§ 3. Интегрирование иррациональных функций

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Некоторые часто встречающиеся интегралы от иррациональных функций можно вычислить методом рационализации подынтегральной функции. Этот метод заключается в отыскании такой подстановки, которая преобразует интеграл от иррациональной функции в интеграл от функции рациональной. В этом параграфе указываются подстановки, с помощью которых такое сведение удается осуществить для некоторых важнейших классов иррациональных функций. Через $R(x_1; x_2; ...; x_n)$ будем обозначать функцию, рациональную относительно каждой из переменных x_1, x_2, ..., x_n. Например,

$$\frac{x^2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{1+x^3}} = R(x;\ \sqrt{x};\ \sqrt{1+x^3}),$$

так как иррациональная функция $\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{1+x^3}}$ является рациональной относительно переменных $x_1 = x$, $x_2 = \sqrt{x}$, $x_3 = \sqrt{1+x^3}$.

1. Интегралы вида

$$\int R\left(x;\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}; \ldots; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n}\right)dx, \tag{1}$$

где $n \in N$, $p_1, p_2, ..., p_n \in Q$, $a, b, c, d \in R$, $ad - bc \neq 0$, подстановкой

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m,$$

где m — общий знаменатель рациональных чисел $p_1, p_2, ..., p_n$, приводятся к интегралу от рациональной функции.

2. Интегралы вида

$$\int R(x;\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \quad a \neq 0, \quad b^2 - 4ac \neq 0, \tag{2}$$

могут быть сведены к интегралам от рациональных функций *подстановками Эйлера*:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x \pm t, \quad \text{если} \quad a > 0;$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}, \quad \text{если} \quad c > 0;$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x - x_1)\,t,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x - x_2)\,t,$$

где x_1 и x_2 — различные действительные корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. (Знаки в правых частях равенств можно брать в любых комбинациях.)

Подстановки Эйлера часто приводят к громоздким выкладкам. Укажем поэтому другой способ вычисления интегралов (2). Подынтегральную функцию $R(x;\ \sqrt{ax^2+bx+c})$ алгебраическими преобразованиями всегда можно представить в виде суммы

$$\frac{R_1(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + R_2(x),$$

где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ — рациональные дроби. Тем самым интеграл (2) можно свести к интегралу от рациональной дроби $R_2(x)$ и к интегралу вида

$$\int R_1(x)\,\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Представив рациональную дробь $R_1(x)$ в виде суммы многочлена $P_n(x)$ и элементарных дробей, приходим к интегралам следующих трех видов:

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{3}$$

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{4}$$

$$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad p^2-4q<0. \tag{5}$$

Для вычисления интеграла (3) удобно пользоваться формулой

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{6}$$

где $Q(x)$ — многочлен степени не выше, чем $n-1$, а λ — некоторое число. Дифференцируя обе части формулы (6) и затем умножая на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, получаем равенство многочленов, из которого находим λ и коэффициенты многочлена $Q(x)$. Интеграл в правой части формулы (6) линейной подстановкой сводится к основным интегралам 14–16 из §1 и, следовательно, является трансцендентной функцией.

Формула (6) позволяет чисто алгебраическим путем найти алгебраическую часть $Q(x)\ \sqrt{ax^2+bx+c}$ интеграла (3).

Интеграл (4) подстановкой $t = 1/(x-\alpha)$ приводится к интегралу (3). Интеграл (5) в случае, когда квадратные трехчлены

$$ax^2+bx+c, \quad x^2+px+q$$

совпадают или отличаются только множителем, следует представить в виде линейной комбинации двух интегралов

$$\int \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^{(2m+1)/2}} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{(2m+1)/2}}.$$

Первый интеграл берется подстановкой $u = x^2+px+q$, второй *подстановкой Абеля*

$$t = (\sqrt{x^2+px+q})' = \frac{2x+p}{2\sqrt{x^2+px+q}}$$

сводится к интегралу от многочлена.

В общем случае, если $p \neq b/a$, применяется подстановка

$$x = \frac{\alpha t+\beta}{t+1},$$

где α и β подбираются так, чтобы в квадратных трехчленах x^2+px+q и ax^2+bx+c исчезли члены, содержащие t в первой степени. При таком выборе чисел α и β интеграл (5) сведется к интегралу вида

$$\int \frac{P(t)\,dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{st^2+r}},$$

где $P(t)$ — многочлен степени $2m-1$ и число $\lambda>0$. (Если $p=b/a$, то уничтожение членов первой степени достигается проще: линейной заменой $x=t-p/2$.)

Разложив правильную рациональную дробь $P(t)/(t^2+\lambda)^m$ на элементарные дроби, придем к интегралам

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{st^2+r}}, \quad \int \frac{dt}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{st^2+r}}.$$

Первый интеграл вычисляется подстановкой $u^2=st^2+r$, второй — подстановкой Абеля

$$v=(\sqrt{st^2+r})'=\frac{st}{\sqrt{st^2+r}}.$$

Для вычисления интегралов вида (2) часто удобно использовать тригонометрические или гиперболические подстановки. Для этого, предварительно выделив полный квадрат в трехчлене ax^2+bx+c и сделав соответствующую линейную замену, приводят интеграл (2) к одному из следующих видов:

$$\int R(t;\ \sqrt{p^2-t^2})\,dt, \quad \int R(t;\ \sqrt{t^2-p^2})\,dt, \quad \int R(t;\ \sqrt{t^2+p^2})\,dt.$$

К первому интегралу применяют подстановки

$$t=p\sin u, \quad t=p\cos u, \quad t=p\,\mathrm{th}\,u,$$

ко второму — подстановки

$$t=\frac{p}{\cos u}, \quad t=p\,\mathrm{ch}\,u,$$

и к третьему — подстановки

$$t=p\,\mathrm{tg}\,u, \quad t=p\,\mathrm{sh}\,u.$$

3. Интегралы вида

$$\int x^m(ax^n+b)^p\,dx, \tag{7}$$

где a, b — действительные, m, n, p — рациональные числа, причем $a\neq 0$, $b\neq 0$, $n\neq 0$, $p\neq 0$, называют *интегралами от дифференциального бинома*. Эти интегралы сводятся к интегралам от рациональных функций в следующих трех случаях:

$$\begin{aligned} &p \text{ — целое число},\\ &\frac{m+1}{n} \text{ — целое число},\\ &\frac{m+1}{n}+p \text{ — целое число}. \end{aligned} \tag{8}$$

В первом случае применяется подстановка

$$x = t^N,$$

где N — общий знаменатель дробей m и n; во втором и в третьем случаях — соответственно подстановки

$$ax^n + b = t^s \quad \text{и} \quad a + bx^{-n} = t^s,$$

где s — знаменатель дроби p.

Если ни одно из условий (8) не выполняется, то интеграл (7) не может быть выражен через элементарные функции (*теорема Чебышева*).

4. Интегралы вида

$$\int R\bigl(x;\ \sqrt{P_n(x)}\bigr)\,dx, \tag{9}$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени $n > 2$, как правило, не выражаются через элементарные функции и в этом случае при $n = 3$ и $n = 4$ называются *эллиптическими*, а при $n > 4$ *гиперэллиптическими*. В том случае, когда интеграл (9) при $n = 3$ и $n = 4$ является элементарной функцией, он называется *псевдоэллиптическим* (см. задачи 22). Эллиптические интегралы играют большую роль в математике; в частности, длина дуги эллипса вычисляется с помощью эллиптического интеграла (пример 9 из § 7).

Каждый эллиптический интеграл может быть выражен через элементарные функции и через стандартные эллиптические интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{10}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{11}$$

$$\int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad k \in (0;\ 1). \tag{12}$$

Подстановкой $x = \sin\varphi$ эти ингегралы сводятся к линейным комбинациям интегралов

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{13}$$

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \tag{14}$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad k \in (0;\ 1), \tag{15}$$

которые называются соответственно *эллиптическими интегралами первого, второго, третьего рода в форме Лежандра.*

Через $F(\varphi,\ k)$ и $E(\varphi,\ k)$ обозначают соответственно ту из первообразных (13) и (14), которая при $\varphi = 0$ обращается в нуль (см. задачи 27).