Коллоквиум №1 по математическому анализу II

186

Update 4

Билет 1. Понятие числового ряда, его частичной суммы. Сходимость и расходимость числовых рядов. Примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов. Необходимый признак сходимости числового ряда.

Определение. Символ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ или $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, где $a_k \in \mathbb{R}$, называется числовым рядом.
Определение. a_k – члены (слагаемые) ряда.
Определение. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ – частичная сумма ряда.
Определение. Если существует конечное число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд называется сходящимся, а S – суммой ряда.
Определение. Если такого числа не существует или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд называется расходящимся.

Пример. $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\ldots$ сходится, т.к. $S_n = \begin{cases} 0, \text{ если } n \text{ – чётное} \\ \dfrac{2}{n+1} \to 0 \text{ при } n \to \infty, \text{ если } n \text{ – нечётное} \end{cases}$

Пример. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ расходится, т.к. $S_n = \begin{cases} 0, \text{ если } n \text{ – чётное} \\ 1, \text{ если } n \text{ – нечётное} \end{cases} \Rightarrow$ предела частичных сумм не существует.

Теорема. Необходимое условие сходимости числового ряда.
Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Доказательство. Заметим, что $S_n - S_{n-1} = a_n$. Знаем, что ряд сходится $\Rightarrow$ существует предел частичных сумм $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, но также верно, что $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$. ◀
Замечание. Данное условие не является достаточным для сходимости числового ряда.

Билет 2. Критерий Коши сходимости числового ряда. Доказать расходимость гармонического ряда.

Теорема. Критерий Коши.
Для сходимости $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ необходимо и достаточно выполнения условия Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ \forall n \geq N \ \forall p > 0 \colon \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Заметим, что

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = S_{n+p} - S_n$$

где S_n – частичные суммы.
Утверждение следует из критерия Коши для последовательностей, если его применить к последовательности $\{S_n\}$.
Напоминание (критерий Коши для последовательностей).
Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называют фундаментальной, если для нее выполнено условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \; \forall n, m \geq n_0 \colon \; |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Теорема. Критерий Коши. Последовательность $\{x_n\}$ сходится и имеет предел $\Leftrightarrow$ она фундаментальна.
Доказательство.

1. Докажем, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, то она фундаментальна. Из существования предела следует, что

   $$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \; \forall n \geq n_0 \colon \; |x_n - c| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \; \forall m \geq n_0 \colon \; |x_m - c| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   Значит,
   $$|x_n - x_m| \leq |x_n - c| + |x_m - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. Если $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность, то она имеет конечный предел. $\{x_n\}$ фундаментальная, значит, по теореме Больцано-Вейерштрасса она имеет некоторую сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть тогда $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$. Из фундаментальности следует:
   $$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \; \forall n, m \geq n_0 \colon \; |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   Тогда положим $m = n_k$:

   $$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \; \exists k_0 = k_0(\varepsilon) \; \forall n \geq n_0 \; \forall k \geq k_0 \colon \; |x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   Тогда с учетом $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$ получим, что

   $$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \; \forall n \geq n_0 \colon \; |x_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   ◀

Утверждение. Гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.
Доказательство. Ряд расходится $\Rightarrow$ по определению предел частичных сумм ряда бесконечен (или не существует): $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Применим отрицание критерия Коши к последовательно-

сти частичных сумм ряда:

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall N \; \exists n, m \geqslant N : \; |S_n - S_m| \geqslant \varepsilon$$

Пусть $n = 2N, m = N$, тогда:

$$|S_n - S_m| = |S_{2N} - S_N| = \left|1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{N} + ... + \frac{1}{2N} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{N}\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + ... + \frac{1}{2N}\right| = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + ... + \frac{1}{2N}$$

Далее заметим, что всего слагаемых в сумме N и что наименьшее из слагаемых – это $\dfrac{1}{2N}$. Тогда можем ограничить сумму снизу следующим образом:

$$\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + ... + \frac{1}{2N} \geqslant \frac{1}{2N} \cdot N = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

◀

Билет 3. Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами через частичные суммы. Теорема о сравнении и предельный признак сравнения.

Теорема. Сходимость числового ряда с неотрицательными членами ($\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \geq 0 \; \forall k$) эквивалентна ограниченности последовательности $\{S_k\}$ его частичных сумм.

Доказательство. $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$, значит $\{S_n\}$ монотонно нестрого возрастает. Теперь утверждение следует из теоремы Вейерштрасса о монотонной ограниченной последовательности:
Если $\{x_n\}$ ограничена, то $\exists \sup\{x_n\}$ (свойство множества вещественных чисел);
Если $\{x_n\}$ монотонно возрастает и ограничена, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$ (сама теорема).
Достаточно взять в качестве x_n частичные суммы S_n. ◀

Теорема. Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.
Пусть $\exists\, k_0 \; \forall k \geq k_0$: $0 \leq a_k \leq b_k$.
1)Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ тоже сходится.
2)Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ тоже расходится.

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, тогда $\{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\}$ ограничена, значит $\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\}$ ограничена тем же числом. По предыдущей теореме $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. ◀

Теорема. Предельный признак сравнения.

Пусть $a_k > 0$, $b_k > 0$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0;+\infty)$, тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся/расходятся одновременно.

Доказательство. $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L$ (в определении предела возьмем $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$)
$\exists\, K\ \forall k \geq K$: $\frac{L}{2} \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{3}{2}L \iff \frac{L\cdot b_k}{2} \leq_{\#} a_k \leq_{*} \frac{3b_k\cdot L}{2}$.
Если сходится $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, то сходится $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2}Lb_k$. Тогда из (*) и признака сравнения следует, что сходится $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.
А если сходится $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, то из (#) следует, что сходится $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. ◀

Билет 4. Интегральный признак сходимости числового ряда. Сходимость ряда $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha \ln^\beta k}$ в зависимости от значений α и β.

Теорема. Пусть $f \in C([1;+\infty))$, f монотонно убывает на $[1;+\infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ (а значит $f(x) \geq 0$). Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ и $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся/расходятся одновременно.
Доказательство.
$\forall x \geq k : f(x) \leq f(k)$ - следует из того, что f монотонно убывает. $\int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \leq \int\limits_{k}^{k+1} f(k)dx = f(k)\cdot \int\limits_{k}^{k+1} 1dx$, где ($f(k)$ - константа).
Из неравенства $f(k) \geq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1)$ получаем, что $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \geq \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \geq \sum\limits_{k=2}^{n+1} f(k)$.
Сходимость $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(x) \iff$ ограниченности последовательности $\{\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)\} \iff$ (из написанных выше неравенств) ограниченности последовательности интегралов $\{\int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx\}_n \iff$ ограниченности функции $F(b) = \int\limits_{1}^{b} f(x)dx \iff$ (было в теме «несобственные интегралы») сходимости $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$. ◀

Утверждение. Ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha \ln^\beta k}$ сходится, если $\left[\begin{array}{c} \alpha > 1, \forall\beta \\ \alpha = 1, \beta > 1 \end{array}\right.$ и расходится иначе.

Билет 5. Признак Д'Аламбера в простой и предельных формах. Примеры.

Теорема. Признак Д'Аламбера о сходимости ряда.
Пусть есть ряд с положительнами членами ряда. Тогда:

1. Если $\exists\ 0 < q < 1$ такое, что $\exists k_0\ \forall k \geq k_0\quad \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

2. Если $\exists k$ такое, что $\forall k \geq k_0 \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1,$ то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Замечание. Конечное число первых членов ряда не влияет на сходимость (хотя, конечно, влияет на сумму ряда), их можно отбросить.

Доказательство.

1. Возьмем тот момент, когда ряд начал удовлетворять условию. При $k \geq k_0 \quad a_{k+1} \geq qa_k \Rightarrow$ заметим, что каждый член ряда меньше предыдущего $\Rightarrow 0 \leq a_k \leq q^{k-k_0} a_{k_0}$ (оценка получена путем поэтапного сранения, пока не дошли до a_{k_0}). Получили оценку: $\forall a_k \quad k > k_0 \quad a_k \leq q^{k-k_0} a_{k_0} = c_0 q^k$. Следовательно, если $q < 1,\ c_0 q^k$ - член убывающей геометрической прогрессии с знаменателем q, значит, ряд сверху ограничен членами убывающей геометрической прогрессии – сходящимся рядом, значит, ряд сходится по признаку сравнения. ◀

2. Начиная с $k_0 \quad a_{k_0} \leq a_{k_0+1} \leq a_{k_0+2} \leq \ldots$
Значит, последовательность $\{a_k\}$ не стремится к нулю, и ряд расходится по необходимому признаку. ◀

Теорема. Признак Д'Аламбера в предельной форме.
Пусть есть ряд, причем:

$$\forall k\ a_k > 0,\ \exists \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q, \text{ тогда:}$$

- Если $q < 1$ то ряд сходится.
- Если $q > 1$ то ряд расходится.
- Если $q = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство.

1. Выберем вокруг q окрестность $(q - \varepsilon, q + \varepsilon),\ \varepsilon = \frac{1-q}{2}$, тогда такая окрестность строго лежит в интеравле $(0; 1)$. Так как по условию предел отношения существует и равен q, то можем переписать условие предела так:
$\exists k_0 = k_0(\varepsilon) \quad \forall k \geq k_0 \ \frac{a_{k+1}}{a_k} \in (q - e, q + e) \Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} < q + \varepsilon < 1$ по предыдущей теореме (признак Д'Аламбера о сходимости ряда) ряд сходится. ◀

2. Аналогично пункту 1 перепишем условие предела:
$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \ \Rightarrow\ \exists k_0 = k_0(e) \quad \forall k \geq k_0 \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} > r > 1$ по предыдущей теореме (признак Д'Аламбера о сходимости ряда) ряд расходится. ◀

3. Для доказательства достаточно привести два примера:

   (a) Гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ - расходится $(\alpha = 1)$.

   (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ - сходится $(\alpha > 1)$

   Но в обоих случаях $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$. ◀

Билет 6. Признак Коши в простой и предельной формах. Примеры.

Теорема. Признак Коши сходимости ряда в простой форме.

Пусть требуется установить сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ Пусть $\forall\ k\ a_k \geqslant 0$. Тогда:

1) Если $\exists\ 0 \leqslant q < 1$ такое, что $\exists\ k_0\ \forall\ k \geqslant k_0\ \sqrt[k]{a_k} \leqslant q < 1$, тогда ряд сходится.

2) Если $\forall\ k_0\ \exists\ k \geqslant k_0\ \sqrt[k]{a_k} \geqslant 1$. (Сколь угодно далеко существуют общие члены в ряде, для которых выполнено написанное неравенство). Тогда ряд расходится.

Доказательство.

1) $\sqrt[k]{a_k} \leqslant q$. Значит $a_k \leqslant q^k$. Получили, что a_k ограничено общим членом ряда сходящейся бесконечной убывающей геометрической прогрессии. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ сходится при $|q| < 1$. Значит $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ тоже сходится.

2) Имеем (возводя неравенство $\sqrt[k]{a_k} \geqslant 1$ в k-ую степень) $\forall k_0\ \exists k \geqslant k_0 : a_k \geqslant 1$. Сколь угодно далеко есть общие члены, не меньшие 1. Последовательность из общих членов такого ряда не стремится к 0. Не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ расходится. ◀

Замечание. Чтобы проверять сходимость ряда по этому признаку Коши, требуется доказать бесконечно много неравенств. Это бывает не очень удобно. Проще проверять какое-нибудь одно неравенство. Поэтому у признака Коши есть предельная форма.

Теорема. Признак Коши сходимости ряда в предельной форме

Пусть требуется установить сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ Пусть $\forall\ k\ a_k \geqslant 0$ и $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{a_k} = q$. (Почти всегда на практике считают обычный предел, но если есть обычный предел, то он же будет и верхним). Тогда:

1) $0 \leqslant q < 1$, то ряд сходится

2) $q > 1$, то ряд расходится

3) $q = 1$, возможны оба случая

Доказательство.

1) Пусть $q < q_0 < 1$ (подбираем число). Тогда, $\exists\ k_0\ \forall\ k \geqslant k_0\ \sqrt[k]{a_k} \leqslant q_0$ (если бы было верно обратное, то есть сколь угодно далеко были бы общие члены последовательности $\sqrt[k]{a_k}$, что $\sqrt[k]{k_0} > q_0$, то существовала бы подпоследовательность, предел которой был бы $> q_0$, то есть множество частичных пределов последовательности $\sqrt[k]{a_k}$ содержало бы число $> q_0 > q$, но тогда супремум не мог бы равнятся q и верхний предел последовательности не мог быть равен q)

И ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится по предыдущей теореме.

2) Пусть $q > 1$. Из определения верхнего предела следует, что $\forall\ k_0\ \exists\ k \geqslant k_0\ \sqrt[k]{a_k} \geqslant 1$ (сколь угодно далеко есть общие члены ряда, для которых написанное неравенство верно). То есть $\forall\ k_0\ \exists\ k \geqslant k_0\ a_k \geqslant 1$. В ряде есть подпоследовательность, которая не сходится к 0. Значит и сам предел последовательности общего члена ряда не равен 0. Ряд расходится $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ по необходимому условию сходимости ряда

3) Покажем, что существуют ряд, для которого $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{a_k} = 1$ и который расходится:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ - гармонический ряд. Он расходится как канонический ряд ($\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha \cdot \ln^\beta k}$ расходится, когда $\alpha = 1$, а $\beta = 0$)
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Он сходится как канонический ряд ($\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha \cdot \ln^\beta k}$ сходится, когда $\alpha = 2$, а $\beta = 0$) ◀

Билет 7. Абсолютно сходящиеся ряды. Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

Определение. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$.
Теорема. Абсолютно сходящийся ряд сходится.
Доказательство. Знаем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится $\Rightarrow$ для него выполнено условие Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N\ \forall p > 0 : \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$. Заметим, что по неравенству треугольника $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon \Rightarrow$ выполнено условие Коши для ряда $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k \Rightarrow$ ряд сходится. ◀

Билет 8. Определение перестановки членов ряда. Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда.

Определение. Пусть $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – биекция. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ называется рядом с переставленными членами по отношению к $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Теорема. Если ряд сходится абслютно, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^* = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ тоже сходится абсолютно и при этом их суммы равны.
Доказательство.

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится $\Rightarrow$ его частичные суммы ограничены сверху числом $M \Rightarrow$ для любого конечного подмножества $A \subseteq \mathbb{N}$:

$$\sum_{k \in A} |a_k| \leq M \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k^*| \leq M$$

   Получили, что частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k^*|$ ограничены и ряд нестрого возрастает, значит, он сходится.

2. Осталось доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k^*| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$.
   Пусть $S := \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S_n^* = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^*$.
   Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $N(n) > 1$, что все слагаемые суммы S_n^* содержатся в S_N. Тогда при $m \geq N$:

$$|S_m - S_n^*| = \left|a_{k_1}^* + a_{k_2}^* + \ldots + a_{k_{m-n}}^*\right| \leq \left|a_{n+1}^*\right| + \left|a_{n+2}^*\right| + ... = \rho_n^*, \forall i\ k_i > n$$

Полученный ρ_n^* – остаток после n-ого члена ряда ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k^*|$. Иными словами, $\rho_n^* = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k^*|$.

Перейдем к пределу при $m \to \infty$:

$$|S - S_n^*| \leq \rho_n^*$$

Мы доказали, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k^*|$ сходится. Значит, $\rho_n^* \to 0$ при $n \to \infty$. И тогда $S_n^* \to S$ при $n \to \infty$, поэтому $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^* = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. ◀

Билет 9. Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда (без доказательства). Теорема о произведении двух абсолютно сходящихся рядов.

Теорема. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^* = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ тоже сходится абсолютно, и при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^*$$

Теорема. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся абсолютно. Тогда ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j}$, составленный из всевозможных попарных произведений, сходится абсолютно и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j} = (\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k) \cdot (\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k)$

Доказательство. 1) Абсолютная сходимость следует из ограниченности частичных сумм:

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{k_j}||b_{m_j}| \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|) \cdot (\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|)$$

Значит, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{k_j} b_{m_j}|$ сходится.

2) По предыдущей теореме можно перегруппировать члены $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j}$ так, чтобы было выполнено

$$\sum_{j=1}^{n^2} a_{k_j} b_{m_j} = (\sum_{k=1}^{n} a_k) \cdot (\sum_{k=1}^{n} b_k)$$

При $n \to \infty$ получаем, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j} = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k) \cdot (\sum_{k=1}^{\infty} b_k)$$

◀

Билет 10. Условно сходящийся числовой ряд. Признак Лейбница сходимости ряда вместе с оценкой на его остаток.

Определение. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется условно сходящимся, если он сходится, а $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ расходится.

Теорема. Признак Лейбница.
Пусть $a_k \geq 0$, $a_{k+1} \leq a_k$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ сходится.

Доказательство. Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$, тогда $S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2n-1} - a_{2n}) = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - ... - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$.
Видно, что S_{2n} возрастает и $0 \leq S_{2n} \leq a_1$, значит $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} =: S$.
$S_{2n-1} = S_{2n} + a_{2n}$, $a_{2n} \to 0$, $S_{2n} \to S \Rightarrow S_{2n-1} \to S$.
Значит $S_n \to S$, т.е. ряд сходится. ◄
Замечание. $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$. Оценим скорость сходимости.
$r_n = |S - S_n| = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \Rightarrow |r_n| \leq a_{n+1}$.

Билет 11. Преобразования Абеля. Объясните, почему это преобразованние является дискретным аналогом формулы интегрирования по частям.

Преобразования Абеля для конечных сумм.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - a_1 B_0 - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k$$

Вывод преобразования.
Рассмотрим следующую сумму $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$, где a_k и b_k какие-то числа. (Только в данном примере, на самом деле преобразование Абеля вещь универсальная и ее также можно использовать, например, с функциями). Преобразование Абеля - это модификация данной суммы.
Введем произвольное число B_0 и положим $B_k = B_0 + \sum\limits_{j=1}^{k} b_j (1 \leq k \leq n)$. Тогда: $B_k - B_{k-1} = b_k \Rightarrow S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k (B_k) - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k (B_{k-1}) =$ [во второй сумме поменяем индекс сумирования с k на $k+1$] $= \sum\limits_{k=1}^{n} a_k (B_k) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{k+1} (B_k) = a_n B_n - a_1 B_0 - \sum\limits_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k$.
Замечание. Преобразование Абеля - это дискретный аналог формулы интегрирования по частям:

Понятие	Дискретный аналог
f	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
f'	$\{a_n - a_{n-1}\}_{n=2}^{\infty}$
$\int\limits_a^b f dx$	$A(n_2) = \sum\limits_{k=n_1}^{n_2} a_k$
$\left(\int\limits_a^b f dx\right)'_x = f(x)$	$A_{n_2} - A_{n_2-1} = a_{n_2}$
Функции f, g и $G(x) = \int\limits_a^x g(t)dt + C$ $\int\limits_a^b fgdx = \int\limits_a^b fdG = fG\Big\|_a^b - \int\limits_a^b Gf'dx$	$\{a_k\}\{b_k\}, \left\{B_k = \sum\limits_{j=1}^{k} bj + B_0\right\}$ $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = aB_n - a_1 B_0 - \sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)B_k$

Билет 12. Признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов.

Теорема. Признак Дирихле сходимости ряда.
Пусть требуется установить сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k$ Пусть a_k - неотрицательна и монотонно убывает к 0. И пусть последовательность частичных сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ ограничена. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k$ сходится.

Замечание. Если $b_k = (-1)^{k+1}$ и a_k монотонно убывает к 0, то условие признака Дирихле выполнено. Получаем признак Лейбница.

Доказательство.
Возьмём частичную сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k$ и применим к ней преобразование Абеля $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k = a_n \cdot B_n - a_1 \cdot B_0 - \sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)B_k$ знаем, что B_n ограничена, а a_n - бесконечно малая, значит первое слагаемое в преобразовании Абеля, по свойствам предела последовательности, стремится к 0 при n, стремящемся к бесконечности, второе слагаемое - const, осталось понять, что последнее слагаемое куда-то стремится при n, стремящемся к бесконечности.
Для сходимости $\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)B_k$ достаточно доказать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_{k+1} - a_k)B_k$. Проверим абсолютную сходимость (из абсолютной сходимости следует сходимость) этого ряда. Надо проверить сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k||B_k|$. Последовательность B_k ограничена. Поэтому $\exists\ M$ такое, что $\forall\ k\ |B_k| \leqslant M$, значит $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k||B_k| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k|M$. В этом ряду все выражения $(a_{k+1} - a_k)$ неположительны (a_k - монотонно убывает), значит этот ряд равен ряду $-M \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_{k+1} - a_k)$. Этот ряд является телескопическим (у его всех частичных сумм сокращается большое количество слагаемых, за исключением константного числа). И при любом n частичная сумма S_n просто равна $(a_1 - a_n) \cdot M$. Тогда, так как a_n стремится к 0, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k|M$ сходится к $a_1 \cdot M$, что означает, что и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k||B_k|$ сходится по признаку сравнения, а значит сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_{k+1} - a_k)B_k$ (так как он сходится абсолют-

но, это в точности означает сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_{k+1}-a_k||B_k|)$ а значит и $\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)B_k$ сходится как последовательность частичных сумм этого ряда, из этого и доказанного выше (и арифметических свойств предела последовательности (показано, что все слагаемые сходятся)) следует сходимость последовательности $a_n \cdot B_n - a_1 \cdot B_0 - \sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)B_k$, а это в свою очередь означает, по преобразованию Абеля, что равная ей последовательность $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot b_k$ тоже сходится, а значит сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k$ ◄

Замечание. Использованное в доказательстве преобразование Абеля и оценка абссолютного ряда супремумом частичных сумм и первым членом ряда.

Теорема. Признак Абеля сходимости ряда.
Пусть $\{a_k\}$ монотонна и ограничена. И $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Тогда, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k$ сходится.

Доказательство.
Последовательность $\{a_k\}$ монтонна и ограничена, значит эта последовательность имеет предел (назовём его a). Тогда последовательность $\widetilde{a_k} = a_k - a$ монотонна, ограничена, и стремится к 0. Без ограничения общности, считаем, что последовательность неотрицательна и убывает к 0. (аналогично, если последовтаельность отрицательна и возрастает к 0, тогда возьмём противоположную по знаку последовательность). Значит $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{a_k} \cdot b_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a \cdot b_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{a_k} b_k + a\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. К первой сумме применим признак Дирихле (a_k монотонно убывает и стремится к 0, $\forall\ n$ $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ ограничены, так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится), а вторая сходится по условию. Значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{a_k} \cdot b_k + a\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, тогда и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k$ сходится ◄

Билет 13. Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда, идея доказательства.

Определение. Положительные члены ряда: $a_k^+ = \begin{cases} a_k, \text{ если } a_k \geqslant 0 \\ 0, \text{ если } a_k < 0 \end{cases}$

Определение. Отрицательные члены ряда: $a_k^- = \begin{cases} 0, \text{ если } a_k \geqslant 0 \\ a_k, \text{ если } a_k < 0 \end{cases}$

Лемма. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно (но не абсолютно), то ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^+$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^-$ расходятся.

Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^-$. Пусть не так, тогда один из рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^+$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^-$ сходится $\Rightarrow$ сходится и второй, т.к. сходится их сумма, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ (ссылаемся на утверждение о том, что сумма сходящихся рядов сходится, а сумма сходящегося и расходящегося рядов расходится). Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^- = (a_1^+ + a_2^+ + ...) - (a_1^- + a_2^- + ...) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ тоже сходится $\Rightarrow$ противоречие с условной сходимостью. ◄

Теорема. О перестановке членов условно сходящегося ряда (Риман).
Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно (но не абсолютно). Тогда для $\forall A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ можно так переставить члены этого ряда, чтобы его сумма была равна A.
Идея доказательства.

1. Берём из ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ положительные члены, пока сумма выбранных слагаемых не станет больше A. Можем так сделать, т.к. по лемме ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^+$ расходится $\Rightarrow$ последовательность частичных сумм этого ряда не ограничена сверху.

2. Берём из ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ отрицательные члены, пока сумма выбранных слагаемых (с учётом выбранных на предыдущем шаге) не станет меньше A. Можем так сделать, т.к. по лемме ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^-$ расходится $\Rightarrow$ последовательность частичных сумм этого ряда не ограничена снизу.

3. Повторяем шаг 1.

4. Повторяем шаг 2.

5. ...

Знаем, что условная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ влечёт выполнение необходимого условия сходимости числовых рядов $\Rightarrow$ в конце каждого шага |Сумма выбранных слагаемых $- A| \leqslant$
$\leqslant$ |Последнее добавленное слагаемое| $\to 0$ по необходимому условию сходимости. ◄
Замечание. В условиях теоремы Римана существует перестановка σ такая, что сумма ряда из переставленных членов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = +\infty$ (аналогично для $-\infty$).

Билет 14. Дайте определение поточечной и равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов. Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда.

Рассмотрим $E \subseteq \mathbb{R}^d$ и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность функций, причем $\forall n\ f_n \colon E \to \mathbb{C}$.

Определение. Последовательность $\{f_n\}$ сходится (поточечно) на множестве E, если числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится при каждом $x \in E$.

Определение. Последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на множестве E к функции $f \colon E \to \mathbb{C}$, если $\sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0$.

Определение. Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, где $u_k \colon E \to \mathbb{C}$ и $E \subseteq \mathbb{R}^d$. Говорят, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ поточечно сходится на множестве E, если $\forall x \in E$ сходится числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$. Иными словами, функциональная последовательность $\{S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k\}_{n=1}^{\infty}$ сходится поточечно.

Определение. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится равномерно на E, если последовательность $\{S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно. Иными словами, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится поточечно и $\sup\limits_{x\in E}\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема. Необходимое условие равномерной сходимости ряда. Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ равномерно сходится, то $u_k \rightrightarrows_E 0$.

Доказательство. Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

Заметим, что

1. $u_n = S_n - S_{n-1}$.
2. $S_n \rightrightarrows_E S$
3. $S_{n-1} \rightrightarrows_E S$

$\Rightarrow u_n = S_n - S_{n-1} \rightrightarrows_E S - S = 0$. ◀

Билет 15. Критерий сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Условие Коши для функциональных последовательностей.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 = N_0(\varepsilon)\ \forall n, m \geqslant N_0 : \sup\limits_{E} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Теорема. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей.

Последовательность $\{f_n\}_{n=0}^{\infty},\ f_n : E \to \mathbb{C}$ равномерно сходится на $E \iff$ выполнено условие Коши.

Доказательство.

$\Rightarrow$

Пусть $f_n \rightrightarrows_E f$. Тогда по определению равномерной сходимости:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \quad \forall n \geq N_0 : \sup\limits_{E} |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2}$

Заметим, что $\sup\limits_{E} |f_n - f| = d_\infty(f_n, f)$ (в метрике Чебышёва). Теперь перепишем определение для m:

$\forall m \geq N_0 : \sup\limits_{E} |f_m - f| = d_\infty(f_m, f) < \frac{\varepsilon}{2}$. Воспользуемся свойствами метрики (неравенство треугольника) для оценки расстояния между f_n и f_m:

$d_\infty(f_n,f_m) \leq d_\infty(f_n,f) + d_\infty(f_m,f) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Получили $\sup\limits_{E}(f_n - f_m) = d_\infty(f_n,f_m) < \varepsilon$, т.е. условие Коши выполнено. ◀

$\Leftarrow$

Пусть выполнено условие Коши, тогда $\forall x \in E$ выполнено:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \forall n,m \geq N_0 : \sup\limits_{E} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

То есть числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ (при фиксированном x для всех функций) удовлетворяет условию Коши для числовых последовательностей. Значит, $\forall x\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$ (применили критерий Коши для числовых последовательностей). По условию:

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \forall n,m \geq N_0 \forall x \in E : \sup\limits_E |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. В условии устремим $m \to \infty$, тогда можно заменить в модуле $f_m \quad f(x)$ так как ранее было доказано, что существует предел:
$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \forall n \geq N_0 \forall x \in E : \sup\limits_E |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ - это и означает, что $f_n \rightrightarrows_E f$. ◀

Условие Коши для функциональных рядов:

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \forall n > N_0, p > 0 : \sup\limits_{x\in E} \Big| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \Big| < \varepsilon.$

Можно переписать:

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \forall n > N_0, p > 0 \forall x \in E \Big| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \Big| < \varepsilon$

Теорема. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов.
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на множестве $E \subset \mathbb{R}^n \iff$ выполнено условие Коши.

Доказательство.

Следует из критерия Коши для функциональных последовательностей. В качестве последовательности надо взять функциональную последовательность частичных сумм ряда и применить к ней критерий для функциональных последовательностей. ◀

Билет 16. Признак сравнения для функциональных рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

Теорема. Признак сравнения для функциональных рядов.
Пусть $u_k : E \to \mathbb{C}$, $v_k : E \to [0; +\infty)$ и $\forall x \in E\ \forall k : |u_k(x)| \leq v_k(x)$. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ равномерно сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ тоже равномерно сходится.

Доказательство. $\Big| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \Big| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} v_k(x) < \varepsilon$ (можно сделать меньше ε по критерию Коши). Получается, из условия Коши для $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} v_k(x)$ следует условие Коши для $\Big| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \Big|$. ◀

Теорема. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Пусть $u_k : E \to \mathbb{C}$ и $\forall x \in E\ \forall k \in \mathbb{N}$ выполнено $|u_k(x)| \leq a_k$. Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится на E равномерно и абсолютно.

Доказательство. Следует из признака сравнения если в качестве $v_k(x)$ взять постоянную функцию, равную a_k. ◀

Билет 17. Дайте определение равномерной ограниченности последовательности функций. Сформулируйте признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимоости ряда (без доказательства).

Определение. Последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \quad E \to \mathbb{C}$ называется равномерно ограниченной на E, если $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in N\ \forall x \in E \quad |f_n(x)| \leq M$.

Сеттинг. Хотим иследовать на сходимость ряд вида $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k u_k$, где a_k и u_k какие-то функции, причём $a_k : E \to \mathbb{R}, u_k : E \to \mathbb{C}$

Теорема. Признак Дирихле.

Пусть последовательность $\{a_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ монотонна $\forall x$ и $a_k \rightrightarrows_E 0$. Пусть последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно ограничена на E. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k u_k$ сходится равномерно на E.

Теорема. Признак Абеля.

Пусть последовательность вещественнозначных функций $\{a_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на E и $\quad \forall x \in E \quad \{a_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ монотонна. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ равномерно сходится на E. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x) u_k(x)$ сходится равномерно на E.

Билет 18. Пример последовательности непрерывных функций, которая поточечно сходится к разрывной функции. Теорема об интеграле от равномерного предела непрерывных функций и её следствие для равномерно сходящихся рядов.

Пример. 1. Пусть $f_n(x) = \cos^{2n} x$. Тогда, если x равно $\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то каждый член последовательности равен 1, а иначе меньше 1, а значит стремится к 0, как бесконечно малая последовательность, то есть имеем такую поточечную сходимость

$$\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}\ f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = \begin{cases} 1 & , x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & , \text{иначе} \end{cases}$$

При этом $f_n(x)$ непрерывна $\forall\ n \in \mathbb{N}$. А $f(x)$ нет.

Теорема. Об интеграле от равномерного предела непрерывных функций.

Пусть последовательность непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f_n(x)$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда $\int\limits_a^x f_n(t)\, dt$ равномерно сходится к $\int\limits_a^x f(t)\, dt$ на отрезке $[a, b]$. В частности, это последовательность поточечно сходится к той же предельной функции.

Доказательство.

Из теоремы о непрерывности предельной функции, следует, что $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. В частности, f интегрируема по Риману на любом подотрезке $[a, x]$, если $a \leqslant x \leqslant b$. Поскольку $f_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то $\forall\ \varepsilon\ \exists\ N = N(\frac{\varepsilon}{b-a})\ \forall\ n \geqslant N\ \forall\ x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Следовательно, при $n \geqslant N$ $\sup\limits_{x\in[a,b]} \left| \int\limits_a^x f_n(t)\, dt - \int\limits_a^x f(t)\, dt \right| \leqslant \int\limits_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \leqslant \int\limits_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dt = \varepsilon$. То есть $\int\limits_a^x f_n(t)\, dt$ равномерно сходится к $\int\limits_a^x f(t)\, dt$ на отрезке $[a, b]$. ◀

Следствие. О почленном интегрировании функционального ряда.
Пусть $u_k \in C([a,b])$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится на отрезке $[a,b]$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^x u_k(t)dt$ тоже равномерно сходится на $[a,b]$ и его сумма равна $\int\limits_a^x (\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(t))dt \ \forall \ x \in [a,b]$

Доказательство.

Применяем теорему об интеграле от равномерного предела непрерывных функций к последовательности частичных сумм. ◀

Замечание. Говорят, что функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ можно почленно интегрировать, если $\int\limits_a^b (\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(t))dt = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_k(t)dt$ (и соотвествующие ряды и интегралы существуют). Равномерная сходимость является достаточным условием почленного интегрирования. Но не необходимым.

Билет 19. Теорема о производной функционального предела и её следствие для рядов.

Теорема. О производной функционального предела.

Пусть $\forall n \ f_n \in C^1([a,b])$ (f_n непрерывно дифференцируема на $[a,b]$, т.е. существует непрерывная производная). Пусть числовая последовательность $\{f_n(c)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к A (для некоторой точки $c \in [a,b]$) и пусть $f_n' \rightrightarrows \varphi$ на $[a,b]$. Тогда функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $[a,b]$ к некоторой функции $f \in C^1([a,b])$ и $f'(x) = \varphi(x)$, т.е. $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$.

Доказательство. По теореме о непрерывности равномерного предела: функция φ непрерывна на $[a,b]$ (т.к. производные непрерывны и равномерно сходятся к φ).

По формуле Ньютона-Лейбница: $f_n(x) - f_n(c) = \int\limits_c^x f_n'(t)dt$.

По теореме об интеграле от равномерного предела: $\int\limits_c^x f_n'(t)dt \rightrightarrows \int\limits_c^x \varphi(t)dt =: g(x)$ на $[a,b]$.

Тогда $f_n(x) - f_n(c) \rightrightarrows g(x)$, $f_n(c) \rightrightarrows A$, следовательно $f_n(x) \rightrightarrows g(x) + A =: f(x)$

Дифференцируем: $f'(x) = g'(x) = (\int\limits_c^x \varphi(t)dt)_x' = \varphi(x)$ ◀

Следствие. О почленном дифференцировании функционального ряда.

Пусть числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится (для некоторой точки $c \in [a,b]$), а функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'$ сходится равномерно на $[a,b]$. Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится равномерно на $[a,b]$ и $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k\right)' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'$.

Доказательство. Применяем доказанную теорему к последовательности частичных сумм. ◀

Билет 20. Определение степенного ряда, его радиуса и круга сходимости (формула Коши-Адамара). Докажите, что степенной ряд поточечно сходится строго внутри круга сходимости, и расходится строго вне круга сходимости.

Работаем с $f\colon E \to \mathbb{C}$, где $E \subseteq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

Определение. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ (где $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$) называется степенным рядом.

Определение. Радиус сходимости ряда – это число $R = \dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ (число или $+\infty$). Данная формула называется формулой Коши-Адамара.

Определение. Кругом сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ называется множество $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < < R\}$.

Далее предполагаем замену $z = z - z_0$ и сводим вопрос к $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Теорема. Пусть R – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Тогда

1. При $|z| < R$ ряд сходится, причем абсолютно.
2. При $|z| > R$ ряд расходится, и даже его общий член не стремится к 0.
3. При $|z| = R$ может быть что угодно.

Доказательство.

Признак Коши: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n \geq 0$, сходится, если $l = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} < 1$, а если $l > 1$, то ряд расходится и его общий член не стремится к 0.

Теперь этот признак применяем к $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|z|^n$.

Теперь:

$$l = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\,|z|^n} = |z| \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = [\text{По определению радиуса}] = \frac{|z|}{R}$$

Если $|z| < R$, то $l < 1$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится абсолютно. Если $|z| > R$, то $l > 1$ и ряд расходится, а также общий член не стремится к 0. ◀

Билет 21. Определение радиуса и круга сходимости степенного ряда. Докажите, что степенной ряд сходится равномерно на любом замкнутом круге, лежащем строго внутри круга сходимости.

Определение. Радиус сходимости ряда – это число $R = \dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}$ (число или $+\infty$). Данная формула называется формулой Коши-Адамара.

Определение. Кругом сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ называется множество $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < < R\}$.

Теорема. О равномерной сходимости степенного ряда.

R - радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и $0 < r < R$. Тогда в замкнутом круге $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r\}$ ряд сходится равномерно.

Доказательство. При $|z| \leqslant r$ имеем $|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n$, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ сходится по теореме из билета 20, т.к. $r < R \Rightarrow$ по признаку равномерной сходимости Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится равномерно. ◄

Билет 22. Приведите 3 примера степенных рядов: (1) сходится везде на границе круга сходимости, (2) не сходится на границе круга сходимости, (3) в некоторых точках границы круга сходимости ряд сходится, а в некоторых - нет. Дайте определение функции, аналитической в точке x_0.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ - в некоторых точках границы круга сходимости ряд сходится, а в некоторых - нет.

$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1$. При $|z| < 1$ ряд сходится, при $|z| > 1$ ряд расходится. Исследуем $|z| = 1$.

1)$z = 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

2)$z = -1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится по признаку Лейбница.

3)* Можно рассмотреть $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, $z = \cos\phi + i\sin\phi$, пусть $\phi \neq 2\pi k$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos\phi + i\sin\phi)^n}{n}$ =(по формуле Муавра)= $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\phi + i\sin n\phi}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\phi}{n} + i\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\phi}{n}$ - сходятся по признаку Дирихле (при $\phi \neq 2\pi k$).

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ - сходится везде на границе круга сходимости.
$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = 1$.
1)$z = 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.
2)$z = -1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ сходится по признаку Лейбница.

Пример. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ - не сходится на границе круга сходимости.
$R = 1$
При $z = 1$ и $z = -1$, ряды не сходятся, т.к. не выполнен необходимый признак сходимости.

Определение. Функция $f : E \to \mathbb{C}$, $E \subseteq \mathbb{C}$ называется аналитической в точке $z_0 \in E$, если $\exists\, \rho > 0$, для которого f представляется степенным рядом $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ при $|z - z_0| < \rho$. Для вещественной аналитической функции определение аналогично.

Билет 23. Лемма о сохранения радиуса сходимости при почленном дифференцировании степенного ряда. Теорема о почленном дифференцировании и интегрировании степенного ряда.

Лемма. О сохранении радиуса сходимости при почленном дифференцировании степенного ряда.

Радиусы сходимости степенных рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x_1-x_0)^k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k(x_1-x_0)^{k-1}$ совпадают.

Доказательство.

Заметим, что ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k(x_1-x_0)^{k-1}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k(x_1-x_0)^{k}$ имеют одинаковые радиусы сходимости (один от другого отличается домножением на (x_1-x_0)). Найдём радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k(x_1-x_0)^{k}$.

$$R\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k k(x_1-x_0)^k\right) = [\text{ формула Коши – Адамара }] = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|ka_k|}} = \frac{1}{(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|})(\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}) = 1} =$$

$$= \frac{1}{(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|})} = R\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x_1-x_0)^k\right) \blacktriangleleft$$

Лемма. О сохранении радиуса сходимости при почленном интегрировании степенного ряда.

Радиусы сходимости степенных рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x_1-x_0)^k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(x_1-x_0)^{k+1}}{k+1}$ совпадают.

Доказательство.

Аналогично первой лемме:

$$R\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x_1-x_0)^{k+1}}{k+1}\right) = [\text{ формула Коши – Адамара }] = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|\frac{a_k}{k+1}|}} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|} = 1} =$$

$$= \frac{1}{(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|})} = [\text{ формула Коши – Адамара }] = R\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x_1-x_0)^k\right) \blacktriangleleft$$

Теорема. Почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда.

Пусть $R > 0$ – радиус сходимости вещественного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x_1-x_0)^k =: f(x)$. Тогда при $|x-x_0| < R$:

1. f имеет производные всех порядков, которые можно вычислить почленным дифференцированием.
2. Возможно почленное интегрирование ряда при $|x-x_0| < R$:
   $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(x_1-x_0)^{k+1}}{k+1}$
3. Ряды, полученные почленным дифференцированием и интегрированием, имеют такой же R.

Доказательство. Все пункты следуют из предыдущих утверждений. $\blacktriangleleft$

Билет 24. Единственность разложения в ряд для аналитической функции. Ряд Тейлора

Пусть $f \in A(x_0)$ (является аналитической функцией в точке x_0). Тогда её представление в виде ряда $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ единственно. Более того $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $\forall\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Доказательство.

У почленной производной такой же радиус сходимости как и у самого ряда. Применим теорему о почленном дифференцировании функционального ряда. Тогда внутри круга сходимости $f^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(a_k(x-x_0)^k)^{(n)}$. Тогда $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$. (Слагаемые с $k < n$ при дифференцировании равны 0. Слагаемые с $k > n$ равны 0 при подстановке вместо x x_0, а при $k = n$ имеем при дифференцировании $n!a_n$ (это следует из того, что $(x^n)^{(n)} = n!$)). Значит, $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Отсюда (производные все определены однозначно) следует единственность этого разложения. ◀

Замечание. Всё работает и в случае, когда $x, x_0 \in \mathbb{C}$. Надо пользоваться тем, что $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ $n \in \mathbb{N}$

Определение. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, где $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, называется рядом Тейлора функции f в точке x_0

Замечание. Из теоремы о единственности разложения в ряд для аналитической функции, следует, что если f как-то представляется степенным рядом, то этот ряд - её ряд Тейлора.

Билет 25. Вычислите ряды Маклорена для функций $\frac{1}{1-x}$ и $\frac{1}{(1-x)^2}$ и докажите, что эти функции аналитические в точке 0. Приведите пример неаналитической функции (без доказательства).

Утверждение. $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ при $|x| < 1$ и $f(x) \in A(0)$.

Доказательство. Заметим, что $S_n = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-2} + x^{n-1}$ – сумма геометрической прогрессии. Умножим обе части на x: $x \cdot S_n = x + x^2 + x^3 + ... + x^{n-1} + x^n$. Далее заметим, что $x + x^2 + x^3 + ... + x^{n-1} = S_n - 1 \Rightarrow x \cdot S_n = S_n - 1 + x^n \Rightarrow S_n = \dfrac{1-x^n}{1-x}$. Перейдём к пределу: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-x^n}{1-x}$. Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, т.к. $|x| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-x}$.

Тогда $f(x) = \frac{1}{1-x}$ суть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии (при $|x| < 1$), следовательно разложение верное и функция совпадает со своим степенным рядом, т.е. аналитическая на интервале $(-1, 1)$. Это разложение есть ряд Тейлора (Маклорена) для $f(x)$ по теореме о единственности разложения аналитической функции в степенной ряд. ◀

Утверждение. $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ... = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot x^k$ при $|x| < 1$ и $g(x) \in A(0)$.

Доказательство. Заметим, что $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = (f(x))^2$. Далее ссылаемся на предыдущее утверждение. ◀

Пример (без доказательства) неаналитической функции (Коши).

$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ если } x \neq 0 \end{cases}$

Замечание. Доказательство есть в Ёжике на стр. 184.

Билет 26. Запишите ряд Маклорена для функций e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$, $(1+x)^\alpha$. Докажите аналитичность функций e^x и $\ln(1+x)$ в точке 0

Определение. Функция $f\colon E \to \mathbb{C}, E \subseteq \mathbb{C}$ называется аналитической в точке $z_0 \in E$, если $\exists \rho > 0$, для которого $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ при $|z - z_0| < \rho$. Аналогичное определение для вещественной аналитической функции.

1. $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.
2. $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.
3. $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1)}}{(2n+1)!}$.
4. $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$.
5. $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1)}}{2n+1}$.
6. $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, где $\binom{n}{\alpha} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Теорема. $f(x) = e^x \in A(0)$, причем $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

Доказательство. Имеем $r_{n,f}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = \dfrac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$ для некоторого $c \in [0, x]$. $|r_{n,f}(x)| \leq \dfrac{e^c\,|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ при $n \to \infty$. Поскольку $(n+1)! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} \Rightarrow (n+1)!$ растет быстрее, чем x^{n+1}. ◀

Теорема. $f(x) = \ln(1+x) \in A(0)$.

Доказательство. Явно выведем ряд Тейлора: $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ при $|x| < 1$.

Знаем про бесконечно убывающую геометрическую прогрессию $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = (\ln(1+x))'$ при $|x| < 1$. Тогда $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$. ◀

Билет 27. Определение квадрируемости плоской фигуры по Жордану. Критерий квадрируемости. Свойство конечной аддитивности меры Жордана.

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^2$ называется элементарным, если его можно представить в виде объединения конечного числа непересекающихся прямоугольников с вычислимой площадью.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченное множество. Числа $S_*(E) = \sup\limits_{A \subset E} S(A)$, $S^*(E) = \inf\limits_{E \subset B} S(B)$, где верхняя и нижняя грани берутся по всем элементарным множествам A и B ($A \subset E \subset B$), называются соответственно нижней и верхней мерой множества E.

Определение. Ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^2$ называется квадрируемым по Жордану, если его нижняя и верхняя меры совпадают (т.е. $S_*(E) = S^*(E)$).

Теорема. Критерий квадрируемости.

Плоская фигура E квадрируема $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists Q, P \ (P \subset E \subset Q)$: $S(Q) - S(P) < \varepsilon$

Доказательство.

1) Необходимость: Пусть E квадрируема, т.е. $S_*(E) = S^*(E)$. По определению верхней и нижней меры для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ найдутся такие P и Q ($P \subset E \subset Q$), что $S_* - \frac{\varepsilon}{2} < S(P) \leq S_*$, $S^* < S(Q) \leq S^* + \frac{\varepsilon}{2}$.

Получается, что $S(Q) - S(P) < \varepsilon$.

2) Достаточность: Пусть $\forall \varepsilon > 0 \ \exists Q, P \ (P \subset E \subset Q)$: $S(Q) - S(P) < \varepsilon$

$S(P) \leq S_* \leq S^* \leq S(Q) => 0 \leq S^* - S_* \leq S(Q) - S(P) < \varepsilon$

Так как ε - произвольное положительное число, то получаем, что $S_* = S^*$. ◀

Определение. Измеримость по Жордану обладает свойством конечной аддитивности, т.е. если

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i,$$

а для любых $i \neq j$ выполняется $F_i \cap F_j = \varnothing$, причем все F_i измеримы, то и F измерима, причем

$$S(F) = \sum_{i=1}^{n} S(F_i)$$

Билет 28. Определение кратного интеграла от функции двух переменных по компактному квадрируемому множеству, со всеми необходимыми определениями (разбиение, диаметр разбиения, размеченное разбиение, измельчение, интегральная сумма).

Пусть дана функция $z = f(x,y)$, G - область изменения переменных x и y (G - компактно и квадрируемо).

Определение. Разбиение σ множества G - набор попарно непересекающихся подмножеств $\sigma = \{G_i \subset G\}$, которые в объединении дают все G.

Определение. Диаметр разбиения d - наибольший диаметр множеств G_i.

$d = \max\limits_i(\sup\limits_{M_1,M_2 \in G_i} \rho(M_1,M_2))$.

Определение. Размеченное разбиение - разбиение множества G вместе с конечной последовательностью M_1,...,M_n, с условием, что $M_i \in G_i$

Определение. Измельчение разбиения.
Возьмем более мелкое разбиение по x, y, т.е. каждая клетка мелкого разбиения будет содержаться в более крупной => получим разбиение "мельче исходного".

Определение. Интегральная сумма.
Сумма $S_{f,(\sigma,M)} = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)S(G_i)$ называется интегральной суммой для функции f, соответствующей разбиению σ и заданному выбору точек M_i. ($S(G_i)$ - площадь сегмента G_i)

Определение. Кратным интегралом функции f на множестве G называется число I, т.ч. $I = \int\limits_G f(x,y)dxdy = \lim\limits_{|\sigma|\to 0} S_{f,(\sigma,M)}$.
Обозначение: $I = \iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_G f(M)dS$

Билет 29. Докажите, что интеграл от любой функции по множеству с нулевой жордановой мерой равен нулю. Докажите, что если ФМП интегрируема на множестве, то она ограничена на этом множестве

Утверждение. Если множество G имеет меру нуль по Жордану, то для любой функции f, определенной на G, кратный интеграл $\int\limits_G f(M)dS$ существует и равен 0.
Доказательство.
Так как мера Жордана равна нулю, то для любого сегмента этого множества мера Жордана тоже равна нулю. Запишем интегральную суммы для функции f и разбиения σ(M_i выбранные точки при разбиении, S_i- площадь G_i сегмента):
Сумма: $\sum\limits_{k=1}^{N} f(M_i)\Delta S(G_i) = 0$ Равенство верно для любого разбиения σ и любой функции f, определённой на множестве G. Значит, предел $\lim\limits_{d_r\to 0} \sum\limits_{k=1}^{N} f(M_i)\Delta Si = 0$ и $I = \int\limits_G f(M)dS$ существует и равен 0. ◄

Теорема. Об ограниченности интегрируемой ФМП на множестве.
Если функция интегрируема на множестве G, то она на нем ограничена.
Доказательство.
Интеграл $I = \lim\limits_{\Delta\to 0} I(M_i, G_i)$. Пусть функция неограничена в области G, тогда она неограничена в какой-то области G_j.
$I(M_i, G_i) = \sum\limits_{i} f(M_i)\Delta S_i = f(M_j)\Delta S_j + \sum\limits_{i!=j} f(M_i)\Delta S_i$
ΔS_j - константа, а $f(M_j)$ можно делать сколь угодно большим, значит не будет существовать предела $I(M_i, G_i)$, что означает, что функция f неинтегрируема на G. ◄

Билет 30. Определение верхней и нижней сумм Дарбу. Сформулируйте критерий Дарбу интегрируемости ФМП на измеримом плоском множестве.

Определение. Пусть G - замкнутая измеримая область, такая что $G = \bigcup\limits_i G_i$, где G_i - также замкнутая область. $m_i = \inf\limits_{G_i} f(x,y)$. $M_i = \sup\limits_{G_i} f(x,y)$. Тогда нижняя сумма Дарбу - это $s = \sum\limits_i m_i \cdot \Delta S_i(G_i)$, а верхняя сумма Дарбу - это $S = \sum\limits_i M_i \cdot \Delta S_i(G_i)$, где $S_i(G_i)$ - площадь области G_i

Теорема. Критерий Дарбу интегрируемости Функции Многих Переменных на измеримом множестве. Для того, чтобы ФМП была интегрируема на измеримом множестве по Риману необходимо и достаточно, чтобы её Верхний и Нижний интеграл Дарбу совпадали ($\overline{I_f} = \underline{I_f}$).

Верхний интеграл Дарбу = $\inf\limits_{\tau} \overline{S_{f,\tau}} =: \overline{I_f}$
Нижний интеграл Дарбу = $\sup\limits_{\tau} \underline{S_{f,\tau}} =: \underline{I_f}$

Билет 31. Сформулируйте ключевые идеи дкоазательства критерия Дарбу.

Теорема. Критерий Дарбу интегрируемости Функции Многих Переменных на измеримом множестве. Для того, чтобы ФМП была интегрируема на измеримом множестве по Риману необходимо и достаточно, чтобы её Верхний и Нижний интеграл Дарбу совпадали ($\overline{I_f} = \underline{I_f}$).

Доказательство.
=> f - интегрируема, следовательно существует предел $\lim\limits_{|\tau \to 0|} S_{f,(\tau,c)}$
Идея: возьмем в качестве $c_i \in A_i$ такие точки, где достигается $\sup\limits_{x\in A_i} f(x)$, тогда интегральная сумма превратится в Верхнюю интегральную сумму Дарбу. Получается, при таком выборе точек, предел верхних интегральных сумм Дарбу будет совпадать с нашим интегралом (Верхний интеграл Дарбу будет совпадать с интегралом): $S_{f,(\tau,c)} = \overline{S_{f,\tau}}$.
Раз уж $\exists \lim\limits_{|\tau|\to 0} S_{f,(\tau,c)}$, то он же равен $\lim\limits_{|\tau|\to 0} \overline{S_{f,\tau}}$.

По лемме(#) ($\lim\limits_{|\tau|\to 0} \overline{S_{f,\tau}} = \inf\limits_{\tau} \overline{S_{f,\tau}}$).

По аналогии взяв точки, где достигается $\inf\limits_{x\in A_i} f(x)$, получаем:

$$\overline{I_f} = \inf_{\tau} \overline{S_{f,\tau}} = \lim_{|\tau|\to 0} S_{f,(\tau,c)} = \sup_{\tau} \underline{S_{f,\tau}} =: \underline{I_f}$$

<= Дано: $\overline{I_f} = \underline{I_f}$

Лемма: $\forall\,\tau,\sigma$ разбиений A имеем $\underline{S_{f,\tau}} \leq \overline{S_{f,\tau}}$
Доказательство. Утверждение верно, если $\tau = \sigma$ (так как $\inf \leq \sup$).◄

В общем случае выберем общее размельчение ρ, т.е. такое что $\rho \prec \tau$ и $\rho \prec \sigma$. ρ состоит из A_{ii}, где A_i - элемент σ, B_i - элемент τ.
Утверждение. Если $\rho \prec \sigma$, то $\overline{S_{f,\rho}} \leq \overline{S_{f,\sigma}}$ и если $\rho \prec \tau$, то $\underline{S_{f,\rho}} \geq \underline{S_{f,\tau}}$ (как в случае функции от 1 переменной)
Получаем $\underline{S_{f,\tau}} \leq \underline{S_{f,\rho}} \leq \overline{S_{f,\rho}} \leq \overline{S_{f,\sigma}}$
Значит $\exists\, I$, т.ч. $\forall\,\sigma,\tau : \underline{S_{f,\tau}} \leq I \leq \overline{S_{f,\sigma}}$
Нам дано $\sup\limits_{\tau} \underline{S_{f,\tau}} = \inf\limits_{\sigma} \overline{S_{f,\tau}}$, они же равны I.
Кроме того $\underline{S_{f,\tau}} \leq S_{f,(\tau,c)} \leq \overline{S_{f,\tau}}$, сл-но при $|\tau| \to 0$ т.к. левая и правая суммы стремятся к I, то и $S_{f,(\tau,c)} \to I$, сл-но функция интегрируема. ◄

Билет 32. Докажите, что функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нём.

Определение. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ непрерывна на множестве D, если $\forall x \in D$ f непрерывна в точке x (т.е. непрерывна в каждой точке множества); то же самое в кванторах:

$$\forall x \in D\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y \in D :\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Определение. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на множестве D, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in D :\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Замечание. Равномерная непрерывность влечёт непрерывность, но обратное не выполнено.
Пример. Функция $f(x) = x$ на множестве $\mathbb{R}$ равномерно непрерывна.
Доказательство. Заметим, что $|f(x) - f(y)| = |x - y|$, поэтому достаточно выбрать $\delta < \varepsilon$. ◄
Пример. Функция $f(x) = x^2$ на множестве $\mathbb{R}$ не является равномерно непрерывной (хотя и непрерывна), т.к. $|f(x) - f(y)| = |x - y| \cdot |x + y|$. Говоря без строгости: модуль разности может быть сколь угодно большим из-за множителя $|x + y|$, даже если выбирать сколь угодно близкие x и y такие, что $|x - y| < \delta$.
Доказательство. Запишем отрицание равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x, y \in D :\ |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon = 1,\ x = \dfrac{1}{\delta},\ y = \dfrac{1}{\delta} + \dfrac{\delta}{2}$. Тогда $|x - y| = \left|\dfrac{1}{\delta} - \dfrac{1}{\delta} - \dfrac{\delta}{2}\right| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$,
$|f(x) - f(y)| = \left|\left(\dfrac{1}{\delta}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{\delta} + \dfrac{\delta}{2}\right)^2\right| = 1 + \dfrac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon$ ◄
Определение. Подмножество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется компактом, если K замкнуто и ограничено.
Пример.

1. Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ замкнут и ограничен, т.е. компакт;

2. Полуинтервал $[a, b) \subset \mathbb{R}$ не замкнут и ограничен, т.е. не компакт;

3. Область $\{x^2 + y^2 \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^2$ замкнута и ограничена, т.е. компакт.

4. Область $\{x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ не замкнута и ограничена, т.е. не компакт.

Теорема. О функции, непрерывной на компакте (Кантор).
Если функция f непрерывна на компакте K, то f равномерно непрерывна на K.
Доказательство. Пусть не так, т.е. функция f непрерывна на K, но не равномерно непрерывна. Запишем отрицание равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in K:\ |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$$

Пусть $\delta = \dfrac{1}{n}$, тогда найдутся такие $x_n, y_n \in K$, что $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$ и $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$.
Из того, что $x_n \in K$ и K - компакт: существует подпоследовательность x_{n_k}, которая сходится к некоторому $x_0 \in K$.
Из того, что $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \dfrac{1}{n_k}$: выполнена сходимость $y_{n_k} \to x_0$ (т.к. $\dfrac{1}{n_k} \to 0$).
Из непрерывности: $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ и $f(y_{n_k}) \to f(x_0)$, но тогда $0 < \varepsilon \leqslant |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0$ - противоречие. ◄

Билет 33. Докажите, что функция, непрерывная на компакте, интегрируема на нем.

Теорема. Пусть G – компакт. $f(x, y) \in C(G) \Rightarrow \exists \iint\limits_G f(x, y)dxdy$.
Доказательство. $f(x, y) \in C(G) \Rightarrow f(x, y)$ равномерно непрерывна на G, иными словами

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\colon\ \forall\, M'(x', y'), M''(x'', y'')\colon \rho(M', M'') < \delta \Rightarrow |f(M') - f(M'')| < \varepsilon$$

Теперь рассмотрим такое разбиение $T(G)$, что $\Delta = \max\limits_i d_i < \delta$, где $d_i = \sup\limits_{M_1, M_2 \in G_i} \rho(M_1, M_2)$ – диаметр соответствующей области G_i.
Пусть $M_1, M_2 \in G_i$. Тогда в силу того, что максимальный из диаметров меньше δ, имеем:

$$\rho(M_1, M_2) \leq d_i \leq \Delta < \delta$$

$\Rightarrow |f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$ (из равномерной непрерывности).
$\Rightarrow M_i - m_i$, где $M_i = \sup\limits_{G_i} f(M)$, $m_i = \inf\limits_{G_i} f(M)$ – это следует из того, что мы можем подобрать M_1 и M_2 сколь угодно близкие к супремуму и инфимуму.
Для верхней (S) и нижней (s) сумм Дарбу и $\Delta S_i = S(G_i)$:

$$S - s = \sum_i M_i \Delta S_i - \sum_i m_i \Delta S_i = \sum_i (M_i - m_i)\Delta S_i < \sum_i \varepsilon \Delta S_i = \varepsilon \sum_i \Delta S_i = \varepsilon S = S(G)$$

Заменив $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{S}$, получим искомое: $S - s < \varepsilon'$. ◄

Билет 34. Свойства кратных интегралов: аддитивность, линейность, интеграл от модуля, монотонность.

Аддитивность. Пусть G квадрируема и $G = G_1 \cup G_2$, причём мера Жордана $S(G_1 \cap G_2) = 0$. Пусть также $f(x, y)$ интегрируема по Риману на G. Тогда $f(x, y)$ интегрируема по Риману на G_1 и $f(x, y)$ интегрируема по Риману на G_2, причём:

$$\iint\limits_{G} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{G_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)dxdy$$

Линейность. Пусть f, g интегрируемы по Риману на G. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ линейная комбинация $\alpha f(x, y) \pm \beta g(x, y)$ интегрируема по Риману на G, причём:

$$\iint\limits_{G} (\alpha f(x,y) \pm \beta g(x,y))dxdy = \alpha \iint\limits_{G} f(x,y)dxdy + \beta \iint\limits_{G} g(x,y)dxdy$$

Монотонность. Пусть f, g интегрируемы по Риману на G и $\forall (x, y) \in G \Rightarrow f(x, y) \leqslant g(x, y)$. Тогда:

$$\iint\limits_{G} f(x,y)dxdy \leqslant \iint\limits_{G} g(x,y)dxdy$$

Интегрируемость модуля. Пусть $f(x, y)$ интегрируема по Риману на G. Тогда модуль $|f(x, y)|$ тоже интегрируем по Риману на G, причём:

$$\left| \iint\limits_{G} f(x,y)dxdy \right| \leqslant \iint\limits_{G} |f(x,y)|\, dxdy$$

Замечание. Обратное неверно: из интегрируемости по Риману модуля $|f(x, y)|$ не следует интегрируемость по Риману $f(x, y)$.

Билет 35. Теорема о среднем для кратного интеграла.

Теорема. 1) Если f интегрируема на $A \subseteq R^2$ и если $\forall x \in A$ $m \leq f(x,y) \leq M$, то $m \cdot S(A) \leq \iint\limits_A f(x,y)dxdy \leq M \cdot S(A)$

2) Если f - непрерывна, а мн-во A связно, то $\exists (x_0.y_0) \in A : f(x_0, y_0) = \frac{\iint\limits_A f(x,y)dxdy}{S(A)}$

Доказательство.

1) Просто навесить интеграл $\iint\limits_A$ на данное неравенство.

2) $A \subseteq R^2$ называется связным, если $\forall (x_1,y_1), (x_2, y_2) \in A$ существует непрерывная кривая $x = \phi(T), y = \psi(t)$, $t \in [0; 1]$, т.ч. $(\phi(0),\psi(0)) = (x_1,y_1)$, $(\phi(1),\psi(1)) = (x_2,y_2)$.

Пусть $R := \frac{\iint\limits_A f(x,y)dxdy}{S(A)}$ - среднее значение функции на множестве A.

Пусть $m = \min\limits_A f$ (достигается в точке $(x_1,y_1) \in A$), $M = \max\limits_A f$ (достигается в точке $(x_2, y_2) \in A$). Из пункта 1: $m \le R \le M$.
Т.к. A - связное, то существует непрерывная кривая $(\phi(t), \psi(t))$, т.ч. $(\phi(0),\psi(0)) = (x_1,y_1)$, $(\phi(1),\psi(1)) = (x_2,y_2)$.
рассмотрим функцию от переменной t: $g(t) = f(\phi(t),\psi(t))$. Она непрерывная на отрезке [0;1]. $g(0) = m, g(1) = M$. Значит $\exists\, c \in [0; 1] : f(\phi(c), \psi(c)) = g(c) = R$ (по теореме о промежуточном значении).◄

Билет 36. Теорема о сведении двойного интеграла к повторному (доказательство для прямоугольной области).

Теорема. Теорема о сведении двойного интеграла к повторному (доказательство для прямоугольной области).
Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема на прямоугольнике $G = [a; b] \times [c; d]$, и пусть $\forall x \in [a, b] \quad \exists\, I(x) = \int\limits_c^d f(x, y)dy$.
Тогда существует повторный интеграл
$\exists \int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)dy$
И справедливо равенство
$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)dy = \iint\limits_G f(x, y)dxdy$
Доказательство.
Произведем разбиение $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ и $c = y_0 < y_1 < ... < y_p = d$.
Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$
$G_{kl} = [x_{k-1}; x_k] \times [y_{l-1}; y_l]$
Т.к. f интегрируема на G, то:
Обозначим $M_{kl} = \sup\limits_{G_{kl}} f(x,y), m_{kl} = \inf\limits_{G_{kl}} f(x,y)$. Тогда всюду на прямоугольнике G_{kl}:
$m_{kl} \le f(x,y) \le M_{kl}$
Проинтегрируем неравество $m_{kl} \le f(x,y) \le M_{kl}$ по y в пределах от y_{l-1} до y_l. Получим :
$m_{kl}\Delta y_l \le \int\limits_{y_{l-1}}^{y_l} f(x,y)dy \le M_{kl}\Delta y_l$
Умножим предыдущее неравенство на Δx_k, и просуммируем полученные неравенства сначала по всем l от 1 до p, а затем по всем k от 1 до n. В качестве точки на k-ом отрезке разбиения по x выберем некоторое ε_k Получим:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} m_{kl}\Delta y_l \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \sum_{l=1}^{p} \int\limits_{y_{l-1}}^{y_l} f(\varepsilon_k,y)dx \le \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} M_{kl}\Delta y_l \Delta x_k.$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} m_{kl}\Delta y_l \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} I(\varepsilon_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} M_{kl}\Delta y_l \Delta x_k.$$

Устремим диаметр разбиения к 0. При этом левая и правая часть стремятся к двойному интегралу $\iint\limits_G f(x,y)dx,dy$. Следовательно по лемме о двух милиционерах

$$\lim_{d(G)\to 0} \sum_{k=1}^{n} I(\varepsilon_k)\Delta x_k = \iint\limits_G f(x,y)dx,dy$$

Мы рассматриваем интегральную сумму, поэтому, с другой стороны:

$$\lim_{d(G)\to 0} \sum_{k=1}^{n} I(\varepsilon_k)\Delta x_k = \int\limits_a^b I(x)dx$$

◀

Билет 37. Теорема о сведении двойного интеграла к повторному для произвольной области.

Теорема. Теорема Лебега. Если A - измеримый компакт (есть площадь) и если множество точек разрыва функции f (на А) имеет меру Жордана 0 и f ограничена, то f интегрируема на А.

Теорема. Теорема о сведении двойного интеграла к повторному для произвольной области Если f непрерывна на A, то для области $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}$ имеем $\iint\limits_G f(x,y)dx\ dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$

Доказательство.
Заключаем фигуру в прямоугольник [a;b]x[c;d], где $c \leq \inf \varphi(x), d \geq \sup \psi(x)$ и определяем функцию g на прямоугольнике. g на точках из данной области равна f, а вне данной области равна 0. Получаем, что функция g может рваться только в точках на функциях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а это прямые => имеют меру Жордана 0 => (по теореме Лебега) g интегрируема на данном прямоугольнике => применяем теорему о сведении двойного интеграла к повторному на прямоугольной области к функции g. ◀