2) сходится при $a = b$; расходится при $a \neq b$;
3) сходится при $a = b = 0$; расходится при $a \neq 0$ или $b \neq 0$;
4) сходится при $a = b = 0$; расходится при $a \neq 0$ или $b \neq 0$.
230. 1) 0; 2) 0. **231.** 1) 3; 2) 2; 3) 4. **232.** 1)–3) 0.
234. 1) -1; 2) $+\infty$; 3) -1; 4) $+\infty$. **235.** 1. **236.** 1)–3) 1/2.
238. 1) Сходится к $-1/2$; 2) сходится к -2.
239. Сходится к p, если $0 \leqslant p - a \leqslant 1$.
240. 0 при $a = 0$ или $|b| < |c|$; $(b - c)/d$ при $|b| > |c|$.
241. $(1 + \sqrt{1 + 4b})/2$ при $a \neq (1 - \sqrt{1 + 4b})/2$ и $a \neq 0$; a при $a = (1 - \sqrt{1 + 4b})/2$.
242. $+\infty$ при $a \geqslant 1$; $\sqrt{b/(1 - a)}$ при $0 < a < 1$. **243.** 0.
244. $x_2 = a(5 - \sqrt{41})/4$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. **247.** 0.
252. 1) $1/e$; 2) 0; 3) $4/e$; 4) 0; 5) $+\infty$.
255. 1) $1/(p + 1)$; 2) 1/2.
274. 1) 1;
2) 0 при $\alpha > -1$; ∞ при $\alpha < -1$; не существует при $\alpha = -1$.
276. $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$, где $AM = \dfrac{2}{3}AC$.
279. 1) ∞ при $\alpha \leqslant 1$; 0 при $\alpha > 1$; 2) 0; 3) $\sqrt{ab}$.

§ 9. Предел функции

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Определение предела функции. Пусть функция $f(x)$ определена *в проколотой* δ_0*-окрестности точки* x_0, т. е. на множестве

$$\dot{U}_{\delta_0}(x_0) = \{x\colon\ 0 < |x - x_0| < \delta_0\}.$$

1) Число a называется *пределом* (*по Коши*) *функции* $f(x)$ *в точке* x_0 (или при $x \to x_0$), если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Если число a является пределом функции $f(x)$ в точке x_0, то пишут

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \text{или} \quad f(x) \to a \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Используя логические символы, определение Коши можно записать следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \quad (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon).$$

Утверждение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq a$ записывается так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \quad (0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - a| \geqslant \varepsilon).$$

Из определения следует, что функция не может иметь двух разных пределов в одной точке. Из определения следует также, что значения функции $f(x)$ в точках x, лежащих вне некоторой окрестности точки x_0, и значение функции $f(x)$ в точке x_0 не влияют ни на существование, ни на величину предела функции $f(x)$ в точке x_0.

2) Число a называется *пределом* (*по Гейне*) *функции* $f(x)$ *в точке* x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in \dot{U}_{\delta_0}(x_0)$, сходящейся к x_0, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к a.

Для того чтобы доказать, что функция $f(x)$ не имеет предела в точке x_0, достаточно указать какую-нибудь последовательность $\{f(x_n)\}$, не имеющую предела, или указать две последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$, имеющие разные пределы.

3) Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

4) Если функция $f(x)$ определена в точке x_0, существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ и $a = f(x_0)$, то функцию $f(x)$ называют *непрерывной в точке* x_0 (см. § 10).

Отметим, что основные элементарные функции (§ 7) непрерывны во всех точках их области определения.

2. Бесконечно малые функции.

1) Если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, то функцию $\alpha(x)$ *называют бесконечно малой при* $x \to x_0$.

2) Сумма конечного числа бесконечно малых при $x \to x_0$ функций есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

3) Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$ функция, а $\beta(x)$ — функция, ограниченная в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то $\alpha(x)\beta(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

В частности, произведения двух (или конечного числа) бесконечно малых при $x \to x_0$ функций есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

3. Теоремы о пределах.

Теорема 1 (о пределе “зажатой” функции). *Если в некоторой проколотой окрестности точки* x_0 *выполняются неравенства* $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, *и если*

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = a,$$

то

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a.$$

Теорема 2 (о пределе суммы и произведения). *Если* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, *то*

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = a \pm b, \quad \lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = ab.$$

Теорема 3 (о пределе частного). *Если* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, *где* $b \neq 0$, *то*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}.$$

Теорема 4 (о пределе сложной функции). *Если существуют* $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$, $\lim\limits_{y \to a} f(y)$, *причем в некоторой проколотой окрестности точки* x_0 *выполняется условие* $\varphi(x) \neq a$, *то сложная функция* $f(\varphi(x))$ *имеет предел в точке* x_0 *и справедливо равенство*

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{y \to a} f(y). \tag{1}$$

В случае непрерывности функции $f(y)$ в точке a равенство (1) можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x \to x_0} \varphi(x)).$$

4. Различные типы пределов.

1) *Предел функции при* $x \to \infty$. Число a называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to \infty$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Если число a является пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, то пишут

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a.$$

Теоремы о пределах справедливы и для пределов функций при $x \to \infty$.

2) *Бесконечный предел.* Говорят, что *предел функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *равен бесконечности*, и пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$

если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$.

Аналогично,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty,$$

если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой при* $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

3) *Односторонние пределы.* Пусть область определения функции $f(x)$ содержит интервал $(\alpha; x_0)$. Число a называется *пределом слева функции* $f(x)$ *в точке* x_0 (или при $x \to x_0 - 0$), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $x_0 - \delta < x < x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Предел слева функции $f(x)$ в точке $x_0 \neq 0$ обозначают $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $f(x_0 - 0)$. Если $x_0 = 0$, то пишут $\lim\limits_{x \to -0} f(x)$ или $f(-0)$.

Аналогично, в случае, когда область определения функции $f(x)$ содержит интервал $(x_0; \beta)$, вводится понятие *предела справа*. Предел справа обозначают так: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ или $f(x_0 + 0)$, если $x_0 \neq 0$, и $\lim\limits_{x \to +0} f(x)$ или $f(+0)$, если $x_0 = 0$.

Функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда существуют предел слева и предел справа и они равны; при этом

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Для функций, область определения которых содержит интервал $(\alpha; +\infty)$ или интервал $(-\infty; \beta)$, вводятся понятия *предела при* $x \to +\infty$ и соответственно *при* $x \to -\infty$. Эти пределы обозначают $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Например, число a называют пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x > \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Для односторонних пределов справедливы теоремы о пределе суммы (разности), произведения, частного и о пределе композиции функций.

По аналогии с конечными односторонними пределами определяются и односторонние бесконечные пределы:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{и т. д.}$$

Например, запись $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty$ означает, что для каждого числа ε существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0 < x < x_0 + \delta$, выполняется неравенство $f(x) < \varepsilon$.

5. Некоторые замечательные пределы. Вычисление пределов во многих случаях производится с помощью двух важных формул:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \tag{2}$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e. \tag{3}$$

Часто используются также следующие формулы, являющиеся следствием формулы (3):

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \tag{4}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \tag{5}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0. \tag{6}$$

В частности, при $a = e$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \tag{7}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{8}$$

Приведем еще одну формулу:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \alpha \in R. \tag{9}$$

5. Сравнение функций.

1) *Эквивалентные функции. Символы $O(f)$ и $o(f)$.* Пусть функция $g(x)$ не обращается в нуль в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Тогда:

а) если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, то говорят, что *функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ при $x \to x_0$*, и пишут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$;

б) если существует число $C > 0$ такое, что в некоторой проколотой окрестности точки x_0 справедливо неравенство $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant C$, то говорят, что $f(x)$ есть O большое от $g(x)$ при $x \to x_0$, и пишут $f(x) = O(g(x))$;

в) если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, то говорят, что $f(x)$ есть o малое от $g(x)$ при $x \to x_0$, и пишут

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to x_0. \tag{10}$$

Равенство вида (10) следует читать только слева направо, так как его правая часть обозначает класс функций, бесконечно малых по сравнению с $g(x)$ при $x \to x_0$.

Приведем примеры таких равенств:

$$x^2 = o(x), \quad \cos x \sin^2 x = o(x), \quad \operatorname{tg}^3 x \sin\frac{1}{x} = o(x), \quad x \to 0.$$

В частном случае, когда $g(x) = 1$, запись $f(x) = o(1)$ при $x \to x_0$ означает, что функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

Если $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$, где $g(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$, то функцию $f(x)$ называют *бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $g(x)$ при $x \to x_0$*.

Запись $f(x) = O(1)$ при $x \to x_0$ означает, что функция $f(x)$ ограниченна в некоторой проколотой окрестности точки x_0.

2) *Замена функций эквивалентными при вычислении пределов.* Пусть функции $g(x)$ и $g_1(x)$ не обращаются в нуль в некоторой проколотой окрестности точки x_0, $f(x) \sim g(x)$ и $f_1(x) \sim g_1(x)$ при $x \to x_0$, существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$. Тогда существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и справедливо равенство

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

3) *Критерий эквивалентности функций.* Для того чтобы функция $f(x)$ была эквивалентна функции $g(x)$ при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), \quad x \to x_0.$$

При вычислении пределов часто используется следующая таблица эквивалентных функций:

Эквивалентность при $x \to 0$	Равенство при $x \to 0$
$\sin x \sim x$	$\sin x = x + o(x)$
$\operatorname{sh} x \sim x$	$\operatorname{sh} x = x + o(x)$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$\operatorname{tg} x = x + o(x)$
$\arcsin x \sim x$	$\arcsin x = x + o(x)$
$\operatorname{arctg} x \sim x$	$\operatorname{arctg} x = x + o(x)$
$1 - \cos x \sim x^2/2$	$1 - \cos x = x^2/2 + o(x^2)$
$\operatorname{ch} x - 1 \sim x^2/2$	$\operatorname{ch} x - 1 = x^2/2 + o(x^2)$
$e^x - 1 \sim x$	$e^x - 1 = x + o(x)$
$\ln(1+x) \sim x$	$\ln(1+x) = x + o(x)$
$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$
$a^x - 1 \sim x \ln a$	$a^x = 1 + x\ln a + o(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$

7. **Частичный предел функции.** Число a называется *частичным пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$*, если существует последовательность $\{x_n\}$, $x_n \neq x_0$, такая, что $x_n \to x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

Аналогично определяются бесконечные и односторонние частичные пределы.

Наименьший и наибольший частичные пределы функции $f(x)$ при $x \to x_0$ называют соответственно *нижним и верхним пределом* функции и обозначают $\varliminf\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\varlimsup\limits_{x\to x_0} f(x)$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Доказать, используя определение Коши предела функции, что $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x^2-4x} = 2$.

▲ Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$ в некоторой окрестности точки $x = 4$, например на интервале $(2; 5)$.

Возьмем произвольное положительное число ε и преобразуем $|f(x) - 2|$ при $x \neq 4$ следующим образом:

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x} - 2\right| = \left|\frac{x+4}{x} - 2\right| = \frac{|x-4|}{x}.$$

Учитывая, что $x \in (2; 5)$, получаем неравенство

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x} - 2\right| < \frac{|x-4|}{2},$$