46. 0 при $\alpha > 1$ и при $\alpha = 1$, $\beta > -1$; 1 при $\alpha = 1$, $\beta = -1$; $+\infty$ при $\alpha < 1$ и при $\alpha = 1$, $\beta < -1$.
47. 0. **48.** $-2/\pi$. **49.** 0. **50.** 2. **51.** 2. **52.** 0. **53.** 0.
54. 0 при $0 < \alpha < 1$ (α любое), $+\infty$ при $a > 1$ (α любое).
55. 0. **56.** 0. **57.** $-1/3$. **58.** $1/2$. **59.** $1/3$. **60.** $+\infty$.
61. $(\alpha-\beta)/2$. **62.** e. **63.** $e^{-2/\pi}$. **64.** $e^{-2/\pi}$. **65.** $e^{-1/2}$.
66. 1. **67.** $e^{-1/2}$. **68.** 1. **69.** e. **70.** 1. **71.** 1. **72.** 1.
73. 3. **74.** 1. **75.** 1. **76.** 1) 0; 2) 1.
77. Правило Лопиталя неприменимо, предел не существует.
78. $f''(a)$. **79.** $f'''(a)$. **80.** $f^{(k)}(0) = 0$, $k \in N$.
81. 1) 0; 2) 0; 3) 4; 4) a.

§ 18. Формула Тейлора

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1) Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0, имеет в этой окрестности производные до $(n-1)$-го порядка включительно, и пусть существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \quad \text{при} \quad x \to x_0,$$

или, короче,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0. \qquad (1)$$

Многочлен

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (2)$$

называется *многочленом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0*, а функция

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x) \qquad (3)$$

— *остаточным членом n-го порядка формулы Тейлора.*

Формула (1) называется *формулой Тейлора n-го порядка для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 с остаточным членом в форме Пеано*, ее называют также *локальной формулой Тейлора.*

2) Функция $f(x)$, имеющая в точке x_0 производные до n-го порядка включительно, единственным образом представляется в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0, \qquad (4)$$

причем коэффициенты разложения (4) определяются формулами

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Если $x_0 = 0$, то формула (1) принимает вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \to 0, \tag{6}$$

и называется *формулой Маклорена.*

3) Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки $x_0 = 0$ производные всех порядков (бесконечно дифференцируема). Тогда:

а) если f — четная функция, то при любом $n \in N$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}); \tag{7}$$

б) если f — нечетная функция, то при любом $n \in N$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}). \tag{8}$$

4) Формулы Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ (формулы Маклорена) для основных элементарных функций имеют следующий вид:

а) *показательная функция*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

или

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n); \tag{9}$$

б) *гиперболические функции*

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

или

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}); \tag{10}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

или

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}); \tag{11}$$

в) *тригонометрические функции*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

или

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}); \tag{12}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

или

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}); \tag{13}$$

г) *степенная функция*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n),$$

или

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n), \tag{14}$$

где $C_\alpha^0 = 1$, $C_\alpha^k = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}$, $k = 1, 2, \ldots$; в частности,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n), \tag{15}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n); \tag{16}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_{-1/2}^k x^k + o(x^n),$$

где

$$C_{-1/2}^k = \frac{(-1/2)(-1/2-1)\ldots(-1/2-(k-1))}{k!} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k k!},$$

$$(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1),$$

т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^k + o(x^n); \tag{17}$$

д) *логарифмическая функция*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n),$$

или

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + o(x^n), \tag{18}$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n). \tag{19}$$

5) Если

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),$$

то

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),$$

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),$$

где $c_k = \sum\limits_{p=0}^{k} a_p b_{k-p}$.

6) Если функция $f(x)$ представляется в виде $f(x) = g(x)/h(x)$ и если известны представления функций g и h формулой Тейлора в окрестности точки $x = x_0$ с $o((x - x_0)^n)$, т. е. известны разложения

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),$$

$$h(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),$$

причем $c_0 = h(x_0) \neq 0$, то для нахождения формулы Тейлора для функции f можно применить метод неопределенных коэффициентов, который состоит в следующем.

Пусть $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$ — искомое разложение. Приравнивая коэффициенты при $(x - x_0)^k$, где $k = 0, 1, \ldots, n$, в левой и правой частях равенства:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)\right)\left(\sum_{k=0}^{n} c_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)\right) = \\ = \sum_{k=0}^{n} b_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),$$

получаем систему уравнений, из которой можно найти коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

7) Пусть $F(x) = f(\varphi(x))$ — сложная функция, и пусть известны формулы Тейлора для функций φ и f, т. е.

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \tag{20}$$

$$f(w) = \sum_{k=0}^{n} a_k(w - w_0)^k + o((w - w_0)^n), \tag{21}$$

где $w_0 = \varphi(x_0)$. Тогда для нахождения коэффициентов b_k $(k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n)$ функции

$$F(x) = f(\varphi(x)) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

нужно в формулу (21) подставить $w = \varphi(x)$, заменить функцию $\varphi(x)$ ее формулой Тейлора (20), произвести соответствующие арифметические действия, сохраняя при этом только члены вида $b_k(x - x_0)^k$, где $k = 0, 1, \ldots, n$. В частности, если

$$\varphi(x) = Ax^m, \quad m \in N, \quad f(w) = \sum_{k=0}^{n} a_k w^k + o(w^n),$$

то

$$f(\varphi(x)) = f(Ax^m) = \sum_{k=0}^{n} A^k a_k x^{mk} + o(x^{mn}).$$

Например, из (15) и (17) следует, что

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1}), \tag{22}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\, x^{2k} + o(x^{2n+1}). \tag{23}$$

8) Пусть известно представление формулой Тейлора в окрестности точки x_0 до $o((x - x_0)^n)$ производной функции f, т. е. известна формула

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),$$

где $b_k = \dfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}$.

Тогда существует $f^{(n+1)}(x_0)$, и поэтому функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^{n+1}) =$$
$$= f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} a_{k+1}(x - x_0)^{k+1} + o((x - x_0)^{n+1}),$$

где $a_{k+1} = \dfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} = \dfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}\,\dfrac{1}{k+1} = \dfrac{b_k}{k+1}$. Следовательно,

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1} + o((x - x_0)^{n+1}), \tag{24}$$

где b_k — коэффициенты формулы Тейлора функции $f'(x)$.

9) Если функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производные до $(n + 1)$-го порядка включительно, то для любой точки x из этой окрестности найдется точка ξ, лежащая между x и x_0

($x < \xi < x_0$ или $x_0 < \xi < x$) и такая, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \qquad (25)$$

Эта формула называется *формулой Тейлора с остаточным членом*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

в форме Лагранжа.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Представить формулой Маклорена с $o(x^n)$ функцию

$$f(x) = \sin(2x + \pi/4).$$

▲ Так как

$$f^{(k)}(x) = 2^k \sin\left(2x + \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{и} \quad f^{(k)}(0) = 2^k \sin\frac{\pi}{4}(2k+1),$$

то по формуле (6) получаем

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \sin\frac{\pi}{4}(2k+1) \cdot x^k + o(x^n). \ ▲$$

Пример 2. Представить формулой Маклорена до $o(x^n)$ функцию $f(x)$, если:

1) $f(x) = e^{x/2+2}$; 2) $f(x) = \sqrt{1+x}$; 3) $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$;

4) $f(x) = \ln(5 - 4x)$.

▲ 1) Используя формулу (9) и равенство $e^{x/2+2} = e^2 \cdot e^{x/2}$, получаем

$$e^{x/2+2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^2}{2^k k!} x^k + o(x^n).$$

2) Так как $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$, то, применяя формулу (14) при $\alpha = 1/2$, находим

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_{1/2}^k x^k + o(x^n),$$

где

$$C_{1/2}^k = \frac{(1/2)(1/2-1)...(1/2-(k-1))}{k!} = (-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{2^k k!},$$

$$(2k-3)!! = 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2k-3).$$

Следовательно,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{2^k k!} + o(x^n).$$