§ 2. Интегрирование рациональных функций

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Интегрирование элементарных дробей.

Каждая рациональная функция на каждом промежутке, принадлежащем ее области определения, представима в виде суммы многочлена и элементарных рациональных дробей (см. [1, § 6])

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \qquad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, \quad p^2-4q<0.$$

Поэтому интегрирование рациональных функций сводится к разложению рациональной функции на элементарные дроби и к интегрированию элементарных дробей и многочленов.

Интегрирование элементарных дробей производится следующим образом:

1) $\displaystyle\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\ln|x-a| + C;$

2) $\displaystyle\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C, \quad n \neq 1;$

3) $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$
$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x+p/2)^2+q-p^2/4} =$$
$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N-Mp/2}{\sqrt{q-p^2/4}}\operatorname{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}} + C;$$

4) $$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx =$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^n} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} =$$
$$= \frac{M}{2}\frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{((x+p/2)^2+q-p^2/4)^n}, \quad n>1.$$

Последний интеграл линейной подстановкой $t = x + p/2$ приводится к интегралу J_n, для которого в примере 17 из § 1 получена рекуррентная формула.

Из формул 1)–4) следует, что интеграл от элементарной дроби выражается через рациональные функции, логарифмы и арктангенсы. Поэтому неопределенный интеграл от любой рациональной функции на всяком промежутке, принадлежащем ее области определения, является элементарной функцией, представимой в виде алгебраической суммы композиций рациональных функций, логарифмов и арктангенсов.

2. Метод Остроградского. Если знаменатель правильной рациональной дроби $P(x)/Q(x)$ имеет кратные корни, особенно комплексные, то интегрирование такой дроби обычно связано с громоздкими выкладками. В этом случае целесообразно пользоваться следующей *формулой Остроградского*:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx.$$

В этой формуле $Q_2(x)$ — многочлен, имеющий те же корни, что и многочлен $Q(x)$, но все корни многочлена $Q_2(x)$ простые (однократные). Многочлен $Q_1(x)$ есть частное от деления многочлена $Q(x)$ на многочлен $Q_2(x)$, т. е. $Q_1(x) = Q(x)/Q_2(x)$, а $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — это некоторые многочлены, степени которых соответственно меньше степеней многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Если корни $Q(x)$ известны, то тем самым известны многочлены $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Для отыскания многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ их записывают с неопределенными коэффициентами, которые находят после дифференцирования обеих частей формулы Остроградского. Если $P_2 \not\equiv 0$, то, так как корни $Q_2(x)$ простые, интеграл $\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx$ есть функция трансцендентная; она равна сумме слагаемых вида

$$a\,\mathrm{arctg}\,(\alpha x + \beta) + b\ln(\gamma + \delta) + C, \quad a^2 + b^2 \neq 0.$$

В связи с этим второе слагаемое в формуле Остроградского называют *трансцендентной частью* интеграла $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, а первое слагаемое — его *рациональной частью*. Метод Остроградского позволяет найти алгебраическую часть интеграла от правильной рациональной дроби чисто алгебраическим путем, т. е. не прибегая к интегрированию каких-либо функций.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Найти $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)}$.

▲ Знаменатель рациональной дроби имеет простые корни $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$. Поэтому разложение на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{x-3}.$$

Из этого равенства рациональных дробей следует равенство многочленов:

$$x = A_1(x+2)(x-3) + A_2(x+1)(x-3) + A_3(x+1)(x+2).$$

Полагая последовательно $x = -1$, $x = -2$, $x = 3$, находим

$$-1 = -4A_1, \quad -2 = 5A_2, \quad 3 = 20A_3,$$

т. е.

$$A_1 = 1/4, \quad A_2 = -2/5, \quad A_3 = 3/20.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{2}{5}\ln|x+2| + \frac{3}{20}\ln|x-3| + C. \ ▲$$