74. 3,1416. **75.** 3,141592654.

76. 1) 0,946; 2) 0,608; 3) 0,905; 4) 1,057; 5) 0,310; 6) 0,927.

77. 1) 3,057; 2) 2,835; 3) 0,488; 4) 0,337; 5) 0,384; 6) 0,507; 7) 0,119; 8) 0,783.

79. 1) Да; 2) нет. **81.** Нет.

§ 22. Тригонометрические ряды Фурье

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Разложение функций в тригонометрический ряд Фурье. Ряд вида

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

называется *тригонометрическим рядом.* Его *частичными суммами*

$$S_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + ... + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

являются последовательные конечные линейные комбинации тригонометрической системы функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x, ..., \cos nx,\ \sin nx,\ ... \tag{2}$$

Система функций (2) обладает *свойством ортогональности*:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, \cos mx\, dx = 0, \quad n \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, \sin mx\, dx = 0, \quad n \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, \sin mx\, dx = 0, \quad n, m = 0, 1, 2, ...$$

Отметим также следующие равенства:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi, \quad n \in N.$$

В этом параграфе будут рассматриваться функции f, определенные на некотором отрезке $[a; b]$, кроме, быть может, конечного множества его точек, которое может быть пустым, и интегрируемые по Риману на любом отрезке, содержащемся в отрезке $[a; b]$ и не содержащем точек указанного конечного множества. Для таких функций определено понятие несобственного интеграла. Если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|\, dx$, то функция f называется *абсолютно интегрируемой* на отрезке $[a; b]$.

Если функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi;\pi]$, то тригонометрический ряд (1), коэффициенты которого (называемые *коэффициентами Фурье* функции f) определяются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n \in N, \tag{3}$$

называется *рядом Фурье* функции f, или, подробнее, ее *тригонометрическим рядом Фурье*. В этом случае пишут

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx). \tag{4}$$

Частичные суммы $S_n(x)$ ряда Фурье функции f обозначают также $S_n(x;f)$.

Если функция f четная, то

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = 0, \quad n \in N;$$

а если — нечетная, то

$$a_n = 0, \quad n = 0,1,2,..., \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n \in N.$$

Коэффициенты Фурье любой абсолютно интегрируемой функции стремятся к нулю при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{5}$$

Функция называется *кусочно непрерывной* на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна во всех точках этого отрезка, кроме конечного числа точек, в которых существуют ее конечные односторонние пределы.

Функция называется *кусочно гладкой* на некотором отрезке, если она сама и ее производная кусочно непрерывны.

Теорема 1. *Ряд Фурье кусочно гладкой на отрезке* $[-\pi;\pi]$ *функции* f *сходится в каждой точке интервала* $(-\pi;\pi)$ *к значению*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

(*в частности, в точке непрерывности функции* f *к ее значению в этой точке*), *а в точках* $x=-\pi$ *и* $x=\pi$ *к значению*

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

Теорема 2. *Если функция* f *имеет на отрезке* $[-\pi;\pi]$ $k-1$ *непрерывных производных,* $k \geqslant 0$, *причем* $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0,1,...$

..., $k-1$, и кусочно непрерывную k-ю производную, то ряд Фурье функции f сходится абсолютно и равномерно на всем отрезке $[-\pi;\pi]$ к функции f и $|f(x)-S_n(x;f)| < \dfrac{\alpha_n}{n^{k-1/2}}$, *где* $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

2. Комплексная форма ряда Фурье. С помощью *формул Эйлера*

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{nxi}+e^{-nxi}), \quad \sin nx = \frac{1}{2i}(e^{nxi}-e^{-nxi}) \tag{6}$$

тригонометрический ряд (1) можно записать в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{7}$$

где

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n i), \quad n \in N,$$

откуда видно, что

$$c_{-n} = \bar{c}_n.$$

Если ряд (1) является рядом Фурье функции f, то

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \quad n \in Z. \tag{8}$$

Ряд (7) с коэффициентами (8) называют *рядом Фурье в комплексной форме* функции f и пишут

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \tag{9}$$

Если функция $f(x)$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, принимает комплексные значения,

$$f(x) = u(x) + v(x)i,$$

где функции $u(x)$ и $v(x)$ абсолютно интегрируемы на отрезке $[-\pi;\pi]$, то ряд (7), коэффициенты которого определяются по формулам (8), называется *рядом Фурье* функции f. В этом случае коэффициенты c_n и c_{-n} (называемые *комплексными коэффициентами Фурье* функции f), вообще говоря, уже не являются комплексно сопряженными как в случае, когда функция f принимает только действительные значения.

Если ряд Фурье функции, абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi;\pi]$, сходится на отрезке $[-\pi;\pi]$, то он сходится во всех точках числовой оси R и его сумма является 2π-периодической функцией на R. Поэтому ряды Фурье вида (1) называют также *рядами Фурье периодических функций с периодом* 2π.

Теория рядов Фурье 2π-периодических функций переносится на случай периодических функций, имеющих любой период $2l$, с помощью линейного отображения

$$y = \frac{\pi}{l}x, \quad -l \leqslant x \leqslant l, \quad -\pi \leqslant y \leqslant \pi,$$

отрезка $[-l;l]$ на отрезок $[-\pi;\pi]$. *Рядом Фурье функции f, абсолютно интегрируемой на отрезке* $[-l;l]$, называется ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{10}$$

где

$$\begin{gathered} a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n\in N. \end{gathered} \tag{11}$$

Если функция f четная, то

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad b_n = 0, \quad n\in N,$$

а если f нечетная, то

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n\in N, \quad a_n = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Если функция f имеет период $2l$, то при вычислении ее коэффициентов Фурье можно интегрировать по любому отрезку длины $2l$, т. е. для любого числа $c\in R$ справедливы равенства

$$\begin{gathered} a_0 = \frac{1}{2l}\int_{c-l}^{c+l} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{c-l}^{c+l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \\ b_n = \frac{1}{l}\int_{c-l}^{c+l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n\in N. \end{gathered} \tag{12}$$

Комплексная форма ряда Фурье (10) имеет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{n\pi x i/l}, \tag{13}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-n\pi x i/l}dx, \quad n\in Z. \tag{14}$$

Представление функции f, заданной на некотором отрезке $[a;b]$, в виде

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{15}$$

(при каком-либо выборе l), справедливом для всех точек отрезка $[a;b]$, кроме, быть может, конечного их множества, называется *разложением функции в тригонометрический ряд* вида (10). Если при этом все $a_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, то говорят, что функция f *раскладывается в ряд по синусам* (дуг, кратных $\pi x/l$), а если все $b_n = 0$, $n \in N$, то *по косинусам* (дуг, кратных $\pi x/l$).

Для кусочно гладкой на отрезке $[a; b]$ функции f за счет выбора различных l имеется бесконечно много ее разложений вида (15). Задача разложения кусочно гладкой на отрезке $[a; b]$ функции f в ряд вида (15) имеет однозначное решение, если дана тригонометрическая система

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l},\ \ldots$$

(т. е. дано значение l), по которой следует разложить функцию f, и если функция f может быть продолжена с отрезка $[a; b]$ (быть может, с видоизменением ее значения в точках $x = a$ и $x = b$) на всю числовую ось в $2l$-периодическую функцию F. В этом случае коэффициенты a_n, b_n в разложении (15) будут являться коэффициентами Фурье функции F.

Если не оговорено что-либо другое, то разложение в ряд Фурье кусочно гладкой на отрезке $[a; b]$ функции f означает представление ее в виде ряда Фурье общего вида (10) с периодом $2l = b - a$, сходящегося, согласно теореме 1, к функции f во всех точках интервала $(a; b)$, в которых она непрерывна.

Разложение в ряд Фурье функций, зависящих от $\sin x$ и $\cos x$, удается иногда получить с помощью формул Эйлера

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{16}$$

Для этого следует подставить в формулу, задающую рассматриваемую функцию, выражения (16) для косинуса и синуса и получившуюся функцию от $z = e^{ix}$ разложить в ряд по степеням z, а затем вернуться к переменной x с помощью формулы

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

В результате получится искомое разложение заданной функции в ряд Фурье.

Периодическую с периодом $2l$ функцию, абсолютно интегрируемую на отрезке $[-l; l]$ (или, что равносильно, на любом отрезке $[a; a + 2l]$, $a \in R$), коротко будем называть *$2l$-периодической абсолютно интегрируемой на периоде функцией.*

3. Сходимость рядов Фурье. Ядро Дирихле и интеграл Дирихле. Ядро Фейера и суммы Фейера. Функция

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt$$

называется *ядром Дирихле.* Пусть f — 2π-периодическая, абсолютно интегрируемая на периоде функция и $S_n(x)$ — частичная сумма порядка n ее ряда Фурье (она называется также *суммой Фурье поряд-*

ка n функции f); тогда

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t)\,dt. \tag{17}$$

Средние арифметические сумм Фурье функции f

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_n(x)}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

называются *суммами Фейера* этой функции, а средние арифметические ядер Дирихле

$$\Phi_n(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \ldots + D_n(x)}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

— *ядрами Фейера.*

Если в некоторой точке x существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x), \tag{20}$$

то ряд Фурье функции f называется *суммируемым в точке* x *методом средних арифметических* к значению предела (20).

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то последовательность ее сумм Фейера равномерно сходится на этом отрезке к самой функции.*

Пусть $f(x) \sim a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, положим

$$s(x, r) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{21}$$

В силу стремления коэффициентов Фурье функции f к нулю ряд, стоящий в правой части равенства (21), сходится для всех $r \in [0; 1)$. Если в некоторой точке x существует конечный предел $\lim\limits_{r\to 1-0} s(x, r)$, то ряд Фурье функции f называется *суммируемым* в рассматриваемой точке *по методу Пуассона–Абеля* к значению, равному указанному пределу.

Теорема 4. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то функция $s(x, r)$ равномерно на этом отрезке стремится к функции $f(x)$ при $r \to 1 - 0$.*

4. Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье.

Теорема 5. *Если функция $f(x)$ непрерывна, а ее производная кусочно непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то ряд Фурье для $f'(x)$ получается из ряда Фурье для $f(x)$ почленным дифференцированием, т. е. если*

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{22}$$

то

$$f' \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx). \tag{23}$$

Теорема 6. *Если $f(x)$ — кусочно непрерывная и 2π-периодическая функция* $f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, *то*

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{\sin nx}{n} + b_n \frac{1-\cos nx}{n}\right), \tag{24}$$

т. е. ряд (24) получается из ряда (22) почленным интегрированием.

5. Минимальное свойство сумм Фурье. Сходимость рядов Фурье в смысле среднего квадратического. Если квадрат функции f интегрируем (вообще говоря, в несобственной смысле) на отрезке $[-\pi, \pi]$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x; f)]^2\,dx = \min_{T_n(x)} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x; f)]^2\,dx, \tag{25}$$

где минимум в правой части берется по всем тригонометрическим многочленам

$$T_n(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n}(A_k \cos kx + B_k \sin kn)$$

степени не выше n. Если a_0, a_n, b_n, $n \in N$, — коэффициенты Фурье функции f, то справедливо *равенство Парсеваля*

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{26}$$

6. Суммирование тригонометрических рядов. Иногда удается вычислить сумму сходящегося тригонометрического ряда, сведя его к степенному ряду, сумму которого можно найти. Идея этого метода состоит в следующем: если ряды

$$p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin nx \tag{27}$$

сходятся на отрезке $[-\pi; \pi]$, кроме, быть может, конечного множества точек, то на том же множестве значений переменной x сходится ряд

$$p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos nx + i\sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin nx = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n, \quad z = e^{ix}. \tag{28}$$

Поскольку он сходится в некоторых точках единичной окружности $|z| = 1$, то он сходится в открытом круге $|z| < 1$ и его сумма

$$f(z) = f(re^{i\varphi}) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n, \quad z = re^{i\varphi}, \tag{29}$$

при $0 < |z| = r < 1$ является аналитической функцией. Если

$$u(x) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos nx, \quad v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin nx,$$

то согласно второй теореме Абеля для тех точек x, в которых ряды (27) сходятся, имеет место равенство

$$u(x) + iv(x) = f(e^{ix}). \tag{30}$$

Когда удается найти функцию f в явном виде (т. е. выразить ее через элементарные функции) и вычислить ее значение, стоящее в правой части равенства (30), то тем самым удается найти и суммы рядов (27).

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \operatorname{ch} x$, $-\pi \leqslant \leqslant x \leqslant \pi$. Построить график суммы ряда.

▲ Вычислим коэффициенты Фурье функции $f(x) = \operatorname{ch} x$ (при вычислении воспользуемся результатом, полученным в примере 20 § 6):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{ch} x\,dx = \frac{\operatorname{sh} x}{\pi}\Big|_0^\pi = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{ch} x\,\cos nx\,dx = (-1)^n\frac{2\operatorname{sh} x}{\pi(1+n^2)}, \quad n \in N.$$

В силу четности функции f все коэффициенты $b_n = 0$, $n \in N$. Согласно теореме 1 ряд Фурье функции f на отрезке $[-\pi;\pi]$ сходится к самой функции f:

$$\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^\infty (-1)^n\frac{1}{1+n^2}\cos nx\right), \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

На рис. 22.1 сплошной линией изображен график суммы ряда Фурье функции $\operatorname{ch} x$, а штрихами — график самой функции $\operatorname{ch} x$ вне отрезка $[-\pi;\pi]$. ▲

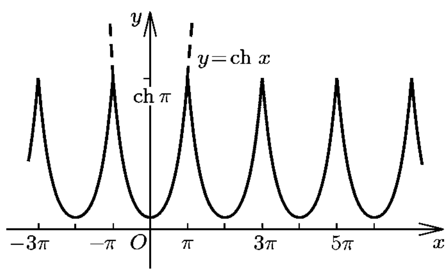

Рис. 22.1

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \operatorname{sh} x$, $-\pi < x < \pi$. Построить график суммы ряда.

▲ Вычислим коэффициенты Фурье. Интегрируя по частям и используя снова результат, полученный в примере 20 § 6, будем иметь

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi \operatorname{sh} x\,\sin nx\,dx = -\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \operatorname{sh} x\,d\cos nx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(\operatorname{sh} x\,\cos nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \operatorname{ch} x\,\cos nx\,dx\right) =$$