ГЛАВА 1

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Общие приемы и методы интегрирования

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на некотором промежутке, если $F(x)$ непрерывна на этом промежутке и дифференцируема в каждой его внутренней точке, причем $F'(x) = f(x)$.

В курсах математического анализа доказывается, что для каждой непрерывной функции первообразная существует.

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные функции $f(x)$, то $F_2(x) = F_1(x) + C$, где C — некоторая постоянная.

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то множество

$$\{F(x) + C, \quad C \in R\},$$

т. е. совокупность всех первообразных функции $f(x)$, называется *неопределенным интегралом* функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)\,dx.$$

Таким образом, по определению

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\}, \tag{1}$$

где $F(x)$ — какая-либо первообразная функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная.

Формулу (1) принято записывать без фигурных скобок, т. е. опуская обозначение множества:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Символ $\int$ называется *знаком интеграла*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, x — *переменной интегрирования*.

2. Свойства неопределенного интеграла.

1. Если функция $f(x)$ имеет первообразную, то

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \quad d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx.$$

2. Если $f(x)$ — дифференцируемая функция, то

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C, \quad \int df(x) = f(x) + C.$$

3. Если функция $f(x)$ имеет первообразную и $a \in R$, то функция $af(x)$ также имеет первообразную, причем при $a \neq 0$ верно равенство
$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$$

4. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные на некотором промежутке, то функция $f_1(x) + f_2(x)$ также имеет первообразную на этом промежутке, причем
$$\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

3. Формулы для основных неопределенных интегралов. Каждая из нижеследующих формул верна на каждом промежутке, принадлежащем области определения подынтегральной функции.

1. $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$ 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C.$

3. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1; \quad \int e^x\,dx = e^x + C.$

4. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$ 5. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$ 7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$ 9. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$ 11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0.$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C, \quad |x| < a, \quad a \neq 0.$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C, \quad a \neq 0.$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C, \quad a \neq 0 \quad (|x| > |a|).$

4. Интегрирование подстановкой (заменой переменной). Пусть на некотором промежутке определена сложная функция $f(\varphi(x))$ и функция $t = \varphi(x)$ непрерывна на этом промежутке и дифференцируема во всех его внутренних точках; тогда если интеграл $\int f(t)\,dt$ существует, то интеграл $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$ также существует, причем
$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt\Big|_{t=\varphi(x)}. \qquad (2)$$
Эту формулу называют *формулой интегрирования подстановкой.*

Если для функции $t = \varphi(x)$ на рассматриваемом промежутке существует обратная $x = \varphi^{-1}(t)$, то формулу (2) можно переписать в

виде
$$\int f(t)\,dt = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx\Big|_{x=\varphi^{-1}(t)},$$
или, если исходную переменную интегрирования обозначать как обычно через x,
$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \tag{3}$$

Формулу (3) обычно называют *формулой интегрирования заменой переменной.*

Замечание. При использовании формулы (3) в записи решения знак подстановки $|_{x=\varphi^{-1}(t)}$ обычно опускают.

5. Интегрирование по частям. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на некотором промежутке и дифференцируемы во всех его внутренних точках. Тогда если на этом промежутке существует интеграл $\int vu'\,dx$, то существует и интеграл $\int uv'\,dx$, причем
$$\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx \quad \text{или} \quad \int udv = uv - \int v\,du. \tag{4}$$

Формула (4) называется *формулой интегрирования по частям.* Применение формулы (4) целесообразно в тех случаях, когда подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ удается представить в виде произведения двух множителей u и dv таким образом, чтобы интегрирование выражений dv и vdu являлось задачей более простой, чем интегрирование исходного выражения.

По известному дифференциалу dv функция v и определяется неоднозначно, но в формуле (4) в качестве v может быть выбрана *любая* функция с данным дифференциалом dv.

Иногда для вычисления интеграла формулу интегрирования по частям приходится применять несколько раз.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Найти какую-либо первообразную $F(x)$ функции $f(x) = 1/\sqrt{x}$, $x \in (0; +\infty)$, и ее неопределенный интеграл.

▲ Так как $(2\sqrt{x})' = 1/\sqrt{x}$, $x > 0$, то
$$F(x) = 2\sqrt{x}, \quad x > 0,$$
и
$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C, \quad x \in (0; +\infty). \ ▲$$

Пример 2. Для функции $f(x) = 1/x$, $x \in (-\infty; 0)$, найти первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $(-2; 2)$.

▲ Так как $(\ln|x|)' = 1/x$, то $\ln|x|$ — одна из первообразных функции $f(x) = 1/x$ и, следовательно, искомая первообразная $F(x)$ имеет вид $F(x) = \ln|x| + C$, где C — некоторая постоянная. Постоянную C