Домашнее задание по дискретной математике №4

Фархат Агаев

20 ноября 2019 г.

Задача №1

Сигнатура:

$$\begin{aligned}
&M(x) - \text{быть мужчиной}\\
&F(x) - \text{быть женщиной}\\
&C(x,y) - x \text{ и } y \text{ состоят в браке}\\
&P(x,y) - x \text{ родитель } y
\end{aligned}$$

Отношение "x брат y"

x - парень, есть общие родители с y и не равны.

$$B(x,y) = M(x) \land \exists z(P(z,y) \land P(z,x)) \land \neg(x = y)$$

Отношение "x является тёщей y"

x - женщина, мать жены, y - мужчина, есть жена.

$$D(x,y) = M(y) \land \exists z(F(z) \land C(z,y) \land P(x,z)) \land F(x)$$

Отношение "x является племянником y"

x - сын брата или сестры

Выразим аналогично вначале ***отношение "a сестра b"***

$$S(a,b) = F(a) \land \exists \mathrm{c}(P(\mathrm{c},a) \land P(\mathrm{c},b)) \land \neg(a = b)$$

Отношение "x является племянником y"

$$L(x,y) = M(x) \land \exists z(\,(B(z,y) \lor S(z,y)) \land P(z,x)) \land \neg(x = y)$$

Отношение "x внук y"

у x есть родитель z, он (или она) ребенок y.

$$K(x,y) = M(x) \land \exists z(P(z,x) \land (P(y,z)) \land \neg(x = y)$$

Задача №2

Сигнатура:

$$C(x, y) - x \text{ обманул } y$$

Запишем формулой каждый кого-то обманул:

$$\forall x_1\, \exists y_1\, (C(x_1, y_1))$$

Запишем формулой каждый кем-то обманут:

$$\forall x_2\, \exists y_2\, (C(y_2, x_2))$$

Запишем формулой нет того, кто обманул всех:

$$\neg(\exists x_3\, \forall y_3\, (C(x_3, y_3))) = \forall x_3 \exists y_3\, (\neg C(x_3, y_3))$$

Ответ:

$$\forall x_1\, \exists y_1\, (C(x_1, y_1)) \wedge \forall x_2\, \exists y_2\, (C(y_2, x_2)) \wedge \forall x_3 \exists y_3\, (\neg C(x_3, y_3))$$

Задача №3

Сигнатура:

$$\mathbb{R}, 0, +, \times, <, =$$

Очевидно, что нам нужно несколько условий для того, чтобы многочлен $ax^3 + bx^2 + bx + c$ имеел корень

1. $a \neq 0$, чтобы степень многочлена была равна 3.
2. при подстановки x, многочлен должен быть равен 0.ъ

Ответ:

$$\forall a \forall b \forall c \forall \exists x(\neg(a = 0) \wedge (a \times x \times x \times x + b \times x \times x + c \times x + d = 0))$$

Задача №4

Сигнатура:

$$\mathbb{N}, +, \times, =$$

Выразим предикат быть делителем:

$$D(d, x) = \exists y(x = dy)$$

Тогда просто выразить предикат $x = \text{НОД}(y,z)$

$$B(x, y, z) = D(x, y) \wedge D(x, z) \wedge \neg(\exists a(k = x + a \wedge D(k, y) \wedge D(k, z))$$

Задача №5

$[\forall x(P(x) \to Q(f(x)) \wedge \forall x(Q(x) \to P(f(x))) \wedge \forall x f(f(x)) = f(x)] \to [\exists x(P(x) \vee Q(x) \to \exists x(P(x) \wedge Q(x))]$
Рассмотрим случай когда данная импликация может быть равна нулю. Первая часть $[\forall x(P(x) \to Q(f(x)) \wedge \forall x(Q(x) \to P(f(x))) \wedge \forall x f(f(x)) = f(x)] = 1$, а вторая $[\exists x(P(x) \vee Q(x) \to \exists x(P(x) \wedge Q(x))] = 0$. Тогда рассмотрим дальше вторую часть откуда следует, что $\exists x(P(x) \vee Q(x)) = 1$, а $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) = 0$, тогда должно быть так $P(x) = 0$, $Q(x) = 1$ или $P(x) = 0$, $Q(x) = 1$ Попробуем разобраться с первой частью если $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$. Все конъюкты должы быть истинными. из второго конъюкта $\forall x(Q(x) \to P(f(x))$, очев, что P(f(x)) должна быть истина, теперь хитрый трюк, подставляем переменную $f(x)$ в первый конъюкт получаем $\forall f(x)(P(f(x)) \to Q(f(f(x)))$ пользуемся третьим конъктом получаем $\forall f(x)(P(f(x)) \to Q(f(x))) \Rightarrow \forall x Q(f(x)) = 1$, противоречие. Те же самые рассуждения для второго случая.

Задача №6

$$\forall x\, g(f(x)) = x \wedge \exists y \forall x \neg f(x) = y$$

Да является, пусть $M = \mathbb{N}$, определим ф-ию $f(x) = 10x$ для всех x. ф-ию $g(x) = \frac{x}{10}$ только для x кратных 10, для всех остальных x, ф-ия g(x)= 12345. Тогда очевидно, что условие выполняется для

$$\forall x\, g(f(x)) = x$$

Также например $y = 123$ - число не кратное 10. Мы с помощью ф-ию f не сможем получить такое число $\Rightarrow$ выполняется вторая часть.

$$\exists y \forall x \neg f(x) = y$$

Задача №7

Теория называется совместной, если существует интерпритация в которой все формулы истины
a) Первая формула $\exists x \forall y \neg P(x, y)$, существует такой x, что в отношение предиката P с любым элементом будет всегда ответ будет ложным. Пусть этот $x = a$, тогда во второй формуле. $\exists y \forall x P(x, y)$ подставив $P(y, a)$ должен быть истинным, но по первой формуле он ложный $\Rightarrow$ противоречие.
b) Ответ: да. Если перевести первую формулу $\forall x \neg P(x, x)$ означает

антирефлексивность. Вторая $\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \ \rightarrow) P(x,z)$ означает транзитивность. Последняя формула сущетсвует пара такая, что $\exists x \exists y (P(x,y) \wedge P(y,x))$
Приведу интерпритацию.

Пусть $P(x,y) =$ взаимно ли просты числа x и y.

$M = \{\mathbb{N}$ без нуля и единицы$\}$. Отсюда сразу все очевидно. Натуральное число не взаимно просто с самим с собой. Вторая формула тоже выполняется. Третья вообще для любых (пусть $x = 2$ и $y = 3$)
c) Ответ: да. Первая формула $\forall x P(x,x)$ означает рефлексивность. Вторая $\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow) P(x,z)$ означает транзитивность. Третья формула, что у каждого x есть пара $\forall x \exists y P(x,y)$. Последняя формула $\exists x \exists y \neg (P(x,y) \wedge P(y,x))$
Приведу интерпритацию.

P(x, y) = кратность. Очевидно выполняется первая и вторая формула, третья также выполняется если y = x, чтобы выполнилась последняя формула возьмем пару ($x = 4$ и $y = 2$).

Задача №8

Для доказательства воспользуемся таким утверждением.
Пусть $T = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ - теория. U - формула

$$T \models A \ \Leftrightarrow \vdash (U_1 \wedge ... \wedge U_n) \rightarrow U$$

a)

$$\models (\forall x Q(x) \wedge \forall (Q(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow \forall x P(x)$$

Очевидно, что если $Q(x) = 0$ то из лжи следует что угодно и получается истина. Пусть $Q(x) = 1$, тогда во втором конъюнкте $P(x)$ должен быть равен 1, иначе получаем ту же ситуцию, а так как $P(x) = 1$, то очевидно истинность всей формулы.
b)

$$\models (\exists x Q(x) \wedge \forall x (Q(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow \exists x P(x)$$

Аналогично с пунктом а. нули не рассматриваем. $\forall x (Q(x) \rightarrow P(x) \Rightarrow P(x)$ тоже единица. Рассуждения те же самые.
c)

$$\models (\exists x Q(x) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \exists x P(x)$$

Ответ: нет. Пусть не сущетсвует такого $P(x)$, данное условие не будет противоречить импликации, также $Q(x) = 1$, то есть $\exists x P(x)$ложно, а

$\forall x Q(x)$ истина, в таком случае импликация тоже истина, а все выражение ложно.

d)

$$\models (\forall x Q(x) \wedge \forall (P(x) \to Q(x)) \to \forall x P(x)$$

Очевидно, что нет. Аналогчно рассмотрим лишь крайний случай. Пусть $Q(x) = 1$, тогда в заключение будет 1, следовательно посылка может быть отрицательной ($P(x) = 0$) и тогда получаем, что в данном случае формула может выдать 0. ($1 \to 0$)