4 СЕМЕСТР

Домашняя работа по математическому анализу

ФКН ПМИ 2 курс основной поток 2019-2020

Листки 4-5. Задачи 21-33. Крайний срок сдачи задач 21-26: 10.05.2020, задач 27-32: 17.05.2020, задача 33 — бессрочная

Номер варианта в каждой задаче вычисляется по следующему алгоритму
N_{task} = номер задачи;
N_{grp} = номер вашей группы;
N_{stud} = ваш номер в списке группы (см. здесь);
$N = (N_{task} - 1) \cdot 300 + (N_{grp} - 183) \cdot 35 + N_{stud}$
Ваш вариант — N-ая десятичная цифра числа π после запятой (можно спросить у wolfram alpha, или посмотреть здесь. Задачи со звездочкой сдаются семинаристам.

Задача 21. Вычислите криволинейный интеграл первого рода по заданной кривой.

0. $\int_C (x^2 - y)dl, \quad C = \{x^2 + y^2 = 4x\}$;
1. $\int_C \sqrt{x^2 + y^2}dl, \quad C = \{x^2 + y^2 = 2x\}$;
2. $\int_C |y|dl, \quad C = \{r^2 = \cos 2\varphi \mid \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\}$, где r, φ — полярные координаты;
3. $\int_C y^2dl, \quad C = \{x = t - \sin t, y = 1 - \cos t \mid t \in [0, 2\pi]\}$;
4. $\int_C x^2ydl, \quad C = \{x^2 + y^2 = 6y\}$;
5. $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl, \quad C$ — граница области, ограниченной кривыми $r = 2$, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, где r, φ — полярные координаты;
6. $\int_C \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}, \quad C$ — отрезок между точками $(0, 0)$ и $(1, 2)$;
7. $\int_C (x^2 + y^2)dl, \quad C = \{x = \cos t + t\sin t, y = \sin t - t\cos t \mid t \in [0, 2\pi]\}$;
8. $\int_C xydl, \quad C = \{x = \operatorname{ch} t, y = \operatorname{sh} t \mid t \in [0, t_0]\}$, где $\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t$ — гиперболические косинус и синус.
9. $\int_C xdl, \quad C = \{r = e^{\varphi} \mid \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]\}$.

Задача 22. Вычислите криволинейный интеграл второго рода по заданной кривой с указанной ориентацией.

0. $\oint_C y^2z^2dx + x^2z^2dy + x^2y^2dz, \quad C = \{x = \cos t, y = \cos 2t, z = \cos 3t \mid t \in [0, 2\pi]\}$, ориентация — по возрастанию параметра;

1. $\oint_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, $\quad C=\{x^2+y^2=1\}$, ориентация — по часовой стрелке.
2. $\int_C (2-y)dx+xdy$, $\quad C=\{x=t-\sin t, y=1-\cos t \mid t\in[0,2\pi]\}$, ориентация — по возрастанию параметра;
3. $\int_C (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, $\quad C=\{y=x^2 \mid x\in[-1,1]\}$, ориентация — по убыванию x;
4. $\oint_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, $\quad C$ — граница квадрата с вершинами $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, ориентированная против часовой стрелки.
5. $\int_C \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dy-dx$, $\quad C=\{y=x^2 \mid x\in[0,1]\}$;
6. $\oint_C xdx+(x+y)dy+(x+y+z)dz$, $\quad C=\{x=\sin t, y=\cos t, z=\sin t+\cos t \mid t\in[0,2\pi]\}$, ориентация в направлении убывания параметра;
7. $\int_C \sin y dx+\sin x dy$, $\quad C$ — отрезок с концами $(0,\pi)$ и $(\pi,0)$, ориентированный в сторону увеличения y;
8. $\int_C (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$, $\quad C=\{y=1-|1-x| \mid x\in[0,2]\}$, ориентация — в сторону увеличения x;
9. $\oint_C (x+y)dx+(x-y)dy$, $\quad C=\left\{\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2=1\right\}$, ориентация — против часовой стрелки.

Задача 23. Вычислите криволинейный интеграл второго рода по заданной замкнутой кривой: либо по определению, либо используя формулу Грина. Предполагается, что ориентация кривых везде — против часовой стрелки.

0. $\oint_C (x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy$, $\quad C$ — граница треугольника с вершинами $(1,1)$, $(3,2)$, $(2,5)$;
1. $\oint_C xy^2dx-x^2ydy$, $\quad C=\{x^2+y^2=4\}$;
2. $\oint_C e^x((1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy)$, $\quad C$ — граница области $\Omega=\{0\leqslant x\leqslant\pi; 0\leqslant y\leqslant\sin x\}$;
3. $\oint_C e^{y^2-x^2}(\cos(2xy)dx+\sin(2xy)dy)$, $\quad C=\{x^2+y^2=4\}$;
4. $\oint_C (e^x\sin y-10y)dx+(e^x\cos y-10)dy$, $\quad C=\{x^2+y^2=2x\}$;
5. $\oint_C (x^2+xy)dx+(y^2-2xy)dy$, $\quad C$ — граница прямоугольника $[0,2]\times[0,3]$;
6. $\oint_C (x^3+y)dx+(y^2-x)dy$, $\quad C$ — граница правильного шестиугольника с вершинами $\left\{\left(\cos\frac{2\pi k}{6},\sin\frac{2\pi k}{6}\right) \mid k=0,1,\ldots,6\right\}$;
7. $\oint_C (x^3+y^2)dx+(x-\sin y)dy$, $\quad C$ — граница трапеции с вершинами $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$;
8. $\oint_C (3e^x+y)dx+(x^2-y^2)dy$, $\quad C$ — граница треугольника с вершинами $(0,0)$, $(4,0)$, $(2,2)$;
9. $\oint_C (e^{x+2y}+xy)dx+(2e^{x+2y}-3x)dy$, $\quad C=\{(x/2)^2+y^2=1\}$.

Задача 24. Вычислите двукратный интеграл от функции f по области, ограниченной витком кривой $C = \{x = x(t), y = y(t)\}$ (каким-нибудь витком, в случае, если их несколько). Найдите начало и конец витка, исследуйте его ориентацию и используйте формулу Грина. Для построения эскиза графика и итогового вычисления определенного интеграла можно использовать Вольфрам.

0. $f(x, y) = 4x$, $(x, y) = (t - t^2, t^2 - t^3)$;
1. $f(x, y) = 6y$, $(x, y) = (2t^2 - t^3, 2t - t^2)$;
2. $f(x, y) = 4x + 2y$, $(x, y) = (t^2 - 1, t^3 - t)$;
3. $f(x, y) = 2y + 6x$, $(x, y) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$;
4. $f(x, y) = 2(x + y)$, $(x, y) = (\sin 2t, \sin t)$;
5. $f(x, y) = 4xy$, $(x, y) = (1 + t - t^3, 1 - t^2)$;
6. $f(x, y) = 2y$, $(x, y) = (\frac{2}{\pi}t - \sin t, 1 - \cos t)$;
7. $f(x, y) = 6x^2$, $(x, y) = (t^2 - t^3, t - t^2)$;
8. $f(x, y) = 6y^2$, $(x, y) = (t^3 - t, t^2 - 1)$;
9. $f(x, y) = 2x$, $(x, y) = (4t - t^3, \sin(\pi t/2))$.

Задача 25. Общее задание + свой вариант. Допустим, что поверхность Ω получена вращением плоской кривой $\{(x = \varphi(t), y = \psi(t)) \mid t \in [a, b]\}$ вокруг оси Ox. Тогда поверхность Ω задается параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t)\cos(\alpha) \qquad \text{где } t \in [a, b], \alpha \in [0, 2\pi]. \\ z = \psi(t)\sin(\alpha), \end{cases}$$

Найдите выражение для элемента площади поверхности вращения в координатах (t, α), а также выведите формулу для полной площади поверхности вращения. Вычислите площадь поверхности, полученной вращением заданной кривой вокруг оси Ox.

0. $y = \sqrt{x}$, $x \in [5/4, 21/4]$;
1. $y = x^3$, $x \in [0, 1]$;
2. $y = e^{-x}$, $x \in [0, 2]$;
3. $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$;
4. $y = \operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in [-1, 1]$;
5. $y = \frac{1}{x}$, $x \in [1, a]$;
6. $y = \operatorname{tg} x$, $x \in [0, \pi/4]$;

7. $y = \sqrt{x^2 - 1}$, $x \in [1, 5]$;
8. $y = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in [0, 1/4]$;
9. $x^2 + y^2 = 2y$.

Задача 26.* (1) Рассмотрим дифференциальную 1-форму

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2},$$

определенную на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Для интеграла ω по замкнутой (возможно, самопересекающейся) кривой C докажите равенство

$$\oint_C \omega = 2\pi k,$$

где k — "число обмотки" кривой C вокруг начала координат (т.е. сколько раз кривая обмоталась вокруг начала координат, считая против часовой стрелки). Подсказка: докажите, что вместо произвольной кривой достаточно рассмотреть прохождение по единичной окружности k раз.

(2) Пусть $\nu = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ — произвольная дифференциальная 1-форма, определенная на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Допустим, что $P'_x = Q'_y$. Верно ли, что ν — точная форма (т.е. существует $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$, такая что $\nu = df$)? Приведите контрпример, если нет.

(3) Пусть ν — как в пункте (2), а ω — как в пункте (1). Докажите, что существует единственное вещественное число $c \in \mathbb{R}$, такое что $\nu - c\omega$ — точная форма.

Задача 27. Вычислите поверхностный интеграл 1-го рода $\iint_\Omega f(x,y,z) dS$ по указанной поверхности Ω.

0. $f = x^2 + y^2$, $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geqslant 0\}$;
1. $f = x + y + z$, $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geqslant 0\}$;
2. $f = x^2 + y^2$, $\Omega = \{z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \leqslant 1\}$ — конус;
3. $f = |xyz|$, Ω — часть поверхности $\{z = x^2 + y^2\}$, отсекаемая плоскостью $z = 1$;
4. $f = z$, $\Omega = \{x = u \cos v, y = u \sin v, z = v \mid u \in [0,1], v \in [0, 2\pi]\}$;
5. $f = x^2 + y^2 + z^2$, Ω — боковая поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $z \in [0, 3]$;
6. $f = \dfrac{1}{(1 + x + y)^2}$, Ω — часть плоскости $x + y + z = 1$, удовлетворяющая условиям $x, y, z \geqslant 0$;
7. $f = x^2 + y^2 + z^2$, Ω — поверхность куба $[-1, 1]^3$;
8. $f = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\Omega = \{z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \leqslant 1\}$;

9. $f = 1 - x^2 - y^2 - z^2$, Ω — часть плоскости $x + y + z = 1$, удовлетворяющая условию $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

Задача 28. Вычислите поверхностный интеграл 2-го рода по поверхности с указанной ориентацией (то есть с указанной стороной).

0. $\iint_\Omega xdydz + ydzdx + zdxdy$, $\Omega = \{z = x^2 - y^2, |y| \leqslant x \leqslant 1\}$, верхняя сторона;
1. $\iint_\Omega xdydz$, $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, внешняя сторона сферы;
2. $\iint_\Omega xzdxdy$, Ω — внутренняя сторона поверхности тетраэдра $\{x + y + z \leqslant 1, x, y, z \geqslant 0\}$;
3. $\iint_\Omega (2x^2 + y^2 + z^2)dydz$, Ω — внешняя сторона конуса $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, $x \in [0, 1]$;
4. $\iint_\Omega x^2 dydz$, Ω — верхняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 0$;
5. $\iint_\Omega yzdxdy + zxdydz + xydzdx$, Ω — внешняя сторона части цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \in [0, 1]$;
6. $\iint_\Omega x^2 dydz + z^2 dxdy$, Ω — нижняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \leqslant 0$;
7. $\iint_\Omega yzdydz + zxdzdx + xydxdy$, Ω — внутренняя сторона поверхности тетраэдра $\{x + y + z \leqslant 1, x, y, z \geqslant 0\}$;
8. $\iint_\Omega x^2 y^2 zdxdy$, Ω — верхняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \leqslant 0$;
9. $\iint_\Omega x^2 dydz + z^2 dxdy$, Ω — внешняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Задача 29. Даны грассмановы многочлены от переменных a_1, a_2, a_3, a_4:

$$P_1 = 5a_2 + 3a_3 \wedge a_1; \quad P_2 = 2a_2 \wedge a_1 - a_4;$$

$$P_3 = a_1 \wedge a_4 + a_2 \wedge a_3; \quad P_4 = 2a_4 \wedge a_1 - a_3 \wedge a_2.$$

Проделайте указанные операции с этими многочленами. Запишите результат в каноническом виде (т.е. у каждого монома индексы переменных должны идти в порядке возрастания, подобные члены приведены).

0. $P_1 \wedge P_2 - P_3 \wedge P_3$;
1. $2P_1 \wedge P_1 + P_2 \wedge P_3$;
2. $P_3 \wedge P_2 - P_2 \wedge P_2$;
3. $P_2 \wedge P_1 + P_4 \wedge P_4$;
4. $P_1 \wedge P_4 + 2P_2 \wedge P_3$;
5. $P_3 \wedge P_3 \wedge P_3 + 3P_2 \wedge P_2$;

6. $3P_2 \wedge P_4 - P_1 \wedge P_1 \wedge P_1$;
7. $P_3 \wedge P_4 - 2P_1 \wedge P_2$;
8. $(P_1 + 2P_3) \wedge (P_2 + 2)$;
9. $(P_2 - 1) \wedge (P_3 + 2P_4)$.

Задача 30. Вычислить дифференциал $d\omega$ от заданной дифференциальной формы ω

0. $\omega = x^2 y dx + z e^{y+u} dy + (x + \sin u) dz$;
1. $\omega = (x^2 + y^2) dx \wedge dy - \dfrac{z^2}{x} dy \wedge dz + \ln(xyz) dz \wedge dx$;
2. $\omega = (xyz) dx - \cos(ux) dy - u^z dz$;
3. $\omega = e^{x^2+z^2} dy \wedge dz - \dfrac{xz}{y} dz \wedge dx + (x + 2y + 3z) dx \wedge dy$;
4. $\omega = x_1 x_2 x_3 x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + (x_1 + x_2^2) dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4$;
5. $\omega = (x + 2y + 3z) dy + (y + 2z + 3u) dz + (z + 2u + 3x) du + (u + 2x + 3y) dx$;
6. $\omega = z x^2 dx \wedge dy + (x + 3y + 2z) dz \wedge dx + z^{x+y} dy \wedge dz$;
7. $\omega = (xy + zu) dx \wedge dy + (x + y^2 + z^3 + u^4) dz \wedge du$;
8. $\omega = \ln(xyzu) dx \wedge dy \wedge dz + (x^y + 2y^z + 3z^u + 4u^x) dy \wedge dz \wedge du$;
9. $\omega = d(xy^2 z) \wedge d(x^2 + z^2)$.

Задача 31. Пользуясь формулой Гаусса–Остроградского, вычислите поверхностный интеграл 2-го рода

0. $\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, S — внешняя сторона сферы $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;
1. $\iint_S x dydz + y dzdx + z dxdy$, S — внутренняя сторона границы октаэдра $\{|x| + |y| + |z| \leqslant 1\}$;
2. $\iint_S (4x + y) dydz + (2z + x) dxdy$, S — внешняя сторона полной поверхности конуса $\{x^2 + y^2 \leqslant z^2 \mid 0 \leqslant z \leqslant 4\}$;
3. $\iint_S x^2 dydz + 2y^2 dzdx + 3z^2 dxdy$, S — внутренняя сторона сферы $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;
4. $\iint_S (1 + 2x) dydz + (2x + 3y) dzdx + (3y + 4z) dxdy$, S — внешняя сторона поверхности тетраэдра с вершинами $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 3)$;
5. $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, S — внутренняя сторона параллелипипеда $\{x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, c]\}$;

6. $\iint_S (5x+y)dydz + zdxdy$, S — внешняя сторона границы области $\{1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4\}$;
7. $\iint_S (3x+2y)dydz + (3z+y)dxdy$, S — внешняя сторона эллипсоида $\{x^2 + (y/2)^2 + (z/3)^2 = 1\}$;
8. $\iint_S x^4dydz + y^4dzdx + z^4dxdy$, S — внешняя сторона сферы $\{x^2+y^2+z^2 = 1\}$;
9. $\iint_S x^2dydz + (z+2y)dxdy$, S — внутренняя сторона полной поверхности призмы $\{|x|+|y| \leqslant 1, |z| \leqslant 1\}$.

Задача 32.* Дифференциальная форма ω ранга k называется замкнутой, если $d\omega = 0$. Форма ω называется точной, если существует такая форма ν ранга $k-1$, что $\omega = d\nu$.

1. Докажите, что для любой дифференциальной формы ν выполнено $d(d(\nu))$. Докажите, что любая точная форма является замкнутой.
2. Пусть ω_1, ω_2 — дифференциальные формы рангов k_1 и k_2 соответственно. Докажите формулу Лейбница
$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega) \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1}\omega \wedge (d\omega_2).$$
3. Докажите, что (грассманово) произведение двух замкнутых форм является замкнутой формой. Докажите, что (грассманово) произведение точной формы и замкнутой формы является точной формой.

Задача 33.* (дает 2 балла, но не учитывается при расчете общего количества задач в БДЗ) Открытое множество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется звездчатым, если (1) $0 \in M$; (2) Вместе с любой точкой $x \in M$ множество M целиком содержит отрезок, соединяющий начало координат 0 с точкой x. Докажите локальную лемму Пуанкаре: если ω — замкнутая k-форма на звездчатом множестве M, то ω является точной формой.