ГЛАВА 2

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

§ 8. Предел последовательности

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Понятие предела. Число a называют *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N, что для любого $n \geqslant N$ верно неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon;$$

короче,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geqslant N: \quad |x_n - a| < \varepsilon; \tag{1}$$

на языке окрестностей: если для каждой окрестности числа a найдется номер, начиная с которого все члены последовательности принадлежат этой окрестности; в символической записи

$$\forall U(a) \ \exists N \ \forall n \geqslant N: \quad |x_n| \in U(a). \tag{2}$$

Иными словами, какую бы окрестность числа a ни взять, вне этой окрестности либо нет ни одного члена последовательности, либо находится лишь конечное количество ее членов.

Последовательность может иметь только один предел.

Если a — предел последовательности $\{x_n\}$, то пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

а саму последовательность называют *сходящейся к* a, иногда просто сходящейся.

Число a *не является* пределом последовательности $\{x_n\}$, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любого натурального N найдется номер $n \geqslant N$ такой, что

$$|x_n - a| \geqslant \varepsilon,$$

короче,

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n \geqslant N: \quad |x_n - a| \geqslant \varepsilon; \tag{1'}$$

на языке окрестностей: если существует окрестность числа a, вне которой находится бесконечно много членов последовательности.

Последовательность называют *расходящейся*, если никакое число не является ее пределом, другими словами, если для любого числа a существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любого натурального N найдется номер $n \geqslant N$ такой, что

$$|x_n - a| \geqslant \varepsilon,$$

короче,

$$\forall a \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n \geqslant N: \quad |x_n - a| \geqslant \varepsilon. \tag{3}$$

2. Свойства сходящихся последовательностей.

1) *Если последовательность имеет предел, то она ограниченна.* Значит, если последовательность неограниченна, то она расходится. Последовательность, сходящуюся к нулю, называют *бесконечно малой.*

Если последовательность $\{x_n\}$ бесконечно малая, а последовательность $\{y_n\}$ ограниченная, то их произведение, последовательность $\{x_n y_n\}$, бесконечно малая.

2) *Для того чтобы число a было пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы для всех n*

$$x_n = a + \alpha_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

3) *Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то для любого числа α существует $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.*

4) *Если существуют $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то:*

а) *существует $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n)$ и*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n;$$

б) *существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n$ и*

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$

в) *если к тому же $y_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

5) *Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и для всех n, начиная с некоторого, $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, то*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a$$

(теорема о трех последовательностях).

6) *Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и для всех n, начиная с некоторого, $x_n \leqslant b$ (или $x_n \geqslant c$), то*

$$a \leqslant b \quad (\textit{или } a \geqslant c).$$

7) *Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > a$ (или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < b$), то для всех n, начиная с некоторого,*

$$x_n > a \quad (\textit{или } x_n < b).$$

3. Бесконечно большие последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называют *бесконечно большой*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N, что для любого $n \geqslant N$ верно неравенство

$$|x_n| > \varepsilon,$$

и в этом случае пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Бесконечно большая последовательность $\{x_n\}$ имеет пределом $+\infty$ (соответственно $-\infty$), если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N, что для любого $n \geqslant N$ верно неравенство

$$x_n > \varepsilon \quad (\text{соответственно } x_n < -\varepsilon),$$

и это записывают так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$).

Во всех этих случаях говорят, что последовательность *имеет бесконечный предел.*

Всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной и расходящейся.

Неограниченная последовательность может и не быть бесконечно большой.

4. Частичный предел. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Если подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ имеет предел $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, где a — число или одна из бесконечностей $+\infty$, $-\infty$, то a называют *частичным пределом последовательности* $\{x_n\}$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где a — число или одна из бесконечностей $+\infty$, $-\infty$, то любая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ имеет тот же предел:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

Теорема (Больцано–Вейерштрасса). *Любая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.*

Всякая неограниченная последовательность имеет частичный предел $+\infty$ или $-\infty$. Таким образом, множество частичных пределов любой последовательности *не пусто.*

Пусть L — множество частичных пределов последовательности $\{x_n\}$ (наряду с числами L может содержать и $+\infty$, и $-\infty$). *Верхним* (*нижним*) *пределом последовательности* $\{x_n\}$ называют $\sup L$ ($\inf L$), и обозначают его

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \sup L \quad \left(\varliminf_{n\to\infty} x_n = \inf L\right).$$

Верхний и нижний пределы последовательности являются ее частичными пределами.

5. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши. Последовательность $\{x_n\}$ называют *фундаментальной*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N, что для любого $n \geqslant N$ и любого $m \geqslant N$ верно неравенство

$$|x_n - x_m| < \varepsilon,$$

короче,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geqslant N \ \forall m \geqslant N: \quad |x_n - x_m| < \varepsilon \tag{4}$$

(*условие Коши*). Это же условие формулируют и так: *для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N, что для любого $n \geqslant N$ и любого натурального p верно неравенство*

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon,$$

короче,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geqslant N \ \forall p: \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon. \tag{4'}$$

Теорема (критерий Коши). *Для того чтобы последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Для того чтобы последовательность не имела конечного предела, необходимо и достаточно, чтобы она не удовлетворяла условию Коши, т. е. удовлетворяла *отрицанию условия Коши*: существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого натурального N найдутся такие $n \geqslant N$ и $m \geqslant N$, что

$$|x_n - x_m| \geqslant \varepsilon,$$

короче,

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n \geqslant N \ \exists m \geqslant N: \quad |x_n - x_m| \geqslant \varepsilon. \tag{5}$$

6. Монотонные последовательности. Число e.

Теорема (Вейерштрасса). *Ограниченная и монотонная, начиная с некоторого номера, последовательность имеет конечный предел.*

Последовательность

$$x_n = (1 + 1/n)^n, \quad n \in N,$$

строго возрастает, т. е. $\forall n \ x_n < x_{n+1}$, ограниченна: $2 \leqslant x_n < 3$, поэтому имеет предел, обозначаемый e,

$$\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = e,$$

это нерациональное число $e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\ldots$

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Доказать исходя из определения, что число 1 является пределом последовательности $x_n = n/(n+1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

▲ Рассмотрим модуль разности

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ будет выполнено, если $1/(n+1) < \varepsilon$, т. е. при $n > 1/\varepsilon - 1$. В качестве N