§ 19. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1) Пусть требуется найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(0)=g(0)=0$. Предполагая, что функции f и g можно представить формулами Маклорена, ограничимся первыми отличными от нуля членами в этих формулах:

$$f(x)=ax^n+o(x^n),\quad a\neq 0;\quad g(x)=bx^m+o(x^m),\quad b\neq 0.$$

Если $m=n$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^n+o(x^n)}{bx^n+o(x^n)}=\frac{a}{b}. \tag{1}$$

Если $n>m$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0; \tag{2}$$

если же $m>n$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty. \tag{3}$$

2) Формула Тейлора часто применяется для вычисления пределов вида

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)},$$

где

$$f(x)>0,\quad \lim_{x\to x_0}f(x)=1,\quad \lim_{x\to x_0}g(x)=\infty.$$

Рассмотрим сначала случай $x_0=0$ и предположим, что функции f и g представляются в виде

$$f(x)=1+ax^k+o(x^k),\quad g(x)=1/(bx^k+o(x^k)),\quad x\to 0,$$

где $a\neq 0$, $b\neq 0$, $k\in N$. Так как

$$\lim_{x\to 0}(1+ax^k+o(x^k))^{1/(ax^k+o(x^k))}=e,\quad \lim_{x\to 0}\frac{ax^k+o(x^k)}{bx^k+o(x^k)}=\frac{a}{b},$$

то

$$\lim_{x\to 0}(f(x))^{g(x)}=\lim_{x\to 0}(1+ax^k+o(x^k))^{1/(bx^k+o(x^k))}=e^{a/b}. \tag{4}$$

Если

$$f(x)=\frac{1+ax^k+o(x^k)}{1+a_1x^k+o(x^k)},\quad g(x)=\frac{1}{bx^k+o(x^k)}\quad \text{при}\quad x\to 0,$$

причем $a\neq 0$, $a_1\neq 0$, $b\neq 0$, $k\in N$, то

$$\lim_{x\to 0}(f(x))^{g(x)}=e^{(a-a_1)/b}. \tag{5}$$

Заметим, что для вычисления предела функции $(f(x))^{g(x)}$ при $x\to 0$ можно предварительно найти предел ее логарифма, т. е.

$$\lim_{x\to 0}g(x)\ln f(x),$$

представив функции $g(x)$ и $\ln f(x)$ формулами Маклорена.

Если

$$f(x) = 1 + ax^n + o(x^n), \quad g(x) = \frac{1}{bx^m + o(x^m)}, \quad x \to 0,$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $m, n \in N$ и $m \neq n$, то

$$\lim_{x \to 0} (f(x))^{g(x)} = 1 \quad \text{при} \quad n > m; \tag{6}$$

если $m > n$ и $m - n$ — четное число, то

$$\lim_{x \to 0} (f(x))^{g(x)} = \begin{cases} +\infty, & ab > 0, \\ 0, & ab < 0; \end{cases} \tag{7}$$

если же $m > n$ и $m - n$ — нечетное число, то $\lim\limits_{x \to 0} (f(x))^{g(x)}$ не существует.

3) При вычислении предела с помощью формулы Тейлора в конечной точке $x_0 \neq 0$ следует положить $t = x - x_0$ и свести задачу к вычислению предела в точке $t = 0$. Случай $x \to \infty$ заменой $x = 1/t$ сводится к случаю $t = 0$.

Если имеется неопределенность одного из видов $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, ее следует привести к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 2\operatorname{tg} x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x}$.

▲ Функции, стоящие в числителе и знаменателе дроби, являются бесконечно малыми при $x \to 0$. Так как

$$\sin x = x - x^3/6 + o(x^3), \quad \arcsin x = x + x^3/6 + o(x^3), \quad x \to 0,$$

то формула Маклорена для знаменателя дроби имеет вид

$$\arcsin x - \sin x = x^3/3 + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Поэтому числитель дроби следует представить формулой Маклорена с $o(x^3)$. Используя формулы

$$\sqrt{1 + t} = 1 + \frac{1}{2} t - \frac{1}{8} t^2 + \frac{1}{16} t^3 + o(t^3), \quad t \to 0,$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad x \to 0,$$

получаем

$$\sqrt{1 + 2\operatorname{tg} x} = 1 + \frac{1}{2}(2\operatorname{tg} x) - \frac{1}{8}(2\operatorname{tg} x)^2 + \frac{1}{16}(2\operatorname{tg} x)^3 + o(\operatorname{tg}^3 x) =$$

$$= 1 + x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6} x^3 + o(x^3).$$

Учитывая, что

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

находим представление формулой Маклорена числителя дроби

$$\sqrt{1 + 2\operatorname{tg} x} - e^x + x^2 = \frac{2}{3} x^3 + o(x^3), \quad x \to 0.$$