A Pulga e a Lebre

Francisco Dall' Oglio Scorsato

12 de Maio 2024

1 Questão

O rabo de uma lebre gigante esá presa por um elástico de borracha gigante em uma estaca no chão. A pulga está sentada no topo da estaca de olho na lebre. Ao ver a pulga, a lebre salta ao ar e pousa a um quilômetro de distância da estaca (com seu rabo ainda preso na estaca pelo elástico de borracha). A pulga não desiste de perseguir a lebre e também salta ao ar e pousa no elástico de borracha a um centímetro da estaca. A lebre gigante, após ver isso, pula de novo ao ar e pousa a outro quilômetro de distância da estaca (para um total de 2 quilômetros de distância). A pulga destemida salta de novo ao ar, pousando no elástico de borracha um centímetro mais longe. Mais uma vez, a lebre pula outro quilômetro. E a pulga novamente pula outro centímetro. Se isso continuar indefinidamente, irá a pulga capturar a lebre eventualmente? (Assuma que a terra é plana e continua indefinidamente para todas as direções.)

2 Problema simplificado

Antes de resolver o problema, vamos resolver um parecido mas ligeiramente mais simples.
Cada vez que a pulga dá um salto, ela percorre mais um centímetro no elástico. E cada vez que a lebre salta, ela percorre $2cm$ e estica o elástico.
Após o primeiro pulo da lebre, o elástico fica com $2cm$. Então, a pulga percorre 50% de todo o elástico.
Quando a lebre salta pela segunda vez, a pulga continuará tendo percorrido esse 50% do elástico, pois tal esticou com a pulga nele. Mas agora pulará mais $1cm$. O elástico tem $4cm$, e já que a pulga está na metade do elástico, então, após saltar e aterrissar, ela estará a $2cm + 1cm$ da estaca, e terá andado 75% do caminho.
Após mais um pulo da lebre, que deixa o elástico com $6cm$, a pulga, que está agora a $4,5cm$ da estaca, pulará e estará a $5,5cm$ da estaca, que é aproximadamente 91% do elástico. Um salto depois, e o elástico terá $8cm$ e a pulga, que estava a aproximadamente $7,3cm$ da estaca, pula mais um centímetro e alcança o final do elástico.
Isso mostra que, embora a lebre salte mais longe por pulo do que a pulga, pelo fato de ela estar em uma superfície elástica, ela consegue fazer progresso aos poucos, e alcançar a lebre. Isso pode ser indicação de que, mesmo a lebre percorrendo $1km$ por salto, é possível que a pulga a alcance.

3 Solução

O primeiro pulo da pulga cobrirá $1cm$ de $1km$, que é $100000cm$. Isso quer dizer que cobrirá $0,00001$ do caminho total, ou $0,001\%$. Após o segundo pulo, cobrirá mais $1cm$ de $200000cm$, que é $0,0005\%$ do elástico. O terceiro pulo será de $1cm$ de $300000cm$, ou $\frac{1}{300000}$. Perceba que a porcentagem total andada será a porcentagem de cada salto somado. E perceba também que, no salto n, a porcentagem saltada é de $\frac{1}{100000n}$. Logo, a porcentagem salta após o pulo k será:

$$\frac{1}{100000} + \frac{1}{200000} + \frac{1}{300000} + \frac{1}{400000} + \frac{1}{500000} \cdots + \frac{1}{100000k}$$

$$= \frac{1}{100000} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots + \frac{1}{k}\right)$$

A pulga só chegará ao final do elástico caso essa soma seja maior que ou igual a 100%, que é, claro, 1. Portanto, temos que achar um valor k tal que, se somarmos k termos, teremos um valor maior que ou igual a 1. Podemos representar a soma com notação sigma da seguinte maneira: (não se preocupe com o que isso quer dizer, só saiba que é uma forma mais compacta de escrever somas com muitos termos)

$$\frac{1}{100000} \cdot \sum_{1}^{k} \frac{1}{n}$$

Acontece que esse somatório é exatamente a série harmônica, conhecida por, embora lentamente, crescer indefinidamente. Isso quer dizer que, dado um valor k grande o suficiente, a soma sempre poderá atingir qualquer número. Para que a soma seja maior que ou igual a 1, basta que o segundo termo do produto acima, aquele com o Σ, seja maior que ou igual a 100000. Sabemos que isso é possível, e, portanto, a pulga pode, eventualmente, chegar à lebre. A série harmônica tem outra propriedade muito legal: ela aproxima a função do logaritmo natural. Portanto, podemos saber que o valor de k é próximo de e^{100000}.