

2 СЕМЕСТР

Домашняя работа по математическому анализу

ФКН ПМИ 1 курс основной поток 2018-2019

Листок 1. Задачи 1-6. Крайний срок сдачи 08.02.2019

Номер варианта в каждой задаче вычисляется по следующему алгоритму

N_{task} = номер задачи;

N_{grp} = номер вашей группы;

N_{stud} = ваш номер в списке группы (см. здесь — **НОМЕР МОГ ПОМЕНИТЬСЯ**);

$$N = (N_{task} - 1) \cdot 300 + (N_{grp} - 183) \cdot 35 + N_{stud}$$

Ваш вариант — N -ая десятичная цифра числа π после запятой (можно спросить у wolfram alpha, или посмотреть здесь. Задачи со звездочкой сдаются семинаристам.

Задача 1. Исследуйте функцию с помощью производных первого и второго порядков, постройте эскиз ее графика

0. (а) $f(x) = \ln \frac{x}{x+2} + 1$; (б) $f(x) = \frac{x}{x^4 - 1}$;

1. (а) $f(x) = \frac{e^{2-x}}{2-x}$; (б) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4x + 3}$;

2. (а) $f(x) = (3x + 5)e^{-x^2}$; (б) $f(x) = \left(\frac{x-2}{x+3} \right)^2$;

3. (а) $f(x) = (x+2)^2 e^{-3x}$; (б) $f(x) = \frac{2}{x^2 - 4x}$;

4. (а) $f(x) = 2 \ln \frac{x-1}{x} + 1$; (б) $f(x) = \frac{1}{x^4 - 1}$;

5. (а) $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$; (б) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 5}$;

6. (а) $f(x) = x^3 e^{-x}$; (б) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 15}{x - 3}$;

7. (а) $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$; (б) $f(x) = \frac{x+3}{(x-1)^2}$;

8. (а) $f(x) = \frac{e^{3x-5}}{3x-5}$; (б) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 8}{x+2}$;

9. (а) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$; (б) $f(x) = \frac{x}{x^2 + x - 2}$.

Задача 2. Найдите интеграл, указав все необходимые подстановки, и приводя промежуточные выкладки.

0. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x} \cdot \operatorname{ctg} \sqrt{x}};$
1. $\int \frac{4^{\sqrt{1-x^2}} x dx}{\sqrt{1-x^2}};$
2. $\int 3^{\arcsin \ln x} \frac{dx}{x \sqrt{1-\ln^2 x}};$
3. $\int x^5 \cos(2-3x^6) \cdot 2^{\sin(2-3x^6)} dx;$
4. $\int \frac{\sin \frac{1}{x} dx}{x^2 (4 + \cos^2 \frac{1}{x})};$
5. $\int \frac{\sin 2x dx}{(1 + \cos^2 x) \cdot \sqrt[3]{\ln(1 + \cos^2 x)}};$
6. $\int 5^{\operatorname{ctg} x^2} \cdot \frac{x dx}{\sin^2 x^2};$
7. $\int \frac{2^{\sqrt{2x}} dx}{\sqrt{x}(16 + 4^{\sqrt{2x}})};$
8. $\int \frac{2^{\sqrt{\ln(3x+5)}}}{(3x+5)\sqrt{\ln(3x+5)}} dx;$
9. $\int \frac{2^{\cos x} \cdot \sin x}{\sqrt{1-4^{\cos x}}} dx.$

Задача 3. Найдите интегралы, указав все промежуточные подстановки и выкладки:

0. (a) $\int \frac{dx}{x + 2x^{5/7}};$ (б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}};$
1. (a) $\int \frac{dx}{x - 5\sqrt[4]{x}};$ (б) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}};$
2. (a) $\int \frac{dx}{x + 3\sqrt[9]{x^4}};$ (б) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}};$
3. (a) $\int \frac{dx}{x - 7\sqrt[3]{x}};$ (б) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-36}};$
4. (a) $\int \frac{dx}{x - 8\sqrt[5]{x^2}};$ (б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}};$
5. (a) $\int \frac{dx}{x + \sqrt[6]{x^5}};$ (б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}};$

$$\begin{aligned}
6. \quad (a) \quad & \int \frac{dx}{x + 4x^{3/5}}; & (б) \quad & \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 36}}; \\
7. \quad (a) \quad & \int \frac{dx}{x - 2x^{4/7}}; & (б) \quad & \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 25}}; \\
8. \quad (a) \quad & \int \frac{dx}{x - 3\sqrt[8]{x}}; & (б) \quad & \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 16}}; \\
9. \quad (a) \quad & \int \frac{dx}{x + 4\sqrt[10]{x^7}}; & (б) \quad & \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 36}}.
\end{aligned}$$

Задача 4. Найдите интегралы, указав все промежуточные подстановки и выкладки:

$$\begin{aligned}
0. \quad (a) \quad & \int x \operatorname{arctg} x dx; & (б) \quad & \int (x^2 - 4x + 3) \sin 2x dx; & (в) \quad & \int e^{-3x} \cos x dx; \\
1. \quad (a) \quad & \int x e^{2x} dx; & (б) \quad & \int (x^2 - 3x - 2) \cos 3x dx; & (в) \quad & \int e^x \sin 4x dx; \\
2. \quad (a) \quad & \int x^3 \ln x dx; & (б) \quad & \int (x^2 + 2x + 2) \sin 3x dx; & (в) \quad & \int e^{-2x} \cos x dx; \\
3. \quad (a) \quad & \int x^4 \ln x dx; & (б) \quad & \int (2x^2 + x - 2) \cos 2x dx; & (в) \quad & \int e^{2x} \sin 5x dx; \\
4. \quad (a) \quad & \int \arcsin x dx; & (б) \quad & \int (x^2 + 3x - 2) \sin 3x dx; & (в) \quad & \int e^{4x} \cos 2x dx; \\
5. \quad (a) \quad & \int x^6 \ln x dx; & (б) \quad & \int (x^2 - 4x - 3) \cos 3x dx; & (в) \quad & \int e^{-3x} \sin 2x dx; \\
6. \quad (a) \quad & \int x^2 \operatorname{arctg} x dx; & (б) \quad & \int (x^2 + 5x + 2) \sin 4x dx; & (в) \quad & \int e^{-4x} \cos x dx; \\
7. \quad (a) \quad & \int x e^{-2x} dx; & (б) \quad & \int (x^2 - 2x + 4) \cos 3x dx; & (в) \quad & \int e^{2x} \sin x dx; \\
8. \quad (a) \quad & \int x \ln x dx; & (б) \quad & \int (x^2 + 4x - 1) \sin 2x dx; & (в) \quad & \int e^{4x} \cos 3x dx; \\
9. \quad (a) \quad & \int \sqrt{x} \ln x dx; & (б) \quad & \int (x^2 - 3x + 5) \cos 3x dx; & (в) \quad & \int e^{-3x} \sin 4x dx.
\end{aligned}$$

Задача 5. Найдите интегралы, указав все промежуточные подстановки и выкладки:

$$0. \quad (a) \quad \int \frac{3x + 4}{x^2 - 2x + 5} dx; \quad (б) \quad \int \frac{x dx}{x^2 + 7x + 10};$$

$$\begin{array}{ll}
1. \text{ (a) } \int \frac{2x-5}{x^2+6x+10} dx; & \text{(б) } \int \frac{(x+3)dx}{x^2+3x+2}; \\
2. \text{ (a) } \int \frac{x+4}{x^2-2x+26} dx; & \text{(б) } \int \frac{(3x-2)dx}{x^2+x-6}; \\
3. \text{ (a) } \int \frac{2x-1}{x^2+6x+18} dx; & \text{(б) } \int \frac{(5x-1)dx}{x^2-5x+6}; \\
4. \text{ (a) } \int \frac{7x+2}{x^2+4x+29} dx; & \text{(б) } \int \frac{(4x-1)dx}{x^2+4x+3}; \\
5. \text{ (a) } \int \frac{3x-1}{x^2+2x+10} dx; & \text{(б) } \int \frac{(x+5)dx}{x^2-x-12}; \\
6. \text{ (a) } \int \frac{3x-4}{x^2-4x+20} dx; & \text{(б) } \int \frac{(4x-3)dx}{x^2-7x+12}; \\
7. \text{ (a) } \int \frac{2x+5}{x^2+6x+45} dx; & \text{(б) } \int \frac{(x+7)dx}{x^2-2x-3}; \\
8. \text{ (a) } \int \frac{4x-1}{x^2+2x+17} dx; & \text{(б) } \int \frac{(3x-1)dx}{x^2+6x+5}; \\
9. \text{ (a) } \int \frac{x-3}{x^2+4x+40} dx; & \text{(б) } \int \frac{(4x+5)dx}{x^2-4x+3};
\end{array}$$

Задача 6.* Скажем, что многочлен $Q(x)$ “просеивается” многочленом $P(x)$ (обозначим эту ситуацию $Q(x) \vdash P(x)$), если выполнены следующие условия:

1. $\deg Q(x) = \deg P(x) + 1$;
2. Все корни $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ многочлена $Q(x)$ вещественные кратности один. Все корни $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ многочлена $P(x)$ вещественные кратности один.
3. Корни $Q(x)$ и корни $P(x)$ чередуются на вещественной прямой:

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_{n-1} < \beta_{n-1} < \alpha_n.$$

(а) Пусть $R(x)$ — остаток от деления многочлена $Q(x)$ на многочлен $P(x)$. Докажите, что если многочлен $Q(x)$ просеивается многочленом $P(x)$, то $P(x)$ просеивается многочленом $R(x)$:

$$Q(x) \vdash P(x) \Rightarrow P(x) \vdash R(x)$$

(б) Пусть $Q(x) = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$, $\deg P(x) < n$,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{x - \alpha_n}$$

— разложение в сумму простейших дробей. Докажите, что $Q(x) \vdash P(x)$ в том и только том случае, когда все коэффициенты A_i имеют одинаковые знаки (т.е. либо все строго положительные, либо все строго отрицательные).