Домашнее задание по теории вероятности №4

Агаев Фархат

30 сентября 2019 г.

Задача № 10

Обозначим:

- A_i - событие, что болен i-ой болезнью.
- p_i - вероятность, что болен i-ой болезнью.
- $p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \frac{1}{6}, \quad p_3 = \frac{1}{3}$
- B - событие, что тест дал 4 положительных и 1 отрицательный результат.

Посчитаем по формуе полной вероятности:

$$P(B) = C_5^4 \cdot (P(B|A_1) \cdot P(A_1) + \\ + P(B|A_2) \times P(A_2) \ + P(B|A_3)) \cdot P(A_3)) = \\ 5 \cdot (0{,}1^4 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}5 + 0{,}2^4 \cdot 0{,}8 \cdot (1/6) + 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 \cdot (1/3) \approx 0{,}1105$$

Ответ

По формуле Байеса:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)} = \frac{0{,}1^4 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}5 \cdot 5}{0{,}1105} \approx 0{,}002$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2) \cdot P(A_2)}{P(B)} = \frac{0{,}2^4 \cdot 0{,}8 \cdot 5 \cdot (1/6)}{0{,}1105} \approx 0{,}0009$$

$$P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3) \cdot P(A_3)}{P(B)} = \frac{09^4 \cdot 0{,}1 \cdot (1/3) \cdot 5}{0{,}1105} \approx 0{,}9886$$

Задача №11

Обозначим:

- A_N^2, - событие, что при N испытаниях будет ровно 2 успеха.
- A_N^{2k} - событие, что при N испытаниях будет четное число успехов.
- $p = \frac{1}{2}$ - вероятность успеха.
- $q = \frac{1}{2}$ - вероятность провала.

$$P(A_N^2) = C_N^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

$$\begin{aligned} P(A_N^{2k}) =& \frac{C_N^0 + C_N^2 + C_N^4 + C_N^6 + \dots}{2^N} = \\ =& \frac{C_{N-1}^0 + C_{N-1}^1 + C_{N-1}^2 + C_{N-1}^3 + \dots}{2^N} = \frac{2^{N-1}}{2^N} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ответ:

$$P(A_N^2 | A_N^{2k}) = \frac{P(A_N^2 \cap A_N^{2k})}{P(A_N^{2k})} = C_N^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$$

Задача №12

Обозначим:

- A_n^m, - событие, что m успехов произойдут раньше, чем n неудач.
- p - вероятность успеха.
- $(1-p)$ - вероятность неудачи
- кодировка, 0 - неудача, 1 - успех.

Если кодировать наши слачаи словами, то получится, что такое

$$\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{m+n-2}1$$

$$\underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{m+n-3}1$$

$$\underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{m+n-4}1$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\underbrace{11111}_{m}$$

первые (m - 1 + n - 1) элементы это m - 1 единички и n - 1 нолики, то есть мы просто посчитаем число расстановок C_{m+n-2}^{m-1}, таким образом посчитаем другие слова тоже C_{m+n-3}^{m-1}, C_{m+n-4}^{m-1}, ..., 1
или если посмотреть с другой стороны по увелечению, то получим C_{m-1}^{m-1}, C_{m-2}^{m-1}, ..., C_{m+n-2}^{m-1}

ответ:

$$P(A_n^m) = \sum_{i=0}^{n-1} C_{m-1+i}^{m-1} \cdot (1-p)^i \cdot p^m$$