Домашнее задание по мат стату №12

Агаев Фархат

30 мая

Листок №8 Задание №10

Дана выборка размера 1 из кспоненциального распределения с параметром λ. Для проверки гипотезы $H_0 : \lambda = 1$ против $H_1 : \lambda = 3$ используют критерий, если $X_1 > 3$, то H_0 оклонить, а если $X_1 \leq 3$, то принять. Найдите уровень значимости и мощность критерия.

Уровень значимости (а)

Просто посчитаем по определению нужную вероятность с помошью известной плотности экспоненциального распределения $\rho(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$$P(X \in K)(\text{когда } \lambda = 1) = \int_{-\infty}^{\infty} I_{X>3}(x) \cdot 1 * e^{-1*x} dx = \int_{3}^{\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{e^3} \Rightarrow$$

$$\text{Уровень значимости } \alpha \approx 0.0497$$

Мощность критерия (б)

Аналогичном образом, но уже подругой формуле посчитаем мощность критерия

$$P(X \in K)(\ \lambda = 3) = \int_{-\infty}^{\infty} I_{X>3}(x) \cdot 3e^{-3x} dx = \int_{3}^{\infty} 3e^{-3x} dx = \frac{1}{e^9} = 1 - \beta \Rightarrow$$

$$\text{Мощность критерия } \beta\ = 1 - \frac{1}{e^9} \approx 0.9998766$$

Листок №8 Задание №8

Критерий Неймана-Пирсона Гласит, что критическо множество K

$$K = \{X : \frac{f}{g} \geq t\}$$

Так как мы знаем что f - это плотность равная $e^{-2|x|}$ g - это плотность нормального распределения равная $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$
§ По сути нам нужно из неравенства выразить x и позже по определению вероятности мы сможем посчитать α уровнь значимости нашего критерия.

$$\frac{e^{-2|x|}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}} \geq t \Rightarrow e^{-2|x|+\frac{x^2}{2}} \geq \frac{t}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\Rightarrow -2|x| + \frac{x^2}{2} \geq \ln(\frac{t}{\sqrt{2\pi}}) \Rightarrow x^2 - 4|x| - 2\ln(\frac{t}{\sqrt{2\pi}}) \geq 0$$

ДИСКРИМИНАНТ СИЛА!
Сделаем маленькую замену $|x| = a \Rightarrow x^2 = a^2$
Опа по формулке, мы получим:

$$a_{1,2} = \frac{4 \ \pm \ \sqrt{16 + 8\ln(\frac{t}{\sqrt{2\pi}})}}{2}$$

$$a_1 = 2 \ - \ \sqrt{4 + 2\ln(\frac{t}{\sqrt{2\pi}})} \quad a_2 = 2 \ + \ \sqrt{4 + 2\ln(\frac{t}{\sqrt{2\pi}})}$$

Так, следующий этап грамотно найти значение параметра t, чтобы получить нужный уровень значимости α Мы знаем, что

$$\alpha = P_{\theta_0}(X \in K) = \int_K \rho_0(x)dx = \int_K \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Грамотно раскрыв модуль на иксе, мы сможем найти границы для интеграла

$$\alpha = \int_{a_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}} + \int_{-\infty}^{a_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}} + \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$$