Вопросы для подготовки к коллоквиуму
Математический анализ-1

ФКН ПМИ 1 курс основной поток 2018-2019, семестр 1.

1. Аксиомы множества вещественных чисел. Аксиома непрерывности.
2. Определение точной верхней и точной нижней граней ограниченного числового множества. Существование точной верхней грани (как следствие из аксиомы непрерывности). Единственность точной верхней грани.
3. Бесконечные десятичные дроби (бдд). Сравнение бдд. Алгоритм построения точной верхней грани для множества положительных бдд, ограниченного сверху.
4. Построение арифметических операций на множестве бдд на примере суммы двух положительных бдд.
5. Теорема о единственности множества вещественных чисел с точностью до изоморфизма (без доказательства).
6. Лемма о последовательности вложенных отрезков и о стягивающейся последовательности вложенных отрезков.
7. Числовые последовательности (основные определения: монотонность, ограниченность, конечный предел, бесконечный предел, бесконечно малые и бесконечно большие последовательности).
8. Теорема о единственности предела последовательности.
9. Свойства пределов, связанные с неравенствами: сохранение знака нестрогого неравенства при переходе к пределу и лемма о милиционерах.
10. Арифметические свойства бесконечно малых последовательностей.
11. Арифметические свойства пределов последовательности (доказательство для предела суммы и предела произведения).
12. Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.
13. Определение числа e.
14. Частичные пределы последовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса (формулировка и доказательство).
15. Фундаментальные последовательности, условие Коши, отрицание условия Коши, критерий Коши.
16. Пределы функций: определение по Коши (для нескольких разных случаев на выбор экзаменатора: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to c+0} f(x) = \infty$, и тому подобное) и определение по Гейне.

17. Свойства пределов функций: арифметические и связанные с неравенствами (с доказательством одного из них: $\lim(f(x)+g(x))$, $\lim f(x)g(x)$ или сохранение знака нестрогого неравенства при переходе к пределу).

18. Первый и второй замечательные пределы (первый с доказательством).

19. Определение эквивалентных функций. О-символика (определения "О большого" и "о малого").

20. Стандартные эквивалентности (с выводом каких-нибудь трех из них).

21. Определение непрерывности функции по Коши и по Гейне. Классификация точек разрыва функции.

22. Свойства непрерывных функций: арифметические, композиция функций, локальное сохранение знака (формулировки и идея доказательства непрерывности композиции двух функций).

23. Теорема Вейерштрасса о достижимости непрерывной функцией точной верхней и нижней граней на отрезке.

24. Теорема о промежуточном значении (с доказательством). Метод деления пополам для поиска корней уравнения.

25. Существование обратной функции у функции строго монотонной и непрерывной на отрезке (доказательство существования, свойства — без доказательства).

26. Производная (приращение аргумента, приращение функции, геометрический смысл). Уравнение прямой, касательной к графику дифференцируемой функции. Односторонние производные. Пример непрерывной функции, не имеющей производной в заданной точке.

27. Связь между существованием производной и непрерывностью функции в точке. Арифметические свойства производных (с доказательствами).

28. Производная композиции функций, и производная обратной функции.

29. Вывод табличных производных (будут предложены несколько функций из списка x^α, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$).

30. Дифференциал: определение, геометрический смысл, арифметические свойства. Инвариантность формы первого дифференциала.

31. Теорема Ферма и теорема Ролля.

32. Теорема Коши (формула конечных приращений), и ее частный случай — теорема Лагранжа.

33. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей (доказательство для случая $x \to a \in \mathbb{R}$, неопределенность вида $\frac{0}{0}$)

34. Старшие производные. Формула Лейбница для старшей производной.

35. Многочлены Тейлора (с доказательством леммы о существовании многочлена, производные которого принимают заданные значения в заданной точке).

36. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (с доказательством).

37. Теорема о единственности формулы Тейлора (с доказательством).

38. Вывод основных табличных формул Маклорена (будет предожено вывести формулу Маклорена для одной из стандартных функций: e^x, $(1+x)^\alpha$, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$).

(*) Теоремы будут спрашиваться с доказательствами, если противное не оговорено в билете.