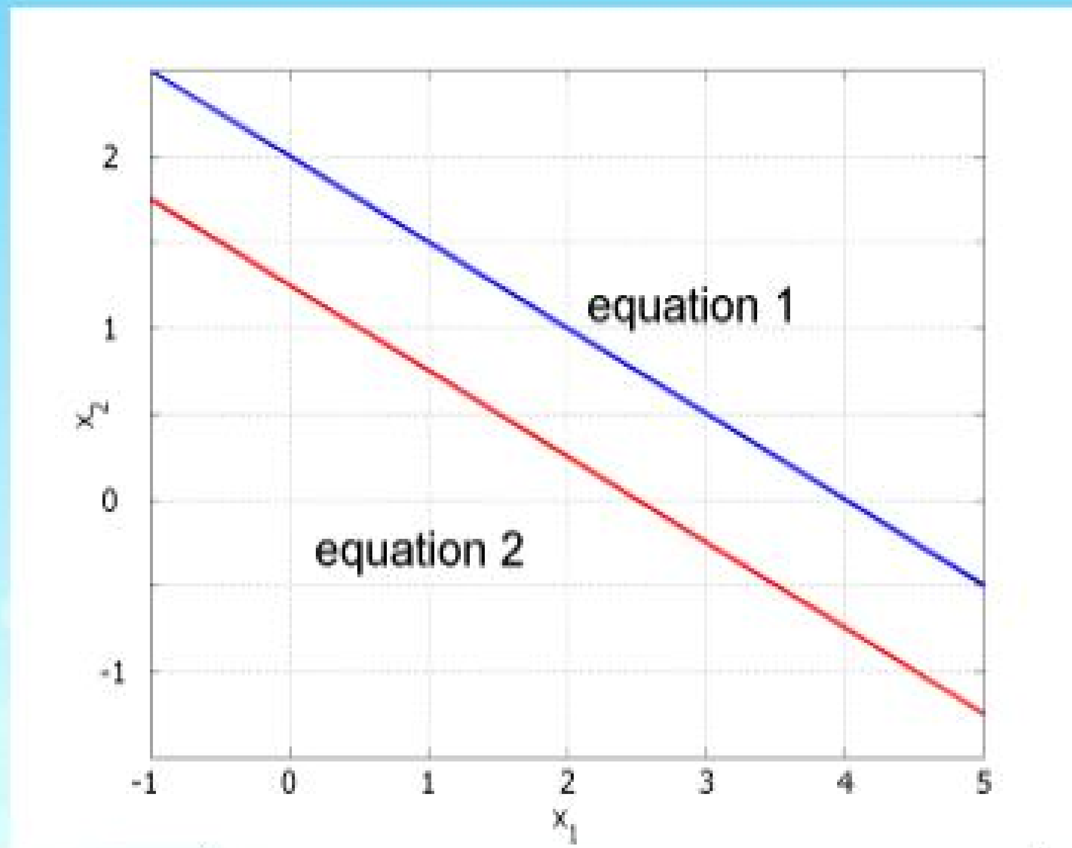
- Equation 2:

  $x_1 - x_2 = 2$



TIDAK MEMILIKI SOLUSI

- Equation1:
  $x_1 + 2x_2 = 4$
- Equation 2:
  $2x_1 + 4x_2 = 5$



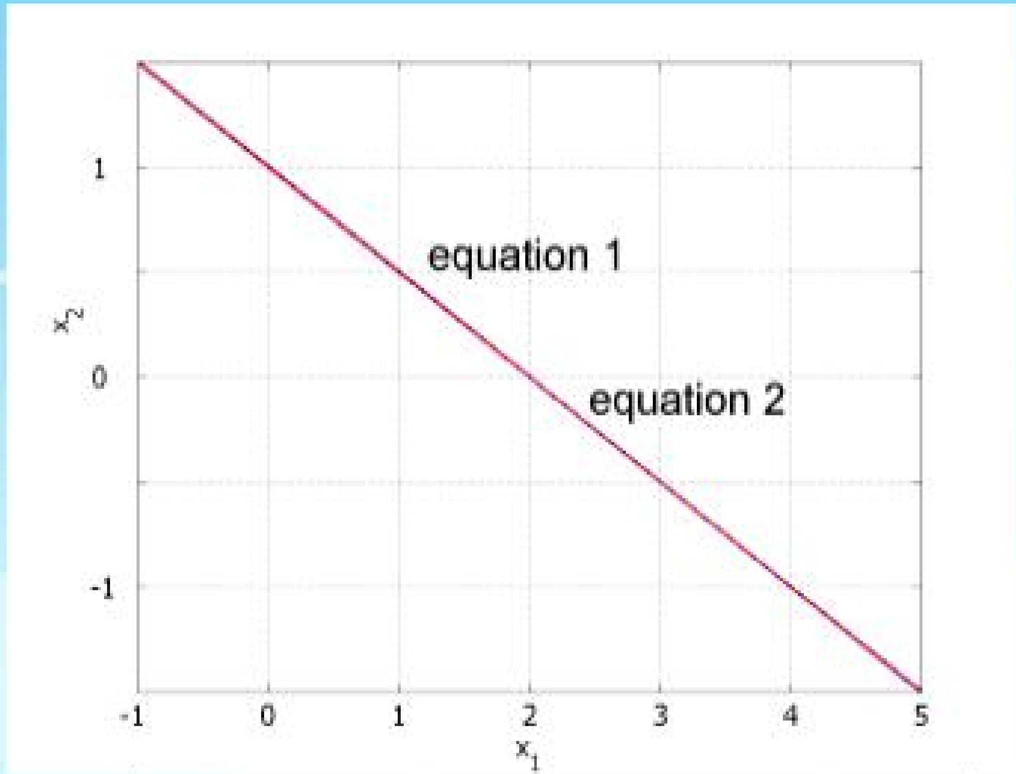
SOLUSI TAK BERHINGGA

- Equation1:

  $x_1 + 2x_2 = 4$

- Equation 2:

  $2x_1 + 4x_2 = 8$



METODE SUBSTITUSI

- **Langkah 1**

  Pilihlah salah satu persamaan (jika ada pilih yang sederhana), kemudian nyatakan x sebagai fungsi y atau y sebagai fungsi x

- **Langkah 2**

  Subtitusikan x atau y pada **langkah 1** ke persamaan yang lain

CONTOH SUBSTITUSI

- Diketahui ada dua persamaan
  - $x + y = 4$ (1)
  - $4x + 3y = 13$ (2)
- Dari persamaan (1) $x + y = 4$ didapat $y = 4 - x$ (3)
- Persamaan (3) Disubstitusikan ke persamaan (2)

$$
\begin{aligned}
4x + 3y &= 13 \\
4x + 3(4 - x) &= 13 \\
4x + 12 - 3x &= 13 \\
x + 12 &= 13 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

- Nilai $x = 1$ disubstitusikan ke persamaan $y = 4 - x$, diperoleh

  $y = 4 - 1$

  $y = 3$
- Jadi solusi untuk persamaan (1) dan (2) adalah $\{(1,3)\}$

METODE ELEMINASI

- Nilai x dicari dengan cara mengeliminasi peubah y sedangkan nilai y di cari dengan cara mengeliminasi peubah x

CONTOH METODE ELIMINASI

Contoh : Carilah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut :

$$2x + 3y = 13$$
$$3x + 4y = 19$$

Untuk mencari nilai x kita mengeliminasi peubah y

$2x + 3y = 13$	X 4	$8x + 12y = 52$
$3x + 4y = 19$	X 3	$9x + 12y = 57$ —
		$-x = -5$
		$x = 5$

$2x + 3y = 13$	X 3	$6x + 9y = 39$
$3x + 4y = 19$	X 2	$6x + 8y = 38$ —
		$y = 1$

Jadi, Himpunan penyelesaiannya adalah {(5,1)}

SOAL 1

- Di sebuah toko, Samijan membeli 3 barang A dan 4 barang B dan dia harus membayar Rp2.700,00. Sedangkan Tukimin harus membayar Rp3.600,00 untuk pembelian 6 barang A dan 2 barang B. Jika Ponirin membeli 1 barang A dan 1 barang B, maka ia harus membayar ....

SOAL 2

- Dono, Kasino, dan Indro berbelanja di pasar. Dono membeli dua bungkus merica, sebuah paprika dan sebuah jeruk purut dengan membayar Rp4.700,00. Kasino membeli sebungkus merica , dua buah paprika dan sebuah jeruk purut dengan membayar Rp4.300,00. Indro membeli tiga bungkus merica, dua buah paprika dan sebuah jeruk purut dengan membayar Rp7.100,00.
- Berapakah harga untuk sebungkus merica, sebuah paprika dan sebuah jeruk purut?

ELEMINASI GAUS

- Merubah sistem persamaan linier menjadi bentuk matriks

  $$[A][X]=[C]$$

- Terdiri dari dua tahap
  - Forward Elimination of Unknowns (Membentuk Eselon Baris)
  - Back Substitution

SPL → MATRIKS

$x_1 + 2x_2 = 4$

$x_1 - x_2 = 2$

Jika dirubah bentuknya menjadi matriks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

BENTUK ESELON BARIS

- Jika sebuah baris tidak terdiri seluruhnya dari angka nol, maka bilanggan tak nol pertama adalah 1 (dinamai 1 utama)
- Jika ada suatu baris yang terdiri seluruhnya dari 0, maka baris seperti itu dikelompokkan bersama-sama di bawah matriks
- Di dalam sebarang dua baris yang berurutan yang tidak terdiri seluruhnya dari 0, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah, letaknya lebih jauh ke kanan dari pada 1 utama pada baris yang lebih tinggi.

CONTOH BENTUK ESELON BARIS

- Gunakan OBE (Operasi Baris Elementer) untuk membentuk matriks ke dalam bentuk eselon baris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CONTOH KASUS

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 &= -2 \\
2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 &= 7 \\
-2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 1 \\
-5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix}
2 & 3 & -2 & -1 & -2 \\
2 & 5 & -3 & 1 & 7 \\
-2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\
-5 & 2 & 1 & 3 & 8
\end{bmatrix}
$$

FORWARD ELIMINATION (ESELON BARIS)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & -3 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} R_1' &= R_1/2 \\ R_2' &= R_2 - 2R_1' \\ R_3' &= R_3 - 2R_1' \\ R_4' &= R_4 - 5R_1' \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 19/2 & -6 & 1/2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 19/2 & -6 & 1/2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} R_1' &= R_1 \\ R_2' &= R_2/2 \\ R_3' &= R_3 + 4R_2' \\ R_4' &= R_4 + 19/2\, R_1' \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 & 9/2 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & -19 \\ 0 & 0 & -5/4 & -9 & -159/4 \end{bmatrix}$$

FORWARD ELIMINATION (ESELON BARIS)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 & 9/2 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & -19 \\ 0 & 0 & -5/4 & -9 & -159/4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} R_1' &= R_1 \\ R_2' &= R_2 \\ R_3' &= R_3/3 \\ R_4' &= R_4 + 5/4 R_3' \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 & -19/3 \\ 0 & 0 & 0 & -143/12 & -572/12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 & -19/3 \\ 0 & 0 & 0 & -143/12 & -572/12 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} R_1' &= R_1 \\ R_2' &= R_2 \\ R_3' &= R_3 \\ R_4' &= R_4/_{-143/12} \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 & -19/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 572/143 \end{bmatrix}$$

FORWARD ELIMINATION (ESELON BARIS)

$$
\begin{aligned}
x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 - x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 &= -1 \\
x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + x_4 &= \tfrac{9}{2} \\
x_3 - \tfrac{7}{3}x_4 &= -\tfrac{19}{3} \\
x_4 &= \tfrac{572}{143}
\end{aligned}
$$

$$x_4 = 4$$

BACK SUBSTITUTION

- Setelah didapat hasil $x_4 = 4$
- Lakukan subtitusi X_4 ke persamaan diatasnya untuk mencari x_3
- Lakukan lagi subtitusi x_3 dan x_4 ke persamaan diatasnya untuk mendapatkan x_2
- Terakhir, lakukan substitusi x_2, x_3, dan x_4 ke persamaan pertama untuk mendapatkan x_1

UIGM

Contoh Soal :

Diketahui persamaan linear

$$x + 2y + z = 6$$

$$x + 3y + 2z = 9$$

$$2x + y + 2z = 12$$

Tentukan Nilai x, y dan z

Jawab:

Bentuk persamaan tersebut ke dalam matriks:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 12 \end{array}\right]$$

Operasikan Matriks nya:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Baris ke-2 dikurangi baris ke-1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Baris ke-3 dikurangi 2 kali baris ke-1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right]$$

Baris ke-3 ditambah 3 kali baris ke-2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Baris ke-3 dibagi dengan 3

Maka mendapatkan 3 persamaan linier baru yaitu

$x + 2y + z = 6$

$y + z = 3$

$z = 3$

Kemudian lakukan substitusi balik maka didapatkan:

$y + z = 3$

$y + 3 = 3$

$y = 0$

$x + 2y + z = 6$

$x + 0 + 3 = 6$

$x = 3$

Jadi nilai dari $x = 3$, $y = 0$,dan $z = 3$

SOAL 3

- Dono, Kasino, dan Indro berbelanja di pasar. Dono membeli dua bungkus merica, sebuah paprika dan sebuah jeruk purut dengan membayar Rp4.700,00. Kasino membeli sebungkus merica , dua buah paprika dan sebuah jeruk purut dengan membayar Rp4.300,00. Indro membeli tiga bungkus merica, dua buah paprika dan sebuah jeruk purut dengan membayar Rp7.100,00.
- Berapakah harga untuk sebungkus merica, sebuah paprika dan sebuah jeruk purut?


Terima kasih