

Домашняя работа по математическому анализу

ФКН ПМИ 1 курс основной поток 2018-2019

Листок 4. Задачи 19-24. Крайний срок сдачи 23.11.2018

Номер варианта в каждой задаче вычисляется по следующему алгоритму

N_{task} = номер задачи;

N_{grp} = номер вашей группы;

N_{stud} = ваш номер в списке группы (см. здесь);

$N = (N_{task} - 1) \cdot 300 + (N_{grp} - 183) \cdot 35 + N_{stud}$

Ваш вариант — N -ая десятичная цифра числа π после запятой (можно спросить у wolfram alpha, или посмотреть здесь. Задачи со звездочкой сдаются семинаристам.

Задача 19. Исследуйте функцию $f(x)$ на непрерывность (укажите точки разрыва, их род, а для точек разрыва первого рода — скачок функции). Постройте эскиз графика $f(x)$.

$$0. f(x) = 3^{\frac{4}{(x-2)^2(x^2+5x+4)}};$$

$$1. f(x) = 4^{\frac{2}{x^2(x^2-4x+3)}};$$

$$2. f(x) = 2^{\frac{3}{(x-1)^2(4-x^2)}};$$

$$3. f(x) = 6^{\frac{2}{|x+2| \cdot x}};$$

$$4. f(x) = e^{\frac{1}{(x^2+2x)(x+3)^2}};$$

$$5. f(x) = 2^{\frac{-3}{(x^2-4x-5)(x-4)^2}};$$

$$6. f(x) = 6^{\frac{-1}{(x^2+2x-3)(x+2)^2}};$$

$$7. f(x) = 4^{\frac{1}{(x+3)^2(x^2-2x-3)}};$$

$$8. f(x) = e^{\frac{3}{(x+4)^2(x^2+9x+20)}};$$

$$9. f(x) = 6^{\frac{-2}{(x+5)^2(x^2-4x+3)}}.$$

Задача 20. Найдите производную функции $f(x)$ в произвольной точке x_0 (из области определения) по определению.

0. $f(x) = x \sin(2x + 3);$

1. $f(x) = \frac{\cos x}{x};$

2. $f(x) = xe^{4x};$

3. $f(x) = \operatorname{tg}^2 x;$

4. $f(x) = e^x \sin 3x;$

5. $f(x) = \sin(x^2 + 3x + 2);$

6. $f(x) = \ln^3 x;$

7. $f(x) = \frac{\ln 2x}{x};$

8. $f(x) = (2x^2 - x + 2) \sin x;$

9. $f(x) = (3x - 1) \ln 2x.$

Задача 21. Найдите производную функции $f(x)$ во всех точках ее области определения. Верно ли, что производная является функцией, непрерывной на \mathbb{R} ?

0. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} x^4 \cos(1/x^2), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

3. $f(x) = |x| \sin(x^3).$

4. $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x \cdot \cos(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

5. $f(x) = \{\pi x\} \sin^2 x$, где $\{a\}$ — дробная часть a .

6. $f(x) = \begin{cases} (e^x - 1) \sin(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} (\sqrt{1+x^2} - 1) \cos(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

$$8. f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) \arcsin \sqrt{x^3}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} \cos(1/x) \ln(1 + x^2), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Задача 22. Найдите дифференциал dy .

$$0. y = x \arcsin(1/x) + \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}|;$$

$$1. y = \arccos(1/\sqrt{1 + 2x^2});$$

$$2. y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} \operatorname{arctg} x;$$

$$3. y = \frac{\ln |x|}{1 + x^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1 + x^2};$$

$$4. y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \arcsin e^{-x};$$

$$5. y = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x};$$

$$6. y = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right);$$

$$7. y = (\sin \ln |x| - \cos \ln |x|) \operatorname{arctg} x;$$

$$8. y = \sqrt{3 + x^2} - x \ln |x + \sqrt{3 + x^2}|;$$

$$9. y = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1 + x^2}.$$

Задача 23. Найдите производные функций $f(x)$ и $g(x)$ (например, используя метод логарифмического дифференцирования).

$$0. f(x) = \sqrt[3]{\frac{x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}}; \quad g(x) = (\operatorname{tg} 2x)^{x/4} \sqrt{3 - x};$$

$$1. f(x) = \sqrt{x \cos 3x \cdot \sqrt{1 - e^{3x}}}; \quad g(x) = (\arcsin x)^{x^2} \cdot x^3;$$

$$2. f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x^2 - 4)(x + 5)}{(x - 1)e^{\operatorname{arctg} x}}}; \quad g(x) = x^{\sqrt{x^2 + 1}} \cos 2x;$$

$$3. f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x - 2)^2 \sqrt[3]{x + 1}}{x}}; \quad g(x) = x^{\ln x} \cdot x^2;$$

$$4. f(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x \cdot \sqrt{4 - x^2}}{\sqrt[3]{2 + x}}; \quad g(x) = (\cos 2x)^{\ln \cos 2x};$$

$$5. f(x) = \sqrt{\frac{x \ln x}{\sin x}}; \quad g(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x}} \right)^{x^2};$$

$$6. \quad f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2 e^x}{1 + \arcsin x}}; \quad g(x) = (\sin 3x)^{\arcsin x};$$

$$7. \quad f(x) = \frac{x^2 \cdot e^{1-\cos x}}{\ln x}; \quad g(x) = x^{\sin(x/3)};$$

$$8. \quad f(x) = \frac{x e^x \operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{\ln^5 x}; \quad g(x) = (\sin x)^{1/x^2};$$

$$9. \quad f(x) = \sqrt[4]{\frac{e^{\operatorname{tg} x} \cdot (x^4 + 1)}{x \cos x}}; \quad g(x) = (\cos x)^{\sqrt{x}}.$$

Задача 24.* Найдите все такие вещественные числа $d > 0$, что для любой непрерывной функции $f(x) \in C([0, 1])$, принимающей на концах отрезка одинаковые значения, найдутся две точки $x_0, x_1 \in [0, 1]$, такие что $x_1 - x_0 = d$ и $f(x_0) = f(x_1)$.