Билет 1

Выборка: $(X_1 .. X_n) = X$, X_i - одинак распр. сл. вел.; θ_0 - распр X_i

Статистика: $T(X)$ - сл. вел.

Оценка: $\hat{\theta}_n(x)$ - ф-ия от выборки со знач. во мн-ве парам

цель: $\hat{\theta}_n$ приближ. к θ_0

I Несмещ: $\underbrace{\mathbb{E}_\theta}_{\text{среднее распределения}} \hat{\theta}_n(x) = \theta$

II Состоят: $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{\theta}_n(X) = \theta$ по вер-ти P_θ (часто из ЗБЧ)

III Сильн сост: $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{\theta}_n(X) = \theta$ P_θ - п.н.

IV Ассимпт. норм:
- несмещ. и
- $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n(X) - \theta) \xrightarrow{d} Z \sim N(0, \sigma^2(\theta))$

V Эффект.:
- несмещ и
- наим дисп. среди несмещ.

т.е. $\mathbb{D}(\hat{\theta}_n(x) - \theta) = \mathbb{E}(\hat{\theta}_n(X) - \theta)^2 - \underbrace{(\mathbb{E}(\hat{\theta}_n(X) - \theta))^2}_{0} \le$
$\le \mathbb{E}_\theta(\theta_n^*(X) - \theta)^2$

<u>∄ эфф оц. в классе всех оценок</u>

▷ Пусть ∃ $\Rightarrow \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_n(X) - \theta)^2 \le \mathbb{E}(\theta_0 - \theta)^2$

т.к. справа 0
$\mathbb{E}_\theta(\theta_n - \theta)^2 \le 0$
$\Downarrow$ по теореме

можем подставить ∀ конкр. знач., например $\theta_0 \Rightarrow \hat{\theta}_n \xrightarrow{п.н.} \theta_0$, а можем подставить другую const. и $\hat{\theta}_n$ будет сх-ся к ней $\Rightarrow$ противоречие ◁

<u>Единственность эффективной оценки</u>

▷ Пусть θ_1 и θ_2 - эфф $\Rightarrow \mathbb{E}\theta_1 = \mathbb{E}\theta_2 = \theta \Rightarrow \mathbb{E}\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \theta \Rightarrow \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ - несмещ. оц

$\mathbb{D}\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \frac{1}{2}(\mathbb{D}\theta_1 + \mathbb{D}\theta_2) - \mathbb{D}\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \overset{\text{т.к. } \mathbb{D} \text{ неотр}}{\le} \frac{1}{2}(\mathbb{D}\theta_1 + \mathbb{D}\theta_2)$ (1)

Проверка: $\cdot 4$: $\mathbb{D}(\theta_1 + \theta_2) + \mathbb{D}(\theta_1 - \theta_2) = 2(\mathbb{D}\theta_1 + \mathbb{D}\theta_2)$
$\mathbb{D}\theta_1 + 2\,cov(\theta_1, \theta_2) + \mathbb{D}\theta_2 + \mathbb{D}\theta_1 - 2\,cov(\theta_1, \theta_2) + \mathbb{D}\theta_2$

θ_1 и θ_2 - эфф $\Rightarrow$ их $\mathbb{D}$ - наим $\Rightarrow \mathbb{D}\theta_1 = \mathbb{D}\theta_2 \le \mathbb{D}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ (2)

Из (1) и (2): $\mathbb{D}\theta_1 = \mathbb{D}\theta_2 \le \mathbb{D}\frac{\theta_1+\theta_2}{2} \le \frac{1}{2}(\mathbb{D}\theta_1 + \mathbb{D}\theta_2) = \mathbb{D}\theta_1 = \mathbb{D}\theta_2 \Rightarrow$ везде равенства

$\Rightarrow \mathbb{D}\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = 0 \Rightarrow \mathbb{D}(\theta_1 - \theta_2) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}(\theta_1 - \theta_2)^2 = 0 \Rightarrow \theta_1 \xrightarrow{п.н.} \theta_2$ (по теореме) ◁

Предложение Асс. норм $\Rightarrow$ состоят.

$\exists\ \sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n(X)-\theta\right)\xrightarrow{d} Z \sim N(0, \sigma^2(\theta)) \quad \Big|\ast\ \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\hat{\theta}_n(X)-\theta \xrightarrow{d} Z\cdot 0 \Rightarrow$

$\hat{\theta}_n \xrightarrow{d} \theta = \text{const} \Rightarrow \hat{\theta}_n(X) \xrightarrow{P} \theta$ ∎

Билет 2

Метод Моментов

НОРСВ $(X_1 \ldots X_n)$ ф распр F_θ

$\exists f$ - непр $\mathbb{E}_\theta |f(X_1)| < \infty$

Найдём $\hat{\theta}_n(X)$: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) = \mathbb{E}_\theta f(X_1) =: h(\theta)$

$$\hat{\theta}_n(X) = h^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum f(X_i)\right)$$

- чтобы это было правдой, необходима единственность реш.:

$a = \mathbb{E}_\theta f(X_1)$ и равносильность $\theta = h^{-1}(a)$

Состоятельность:

$\cancel{\mathbb{E}_\theta\left(\frac{1}{n}\sum f(X_i)\right) = \mathbb{E}_\theta\left(\mathbb{E}_\theta f(X_1)\right) = \mathbb{E}_\theta f(X_1)}$

По ЗБЧ: $\frac{\sum f(X_i)}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}_\theta f(X_1)$, h^{-1} - непр $\Rightarrow h^{-1}\left(\frac{\sum f(X_i)}{n}\right) \to h^{-1}\left(\mathbb{E}_\theta f(X_1)\right) = h^{-1}(h(\theta)) = \theta$

$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta \Rightarrow$ состоят.

Ассимпт. норм

Теорема: $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, $b_n \to 0$, f - непр $\Rightarrow \frac{f(a + b_n \xi_n) - f(a)}{b_n} \to f'(a) \cdot \xi$

$$\xi_n = \sqrt{n}\left(\frac{f(X_1) + \ldots f(X_n)}{n} - \mathbb{E}_\theta f(X_1)\right) \xrightarrow[\text{(ЦПТ)}]{d} Z \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{D} f(X_1))$$

$b = \frac{1}{\sqrt{n}}$; $a = \mathbb{E}_\theta f(X_1)$; $h^{-1} = f$ и непр $\Rightarrow$

$$\sqrt{n}\left(h^{-1}\left(\mathbb{E}_\theta f(X_1) + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n}\,\frac{\sum f(X_i)}{n} - \mathbb{E}_\theta f(X_1)\right)\right) - h^{-1}(a)\right) \to (h^{-1})'(a) \cdot Z.$$

$$\sqrt{n}\left(h^{-1}\left(\frac{\sum f}{n}\right) - h^{-1}(\underbrace{\mathbb{E} f(X)}_{h(\theta)})\right)$$

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \to (h^{-1})'(a) \cdot Z.$$

Билет 3

Обобщ. ρ: · непр. распр $\Rightarrow$ обычная пл-ть
· дискр $\Rightarrow$ $\rho(t)=P(\xi=t)$ ξ-сл. вел. $t\in\left[\begin{smallmatrix}\text{обл.}\\ \text{знач }\xi\end{smallmatrix}\right]$

Обобщ ρ в-ра: $p(X,\theta)=\rho_\theta(x_1)..\rho_\theta(x_n)$ назыв. <u>ф. правдопод.</u>

<u>Лог. ф. правд</u>: $L(X,\theta)=\ln p(X,\theta)=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\rho_\theta(x_i)$

<u>Оценка макс правд</u>: $\hat\theta_n(X)$ если при фикс $X=(x_1..x_n)$ $\hat\theta_n(X)$ - т. max $p(X,\theta)$

Заметим, что: 1) в $\underset{\max}{\text{т.}}\hat\theta_n(X)$ $\partial^2_{\theta\theta}L(X,\theta)$ описывает, как быстро лог. ф. правд. меняется в окр-ти т макс. (т.к. $\partial_\theta L=0$)

Тейлор: $L(X,\theta)\approx L(X,\hat\theta_n(X))+\frac{1}{2}\partial^2_{\theta\theta}L(X,\hat\theta_n(X))(\theta-\hat\theta_n(X))^2$

2) Вторая произв. отрицц $\Rightarrow$ вычисл. ее $\mathbb{E}$ со зн. "–"

$\underset{\max}{>0};<0$ I-я произв. (убывает) $\Rightarrow$ II отриц

$$-\mathbb{E}\,\partial^2_{\theta\theta}=-\int(\partial^2_{\theta\theta}\underbrace{\ln p(x,\theta_0)}_{L})p(x,\theta_0)dx \overset{\circledast}{=} -\int\Big(\overbrace{\frac{\partial^2_{\theta\theta}p(x,\theta_0)}{p(x,\theta_0)}}^{A}-\frac{(\partial_\theta p(x,\theta_0))^2}{p^2(x,\theta_0)}\Big)p(x,\theta_0)dx$$

$$\left(\frac{p'}{p}\right)'=\frac{p''p-p'\cdot p'}{p^2}$$

$\exists$ <u>выполн. усл. рег.</u>: $p(x,\theta)>0$, непр. дифф. по θ, $\int$ и $'$ - перестановочны $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\int_{\mathbb{R}^n}p\,dx=1\Rightarrow\int_{\mathbb{R}^n}\partial p\,dx=\Big(\int p\,dx\Big)'=0\underset{\text{аналогично}}{=}\int\partial^2_{\theta\theta}p(x,\theta)dx\Rightarrow$$

$$\mathbb{E}_{\theta_0}\partial^2_{\theta\theta}L(X,\theta_0)=\left[\begin{smallmatrix}\text{в }\circledast\\ A=0\end{smallmatrix}\right]=-\int\Big(\frac{(\partial_\theta p(x,\theta_0))^2}{p^2(x,\theta_0)}\Big)p(x,\theta_0)dx=-\int(\partial_\theta\ln p)^2p\,dx=$$
$$=-\mathbb{E}(\partial_\theta L(X,\theta_0))^2$$

Энтропия: $\xi\in\{x_1..x_N\}$ с вер-тями $p_1..p_N$ $\quad\exists\, 0\log 0:=0$

$\boxed{H=-\sum p_j\log p_j\geq 0}$ - <u>энтропия</u>

Мин зн: $p=0$, кроме одного $\Rightarrow H=-1\log_2 1=0$

Макс зн: $p_j=\frac{1}{N}\Rightarrow H=-\frac{1}{N}\cdot N\log_2\frac{1}{N}=\log_2 N$

$\hookrightarrow$ т.к. $\sum p_j\log_2\frac{p_j}{1/N}\geq 0\Rightarrow\sum p_j\log_2 p_j\geq\sum p_j\log_2\frac{1}{N}\Rightarrow -H\geq\underbrace{\sum p_j}_{1}\log_2\frac{1}{N}=-\log N$

<u>Лемма</u>

$\exists\, f>0\ g>0$ - вер-ные пл-ти $(\int f dx=\int g dx=1)$ $\Rightarrow\int f\ln\frac{f}{g}dx\geq 0$

▶ $\ln s \geq 1-\frac{1}{s}$ $\left(\begin{array}{l} s\ln s - s + 1 \overset{?}{\vee} 0 \\ \text{der: } \ln s + 1 - 1 = \ln s \geq 0 \\ \Rightarrow \text{т. min } s=1, \text{ а в этой} \\ \text{т. знак } = \Rightarrow \text{всё остальн.} \geq \end{array}\right) \Rightarrow \ln\frac{f}{g} \geq 1-\frac{g}{f} \Rightarrow f\ln\frac{f}{g} \geq f-g$

$\int f \ln\frac{f}{g} \geq \int f-g = 0$ ▨

Пример

η – ~~...~~ сл. вел, значения из эксперимента

предварительно: плотность η: P(„орел") = p ⇒ f иначе g

Байес: $P(A|B) = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}$

$$P(\xi=0|\eta=x) = \frac{P(\xi=0)\cdot P(\eta=x|\xi=0)}{P(\eta=x)} = \frac{pf(x)}{pf(x)+q\,g(x)} \qquad P(\xi=1|\eta=x) = \frac{q\,g(x)}{pf(x)+q\,g(x)}$$

Имеем: $\ln\frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{\ln\frac{P(\xi=0|\eta=x)}{P(\xi=1|\eta=x)}}_{P(\text{знач. монетки после эксп})} - \underbrace{\ln\frac{p}{q}}_{P(\text{до эксп})} \Rightarrow$ | $\ln\frac{f}{g}$ = разность ln шансов орла до и после эксп. ⇒ показывает кол-во инфы которое даёт ТХ.

· Среднее кол-во инфы относит пл-ти f выражается формулой: $\int f(x)\ln\frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ – энтропия распр с пл-тью f относит распр с пл-тью g $EX = \int x\,\rho_x\,dx$

Про состоятельность

Рассм: $W(\theta) = \frac{1}{n}E_{\theta_0}L = \frac{1}{n}E_{\theta_0}\ln p(X,\theta) = \frac{1}{n}\cdot n\,E\ln\rho_\theta(X_1) = E\ln\rho_\theta(X_1) = \int\rho_{\theta_0}\ln\rho_\theta(x)\,dx$

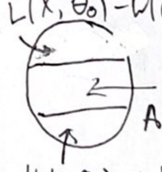
$W(\theta_0) - W(\theta) = \int\rho_{\theta_0}\ln\frac{\rho_{\theta_0}}{\rho_\theta} \geq 0$ – по лемме

$\Rightarrow W(\theta) \leq W(\theta_0)$ (**)

Теорема

$\exists\,\theta\in(\alpha,\beta)$ $\rho_\theta(x)$ – непр по θ $\forall x$ $L(x,\theta)$ имеет 1-у т. лок. макс. $\theta_n(x)$ в (α,β)

$\Rightarrow \theta_n(x) \xrightarrow{P} \theta_0$ (т.е. θ явл. сост.)



$|\frac{1}{n}L(X,\theta_0) - W(\theta_0)| \geq \alpha \cap A$

$|\frac{1}{n}L(X,\theta_0\pm\delta) - W(..)| \geq \alpha \cap A$

$\cap A \Rightarrow$

$|L(X,\theta_0) - W| < \alpha \cap$

$|L(X,\theta_0\pm\delta - W| < \alpha \cap A$

будет только больше

▶ $\exists\,\delta>0 \Rightarrow W(\theta_0\pm\delta) < W(\theta_0)$ из (**)

Выберем α: $W(\theta_0) - W(\theta_0\pm\delta) > 2\alpha$

Рассмотрим: $P[\underbrace{\frac{1}{n}L(X,\theta_0\pm\delta) \geq \frac{1}{n}L(X,\theta_0)}_{A}] \leq$

$$\leq \underset{①}{P(|\tfrac{1}{n}L(x,\theta_0\pm\delta) - W(\theta_0\pm\delta)| \geq \alpha)} + \underset{②}{P(|\tfrac{1}{n}L(X,\theta_0) - W(\theta_0)| > \alpha)} + \underset{③}{P(W(\theta_0\pm\delta)+\alpha \geq W(\theta_0)-\alpha)}.$$

В ③-ем слагаемом раскроем модули: $|\frac{1}{n}L(X,\theta_0) - W(\theta_0)| < \alpha \Rightarrow \frac{1}{n} - W > -\alpha \Rightarrow \frac{1}{n}L(x,\theta_0) > W(\theta_0) - \alpha$ | ⇒

$|\frac{1}{n}L(X,\theta_0\pm\delta) - W(\theta_0\pm\delta)| < \alpha \Rightarrow \frac{1}{n}L^{(\theta_0\pm\delta)} < W(\theta_0\pm\delta) + \alpha$

$W(\theta_0\pm\delta) + \alpha > \frac{1}{n}L(X,\theta_0\pm\delta) \geq \frac{1}{n}L(X,\theta_0) > W(\theta_0) - \alpha \Rightarrow W(\theta_0) - W(\theta_0\pm\delta) < 2\alpha \leftarrow$ не м.б. по усл.

⇒ ③-е слаг. = 0.

① и ② → 0 по ЗБЧ: $\frac{1}{n}L(x,\theta) \to W(\theta)$; def L: $\frac{\sum\ln\rho_\theta(x_i)}{n} \to E\ln\rho_\theta$ (выше д-но) $\Rightarrow P(\frac{1}{n}L(x,\theta_0\pm\delta) < \frac{1}{n}L(x,\theta_0)) \to 1$

т.е. $L(x,\theta_0\pm\delta) < L(x,\theta_0)$ п.н. ⇒ на $(\theta_0-\delta;\theta_0+\delta)$ есть т. лок. макс. п.н.

⇒ т.к. по усл. ∃ 1 лок макс $\theta_n \in [\theta_0-\delta;\theta_0+\delta] \Rightarrow \lim_{n\to\infty}P(|\theta_n(X) - \theta_0| \leq \delta) = 1$ ◀

Билет 4

Теорема (Асимптотическая нормальность оц. макс правд.)

- $\exists\, \theta \in (\alpha, \beta)$
- $p_\theta(x)$ — непр по θ
  - положит.
  - 3-ды непр. диффер
  - операции $\int$ и $'$ перестановочны
- $\forall x$ $L(x, \theta)$ имеет 1-у т. лок. max $\theta_n(x)$ в (α, β)
- $\left|\dfrac{\partial^3 \ln p_\theta(x)}{\partial \theta^3}\right| \le H(x)$
- $\mathbb{E} H_\theta(X_1) = \int H_1 p_\theta(x)\,dx \le M$ (не зав. от θ)

Тогда оц., полученная по методу мах. правд. будет асс. норм (с асс. дисп. $\frac{1}{i(\theta)}$)

1) Тейлор: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f^{(2)}(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots \Rightarrow$

$$\frac{1}{n}\partial_\theta L(X,\theta) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \partial_\theta \ln p_{\theta_0}(x_j) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \partial^2_{\theta\theta} \ln p_{\theta_0}(x_j)(\theta-\theta_0) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum^n \partial^3_{\theta\theta\theta} \ln p_\theta(x_j)(\theta-\theta_0)^2 =$$

$$\begin{cases} A_0(x) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^n \partial_\theta \ln p_{\theta_0}(x_j) \\ A_1(x) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^n \partial^2_{\theta\theta} \ln p_{\theta_0}(x_j) \\ A_2(x) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^n H(x_j) = \left(\dfrac{1}{n}\sum \partial^3_{\theta\theta\theta} \ln p_{\theta_0}(x_j)\right)\cdot\dfrac{1}{\delta} \end{cases}$$

— т.к. по усл. нерав. $\Rightarrow |\delta| \le 1$

$$= A_0(x) + A_1(x)(\theta-\theta_0) + \frac{1}{2}\delta A_2(\theta-\theta_0)^2$$

2) $\exists\, \theta_n(x)$ - оц. по методу макс правд. $\Rightarrow$

$$A_0(X) + A_1(X)(\theta_n(X)-\theta_0) + \frac{1}{2}\delta A_2(\theta_n(X)-\theta_0)^2 = 0$$

$$\sqrt{n}(\theta_n(X)-\theta_0) = \frac{-\sqrt{n}\,A_0(X)}{A_1(X) + \frac{1}{2}\delta A_2(\theta_n(X)-\theta_0)}$$

3) Чтобы узнать, к чему стремится п.ч посмотрим на п.ч.

$$A_1 \xrightarrow{\text{ЗБЧ}} \mathbb{E}\,\partial^2_{\theta\theta} \ln p_{\theta_0}(X_1) \underset{\uparrow}{=} -\mathbb{E}_\theta(\partial_\theta \ln p_\theta(X_1))^2 = -i(\theta)$$

д-во в 3 билете

$\cdot\ A_2(X)\left(\Theta_n(X)-\theta_0\right) \xrightarrow[\text{ЗБЧ}]{P_{\theta_0}} \underbrace{\mathbb{E}_{\theta_0} M(X_1)}_{\le M = const \text{ (по усл.)}} \cdot 0 = 0.$

Θ_n – оц. макс правд. => состоят

из 3 билета

$\cdot\ A_0$: ЦПТ: $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n - \sqrt{n}\mu \to N(0, \sigma^2)$

$\frac{1}{\sqrt{n}} S_n = \sqrt{n} A_0(X)$

$\mu = \mathbb{E}\, \partial_\theta \ln \rho_\theta(X_1) = \mathbb{E}\frac{\rho'}{\rho} = \int \frac{\rho'}{\rho}\cdot\rho\, dx = \int \rho'_\theta dx = \Big(\underbrace{\int \rho\, dx}_{1}\Big)' = 0.$ =>

$\sqrt{n} A_0(X) \to N\left(0, \mathbb{D}(\ln \rho_{\theta_0}(X_1))\right)$

$\cdot\ \mathbb{D}(\ln \rho_{\theta_0}(X_1)) = \mathbb{E}\left(\ln \rho_{\theta_0}(X_1)'\right)^2 - \underbrace{\left(\mathbb{E}\ln \rho_{\theta_0}(X_1)'\right)^2}_{\mu^2 = 0} = i(\theta_0)$

4) $\sqrt{n}\left(\Theta_n(X)-\theta_0\right) \xrightarrow{d_{\theta_0}} \frac{1}{i(\theta_0)} N(0, i(\theta_0)) = N\left(0, \frac{1}{i(\theta_0)}\right)$ ◭

Билет 5

Инф-ра Фишера: $I(\theta) := \mathbb{E}_\theta [\partial_\theta L(X,\theta)]^2$

для выборки $X_1 \dots X_n$ с обобщ. p_θ

Усл. регулярности

обобщ. пл-ть $p>0$, непр, дифф по θ.

дифф-ние и инт-ние перестановочны

Свойство:

Пусть выполн. усл. рег $\Rightarrow I(\theta) = \mathbb{D}(\partial_\theta L(X,\theta)) = n\, i(\theta)$, где

$i(\theta) = \mathbb{E}_\theta(\partial_\theta \ln p_\theta(X_1))^2$ — инф-ра Фишера 1-го испытания

$\blacktriangleright$ $\mathbb{E}\,\partial_\theta L(X,\theta) = \int \frac{\partial_\theta p(x,\theta)}{p(x,\theta)} p\,dx = \left(\int p(x,\theta)\,dx\right)'_\theta = 0$

$\Rightarrow I(\theta) = \mathbb{E}_\theta(\partial_\theta L(X,\theta))^2 - 0^2 = \mathbb{D}(\partial_\theta L(X,\theta))$

$\cdot\ \partial_\theta L(X,\theta) = \sum_{j=1}^n \partial_\theta \ln p_\theta(X_j) \Rightarrow \mathbb{D}(\partial_\theta L(X,\theta)) = \left[\text{т.к. величины незав.}\right] =$

$= \sum \mathbb{D}\,\partial \ln p_\theta(X_j) \underset{\uparrow}{=} n\mathbb{D}(\partial_\theta \ln p_\theta(X_j)) = n\mathbb{E}_\theta(\partial_\theta \ln p_\theta(X_1))^2 = n\, i(\theta)$

одинак распр. $\blacksquare$

Неравенство Рао-Крамера

Пусть $X=(X_1 \dots X_n)$ выборка с p_θ
выполн. усл рег.
$I(\theta) > 0$
$\theta_n(X)$ — произв. несмещ. оц. парам. $\tau(\theta)$

$\Rightarrow \mathbb{D}\theta_n(X) \geq \frac{(\tau'(\theta))^2}{I(\theta)}$

$\blacktriangleright$ $\mathbb{E}\,\theta_n(X) = \tau(\theta)$ (несмещ.) $\Rightarrow \tau'(\theta) = (\mathbb{E}\,\theta_n(X))'_\theta = \left(\int \theta_n(x) p_\theta(x,\theta)\,dx\right)'$

$= \int \theta_n(x)\,\partial_\theta p(x,\theta)\,dx = \left[(\int p)' = 0\right] = \left[\text{добавим const}\right] = \int(\theta_n - \tau(\theta)) \frac{\partial_\theta p}{p}\cdot p\,dx =$

$= \mathbb{E}_\theta\left[(\theta_n(X) - \tau(\theta))\,\partial_\theta L(X,\theta)\right]$

Нерав. Коши-Буняк: $\mathbb{E}(\xi\cdot\eta) \leq \sqrt{\mathbb{E}(\eta)^2 \mathbb{E}|\xi|^2} \Rightarrow$

$\tau'(\theta) \leq \sqrt{\underbrace{\mathbb{E}_\theta(\theta_n(X) - \tau(\theta))^2}_{= \mathbb{D}(\theta_n(X) - \overset{=const}{\tau(\theta)}) = \mathbb{D}\theta_n(X)} \underbrace{\mathbb{E}(\partial_\theta L)^2}_{I(\theta)}} = \sqrt{\mathbb{D}\theta_n(X)}\cdot\sqrt{I(\theta)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{D}\,\theta_n \geqslant \frac{(\tau'(\theta))^2}{I(\theta)}$$ ▨

Критерий Равенства

▶ В К-Б равенство $\Longleftrightarrow$ $\theta_n(X)-\tau(\theta)$ пропорц $\partial_\theta L$

$$\big(\theta_n(X)-\tau(\theta)\big)=C(\theta)\,\partial_\theta L(X,\theta)$$

Эффективности оценки:

$(\Rightarrow)$ Равенство $\Rightarrow$ $\mathcal{D}$-миним $\Rightarrow$ эфф по опр.

$(\Leftarrow)$ эфф $\Rightarrow$ миним $\Rightarrow$ равенство ▨

Замечание

если θ_n - несмещ. и равенство в Р-К $\Rightarrow$ θ_n - оц. макс. правд:

θ_n - наша оц

θ - оц. макс правд.

Верно: $\theta_n-\theta=C\cdot\partial_\theta L(X,\theta)=0$ т.к θ-макс правд $\Rightarrow$ $L'_\theta(X,\theta)=0$.

$\Rightarrow \theta_n=\theta.$

Билет 6 Доверительные интервалы

- ∃ заданы 2 статистики $\theta_1(X)$ и $\theta_2(X)$
Случайный интервал $(\theta_1(X), \theta_2(X))$ назыв. <u>доверительн.</u> для парам. θ с ур. доверия $1-\alpha$, если:
$\forall \theta: P_\theta(\theta_1 < \theta < \theta_2) \geq 1-\alpha.$

- Если задана посл-ть пар статистик $\theta_1^n(X)$ и $\theta_2^n(X)$ для которой: $\liminf\limits_{n\to\infty} P_\theta(\theta_1^n(X) < \theta < \theta_2^n(X)) \geq 1-\alpha$
говорят, что задан <u>асимпт-кий довер-ный интервал</u>

- <u>Пример</u>
$X_1 \dots X_n$ – распр. $N(\theta, 1) \Rightarrow \sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta) \sim N(0,1)$
∃ z_φ т.ч. $\Phi(z_\varphi) = \varphi$ (z_φ – квантиль норм. распр.)
$\Rightarrow P_\theta\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta) < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \left[-z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-(1-\frac{\alpha}{2})} \text{ т.к. распр Гаусса симм}\right] =$
$= \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) - \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1-\alpha$
$\Rightarrow P_\theta\left(\overline{X}_n - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} < \theta < \overline{X}_n + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$ – точный доверит. интерв.
– интервал хороший, т.к. при ув. #эксп (n) длина $\to 0$.

<u>Пример. Нерав. Чернова</u>
∃ $X_1 \dots X_n$ – выборка из распр. Бернулли с вер-тью успеха θ
Чернов: $P(|\overline{X} - \mathbb{E}\overline{X}| > t) \leq 2e^{(-t^2 \cdot n^2)/(4\sum(b_j - a_j)^2}$ $x_j \in [b_j, a_j]$ т.е. $b_j - a_j = 1$.
$P(|\overline{X}_n - \theta| \geq t) \leq 2e^{-\frac{nt^2}{4}}$
"вер-ть попасть в хвост" $< \alpha \Rightarrow 2e^{-\frac{nt^2}{4}} = \alpha \Rightarrow t = \frac{2\sqrt{-\ln(\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{n}}$
раскрываем модуль, подставляем $t \Rightarrow$
Доверительный интервал: $\left(\overline{X}_n - \frac{2\sqrt{-\ln(\alpha/2)}}{\sqrt{n}}; \overline{X}_n + \frac{2\sqrt{-\ln(\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{n}}\right)$

<u>Определение</u>
Статистика $V(X, \theta)$ назыв. <u>центральной</u>, если её распр. не зав. от θ. и при фикс X ф-я монотонна по θ.

∃ $P_\theta(v_1 < V(X,\theta) < v_2) = const = 1-\alpha$ (возможно, т.к. V независ. с θ)
В силу монот. $v_1 < V < v_2$ равносильно $\theta_1^* < \theta < \theta_2^*$ (для некот. θ_1^*, θ_2^*)

Часто $V = -\sum \ln F_\theta(X_j)$ $F_\theta(X)$ – ф. расп X_1 (есть монотонн.)

Пример с помощью центральн. стат

$\exists X_1 \ldots X_n$ – выборка равном расп $[0, \theta] \Rightarrow \frac{1}{\theta} X_j \sim U[0,1]$

Возьмём $X_{(n)}$ – статистику максимума $X_1 \ldots X_n$

$V(X, \theta) = \frac{1}{\theta} X_{(n)} \Rightarrow F_V(t) = t^n$ ($\approx$ "$\max < t \Leftrightarrow \forall X_j < t$) – незав. от θ.

• Доверительный интервал:

$$1-\alpha = F_V(1) - F_V\left(\frac{1}{\alpha^n}\right) = P(\alpha^{1/n} < V(X,\theta) < 1) = P\left(\alpha^{\frac{1}{n}} < \frac{X_{(n)}}{\theta} < 1\right) =$$

$$= P\left(X_{(n)} < \theta < \frac{X_{(n)}}{\alpha^{1/n}}\right)$$

• Длина интервала:

$X_{(n)} / \alpha^{1/n} - X_{(n)} = X_{(n)}\left(\alpha^{-\frac{1}{n}} - 1\right)$ т.е. пропорц $\alpha^{-\frac{1}{n}} - 1$

$$\alpha^{-1/n} = \exp\left[-\frac{1}{n}\ln\alpha\right] = [\text{Тейлор}] = 1 - \frac{1}{n}\ln\alpha + \bar{o} = \underline{\underline{O}}\left[\frac{1}{n}\right]$$

Пример Асимптот. довер. интерв.

$\exists \hat{\theta}_n(X)$ – асс. норм оц θ с асимпт. дисп. $\sigma^2(\theta)$

т.е. $\sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta}_n(X) - \theta}{\sigma(\theta)} \to N(0,1)$

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\theta)} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \to 1-\alpha$$

Но $\sigma(\theta)$ – сложно $\Rightarrow$ заменим на что-то, что сход. к $\sigma(\theta)$, тогда сохр. сх-ть по расп к $N(0,1)$, т.к.:

$$\hat{\sigma}_n(X) \xrightarrow{P} \sigma(\theta) \Rightarrow \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\hat{\sigma}_n} = \underbrace{\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sigma(\theta)}}_{\xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{\sigma(\theta)}{\hat{\sigma}(X)}}_{\xrightarrow{P} 1 = const \Rightarrow \text{стремл. под}} \to Z \sim N(0,1)$$

$\Rightarrow$ Интервал: $\left(\hat{\theta}_n(X) - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}; \frac{\hat{\theta}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\right)$

Кто такой $\hat{\theta}_n(X)$?

1) if $\sigma(\theta)$ – непр.

$\left.\hat{\theta}_n \text{ – асс норм} \Rightarrow \text{состоят} \Rightarrow \hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta\right| \Rightarrow \sigma(\hat{\theta}_n) \xrightarrow{P} \sigma(\theta)$

Возьмём $\hat{\sigma}(X) = \sigma(\hat{\theta}_n(X))$

2) выборочн. дисп.: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X}_n)^2$

Знаем: $S^2 \xrightarrow{P} \sigma^2(\theta)$

Билет 7

Доверит. интерв. для μ и σ^2 распр-я $N(\mu, \sigma^2)$

Интерв для μ:

I) σ - известно: $X_1 \dots X_n$ - выборка $N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Интервал: $\left(\overline{X}_n - \frac{\sigma z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + \frac{\sigma z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right)$ ур. доверия $1-\alpha$

(из пред билета; $\Phi(z_\varphi) = \varphi$)

II) σ^2 - неизв. $\Rightarrow$ подменим на выборочн дисп.

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$$

$\overline{X}_n$ и S_n^2 - незав. (знаем)

Причём $(n-1)\sigma^{-2} S_n^2 \sim \chi^2_{n-1} = \sum^{n-1} (Z_j^2)$ $\quad Z_j \sim N(0,1)$ и незав.

Для него известно: $\rho_{\chi_n}(S) = C_n S^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{S}{2}} I_{\{S>0\}}$

Рассмотрим статистику

$$T_{n-1}(X) = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{S_n} = \frac{\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}}{\sqrt{\sigma^{-2} S_n^2}} = \frac{Z_n}{\sqrt{R_n}}, \quad R_n \sim \frac{1}{n}\chi^2_{n-1}$$

и Z незав

$$\rho_{T_{n-1}}(x) = C_n \left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-n/2}$$

T_{n-1} - распр. Стьюдента с $n-1$ степ. свободы

Доверит интерв. с помощью центр. стат: $(n-1)\sigma^{-2} S_n^2$

$\exists\, F_{\chi^2_{n-1}}(x_{\alpha/2}) = \alpha/2 \quad F_{\chi^2_{n-1}}(x_{1-\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$$\Rightarrow P\left(x_{\alpha/2} \le \frac{(n-1) S_n^2}{\sigma^2} \le x_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$\Rightarrow$ Интервал: $\left(\frac{\sqrt{n-1}\, S_n}{\sqrt{x_{1-\frac{\alpha}{2}}}}, \frac{\sqrt{n-1}\, S_n}{\sqrt{x_{\alpha/2}}}\right)$

Билет 8

$X_1 \ldots X_n$ выборка с парам θ

Предполож о парам θ — <u>статистич гипотеза</u>

<u>Простая</u>, если $\theta = \theta_0$

Принимаем или отклоняем основную гипотезу H_0

<u>Критическое мн-во</u> K: $P(X \in K)$ — мало, но если $X \in K \Rightarrow H_0$ отвергаем

<u>Альтернативная</u> гипотеза H_1 — конкурирует с H_0

Ошибка I рода: отклонили истин. H_0

$P(\text{ош I рода}) = P_{\theta_0}(X \in K) = \alpha$

α — <u>уровень значимости критерия</u>

Ошибка II рода: приняли ложн. H_0

≈ не попали в критич. мн-во, хотя должны были

$P(\text{ош. II}) = P_{\theta_1}(X \notin K) = \beta$

≈ при верной H_1 приняли H_0

$1-\beta$ — <u>мощность критерия</u>

<u>Функция мощн крит.</u>: $W(K, \theta) := P_\theta(X \in K)$

<u>Задача</u>: При фикс ур. ош. I рода минимиз. возможную ош II р.

<u>Пример</u>

$\exists X_1 \ldots X_n$ $X_j \sim N(\mu, \sigma^2)$ Проверить: $H_0: \mu = \mu_0$ против $H_1: \mu = \mu_1$

Для μ при известном σ доверит. интерв. ур дов $1-\alpha$:

$$P_\mu\Big(\underbrace{\bar X_n - \frac{\sigma \cdot z_{1-\alpha/2}}{\sqrt n} \le \mu \le \bar X_n + \frac{\sigma z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt n}}_{\bar K}\Big) = 1-\alpha$$

$P(\mu_0 \notin \bar K) = \alpha \Rightarrow$ при откл H_0 $P(\text{ош I}) = \alpha$ = "ур. зн."

если $\mu_0 \in \bar K \Rightarrow$ принимаем H_0

<u>Крит мн-во</u> $K = \{X : \bar X_n > \mu_0 + \frac{\sigma z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt n}\} \cup \{X : \bar X_n < \mu_0 - \frac{\sigma z_{1-\alpha/2}}{\sqrt n}\}$

"<u>мощн крит</u>" $= 1-\beta$, $\beta = P_{\mu_1}(\mu_0 \notin K) = P_{\mu_1}\left(\bar X_n - \frac{\sigma z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt n} \le \mu_0 \le \bar X_n + \frac{\sigma z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt n}\right) =$

[арифм преобр: $-\bar X_n - \mu_0 + \mu_1$ $*\left(\frac{\sqrt n}{-\sigma}\right)$]

$$= P_{\mu_1}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sqrt n(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma} \le \frac{\sqrt n(\bar X_n - \mu_1)}{\sigma} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sqrt n(\mu_0-\mu_1)}{\sigma}\right) = \Phi(\text{правое}) - \Phi(\text{левое})$$

$$= \Phi\Big(z_{1-\frac{\alpha}{2}} + \underbrace{\frac{\sqrt{n}(\mu_0-\mu_1)}{\sigma}}_{*}\Big) - \Phi\Big(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} + \underbrace{\frac{\sqrt{n}(\mu_0-\mu_1)}{\sigma}}_{*}\Big) = \beta \qquad \Phi(-\infty)\to 0, \quad \Phi(+\infty)\to 1$$

при $\mu_0 < \mu_1$ $* < 0 \Rightarrow$ при $n\to\infty$ $* \to -\infty \Rightarrow \Phi \to 0 \Rightarrow \beta \to 0-0=0$

$\mu_0 > \mu_1$ $* > 0 \Rightarrow$ $n\to\infty$ $* \to +\infty \Rightarrow \Phi\to 1 \Rightarrow \beta \to 1-1=0$ $\Big| \Rightarrow \beta \to 0 \Rightarrow$

Мощн крит: $1-\beta \to 1$.

- Мощность критерия показывает, насколько хорошо критерий отличает H_0 от H_1
- Если при $n\to\infty$ $1-\beta\to 1 \Rightarrow$ крит. называют состоятельным

Нижняя оценка сумм вер-тей 1-го и 2-го рода

$$1-\frac{1}{2}\int |f_0(x)-f_1(x)|\,dx$$

▶ $\alpha+\beta = P_0(X\in K) + P_1(X\notin K) = \int_K f_0(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}\setminus K} f_1(x)\,dx = 1 + \int_K f_0(x)-f_1(x)\,dx$

(H_0: f_0 - плотность; H_1: f_1)

Введём $S = \{x : f_0(x) < f_1(x)\} \Rightarrow$

$$-\int_S |f_0-f_1|\,dx = \boxed{\int_S (f_0(x)-f_1(x))\,dx} \overset{\circledast}{=} \int_{\mathbb{R}^n\setminus S} (f_1(x)-f_0(x))\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n\setminus S} |f_1-f_0|\,dx \;(=)$$

на S раскр с "-" не на S с "-"

[⊛ Проверим: $\underbrace{\int_S f_0 + \int_{\mathbb{R}^n\setminus S} f_0}_{1=\int p\,dx} - \underbrace{\int_S f_1 - \int_{\mathbb{R}^n\setminus S} f_1}_{1} = 0 \Rightarrow$ верно]

(=) [числа равны => равны полусумме] $= \boxed{-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |f_0-f_1|\,dx}$

$$\Rightarrow \alpha+\beta \geq 1 + \int_{K\cap S} (f_0-f_1)\,dx \geq 1 + \int_S f_0-f_1\,dx = 1 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |f_0-f_1|\,dx$$

уменьшили область; на S $\int < 0 \Rightarrow$ интегр по S - вычли больше

◢

$\Rightarrow$ α и β нельзя сделать одновр. мал.

Билет 9 Теорема Н-П или как построить наиб. мощн. кр.

$\exists H_0$: выборка $X_1 .. X_n$ имеет распр f_0

H_1: f_1

$\exists f_0$ и $f_1 > 0$ на $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим $K_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{f_1(x)}{f_0(x)} \geqslant t\}$ $t \geqslant 0$

Предположим: $\forall \alpha \in (0,1)$ $\exists t(\alpha) > 0$: $P_0(X \in K_t) = \alpha$

Теорема Нейтана-Пирсона

Наиболее мощн. крит. ур. знач α задаётся критич. мн-вом $K = K_{t(\alpha)}$

Возьмём Q: $P_0(X \in Q) \leq \alpha = P_0(X \in K_{t(\alpha)})$ (фикс α) $\Rightarrow$ по опр. пл-ти:

$$\int_Q f_0(x)\,dx \leq \int_{K_{t(\alpha)}} f_0(x)\,dx$$

Хотим сравнить мощности $\Rightarrow$ сравн. $1-\beta = 1 - P_1(X \notin K) = P_1(X \in K)$:

$$P_1(X \in K_{t(\alpha)}) - P_1(X \in Q) = \int_{K_{t(\alpha)}} f_1\,dx - \int_Q f_1\,dx = [\text{вычтем пересеч}] = \int_{K_{t(\alpha)} \setminus Q} f_1\,dx - \int_{Q \setminus K_{t(\alpha)}} f_1(x)\,dx \geqslant$$

$\left[\begin{array}{l}\text{на } K\setminus Q: f_1 > t f_0 \\ \text{на } Q \setminus K: \text{обратн}\end{array}\right]$ $$\geqslant t \int_{K_{t(\alpha)} \setminus Q} f_0\,dx - t\int_{Q \setminus K_t} f_0\,dx = [\text{вернём пересеч}] = t(\alpha)\underbrace{\left(P_0(X \in K_t) - P_0(X \in Q)\right)}_{\text{по усл. } Q} \geqslant 0$$

$\Rightarrow$ Мощн. $K_{t(\alpha)}$ всегда больше или равн. мощн. др. крит. ур. α ▨

Пример $X_1 ... X_n$ - выборка $x_j \sim N(\theta, 1)$

H_0: $\theta = \theta_0$

H_1: $\theta_1 > \theta_0$

Возьмём систему мн-в: отнош пл-тей $\geqslant t$:

$\left(\rho_N = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{-n/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum (x_j - \theta)^2\right]\right)$ $\frac{\rho_{\text{альтерн}}}{\rho_{\text{нулев}}} \geqslant t$

$K_t := \{x = (x_1 .. x_n) : \exp\left(-\frac{1}{2}\sum (x_j - \theta_1)^2 + \frac{1}{2}\sum (x_j - \theta_0)^2\right) \geqslant t\}$

$$\left\{x \in (x_1 .. x_n): \sum x_j \theta_1 - \sum x_j \theta_0 \geqslant \underbrace{\ln t + \frac{1}{2}\sum \theta_1^2 - \frac{1}{2}\sum \theta_0^2}_{\tau}\right\}$$

$$\left\{x \in (x_1 .. x_n): (\theta_1 - \theta_0) \sum x_j \geqslant \tau\right\} \Big\} \; \theta_1 > \theta_0 \Rightarrow$$

$$K_t = \left\{x \in (x_1 .. x_n): \; \overline{X}_n \geqslant c\right\}$$

Найдем с:

$$\alpha = P_{\theta_0}(\overline{X}_n \geqslant c) = P_{\theta_0}\left(\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0) \geqslant \sqrt{n}(c - \theta_0)\right) \overset{\mathbb{E}=0}{=} 1 - \Phi(\sqrt{n}(c - \theta_0))$$

$$\sqrt{n}(c - \theta_0) = z_{1-\alpha} \Rightarrow c = \theta_0 + \frac{z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$$

Мощность: $1 - \beta = P_{\theta_1}(\overline{X}_n \geqslant c) = 1 - \Phi(\sqrt{n}(c - \theta_1)) = [\text{подставим } c] =$

$$= 1 - \Phi\Big(\underbrace{\sqrt{n}\,(\underbrace{\theta_0 - \theta_1}_{<0})}_{\xrightarrow{n\to\infty} -\infty} + z_{1-\alpha}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$\Phi(-\infty) = 0.$

Билет 10 χ^2-критерий Пирсона

$X_1 \dots X_n$ – выборка дискр. распр.; $X_j \in \{a_1 \dots a_k\}$ с вер-тями $\{p_1 \dots p_k\}$

H_0: $p_i = p_{i_0}$ $\forall i \in \{1 \dots k\}$ – т.е. конкретн дискр. распр.

H_1: распр вер-тей отлично от $\{p_{1_0} \dots p_{k_0}\}$

$\nu_i :=$ "$\# a_i$ в $X_1 \dots X_n$"

Теорема

Если гипотеза H_0 верна $\Rightarrow$ сл. вел. $\overline{\chi}^2 := \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\nu_i - np_{i_0}}{\sqrt{np_{i_0}}} \right)^2 \xrightarrow{d} \chi^2_{k-1}$

(χ^2 с $k-1$ deg. своб)

- $\nu_i = \sum_{j=1}^{n} I_{\{X_j = a_i\}}$ – незав. сл. вел $\Rightarrow$ применим ЦПТ к в-ру:

$$\left(\frac{\nu_1 - np_{1_0}}{\sqrt{np_{1_0}}}, \dots \frac{\nu_k - np_{k_0}}{\sqrt{np_{k_0}}} \right) \xrightarrow{d} Z = (Z_1 \dots Z_k) \sim N(\vec{0}, R)$$

$R = (r_{ij})$

$$r_{ii} = \frac{1}{p_{i_0}} \mathbb{D} I_{\{X_1 = a_i\}} = \frac{1}{p_{i_0}} \cdot \left(\mathbb{E}(I_{\{X_1 = a_i\}})^2 - (\mathbb{E} I_{X_1 = a_i})^2 \right) = \frac{p_{i_0}(1 - p_{i_0})}{p_{i_0}} = 1 - p_{i_0}$$

$$r_{ij} = \frac{1}{\sqrt{p_{i_0} p_{j_0}}} \operatorname{cov}\left(I_{\{X_1 = a_i\}}, I_{\{X_1 = a_j\}} \right) = \left[\operatorname{cov}(X, Y) = \underbrace{\mathbb{E}(XY)}_{\underbrace{\mathbb{E} I \cdot I}_{0}} - \mathbb{E}X \mathbb{E}Y \right] =$$

$$= -\frac{p_{i_0} p_{j_0}}{\sqrt{p_{i_0} p_{j_0}}} = -\sqrt{p_{i_0} p_{j_0}}$$

- Теорема о наследовании:

$\left. \begin{array}{l} \xi_n \xrightarrow{d} \xi \\ f \text{ - непр} \end{array} \right| \Rightarrow f(\xi_n) \xrightarrow{d} f(\xi) \Rightarrow$

$\left. \begin{array}{l} (\text{вектор}) \xrightarrow{d} Z \\ \sum (\text{комп})^2 \text{ - непр} \end{array} \right| \Rightarrow \sum \left(\frac{\nu_k - np_{k_0}}{\sqrt{np_{k_0}}} \right)^2 \xrightarrow{d} |Z|^2$

- Осталось показать: $|Z|^2 \to \chi^2_{k-1}$

$$R = I - \begin{pmatrix} \sqrt{p_{1_0}} \\ \vdots \\ \sqrt{p_{n_0}} \end{pmatrix} \underbrace{(\sqrt{p_{1_0}} \dots \sqrt{p_{n_0}})}_{(*)}$$

- Рассмотрим ортонорм матр C. 1-я строчка $(*)$ (длина 1: $\sqrt{\sum p_{i_0}^2} = 1$
остальные строки ей ортогональны и отнормир.

- $V := C \cdot Z$

$$R_V = CRC^T = \underbrace{CIC^T}_{I} - \underbrace{C(*)}_{\begin{pmatrix} \sum p_{i_0} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}} \underbrace{(*)C^T}_{(\sum p_{i_0}, 0 \dots 0)} = I - \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{D} V_{11} = 0$

$\mathbb{E} V_{11} = 0$

У остальн. эл-тов:

$\mathbb{E} = 0$

$\mathbb{D} = 1$

$\Rightarrow$ по опр $|V|^2 \sim \chi^2_{k-1}$

C – ортогон $\Rightarrow$ сохр. длина $CZ \Rightarrow |Z|^2 = |V|^2 = v_2^2 + \ldots + v_k^2 \sim \chi^2_{k-1}$ ◭

χ^2 – критерий Пирсона

· ур знач α – выбрать

$\exists x_\alpha$ – т.ч. $P(\chi^2_{k-1} \geq x_\alpha) = \alpha$

Тогда по доказанному при справедливости H_0:

$$P\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\nu_i - np_{i0}}{\sqrt{np_{i0}}}\right)^2 \geq x_\alpha\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \text{ (т.е. событие маловероятно)} \Rightarrow$$

при $\sum_{i=1}^{n} \frac{\nu_i - np_{i0}}{\sqrt{np_{i0}}} < x_\alpha \Rightarrow H_0$ принимается

иначе отклоняется.

Билет 11

$X_1 \dots X_n$ – выборка из распр. с ф. распр F

Рассм. на $\mathbb{R}$ равном. распр. на $X_1..X_n$: $P^*(\{X_j\}) = \frac{1}{n}$

Построим посл-ть эмпирич. распред: $P^*(B) = \frac{\# X_j \in B}{n}$ где B-событ.

Теорема

$$\boxed{\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad P_n^*(B) \xrightarrow{п.н.} P(X_1 \in B)}$$

▷ $P^*(B) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} I\{X_j \in B\}$

По УЗБЧ: $P^*(B) \xrightarrow{п.н.} \mathbb{E} I_{\{X_1 \in B\}} = P(X_1 \in B)$ ◁

· Сл. вел. $F_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty, t)}(X_i)$ = "доля выборки $\le t$"

– эмпирическая ф. распределения

· Аналог. по УЗБЧ поточечно: $F_n^*(t) \xrightarrow{п.н.} F(t)$ => состоят. оценка F_n

· $\mathbb{E} F_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_i P(X_j \le t) = P(X_1 \le t) = F(t)$ => F_n – несмещ. оц.

Теорема Гливенко-Кантелли

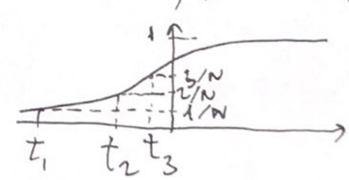
$$\boxed{\sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \xrightarrow{п.н.} 0.} \qquad \left(\text{или } F_n(t) \overset{п.н.}{\rightrightarrows} F(t)\right)$$

▷ (только для непр F)

фикс $N \in \mathbb{N}$; выберем $t_0..t_N$ так: $F(t_0) = 0; \dots F(t_k) = \frac{k}{N}$ $\quad F(t_N) = 1$

в частности $t_0 = -\infty$ $t_n = +\infty$

Такие $t_0..t_N$ будут $\exists$ из-за непр F.



при $t \in [t_k, t_{k+1}]$:

$$\left.\begin{aligned} &F_n^*(t) - F(t) \underset{\downarrow}{\le} F_n^*(t_{k+1}) - F(t_k) = F_n^*(t_{k+1}) - F(t_{k+1}) + \frac{1}{N} \\ &\qquad F_n^*(t) \le F_n^*(t_{k+1}) \\ &\qquad F_n(t) \ge F(t_k \\ &F_n^*(t) - F(t) \ge F_n^*(t_k) - F(t_{k+1}) = F_n^*(t_k) - F(t_k) - \frac{1}{N} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$|F_n^*(t) - F(t)| < \max_k |F_n^*(t_k) - F(t_k)| + \frac{1}{n} \quad \forall t.$$

$\forall t$ по УЗБЧ $F_n^*(t) \xrightarrow{п.н.} F(t_k)$

$\exists A_N$ - мн-во исходов, на которых есть сх-ть $\forall k \in \{1..N\}$ (конечн. мн-во

$\Rightarrow P(A_N)=1$ (т.к. сх-ть п.н. и A_n это $\cap$ конечн # события $P=1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |F_n^*(t)-F(t)| \leq \frac{1}{N}$ (т.к. $F_n^* \to F \Rightarrow \max=0$) на A_N

$\Rightarrow$ на событии $A=\bigcap\limits_{N=1}^{\infty} A_N$: $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t)-F(t)|=0$

и $P(A)=1$

Для построения эмпирич. ф: эл-ты выборки $X_1 \ldots X_n$ - упорядоч: $X_{(1)} \ldots X_{(n)}$

$\Rightarrow F_n^*(t)=\frac{k}{n}$ при $t\in[X_{(k)}, X_{(k+1)}]$