Семинар 2.

Напоминание:

1. $I \to Var(s(\theta))$, $I \to \mathbb{E}(ss^T)$, $I \to \mathbb{E}(-H)$

2. $Var(s(\theta)) \cdot Var(\hat{\theta}) \xrightarrow{n\to\infty} \underbrace{I_{n\times n}}_{\text{единич. матрица!}}$

(не инф. Фишера)

3. $LR = 2(\ell_{UR} - \ell_R)$, где $\ell_{UR} := \max\limits_{\theta_{UR}} \ell$

$$W = (\hat{\gamma}_{UR} - \gamma_0)^T \cdot \widehat{Var}(\hat{\gamma}_{UR})^{-1} (\hat{\gamma}_{UR} - \gamma_0),$$

где γ - часть вектора θ: $\begin{cases} H_0: \gamma = \gamma_0 \\ H_A: \gamma \neq \gamma_0 \end{cases}$

$$LM = \hat{s}_R^T \cdot \widehat{Var}(\hat{s}_R)^{-1} \cdot \hat{s}_R$$

В скалярах:

$LR = 2(\ell_{UR} - \ell_R)$

$W = \dfrac{(\hat{\theta} - \theta_0)^2}{\widehat{Var}(\hat{\theta})}$

$LM = \dfrac{(\ell'(\hat{\theta}) - \ell'(\theta_0))^2}{\widehat{Var}(\ell'(\theta_0))} = \dfrac{(\ell'(\theta_0))^2}{\widehat{Var}(\ell'(\theta_0))}$

Пример 1 (разминка, в скалярах)

$X_1, X_2 \dots X_{50} \sim exp(\lambda)$

Оказалось, что $\bar{X} = 1.5$

$\begin{cases} H_0: \lambda = 1 \\ H_1: \lambda \neq 1 \end{cases}$ на ур-е значимости 0.05

LR, W, LM - ?

Решение:

$$f_i(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$L = \prod_{i=1}^n f_i(x_i) = \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i}$$

$$\ln L = n \ln \lambda - \lambda \sum x_i$$

$$s(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum x_i \Rightarrow \hat{\lambda}_{ML} = \frac{1}{\bar{X}} = \frac{10}{15}.$$

$$\ell''_{\lambda\lambda} = -\frac{n}{\lambda^2}$$

$$I(\lambda) = \mathbb{E}(-\ell''_{\lambda\lambda}) = \frac{n}{\lambda^2}$$

$$\hat{I}(\lambda) = \frac{n}{\hat{\lambda}^2} = \frac{50 \cdot 225}{100} = 112.5$$

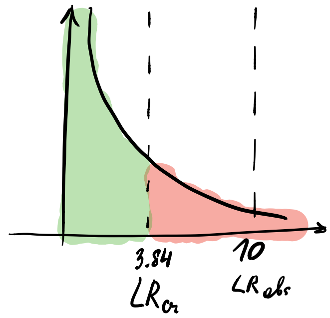
$$\widehat{Var}(\hat{\lambda}) = \frac{1}{112.5} = 0.009$$

1. $l_{UR} = \underbrace{50 \ln \frac{10}{15}}_{-20} - \frac{10}{15} \cdot 50 \cdot 1.5 = -70$

$l_R = 50 \cdot \ln 1 - 50 \cdot 1.5 = -75$

$LR = 2(l_{UR} - l_R) = 10$

$LR \overset{H_0}{\sim} \chi^2_1$



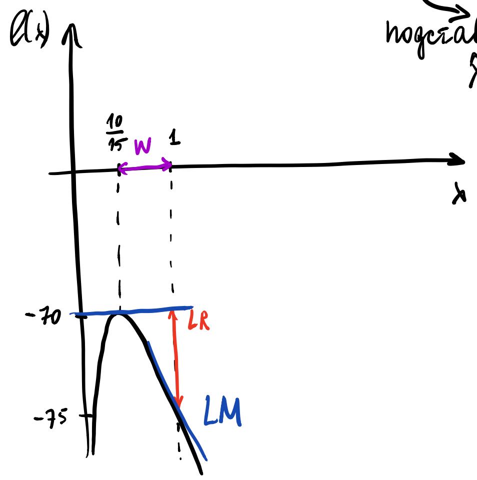
$\Rightarrow H_0$ отверг.

2. $W = \dfrac{\left(\frac{10}{15} - 1\right)^2}{0.009} = 12.34 \Rightarrow H_0$ отверг.

3. $LM = \left(50 - 50 \cdot 1.5\right)^2 \cdot \dfrac{1}{50} = 12.5 \Rightarrow H_0$ отверг.

подставили в $\hat{I}$

$\hat{\lambda} = 1$



Пример 2 (продолжение истории с нормальным распределением)

$X_1 \ldots X_{100} \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\sum_{i=1}^{100} X_i = 20$

$\sum_{i=1}^{100} (X_i - \bar{X})^2 = 400$

$\begin{cases} H_0: \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ H_1: \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

$l'_\mu = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)$

$l'_\sigma = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$

LR, LM, W – ? 95%

$l = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$

$I = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{\sigma^2} \end{pmatrix}$

$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{20}{100} = 0.2$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{400}{100} = 4$

$\hat{I} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}$

$$l_{UR} = -50\ln 2\pi - 100\ln 2 - \frac{1}{8}\cdot 400$$

$$l_R = -50\ln 2\pi - \frac{1}{2}\sum x_i^2$$

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + \bar{x}^2 n = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = \sum x_i^2 - 100\cdot 0.04 = 400$$

$$\sum x_i^2 = 404$$

$$LR = 2(l_{UR} - l_R) = 2\left(-100\ln 2 \underbrace{- \frac{400}{8}}_{-50} + \frac{404}{2}\right) = 82 \Rightarrow H_0 \text{ отверг.}$$

$$\sim \chi^2_2$$

$$W = \left[\begin{pmatrix} 0.2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0.2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\hat{S}_R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^{R2}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu^R) \\ -\frac{n}{\sigma^R} + \frac{1}{\sigma^{R3}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu^R)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -100 + 404 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 304 \end{pmatrix}$$

$$LM = \begin{pmatrix} 20 & 304 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{100} & 0 \\ 0 & \frac{1}{200} \end{pmatrix}}_{\text{Подставили в } \hat{I}\ \hat{\sigma}=1 \text{ и обратили}} \begin{pmatrix} 20 \\ 304 \end{pmatrix}$$

Пример 3 (оценка и тестирование гипотез в модели AR-1).

$$y_t = a_1 + a_2 y_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_{t_i} \perp\!\!\!\perp \varepsilon_{t_j} \ \forall i, j$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, 1)$$

$y_1 \dots y_{100}$ – дано, $y_0 = 0$

Пусть $\sum_{t=1}^{99} y_t = 100$, $y_{100} = 2$

$$\sum_{t=1}^{100} y_t y_{t-1} = 80$$

$$\sum_{t=1}^{99} y_t^2 = 400$$

а) Найдите $\begin{pmatrix} \hat{a}_0^{ML} \\ \hat{a}_1^{ML} \end{pmatrix}$.

б) $\begin{cases} H_0: \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ H_1: \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$

ур-ь знач: 0.05

LR - тест

Зависимы ли y_t и y_{t-1}?

$cov(y_t, y_{t-1}) = cov(a_1 + a_2 y_{t-1} + \varepsilon_t, y_{t-1}) = a_2 Var(y_{t-1})$ => есть даже корреляция!

Найдём распределение $Y_t | Y_{t-1}$

$$\mathbb{E}(Y_t | Y_{t-1}) = \mathbb{E}(a_1 + a_2 Y_{t-1} + \varepsilon_t | Y_{t-1}) = a_2 \cdot Y_{t-1} + a_1.$$

$$Var(Y_t | Y_{t-1}) = Var(a_1 + a_2 Y_{t-1} + \varepsilon_t | Y_{t-1}) = Var(\varepsilon_t) = 1.$$

$$\Rightarrow Y_t | Y_{t-1} \sim N(a_1 + a_2 Y_{t-1}; 1)$$

$$\ell = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} (y_t - a_2 y_{t-1} - a_1)^2$$

$$\begin{cases} \ell'_{a_1} = +\frac{1}{2} \cdot 2 \sum_{t=1}^{n} (y_t - a_2 y_{t-1} - a_1) \\ \ell'_{a_2} = \sum_{t=1}^{n} (y_t - a_2 y_{t-1} - a_1) y_{t-1} \end{cases}$$

$$\ell''_{a_1 a_1} = -n$$

$$\ell''_{a_1 a_2} = -\sum_{t=1}^{n} y_{t-1}$$

$$\ell''_{a_2 a_2} = -\sum_{t=1}^{n} y_{t-1}^2$$

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{n} y_t - \hat{a}_2 \sum_{t=1}^{n} y_{t-1} - n\hat{a}_1 = 0 \\ \sum_{t=1}^{n} y_t y_{t-1} - \hat{a}_2 \sum_{t=1}^{n} y_{t-1}^2 - \hat{a}_1 \sum_{t=1}^{n} y_{t-1} = 0 \end{cases}$$

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum y_t - \hat{a}_2 \sum y_{t-1}}{n}$$

$$\sum y_t y_{t-1} - \hat{a}_2 \sum y_{t-1}^2 - \frac{\left(\sum y_t - \hat{a}_2 \sum y_{t-1}\right)}{n} \sum y_{t-1} = 0$$

$$\hat{a}_2 = \frac{\sum y_t y_{t-1} - \frac{\sum y_t \sum y_{t-1}}{n}}{\sum y_{t-1}^2 + \frac{\sum y_{t-1}}{n}}$$

$$\hat{a}_2^{ml} = \frac{80 - \frac{102 \cdot 100}{100}}{400 + \frac{100}{100}} = \frac{-22}{401} = -0.05, \quad \hat{a}_1^{ml} = \frac{102 + \frac{22}{401} \cdot 100}{100} = 1.074$$

$$\hat{y}_t = 1.074 - 0.05 \hat{y}_{t-1}$$

$$\ell_{UR} = C - \frac{1}{2} \sum (y_t - 1.074 + 0.05 y_{t-1})^2 \qquad LR = 2(\ell_{UR} - \ell_R) \ldots$$

$$\ell_R = C - \frac{1}{2} \sum y_t^2$$