Листок 5.

Задача 1. (cl) Докажите, что $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt \le \frac{1}{x}e^{-x^2/2}$ при $x > 0$. Оцените величину этого интеграла для $x = 2$ и $x = 3$.

Задача 2. (cl) Вероятность искажения одного бита информации при передачи 10000 битов с помощью некоторого устройства равна 1/2. Оцените вероятность того, что более 51% битов будет искажено.

Задача 3. (cl) В некотором поселке 2500 жителей. Раз в сутки из поселка в город ходит электричка. Каждый из жителей примерно 6 раз в месяц ездит в город, выбирая дни поездок по случайным мотивам независимо от остальных жителей. Какой вместительностью (чем меньше – тем лучше) должен обладать поезд, чтобы он переполнялся с вероятностью не более 0.05?

Задача 4. (cl) Робот «сапер» обследует местность на предмет неразорвавшихся снарядов. Среднее число снарядов на единицу площади равно λ. Радиус обзора сканирующего устройства равен R. Робот двигается прямолинейно и равномерно со скоростью v. Вероятность обнаружения снаряда равна $p(v)$. Найдите вероятность обнаружения k снарядов за время t. Предполагая, что $p(v) = e^{-\alpha v}$, найдите значение скорости, при котором вероятность обнаружения хотя бы одного снаряда максимальна.

Задача 5. (cl) Лягушка прыгает с кочки A на кочку B и обратно, а может и остаться на кочке, на которой она уже сидит. Если лягушка сидит на кочке A, то она с вероятностью p остается на ней, а с вероятностью $1-p$ прыгает на кочку B. Если лягушка сидит на кочке B, то она с вероятностью r остается на ней, а с вероятностью $1-r$ прыгает на кочку A. Лягушка принимает решение независимо от своих предыдущих прыжков. Выпишите стохастическую матрицу P соответствующей цепи Маркова. Найдите вероятность того, что начав свое движение с кочки A через три прыжка лягушка окажется на кочке B. Найдите стационарное распределение μ.

Задача 6. (cl) В условии предыдущей задачи для всякого начального распределения $\nu = (\nu(A), \nu(B))$ рассмотрим распределение $\mu^k = \nu P^k$. Докажите, что величины $\Delta^k(A) = \mu^k(A) - \mu(A)$ и $\Delta^k(B) = \mu^k(B) - \mu(B)$ удовлетворяют равенствам

$$\Delta^{k+1}(A) = (1-p-r)\Delta^k(A), \quad \Delta^{k+1}(B) = (1-p-r)\Delta^k(B).$$

Выведите из этих равенств, что если $0 < p < 1$, $0 < r < 1$, то $\mu^t \to \mu$. Что происходит в случае, когда $p = 1$ или $r = 1$?

Задача 7. (cl) Пусть задана цепь Маркова ξ_k с переходными вероятностями $P(x, y)$ и начальным распределением ν. Выразите вероятности $P(\xi_k = x)$, $P(\xi_k = x, \xi_{k+m} = y)$. Докажите равенство $P(\xi_{k+m} = x | \xi_k = y) = P(\xi_m = x | \xi_0 = y)$.

Задача 8. (cl) Рассмотрим схему Бернулли N кратного бросания монеты с вероятностью выпадения «орла» p. Пусть $\eta_k = 1$ если на k-м месте выпал «орел» и $\eta_k = -1$, если на k-м месте выпала «решетка». Образуют ли цепь Маркова величины (a) $\xi_k = \eta_k \eta_{k+1}$, (b) $\xi_k = \eta_1 \cdots \eta_k$, (c) $\xi_k = f(\xi_k, \xi_{k+1})$, где $f(-1,-1) = 1$, $f(-1,1) = 2$, $f(1,-1) = 3$, $f(1,1) = 4$. Для цепей Маркова найдите матрицы переходных вероятностей.

Задача 9. (cl) Игральная кость перекладывается с одной грани на одну из четырёх соседних равновероятно и независимо от предыдущего. К какому пределу при $k \to \infty$ стремится вероятность того, что игральная кость на k-м перекладывании лежит на грани с номером 6, если изначально игральная кость лежала именно на этой грани?

Задача 10. (hw) В партии 2000 изделий. Вероятность того, что изделие является бракованным, равна $0,001$. Проверка качества обнаруживает брак с вероятностью 0.9. Найдите вероятность того, что k бракованных изделий пройдут проверку незамеченными.

Задача 11. (hw) Матрица вероятностей перехода цепи Маркова имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Начальное распределение $\nu = (0.7, 0.2, 0.1)$. Множество состояний $X = \{1, 2, 3\}$. Найдите вероятности $P(\xi_2 = 1)$, $P(\xi_2 = 2)$, $P(\xi_2 = 3)$, $P(\xi_0 = 1, \xi_1 = 3, \xi_2 = 3, \xi_3 = 2)$. Найдите стационарное распределение.

Задача 12. (hw) В N ячейках последовательно и независимо друг от друга равновероятно размещают частицы. Пусть ξ_k – число ячеек, которые остались пустыми после размещения k частиц, где $0 \le k \le M$. Доказать, что величины ξ_k образуют цепь Маркова. Найдите вероятности перехода.