Доказательство Теоремы Перрона-Фробениуса

Агаев Фархат

26 сентября 2019 г.

Определение 1. ***Положительная матрица*** - $A > 0$, *когда каждый элемент* $a_{ij} > 0$

Определение 2. ***Неотрицательная матрица*** - $A \geq 0$, *когда каждый элемент* $a_{ij} \geq 0$

Определение 3. ***Спектральный радиус*** *квадратной матрицы или линейного ограниченного оператора является наибольшим абсолютным значениемего собственных значений (т. е. Супремум среди абсолютных значений элементов в его спектре Иногда его обозначают как* $\rho\ (\cdot)$. *Пусь* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *(комплексные или действительные)*

$$\rho(A) = \max\left\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\right\}.$$

Определение 4. $\sigma(\boldsymbol{A})$ - *множество различных собственных значений матрицы* A *(спектр линейного оператора)*

Определение 5. *Матрица* M *абсолютных значений* - $|\mathbf{M}|$, *когда каждый элемент имеет значение* $|m_{ij}|$, *то есть при использовании операции* $|*|$ *к матрице, мы применяем модуль к каждому её элементу*

Определение 6. ***Собственная пара*** - *пара* (λ, v), *состоящая из собственного значения* λ *и соответствующему ему собственного вектора* v.

Определение 7. $alg\ mult_A(r)$ - *Алгебраическая кратность корня* r *для матрицы* A.

Определение 8. $geo\ mult_A(r)$ - *Геометрическая кратность корня* r *для матрицы* A.

Определение 9. ***Полупростое собственное значение*** - *собственное значение* λ *с условием, что* $geo\ mult_A(\lambda) = alg\ mult_A(\lambda)$

Положительные матрицы

Простые утверждения

Для начала приведем несколько очевидных фактов:

$$A > 0 \Rightarrow \rho(A) > 0 \tag{1}$$

Предположим $\sigma(A) = \{0\}$, отсюда следует, что жорданова форма для A и сама матрица A - нильпотент, но такое невозможно, так как $a_{ij} > 0$. Также наше утверждение может быть ограничено до положительных матриц с спектральным радиусом 1, потому что A можно всегда нормализовать по спектральному радиусу, то есть $A > 0 \Leftrightarrow \frac{A}{\rho(A)} > 0$ и $\rho(A) = r \Leftrightarrow \rho(\frac{A}{r}) = 1$.

$$P > 0, x \geq 0, x \neq 0 \Rightarrow Px > 0 \tag{2}$$

$$N \geq, u \geq v \geq 0 \Rightarrow Nu \geq Nv \tag{3}$$

$$N \geq 0, z > 0, Nz = 0 \Rightarrow N = 0, \tag{4}$$

$$N \geq 0, n \neq 0, u > v > 0 \Rightarrow Nu > Nv \tag{5}$$

Лемма 1. *Если $A_{n\times n} > 0$, то следующие утверждения верны:*

1. *$\rho(A) \in \sigma(A)$.*
2. *Если $Ax = \rho(A)x$, тогда $A|x| = \rho(A)|x|$ и $|x| > 0$, другими словами для матрицы A существует собственная пара (опред №4) $(\rho(A), v)$, где $v > 0$*

Доказательство. Как уже упоминалось ранее, мы можем предположить, что $\rho(A) = 1$ без ограничения общности. Допустим, что у нас есть собственная пара (λ, x) для матрицы A, где $|\lambda| = 1$, далее

$$|x| = |\lambda||x| = |\lambda x| = |Ax| \leq |A||x| = A|x| \Rightarrow |x| \leq A|x|. \tag{6}$$

Цель состоит в том, чтобы показать, что равенство выполняется. Для удобства пусть $z = A|x|$ и $y = z - |x|$ (по утверждению (6) мы знаем $y \geq 0$). Предполагаем, что $y \neq 0$, $y_i > 0$. В этом случае из утверждения (2) следует, что $Ay > 0$ и $z > 0$, поэтому должно существовать число ε такое, что $Ay > \varepsilon z$ или эквивалентная запись,

$$\frac{A}{1+\varepsilon} z > z$$

Запишим данное неравеснство как $Bz > z$, где $B = \frac{A}{1+\varepsilon}$ и последовательно умножаем с двух сторон на B используя утверждение (5) мы получаем

$$B^2 z > Bz > z, \quad B^3 z > B^2 z > z, \quad \ldots \quad \Rightarrow B^k z > z \text{ для всех } k = 1, 2, \ldots$$

Но $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$, потому что $\rho(B) = \sigma(\frac{A}{1+\varepsilon}) = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$, поэтому в пределе мы получаем, что $0 > z$, который противоречит факту $z > 0$. Отсюда следует ложное предположение $y \neq 0$, поэтому $y = 0 = A|x| - |x| \Rightarrow$ |x| - собсвтенный вектор для A с собсвтенным значеним $1 = \rho(A)$, заметим, что |x| = A|x| = z > 0 (ЧТД)
Мы установили, что $\rho(A) > 0$ собственное значение для матрицы A > 0

Лемма 2. *Если $A_{n\times n} > 0$, то следующие утверждения верны:*

1. *$\rho(A)$ - единственное собственное значение на спектральном круге*
2. *$\rho(A)$ - полупростое (опред №7) собственное значение.*

Доказательство. Без ограничения общности $\rho(A) = 1$. Мы знаем из Леммы 1, что если (λ, x) - собственная пара для матрицы A ($|\lambda| = 1$), то $0 < |x| = A|x|$, так как $0 < |x_k| = (A|x|)_k = \sum_{j=1}^n a_{kj}|x_j|$. С другой стороны верно равенство $|x_k| = |\lambda||x_k| = |(\lambda x)_k| = |(Ax)_k| = |\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j|$,

$$|\sum_j a_{kj}x_j| = \sum_j a_{kj}|x_j| = \sum_j |a_{kj}x_j| \tag{7}$$

Для ненулевых векторов $\{z_1, \ldots, z_n\} \in C^n$, $\|\sum_j z_j\|_2 = \sum_j \|z_j\|_2$ (факт) $\Leftrightarrow z_J = \alpha_j z_1$ для некоторого $\alpha_j > 0$. В частности это справедливо для скаляров, поэтому (7) обеспечивает существование таких чисел $\alpha_j > 0$,

$$a_{kj}x_j = \alpha(a_{k1}x_1) \text{ это эквивалентно } x_j = \pi_j x_1, \quad \pi_j = \frac{\alpha_j a_{k1}}{a_{kj}} > 0$$

Другими словами, если $|\lambda| = 1,\ x = x_1 p,$ где $p = (1, \pi_2, \ldots, \pi_n)^T > 0$,

$$\lambda x = Ax \Rightarrow \lambda p = Ap = |Ap| = |\lambda p| = |\lambda| p = p \Rightarrow \lambda = 1,$$

Таким образом 1 это единственное собственное значение на спектральном круге

Лемма 3. *Если матрицы $A_{n\times n} > 0$, то следующие утверждения верны:*

1. $alg\ mult_A(\rho(A)) = 1$ (Алгебраическая кратность равна 1)
2. $dim N(A - \rho(A)I) = geo\ mult_A(\rho(A)) = alg\ mult_A(\rho(A)) = 1$ (опред №5 и №6)

Доказательство. Без ограничения общности $\rho(A) = 1$ и предположим, что $alg\ mult_A(\lambda = 1) = m > 1$. Мы уже знаем, что $\lambda = 1$ это **полупростое** собственное значение, которое означает, что $alg\ mult_A(1) = geo\ mult(1)$ поэтому линейно независимые собственные вектора связаны с $\lambda = 1$. Если x и y - пара независимых собственных векторов соответствующих $\lambda = 1$, то $x \neq \alpha$ для всех $\alpha \in C$. Выберем ненулевой элемент из вектора y, пусть это будет $y_i \neq 0$ и установим что $z = x - \frac{x_i}{y_i} y$. Поскольку $Az = z$ и мы знаем, из Леммы 1.2 $A|z| = |z| > 0$. Но это противоречит условию $z_i = z_i - \frac{x_i}{y_i} y_i = 0$. Следовательно предположение, что $m > 1$ неверно $\Rightarrow$ m $= 1$.

Так как $N(A - \rho(A)I)$ - одномерное векторное пространство натянутый на некоторый $v > 0$, следовательно существует уникальный собственный вектор $p \in N(A - \rho(A)I)$ такой, что $p > 0$ и $\sum_j p_j = 1$(это получается с помощью нормализации $p = \frac{v}{\|v\|_1}$) Данный вектор p называется **вектором Перрона** для матрицы $A > 0$ и ему соответствующее собственное значение $r = \rho(A)$ - **корень Перрона**.

Поскольку $A > 0 \Leftrightarrow A^T > 0,\ \rho(A) = \rho(A^T)$ очевидно, что собственная пара (опред №4) (r, p), которая существует для A, также существует пара (r, q) для A^T. Потому что $q^T A = rq^T$, вектор $q^T > 0$ называется **левым вектором Перрона**

Лемма 4. *Вектор Перрона p - единственный для матрицы* $A_{n\times n} > 0$

Доказательство. Если (λ, y) это собственная пара для матрицы A, $y \geq 0$ и если $x > 0$ - вектор Перрона для A_T, тогда $x^T y > 0$ (утвер. (2)),

$$\rho(A)x^T = x^T A \Rightarrow \rho(A)x^T y = x^T A y = \lambda x^T y \Rightarrow \rho(A) = \lambda \quad \text{(ЧТД)}$$

Лемма 5. *Формула Коллатца – Виландта*

Корень Перрона для матрицы $A_{n\times n} > 0,\ r = \max_{x\in N} f(x)$, где

$$f(x) = \min_{1\leq i\leq n} \frac{[Ax]_i}{x_i},\ (x_i \neq 0), \quad N = \{x \mid x \geq 0, x \neq 0\}.$$

Доказательство. Если $\varepsilon = f(x)$ для $x \in N$, тогда $0 \leq \varepsilon x \leq Ax$. Пусть p и q^T будут соответственно правый и левый векторы Перрона для A с соответствующим корнем Перрона r используем (3) (простые утверждения) вместе с утвер. (2) $(q^T x > 0)$

$$\varepsilon x \leq Ax \Rightarrow \varepsilon q^T x \leq q^T A x = r q^T x \Rightarrow \varepsilon \leq r \Rightarrow f(x) \leq r \quad \forall x \in N.$$

Поскольку $f(p) = r$ и $p \in N$, то $r = max_{x\in N} f(x)$.
Ниже приводится краткое изложение результатов, полученных выше

Теорема Перрона

Соберем все леммы и утверждения, доказанные ранее, и получим теорему Перрона для положительных матрицы

Если $A_{n\times n} > 0$, $r = \rho(A)$, следующие утверждения верны.

1. *$r > 0$*
2. *$r \in \sigma(A)$ (r называется корнем Перрона)*
3. *$alg\ mult_A(r) = 1$.*
4. *Существует собственный вектор $x > 0$ такой, что $Ax = rx$.*
5. *Вектор p, который удовлетворяет условиям:*

   $$Ap = rp, \quad p > 0, \quad \|p\|_1 = 1$$

   называется вектором Перрона. Не существует других собственных векторов для матрицы A, кроме кратных p, не смотря на собственное значение.
6. *r единсвтенное собственное значение на спектральном круге матрицы A*
7. *Формула Коллатца-Виландта*

   $$r = \max_{x\in N} f(x), \quad f(x) = \min_{1\le i\le n} \frac{[Ax]_i}{x_i}$$

Неотрицательные матрицы

Лемма 6. *Пусть $A_{n\times n} \geq 0$, $r = \rho(A)$, то следующие утверждения верны:*

1. *$r \in \sigma(A)$*
2. *$Az = rz$ для $z \in N = \{x \mid x \geq 0, x \neq 0\}$*
3. *Формула Коллатца-Виландта*

   $$r = \max_{x\in N} f(x), \quad f(x) = \min_{1\le i\le n} \frac{[Ax]_i}{x_i}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность положительных матриц $A_k = A + \frac{1}{k}E > 0$, где E - единичная матрица, пусть $r_k > 0$ и $p_k > 0$ отметим, что это корень Перрона и вектор Перрона соответственно для A_k. Заметим $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ограниченное множество, потому что данное множество содержится в единичном шаре $\in \mathbb{R}^n$. Теорема Больцано — Вейерштрасса утверждает, что в ограниченной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, поэтому в $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ мы можем выделить сходящуюся подпоследовательность.

$\{p_k\}_{k=1}^{\infty} \to z$, где $z \geq 0$, $z \neq 0$ (потому что $p_{k_i} > 0$, $\|p_{k_i}\|_1 = 1$) Поскольку $A_1 > A_2 > \cdots > A$, то $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r$, поэтому $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ - монотонная последовательность с положительными элементами, ограниченная r

$$\lim_{k\to\infty} r_k = r^* \text{ существует, } r^* \geq r. \text{ В частности } \lim_{i\to\infty} r_{k_i} = r^* \geq r.$$

Но $\lim_{k\to\infty} A_k = A \Rightarrow \lim_{i\to\infty} A_k = A$

$$Az = \lim_{i\to\infty} A_{k_i} p_{k_i} = lim_{i\to\infty} r_{k_i} p_{k_i} = r * z \Rightarrow r* \in \sigma(A) \Rightarrow r* \leq r.$$

$\Rightarrow r* = r, Az = rz, z \geq 0, z \neq 0$ (доказали пункты 1 и 2 из Леммы 6). Докажем пункт 3. Пусть $q_k^T > 0$ будет левым вектором Перрона для матрицы A_k. Для каждого $x \in N$ и $k > 0$, мы знаем $q_k^T x > 0$ (прост утвержд 2),

$$0 \leq f(x)x \leq Ax \leq Ax \leq A_k x \Rightarrow f(x) q_k^T x \leq q_k^T A_k x = r_k q_k^T x \Rightarrow f(x) \leq r_k \\ \Rightarrow f(x) \leq r(r_k \to r^* = r).$$

$f(z) = r$ и $z \in N$, следовательно $max_{x\in N} f(x) = r$ (ЧТД)

Определение 10. *$A_{n\times n}$ - **приводимая матрица**, когда существует перестановка матрицы P такая, что*

$$P^T A P = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}, \text{ где } X \text{ и } Y \text{ - квадратные матрицы}$$

*В противном случае матрица A - **неприводимая***

Теорема Перрона - Фробениуса (ч. 1)

Если $A_{n\times n}$ - неприводимая матрица, то следующие утверждения верны:

1. $r = \rho(A) \in \sigma(A)$ и $r > 0$

2. *$algmult_A(r) = 1$*

3. *Существет собственный вектор $x > 0$, который удовлетворяет условию $Ax = rx$.*

4. *Вектор p, который удовлетворяет условиям:*

$$Ap = rp, \quad p > 0, \quad \|p\|_1 = 1$$

называется вектором Перрона. Не существует других собственных векторов для матрицы A, кроме кратных p, не смотря на собственное значение.

5. *Формула Коллатца-Виландта*

$$r = \max_{x \in N} f(x), \quad f(x) = \min_{1 \le i \le n} \frac{[Ax]_i}{x_i}$$

Доказательство. Мы уже знаем из Леммы 6.2 $r = \rho(A) \in \sigma(A)$. Докажем, что $alg\ mult_A(r) = 1$, пусть $B = (I + A)^(n - 1) > 0$, будет матрица из Леммы 7. Также мы знаем $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow (1 + \lambda)^{(n-1)} \in \sigma(B), \quad alg\ mult_A(\lambda) = alg\ mult_B((1 + \lambda)^{n-1})$. Вследствии этого если $\mu = \rho(B)$, то

$$\mu = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |(1 + \lambda)|^{n-1} = \left\{ \max_{\lambda \in \sigma(A)} |(1 + \lambda)| \right\}^{n-1} = (1 + r)^{n-1}$$

Потому что когда круглый диск $|z| \le p$ переносится на одну единицу вправо, то точка максимума модулей в результирующем диске $|z+1| \le p$ это $z = 1 + p$ (это очевидно, когда вы рисуете круг). $alg\ mult_A(r) = 1$. В противном случае $alg\ mult_B(\mu) > 1$, но это невозможно так как $B > 0$. Чтобы увидеть, что у A существует собственный вектор с собственным значением r, мы просто воспользуемся Леммой 7.2 и получим вектор $x \ge 0$ и r. Также довольно просто понять, что если (λ, x) собственная пара для A, то $(f(\lambda), x)$ тоже собственная пара для A. Поэтому (r, x) - собственная пара для A, предполагаем, что (μ, x) - собственная пара для B. С помощью Леммы 4 гарантируем, что x должен быть положительным и кратным вектору Перрона для матрицы B; $r > 0$; с другой стороны $Ax = 0$, но это невозможно, так как $A \ge 0$ и $x > 0$, $Ax > 0$. Довод также доказывает последние два пункта теоремы.

Лемма 7. *Если $A_{n \times n} \ge 0$ - неприводимая матрица и имеет h собственных значений $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h\}$ на спектральном круге то следующее условие верно:*

- *$alg\ mult_A(\lambda_k) = 1$ для $k = 1, 2, 3, \ldots, h$.*

Теорема Перрона - Фробениуса (ч. 2)

Если $A_{n\times n} \geq 0$ - неприводимая матрица и имеет h собственных значений $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h\}$ на спектральном круге, то

- *$alg\ mult_A(\lambda_k) = 1$ для $k = 1, 2, 3, \dots, h$.*

Если A - примитивная матрица с h собственными значениями на спектральном круге, то

- *$\sigma(A)$ - инвариантен при вращении относительно начала координат на угол $2\pi/h$.*

Доказательство. *Пусть $S = \{r,\ re^{i\theta_1,\dots,re^{i\theta_{h-1}}}\}$ - собственные значения на спектральном круге A. Мы знаем, что*

$$A = e^{i\theta_k} D_k A D_k^{-1} \Rightarrow e^{i\theta_k} A \sim A$$

Поэтому r - простое собственное значение для матрицы A (по теореме Перрона-Фробениуса), $re^{i\theta_k}$ также является простым собственным значением для матрицы $e^{i\theta_k}A$. Но преобразование трансформации сохраняет собственные значения и алгебраические кратности, поэтому $re^{i\theta_k}$ - собственное значение для матрицы A. Докажем пункт 2. $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \lambda e^{2\pi i/h} \in \sigma(e^{2\pi i/h}A)$, следовательно $\sigma(e^{2\pi i/h}A) - \sigma(A)$, которая вращается на $2\pi/h$. Но из прошлого пунтка мы знаем, что матрицы $A \sim e^{i\theta_k}A$, вследствии этого $\sigma(A) = \sigma(e^{i\theta_k}A)$, следовательно возможен поворот на $2\pi/h$. (ЧТД)