3) $S_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$, $S = 1$; 4) $S_n = \dfrac{1}{8}\left(1 - \dfrac{1}{(2n+1)^2}\right)$, $S = \dfrac{1}{8}$;

5) $S_n = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$, $S = 1$;

6) $S_n = 1 - \sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$, $S = 1 - \sqrt{2}$.

**6.** 1) $S_n = \ln \dfrac{n+1}{2n}$, $S = -\ln 2$; 2) $S_n = \ln \dfrac{n+2}{3n}$, $S = -\ln 3$;

3) $S_n = \ln \dfrac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$, $S = \ln \dfrac{2}{3}$; 4) $S_n = \ln \dfrac{2n+1}{n+1}$, $S = \ln 2$;

5) $S_n = \dfrac{1}{2}\left(\sin 2 - \sin\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)\right)$, $S = \dfrac{1}{2}\sin 2$;

6) $S_n = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2^n} - \cos\alpha\right)$, $S = \sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$;

7) $S_n = 1 - \dfrac{1}{(n+2)!}$, $S = 1$; 8) $S_n = \operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+1}$, $S = \dfrac{\pi}{4}$.

**8.** 1) $5/36$; 2) $-1/36$; 3) $1/90$; 4) $31/18$.

**9.** 1) $(-1+i)/4$; 2) $(1+2i)/5$; 3) $1+i/2$; 4) $-1+i$.

**10.** 1) $\dfrac{a(\cos\alpha - a)}{1 - 2a\cos\alpha + a^2}$; 2) $\dfrac{a\sin\alpha}{1 - 2a\cos\alpha + a^2}$.

**19.** 1) Расходится; 2) может как сходиться, так и расходиться.

## § 14. Ряды с неотрицательными членами

### СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

**1. Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами ($a_n \geqslant 0$, $n \in N$) сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху, т. е существует число $M > 0$ такое, что для каждого $n \in N$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant M.$$

**2. Признак сравнения.** Если существует номер $n_0$ такой, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняются неравенства

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n,$$

то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Если $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$ для всех $n \geqslant n_0$ и существует конечный и отличный от нуля предел
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n},$$
то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

В частности, если $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$ при $n \geqslant n_0$ и
$$a_n \sim b_n \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$
то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

**3. Интегральный признак сходимости ряда.** Если функция $f(x)$ неотрицательна и убывает на промежутке $[1, +\infty)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

**4. Метод выделения главной части.** При исследовании сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами иногда удается получить с помощью формулы Тейлора асимптотическую формулу вида
$$a_n \sim c/n^{\alpha} \quad (n \to \infty,\ c > 0).$$
В этом случае ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

**5. Признаки Даламбера и Коши.**

Признак Даламбера. Если для ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0 \quad (n \in N),$$
существует такое число $q$, $0 < q < 1$, и такой номер $n_0$, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство
$$a_{n+1}/a_n \leqslant q,$$
то этот ряд сходится; если же для всех $n \geqslant n_0$ имеет место неравенство
$$a_{n+1}/a_n \geqslant 1,$$
то ряд расходится.

На практике удобно пользоваться признаком Даламбера в предельной форме: если $a_n > 0$ $(n \in N)$ и существует
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda,$$

то при $\lambda < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $\lambda > 1$ расходится.

При $\lambda = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться. Например, для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ число $\lambda$ равно 1, однако первый из этих рядов расходится, а второй сходится.

Признак Коши. Если для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geqslant 0 \quad (n \in N),$$

существует такое число $q$, $0 \leqslant q < 1$, и такой номер $n_0$, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant q,$$

то этот ряд сходится; если же для всех $n \geqslant n_0$ имеет место неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1,$$

то ряд расходится.

На практике обычно применяют признак Коши в предельной форме: если $a_n \geqslant 0$ $(n \in N)$ и существует

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda,$$

то при $\lambda < 1$ ряд сходится, а при $\lambda > 1$ расходится.

При $\lambda = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

**6. Признаки Раабе и Гаусса.**

Признак Раабе. Если $a_n > 0$ $(n \in N)$ и существует

$$\lim_{n \to \infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q,$$

то при $q > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $q < 1$ расходится.

Признак Гаусса. Если $a_n > 0$ $(n \in N)$ и

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\delta}},$$

где $|\gamma_n| < c$, $\delta > 0$, то:

а) при $\alpha > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $\alpha < 1$ расходится;

б) при $\alpha = 1$ этот ряд сходится в случае, когда $\beta > 1$, и расходится в случае, когда $\beta \leqslant 1$.