Домашнее задание по дискретной математике №5

Фархат Агаев

7 декабря 2019 г.

Задача №1

Предваренная нормальная форма выглядик так:

$$Q_i \in \{\exists,\ \forall\}$$
$$X_i - \text{ переменные}$$
$$\phi - \text{формула без кванторов}$$
$$Q_1 X_1 \cdots Q_n X_n \phi$$

Сколемевская нормальная формула - предваренная нормальная формула без квантаров существования.

а)$\exists x \forall y P(x,y) \wedge \forall x \exists y Q(x,y)$

$$\exists x \forall y P(x,y) \wedge \forall z \exists w Q(z,w)$$
$$\exists x \forall y \forall z \exists w\, P(x,y) \wedge Q(z,w) - \text{пред. норм. ф.}$$

Чтобы избавиться от квантора существования, который стоит до кв. всеобщности, то достаточно заменить переменную на константу 'c', если стоит после, то нужен функциональный символ 'f', который принимает переменные, стоящие до и под знаком кв. всеобщности.

$$\forall y \forall z P(c,y) \wedge Q(z, f(y,z)) - \text{ скол. н. ф.}$$

Повторим процеду0ры для пункта б.

$$\neg \forall x(\exists y P(x,y) \to \exists y Q(x,y))$$
$$\exists x(\exists y P(x,y) \to \exists y Q(x,y))$$
$$\exists x \forall y(P(x,y) \to \exists y Q(x,y))$$
$$\exists x \forall y \exists z(P(x,y) \to Q(x,z)) - \text{ пред. ф.}$$
$$\forall y(P(c,y) \to Q(c, f(y))) - \text{ скол. н. ф.}$$

Задача №2

a) Условие:

1. $\forall x P(x, f(x))$,

2. $\forall z Q(x, z)$,

3. $\forall x \forall y \forall z(\neg P(x, y) \vee \neg P(y, z) \vee \neg Q(x,z))$

Для того, чтобы доказать невыполнимость набора универсальныъ дизъюнктов, нужно вывести с помощью ИР пустой дизъюнкт.
4. Во втором пункте возьмем $z = f(f(x))$ и получим $Q(x, f(f(x)))$
5. Третий пункт $y = f(x), z = f(f(x))$ и получим
$\neg P(x, f(x)) \vee \neg P(f(x), f(f(x))) \vee \neg Q(x,f(f(x)))$
6. Используем ИР для 1 и 4 и получим
$\neg P(f(x), f(f(x))) \vee \neg Q(x,f(f(x))$
7. Используем ИР для 6 и 4 и получим
$\neg P(f(x), f(f(x)))$
8. Для первого берем $x = f(x)$
$P(f(x), f(f(x)))$
9. Используем ИР для 7 и 8 и получаем пустой дизъюнкт

b) Условие:

1. $\forall x \exists y P(x, y)$

2. $\forall x \forall y \forall z(P(x, y) \wedge Q(y, z) \to R(x, z))$

3. $\exists x \forall y \neg R(x, y)$

4. $\forall \exists y Q(x,y)$

Действия:

1. возьмем используя первую формулу (х какая-та константа) $P(x, f(x))$

2. Возьмем используяю вторую формулу
   $\neg P(x, f(x)) \vee \neg Q(f(x), g(f(x))) \vee R(x, g(f(x)))$

3. $\neg R(x, g(f(x)))$

4. $Q(f(x), g(f(x))$

5. Используем ИР для 1 и 2 и получаем
   $\neg Q(f(x), g(f(x))) \vee R(x, g(f(x)))$

6. Используем ИР для 4 и 5 и получаем
   $\neg R(x, g(f(x)))$

7. Используем ИР для 6 и 3 и получаем пустой дизъюнкт

c) Условие:

1. Доказать общезначимость:
   $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x \exists y P(x, x)$

Чтобы док-ть общезначимость достаточно док-ть невыполнимость ее отрицания.

1. $\forall x \exists y P(x, y)$

2. $\forall x \forall y \neg P(x, x)$

Действия:

1. $\forall x P(x, f(x)$

2. пусть $x = f(x)$
   $P(f(x), f(x)$

3. во второп пункте выше возмем x = f(x) и получим: $\neg P(f(x), f(x)$

4. Очев.

d) Условие: Доказать, что из формул:

1. $\forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow Q(x))$

2. $\forall x \forall y \forall z (P(x, y) \rightarrow P(x, z))$

3. $\exists x \exists y P(x, y)$

Семантически следует формулу $\exists x Q(x)$.
Для этого нужно доказать невыполнимость данной формулы

$\neg(\forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \rightarrow P(x, z)) \wedge \exists x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x Q(x).)$

Как и раньше расскроем отрицание, потом уберерем импликацию и выведем пустой дизъюнкт.

1. $\forall x \neg P(x, f(x) \vee \forall x Q(x))$
2. $\forall x \forall y \forall z (\neg P(x, y) \vee P(x, z))$
3. $P(x, y)$
4. $\forall x \neg Q(x)$
5. Используем ИР для 1 и 4:
   $\forall x \neg P(x, f(x))$
6. испокьзуя 2 пункт получим:
   $(\neg P(x, y) \vee P(x, f(x)))$
7. Используем ИР для 5 и 7 полуаем пустой дизъюнкт. $P(x, f(x))$

Задача №5

a) $((\mathbb{N}, *, =)$ и $((\mathbb{Z}, *, =))$ изоморфны ли?
Очевидно, что нет. так в натуральных числах данное уравнение $x \cdot y \cdot 2 = 2$ Имеет лишь одно ркешение при x = 1, y = 1, в то время как в целых числах два решения при x = 1, y = 1 и x = -1, y = -1.

b) Да. Предоставлю изоморфизм. 0 переходит в 0, 1 переходит в 3, 2 переходит в 1, 3 переходит в 4, 2 переходит в 2. То есть проверим напрямую. $x - y = 2$.
$\phi(x) - \phi(y) = 1$ Например $x = 2, y = 0$. Тогда $\phi(x) = 1,\ \phi(y) = 0$
1 - 0 = 1.

Задача №3

Есть два предиката P, Q; Они выдают True или False $\Rightarrow$ для любого x, мы можем выдать всего 4 разных варианта использую два предикита
[T, T], [F, F], [T, F], [F, T].
То есть, если мы разобьем наше n элментное множество на 4 класса, если размеры классов будут совпадать, тогда мы сможем построить изоморфизм переводя из одной модели в другую в нужные классы. То есть чтобы модели не были изоморфны нам нужно разбить множество на классы с разным кол-ом элеменитв. Таким образом мы можем решить задачу с помощью шаров и перегородок поделив на 4 класса (3 перегородки понадобятся) **Ответ:**

$$C_{n+3}^{n}$$