Вопросы для подготовки к коллоквиуму
Математический анализ-1
ФКН ПМИ 2 курс основной поток 2019-2020, семестр 1.

1. Понятие числового ряда, его частичной суммы. Сходимость и расходимость числовых рядов. Примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов. Необходимый признак сходимости числового ряда.

2. Критерий Коши сходимости числового ряда. Доказать расходимость гармонического ряда.

3. Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами через частичные суммы. Теорема о сравнении и предельный признак сравнения.

4. Интегральный признак сходимости числового ряда. Сходимость ряда
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta} k}$$
в зависимости от значений α и β.

5. Признак Даламбера в простой и предельной формах. Примеры.

6. Признак Коши в простой и предельной формах. Примеры.

7. Абсолютно сходящиеся ряды. Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

8. Определение перестановки членов ряда. Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда.

9. Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда (б.д.). Теорема о произведении двух абсолютно сходящихся рядов.

10. Условно сходящийся числовой ряд. Признак Лейбница сходимости знакопеременного ряда вместе с оценкой на его остаток.

11. Преобразование Абеля. Объясните, почему это преобразование является дискретным аналогом формулы интегрирования по частям.

12. Признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов.

13. Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда, идея доказательства.

14. Дайте определение поточечной и равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов. Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда.

15. Критерий Коши сходимости функциональных последовательностей и рядов.

16. Признак сравнения для функциональных рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

17. Дайте определение равномерной ограниченности последовательности функций. Сформулируйте признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости ряда (б.д.).

18. Приведите пример последовательности непрерывных функций, которая поточечно сходится к разрывной функции. Теорема об интеграле от равномерного предела непрерывных функций и ее следствие для равномерно сходящихся рядов.

19. Теорема о производной функционального предела и ее следствие для рядов.

20. Определение степенного ряда, его радиуса и круга сходимости (формула Коши–Адамара). Докажите, что степенной ряд поточечно сходится строго внутри круга сходимости, и расходится строго вне круга сходимости.

21. Определение радиуса и круга сходимости степенного ряда. Докажите, что степенной ряд сходится равномерно на любом замкнутом круге, лежащем строго внутри круга сходимости.

22. Приведите 3 примера степенных рядов: (1) сходится везде на границе круга сходимости, (2) не сходится на границе круга сходимости, (3) в некоторых точках границы круга сходимости ряд сходится, а в некоторых — нет. Дайте определение функции, аналитической в точке x_0.

23. Лемма о сохранении радиуса сходимости при почленном дифференцировании степенного ряда. Теорема о почленном дифференцировании и интегрировании степенного ряда.

24. Единственность разложения в ряд для аналитической функции. Ряд Тейлора.

25. Вычислите ряды Маклорена для функций $\frac{1}{1-x}$ и $\frac{1}{(1-x)^2}$ и докажите, что эти функции аналитичны в точке 0. Приведите пример неаналитической функции (б.д.).

26. Запишите ряды Маклорена для функций e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$, $(1+x)^\alpha$. Докажите аналитичность функции e^x и функции $\ln(1+x)$ в точке 0.

27. Дайте определение квадрируемости плоской фигуры по Жордану. Докажите критерий квадрируемости плоской фигуры. В чем состоит свойство конечной аддитивности меры Жордана?

28. Дайте определение кратного интеграла от функции двух переменных по компактному квадрируемому множеству, со всеми необходимыми определениями (разбиение, диаметр разбиения, размеченное разбиение, измельчение, интегральная сумма).

29. Докажите, что если ФМП интегрируема на множестве, то она ограничена на этом множестве.

30. Дайте определение верхней и нижней суммы Дарбу, верхнего и нижнего интегралов. Сформулируйте критерий Дарбу интегрируемости функции двух переменных на измеримом плоском множестве.

31. Сформулируйте ключевые идеи доказательства критерия Дарбу.

32. Докажите теорему Кантора: функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нем (теорему Больцано–Вейерштрасса нужно сформулировать, но не обязательно доказывать).

33. Докажите, что функция, непрерывная на компакте, интегрируема на нем (теорему Кантора нужно сформулировать, но не обязательно доказывать).

34. Запишите основные свойства кратных интегралов (аддитивность, линейность, монотонность, интеграл от модуля).

35. Теорема о среднем для двойного интеграла (формулировка и доказательство).

36. Теорема о сведении двойного интеграла к повторному (доказательство для прямоугольной области).

37. Теорема о сведении двойного интеграла к повторному (доказательство для произвольной области, можно пользоваться соответствующей теоремой для прямоугольной области и теоремой Лебега).

(*) Теоремы будут спрашиваться с доказательствами, если противное не оговорено в билете.