Часть 1

СТР 1

Ответы:

Задача 1

а) по β_2 – нет, не линейно

по β_1 – нет, не линейно

по β_0 – да, линейно

пояснения на стр 2

б) $$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i - n\ln\hat{\beta}_0 - \sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_2 z_i}{x_i}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i - n\ln\hat{\beta}_0 - \sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_1 x_i}{z_i}$$

пояснения на стр 3

в) $$\hat{\beta}_0 - 1.96\cdot SE(\hat{\beta}_0) < \beta_0 < \hat{\beta}_0 + 1.96\, SE(\hat{\beta}_0)$$

подробности на стр 4

г) $$y_i = e^{\ln\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 z_i + \ln u_i}$$

подробности на стр 5

е) $$LR = 2(l_{UR} - l_R)$$

подробности на стр 6

$$W = (\hat{\gamma}_{UR} - \gamma_0)^T\, \widehat{Var}(\gamma_{UR})^{-1} (\hat{\gamma}_{UR} - \gamma_0)$$

подробности на стр 7

Задача 1

Проверим в лоб

~~$y_i = \beta_0, \beta_1, \beta_2$~~

$$y_i = f(x_i, z_i, \beta_0, \beta_1, \beta_2) = \beta_0 e^{\beta_1 x_i + \beta_2 z_i} u_i$$

по β_0

$$y_i = f(x_i, z_i, (\alpha\gamma + \ell\xi), \beta_1, \beta_2) =$$

$$= (\alpha\gamma + \ell\xi) e^{\beta_1 x_i + \beta_2 z_i} u_i = \alpha\gamma e^{\beta_1 x_i + \beta_2 z_i} u_i$$

$$+ \ell\xi e^{\beta_1 x_i + \beta_2 z_i} = \alpha f(x_i$$

аналогично
когда будем расписывать по β_1, β_2
у нас в степени сумма распадётся в умножение
и потом $f(\ldots) \cdot f(\ldots)$ и получится, что
не линейно.

Делаем замену

$$\xi_i = \ln(y_i)$$

$$\xi_i = \ln\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 z_i + \ln(u_i)$$

т.к. $\ln(u_i) \sim N(0,1)$, то

$$\xi_i = (\ln\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 z_i, 1)$$

$$\Rightarrow L = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{\sum \frac{(t_i - \ln\beta_0 - \beta_1 x_i - \beta_2 z_i)^2}{2}}$$

$$l = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) + \sum_1^n \left(\frac{t_i - \ln\beta_0 - \beta_1 x_i - \beta_2 z_i}{2}\right)^2$$

$$l'_{\beta_1} = -2x_i \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i - \ln\beta_0 - \beta_1 x_i - \beta_2 z_i}{2}\right)$$

$$x_i \sum_{i=1}^n (t_i - \ln\hat\beta_0 - \hat\beta_1 x_i - \hat\beta_2 z_i) = 0$$

$$\begin{cases} \hat\beta_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^n t_i - n\ln\hat\beta_0 - \sum_{i=1}^n \hat\beta_2 z_i}{x_i} \\ \text{аналогично} \\ \hat\beta_2 = \dfrac{\sum t_i - n\ln\hat\beta_0 - \sum_{i=1}^n \hat\beta_1 x_i}{z_i} \end{cases}$$

c) β_0 дов. интер.

$$\hat\beta_0 - 1{,}96 \cdot SE(\hat\beta_0) < \beta_0 < \hat\beta_0 + 1.96\, SE(\hat\beta_0)$$

$$\hat\beta_0 = l'_{\hat\beta_0} = -\frac{2\sum_i (t_i - \ln\beta_0 - \beta_1 x_i - \beta_2 z_i)}{\hat\beta_0 \cdot 2}$$

$$\sum (t_i - \ln\hat\beta_0 - \hat\beta_1 x_i - \hat\beta_2 z_i) = 0$$

$$\hat\beta_0 = e^{\frac{\sum_i (t_i - \hat\beta_1 x_i - \hat\beta_2 z_i)}{n}}$$

$$SE(\hat\beta_0) = \sqrt{Var(\hat\beta_0)}$$

SE вначале посчитаем SE
информацию фишера

$$I = \mathbb{E}(-H)$$

матрица вторых производных

$$Var(\hat\beta_0) \longrightarrow I^{-1}$$

стр 4

д) $y_i = e^{\ln \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 z_i + \ln u_i}$

То что вверху => бы оценили с помощью МНК.

β_0 - константа, ~~то~~ то $\ln \beta_0$ - тоже константа

$\ln u_i$ - ошибка распределена нормально,

чтобы МНК оценки совпали с ML оценками

надо возвести их в экспоненту

CTR 5

е) Начнем с LR.

$$LR = 2(l_{UR} - l_R), \text{ где } l_{UR} = \max_{\theta_{UR}} l$$

Все очень просто:

UR - unrestricted взяли бы наши МL оценки подставили бы в логарифмическую ф-цию правдоподобия и посчитали бы значение l_{UR}

потом поставили бы ограничение $\beta_1 = 2\beta_2$

пересчитали бы ф-цию правдоподобия где $\beta_1 = 2\beta_2$ и получили бы что-то зависимое только от β_2 взяли бы логарифм правдоподобия, потом производную l, и далее приравняли бы к нулю. Нашли бы оценку $\hat{\beta}_2$ и посчитали бы l_R (подставив оценку в логарифм правдоподобия)

$2(l_{UR} - l_R) = a$ а сравнили бы с 3.84

(т.к. одно ограничение и критическое значение хи квадрат с одной степенью свободы при 0.95 % равно 3.84)

если бы $2(l_{UR} - l_R) > 3.84$, то отклонили бы гипотезу H_0

стр 6

~~тест~~. тест Вальдо

$$W = (\hat{\gamma}_{uR} - \gamma_0)^T \cdot \hat{Var}(\gamma_{uR})^{-1} (\hat{\gamma}_{uR} - \gamma_0)$$

где γ часть вектора θ: $\begin{cases} H_0: \gamma = \gamma_0 \\ H_A: \gamma \neq \gamma_0 \end{cases}$

точнее. ~~к~~ б можно переписать

для нашего $\beta_1 - 2\beta_2 = 0$ перевести

$\beta_1 - 2\beta_2 \neq 0$

$\hat{\gamma}_{uR}$ нужно посчитать

$\hat{Var}(\gamma_{uR})^{-1} \rightarrow I$

$E(-H(\gamma_{uR})) = I$

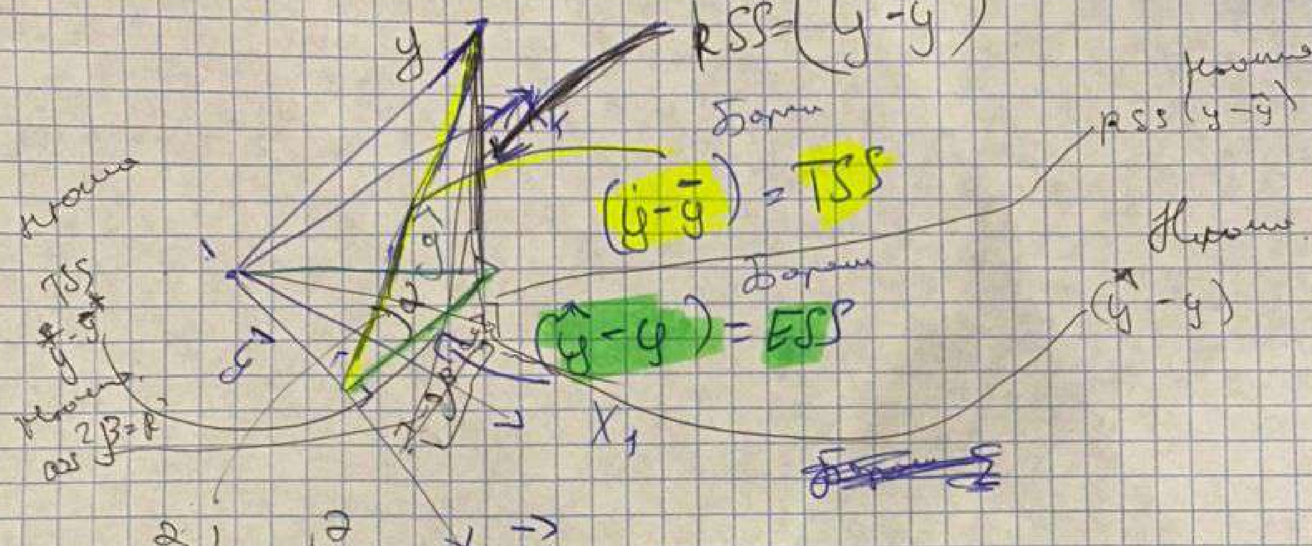
считаем через информацию Фишера, ~~и~~ и подставляем в W.

~~I~~ $\hat{Var}$

сравниваем с χ^2_1, точнее с 3.84 при 95%

СТР 7

Задача 2



$$\cos^2\alpha = R^2$$

Когда Ньют. смотрит, оно просто ограничевается пятимерным пространством

Да право, ~~ESS~~ R^2 коэффициент детерминации

Задача 4.

$X_1, \dots, X_{100}$ X_i если $z=1$ $Bin(2, p_1)$ или если $z=2$ $Bin(2, p_2)$ или если $z=3$ $Bin(2, p_1+p_2)$

у нас есть три класса

$z \in \{1, 2, 3\}$ $\theta = \{p_1, p_2\}$

латентная переменная параметр неизвестных

посчитаем

$$p(z_i \mid x_i, \theta_{old}) = \frac{p(x_i \mid z_i = 1, \theta_{old}) \cdot \frac{1}{3}}{p(x_i \mid z_i=1, \theta_{old}) \frac{1}{3} + p(x_i \mid z_i = 2, \theta_{old}) \frac{1}{3} + p(x_i \mid z_i = 3, \theta_{old})}$$

$$= \frac{\binom{2}{x_i} p_1^{x_i} (1-p_1)^{2-x_i} \frac{1}{3}}{\binom{2}{x_i} p_1^{x_i} (1-p_1)^{2-x_i} \frac{1}{3} + \binom{2}{x_i} p_2^{x_i} (1-p_2)^{2-x_i} \frac{1}{3} + \binom{2}{x_i} (p_1+p_2)^{x_i} \cdot (1-p_1-p_2)^{2-x_i} \cdot \frac{1}{3}}$$

g_{1i}

Аналогично посчитаем g_{2i} и g_{3i}

$$g_{2i} = \frac{\binom{2}{x_i} p_2^{x_i} (1-p_2)^{2-x_i} \cdot \frac{1}{3}}{\binom{2}{x_i} p_1^{x_i} (1-p_1)^{2-x_i} \frac{1}{3} + \binom{2}{x_i} p_2^{x_i} (1-p_2)^{2-x_i} \frac{1}{3} + \binom{2}{x_i} (p_1+p_2)^{x_i} \cdot (1-p_1-p_2)^{2-x_i} \frac{1}{3}}$$

стр 9

$$g_{3i} = \frac{\binom{2}{x_i}(p_1+p_2)^{x_i}(1-p_1-p_2)^{2-x_i}}{\text{То же самое}}$$

Теперь посчитаем $E.2$

$$Q(\theta, \theta_{old}) = E\left[\ln p(x, z|\theta) \mid x, \theta_{old}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{100} g_{1i}\left[\ln\frac{1}{3} + \ln\left(\binom{2}{x_i} p_1^{x_i}(1-p_1)^{2-x_i}\right)\right]$$

$$+ g_{2i}\left[\ln\frac{1}{3}\ \ln\left(\binom{2}{x_i} p_2^{x_i}(1-p_2)^{2-x_i}\right)\right]$$ g_{3i} [то же, только p_1+p_2

$$+ g_{3i}\left[\ln\frac{1}{3} + \ln(p_1+p_2)^{x_i} + \ln\left(\binom{2}{x_i}(p_1+p_2)^{x_i}(1-p_1-p_2)^{2-x_i}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{100} g_{1i} \cdot \left[\ln\frac{1}{3} + \ln\binom{2}{x_i} + x_i \ln p_1 + (2-x_i)\ln(1-p_1)\right]$$

$$+ g_{2i}\left[\ln\frac{1}{3} + \ln\binom{2}{x_i} + x_i \ln p_2 + (2-x_i)\ln(1-p_2)\right] +$$

$$+ g_{3i}\left[\ln\frac{1}{3} + \ln\binom{2}{x_i} + x_i\ln(p_1+p_2) + (2-x_i)\ln(1-p_1-p_2)\right]$$

максимизируем по p_1, p_2

М-Шаг.

$$Q'_{p_1} = \sum g_{1i}\left(\frac{x_i}{p_1} - \frac{2-x_i}{1-p_1}\right) + \sum g_{3i}\left(\frac{x_i}{p_1+p_2} - \frac{2-x_i}{1-p_1-p_2}\right)$$

$$\begin{cases} Q'_{p_1}: \sum\left(g_{1i}\dfrac{x_i}{\hat p_1} - g_{1i}\dfrac{2-x_i}{1-\hat p_1}\right) + \sum g_{3i}\left(\dfrac{x_i}{\hat p_1+\hat p_2} - \dfrac{2-x_i}{1-\hat p_1-\hat p_2}\right) = 0 \\ \cancel{Q'_{p_2} = \sum g_{3i}\left(\dfrac{x_i}{p_2} - \dfrac{2-x_i}{1-p_2}\right) + \sum g_{3i}} \\ \sum g_{2i}\dfrac{x_i}{\hat p_2} - g_{2i}\dfrac{2-x_i}{1-\hat p_2} + \sum g_{3i}\dfrac{x_i}{\hat p_1+\hat p_2} - \dfrac{2-x_i}{1-\hat p_1-\hat p_2} = 0 \end{cases}$$

как-то красиво нужно преобразовать
получим систему ~~как~~ из двух условий для
двух переменных, то есть сможем найти
$\hat p_1, \hat p_2$

$\theta_{new} = (\hat p_1, \hat p_2)$ и повторяем
все шаги
до сходимости

Задача 3

$$y_i \sim U[0,1] \qquad y \sim U[a,b]$$

а) $E(y_i) = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}$

$$E(\bar{y}) = E\frac{1}{n}\left(\sum y_i\right) = \frac{1}{n} E \sum y_i = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$Var(y_i) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

$$Var(\bar{y}_i) = Var\left(\frac{\sum y_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum Var(y_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \frac{1}{12} = \boxed{\frac{1}{12n}}$$

б) Можем записать через сумму индикаторов с помощью z_i, где z_i принимает равновероятно значения $\{1, \dots, n\}$

$$y_i^* = y_1 \cdot I_{[z_i=1]} + \dots + y_n I_{[z_i=n]}$$

т.к. независимые случ. величины

$$E(y_i^*) = E y_i \cdot E I_{[z_i=1]} + \dots + E y_i \, E I_{[z_i=n]}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot n \cdot E y_i = \boxed{\frac{1}{2}}$$ (т.к. равновер-ны $I_{[z_i=n]}$)

$$Var(\bar{y}^*) = Var(y_1 I_{[z_1=1]} + \dots + y_n I_{[z_i=n]}) =$$

Точно расписываем. Только незав. и одинак. распред. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \cdot n \, Var(y_i) = \boxed{\frac{1}{12}}$$

$$E(\bar{y}^*) = E \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^*}{n} = \frac{1}{n}\left(E y_1^* + \dots + E y_n^*\right) = \frac{1}{2} n \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$Var(\bar{y}^*) = E\left[(\bar{y}^*)^2\right] - (E\bar{y}^*)^2$$ — легко.

посчитаем

$$E(\bar{y}^*)^2 = \frac{1}{n^2} E\left[(y_1 I_1 + \dots + y_n I_n)(y_1 I_1 + \dots + y_n I_n)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \cdot I_{[z_i=i]} + \sum_{i \neq j} y_i y_j I_i I_j\right)\right]$$

с помощью независимости

$$= \frac{1}{n^2} E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} y_i I_{[z_i=i]} + \dots\right)\right] \quad n \cdot (n-1) \cdot E y_i E y_j \cdot E I_i E I_j$$

$$= \frac{1}{n^2} n \cdot E y_1^2 + n(n-1) \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(n-1)} =$$

$$E y_1^2 = \frac{(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

Ответ. $Var(\bar{y}^*) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

СТР 13