

ОТВЕТЫ

2. $x_{1,2} = (2 \pm \sqrt{7})/3$. 3. $\xi = \sqrt{3}/3$.

23. Применить теорему Коши о среднем к функциям $f(x)/x$ и $1/x$.30. Применить теорему Коши о среднем к функциям $f(x)$ и $1/x$.

§ 17. Правило Лопиталля

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Теорема (правило Лопиталля раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:

а) дифференцируемы в окрестности точки a , за исключением, быть может, самой точки a , причем $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности;

б) функции $f(x)$ и $g(x)$ являются одновременно либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при $x \rightarrow a$;

в) существует конечный $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (1)$$

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке a , $f(a) = g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \quad (2)$$

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1}$.

▲ Применяя формулу (2), получаем

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4}{6x^2 - 1} = 1. \quad \blacktriangle$$

Теорема остается в силе при $a = +\infty$, $a = -\infty$, а также в случае одностороннего предела ($x \rightarrow a + 0$, $x \rightarrow a - 0$) при выполнении условий а)–в) соответственно на интервалах $(\delta; +\infty)$, $(-\infty; -\delta)$, $(a; a + \delta)$, $(a - \delta; a)$, $\delta > 0$.

Если выполнены условия а), б), а $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ равен $+\infty$ или $-\infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ также равен соответственно $+\infty$ или $-\infty$.

Пример 2. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.