Inversas Generalizadas

Departamento de Matemáticas, CSI/ITESM

15 de abril de 2009

Índice

11.1. Inversas generalizadas

Una *matriz inversa generalizada* de una matriz $\mathbf{A}$ $m \times n$ es una matriz $n \times m$ $\mathbf{G}$ que cumple:

$$\boxed{\mathbf{AGA} = \mathbf{A}} \tag{1}$$

Ejemplo 1
Prueba que para la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

dos inversas generalizadas son:

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} -42 & -1 \\ 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución
Basta realizar los productos:

$$\mathbf{AGA}$$

$$\mathbf{AG}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Por tanto, $\mathbf{G}_1$ sí es inversa generalizada de $\mathbf{A}$ Por otro lado,

$$\mathbf{AG}_2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -42 & -1 \\ 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Por tanto, $\mathbf{G}_2$ sí es inversa generalizada de $\mathbf{A}_\diamond$

Ejercicio 1

Pruebe que la inversa de Moore-Penrose es una inversa generalizada de $\mathbf{A}$.
Sugerencia
Sustituya $\mathbf{A} = \mathbf{BF}$ y

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}^T \left(\mathbf{B}^T \mathbf{BFF}^T\right)^{-1} \mathbf{B}^T$$

en $\mathbf{A\,G\,A}$.

Ejercicio 2

Suponga que $\mathbf{G}$ $(n \times m)$ es una inversa generalizada de $\mathbf{A}$ $(m \times n)$, entonces muestre que lo es también

$$\mathbf{G}^* = \mathbf{GAG} + (\mathbf{I_{n\times n}} - \mathbf{GA})\mathbf{T} + \mathbf{S}(\mathbf{I_{m\times m}} - \mathbf{AG})$$

Para cualquiera que sean las matrices $\mathbf{T}$ y $\mathbf{S}$ de dimensiones adecuadas.
Sugerencia
Calcule $\mathbf{AG}^*\mathbf{A}$ desarrollando los productos.

Teorema 11.1

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada que posee inversa, entonces $\mathbf{A}^{-1}$ es una inversa generalizada para $\mathbf{A}$.

Demostración
Se prueba directamente que $\mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1}$ cumple $\mathbf{A\,G\,A} = \mathbf{A}$:

$$\mathbf{AA}^{-1}\mathbf{A} = (\mathbf{AA}^{-1})\mathbf{A} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}_\diamond$$

11.2. Uso de la inversa generalizada

El siguiente resultado indica cómo se relaciona este concepto con la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Teorema 11.2

Sea $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$, $\mathbf{G}$ una matriz $n \times m$ y p un número entero positivo. Entonces $\mathbf{X} = \mathbf{GB}$ es una solución al sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ para cualquier matriz $\mathbf{B}$ $m \times p$ para el cual es sistema es consistente si y sólo si $\mathbf{G}$ es una inversa generalizada de $\mathbf{A}$.

Demostración
Si $\mathbf{G}$ es la inversa generalizada de $\mathbf{A}$ y sea $\mathbf{B}$ una matriz para la cual el sistema se consistente y sea $\mathbf{X}_o$ una solución, vemos que $\mathbf{GB}$ también lo es:

$$\mathbf{A}(\mathbf{GB}) = \mathbf{AG}(\mathbf{AX}_o) = (\mathbf{AGA})\mathbf{X}_o = \mathbf{AX}_o = \mathbf{B}$$

Por otro lado, suponga que $\mathbf{GB}$ es solución al sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ para todo $\mathbf{B}$ para el cual el sistema es consistente. En particular, para cada

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{a}_i$$

de donde se obtiene:

$$\mathbf{A}(\mathbf{Ga}_i) = \mathbf{a}_i$$

y por tanto, $\mathbf{AGA} = \mathbf{A}_\diamond$

Ejercicio 3

Suponga que el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente. Pruebe que si $\mathbf{G}$ es una inversa generalizada de $\mathbf{A}$ entonces $\mathbf{Gb}$ es una solución al sistema.
Sugerencia
Como el sistema es consistente, existe un $\mathbf{x}_0$ tal que

$$\mathbf{Ax}_0 = \mathbf{b}.$$

Premultiplique la relación anterior por $\mathbf{A\,G}$ Utilice la propiedad de la inversa generalizada y de nuevo que $\mathbf{Ax}_0 = \mathbf{b}$.

11.3. Método de cálculo

El siguiente resultado indica cómo se puede calcular una inversa generalizada de una matriz.

Teorema 11.3

Sea $\mathbf{B}$ una matriz $m \times r$ de rango columna completo y $\mathbf{F}$ una matriz $r \times n$ de rango renglón completo. Suponga que $\mathbf{L}$ es una inversa izquierda para $\mathbf{B}$ y que $\mathbf{R}$ es una inversa derecha para $\mathbf{F}$. Entonces, $\mathbf{R\,L}$ es una inversa generalizada para $\mathbf{B\,F}$.

Demostración
Directamente comprobemos que cumple la definición de inversa generalizada:

$$(\mathbf{BF})(\mathbf{RL})(\mathbf{BF}) = \mathbf{B}(\mathbf{FR})(\mathbf{LB})\mathbf{F} = \mathbf{BIIF} = \mathbf{BF}_{\diamond}$$

Notación:
Una inversa generalizada de la matriz $\mathbf{A}$ se simbolizará por:

$$\boxed{\mathbf{A}^{-}} \tag{2}$$

y de acuerdo a la definición:

$$\mathbf{AA}^{-}\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

11.4. Algoritmo para una inversa generalizada

Una algoritmo para calcular la inversa generalizada a una matriz $m \times n$ $\mathbf{A}$ es:

- Encuentre una submatriz de $\mathbf{A}$ cuadrada de rango igual al de $\mathbf{A}$. Denote por $\mathbf{W}$ a esta matriz. Una alternativa para determinarla consiste en:
  - aplicar rref a $\mathbf{A}$ para ubicar las posiciones de las columnas a conservar (las de los pivotes), y
  - aplicar rref a $\mathbf{A}'$ para ubicar las posiciones de los renglones a conservar (las de los pivotes).
- Invierta y transponga $\mathbf{W}$.
- Regrese $(\mathbf{W}^{-1})'$ a $\mathbf{A}$ en las posiciones correspondientes. En los elementos restantes ponga ceros.
- Transponga la matriz resultante.

Ejemplo 2
Determine una inversa generalizada de:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -6 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución
Como

$$\mathbf{A}\rightarrow^{GJ}\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{11}{24} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{A}'\rightarrow^{GJ}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, son renglones independientes el 1 y el 2, y son dos columnas independientes la 1 y la 3. Tales renglones y columnas de $\mathbf{A}$ debemos conservar para formar $\mathbf{W}$:

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix},\ (\mathbf{W}^{-1})'=\begin{bmatrix} -\frac{5}{24} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$\mathbf{G}'=\begin{bmatrix} -\frac{5}{24} & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\mathbf{G}=\begin{bmatrix} -\frac{5}{24} & -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

11.5. Todas las posibles soluciones

Teorema 11.4

Todas las posibles soluciones de un sistema consistente:

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$$

pueden ser generadas de

$$\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{Gb}+(\mathbf{GA}-\mathbf{I})\,\mathbf{z}$$

para una inversa generalizada $\mathbf{G}$ y un vector adecuado $\mathbf{z}$

Demostración
Primeramente veamos que la fórmula genera efectivamente soluciones a $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\left(\mathbf{Gb}+(\mathbf{GA}-\mathbf{I})\,\mathbf{z}\right) \\ &= \mathbf{AGb}+(\mathbf{AGA}-\mathbf{AI})\,\mathbf{z} \\ &= \mathbf{AGb}=\mathbf{b} \end{aligned}$$

Por consiguiente, la fórmula para $\tilde{\mathbf{x}}$ genera soluciones al sistema de ecuaciones. Por otro lado, si $\dot{\mathbf{x}}$ es una solución cualquiera, se toma $\mathbf{z}=-\dot{\mathbf{x}}$ y se sustituye en $\tilde{\mathbf{x}}$:

$$\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{Gb}-(\mathbf{GA}-\mathbf{I})\,\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{G}\left(\mathbf{b}-\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}\right)+\dot{\mathbf{x}}=\dot{\mathbf{x}}_\diamond$$

Teorema 11.5

Todas las soluciones a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ pueden ser generadas de $\mathbf{x} = \mathbf{Gb}$ usando todas las inversas generalizadas $\mathbf{G}$ de $\mathbf{A}$.

Lema 11.6

Para todo vector $\mathbf{z}$ y para todo vector $\mathbf{b}$ no cero existe una matriz $\mathbf{X}$ tal que $\mathbf{z} = \mathbf{Xb}$.

Tomar $X_{ij} = z_i/b_k$ para $j = k$ y cero en otro caso ($b_k \neq 0$).

Demostración

Sea $\tilde{\mathbf{x}}$ una solución a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, por consiguiente, existe una $\mathbf{z}$ tal que:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Gb} + (\mathbf{GA} - \mathbf{I})\,\mathbf{z}.$$

Por el lema anterior, existe $\mathbf{X}$ tal que $\mathbf{z} = -\mathbf{Xb}$ y sustituyendo en la fórmula anterior:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{Gb} + (\mathbf{GA} - \mathbf{I})\,(-\mathbf{Xb}) \\ &= [\mathbf{GAG} + (\mathbf{I} - \mathbf{GA})\mathbf{X} + (-\mathbf{G})(\mathbf{AG} - \mathbf{I})]\,\mathbf{b} = \mathbf{G}^{*}\mathbf{b} \quad \diamond \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Encuentre todas las soluciones al sistema

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 5 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solución

Determinando una inversa generalizada de la matriz de coeficientes tenemos:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 5 & -9 & 8 & 0 & 0 \\ -5 & 21 & -17 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, al sustituir en la fórmula de todas las soluciones

$$\mathbf{x} = \mathbf{Gb} + (\mathbf{GA} - \mathbf{I})\,\mathbf{z}$$

obtenemos:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 5 & -9 & 8 & 0 & 0 \\ -5 & 21 & -17 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 5 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -7/15 \\ 0 & 0 & 0 & 28/15 \\ 0 & 0 & 0 & -9/15 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -6 - 7z_4 \\ 69 + 28z_4 \\ 3 - 9z_4 \\ -15z_4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4

Encuentre todas las soluciones al sistema

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & -1 \\ 9 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ -6 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

11.6. Inversa de Moore-Penrose

Definición

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cualquiera y $\mathbf{A} = \mathbf{BF}$ una factorización donde $\mathbf{B}$ es de rango columna completo y $\mathbf{F}$ es de rango renglón completo. La *inversa de Moore-Penrose* de $\mathbf{A}$ es la matriz:

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{F}^T \left(\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{F}^T\right)^{-1} \mathbf{B}^T} \tag{3}$$

Se puede demostrar que $\mathbf{M}$ es la única matriz que cumple

- $\mathbf{AMA} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{MAM} = \mathbf{M}$
- $\mathbf{AM}$ es simétrica.
- $\mathbf{MA}$ es simétrica.

Ejercicio 4

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cualquiera y $\mathbf{A} = \mathbf{BF}$ una factorización donde $\mathbf{B}$ es de rango columna completo y $\mathbf{F}$ es de rango renglón completo. Pruebe que la inverse a Moore-Penrose de $\mathbf{A}$

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}^T \left(\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{F}^T\right)^{-1} \mathbf{B}^T$$

satisface:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{M}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

Sugerencia

En la expresión $\mathbf{A}\,\mathbf{M}\,\mathbf{A}$ sustituya $\mathbf{A} = \mathbf{BF}$ y la matriz $\mathbf{M}$ propuesta. El punto clave estará en la inversa de $\mathbf{B}^T\mathbf{BFF}^T$. Aquí conviene considerar a esta matriz como

$$\mathbf{B}^T\mathbf{BFF}^T = \left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)\left(\mathbf{FF}^T\right)$$

Note que las matrices $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ y $\mathbf{FF}^T$ son cuadradas de rango renglón y por tanto son invertibles y por tanto:

$$\left(\mathbf{B}^T\mathbf{BFF}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{FF}^T\right)^{-1}\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}$$

Proceda simplificando matrices con sus inversas.

Ejercicio 5

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cualquiera y $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{F}$ una factorización donde $\mathbf{B}$ es de rango columna completo y $\mathbf{F}$ es de rango renglón completo. Pruebe que la inverse a Moore-Penrose de $\mathbf{A}$

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}^T \left(\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{F}^T\right)^{-1} \mathbf{B}^T$$

satisface:

$$\mathbf{M}\,\mathbf{A}\,\mathbf{M} = \mathbf{M}$$

Sugerencia
Vea la sugerencia al problema anterior.

Ejercicio 6

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cualquiera y $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{F}$ una factorización donde $\mathbf{B}$ es de rango columna completo y $\mathbf{F}$ es de rango renglón completo. Pruebe que la inverse a Moore-Penrose de $\mathbf{A}$

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}^T \left(\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{F}^T\right)^{-1} \mathbf{B}^T$$

prueba que la matriz $\mathbf{A}\,\mathbf{M}$ es simétrica.
Sugerencia
Tome su transpuesta y simplifique como se suguiere en problema previo.

Ejercicio 7

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cualquiera y $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{F}$ una factorización donde $\mathbf{B}$ es de rango columna completo y $\mathbf{F}$ es de rango renglón completo. Pruebe que si $\mathbf{M}$ es la inversa a Moore-Penrose de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}^T \left(\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{F}^T\right)^{-1} \mathbf{B}^T$$

Entonces la matriz $\mathbf{M}\,\mathbf{A}$ es simétrica.
Sugerencia
Vea la sugerencia del problema anterior.

Ejemplo 5
Determine la inversa de Moore-Penrose de la matriz $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución:
Al aplicar eliminación gaussiana se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, la factorización $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{F}$ es:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Recuerde que la matriz $\mathbf{F}$ es la matriz reducida que se obtiene de $\mathbf{A}$, eliminando en el resultado los posibles renglones de ceros, mientras que $\mathbf{B}$ es la matriz cuyas columnas son las columnas de $\mathbf{A}$ que tienen las posiciones de los pivotes en $\mathbf{F}$. Por tanto,

$$\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ -12 & 60 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}^T\left(\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{F}^T\right)^{-1}\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{18} & \frac{1}{9} & \frac{-1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{-2}{9} & \frac{-1}{18} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5

Determine la inversa de Moore-Penrose de la matriz $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Sugerencia
Siga el proceso del ejemplo de las notas.

Ejercicio 6

Determine la inversa de Moore-Penrose de la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorema 11.7

Sean $\mathbf{x}_1$,$\mathbf{x}_2$,...,$\mathbf{x}_t$ soluciones a un sistema consistente $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_i \mathbf{x}_i$$

es solución si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1$$

Demostración
Definamos $\tilde{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \mathbf{x}_i$, así:

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\left(\sum_{i=1}^{t} \lambda_i \mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \mathbf{A}\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \mathbf{b} = \left(\sum_{i=1}^{t} \lambda_i\right)\mathbf{b}$$

Por tanto, $\tilde{\mathbf{x}}$ es solución, es decir $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$, si y sólo si (recuerde que $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$)

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1_\diamond$$

Teorema 11.8

Sea $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$ con rango $r_\mathbf{A}$ entonces el sistema consistente: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ tiene $n - r_\mathbf{A} + 1$ soluciones que forman un conjunto linealmente independiente.

Demostración

Hay $k = (n - r_\mathbf{A})$ soluciones linealmente independientes a $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ digamos $\mathbf{z}_1$,$\mathbf{z}_2$,...,$\mathbf{z}_k$. Si $\mathbf{x}_0$ es una solución a $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ defina $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_0 + \mathbf{z}_i$ para $i = 1, \ldots, k$. Si el conjunto de formado por $\mathbf{x}_i$ para $i = 0, 1, \ldots, k$ fuera linealmente dependiente , y debido a que $\mathbf{x}_0$ no puede ser el vector cero pues $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, debería haber un vector $\mathbf{x}_j$ $(j \geq 1)$ que fuera combinación de los anteriores $\mathbf{x}_0, \ldots \mathbf{x}_{j-1}$. Así

$$\mathbf{x}_j = \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i \mathbf{x}_i$$

Por consiguiente y por el lema anterior,

$$\sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i = 1$$

Por lo que la suma anterior queda:

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_0 + \mathbf{z}_j = \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i \left(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}_i\right) = \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i \mathbf{z}_i$$

De donde:

$$\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}_j = \left(\sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i\right) \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i \mathbf{z}_i = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i \mathbf{z}_i$$

Y así cancelando $\mathbf{x}_0$ tenemos:

$$\mathbf{z}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i \mathbf{z}_i$$

lo cual dice que el conjunto $\mathbf{z}_1, \ldots \mathbf{z}_k$ es linealmente dependiente. Lo cual es imposible.$_\diamond$