3 СЕМЕСТР

Домашняя работа по математическому анализу

ФКН ПМИ 2 курс основной поток 2019-2020

Листок 2. Задачи 10-18. Крайний срок сдачи задач 10-14: 19.10.2019, задач 15-18: 09.11.2019

Номер варианта в каждой задаче вычисляется по следующему алгоритму

N_{task} = номер задачи;

N_{grp} = номер вашей группы;

N_{stud} = ваш номер в списке группы (см. здесь);

$N = (N_{task} - 1) \cdot 300 + (N_{grp} - 183) \cdot 35 + N_{stud}$

Ваш вариант — N-ая десятичная цифра числа π после запятой (можно спросить у wolfram alpha, или посмотреть здесь. Задачи со звездочкой сдаются семинаристам.

Задача 10. Исследовать последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ на сходимость и равномерную сходимость на указанном множестве E:

0. $f_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{\cos nx}{\sqrt{n+x}}\right), \quad E = [0, +\infty);$

1. $f_n(x) = (n + \ln x)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{nx}, \quad E = (0, 1);$

2. $f_n(x) = \ln\left(1 + \sin\dfrac{x\sqrt{n}}{x^2+n}\right), \quad E = (1, +\infty);$

3. $f_n(x) = \dfrac{1}{n\sqrt{x}}\ln\dfrac{e^{nx}}{nx}, \quad E = (0, 4);$

4. $f_n(x) = n\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}} - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right), \quad E = [0, 1];$

5. $f_n(x) = \dfrac{\ln(nx)}{nx^2}, \quad E = [1, +\infty);$

6. $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+n^2x^4}, \quad E = [0, 1];$

7. $f_n(x) = \dfrac{n}{x}\ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right), \quad E = (0, 10);$

8. $f_n(x) = \ln(\sin x + \frac{1}{n}), \quad E = (0, \pi/6);$

9. $f_n(x) = \ln\left(x + \dfrac{\ln^2 x}{nx+1}\right), \quad E = (0, 1).$

Задача 11. Найти предел функциональной последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ на множестве E, и исследовать последовательность на равномерную сходимость на этом множестве:

0. $f_n(x) = x^n - 3x^{n+2} + 2x^{n+3}, \quad E = [0, 1];$
1. $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{x + 3n + 2}, \quad E = [0, +\infty);$
2. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}, \quad E = \mathbb{R};$
3. $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n}, \quad E = [0, 2];$
4. $f_n(x) = n^3x^2e^{-nx}, \quad E = [0, +\infty);$
5. $f_n(x) = n(x^{1/n} - 1), \quad E = [1, 3];$
6. $f_n(x) = x^n - x^{2n}, \quad E = [0, 1];$
7. $f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{2n}}), \quad E = (0, +\infty);$
8. $f_n(x) = (x - 1)x^n, \quad E = [0, 1];$
9. $f_n(x) = nx(1 - x)^n, \quad E = [0, 1].$

Задача 12. Доказать равномерную сходимость функционального ряда на указанном множестве E:

0. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 3^{-\sqrt{kx}}, \quad E = [1, +\infty);$
1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos kx \sin 1/kx}{4 + \ln^2(kx)}, \quad E = [2, +\infty);$
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(5x)^k}{k\sqrt{k + x}}, \quad E = [0, \frac{1}{5}];$
3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-x} \ln^2 k, \quad E = [2, +\infty);$
4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(x - 1)^k}{(2k + 1)4^k}, \quad E = [-1, 3];$
5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{x^2 + k^3}, \quad E = \mathbb{R};$
6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x}{4 + k^3x^2}, \quad E = [0, +\infty);$
7. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(x + 2)^k \cos^2 kx}{\sqrt{k^3 + x^4}}, \quad E = [-3, -1];$

8. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{kx}{1+k^5x^2}, \quad E=\mathbb{R};$

9. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{x}}{x+k}\right)^3, \quad E=[0,+\infty).$

Задача 13. Исследуйте ряд на сходимость и равномерную сходимость на указанном промежутке E:

0. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(x+2k-1)(x+2k+1)}, \quad E=[0,+\infty);$

1. $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \dfrac{1}{2^k \operatorname{tg}(\pi x/k)}, \quad E=(0,1);$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{2k+\sin x}, \quad E=\mathbb{R};$

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{x^3}{k\ln^2(k+1)}, \quad E=[1,+\infty);$

4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{k} \dfrac{\sin kx}{2kx^2+1}, \quad E=[0,+\infty);$

5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{e^{-x/k}\cos kx}{x^2+k^2x}, \quad E=[1/10,+\infty];$

6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k(1-x^k), \quad E=(1/2,1);$

7. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx \sin x}{\sqrt[3]{k+x}}, \quad E=[0,+\infty);$

8. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin(\sqrt{x}/k)}{\sqrt{x^2+k^2}}, \quad E=[0,+\infty);$

9. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} x^k, \quad E=[1,+\infty).$

Задача 14. Найти область сходимости и область абсолютной сходимости ряда (то есть те x, при которых ряд сходится/абсолютно сходится):

0. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{x^2}{k}+x\right)^k;$

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-\ln x^2};$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-kx} \sin kx$;

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{tg}^k x}{k^2+4}$;

4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}} e^{-k \sin x}$;

5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k}{3} \ln\left(1+\dfrac{x}{k}\right)^k$;

6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{x^2+\sqrt{k}}$;

7. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k}{\ln^k(x+3)}$;

8. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\ln^k x}{k^2}$;

9. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2}\right)^k (e^{x/k}-1)^k$.

Задача 15. Найдите интервал сходимости ряда и исследуйте поведение этого ряда в его граничных точках:

0. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{x}{\sin k}\right)^k$;

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\log_2 k]}}{k} x^k$;

2. $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{\left(1+2\cos\frac{\pi k}{4}\right)^k}{\ln k} x^k$;

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(3+(-1)^k)^k}{k} x^k$;

4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right) x^k$;

5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{3^{-\sqrt{k}} x^k}{\sqrt{k^2+1}}$;

6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin\frac{\pi}{2^k}}{x^k}$;

7. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2} e^{-kx}$;

8. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{3^{3k}(k!)^3}{(3k)!} \operatorname{tg}^k x$;

9. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2k)} \left(\dfrac{x-1}{2}\right)^k$.

Задача 16. Представить функцию рядом Маклорена и найти радиус сходимости этого ряда:

0. $\sin \frac{x^3}{3}$;

1. $\dfrac{1}{(1-x^3)^2}$;

2. $e^x + 3e^{-2x}$;

3. $x^2 \ln(4+x^2)$;

4. $\sqrt{1+x^2}$;

5. $(1+x^2) \operatorname{arctg} x$;

6. $\arccos(5x)$;

7. $\dfrac{1+x}{e^x}$;

8. $\dfrac{1}{x^2-2x-3}$;

9. $\dfrac{3x+4}{x^2+x-6}$.

Задача 17. Вычислите сумму степенного ряда:

0. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k \ln^k x}{2^k k!}$;

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^k}{k2^k}$;

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kx^{k+1}$;

3. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (2k+1)x^k$;

4. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{2k+1}$;

5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k(k+2)x^k$;

6. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k+1)x^{3k}}{k!}$;

7. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^{4k+1}}{4k+1}$;

8. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{3k+1}}{3k+1}$;

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k!}$.

Задача 18.* Полилогарифм — это аналитическая функция, заданная степенным рядом:

$$\mathrm{Li}_s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^s},$$

где s — это некоторый фиксированный параметр. Например,

$$\mathrm{Li}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x),$$

откуда и происходит название. А еще, например,

$$\mathrm{Li}_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}.$$

1. Докажите, что при $s \in \mathbb{Z}$, $s \leqslant 0$ функция $\mathrm{Li}_s(x)$ является рациональной функцией от x (то есть отношением двух многочленов).

2. Докажите, что функция $f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} (\mathrm{Li}_s(x) - x)$ является элементарной (там, где она определена). Для этого нужно ее явно описать.

3. Дзета-функция Римана определяется как $\zeta(s) = \mathrm{Li}_s(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$, при $s > 1$. Найдите $\sum_{s=2}^{\infty} (\zeta(s) - 1)$.