3 СЕМЕСТР

Домашняя работа по математическому анализу

ФКН ПМИ 2 курс основной поток 2019-2020

Листок 1. Задачи 1-9. Крайний срок сдачи 05.10.2019

Номер варианта в каждой задаче вычисляется по следующему алгоритму
N_{task} = номер задачи;
N_{grp} = номер вашей группы;
N_{stud} = ваш номер в списке группы (см. здесь);
$N = (N_{task} - 1) \cdot 300 + (N_{grp} - 183) \cdot 35 + N_{stud}$
Ваш вариант — N-ая десятичная цифра числа π после запятой (можно спросить у wolfram alpha, или посмотреть здесь. Задачи со звездочкой сдаются семинаристам.

Задача 1. Для заданного ряда (а) найдите n-ую частичную сумму; (б) докажите сходимость ряда, пользуясь непосредственно определением; (в) найдите сумму S ряда; (г) найдите такое n, что выполнено условие $|S - \sum_{k=1}^{n} a_k| < 10^{-4}$.

0. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k}{3^k}$;

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3k-1)(3k+2)}$;

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{8k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}$;

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1+2^k}{3^k}$;

4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2}{(k+1)(k+2)(k+3)}$;

5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2^k+3^k}{5^k}$;

6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+2)}$;

7. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{3-k}{k(k+1)(k+2)}$;

8. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$;

9. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2k-1}{2^k}$.

Задача 2. Исследуйте ряд на сходимость

0. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/3^k)}{4k^2}$;
1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln \frac{k^2}{k^2+9}$;
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3^{\sin k}}{\sqrt[3]{k+1}}$;
3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \sin \frac{3}{k}$;
4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4 \ln\left(1+\frac{1}{k^3+2}\right)}$;
5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{2k-1}}{\sqrt[3]{k^2}}$;
6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \cos^2(k+1)}{k^4+7}$;
7. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3^{\cos \frac{\pi k}{4}}}{5\sqrt{k}-1}$;
8. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{8^{\cos^2 k}}{\sqrt{3k+2}}$;
9. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k^4(2+\cos(\pi k/3))}$.

Задача 3. Исследуйте ряд на сходимость

0. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln k \ln \ln k}$;
1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-1/k}}{k^2}$;
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos k}{2+\cos k}\right)^{2k}$;
3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(2+\frac{1}{k})^k}$;
4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k+\frac{1}{k}}}{\left(k+\frac{1}{k}\right)^k}$;

5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[k]{\ln k}}$;

6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{k-1}{k+1}\right)^{k(k-1)}$;

7. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\ln k}$;

8. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\ln^2 k}$;

9. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1-\dfrac{1}{3+\sin k}\right)^{k-\ln k}$.

Задача 4. Исследуйте ряд на сходимость

0. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(k^2-1)3^{2k}}{((k+1)!)^2}$;

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2^{k/2}(2k)!!}{(2k-1)!}$, где $a!! = a(a-2)(a-4)\ldots$;

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{5^k k!}{k^k}$;

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{C_{2k}^{k}}$, где $C_a^b = \binom{a}{b}$ — биномиальный коэффициент;

4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{3^k (k!)^3}{(3k)!}$;

5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k^2 \cdot k^k}{(k-1)!}$;

6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{7^{2k}(k+1)!}{(2k)^k}$;

7. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k^{2k}}{(2k-1)!}$;

8. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(2k+1)!}{(k!)^2 2^k}$;

9. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(k!+1)!}{((k+1)!)!}$.

Задача 5. Исследуйте ряд на абсолютную и условную сходимость

0. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\ln^{100} k}{k} \sin \dfrac{\pi k}{4}$;

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k \sin^2 k}{\ln k}$;

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{k}]}}{k}$ (здесь $[\cdot]$ — целая часть числа);

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt[k]{k}}$;

4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\log_2 k]}}{k}$ (здесь $[\cdot]$ — целая часть числа);

5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k (k-1)}{(k+1)\sqrt[100]{k}}$;

6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt[k^2]{k}}$;

7. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k(k-1)/2} \dfrac{k^{100}}{2^k}$;

8. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k \cos^2 k}{\sqrt{k}}$;

9. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos(\pi k/3)}{2^{\ln k}}$.

Задача 6. Найти все значения параметра α, при которых сходится ряд

0. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - k \sin \frac{1}{k}\right)^{\alpha}$;

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(e^{\operatorname{tg} \frac{1}{k} - 1}\right)^{\alpha}$;

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{k} \cos \frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k}\right)^{\alpha}$;

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k \sin^{\alpha} \left(\frac{1}{k} - \operatorname{arctg} \frac{1}{k}\right)$;

4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{1}{2k^2}} - \cos \frac{1}{k}\right)^{\alpha}$;

5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\ln k + \ln \sin \frac{1}{k}\right|^{\alpha}$;

6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(e^{1-\cos\frac{1}{k}}-1\right)^{\alpha}\sin\frac{1}{\sqrt{k}};$

7. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(k\sin\frac{1}{k}-\cos\frac{1}{k\sqrt{3}}\right)^{\alpha};$

8. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{\alpha}(\ln(k^2+1)-2\ln k);$

9. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(\cos\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}\right)^{\alpha}.$

Задача 7. Исследуйте ряд на абсолютную и условную сходимость

0. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{k^3}};$

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{\ln k}{\sqrt[3]{k^4}};$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\ln\left(1+\frac{2}{k^2}\right);$

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\left(\dfrac{k^2+k+1}{2k^2+k+1}\right)^{k};$

4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{3^{k^2}}{k!};$

5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-3)^{k-1}k!}{(k+1)^{k+3}};$

6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k}}{\sqrt{k^2+1}};$

7. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k}k}{\sqrt{(k+1)(k+2)}};$

8. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2\left(\cos(\pi k-\frac{1}{k})-(-1)^{k}\right);$

9. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\left(\dfrac{k!}{3^k}\right)^{2}.$

Задача 8. Численно найдите сумму ряда с ошибкой не более 10^{-4}. Величину ошибки нужно обосновать.

0. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2};$

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!}$;

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2k(2k+1)}$;

3. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)!}$;

4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k k^2}$;

5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2\cos k}{k}$.

6. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{2^{2k+1}(2k+1)}$;

7. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^{2k+1}(2k+1)}$;

8. $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi k^2}$;

9. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2\sin k}{k}$.

Задача 9.* Бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ называется сходящимся, если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} a_k$, который и называется величиной бесконечного произведения. Пусть $t \in [0,1)$ — произвольное число. Докажите следующие тождества

1. $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+t^k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_d(k)t^k$, где $p_d(k)$ — количество способов представить k в виде суммы различных натуральных чисел (порядок слагаемых в сумме не имеет значения).

2. $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{1-t^{2k-1}} = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 + t^{2k-1} + t^{2(2k-1)} + t^{2(2k-1)} + \cdots\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_o(k)t^k$, где $p_o(k)$ — количество способов представить k в виде суммы нечетных натуральных чисел, возможно, повторяющихся (порядок слагаемых опять же не имеет значения).

3. Докажите, что $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+t^k) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{1-t^{2k-1}}$.

4. Докажите, что $p_d(k) = p_o(k)$ для любого натурального числа k.