ГЛАВА 2

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 6. Определенный интеграл

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Интеграл Римана. Пусть задан отрезок $[a;b]$. Через

$$\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$$

будем обозначать *разбиение отрезка* $[a;b]$ такими точками x_k, $k = 0, 1, ..., k_\tau$, что

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_k < ... < x_{k_\tau} = b.$$

Отрезки $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, ..., k_\tau$, называются *отрезками разбиения* τ, а наибольшая из их длин — *мелкостью* $|\tau|$ разбиения τ:

$$|\tau| = \max_{i=1,2,\ldots,k_\tau} |x_i - x_{i-1}|.$$

Разбиение τ' называют *разбиением, вписанным в разбиение* τ (а также *разбиением, следующим за разбиением* τ), и пишут $\tau' \succ \tau$ или $\tau \prec \tau'$, если каждый отрезок разбиения τ' содержится в некотором отрезке разбиения τ.

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана функция f, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ — некоторое разбиение этого отрезка, $|\tau|$ — его мелкость и $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Выберем произвольно по одной точке $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ и составим сумму

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(f; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_{k_\tau}) = \sum_{i=1}^{k_\tau} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (1)$$

Суммы этого вида называются *интегральными суммами (Римана)* функции f.

Функция f называется *интегрируемой (по Риману)* на отрезке $[a;b]$, если существует конечный предел $\lim\limits_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau$. Этот предел называется *определенным интегралом* (или, подробнее, *определенным интегралом Римана*) функции f на отрезке $[a;b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Число a называется *нижним*, а b — *верхним пределом интегрирования.* Таким образом,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau. \qquad (2)$$

Определение предела (2) можно сформулировать в терминах пределов последовательностей или на "языке ε–δ". Сделаем и то, и другое.

Определение 1. Число J называется *пределом интегральных сумм* (1) *при* $|\tau| \to 0$, если для любой последовательности $\tau_n = \{x_k^{(n)}\}_{k=0}^{k=k_{\tau_n}}$ разбиений отрезка $[a;b]$, у которой

$$\lim_{n\to\infty} |\tau_n| = 0,$$

и для любого набора точек

$$\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}], \quad i = 1, 2, ..., k_{\tau_n}, \quad n = 1, 2, ...,$$

существует предел последовательности интегральных сумм σ_{τ_n}, $n = 1, 2, ...$, и он равен J:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\tau_n} = J. \tag{3}$$

Определение 2. Число J называется *пределом интегральных сумм* (1) *при* $|\tau| \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, каково бы ни было разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a;b]$ мелкости, меньшей δ: $|\tau| < \delta$, и каковы бы ни были точки $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, верно неравенство

$$|\sigma_\tau - J| < \varepsilon. \tag{4}$$

Определения 1 и 2 предела интегральных сумм (1) равносильны. По определению полагается

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad a < b.$$

Теорема 1. *Если функция интегрируема на некотором отрезке, то она ограничена на этом отрезке.*

Для каждого разбиения $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a;b]$, на котором определена ограниченная функция f, положим

$$M_i = \sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x), \quad i = 1, 2, ..., k_\tau,$$

$$S_\tau = S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k_\tau} M_i \Delta x_i, \quad s_\tau = s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k_\tau} m_i \Delta x_i.$$

Сумма S_τ называется *верхней*, а сумма s_τ — *нижней суммой Дарбу* функции f.

Верхняя грань J_* нижних сумм Дарбу s_τ называется *нижним интегралом* функции f, а нижняя грань J^* верхних сумм Дарбу — ее *верхним интегралом*:

$$J_* = \sup_\tau s_\tau, \quad J^* = \inf_\tau S_\tau.$$

Предел нижних и верхних сумм Дарбу при $|\tau| \to 0$ определяется аналогично пределу интегральных сумм Римана. Сформулируем его, например, на "языке ε–δ" для нижних сумм Дарбу.

Определение 3. Число J называют *пределом сумм Дарбу s_τ при $|\tau| \to 0$* и пишут

$$\lim_{|\tau|\to 0} s_\tau = J,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех разбиений τ мелкости $|\tau| < \delta$ выполняется неравенство

$$|s_\tau - J| < \varepsilon.$$

Теорема 2. *Для того чтобы ограниченная функция f была интегрируема на отрезке $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{|\tau|\to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0.$$

Следствие. *Для того чтобы ограниченная функция f была интегрируема на отрезке $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{i=1}^{k_\tau} \omega_i(f) \Delta x_i = 0,$$

где $\omega_i(f)$ — колебание функции f на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$:

$$\omega_i(f) = \sup_{\substack{x' \in [x_{i-1}; x_i] \\ x'' \in [x_{i-1}; x_i]}} |f(x'') - f(x')|, \quad i = 1, 2, \ldots, k_\tau.$$

Теорема 3. *Для того чтобы ограниченная функция f была интегрируема на отрезке $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$J_* = J^*.$$

Следствие. *Для того чтобы ограниченная функция f была интегрируема на отрезке $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение τ отрезка $[a; b]$, что*

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon.$$

Заметим, что на практике интегралы от основных элементарных функций нецелесообразно находить с помощью предела интегральных сумм — для этого есть более простой способ (см. ниже формулу Ньютона–Лейбница). Наоборот, можно находить некоторые пределы сумм, если их удастся преобразовать к интегральным суммам функций, интеграл от которой известен (см. ниже пример 13).

Интеграл, рассматриваемый как предел интегральных сумм, иногда удобно использовать для его приближенного вычисления (см. § 10).

2. Свойства интеграла.

1. $\int\limits_a^b dx = b - a.$

2. Если функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[a^*; b^*]$, содержащемся в $[a; b]$.

3. *Аддитивность интеграла.* Если функция f интегрируема на отрезках $[a;c]$ и $[c;b]$, то она интегрируема и на отрезке $[a;b]$, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad a \leqslant c \leqslant b.$$

4. *Линейность интеграла.* Если функции f_k интегрируемы на отрезке $[a;b]$, то для любых чисел λ_k, $k = 1, 2, ..., n$, функция $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$ также интегрируема на отрезке $[a;b]$ и

$$\int_a^b \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x)\Big)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int_a^b f_k(x)\,dx.$$

5. Произведение интегрируемых на отрезке функций интегрируемо на нем.

6. Если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$ и

$$\inf_{[a;b]} |f(x)| > 0,$$

то функция $1/f(x)$ также интегрируема на этом отрезке.

7. *Интегрирование неравенств.* Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a;b]$ и для всех $x \in [a;b]$ верно неравенство $f(x) \geqslant g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

В частности, если на отрезке $[a;b]$ функция $f(x) \geqslant 0$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

8. Если неотрицательная функция интегрируема на отрезке $[a;b]$ и существует такая точка $x_0 \in [a;b]$, что функция в ней непрерывна и принимает положительное значение, то

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Из свойств 4, 7 и 8 следует, что если на отрезке $[a;b]$ для интегрируемых функций f и g выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ и если существует точка $x_0 \in [a;b]$, в которой $f(x_0) < g(x_0)$, причем обе функции f и g непрерывны в этой точке, то имеет место строгое неравенство:

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx.$$

9. Если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, то и ее абсолютная величина $|f|$ также интегрируема на этом отрезке и

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx, \quad a \leqslant b.$$

10. *Непрерывность интеграла.* Если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, то функции

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{и} \quad G(x) = \int_x^b f(t)\,dt$$

непрерывны на этом отрезке.

3. Формула Ньютона–Лейбница.

Теорема 4. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a;b]$, то функция*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{5}$$

дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Следствие. *При выполнении условий теоремы функция*

$$G(x) = \int_x^b f(t)\,dt$$

дифференцируема в точке x_0 и $G'(x_0) = -f(x_0)$.

Теорема 5. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она имеет на этом отрезке первообразную, причем одной из ее первообразных является интеграл с переменным верхним пределом (5), т. е.*

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C.$$

Теорема 6. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то для любой ее первообразной F имеет место формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{6}$$

Эта формула называется *формулой Ньютона–Лейбница.* Ее записывают также в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Если функция F непрерывна на отрезке $[a;b]$ и во всех его внутренних точках выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ (а в концевых точках равенства $F'_+(a) = f(a)$ и $F'_-(b) = f(b)$, где F'_+ и F'_- — соответственно правая и левая производные, могут не выполняться), то формула (6) остается верной. Заметим, что если функция f также непрерывна в точке a (соответственно в точке b), то из непрерывности функции F в точке a (соответственно в точке b) и условия $F'(x) = f(x)$, $a < x < b$, следует существование односторонней производной $F'_+(a) = f(a)$ (соответственно $F'_-(b) = f(b)$).

4. Формула замены переменного. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a; b)$, функция $\varphi(t)$ определена и непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на интервале $(\alpha; \beta)$, причем для всех $t \in (\alpha; \beta)$ выполняется неравенство $a < \varphi(t) < b$ и, следовательно, имеет смысл композиция $f \circ \varphi$ функций φ и f.

Если

$$\alpha_0 \in (\alpha; \beta), \quad \beta_0 \in (\alpha; \beta), \quad a_0 = \varphi(\alpha_0), \quad b_0 = \varphi(\beta_0),$$

то имеет место формула

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)\, dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt. \tag{9}$$

Эта формула называется *формулой замены переменного в определенном интеграле.*

Отметим специальный случай этой формулы: если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, а функция φ непрерывно дифференцируема и возрастает на отрезке $[\alpha; \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt. \tag{10}$$

5. Интегрирование по частям. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a; b]$, то

$$\int_{a}^{b} u\, dv = uv\Big|_a^b - \int_{a}^{b} v\, du. \tag{15}$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям.* Она остается справедливой и в случае, если вместо непрерывности производных u' и v' потребовать лишь их интегрируемость.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Доказать, что всякая непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем.

▲ Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она и равномерно непрерывна на нем, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $x' \in [a; b]$ и $x'' \in [a; b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, верно неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, и, следовательно, если разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a; b]$ имеет мелкость $|\tau| < \delta$, то

$$\omega_i(f) = \sup_{\substack{x' \in [a;b] \\ x'' \in [a;b]}} |f(x') - f(x'')| \leqslant \varepsilon, \quad i = 1, 2, ..., k_\tau,$$