

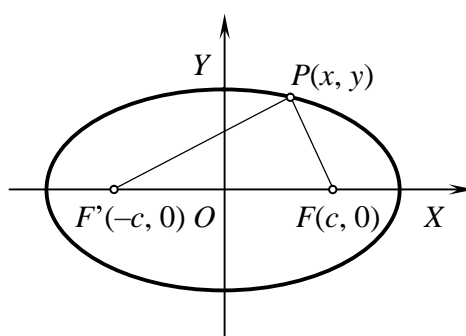


Ellips

5.1. Persamaan Ellips Bentuk Baku

Ellips adalah tempat kedudukan titik-titik sedemikian hingga jumlah jaraknya dari pasangan dua titik tertentu yang berbeda adalah konstan tertentu. Dua titik tertentu di atas disebut titik **fokus** (*foci*).

Untuk menurunkan persamaan kurva ellips, dimisalkan kedua fokus berada pada sumbu- x dan sumbu- y menjadi bisektor tegak lurus segmen yang menghubungkan kedua fokus. Misalkan jarak antara kedua fokus adalah $2c$, sehingga titik fokusnya adalah $F(c, 0)$ dan $F'(-c, 0)$ (perhatikan gambar 5.1).



Gambar 5.1.

Jika $P(x, y)$ adalah sembarang titik yang berada pada ellips, maka menurut definisi akan berlaku

$$PF + PF' = \text{konstan.} \quad (1)$$

Dan apabila dimisalkan konstanta tertentu itu adalah $2a$, maka dengan menggunakan rumus jarak untuk menyatakan PF dan PF' diperoleh:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 4a^2 + 4cx \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= a + \frac{cx}{a} \\ \Leftrightarrow x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= a^2 + 2cx + \frac{c^2 x^2}{a^2} \\ \Leftrightarrow \frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2 + y^2 &= a^2 - c^2 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Segitiga $F'PF$ pada gambar 5.1, dengan titik-titik sudut $(-c, 0)$, $(c, 0)$, dan (x, y) salah satu sisinya mempunyai panjang $2c$. Sedangkan jumlah dua sisi yang lain adalah $2a$. Jadi

$$2a > 2c$$

$$a > c$$

$$a^2 > c^2$$

$$a^2 - c^2 > 0.$$

Karena $a^2 - c^2$ adalah positif, maka bisa diganti dengan bilangan positif lain katakanlah

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad (3)$$

Ini juga berarti bahwa $b < a$.

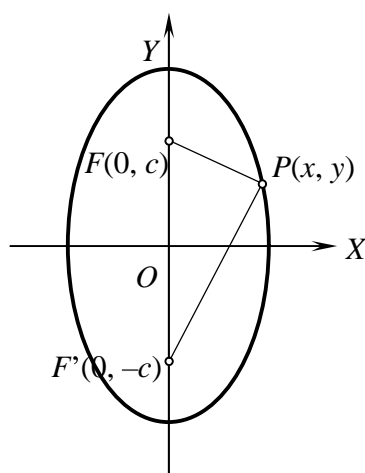
Jika persamaan (3) disubstitusikan ke persamaan (2) maka akan diperoleh persamaan:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

Persamaan (4) di atas disebut *persamaan ellips bentuk baku*.

Jika fokus ellips adalah titik-titik $(0, c)$ dan $(0, -c)$ yang berada di sumbu- y (gambar 5.2) maka persamaan ellips bentuk baku adalah

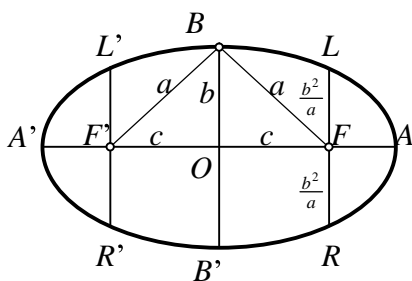
$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$



Gambar 5.2.

Dalam hal ini bilangan yang lebih besar adalah berada di bawah suku y^2 .

Karakteristik utama suatu ellips persamaan (4) ditunjukkan pada gambar 5.3.



Gambar 5.3.

Lebih dahulu kita amati bahwa grafik dari ellips dengan persamaan (4), adalah simetris dengan sumbu- x dan sumbu- y . Selanjutnya grafik memotong sumbu- x di titik $(a, 0)$ dan $(-a, 0)$, dan memotong sumbu- y di titik $(0, b)$ dan $(0, -b)$.

Garis yang melalui kedua fokus dinamakan **sumbu utama** ellips. Untuk ellips dengan persamaan berbentuk (4) sumbu- x menjadi sumbu utama ellips. Titik potong ellips dengan sumbu utamanya disebut **puncak**. Jadi untuk ellips dalam persamaan (4) puncaknya adalah $A(a, 0)$ dan $A'(-a, 0)$. Titik pada sumbu utama yang terletak di tengah-tengah kedua puncak ellips dinamakan **pusat** ellips. Pusat ellips dengan bentuk persamaan (4) adalah berimpit dengan titik asal. Segmen garis yang menghubungkan kedua puncak disebut **sumbu mayor (sumbu panjang)** ellips dengan panjang $2a$ satuan, dan kita katakan bahwa a adalah satuan panjang setengah panjang sumbu mayor. Pada ellips ini segmen garis yang menghubungkan titik potong ellips dengan sumbu- y yaitu titik $(0, b)$ dan $(0, -b)$ disebut **sumbu minor (sumbu pendek)** ellips. Panjang sumbu minor adalah $2b$ satuan, sehingga b adalah satuan panjang setengah sumbu minor. Titik-titik tetap F dan F' terletak pada sumbu mayor dan disebut **fokus**, sebagaimana telah disebutkan pada definisi, adalah berjarak c dari pusat ellips.

Karakteristik dari ellips dengan persamaan (5) secara essensial adalah sama. Pada kenyataannya ellips dengan bentuk persamaan (4) dan (5) adalah identik dalam bentuk dan ukuran, hanya berbeda dalam posisi.

Karena titik B pada ellips, maka jumlah jarak dari kedua fokus adalah $2a$; yaitu $BF + BF' = 2a$. Akan tetapi B berada pada bisektor tegak lurus dari FF' , hal ini berarti berjarak sama dari F dan F' yaitu $BF = BF' = a$. Hal ini memungkinkan kita untuk memberikan interpretasi geometris pada relasi (4). Pada kenyataannya pada gambar 5.3 terlihat bahwa a adalah sisi miring dan b dan c adalah sisi-sisi dari segitiga siku-siku BOF . Hal ini juga memberikan metoda geometrik berikut untuk menentukan letak fokus ellips: *letakkan satu kaki jangka pada salah satu titik puncak sumbu minor, dengan radius sama dengan panjang setengah sumbu mayor, lukislah busur hingga memotong sumbu mayor. Titik potong garis lukis dengan sumbu mayor merupakan fokus ellips.*

Tali busur yang melalui salah satu fokus dan tegak lurus dengan sumbu mayor disebut **latus rektum**. Sedangkan titik potong latus rektum dengan ellips disebut **latera rekta**. Untuk mencari panjang latus rektum diberikan nilai $x = c = \sqrt{a^2 - b^2}$ pada persamaan (4) dan dengan menyelesaikan persamaan untuk y diperoleh $y = \pm b^2/a$. Jadi latera rekta ellips (4) adalah $L(c, b^2/a)$ dan $R(c, -b^2/a)$, sehingga *panjang latus rektum ellips adalah $2b^2/a$* . Jika panjang setengah latus rektum dinotasikan dengan l maka

$$l = \frac{b^2}{a} \quad (6)$$

Sebuah ellips dapat dibuat sketsa grafiknya secara kasar dengan memperhatikan ujung-ujung sumbu mayor dan minor dan ujung latus rektum, dan

dengan menggunakan kenyataan bahwa grafiknya simetrik terhadap kedua sumbu. Konstruksi secara mekanik akan diberikan pada seksi lain.

Contoh 1:

Selidiki dan buat sketsa grafik dari persamaan $9x^2 + 25y^2 = 225$

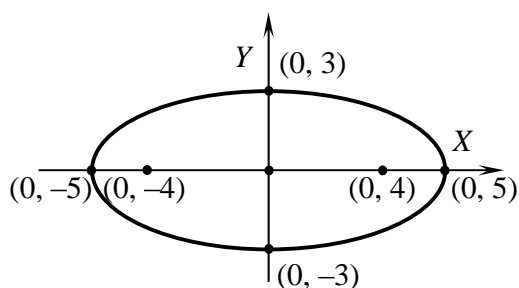
Jawab:

Pertama nyatakan persamaan yang diberikan ke dalam bentuk baku dengan membagi masing-masing ruas dengan 225 dan diperoleh bentuk baku

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Dalam hal ini $a^2 = 25$, $b^2 = 9$, dan $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$, atau $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$. Jadi persamaan di atas adalah ellips yang berpusat di $(0, 0)$, puncak $(\pm 5, 0)$ dan titik fokus $(\pm 4, 0)$. Sumbu mayor sejajar dengan sumbu- x dan panjangnya 10 satuan, dan sumbu minor panjangnya 6 satuan. Sketsa grafik dapat dilihat di gambar 5.4.



Gambar 5.4

Contoh 2:

Tentukan persamaan ellips dengan pusat $(0, 0)$, salah satu puncak $(0, -13)$, dan salah satu titik fokus $(0, 12)$.

Jawab:

Puncak $(0, -13)$ berarti sumbu mayor sejajar dengan sumbu-y dengan $a = 13$, panjang sumbu mayor = 26 dan karena fokus di $(0, 12)$ berarti $c = 12$. panjang sumbu minor dapat dicari dengan rumus

$$b^2 = a^2 - c^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$$

Jadi $b = 5$.

Bentuk baku dari persamaan ellips yang dicari adalah

$$\frac{y^2}{169} + \frac{x^2}{25} = 1$$

Contoh 3:

Suatu kelengkungan berbentuk setengah ellips dengan lebar alas 48 meter dan tinggi 20 meter. Berapa lebar kelengkungan itu pada ketinggian 10 meter dari alas ?

Jawab:

Gambar 5.5 memperlihatkan sketsa lengkungan dan sumbu-sumbu koordinat dapat dipilih sedemikian hingga sumbu- x terletak pada alas dan titik asal adalah titik tengah alas. Maka sumbu utama ellips terletak sepanjang sumbu- x , pusatnya di titik asal, $a = \frac{1}{2} \cdot 48 = 24$, $b = 20$. Persamaan ellips berbentuk

$$\frac{x^2}{576} + \frac{y^2}{400} = 1$$

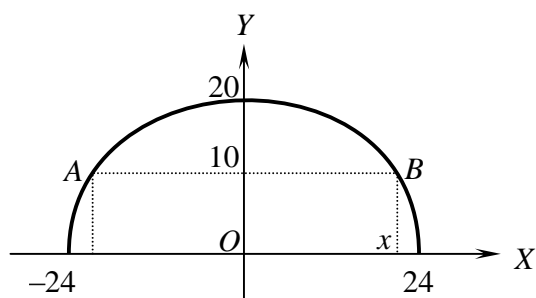
Pada ketinggian 10 meter, berarti untuk nilai $y = 10$ akan diperoleh x yang menyatakan lebar setengah lengkungan pada ketinggian 10 meter. Jadi

$$\frac{x^2}{576} + \frac{10^2}{400} = 1$$

sehingga diperoleh

$$x^2 = 432, x = 12\sqrt{3}$$

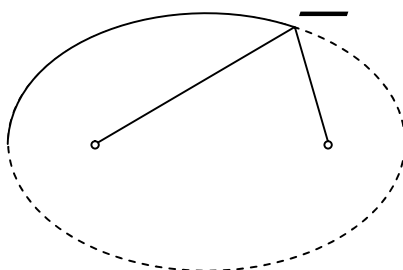
Dengan demikian pada ketinggian 10 meter dari alas, lebar kelengkungan adalah $AB = 24\sqrt{3}$ meter.



Gambar 5.5:

5.2. Konstruksi Mekanik sebuah Ellips

Dari definisi, sebuah ellips dapat dikonstruksi dengan mengikat ujung tali sepanjang $2a$ pada dua titik sejauh $2c$. Kemudian tarik dan tegangkan tali dengan pensil seperti terlihat pada gambar 5.6 berikut. Gerakkan pensil dengan selalu menjaga agar tali tetap tegang. Hasil lukisan pensil itu akan merupakan sebuah ellips.



Gambar 5.6:

Latihan 5 A

1. Tunjukkan bahwa jika setiap ordinat dari lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$ diperpendek dalam rasio b/a , maka kurva yang dihasilkan adalah berupa ellips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Pada soal 2 – 15 tentukan pusat, titik-titik fokus, puncak, panjang sumbu mayor, panjang sumbu minor dan laktus rektum dari persamaan ellips yang diberikan. Buat sketsa grafiknya.

2. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$

3. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$

4. $\frac{4x^2}{3} + \frac{16y^2}{25} = 1$

5. $\frac{x^2}{81} + \frac{9y^2}{16} = 1$

6. $4x^2 + 9y^2 = 36$

7. $3x^2 + 2y^2 = 6$

8. $5x^2 + 4y^2 = 16$

9. $16x^2 + y^2 = 16$

10. $4x^2 + 25y^2 = 100$

11. $25x^2 + 16y^2 = 400$

12. $144x^2 + 169y^2 = 24336$

13. $1681x^2 + 81y^2 - 136161 = 0$

14. $y^2 = 50 - 2x^2$

15. $x^2 = 49(1 - y^2)$

Dari data-data berikut tentukan persamaan ellips yang memenuhi:

16. Titik puncak di $(\pm 6, 0)$, dan sumbu minor sepanjang 10.
17. Titik puncak di $(0, \pm 8)$, titik-titik ujung sumbu minor di $(\pm 3, 0)$.
18. Titik puncak di $(\pm 5, 0)$, satu fokus di $(3, 0)$.
19. Satu puncak di $(0, 13)$, fokus terdekat dengan puncak ini $(0, 5)$, pusat di titik asal.
20. Titik puncak di $(\pm 4, 0)$, panjang latus rektum sama dengan 2.
21. Titik ujung sumbu minor di $(\pm 4, 0)$, panjang latus rektum sama dengan 4.
22. Fokus di titik $(\pm 4, 0)$, panjang latus rektum sama dengan 12.
23. Titik-titik latera rekta pada $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, $(\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$, $(-\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, $(-\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$, dan sumbu mayor sepanjang sumbu- x .
24. Dengan menggunakan definisi dari sebuah ellips, tentukan persamaan ellips yang mempunyai fokus di titik $(4, 4)$ dan $(-4, -4)$ dan panjang sumbu mayor 16.
25. Kurva suatu jembatan batu berbentuk semi ellips. Jika panjang rentangan 40 kaki dan tinggi maksimum 10 kaki. Tentukan tinggi kurva pada salah satu ujung interval 5 kaki dari titik tengah.

5.3. Persamaan Ellips Bentuk Umum

Ellips yang mempunyai sumbu simetri sejajar dengan sumbu koordinat dan berpusat pada (h, k) , persamaannya dapat diperoleh dengan mentranslasikan sumbu koordinat sedemikian hingga sumbu koordinat berimpit pada pusat ellips. Sehingga persamaan ellips akan berbentuk

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

atau

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

bergantung apakah sumbu mayor horisontal atau vertikan.

Kedua persamaan (1) dan (2) di atas dapat direduksi ke dalam bentuk

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (3)$$

yang mana $AC > 0$ (yaitu A dan C keduanya positif atau keduanya negatif) dan $A \neq C$.

(Jika $A = C$, maka akan merupakan lingkaran). Persamaan (3) disebut **persamaan ellips bentuk umum**.

Sebaliknya dapat ditunjukkan bahwa sembarang persamaan berbentuk (3) dapat direduksi menjadi bentuk (1) atau bentuk (2), atau menjadi persamaan yang mirip, tetapi pada ruas kanan adalah bilangan 0 atau -1 . Dalam hal ini persamaan (3) akan menggambarkan tiga kategori ellips, yaitu **ellips real** dengan sumbu sejajar

sumbu koordinat, atau **ellips titik** yaitu apabila ruas kanan bernilai 0, atau **ellips imajiner** yaitu apabila ruas kanan bernilai -1 .

Contoh 1:

Gambarlah ellips yang mempunyai persamaan

$$3x^2 + 5y^2 - 6x + 20y + 8 = 0$$

Jawab:

Untuk menggambar ellips di atas persamaan harus diubah ke dalam bentuk baku, yaitu dengan melakukan manipulasi bentuk kuadrat sempurna sebagai berikut:

$$3x^2 + 5y^2 - 6x + 20y + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 5y^2 + 20y = -8$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - 2x) + 5(y^2 + 4y) = -8$$

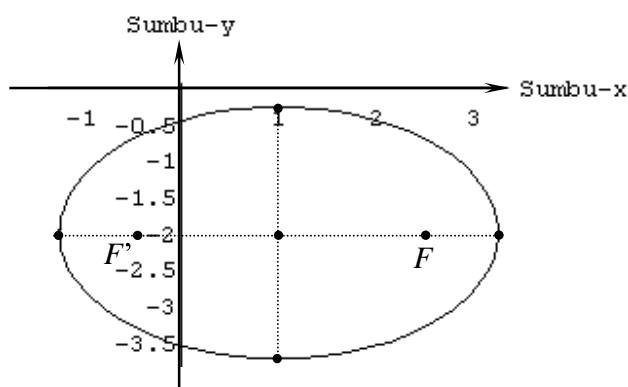
$$\Leftrightarrow 3(x^2 - 2x + 1) + 5(y^2 + 4y + 4) = -8 + 3 + 20$$

$$\Leftrightarrow 3(x - 1)^2 + 5(y + 2)^2 = 15$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{5} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$$

Dari persamaan terakhir dapatlah disimpulkan bahwa ellips yang terjadi berpusat di $(1, -2)$, $a = \sqrt{5}$ sehingga panjang sumbu mayor adalah $2\sqrt{5}$ sejajar dengan sumbu- x . Diketahui pula $b = \sqrt{3}$, sedangkan fokusnya diperoleh dengan menghitung $c^2 = a^2 - b^2 = 5 - 3 = 2$, sehingga $c = \sqrt{2}$ dan koordinat titik fokus adalah $(1 \pm \sqrt{2}, -2)$. Titik puncak yaitu titik potong dengan sumbu mayor di $(1 \pm \sqrt{5}, -2)$, dan titik potong dengan sumbu minor di titik $(1, -2 \pm \sqrt{3})$.

Sketsa gambar dapat dilihat pada gambar 5.7. berikut.



Gambar 5.7:

Latihan 5 B

Pada soal 1 – 10 tentukan persamaan ellips jika diberikan data-data berikut. Buat sketsa grafiknya.

1. Sumbu mayor sama dengan 12 dan sejajar sumbu- x , sumbu minor sama dengan 10, pusat di $(2, -1)$.
2. Titik-titik puncak di $(8, 2)$ dan $(-2, 2)$, dan satu fokus di $(6, 2)$.
3. Ujung sumbu minor di $(0, 5)$ dan $(0, -7)$, ujung salah satu latus rektum di $(6\sqrt{3}, 2)$ dan $(6\sqrt{3}, -4)$.
4. Ujung sumbu minor di $(-2, 8)$ dan $(-2, -16)$ dan salah satu fokus di $(3, -4)$.
5. Titik-titik latera rekta $(9, 2)$, $(9, -6)$, $(-7, 2)$, dan $(-7, -6)$.
6. Fokus di $(5 + 4\sqrt{3}, 1)$ dan $(5 - 4\sqrt{3}, 1)$, dan latus rektum sepanjang 4.
7. Pusat $(3, -2)$; salah satu puncak $(8, -2)$; salah satu fokus $(-1, -2)$
8. Fokus di $(2, 3)$ dan $(2, -7)$, dan panjang sumbu minor adalah dua-pertiga panjang sumbu mayor.
9. Puncaknya di $(2, 0)$ dan $(-2, 0)$ dan melalui titik $(-1, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.
10. Puncaknya di $(0, 5)$ dan $(0, -5)$ dan melalui titik $(2, -\frac{5}{3}\sqrt{5})$.

Dalam soal no 11 – 20 ubahlah ke dalam bentuk baku, kemudian tentukan pusat, puncak, fokus, panjang sumbu mayor dan minor, dan latera rekta. Buat sketsa grafiknya.

11. $9x^2 + 16y^2 + 18x - 64y - 71 = 0$

12. $25x^2 + 4y^2 + 100x - 4y + 101 = 0$

13. $4x^2 + y^2 = y$

14. $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y - 3 = 0$

15. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$

16. $2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y + 2 = 0$.

17. $5x^2 + 3y^2 - 3y - 12 = 0$

18. $3x^2 + 4y^2 - 30x + 16y + 100 = 0$

19. $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 20 = 0$

20. $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 5 = 0$

21. Sebuah titik bergerak sedemikian hingga jaraknya dari $(6, 0)$ adalah setengah jaraknya terhadap sumbu- y . Tunjukkan bahwa tempat kedudukan titik-titik itu berupa ellips.

22. Bumi mengitari matahari dengan lintasan berbentuk ellips dengan matahari pada salah satu fokusnya. Jarak matahari terhadap bumi yang terdekat adalah $9,3 \times 10^6$ mil, sedangkan jarak yang paling jauh adalah $9,6 \times 10^6$ mil. Tentukan persamaan lintasan bumi tersebut jika matahari terlatak pada salah satu titik fokusnya dan menganggap titik pusat adalah $(0, 0)$.
23. Sebuah satelit mengitari bumi dengan lintasan berbentuk ellips. Jarak terdekat satelit terhadap bumi adalah 119 mil dan jarak terjauh 881 mil. Tentukan persamaan baku ellips tersebut jika pusat ellips adalah titik $(-2, 1)$.
24. Langit-langit suatu gang berbentuk setengah ellips, lebarnya 10 m, dan tingginya 9 m di pusatnya dan tinggi 6 m pada sisi dinding. Tentukan tinggi langit-langit pada jarak 2 m dari dinding.

5.4. Persamaan Garis Singgung pada Ellips.

Seperti halnya pada lingkaran, terdapat dua macam garis singgung yang akan dibicarakan, yaitu garis singgung yang melalui salah satu titik pada ellips dan garis singgung yang mempunyai kemiringan tertentu.

5.4.1. Persamaan Garis Singgung yang melalui titik di Ellips.

Misalkan $P(x_1, y_1)$ titik pada ellips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

maka titik P akan memenuhi persamaan (1) yaitu

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

Persamaan garis singgung ellips di titik P merupakan anggota keluarga garis yang melalui $P(x_1, y_1)$ dan berbentuk:

$$y = m(x - x_1) + y_1 \quad (3)$$

Jika persamaan (3) disubstitusikan ke persamaan (1) maka akan diperoleh persamaan kuadrat dalam x yaitu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(m(x - x_1) + y_1)^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2)x^2 - 2a^2(m^2x_1 - my_1)x + a^2(m^2x_1^2 + y_1^2 - 2mx_1y_1 - b^2) = 0 \quad (4)$$

Karena garis (3) menyinggung kurva (1) maka dari pengetahuan aljabar haruslah persamaan (4) mempunyai akar yang sama. Hal ini berarti nilai diskriminan persamaan kuadrat di atas bernilai nol, yaitu

$$[2a^2(m^2x_1 - my_1)]^2 - 4(a^2 + b^2)a^2(m^2x_1^2 + y_1^2 - 2mx_1y_1 - b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - x_1^2)m^2 + 2x_1y_1m + (b^2 - y_1^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2(1 - \frac{x_1^2}{a^2})m^2 + 2x_1y_1m + b^2(1 - \frac{y_1^2}{b^2}) = 0$$

Substitusi persamaan (2) ke persamaan terakhir akan memberikan persamaan kuadrat dalam m yaitu

$$a^2 \frac{y_1^2}{b^2} m^2 + 2x_1y_1m + b^2 \frac{x_1^2}{a^2} = 0 \quad (5)$$

Dari persamaan (5) diperoleh selesaian untuk m yaitu

$$m = -\frac{x_1}{a^2} \frac{b^2}{y_1} \quad (6)$$

Jika persamaan (6) disubstitusikan ke persamaan (3) diperoleh persamaan garis singgung ellips di titik P yaitu

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \quad (7)$$

Dengan persamaan (2) persamaan garis singgung direduksi menjadi

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1 \quad (8)$$

Apabila titik $P(x_1, y_1)$ tidak terletak pada lingkaran, maka persamaan (8) disebut **persamaan polar** terhadap titik P dan titik P disebut **titik polar**.

Jika ellips dalam bentuk baku yang berpusat di (h, k) , yaitu

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (9)$$

maka persamaan garis singgung ellips dengan persamaan berbentuk (9) di titik $P(x_1, y_1)$ yang terletak di ellips tersebut dapat diperoleh dari persamaan (8) dengan mentranslasikan sumbu koordinat sedemikian hingga pusat sumbu $O(0, 0)$ bergeser ke titik $O'(-h, -k)$.

Misalkan sumbu baru hasil translasi adalah X' dan Y' , dan koordinat baru adalah x' dan y' , maka hubungan koordinat baru dan koordinat lama adalah:

$$x = x' - h \text{ dan } y = y' - k \quad (10)$$

Koordinat titik $P(x_1, y_1)$ juga mengalami perubahan terhadap sistem koordinat baru yaitu

$$x_1 = x'_1 - h \text{ dan } y_1 = y'_1 - k \quad (11)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (10) dan (11) ke persamaan (8) akan diperoleh

$$\frac{(x'_1 - h)(x'_1 - h)}{a^2} + \frac{(y'_1 - k)(y'_1 - k)}{b^2} = 1 \quad (12)$$

Jika tanda aksentik dihilangkan maka diperoleh persamaan garis singgung ellips (9) di titik $P(x_1, y_1)$ yang terletak pada ellips tersebut adalah

$$\frac{(x_1 - h)(x - h)}{a^2} + \frac{(y_1 - k)(y - k)}{b^2} = 1 \quad (12)$$

Dengan cara yang sama dapat ditentukan persamaan garis singgung ellips dengan persamaan

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1 \quad (13)$$

di titik $P(x_1, y_1)$ yang terletak pada ellips tersebut diberikan oleh persamaan

$$\frac{(y_1 - k)(y - k)}{a^2} + \frac{(x_1 - h)(x - h)}{b^2} = 1 \quad (14)$$

Persamaan (12) jika dijabarkan lebih lanjut akan menghasilkan

$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y - b^2 h(x_1 + x) - a^2 k(y_1 + y) + (b^2 h^2 + a^2 k^2 - a^2 b^2) = 0 \quad (15)$$

Sedangkan penjabaran persamaan (9) dalam bentuk umum adalah

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - 2b^2 hx - 2a^2 ky + (b^2 h^2 + a^2 k^2 - a^2 b^2) = 0 \quad (16)$$

Dengan memperhatikan persamaan (15) dan (16) maka secara umum dapat disimpulkan bahwa persamaan garis singgung ellips dalam bentuk umum

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

di titik (x_1, y_1) yang terletak pada ellips tersebut diberikan oleh:

$$Ax_1x + Cy_1y + \frac{1}{2}D(x_1 + x) + \frac{1}{2}E(y_1 + y) + F = 0 \quad (17)$$

Untuk memudahkan mengingat, bahwa persamaan garis singgung ellips dalam bentuk umum di sembarang titik (x_1, y_1) pada ellips dapat ditemukan dengan cara mengganti suku-suku pada persamaan sebagai berikut:

x^2 diganti dengan x_1x

y^2 diganti dengan y_1y

x diganti dengan $\frac{1}{2}(x_1 + x)$

y diganti dengan $\frac{1}{2}(y_1 + y)$

Harus diingat bahwa cara di atas dapat dilakukan hanya jika *titik* (x_1, y_1) *berada pada ellips*. Akan tetapi metoda di atas juga dapat digunakan sebagai metoda alternatif untuk mencari persamaan garis singgung ellips yang melalui sebuah titik di luar ellips tersebut.

Contoh 1:

Tentukan persamaan garis singgung ellips $x^2 + 4y^2 = 40$ di titik $(2, 3)$.

Jawab:

$$x^2 + 4y^2 = 40$$

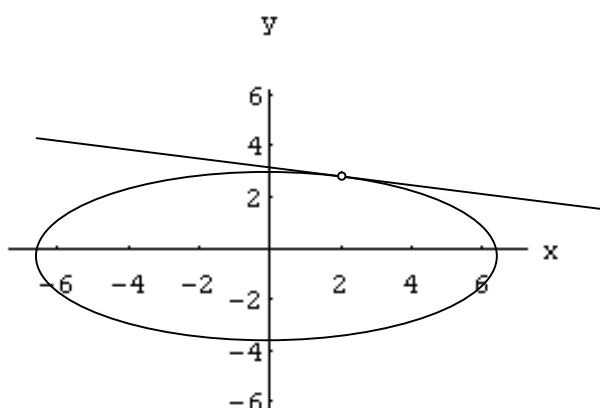
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$$

Dengan persamaan (8) diperoleh persamaan garis singgung yang dicari, yaitu

$$\frac{2x}{40} + \frac{3y}{10} = 1$$

$$\Leftrightarrow x + 6y - 20 = 0$$

Grafik persamaan ellips dan garis singgungnya dapat dilihat di gambar berikut



Gambar 5.8:

Contoh 2:

Tentukan persamaan garis singgung ellips $9x^2 + 4y^2 - 18x + 2y - 30 = 0$ di titik $(2, -3)$.

Jawab:

Dapat diperlihatkan bahwa titik $(2, -3)$ terletak pada ellips tersebut. Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (17), persamaan garis singgung yang dicari adalah

$$9 \cdot 2x + 4 \cdot (-3)y - \frac{1}{2} \cdot 18(2 + x) + \frac{1}{2} \cdot 2(-3 + y) - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x - 11y - 51 = 0$$

Contoh 3:

Tentukan persamaan garis singgung ellips $9x^2 + 2y^2 - 18x + 4y - 7 = 0$ yang melalui titik $(0, 2)$.

Jawab:

Jelas bahwa titik $(0, 2)$ tidak terletak pada ellips tersebut. Dalam hal ini kita tidak bisa menggunakan persamaan (17) secara langsung. Misalkan (x_1, y_1) adalah titik singgung dari garis singgung ellips yang melalui $(0, 2)$. Maka persamaan garis singgung yang dicari dalam bentuk

$$9x_1x + 4y_1y - \frac{1}{2} \cdot 18(x_1 + x) + \frac{1}{2} \cdot 2(y_1 + y) - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow -9x_1x + 4y_1y - 9x_1 - 9x + y_1 + y - 7 = 0 \quad (18)$$

Karena garis singgung melalui titik $(0, 2)$, maka persamaan di atas harus memenuhi koordinat $(0, 2)$, sehingga

$$-9x_1 \cdot 0 + 4y_1 \cdot 2 - 9x_1 - 9 \cdot 0 + y_1 + 2 - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_1 = x_1 + 5/9 \quad (19)$$

Tetapi titik (x_1, y_1) berada pada ellips, akibatnya berlaku hubungan

$$9x_1^2 + 4y_1^2 - 18x_1 + 2y_1 - 7 = 0 \quad (20)$$

Substitusi persamaan (19) ke (20) diperoleh persamaan kuadrat dalam x_1 ,

$$1053x^2 - 936x - 377 = 0$$

yang memberikan penyelesaian untuk $x_1 = \frac{4}{9} \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$. Dengan demikian juga

diperoleh nilai $y_1 = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$. Jadi koordinat titik-titik singgungnya pada ellips

adalah $\left(\frac{4}{9} + \frac{\sqrt{5}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ dan $\left(\frac{4}{9} - \frac{\sqrt{5}}{3}, 1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$. Selanjutnya dengan

persamaan (17) dapat diterapkan pada kasus ini untuk mendapatkan persamaan garis singgung yang dicari atau mensubstitusikan nilai-nilai (x_1, y_1) ke persamaan (18). Terdapat dua garis singgung yang dicari.

Pertama yang melalui titik $\left(\frac{4}{9} + \frac{\sqrt{5}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ adalah

$$-9\left(\frac{4}{9} + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)x + 4\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)y - 9\left(\frac{4}{9} + \frac{\sqrt{5}}{3}\right) - 9x + \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right) + y - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (13 + 3\sqrt{5})x - (5 + \frac{4}{3}\sqrt{5})y + (10 + \frac{8}{3}\sqrt{5}) = 0$$

Dan kedua yang melalui titik $\left(\frac{4}{9} - \frac{\sqrt{5}}{3}, 1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ adalah

$$-9\left(\frac{4}{9} - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)x + 4\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)y - 9\left(\frac{4}{9} - \frac{\sqrt{5}}{3}\right) - 9x + \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right) + y - 7 = 0$$

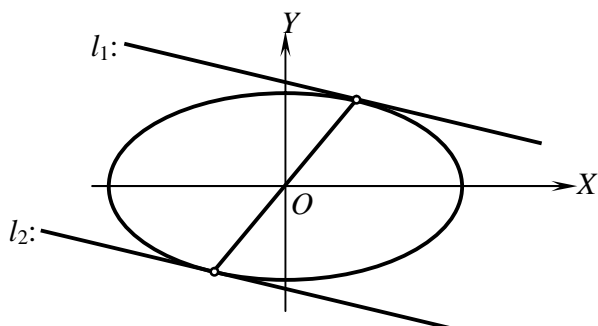
$$\Leftrightarrow (13 - 3\sqrt{5})x + (5 - \frac{4}{3}\sqrt{5})y - (10 - \frac{8}{3}\sqrt{5}) = 0$$

5.4.2. Persamaan Garis Singgung yang mempunyai Kemiringan Tertentu.

Sekarang kita bicarakan garis singgung suatu ellips yang mempunyai kemiringan tertentu. Pertama misalkan akan dicari persamaan garis singgung ellips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

dan mempunyai kemiringan m (lihat gambar 5.9).



Gambar 5.9:

Karena kemiringan garis singgung l sudah diketahui maka garis l merupakan anggota berkas garis yang berbentuk

$$y = mx + c \quad (2)$$

dengan c parameter konstanta yang belum diketahui.

Jika persamaan garis (2) disubstitusikan ke persamaan ellips (1) akan diperoleh hubungan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx + c)^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow (b^2 + a^2m^2)x^2 + 2mca^2x + (a^2c^2 - a^2b^2) = 0$$

Oleh karena garis menyinggung ellips maka haruslah memotong pada satu titik saja, dengan kata lain persamaan kuadrat di atas haruslah mempunyai penyelesaian yang kembar. Hal itu berarti nilai diskriminannya haruslah nol, yaitu

$$(2mca^2)^2 - 4(b^2 + a^2m^2)(a^2c^2 - a^2b^2) = 0$$

dan memberikan penyelesaian untuk nilai c

$$c^2 = (b^2 + a^2m^2)$$

$$\Leftrightarrow c = \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

Jadi persamaan garis singgung yang dicari adalah

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad (3)$$

Sedangkan persamaan garis singgung pada ellips dengan persamaan baku umum

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

yang mempunyai kemiringan m diberikan oleh:

$$y - k = m(x - h) \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad (4)$$

Contoh 4:

Tentukan persamaan garis singgung ellips $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$ yang tegak

lurus garis $2x + 3y - 1 = 0$.

Jawab:

Misalkan m adalah kemiringan garis singgung yang dicari.

Garis $2x + 3y - 1 = 0$ mempunyai kemiringan $-2/3$, sedangkan garis singgung yang diminta tegak lurus dengan di atas, yang berarti perkalian antar kemiringan garis $= -1$. Jadi

$$m \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1 \text{ atau } m = \frac{3}{2}.$$

Berdasarkan rumus (4) maka persamaan garis singgung yang dicari adalah :

$$y + 3 = \frac{3}{2}(x - 2) \pm \sqrt{5^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4^2}$$

$$\Leftrightarrow y + 3 = \frac{3}{2}x - 3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{289}$$

$$\Leftrightarrow y + 3 = \frac{3}{2}x - 3 \pm \frac{1}{2} \cdot 17$$

$$\Leftrightarrow 2y + 6 = 3x - 6 \pm 17$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2y - 12 \pm 17 = 0$$

Jadi persamaan garis singgung yang dicari adalah

$$3x - 2y + 5 = 0 \text{ dan } 3x - 2y - 29 = 0$$

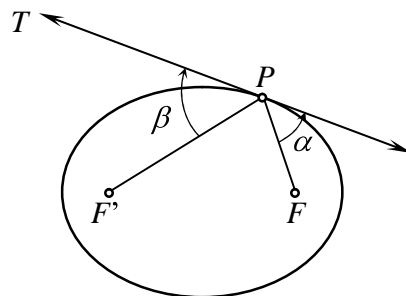
5.5. Terapan Ellips

Ellips mempunyai banyak terapan di dalam ilmu pengetahuan maupun seni. Pegas pada sistem suspensi mobil sering berbentuk eliptik atau semi eliptik.

Dalam astronomi, lintasan edar planet dan satelit berupa ellips, di mana matahari berada pada salah satu fokusnya. Hal ini seperti dijelaskan pada hukum Keppler tentang gerak edar planet.

Dalam bidang konstruksi dan arsitektur, lengkungan jembatan kadang-kadang berbentuk ellips, suatu bentuk yang mempunyai efek kekuatan dan nilai seni.

Ada satu sifat aplikatif pada ellips berkenaan dengan pantulan ellips. Perhatikan gambar 5.10. berikut.



Gambar 5.10:

PT adalah sembarang garis singgung ellips yang dengan fokus di F dan F' . Misalkan ukuran sudut antara FP dengan PT adalah α , dan ukuran sudut antara $F'P$ dengan PT adalah β , maka dapat ditunjukkan bahwa $\alpha = \beta$ (lihat latihan 5 C no. 1). Oleh karena itu sinar cahaya yang memancar dari sumber di salah satu fokus cermin

elliptik yang mengenai cermin akan dipantulkan sepanjang garis yang melalui fokus lainnya. Sifat ellips ini digunakan dalam **serambi bisikan** dengan langit-langit yang mempunyai penampang berupa lengkungan ellips dengan fokus yang sama. Seseorang yang berdiri di salah satu fokus F dapat mendengar bisikan orang lain pada fokus F' yang lain sebab gelombang suara yang berasal dari pembisik di F' mengenai langit-langit dan oleh langit-langit dipantulkan ke pendengaran di F . Contoh termashur serambi bisikan ada di bawah kubah gedung Capitol di Washington, D.C. Yang lain ada di Mormon Tabernacle di Salt Lake City.

Latihan 5 C

1. Pada gambar 5.10. buktikan bahwa $\alpha = \beta$.
2. Tentukan persamaan garis singgung ellips $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$ pada titik potong dengan sumbu- y . Berapa kemiringan garis singgung tersebut ?
3. Tentukan persamaan garis singgung ellips $4x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$ di titik $(2 + \sqrt{3}; -1)$.
4. Tentukan persamaan garis singgung ellips $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$ yang mempunyai kemiringan 2.

5. Tentukan persamaan garis singgung ellips $16x^2 + 25y^2 - 50x + 64y = 311$ yang mempunyai kemiringan $-2/3$.
6. Tentukan persamaan garis singgung ellips $4x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$ yang melalui titik $(0, 0)$.
7. Tentukan persamaan garis singgung ellips $9x^2 + 16y^2 + 36x + 32y - 92 = 0$ yang mempunyai kemiringan -1 .
8. Dua garis yang saling tegak lurus menyinggung ellips $2x^2 + 3y^2 + 4x - 12y - 36 = 0$. Jika salah satu garis mempunyai kemiringan $-\frac{3}{2}$, tentukan titik potong kedua garis singgung.
9. Tentukan besar sudut antara dua garis singgung ellips $6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 51 = 0$ yang melalui titik pusat koordinat.
10. Tentukan persamaan garis singgung ellips $4x^2 + y^2 + 24x - 16y + 84 = 0$ di titik potong ellips dengan sumbu-sumbu koordinat. Tentukan pula besar sudut antara garis-garis singgung tersebut.
11. Tentukan luas segiempat yang dibentuk oleh garis-garis singgung ellips $25x^2 + 16y^2 + 150x - 128y - 1119 = 0$ di titik-titik ujung latus rektum (laktera rekta).