

Домашняя работа по математическому анализу

ФКН ПМИ 1 курс основной поток 2018-2019

Листок 5. Задачи 25-30. Крайний срок сдачи 07.12.2018

Номер варианта в каждой задаче вычисляется по следующему алгоритму

N_{task} = номер задачи;

N_{grp} = номер вашей группы;

N_{stud} = ваш номер в списке группы (см. здесь);

$N = (N_{task} - 1) \cdot 300 + (N_{grp} - 183) \cdot 35 + N_{stud}$

Ваш вариант — N -ая десятичная цифра числа π после запятой (можно спросить у wolfram alpha, или посмотреть здесь. Задачи со звездочкой сдаются семинаристам).

Задача 25. Вычислите пределы (например, с помощью правила Лопиталья):

0. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} - 1}{x^2 \cos x}$, (б) $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\cos x)^{-\ln x}$;
1. (a) $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\ln x + \operatorname{ctg} x)$, (б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\operatorname{arctg}(1/x)}$;
2. (a) $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x \ln^2 x}{x + e^x}$, (б) $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\ln(x-1))^{\ln x}$;
3. (a) $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln^2(\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{ctg} x}$, (б) $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\ln x)^{\arcsin x}$;
4. (a) $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x - x \ln x}{x^2}$, (б) $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\ln x)^{\operatorname{arctg} x}$;
5. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{\sin 2x}}{x - \sin x}$, (б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\frac{\cos x}{x}}$;
6. (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{x^3} + 2)}{x^3 + 2x^2 + 1}$, (б) $\lim_{x \rightarrow 1-0} (\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4}x))^{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}x)}$;
7. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^{x \sin x} - e^{\cos x - 1}}$, (б) $\lim_{x \rightarrow 2+0} (\log_2 x)^{\operatorname{ctg}(x-2)}$;
8. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$, (б) $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^{x^x - 1}$;
9. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(\sqrt{x^5} + 1)}{x - \sin x}$, (б) $\lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^{x^x - 1}$.

Задача 26. Запишите уравнение касательной прямой к графику функции $y(x)$ в указанной точке (функция может быть задана в параметрическом или неявном виде). Решить дополнительное геометрическое задание, связанное с найденной касательной.

0. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, $x, y > 0$, $x_0 = \frac{1}{8}$. Найти длину отрезка касательной, заключенного между координатными осями.
1. $\begin{cases} x = \frac{\sin t}{1 + \cos t}, \\ y = \frac{\cos t}{1 + \cos t}, \end{cases}$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Найти ординату ортогональной проекции точки $(0, 0)$ на касательную.
2. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $x_0 = 1$, $y_0 < 0$. Найти площадь треугольника, образованного касательной и координатными осями.
3. $\begin{cases} x = \frac{2t}{1 + t^2}, \\ y = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \end{cases}$, $t_0 = 2$. Найти угол между касательной и отрезком, проведенным из начала координат в точку касания.
4. $y^2 = x^3 + x + 2$, $x_0 = 1$, $y_0 > 0$. Найти все точки пересечения найденной касательной с данной кривой.
5. $\begin{cases} x = \frac{\sin t}{1 + \cos t}, \\ y = \frac{\cos t}{1 + \cos t}, \end{cases}$, $t_0 = \frac{3\pi}{4}$. Найти ординату ортогональной проекции точки $(0, 0)$ на касательную.
6. $x^2 - y^2 = 1$, $x_0 = 2$, $y_0 > 0$. Найти точку пересечения касательной с биссектрисой первой координатной четверти.
7. $y^2 = x^3 - 6x + 13$, $x_0 = 2$, $y_0 < 0$. Найти все точки пересечения найденной касательной с данной кривой.
8. $\begin{cases} x = \frac{\sin t}{1 + \cos t}, \\ y = \frac{\cos t}{1 + \cos t}, \end{cases}$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$. Найти ординату ортогональной проекции точки $(0, 0)$ на касательную.
9. $x^3 + y^3 = 9$, $x_0 = 2$. Найти все точки пересечения найденной касательной с данной кривой.

Задача 27. Вычислите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции $y(x)$, заданной параметрически.

0. $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$

1. $\begin{cases} x = \cos 5t, \\ y = t \sin 5t. \end{cases}$

$$2. \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1 - t^2). \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = e^{3t} \cos 5t, \\ y = e^{3t} \sin 5t. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x = \operatorname{tg}(t/3), \\ y = \cos^2(t/3). \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x = \operatorname{arctg}(e^{t/2}), \\ y = \sqrt{1 + e^t}. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t + \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x = 1/\cos 2t, \\ y = \operatorname{tg} 2t. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x = \cos^2 3t, \\ y = \ln \cos 3t. \end{cases}$$

Задача 28. Вычислите $y'(x_0)$ и $y''(x_0)$ для функции $y(x)$, заданной неявно, в указанной точке $M = (x_0; y_0)$.

$$0. e^{x-y} = xy, M = (1; 1);$$

$$1. xy^3 = \ln(x + y), M = (0; 1);$$

$$2. e^{x-2} + xy - 3y - 2 = 0, M = (2; -1);$$

$$3. y^2 = x + \ln \frac{y}{x}, M = (1; 1);$$

$$4. \operatorname{tg} y = xy, M = (\frac{4}{\pi}; \frac{\pi}{4});$$

$$5. y = 1 + xe^y, M = (-1; 0);$$

$$6. \sin(x + 4y) = xy, M = (0; \frac{\pi}{4});$$

$$7. (x + y)^3 = 27(x - y), M = (2; 1);$$

$$8. 5^{xy} = x + y, M = (0; 1);$$

$$9. x + y = 1 + xe^y, M = (0; 1);$$

Задача 29. Вычислите производную n -го порядка от функции $f(x)$.

0. $f(x) = (x^2 + 1)e^x$;

1. $x \log_2(1 + x)$;

2. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$;

3. $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 3}$;

4. $f(x) = \frac{1 + x}{1 - x}$;

5. $f(x) = \sin^2(2x + 3)$;

6. $f(x) = \sin 3x \sin(7x + 2)$;

7. $f(x) = (5x + 3) \sin 6x$;

8. $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 2)$;

9. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}}$.

Задача 30.* Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \sin x}{\arcsin \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \arcsin x}.$$