ГЛАВА 3

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 13. Производная. Формулы и правила вычисления производных. Дифференциал функции

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Определение производной. Предел отношения

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

при $\Delta x \to 0$ называется *производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0. Этот предел обозначают одним из следующих символов:

$$f'(x_0), \qquad \frac{df(x_0)}{dx}, \qquad f'\big|_{x=x_0}.$$

Таким образом,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если в каждой точке $x \in (a;b)$ существует

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

т. е. если производная $f'(x)$ существует для всех $x \in (a;b)$, то функция f называется *дифференцируемой на интервале* $(a;b)$. Вычисление производной называют *дифференцированием.*

2. Правила вычисления производных, связанные с арифметическими действиями над функциями. Если функции f_1, $f_2, \ldots, f_n$ имеют производные в некоторой точке, то функция

$$f=c_1f_1+c_2f_2+\ldots+c_nf_n \quad (c_1, c_2, \ldots, c_n \text{ — постоянные})$$

также имеет в этой точке производную, причем

$$f'=c_1f_1'+c_2f_2'+\ldots+c_nf_n'.$$

Если функции f_1 и f_2 имеют производные в некоторой точке, то и функция $f=f_1f_2$ имеет производную в этой точке, причем

$$f'=f_1f_2'+f_1'f_2.$$

Если функции f_1 и f_2 имеют производные в некоторой точке и $f_2 \neq 0$ в ней, то функция $f=f_1/f_2$ также имеет производную в этой точке, причем

$$f'=\frac{f_2f_1'-f_1f_2'}{f_2^2}.$$

3. Формулы для производных основных элементарных функций.

1) *Степенная функция:*

$$c' = 0, \quad c = \text{const},$$
$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0, \quad \alpha \in R.$$

Область существования производной функции x^α может быть и шире. Например, если $\alpha \in N$, то

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x \in R.$$

2) *Показательная функция.* Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in R;$$

в частности,

$$(e^x)' = e^x, \quad x \in R.$$

3) *Логарифмическая функция.* Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0; \quad (\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x \neq 0;$$

в частности,

$$(\ln x)' = 1/x, \quad x > 0; \quad (\ln |x|)' = 1/x, \quad x \neq 0.$$

4) *Тригонометрические функции:*

$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in R; \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad x \in R;$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z;$$
$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in Z.$$

5) *Обратные тригонометрические функции:*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \; |x| < 1; \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \; |x| < 1;$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \; x \in R; \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \; x \in R.$$

6) *Гиперболические функции:*

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad x \in R; \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad x \in R;$$
$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad x \in R; \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0.$$

4. Вычисление производной сложной функции. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z = g(y)$ — в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция (композиция f и g) $z = \varphi(x) = g(f(x))$ также имеет производную в точке x_0, причем

$$\varphi'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0). \tag{1}$$

Опуская аргумент и используя другое обозначение для производных, формулу (1) можно переписать в виде

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}. \tag{2}$$

Правило вычисления производной сложной функции распространяется на композицию любого конечного числа функций. Например, для сложной функции вида $z(y(x(t)))$ в случае дифференцируемости функций $x(t)$, $y(x)$, $z(y)$ соответственно в точках t_0, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(x_0)$ в точке t_0 имеет место равенство

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

5. Понятия бесконечной и односторонней производных. Если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = +\infty,$$

то говорят, что функция f в точке x_0 имеет *бесконечную положительную производную*. Аналогично, функция f в точке x_0 имеет *бесконечную отрицательную производную*, если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -\infty.$$

Односторонние пределы

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

называют соответственно *правой* и *левой производными* функции f в точке x_0 и обозначают $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$.

Для существования производной функции f в точке необходимо и достаточно существования в этой точке правой и левой производных и их равенство.

Функция f называется *дифференцируемой* на отрезке $[a; b]$, если она дифференцируема на интервале $(a; b)$ и существуют конечные односторонние производные $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$.

6. Производная обратной функции. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0, и пусть в этой точке существует производная $\dfrac{df(x_0)}{dx} \neq 0$; тогда обратная функция $f^{-1}(y)$ в точке $y_0 = f(x_0)$ имеет производную, которая может быть найдена по формуле

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}.$$

7. Производная функции, заданной параметрически. Пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ определены в некоторой окрестности точки t_0 и параметрически задают в окрестности точки $x = x(t_0)$ функцию $y = f(x)$. Тогда, если $x(t)$ и $y(t)$ имеют в точке t_0 производные и если $\dfrac{dx(t_0)}{dt} \neq 0$, то функция $y = f(x)$ в точке x_0 также имеет производную, которая может быть найдена по формуле

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{\dfrac{dy(t_0)}{dt}}{\dfrac{dx(t_0)}{dt}}.$$

Эту формулу обычно записывают короче:

$$y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}. \tag{3}$$

8. Производная функции, заданной неявно. Если дифференцируемая на некотором интервале функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $F(x;y) = 0$, то ее производную $y'(x)$ можно найти из уравнения

$$\frac{d}{dx}F(x;y) = 0. \tag{4}$$

9. Дифференциал функции. Если приращение

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

функции $y = f(x)$ в точке x_0 представимо в виде

$$\Delta y = A(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{5}$$

где $A(x_0)$ не зависит от Δx и $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, а произведение $A(x_0)\Delta x$ называется ее *дифференциалом* в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$ или $dy|_{x=x_0}$.

Таким образом, если равенство (5) верно, то

$$dy|_{x=x_0} = A(x_0)\Delta x.$$

Дифференциалом dx независимой переменной x называется ее приращение Δx, т. е. по определению полагают $dx = \Delta x$.

Для дифференцируемости функции в точке (т. е. для существования дифференциала) необходимо и достаточно, чтобы функция имела в этой точке конечную производную.

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 выражается через производную $f'(x_0)$ следующим образом:

$$df(x_0) = f'(x_0)dx. \tag{6}$$

Эта формула позволяет вычислять дифференциалы функций, если известны их производные.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала $(a;b)$, то

$$dy = f'(x)dx \tag{7}$$

для всех $x \in (a;b)$.

Равенство (5) может быть записано в виде

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + dy(x_0) + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Если $dy(x_0) \neq 0$, то для приближенного вычисления значения функции в точке $x_0 + \Delta x$ можно пользоваться формулой

$$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + dy(x_0), \tag{8}$$

так как абсолютная и относительная погрешности при таком приближении сколь угодно малы при достаточно малом Δx.

10. Свойства дифференциала.

1°. Для любых дифференцируемых функций u и v справедливы равенства

$$d(\alpha u + \beta v) = \alpha\, du + \beta\, dv,$$

где α и β — произвольные постоянные,

$$d(uv) = u\, dv + v\, du, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

2°. Формула для дифференциала $dy = f'(x)dx$ справедлива и в том случае, когда x является не независимой переменной, а функцией. Это свойство называют *свойством инвариантности формы дифференциала.*

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Вычислить производную функции

$$f = \sqrt[3]{x} \arccos x + 2\log_2 x + e^x/x^2, \quad x \in (0;1).$$

▲ $$f' = (\sqrt[3]{x} \arccos x)' + 2(\log_2 x)' + \left(\frac{e^x}{x^2}\right)' =$$

$$= \sqrt[3]{x}(\arccos x)' + \arccos x(\sqrt[3]{x})' + 2\frac{1}{x\ln 2} +$$

$$+ \frac{x^2(e^x)' - e^x(x^2)'}{x^4} = -\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arccos x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{x\ln 2} + \frac{(x-2)e^x}{x^3}. \text{ ▲}$$

Пример 2. Вычислить производную функции $z = \ln\sin x$ в точке $x_0 = \pi/3$.

▲ Функция $z = \varphi(x) = \ln\sin x$ является композицией двух функций: $y = f(x) = \sin x$ и $z = g(y) = \ln y$. Функция $f(x) = \sin x$ в точке $x_0 = \pi/3$ имеет производную, причем $f'(\pi/3) = \cos(\pi/3) = 1/2$. Функция $g(y) = \ln y$ в точке $y_0 = \sin x_0 = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ также имеет производную, причем $g'(\sqrt{3}/2) = 2/\sqrt{3}$. По формуле (1) получаем

$$\varphi'(\pi/3) = g'(\sqrt{3}/2)f'(\pi/3) = (2/\sqrt{3})(1/2) = 1/\sqrt{3}. \text{ ▲}$$

Пример 3. Вычислить производную функции

$$z = \sqrt{1+x^2}, \quad x \in R.$$

▲ Данная функция является композицией функций $y = 1 + x^2$ и $z = \sqrt{y}$, причем

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

По формуле (2) получаем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}}2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \text{ ▲}$$