Дискретная математика **(Осень 2019, основной поток)**

Домашнее задание 1

Срок сдачи:
Ответы в задачах должны быть обоснованы.

Задача 1. Докажите, что множество рациональных чисел, меньших e, разрешимо.

Задача 2. Докажите, что если множества A и B разрешимы, то и множество $A \setminus B$ разрешимо.

Задача 3. Докажите, что любое конечное множество натуральных чисел разрешимо.

Задача 4. (а) Известно, что множество $A \subset \mathbb{N}$ разрешимо. Докажите, что множество всех простых чисел из A также разрешимо. (б) Известно, что множество A перечислимо. Докажите, что множество всех простых чисел из A также перечислимо.

Задача 5. Всюду определенная функция $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ строго возрастает и множество ее значений содержит все натуральные числа за исключением конечного множества. Докажите, что f вычислима.

Задача 6. Существуют ли такие множества $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, что X разрешимо, $X \cup Y$ разрешимо, а Y не разрешимо?

Задача 7. Докажите, что бесконечное подмножество $\mathbb{N}$ разрешимо тогда и только тогда, когда оно является областью значений всюду определенной возрастающей вычислимой функции из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

Задача 8. Известно, что множество $A \subset \mathbb{N}$ полуразрешимо. Докажите, что множество $\{2^n \mid n \in A\}$ также полуразрешимо.

Задача 9. Пусть X, Y — перечислимые множества. Докажите, что найдутся такие непересекающиеся перечислимые множества $X' \subseteq X$ и $Y' \subseteq Y$, $X' \cap Y' = \varnothing$, что $X \cup Y = X' \cup Y'$.

Задача 10. Докажите, что во всяком бесконечном перечислимом множестве натуральных чисел есть бесконечное разрешимое подмножество.