Hotel de Hilbert - Decomposição de uma fração como a soma de duas frações.

Francisco Dall' Oglio Scorsato

11 de Maio 2024

1 Questão

Uma fração unitária é uma fração da forma $\frac{1}{n}$ onde n é um inteiro positivo. Note que a fração unitária $\frac{1}{11}$ pode ser escrita como a soma de duas frações unitárias das três maneiras:

$$\frac{1}{11} = \frac{1}{12} + \frac{1}{132} = \frac{1}{22} + \frac{1}{22} = \frac{1}{132} + \frac{1}{12}.$$

Há outras maneiras de decompor $\frac{1}{11}$ como a soma de duas frações unitárias? De quantas maneiras pode se escrever $\frac{1}{60}$ como a soma de duas frações unitárias? De maneira geral, de quantas maneiras a fração unitária $\frac{1}{n}$ pode ser escrita como a soma de duas frações unitárias? Em outras palavras, quantos pares ordenados (a, b) de inteiros positivos a, b existem de tal forma que

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}?$$

2 Solução

Seja $\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Disso temos:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \rightarrow \frac{a-n}{an} = \frac{1}{b}$$

. Para que $\frac{a-n}{an}$ seja uma fração unitária, é necessário que $a - n = 1$ ou que an seja divisível por $a-n$. O motivo pelo segundo caso ser verdade é que, para transformar $\frac{a-n}{an}$ em uma fração unitária, temos que dividir o numerador por $a - n$ e, por consequência, o denominador também. Logo, o denominador deve ser divisível. Vamos analisar o primeiro caso:

2.1 $a - n = 1$

Se $a - n = 1$, segue que $a = n + 1$. Também segue que, já que a fração já é unitária, então seu denominador é b. Portanto:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1) \cdot n}.$$

Esse é nosso primeiro par (a, b): $a = n + 1$ e $b = n(n + 1)$. Se (a, b) é um par, então (b, a) também é. Portanto, descobrimos outro par, $(n(n + 1), n + 1)$.

2.2 an é divisível por $a - n$

Sabemos dois fatores de an: a e n. Portanto, $an \div (a-n) = a$ ou $an \div (a-n) = n$. No primeiro caso, temos que:

$$an \div (a-n) = a \to n \div (a-n) = 1 \to n = (a-n) \to a = 2n$$

Se $a = 2n$, então $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{b} \to b = 2n$ Logo, outro par é $(2n, 2n)$.

No segundo caso, temos que:

$$an \div (a-n) = n \to a \div (a-n) = 1 \to a = (a-n) \to n = 0$$

Já que $\frac{1}{n}$ com $n = 0$ é indefinido, então esse caso não tem solução.

3 Conclusão

Os três possíveis pares (a, b) são: $(n+1), n(n+1)$, $(n(n+1), (n+1))$ e $(2n, 2n)$. Pode se aplicar isso para $n = 11$ e $n = 60$ para responder as outras perguntas da questão. Como um pequeno bônus, há uma quantidade infinita de formas de representar uma fração unitária como a soma de k frações unitárias. Basta somar $\frac{1}{kn}$ consigo mesmo k vezes.