24. 1) Сходится; 2) расходится; 3) сходится; 4) сходится;
5) расходится; 6) расходится; 7) расходится; 8) сходится.
25. 1) Сходится; 2) сходится; 3) сходится; 4) расходится;
5) сходится; 6) расходится при любом α;
7) сходится; 8) расходится;
9) сходится при $\alpha > 1$ (β любое) и при $\alpha = 1$, если $\beta > 1$;
10) сходится; 11) сходится; 12) сходится; 13) сходится;
14) сходится; 15) сходится; 16) сходится.
26. 1) Сходится; 2) сходится; 3) расходится; 4) сходится;
5) сходится; 6) сходится;
7) сходится, если $\beta > \alpha + 1$ и расходится, если $\beta \leqslant \alpha + 1$;
8) сходится; 9) сходится; 10) расходится; 11) сходится.
27. 1) Расходится; 2) сходится; 3) сходится; 4) сходится;
5) сходится; 6) расходится; 7) сходится; 8) расходится;
9) сходится; 10) расходится; 11) расходится; 12) сходится.
28. 1) Расходится; 2) сходится при $\alpha > 2$ и расходится при $\alpha \leqslant 2$;
3) сходится при $\alpha > 2$ и расходится при $\alpha \leqslant 2$;
4) сходится при любом β, если $\alpha > 1$, а также при $\beta > 1$, если $\alpha = 1$; при других значениях α и β расходится.
30. Сходится
33. 1) Сходится; 2) сходится; 3) расходится; 4) сходится.
39. Нет. **44.** а) Да; б) нет.

§ 15. Абсолютно и не абсолютно сходящиеся ряды

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Абсолютно сходящиеся ряды. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{2}$$

При исследовании рядов на абсолютную сходимость применяются признаки сходимости рядов с неотрицательными членами (§ 14).

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

1. Абсолютно сходящийся ряд сходится, т. е. из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), причем $|S| \leqslant \sigma$, где S и σ — суммы рядов (1) и (2) соответственно.

2. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, то при любых α и β ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$$

также абсолютно сходится.

3. Если ряд (1) абсолютно сходится, то ряд, составленный из тех же членов, но взятых в другом порядке, также абсолютно сходится, и его сумма равна сумме ряда (1).

4. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всевозможных попарных произведений $a_i b_i$ членов этих рядов, расположенных в любом порядке, также абсолютно сходится, а его сумма равна $S\sigma$, где S и σ — суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

2. Знакочередующиеся ряды. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots,$$

где $a_n \geqslant 0$ или $a_n \leqslant 0$ $(n \in N)$, называют *знакочередующимся.*

Признак Лейбница. Если

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{3}$$

и для каждого $n \in N$ выполняется неравенство

$$a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant 0, \tag{4}$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \tag{5}$$

сходится. При этом

$$|S - S_n| \leqslant a_{n+1}, \tag{6}$$

где S и S_n — соответственно сумма и n-я частичная сумма ряда (5).

3. Признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов.

Признак Дирихле. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{7}$$

сходится, если частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограниченны, т. е.

$$\exists M > 0 \quad \forall n \in N\colon \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant M,$$

а последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю, т. е. $a_{n+1} \leqslant a_n$ или $a_{n+1} \geqslant a_n$ для всех $n \geqslant n_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Признак Абеля. Ряд (7) сходится, если последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограниченна, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

4. Условно сходящиеся ряды. Ряд (1) называется *условно* (*не абсолютно*) *сходящимся*, если этот ряд сходится, а ряд (2) расходится.

Если ряд (1) сходится условно, то каким бы ни было число A, можно так переставить члены ряда (1), что сумма полученного ряда будет равна A (*теорема Римана*).

При исследовании на сходимость рядов иногда оказывается полезным следующее утверждение: если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ одновременно либо абсолютно сходятся, либо условно сходятся, либо расходятся.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, если:

1) $a_n = \dfrac{(n+1)\cos 2n}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}}$; 2) $a_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[5]{n}}\right)\operatorname{arctg}\dfrac{\sin n}{n}$;

3) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln^2(n+1)}\left(1-\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

▲ 1) Используя неравенства $n+1 \leqslant 2n$, $|\cos 2n| \leqslant 1$, $n^7+3n+4 > n^7$, получаем $|a_n| < \dfrac{2}{n^{4/3}}$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^{4/3}}$ по признаку сравнения следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, т. е. абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Заметим, что при $t \geqslant 0$ справедливы неравенства $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$, а при любом $t \in R$ — неравенство $|\operatorname{arctg} t| \leqslant |t|$. Поэтому

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\left|\frac{\sin n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n^{6/5}},$$

откуда следует абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

3) Используя формулу $1-\cos t = 2\sin^2(t/2)$ и неравенство $|\sin t| \leqslant \leqslant |t|$, $t \in R$, получаем

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2n\ln^2(n+1)}.$$

Так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\ln^2(n+1)}$$

сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно. ▲

Пример 2. Доказать сходимость знакочередующегося ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln^2 n}{n}$.

▲ 1) Последовательность $\{a_n\}$, где $a_n = 1/\sqrt{n}$, монотонно стремится к нулю (удовлетворяет условиям (3), (4)). По признаку Лейбница ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ сходится.

2) Обозначим $\varphi(x) = (\ln^2 x)/x$; тогда

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0$$

(*правило Лопиталя*) и

$$\varphi'(x) = \frac{\ln x}{x^2}(2-\ln x),$$

откуда следует, что $\varphi'(x) < 0$ при $x > e^2$. Поэтому последовательность $\{a_n\}$, где $a_n = (\ln^2 n)/n$, удовлетворяет условию (3), а при $n > > e^2$ — условию (4). По признаку Лейбница ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln^2 n}{n}$ сходится. ▲

Пример 3. Доказать, что если последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$ сходится при любом $\alpha \in R$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\alpha$ сходится при $\alpha \neq 2\pi m$, $m \in Z$.

▲ Обозначим $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\sin k\alpha$, $C_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\cos k\alpha$. Тогда

$$B_n = \frac{\sin((n+1)\alpha/2)\sin(n\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}, \quad C_n = \frac{\cos((n+1)\alpha/2)\sin(n\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}, \tag{8}$$

$$\alpha \neq 2\pi m, \quad m \in Z.$$

Для доказательства формул (8) можно воспользоваться равенствами

$$2\sin k\alpha \sin(\alpha/2) = \cos(k-1/2)\alpha - \cos(k+1/2)\alpha,$$
$$2\cos k\alpha \sin(\alpha/2) = \sin(k+1/2)\alpha - \sin(k-1/2)\alpha.$$

Если $\alpha \neq 2\pi m$, где $m \in Z$, то

$$|B_n| \leqslant \frac{1}{|\sin(\alpha/2)|}, \quad |C_n| \leqslant \frac{1}{|\sin(\alpha/2)|},$$

и по признаку Дирихле ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha$ сходятся. Если $\alpha = 2\pi m$, где $m \in Z$, то $\cos n\alpha = 1$, а $\sin n\alpha = 0$ при всех $n \in N$. Поэтому при $\alpha = 2\pi m$, $m \in Z$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$ сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

может как сходиться, так и расходиться. ▲

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\alpha}{\ln\ln(n+2)} \cos \dfrac{1}{n}$.

▲ Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\alpha}{\ln\ln(n+2)}$ сходится (пример 3), а последовательность $\{\cos(l/n)\}$ монотонна и ограниченна, то по признаку Абеля ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln\ln(n+2)} \cos \frac{1}{n}$$

сходится при любом $\alpha \in R$. ▲

Пример 5. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

1) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}}$; 2) $a_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}}\right)$; 3) $a_n = \dfrac{\cos n}{n}$.

▲ 1) Запишем a_n в следующем виде:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)^{-1},$$

и воспользуемся асимптотической формулой

$$(1+t)^{-1} = 1 - t + O(t^2), \quad t \to 0.$$

Тогда получим

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \alpha_n, \quad \text{где} \quad |\alpha_n| \leqslant \frac{C}{n^{3/2}}, \quad C > 0.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ абсолютно сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится или расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, где $b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (пример 2) и расходимости гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, хотя $a_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ сходится.

2) Используя асимптотическую формулу

$$\ln(1+t) = t + O(t^2) \quad \text{при} \quad t \to 0,$$

получаем

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}} + b_n, \quad \text{где} \quad |b_n| \leqslant \frac{C}{n^{4/3}}, \quad C > 0.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится абсолютно, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}}$ сходится условно $\left(\text{ряд } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^{2/3}} \text{ расходится}\right)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно.

3) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n}$ сходится (пример 3). Докажем, что этот ряд не является абсолютно сходящимся, т. е. докажем расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|\cos n|}{n}$. Используя неравенство $|\cos n| \geqslant \cos^2 n$ и формулу $\cos^2 n = (1+\cos 2n)/2$, получаем

$$\frac{|\cos n|}{n} \geqslant \frac{1+\cos 2n}{2n}. \tag{9}$$

Заметим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+\cos 2n}{2n}$ расходится, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2n}{2n}$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n}$ расходится. По признаку сравнения (§ 14) из (9) следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|\cos n|}{n}$ расходится. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n}$ сходится условно. ▲

ЗАДАЧИ

Доказать, что ряды абсолютно сходятся (1, 2).

1. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2n+\pi/4)}{n\sqrt[3]{n+2}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(-n)^n}{\sqrt[4]{2n^6+3n+1}}$;