43. Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется *равностепенно непрерывной* на отрезке $[a;b]$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x',x''\in[a;b]\ \ |x'-x''|<\delta\ \ \forall n\in N\colon |f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon.$$

Доказать, что если последовательность $\{f_n(x)\}$ непрерывных функций равномерно сходится на отрезке $[a;b]$, то она равномерно ограничена (см. задачу 35) и равностепенно непрерывна на отрезке $[a;b]$.

44. Доказать, что если последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна (см. задачу 43) на отрезке $[a;b]$, то из нее можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на этом отрезке (*теорема Арцела*).

ОТВЕТЫ

2. $3/4$. **3.** $\pi/2$. **4.** π. **7.** Да.
8. 1) $E=[e^{-1};e]$, f непрерывна на E;
2) $E=R$, f непрерывна на E;
3) $E=(-1;1)$, f непрерывна на E; 4) $E=R$, f непрерывна на E.
9. 1) $\mathrm{E}=R$, f дифференцируема на E;
2) $E=[0,+\infty)$, f дифференцируема на E;
3) $E=R$, f дифференцируема на E;
4) $E=R$, f дифференцируема на E, за исключением $x=0$.
24. Нет. **25.** Да. **26.** Да. **27.** $\alpha<2$.
28. Может. Пример:

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\,g(x),\quad \text{где}\quad g(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x \text{ иррационально},\\ 1, & \text{если } x \text{ рационально},\end{cases}$$

29. Да.
40. 1) $\dfrac{\pi^2}{6}$; 2) $-\dfrac{1}{2}\ln 2$; 3) -1; 4) 1.

§ 20. Степенные ряды

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Радиус сходимости и круг сходимости степенного ряда. Функциональные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\zeta-a)^n, \tag{1}$$

где c_n $(n=0,1,2,\ldots)$ и a — заданные комплексные числа, ζ — комплексное переменное, называются *степенными рядами*. Числа c_n называются *коэффициентами* степенного ряда (1).

Полагая в (1) $\zeta - a = z$, получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{2}$$

исследование сходимости которого эквивалентно исследованию сходимости ряда (1).

Теорема 1 (Абеля). *Если степенной ряд* (2) *сходится при* $z = z_0 \neq 0$, *то он сходится и притом абсолютно при любом* z *таком, что* $|z| < |z_0|$, *а если этот ряд расходится при* $z = z_1 \neq 0$, *то он расходится при всяком* z, *для которого* $|z| > |z_1|$.

Теорема 2. *Для всякого степенного ряда* (2) *существует* R ($R \geqslant 0$ — *число или* $+\infty$) *такое, что ряд* (2) *абсолютно сходится в круге* $K = \{z\colon |z| < R\}$, *если* $R \neq 0,\ +\infty$.

Этот круг называется *кругом сходимости* степенного ряда, а R — *радиусом сходимости* этого ряда.

Если $R = 0$, то ряд (2) сходится в одной точке $z = 0$, а если $R = +\infty$, то этот ряд сходится во всей комплексной плоскости. В точках границы круга K ряд (2) может как сходиться, так и расходиться. В любом меньшем круге $K_1 = \{z : |z| \leqslant \rho < R\}$ ряд (2) сходится абсолютно и равномерно.

Для степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{3}$$

круг сходимости K имеет вид $K = \{z : |z-a| < R\}$.

Теорема 3 (Абеля). *Если* R — *радиус сходимости степенного ряда* (2), *причем* $0 < R < +\infty$, *и если этот ряд сходится при* $z = R$, *то он сходится равномерно на отрезке* $[0; R]$, *а его сумма непрерывна на этом отрезке.*

Для радиуса сходимости R степенного ряда (3) справедлива *формула Коши–Адамара*:

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}. \tag{4}$$

Если существует (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, то

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|, \tag{5}$$

а если существует (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, то

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}. \tag{6}$$

Для степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \tag{7}$$

где a_n $(n=0,1,2,...)$, x_0 — заданные действительные числа, x — действительное переменное, существует R ($R \geqslant 0$ — число или $+\infty$) такое, что при $R \neq 0$, $+\infty$ ряд (7) абсолютно сходятся, если $|x-x_0|<R$, и расходится, если $|x-x_0|>R$. Интервал $(x_0-R;\, x_0+R)$ называют ***интервалом сходимости***, а R — ***радиусом сходимости*** ряда (7).

Радиус сходимости ряда (7) совпадает с радиусом сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-x_0)^n$, где z — комплексное переменное. При $R=0$ ряд (7) сходится лишь в точке $x=x_0$, а при $R=\infty$ — при всех $x \in R$.

Исследовать степенной ряд (7) на сходимость — значит найти его интервал сходимости и выяснить, сходится или расходится этот ряд в концах его интервала сходимости. Область сходимости степенного ряда (7) состоит из его интервала сходимости и, быть может, некоторых граничных точек этого интервала.

2. Регулярные функции. Функция комплексного переменного $f(z)$ называется ***регулярной*** (***однозначной аналитической***, ***голоморфной***) в точке a, если она определена в некоторой окрестности точки a и представима в круге $|z-a|<\rho$, где $\rho>0$, сходящимся к $f(z)$ степенным рядом:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n. \tag{8}$$

Отметим, что любой многочлен

$$P(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$$

— функция, регулярная в каждой точке комплексной плоскости. Рациональная функция

$$f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)},$$

где P_n и Q_m — многочлены степени n и m соответственно, регулярна в каждой точке a, где $Q_m(a) \neq 0$.

В теории функций комплексного переменного доказывается (см., например, [14]), что на границе круга сходимости степенного ряда (8) лежит хотя бы одна "особая" точка его суммы $f(z)$. Отсюда следует, что радиус степенного ряда (8) равен расстоянию от точки a до ближайшей к a особой точки функции $f(z)$.

В частности, если

$$f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)},$$

где многочлены P_n и Q_m не имеют общих корней, то для этой функции радиус сходимости R степенного ряда (8) равен расстоянию от точки a до ближайшего к этой точке корня многочлена $Q_m(z)$, т. е.

$$R = \min_{1 \leqslant k \leqslant m} |z_k - a|, \tag{9}$$

где z_k $(z = 1, 2, ..., m)$ — корни многочлена $Q_m(z)$.

3. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда. Вычисление суммы ряда. Если степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{10}$$

где a_n, x_0 — заданные действительные числа, x — действительное переменное, имеет радиус сходимости $R > 0$, то:

1) в интервале сходимости $(x_0 - R;\ x_0 + R)$ функция f имеет производные любого порядка, получаемые почленным дифференцированием ряда (10);

2) внутри интервала сходимости этот ряд можно почленно интегрировать, т. е.

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (x_0 - R; x_0 + R);$$

3) степенные ряды, получаемые из ряда (10) при почленном дифференцировании и интегрировании, имеют тот же радиус сходимости, что и ряд (10).

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Найти радиус сходимости R степенного ряда:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}; \quad 2)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n2^n} z^n; \quad 4)\ \sum_{n=0}^{\infty} 5^n z^{3n}.$$

▲ 1) Так как существует

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1,$$

то по формуле (5) находим $R = 1$.

2) В этом случае

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty,$$

и поэтому $R = +\infty$ (формула (5)).

3) Так как $|1 + i| = \sqrt{2}$ и существует

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(\sqrt{2})^n}{n2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

то по формуле (6) получаем $R = \sqrt{2}$.

4) Обозначим $5z^3 = t$; тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5^n z^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (5z^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$