ГЛАВА 3

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 11. Несобственные интегралы от неограниченных функций

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Определение несобственного интеграла от неограниченной функции. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;b)$ и интегрируема на любом отрезке $[a,\xi]$, $\xi < b$. Если существует конечный предел функции

$$F(\xi) = \int_a^{\xi} f(x)\,dx, \tag{1}$$

при $\xi \to b-0$, то этот предел называется *несобственным интегралом* функции $f(x)$ на промежутке $[a;b)$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\ dx.$$

В этом случае говорят также, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *сходится*, а функция $f(x)$ *интегрируема в несобственном смысле* на промежутке $[a;b)$. В противном случае, т. е. если предел (1) не существует или бесконечен, говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *расходится*, а функция $f(x)$ *неинтегрируема в несобственном смысле* на промежутке $[a;b)$.

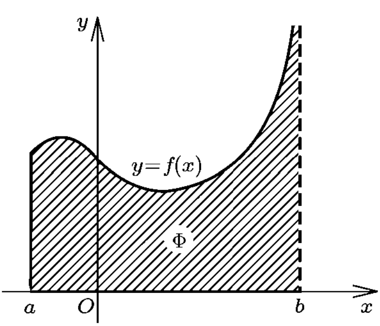

Рис. 11.1

Для непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$, $x \in [a;b)$, сходящийся несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ равен площади (вообще говоря, неограниченной) криволинейной трапеции Φ (рис. 11.1): $\Phi = \{(x;y)\colon a < x < b,\ 0 < y < f(x)\}$.

Если функция $f(x)$ ограничена на $[a;b)$, то предел (1) существует и конечен, а несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ равен обычному интегралу Римана на отрезке $[a,b]$ при произвольном доопределении функции f в точке $x=b$. Таким образом, интеграл Римана является частным случаем несобственного интеграла.

Аналогично определяется несобственный интеграл функции $f(x)$ на промежутке $(a;b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi\to a+0}\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Если функция $f(x)$ интегрируема в несобственном смысле на промежутках $[a;c)$ и $(c;b]$, то $f(x)$ называется *интегрируемой в несобственном смысле на отрезке* $[a;b]$. В этом случае несобственный интеграл определяется равенством

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Если функция $f(x)$ интегрируема хотя бы в несобственном смысле на интервалах $(a;c_1)$, $(c_1;c_2)$, ..., $(c_{n-1};b)$, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_{n-1}}^b f(x)\,dx.$$

2. Основные свойства несобственных интегралов.

1. *Линейность интеграла.* Если несобственные интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся, то для любых чисел α и β сходится интеграл $\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx$, причем

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx. \tag{2}$$

2. *Формула Ньютона–Лейбница.* Если функция $f(x)$, $x\in[a;b)$, непрерывна и $F(x)$, $x\in[a;b)$, — какая-либо ее первообразная, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{b-0} = F(b-0)-F(a), \tag{3}$$

где

$$F(b-0) = \lim_{x\to b-0} F(x).$$

3. *Формула замены переменной.* Пусть $f(x)$, $x\in[a;b)$, — непрерывная, а $\varphi(t)$, $t\in[\alpha;\beta)$, — непрерывно дифференцируемая функции, причем

$$a=\varphi(\alpha)\leqslant\varphi(t)<\lim_{t\to\beta-0}\varphi(t)=b;$$

тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{4}$$

Формула (4) справедлива в случае сходимости по крайней мере одного из входящих в нее интегралов. В случае расходимости одного из интегралов расходится и другой.

4. *Формула интегрирования по частям.* Если $u(x)$, $x \in [a;b)$, и $v(x)$, $x \in [a;b)$, — непрерывно дифференцируемые функции и $\lim\limits_{x \to b-0}(uv)$ существует, то

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du, \tag{5}$$

где

$$uv\Big|_a^b = \lim_{x \to b-0}(uv) - u(a)v(a).$$

Формула (5) справедлива в случае сходимости по крайней мере одного из входящих в нее интегралов. Если один из интегралов расходится, то расходится и другой.

5. *Интегрирование неравенств.* Если функции $f(x)$, $x \in [a;b)$, и $g(x)$, $x \in [a;b)$, удовлетворяют неравенству $f(x) \leqslant g(x)$, то для интегралов

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx, \quad \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

при условии их сходимости верно неравенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{6}$$

3. Признаки сходимости и расходимости интегралов для неотрицательных функций (признаки сравнения). Пусть функции f и g неотрицательны на промежутке $[a;b)$ и интегрируемы на каждом отрезке $[a;\xi)$, $\xi < b$. Тогда:

I. Если функции f и g удовлетворяют на промежутке $[a;b)$ неравенству $f \leqslant g$, то:

а) из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$;

б) из расходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

II. а) Если $g > 0$ на промежутке $[a;b)$ и существует

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k,$$

где $k \neq 0$, то интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно;

б) в частности, если $f \sim g$ при $x \to b-0$, то функции f и g одновременно либо интегрируемы, либо неинтегрируемы на промежутке $[a;b)$.

4. Критерий Коши. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;b)$, интегрируема в собственном смысле на любом отрезке $[a;\xi]$, $\xi < b$, и неограниченна в левой окрестности точки $x = b$. Тогда для сходимости интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое число $\eta \in [a;b)$, что при любых η_1, $\eta_2 \in (\eta;b)$

$$\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Критерий Коши часто используется для доказательства расходимости интегралов: $\int_a^b f(x)\,dx$ расходится, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого числа $\eta \in [a;b)$ существуют числа $\eta_1 \in [\eta;b)$ и $\eta_2 \in [\eta;b)$, для которых

$$\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)\,dx\right| \geqslant \varepsilon.$$

5. Абсолютная и условная сходимость интегралов. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a;\xi]$, $\xi < b$, и сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$, и *условно сходящимся*, если интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, а интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$ расходится.

Если интеграл абсолютно сходится, то он сходится.

Достаточные признаки сходимости. Пусть функция $y = f(x)g(x)$ определена на промежутке $[a;b)$ и неограниченна в левой окрестности точки $x = b$. Тогда справедливы следующие достаточные признаки сходимости.

Признак Дирихле. Интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится, если:

а) функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a;b)$;

б) функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a;b)$, причем $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$.

Признак Абеля. Интеграл $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится, если:

а) функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b)$ и интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится;

б) функция $g(x)$ ограниченна, непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a;b)$.

6. Интеграл в смысле главного значения (в смысле Коши). Пусть функция $f(x)$ интегрируема (в собственном или несобственном смысле) на промежутках $(a;c-\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon;b)$, $\varepsilon>0$, и неограниченна в окрестности точки $c\in(a;b)$.

Интегралом в смысле главного значения (*в смысле Коши*), называется

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\Bigg(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\Bigg).$$

Этот предел обозначается v.p. $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (v.p. — первые буквы французских слов valeur principal — главное значение).

Таким образом, по определению

$$\text{v.p.}\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\Bigg(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\Bigg).$$

Если существует несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, то существует и интеграл в смысле главного значения, и эти интегралы равны. Из существования интеграла в смысле главного значения не следует существование соответствующего несобственного интеграла. Действительно,

$$\text{v.p.}\int\limits_{-1}^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\Bigg(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int\limits_{\varepsilon}^1\frac{dx}{x}\Bigg)=\lim_{\varepsilon\to+0}\Bigg(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon}+\ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{1}\Bigg)=0,$$

а интеграл $\int\limits_{-1}^1\frac{dx}{x}$ не существует.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Вычислить интеграл или установить его расходимость:

1) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$;

3) $\int\limits_{-1}^1 f(x\,dx)$, где $f(x)=\begin{cases}1/x, & \text{если } x<0,\\ 1/\sqrt{x}, & \text{если } x>0;\end{cases}$ 4) $\int\limits_{-1}^1\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.