

Домашняя работа по математическому анализу

ФКН ПМИ 1 курс основной поток 2018-2019

**Листок 3. Задачи 13-18. Крайний срок сдачи 02.11.2018**

Номер варианта в каждой задаче вычисляется по следующему алгоритму

$N_{task}$  = номер задачи;

$N_{grp}$  = номер вашей группы;

$N_{stud}$  = ваш номер в списке группы (см. здесь);

$N = (N_{task} - 1) \cdot 300 + (N_{grp} - 183) \cdot 35 + N_{stud}$

Ваш вариант —  $N$ -ая десятичная цифра числа  $\pi$  после запятой (можно спросить у wolfram alpha, или посмотреть здесь. Задачи со звездочкой сдаются семинаристам.

**Задача 13.** Найдите предел

0.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{4 - x}};$

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1}{x^2};$

2.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x - 6} + 2}{x + 2};$

3.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{2x + 1} - 3};$

4.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt{6x^2 + 3} + 3x};$

5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x}(\sqrt{x^3} - \sqrt{x(x^2 - 1)});$

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 1});$

7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt[3]{4 - x^3}) \cdot x^2;$

8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2(\sqrt[3]{5 + x^3} - x);$

9.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 2}(\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 4}).$

**Задача 14.** Найдите предел, используя первый замечательный предел и его следствия

0.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2};$

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 2x \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} - x \right);$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos 2x)};$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2};$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x};$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^3 2x}{\operatorname{arctg} x^3};$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x};$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x};$
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x};$
9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \arcsin x}{2x + \operatorname{arctg} x}.$

**Задача 15.** Найти предел, используя замечательные пределы и их следствия

0.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/\operatorname{tg}(2x)};$
1.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} \pi x)^{1/\arcsin x};$
2.  $\lim_{x \rightarrow 2} (1 + \sqrt{x^2 - 4})^{1/\sin(\pi x)};$
3.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (2 - \operatorname{tg} x)^{1/\cos(2x)};$
4.  $\lim_{x \rightarrow 2+0} (1 + \sqrt{x - 2})^{1/\cos \frac{\pi x}{4}};$
5.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (2 - \operatorname{ctg} x)^{1/\sin(4x)};$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \arcsin x)^{1/\sin(x/2)};$
7.  $\lim_{x \rightarrow \pi/3} (4 + 3 \cos 3x)^{1/\operatorname{tg}(3x)};$
8.  $\lim_{x \rightarrow \pi+0} (1 + \sqrt{x - \pi})^{\operatorname{ctg} 3x};$
9.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \operatorname{ctg} 3x)^{1/\cos x}.$

**Задача 16.** Найдите значения  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функции  $f(x)$  и  $g(x) = \alpha x^\beta$  будут эквивалентными бесконечно малыми при  $x \rightarrow 0$ .

0.  $f(x) = \sqrt[5]{1 + \arcsin(5x^3)} - 1 + \ln(1 + \operatorname{tg}(x^2))$ ;
1.  $f(x) = \log_3(1 + \operatorname{arctg}^2(5x)) \left( \sqrt[3]{1 + \sin^4(4x)} - 1 \right)$ ;
2.  $f(x) = (1 - \cos(4x))^4 (e^{\arcsin(x^2)} - 1)$ ;
3.  $f(x) = \sqrt[3]{1 - 6 \sin(4x^2)} - \sqrt[4]{1 + \sin^3(5x)}$ ;
4.  $f(x) = \sqrt[4]{1 - \operatorname{arctg}(6x^2)} - \cos(2x)$ ;
5.  $f(x) = (3^{2+\arcsin(x^2)} - 9)(1 - \cos(3x))$ ;
6.  $f(x) = 2^{\operatorname{tg}^3(5x)} - \cos \operatorname{arctg}(2x^3)$ ;
7.  $f(x) = \sqrt[5]{1 + \log_5(1 + x^3)} - \sqrt[6]{\arcsin^3(6x) + 1}$ ;
8.  $f(x) = 4^{\sin x^2} - \cos(\ln(1 + 6x))$ ;
9.  $f(x) = \ln(1 + \arcsin(2x))(4^{1+\operatorname{arctg}^2(3x)} - 4)$ .

**Задача 17.** Найдите предел, используя эквивалентные бесконечно малые

0.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1 + \operatorname{tg} 2x} - 1) \ln(1 + \sin^2 3x)}{(1 - \cos x)(2^{\operatorname{arctg} 4x} - 1)}$ ;
1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1 + \operatorname{tg}^2 3x)(3^{\sin 4x} - 1)}{(\sqrt[4]{1 + \arcsin 2x} - 1)(1 - \cos 2x)}$ ;
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\operatorname{arctg} 5x^2} - 1) \ln(1 - \sin 4x)}{(\sqrt{1 + \operatorname{tg} 6x} - 1)(1 - \cos 4x)}$ ;
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos 4x - 1) \ln(1 - \sin \operatorname{tg}(2x))}{(e^{3x^2} - 1)(\sqrt[5]{1 + \operatorname{arctg} 2x} - 1)}$ ;
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\operatorname{tg}^2 4x} - 1)(\sqrt[3]{1 - \operatorname{tg} 2x} - 1)}{(1 - \cos(\sin 2x)) \ln(1 - \operatorname{tg} \pi x)}$ ;
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 6x)^2 (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2x^2} - 1)}{(e^{\sin^2 x^3} - 1) \ln(1 - \operatorname{tg} \sin^2 3x)}$ ;
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4^{\arcsin x^2} - 1)(\sqrt[10]{1 - \operatorname{arctg} 3x^2} - 1)}{(1 - \cos(\operatorname{tg} 6x)) \ln(1 - \sqrt{\sin x^2})}$ ;
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \sqrt{\operatorname{tg} 4x^2})(6^{\sin^2 3x} - 1)}{(\sqrt[5]{1 - \sin 3x^3} - 1) \log_2(1 + 3 \arcsin(\operatorname{tg} x^2))}$ ;
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + 2 \sin^2 3x} - 1)(1 - \cos 3x)}{(e^{\operatorname{tg}^3 2x} - 1) \ln(1 + 2 \sin 7x)}$ ;

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[4]{1 - 3 \operatorname{arctg}^2 2x} - 1)(e^{\sin^2 6x} - 1)}{(1 - \cos(3 \sin 4x)) \log_3(1 + 7 \operatorname{tg} 8x^2)}.$$

**Задача 18.\*** Найдите все непрерывные вещественные функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , такие что  $f(f(f(x))) = x$ .