

Листок №8 Задание №10

Дана выборка размера 1 из экспоненциального распределения с параметром λ . Для проверки гипотезы $H_0 : \lambda = 1$ против $H_1 : \lambda = 3$ используют критерий, если $X_1 > 3$, то H_0 оклонить, а если $X_1 \leq 3$, то принять. Найдите уровень значимости и мощность критерия.

Уровень значимости (а)

Просто посчитаем по определению нужную вероятность с помощью известной плотности экспоненциального распределения $\rho(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$$P(X \in K) (\text{когда } \lambda = 1) = \int_{-\infty}^{\infty} I_{X>3}(x) \cdot 1 \cdot e^{-1 \cdot x} dx = \int_3^{\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{e^3} \Rightarrow$$

$$\text{Уровень значимости } \alpha \approx 0.0497$$

Мощность критерия (б)

Аналогичным образом, но уже подругой формуле посчитаем мощность критерия

$$P(X \in K) (\lambda = 3) = \int_{-\infty}^{\infty} I_{X>3}(x) \cdot 3e^{-3x} dx = \int_3^{\infty} 3e^{-3x} dx = \frac{1}{e^9} = 1 - \beta \Rightarrow$$

$$\text{Мощность критерия } \beta = 1 - \frac{1}{e^9} \approx 0.9998766$$

Листок №8 Задание №8

Критерий Неймана-Пирсона Гласит, что критическое множество K

$$K = \left\{ X : \frac{f}{g} \geq t \right\}$$

Так как мы знаем что f - это плотность равная $e^{-2|x|}$ g - это плотность нормального распределения равная $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

§ По сути нам нужно из неравенства выразить x и позже по определению вероятности мы сможем посчитать α уровень значимости нашего критерия.

$$\frac{e^{-2|x|}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}} \geq t \Rightarrow e^{-2|x|+\frac{x^2}{2}} \geq \frac{t}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\Rightarrow -2|x| + \frac{x^2}{2} \geq \ln\left(\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\right) \Rightarrow x^2 - 4|x| - 2\ln\left(\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\right) \geq 0$$

ДИСКРИМИНАНТ СИЛА!

Сделаем маленькую замену $|x| = a \Rightarrow x^2 = a^2$

Она по формулке, мы получим:

$$a_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 8 \ln\left(\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\right)}}{2}$$

$$a_1 = 2 - \sqrt{4 + 2 \ln\left(\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\right)} \quad a_2 = 2 + \sqrt{4 + 2 \ln\left(\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\right)}$$

Так, следующий этап грамотно найти значение параметра t , чтобы получить нужный уровень значимости α . Мы знаем, что

$$\alpha = P_{\theta_0}(X \in K) = \int_K \rho_0(x) dx = \int_K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Грамотно раскрыв модуль на иксе, мы сможем найти границы для интеграла

$$\alpha = \int_{a_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} + \int_{-\infty}^{a_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} + \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$