Cálculo Diferencial e Integral

Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

Material Teórico

Derivadas

Responsável pelo Conteúdo:
Prof. Esp. Clovis Jose Serra Damiano

Revisão Textual:
Profa. Ms. Fatima Furlan

UNIDADE Derivadas

- Introdução
- Função Derivada
- Estudo do comportamento de uma função através da análise de sua derivada

Objetivo de APRENDIZADO

Nesta Unidade, vamos trabalhar uma das duas grandes ideias do Cálculo: a diferenciação que é o processo de encontrar uma derivada. Uma derivada é uma relação, por exemplo quilômetros por hora, galões por minuto, metros por segundo e assim por diante.

O simples pensamento de fazer um curso de Cálculo costuma ser desalentador para um grande número de alunos. O cálculo nada mais é do que geometria e álgebra avançadas. Ele utiliza as regras mais corriqueiras da álgebra e da geometria e as ajusta para que sejam utilizadas em problemas mais complexos.

Para ajudá-lo na construção do conhecimento, realize a leitura dos textos indicados, acompanhe e refaça os exemplos resolvidos e treine com as Atividades Práticas disponíveis e suas resoluções ao final do conteúdo.

Não deixe de assistir, também, a apresentação narrada do conteúdo e de alguns exercícios resolvidos.

Finalmente, e o mais importante, fique atento às atividades avaliativas propostas e ao prazo de realização e envio.

Contextualização

Otimizar alguma coisa é minimizar ou maximizar alguns de seus aspectos.

É preciso organizar as ações para resolver problemas envolvendo a otimização.

Passos:

1) Ler e compreender o problema.

2) Identificar as informações e qual é a quantidade desconhecida que deverá ser otimizada.

3) Fazer um esquema indicando todas as partes importantes do problema.

4) Escrever uma sentença matemática para equacionar o problema.

5) Sempre que possível, expressar a quantidade desconhecida em função de uma única variável.

6) Testar os pontos críticos da função e utilizar seus conhecimentos da forma geométrica de uma função.

Em muitos problemas de otimização, o cálculo diferencial é uma poderosa ferramenta para a solução desses problemas.

Explore

Capítulo 4.5 – Problemas Otimização Aplicada do livro: THOMAS JR., George B Et Al. Cálculo (de) george b. thomas jr. 12 ed. São Paulo: Addison-Wesley, 2003, da página 303 a 310.

Introdução

Na unidade anterior, aprendemos a calcular o limite da taxa de variação média entre dois pontos quando a distância entre esses dois pontos tende a zero. Esse limite, quando existe, é a taxa de variação instantânea da função naquele ponto, ou ainda, é a derivada da função naquele ponto. Vimos ainda que podemos associar o conceito geométrico de reta tangente à taxa de variação instantânea. Quero dizer com isso, que a inclinação da reta tangente à curva em um ponto da função é numericamente igual a taxa de variação instantânea ou a derivada da função nesse mesmo ponto.

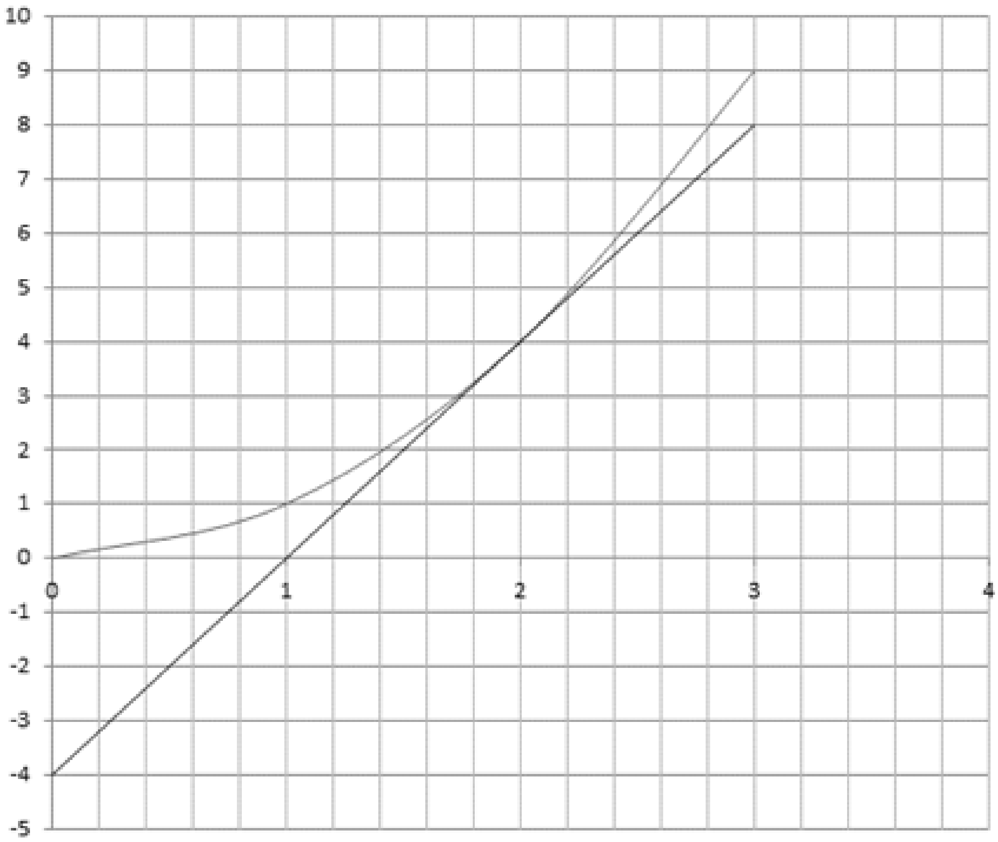
Função Derivada

Vamos continuar nossos estudos sobre derivadas entendendo a relação entre derivada e reta tangente.

Quando uma reta secante corta dois pontos de uma curva, a inclinação dessa secante é numericamente igual à taxa de variação média dessa curva (função).

Quando queremos calcular uma derivada, calcula-se o limite da taxa de variação média entre dois pontos, quando a distância entre esses dois pontos tende a zero.

Portanto, se eu passar uma secante por 2 pontos de uma curva e for aproximando esses pontos traçando novas secantes, essa secante vai tender à tangente ao ponto dessa curva. Podemos concluir então, que a inclinação da reta tangente à curva em um ponto, é numericamente igual à taxa de variação instantânea nesse ponto (derivada).



O ponto (2,4) é comum à curva e a reta tangente à curva no ponto de abscissa x = 2. Essa informação é importante, pois se conhecemos a derivada da função em um ponto, conseguimos calcular a equação da reta tangente a esse ponto da curva.

Vamos acompanhar o exemplo acima. Temos representadas no gráfico as funções f(x)= x^2, e g(x)=4x-4 que é tangente à função f(x) no ponto de abscissa 2.

Portanto, vamos entender essa questão:

Qual é a taxa de variação instantânea (derivada) de f(x), para $x_0 = 2$?

Para resolver esse problema, vamos calcular o limite entre dois pontos da curva, quando a distância entre eles tende a zero. Um dos pontos é o 2 (x0) e o outro ponto será o 2 mais uma pequena variação que chamaremos de Δx, portanto (2+Δx). Portanto, para calcular essa taxa e variação instantânea (tvi) basta calcular o limite da razão entre $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_o} + \Delta \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})}{\Delta \boldsymbol{x}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - (2)^2}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(4 + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 4$$

Portanto, a taxa de variação instantânea no ponto 2 é 4.

Qual é a inclinação da reta g(x)?

A inclinação da reta é dada pelo coeficiente angular. O coeficiente angular de g(x) também é 4.

Existe coincidência?

Sim, a taxa de variação instantânea da função f(x) no ponto 2 e o coeficiente angular da reta g(x) que é tangente à curva nesse mesmo ponto são iguais.

Atenção

Se conseguimos calcular a derivada de uma função em um ponto x0 qualquer, essa taxa de variação instantânea é numericamente igual a inclinação da reta tangente a essa curva nesse ponto, portanto, podemos escrever a equação dessa reta, uma vez que conhecemos seu coeficiente angular e um ponto (x,y) que permitem que eu ache o valor do coeficiente linear que é a outra constante que compõe a equação de uma reta.

Então nós revimos como calcular a taxa e variação instantânea ou a derivada da função em um ponto específico. Agora vamos aprofundar nossos estudos e entender o que é a derivada como função.

Definição: A derivada de uma função f(x) em relação à variável x é a função f' cujo valor em x, é:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Desde que esse limite exista.

Estudamos até agora a derivada de uma função em um ponto fixo e agora vamos considerar o que acontece em diversos pontos. De maneira geral a derivada assume diferentes valores em diferentes pontos do seu domínio e ela própria é uma função.

A derivada de uma função em um ponto nos dá a informação da taxa de variação da função naquele ponto que é numericamente igual à inclinação da reta tangente à curva naquele ponto.

Observando a definição, deduzimos que para cada valor de x para o qual o limite existe, diz-se que a função é diferenciável (derivável) naquele valor de x. Se o limite existe para qualquer x do domínio diz-se que f é diferenciável em qualquer ponto do domínio.

saiba +

Conhecendo a função derivada de f(x) podemos calcular a derivada de f(x) para qualquer x_0 em que f(x) possua derivada sem a necessidade de calcular o limite, usando para esses cálculos as regras de derivação.

Notações

Há várias maneiras de representar a derivada de uma função y = f(x). Utilizarei duas delas:

Função	Derivada
1) f(x)	f'(x)
2) f(x)	dy/dx

1) É a notação mais usual. O apóstrofo significa que a função f foi derivada.
2) Essa notação também é bastante utilizada e se diz que é a derivada de y em relação a variável x.

Regras de derivação

Para determinar a função derivada sem usar o trabalhoso cálculo de um limite utilizamos um conjunto de regras de derivação que iremos exemplificar a seguir. Dispensarei a demonstração dessas regras que poderão ser consultadas na bibliografia recomendada.

Derivada de uma potência

Regra:

$y = x^a \rightarrow y' = a.x^{a-1}$

Exemplo 1:

$f(x) = x^4$

O expoente "4" passa para a frente do "x" multiplicando, e do expoente 4 se subtrai o número 1. Portanto a derivada da função f(x) é:

$f'(x) = 4x^{4-1}$

$f'(x) = 4x^3$

Trocando Ideias

Essa regra é conhecida informalmente como a Regra do Tombo.

Exemplo 2:

Qual é a derivada de $f(x) = 1/x^7$?

Para resolver essa derivada é preciso lembrar que $\frac{1}{x^7} = x^{-7}$ (propriedade das potências). Portanto:

$f(x) = x^{-7}$

$f'(x) = -7x^{-7-1}$

$f'(x) = -7x^{-8}$

$f'(x) = -7/x^8$

Exemplo 3:

Qual é a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$?

Lembre-se que, pela propriedade das potências, $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

Portanto:

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Derivada de uma função constante

Regra:

y=k → y^'=0

A derivada de uma função constante (k) é sempre zero.

Exemplo:

f(x)=8

f´(x)=0

Derivada de uma soma ou uma diferença

Regra:

y=u±v → y'=u'±v'

A derivada da soma (ou diferença) de duas ou mais funções é igual à soma (ou diferença) de suas derivadas.

Suponha duas funções:

$u = x^3$

$v = 2x^4$

Se $y = u + v$, então:

$y = x^3+2x^4$

$y´ = 3x^2 + 8x^3$

Se derivarmos as funções isoladamente e depois somarmos obteremos exatamente o mesmo resultado. O mesmo se aplica às subtrações. Em outras palavras, o que a regra diz é que se tivermos uma função composta por vários termos (um polinômio) que se somam ou se subtraem, obtemos a derivada dessa função derivando cada termo isoladamente.

Exemplo:

$y = 3x^4 - 4x^2 + 8$

$y' = 12x^3 - 8x$

Em Síntese

Note que foi usada as regras de derivação em cada termo isoladamente:

1º termo: Foi usada a regra do tombo.

2º termo: Também foi usada a regra do tombo. Note que o expoente do x é dois, ao subtrair 1(para o cálculo da derivada), ficou x^1=x.

3º termo: Trata-se de uma constante e pela regra sabemos que a derivada de uma constante é sempre zero.

Derivada do produto de uma função por uma constante

Regra:

$y = k.u \rightarrow y' = k.u'$

Se uma função estiver multiplicada (ou dividida) por uma constante sua derivada também ficará multiplicada (ou dividida) por essa mesma constante.

Exemplo:

$y=x^3$

$y'=3x^2$

Se a função $y = x^3$ for multiplicada por 5 sua derivada também ficará multiplicada por 5. Observe:

$y = 5 \times x^3 = 5x^3$

$y' = 5 \times 3x^2 = 15x^2$

Derivada de um produto

Regra:

$y = u.v \rightarrow y' = u'.v + u.v'$

Temos o produto das funções u e v. Um dos caminhos para calcular a derivada é a aplicação da regra acima.

Exemplo:

$f(x)=(x^2 - x)\ (2x^3 + 3)$

Vamos dar nome as funções e achar suas respectivas derivadas:

$u = (x^2\text{-}x) \rightarrow \quad u' = 2x\text{-}1$

$v = (2x^3 + 3) \rightarrow v' = 6x^2$

Aplicar a regra para calcular a derivada de f(x):

$f'\ (x) = (2x\text{-}1)\ (2x^3 + 3) + (x^2 - x)\ 6x^2$

Efetuar as multiplicações e reduzir os termos semelhantes:

$f'(x) = 4x^4 - 2x^3 + 6x - 3 + 6x^4 - 6x^3$

$f\hat{}'\ (x) = 10x^4 - 8x^3 + 6x\text{-}\ 3$

Derivada do Quociente

Regra:

$$y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

A regra ensina como fazemos para derivar o quociente (divisão) de duas funções. Chama-se a função que está no numerador de u e a que está no denominador de v. Deriva-se cada uma delas e aplica-se a regra acima.

Exemplo:

$$f(x) = \frac{12x^2}{x-10}$$

Portanto:

$u = 12x^2 \rightarrow u' = 24x$

$v = x\text{-}10 \rightarrow \quad v' = 1$

$$f'(x) = \frac{24x(x-10) - 12x^2.1}{(x-10)^2}$$

$$f'(x) = \frac{24x^2 - 240x - 12x^2}{(x-10)^2}$$

$$f'(x) = \frac{12x^2 - 240x}{(x-10)^2}$$

Derivada da função exponencial natural

Regra:

$y=e^x \rightarrow y'=e^x$

Quando nos deparamos com uma função exponencial de base "e", ou seja, uma função exponencial natural estamos diante de um caso cuja derivada é a própria função.

Exemplo:

$f(x)=5x+e^x$

$f'(x)=5+e^x$

Note que o primeiro termo foi derivado usando a regra do tombo. O segundo termo permanece igual pois a sua derivada é exatamente igual à função.

Derivada de algumas funções trigonométricas

As funções trigonométricas descrevem fenômenos periódicos. As derivadas dessas funções desempenham um papel importante na descrição de mudanças periódicas. Vou mostrar como derivar duas funções trigonométricas básicas:

Derivada da função seno

Regra:

$y=\text{sen } x \rightarrow y'=\cos x$

Exemplo:

$y=x^3-\text{sen } x$

$y'=3x^2-\cos x$

Derivada da função cosseno

Regra:

$y = \cos x \rightarrow \quad y' = -\text{sen } x$

Exemplo:

$y = 5e^x + \cos x$

$y = 5e^x - \text{sen } x$

Derivadas de outras funções trigonométricas básicas:

Denominação	Função	Derivada
Tangente	$f(x)=\text{tg } x$	$f'(x)= \sec^2 x$
Secante	$f(x)=\sec x$	$f'(x)=\sec x . \text{tg } x$
Cotangente	$f(x)=\text{cotg } x$	$f'(x)= -\text{cosec}^2 x$
Cossecante	$f(x)=\text{cosec } x$	$f'(x)=-\text{cosec } x . \text{cotg } x$

Derivada da Função Composta

Regra da Cadeia:

Para calcular a derivada da composta de duas funções deriváveis é preciso calcular o produto de suas derivadas em pontos adequados.

Exemplo:

Calcular a derivada da função:

$y = (3x^2 + 1)^2$

A função composta (reveja o conceito) é "uma função dentro da outra". Vamos chamar de função de dentro (que está interior dos parênteses) de *u*, e vamos chamar de função de fora aquela que está fora dos parênteses, que no caso seria a função de eu chamei de u elevada ao quadrado e que eu posso chamar de v.

Resumindo:

1) Chamamos de u a função de dentro: $u=3x^2+1$.
2) Chamamos de v a função de fora: $v=u^2$
3) Note que é possível derivar tanto a função **u** como a função **v** utilizando as regras de derivação conhecidas. Portanto, esse será nosso próximo passo.
4) Derivar as funções u e v:

   $u = 3x^2 + 1 \rightarrow u' = 6x$

   $v=u^2 \rightarrow v'=2u$

5) Nosso passo agora será multiplicar as duas derivadas encontradas, ou seja, vamos multiplicar a derivada de **v** pela derivada de **u**.

   $y' = 2u.6x$

6) Para concluir o cálculo basta substituir o valor de u pela função que ele representa:

   $y' = 2\ (3x^2 + 1)\ 6x$

   Efetue a multiplicação:

   $y' = (6x^2 + 2)\ 6x = 36x^3 + 12x$

Exercício de Reforço:

Diferencie $y = sen(x^2 + e^x)$

Seguindo os passos como no exemplo anterior:

1) $u = x^2 + e^x$ e $v = sen\ u$
2) $u = x^2 + e^x \rightarrow u' = 2x + e^x$ e $v = sen\ u \rightarrow v' = cos\ u$
3) $y' = cos\ u.(2x + e^x)$
4) $y' = cos\ (x^2 + e^x)\ (2x + e^x)$

Trabalhar com a definição de derivadas, utilizando o cálculo de limites muitas vezes é bastante trabalhoso, por isso é muito comum usar a regras de derivação organizadas em uma tabela para facilitar esses cálculos. Apresento a seguir uma tabela das funções mais usuais, bem como uma tabela com algumas regras gerais para o cálculo das derivadas:

Derivadas das Funções Mais Usuais

Regras de Derivação

Função	Função Derivada
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax + b\ (a \neq 0)$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n.x^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = 1/x$
$f(x) = senx$	$f'(x) = cosx$
$f(x) = cosx$	$f'(x) = -\ senx$
$f(x) = tgx$	$f'(x) = sec^2\ x$
$f(x) = cotgx$	$f'(x) = -cosec^2\ x$
$f(x) = secx$	$f'(x) = secx.tgx$
$f(x) = cosecx$	$f'(x) = -cosecx.cotgx$

Regras gerais para o cálculo das derivadas de funções:

Multiplicação por escalar	$y=k.u \rightarrow y'=k.u'$
Soma de funções	$y=u+v \rightarrow y'=u'+v'$
Diferença de funções	$y=u-v \rightarrow y'=u'-v'$
Produto de funções	$y=u.v \rightarrow y'=u'.v+u.v'$
Divisão de funções	$y=\dfrac{u}{v} \rightarrow y'=\dfrac{u'.v-u.v'}{v^2}$

Derivadas Sucessivas

O exemplo abaixo esclarecerá o conceito de derivadas sucessivas.

Exemplo:

Tome a função $y = 2x^5 + 2x^3 + 4x^2 + 7$ e calcule sua derivada:

$y'=10x^4 + 6x^2+8x$

A função obtida também tem derivada e indicamos assim:

$y''=40x^3 + 12x + 8$

Chamamos y'' de derivada segunda da função y.

Podemos continuar e achar a derivada terceira da função y:

y^'''=120x^2+12

As derivadas primeira, segunda, terceira e assim por diante são chamadas de derivadas sucessivas.

Estudo do comportamento de uma função através da análise de sua derivada

Quando se conhece a função derivada de uma função f(x), é possível descobrir características dessa função, por exemplo, saber em que intervalos ela é crescente ou decrescente e quais são seus pontos de máximo e de mínimo.

Sinal da Derivada

Nosso objetivo é estudar o comportamento de uma função (o seu crescimento ou decrescimento) através da análise de sua derivada. Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I com $x_0 \in$ a I, há três possibilidades para f'(x0):

$$f'(x_0)>0$$

Nesse caso, a reta tangente ao gráfico de f no ponto (x0, f(x0)) possui o coeficiente angular positivo, portanto, nas proximidades do ponto x0 f só pode ser crescente.

$$f'(x_0)<0$$

Nesse caso, a inclinação da reta tangente é negativa, portanto, em qualquer ponto nas proximidades de x0 a função é decrescente.

$$f'(x_0)=0$$

No caso da derivada da função ser igual a zero, isso significa que a reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é horizontal, ou seja, é paralela ao eixo x. Nesse caso, a função poderá ter um ponto de máximo ou de mínimo, dependendo do seu comportamento à direita e à esquerda de x_0.

Ideias-chave

Conclusão - Se f é uma função com derivada em todo ponto de um intervalo aberto I, então, se:

$f'(x_0)>0$ para todo $x \in$ I,então f é **crescente** em I.

$f'(x_0)<0$ para todo $x \in$ I,então f é **decrescente** em I.

Exemplo:

Seja f(x) uma função de domínio $\mathbb{R}$, determine em quais intervalos ela é crescente e decrescente, sendo $f(x)=-x^3+3x$.

Nosso objetivo e determinar em que intervalos a função f(x) é crescente e em que intervalo ela é decrescente através da análise da sua derivada. Nosso primeiro passo será derivar a função:

$$f'(x) = -3x^2 + 3$$

Conforme vimos anteriormente, quando a derivada de f(x) for positiva isto implica que a função será crescente e quando a derivada de f(x) for negativa isso implica no decrescimento da função. E quando a derivada de f(x) for zero, esse ponto será possivelmente um candidato a ponto de máximo ou de mínimo.

Note que a nossa derivada é função quadrática, cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para baixo. Vamos analisar os sinais da nossa função derivada. E como fazer isso? Vamos igualar a derivada a zero e achar as raízes da função:

$$-3x^2 + 3 = 0$$

Agora, devemos resolver essa equação do 2º grau usando qualquer técnica conhecida. A mais usual é a fórmula de Báscara.

$$\Delta = 0^2 - 4\times - 3\times 3 = 36$$

$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{36}}{2-(3)}$$

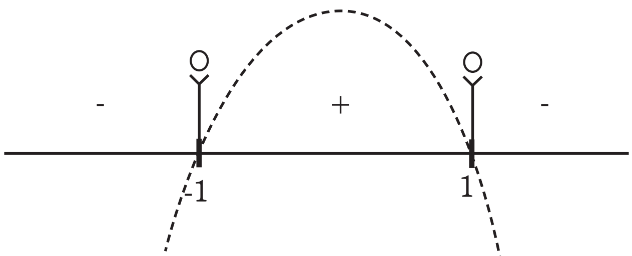
$$x = \frac{0 \pm 6}{-6}$$

$$x_1 = \frac{+6}{-6} = -1$$

$$x_2 = \frac{-6}{-6} = 1$$

As raízes da função são -1 e 1. Esses pontos são candidatos a ponto de máximo e de mínimo e a função não é nem crescente nem decrescente.

Observe o desenho abaixo. Entre as raízes a derivada é positiva, portanto, no intervalo aberto]-1, 1[a função f(x) é crescente.



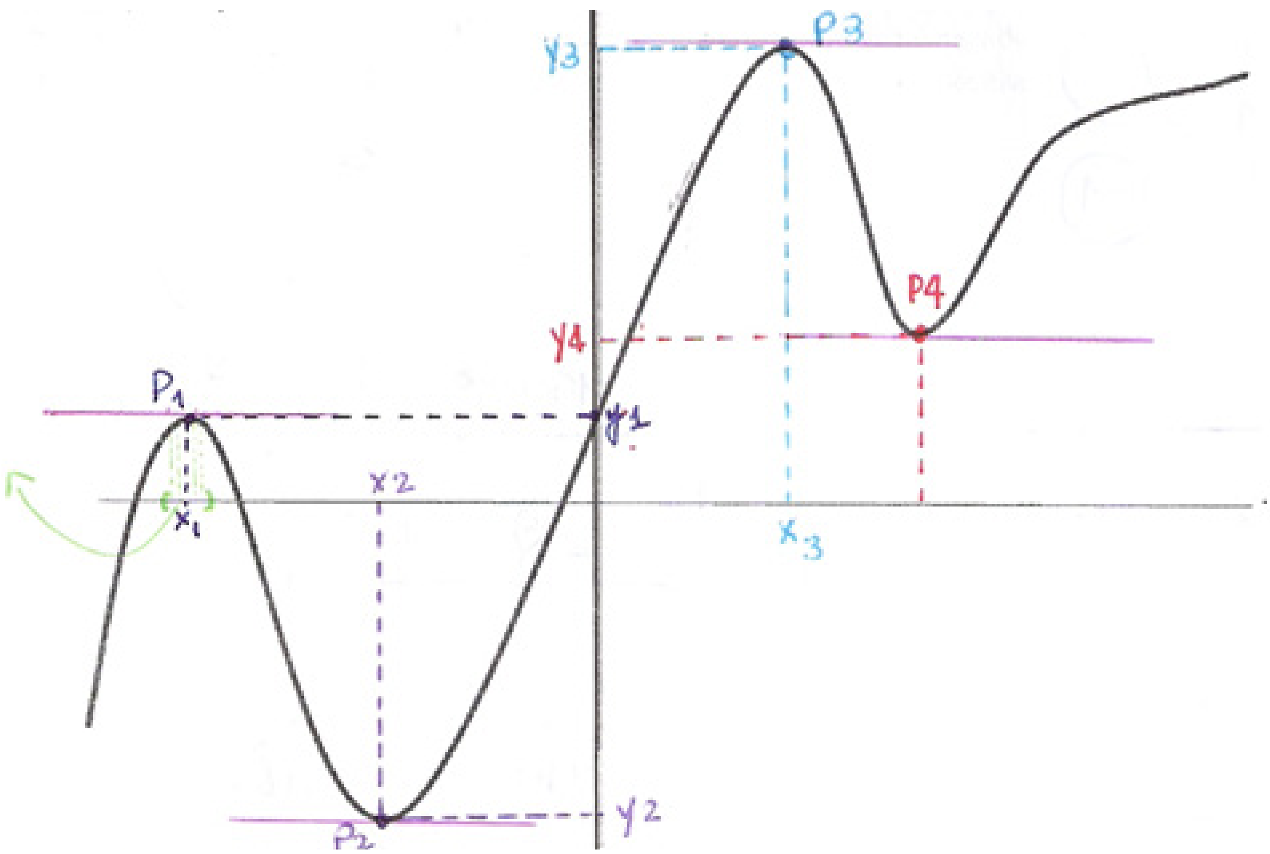
Para valores menores do que -1 ou maiores do que 1 a derivada é negativa, portanto a função f(x) é decrescente.

Extremos de Funções

O objetivo agora é localizar e identificar valores extremos de uma função a partir de sua derivada. A aquisição dessa competência permitirá resolver vários problemas de otimização, ou seja encontrar a melhor maneira de fazer algo em dada situação.

Vizinhança de $x_0 \in R$ é todo intervalo aberto ao qual x_0 pertence.

Notação: $V(x_0)$.



Considere a função representada pelo gráfico acima.

Observe P_1 e perceba que os pontos de abscissa $x \in V(x_1)$ o de maior ordenada é P_1.

P_1 é um ponto de máximo local, ou seja:

f admite um máximo local em x_1;

$y_1 = f(x_1)$ é um máximo local de f.

Observe os pontos P_2, P_3 e P_4 e verifique se eles são pontos de máximo ou de mínimo local.

Os pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 são chamados extremos da função f. Observe que um mínimo local pode ser maior que um máximo local. ($y_4 > y_1$).

Máximo e Mínimo Local

Seja f uma função real de variável real:

f admite um máximo local em x_0, se $f(x) < f(x_0)$,para todo $x \in V(x_0)$, $x \neq x_0$.

f admite um mínimo local em x_0, se $f(x) > f(x_0)$,para todo $x \in V(x_0)$, $x \neq x_0$.

Note que se uma função admite um ponto de máximo ou de mínimo local em P(x0, f(x0)) e é derivável em x0, então a tangente ao gráfico de f em P é paralela ao eixo x, e toda reta paralela ao eixo x tem o coeficiente angular igual a zero, mas o fato da derivada de uma função em um ponto ser zero, não implica que esse ponto necessariamente seja um ponto de máximo ou de mínimo.

Para descobrirmos se uma raiz real x_0 de f'(x) = 0 é a abscissa de um ponto de máximo ou de mínimo local é preciso analisar o sinal de f'(x) em uma vizinhança de x_0.

$f(x_0)$ é um máximo local

Para qualquer $x_1 \in V(x_0)$, $x_1 < x_0$ e o coeficiente angular da tangente t é positivo ($f'(x_1)>0$)

Para qualquer $x_2 \in V(x_0)$, $x_2 > x_0$ e o coeficiente angular da tangente t é negativo ($f'(x_2)<0$)

$f(x_0)$ é um mínimo local

Para qualquer $x_1 \in V(x_0)$, $x_1 < x_0$ e o coeficiente angular da tangente t é negativo ($f'(x_1)<0$)

Para qualquer $x_2 \in V(x_0)$, $x_2 > x_0$ e o coeficiente angular da tangente t é positivo ($f'(x_2) > 0$).

Exemplo:

Seja a função $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x$, determine os pontos de máximo e de mínimo locais da função f.

Nosso primeiro passo será derivar a função f(x) e encontrar as raízes da função derivada:

$$f'(x)=\frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}}-2x-3$$

$$f'(x)=x^2-2x-3$$

A derivada da função f(x) é uma função quadrática, portanto, para achar as raízes vamos aplicar a fórmula de Báscara, igualando f' (x)=O.

$\Delta = (-2)^2 - 4.1. - 3$

$\Delta = 4 + 12=16$

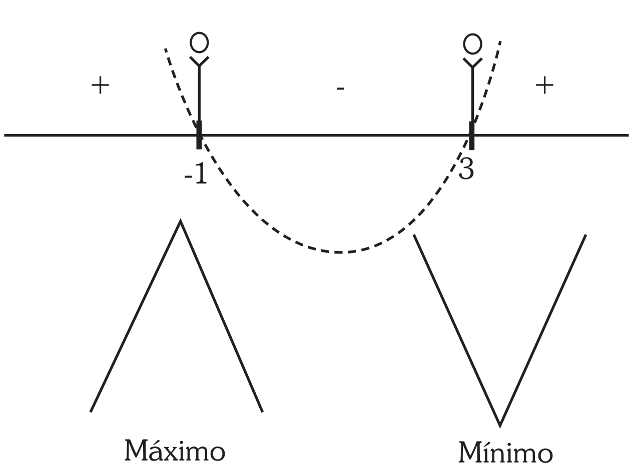
$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2.1}$$

$$x_1=\frac{+2+4}{2}=3$$

$$x_1=\frac{+2-4}{2}=-1$$

A raízes são -1 e 4, sendo assim, vamos analisar os sinais da derivada.

Observe a figura com a análise dos sinais. A função é crescente para valores menores do que -1 ou para valores maiores do que 3. A função é decrescente no intervalo entre -1 e 3.



Vamos analisar o que acontece na vizinhança das raízes da derivada da função observando a figura.

A função vem crescente para valores menores do que -1, e ao passar pela raiz ela passa a ser decrescente. Observe as duas retas em torno da raiz e perceba que ali temos um ponto de máximo.

Analise o que ocorre na vizinhança da raiz 3. A função vem decrescente e ao passar pela raiz passa a ser crescente. Observe o desenho e note que ali temos um ponto de mínimo.

Segundo nossas observações identificamos um ponto de máximo e um ponto de mínimo. Falta apenas determinar quais são as coordenadas desses pontos. Todo ponto é um par ordenado (x,y). Nós sabemos quanto vale o x nos pontos máximo e mínimo, para achar o valor do y, basta substituir em f(x).

O ponto de máximo tem como abscissa (x) -1, portanto para achar o valor correspondente de y basta substituir em f(x):

$$f(-1)=\frac{(-1)^3}{3}-(-1)^2-3(-1)$$

$$f(-1)=-\frac{1}{3}-1+3=\frac{5}{3}$$

O ponto de mínimo tem como abscissa 3, portanto:

$$f(3)=\frac{(3)^3}{3}-(3)^2-3(3)$$

$$f(3)=9-9-9=-9.$$

Portanto, os pontos de máximo e mínimo são:

Ponto de Máximo: $\left(-1,\frac{5}{3}\right)$.

Ponto de Mínimo: (3,-9).

Interpretação Cinemática da Derivada

Sabe-se que a posição (S) de um móvel é função do tempo (t). A velocidade escalar média (tvm) é dada por $\frac{\Delta S}{\Delta t}$, portanto:

Velocidade Média = $\frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$

A velocidade escalar (V) do móvel no instante t0 é o limite da Velocidade Média quando Δt tende para zero.

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} VM = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} = v(t_0) = S'(t_0)$$

Trocando Ideias

A derivada da função S em t_0 é numericamente igual à velocidade escalar do móvel no instante t_0.

A velocidade escalar de um móvel pode variar de instante em instante, ou seja, a velocidade escalar (V) é função do tempo (t). Num instante t0 um móvel tem a velocidade $v(t_0)$ e no instante $t_0 + \Delta t$ tem a velocidade $v(t_0 + \Delta t)$, com $\Delta t \neq 0$.

A aceleração escalar média (a_m) é dada por $\frac{\Delta v}{\Delta t}$.

$$a_m = \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}$$

A aceleração escalar do móvel no instante t0 é o limite da aceleração escalar média para Δt tendendo a zero.

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} a_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} = a(t_0) = v'(t_0)$$

Trocando Ideias

A derivada da função v em t_0 é numericamente igual à aceleração escalar do móvel no instante t_0.

Vamos resumir o que foi dito. Se tivermos uma função que nos dá a posição de um objeto em relação ao tempo, dizemos que a taxa de variação de posição desse objeto em relação ao tempo, nada mais é do que a "rapidez" com que esse objeto muda de posição. Esse fenômeno nós conhecemos como sendo a velocidade do objeto em relação ao tempo. Da mesma maneira, a taxa de variação da velocidade é a aceleração.

Exemplo 1:

Calcule a velocidade de um móvel que obedece a equação $S = 6t^2$ no instante 5s. (SI).

A função S nos informa a posição de um móvel em relação ao tempo no Sistema Internacional de Medidas (SI), ou seja, a posição é calculada em metros e o tempo em segundos.

Aprendemos que a taxa de variação do espaço (S) é a velocidade, portanto, se derivarmos a função S teremos uma função que nos fornecerá a função velocidade.

$S'=v=12t$

$v=12t$

Encontramos uma função que nos informa a velocidade instantânea do móvel em qualquer ponto do domínio, todavia o problema nos pede que forneçamos a velocidade no móvel no instante $t = 5$. Para resolver esse problema basta substituir na função velocidade o t por 5.

$v(5)=12\times5$

$v(5)=60$ m/s.

Resposta: No instante 5 s a velocidade do móvel é de 60 m/s.

Exemplo 2

Calcular a aceleração no instante 3s de um móvel cuja velocidade é dada por $v = t^2 + t$ (SI).

Nosso problema nos traz agora uma função que informa velocidade de um objeto em função do tempo e pede a aceleração desse objeto em um determinado instante. Sabemos que a taxa de variação da velocidade é a aceleração. Se derivarmos a função velocidade, obteremos uma função que nos dará a aceleração desse objeto.

$v'=a=2t+1$

$a=2t+1$

Obtivemos assim uma função que nos dá a aceleração desse objeto, e nos interessa a aceleração no instante 3 segundos. Para conseguir essa informação basta substituir o t por 3.

$a=2(3)+1$

a=7m/s^2

Resposta: A aceleração do objeto no instante 3 é de $7m/s^2$.

Material Complementar

Para aprofundar seus estudos sobre o estudo dos limites de uma função, consulte os sites e as referências a seguir:

- https://www.youtube.com/watch?v=8s40T0ic-hk
- https://www.youtube.com/watch?v=qdeI4GRFzR0
- https://www.youtube.com/watch?v=Nwy4NILJDxw&index=1&list=PL063E43EF2E298037

Outra indicação:

- Capítulo 3 do livro Cálculo (George B. Thomas Jr), (volume 1), de Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano São Paulo: Addison Wesley, 2009.) Páginas 145 a 180.

Referências

FLEMMING, Diva Marília; GONCALVES, Miriam Buss. **Cálculo A: funções, limite, derivação, integração.** 6 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo.** 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001-2002.

HUGHES-HALLET...[at all] **Cálculo a uma e a várias variáveis**, volume I. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

LAPA, Nilton; **Matemática Aplicada.** São Paulo Saraiva, 2012.

STEWART, James. **Cálculo** 6.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

THOMAS JR., George B Et Al. **Cálculo (de) george b. thomas jr.** 12. ed. São Paulo: Addison-Wesley, 2003.

Anotações

Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

www.cruzeirodosulvirtual.com.br
Campus Liberdade
Rua Galvão Bueno, 868
CEP 01506-000
São Paulo SP Brasil
Tel: (55 11) 3385-3000

Universidade
Cruzeiro do Sul

UNICID
Universidade
Cidade de S. Paulo

UNIFRAN
Universidade
de Franca

UDF
Centro
Universitário

Módulo
Centro
Universitário