Домашнее задание по дискретной математике №2

Фархат Агаев

3 октября 2019 г.

Задача №1

Для начала докажем, что данная ф-ия вычислима:

$$\phi_{(m,n,k)}(x) = \begin{cases} \phi_n(x) & \text{если } \phi_m(x) = 0 \\ \phi_k(x) & \text{если } \phi_m(x) > 0 \\ \text{не определено} & \text{если } \phi_m(x) \text{ не определено} \end{cases}$$

Так как ф-ии $\phi_n(x)$, $\phi_m(x)$,$\phi_k(x)$ - вычислимы, то очевидно, что и наша ф-ия $\phi_{(m,n,k)}(x)$ также вычислима (ибо мы вначале просто считаем $\phi_m(x)$ и дальше если нужно считаем другие вычичслимые ф-ии).

Пусть у нас будет ф-ия которая переводит из пары натуральных чисел в натуральное число

$$code_2(m,n) = 2^m \cdot (2n+1) - 1$$

очевидно, что данная ф-ия - биекция, так как мы можем однозначно получить обратно два числа m, n
Представим натуральное число x в виде двоичной формы (сразу увидим нужные нам ф-ии)

$$x + 1 = \underbrace{10....01}_{2n+1}\underbrace{000...0}_{m}$$

Теперь довольно просто получить

$$code_3(m, n, k) = code_2(code_2(m, n), k)$$

так как $\{\phi_i\}$ - главная $\Rightarrow$ для любой выч. час. ф-ии $V(a, x)$ существует тотальная выч ф-ия $s : N \to N$ такая, что

$$\phi_{s(a)}(x) = V(a, x)$$

Пусть $V(a, x) = V(code_3(m, n, k), x) = \phi_{s(code_3(m,n,k))}(x)$ и тут сразу становится понятно,

Ответ

$$h(m, n, k) = s(code_3(m, n, k))$$

Задача №2

Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 100 & \text{если } \phi_x(x) = 59 \\ 59 & \text{иначе} \end{cases}$$

вычислима, тогда $\exists k$, $\phi_k(x) = f(x)$ посмотрим на значение ф-ии при x = k, тогда

$$\phi_k(k) = \begin{cases} 100 & \text{если } \phi_k(k) = 59 \\ 59 & \text{иначе} \end{cases}$$

Такое невозможно.

Задача №3

Мы знаем, что существует перечислимое неразрешимое множество. Возьмем

$$X = \{x \mid \phi_x(x) \text{определено}\}$$

X - перечислимое $\Rightarrow$ существует алгоритм перечисления P
Запускаем P и он выдает какие-то x_i, которые мы будем присваивать нашей ф-ии $f(i) = x_i$ И тут сразу получаем искомую тот. ф-ию

$$f : N \to N$$

очев, что $Dom(f) = N$ - разрешимое множество, $Range(f) = X$ - неразрешимое перечислимое множество.

Задача №4

$$A = \{i \mid \phi_i(0) \text{ не определено}\}$$
$$B = \{i \mid \phi_i(0) = 1\}$$

Задача №5

Пусть у нас есть два коперечеслимых множества перечеслимы, которые не пересекаются. A, B, $A \cap B = \varnothing$, $N \setminus A$, $N \setminus B$ - перечислимые мн-ва множество C - разрешимо. Запускаем два перечислятора $N \setminus A$, $N \setminus B$. Мы сможем получить харак. ф-ию множества C. Запускаем два перечислятора $i_{N\setminus B} \in N \setminus A$, $i_{N\setminus B} \in N \setminus B$, если первым $x = i_{N\setminus B}$ Хар.

ф-ия выдает 1, иначе это число выдаст второй перечислятор и хар ф-ия выдаст 0. $\Rightarrow$ C - разрешимо.

Задача №8

Положим
$$V(i,x) = i + x$$
так как ϕ - главная $\Rightarrow \exists$ тотальная вычислимая ф-ия $s : N \to N$ такая, что:
$$\phi_{s(i)}(x) = V(i,x)$$
По теор. Клини о неподвижной точке $\Rightarrow$
$$\exists\ i\ \phi_i(x) = \phi_{s(i)}(x) = V(i,x) = i + x$$

Задача №7

Воспользуемся двумя фактами:

1. Теорема Поста: Если A и $N \setminus A$ перечеслимы, то A - разрешимо.
2. Множество значений тотальной ф-ии перечислимое множество.

Пусть
$$A = \{x \mid \phi_x(x)\text{определено}\},\ B = N \setminus A$$
Мы знаем A - неразрешимо и перечеслимо, B неперечесимо, иначе у нас будет противоречие с первым пунктом.
Допустим, что $A \leq_m B$, тогда:
$$\exists \text{ тотальная вычислимая ф-ия } f : N \to N,\ x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$$
но в таком случае будет противоречие с пунктом 2.

Задача №6

$$\begin{aligned}
&A - \text{ перечислимое}\\
&B = \{i \mid \phi_i(2) = \phi_i(3) \text{ и опр}\}\\
&\omega(n,x) = \begin{cases} 1 & n \in A \\ \text{неопр} & n \notin A \end{cases}
\end{aligned}$$

Очевидно, что ф-ия ω - вычислима, так как A - перечислимое $\Rightarrow$ полуразрешимо $\Rightarrow$ существует полухарактеристическая ф-ия ω а значит $\exists$ тотальная вычислимая ф-ия $s : N \to N$ такая, что:

$$\omega(n,x) = \phi_{s(n)}(x)$$

для любого x, очев, что при x = 2 и x = 3 и опр, наша ф-ия $\omega = 1$, мы можем заметить, что $n \in A \Leftrightarrow s(n) = i \in B$
Таким образом мы свели $A \leq_m B$