Youtube
E-learning Phys
1

Diffusion de Particules

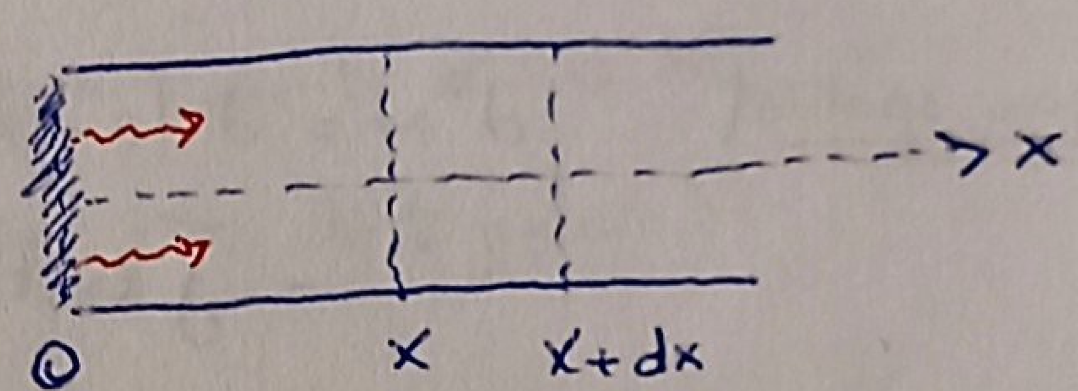
1] Eq° diffusion à 1 dim
2] Diff. / symétrie cylindrique
3] Diff / sym sphérique
4] Marche au hasard
5] solution gaussienne

1 Eq° de diffusion

Soit modèle unidirectionnel, étudions diffusion ds gaz ou liq. au repos ou ∼ des impuretés qui se propagent dans 1 solide

à $x=0$ on met particules étrangères du milieu (comme molécules parfum ds tuyau contenant air) .. Que vont faire ces molécules ?

L'expérience mq particules vont diffusées de la zone concentrée (près de $x=0$) vers moins concentrée, spontanément



= homogénisation de la densité particulaire

$$n(x,t) = \frac{\delta N}{\delta \tau} \quad [m^{-3}]$$

↑ unidirectionnel

Flux : nb qui traversent une section par unité de temps $[s^{-1}]$ $\quad \phi = \frac{\delta N}{\delta t}$

c'est qté algébrique donc si ds autre sens = − if

par densité de courant (vect. courant diffusion) $\vec{j}$ vecteur — et flux par def est ∫ sur surf d'un champ vecteur

$$\phi = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS} = \underbrace{j(x,t)}\, S$$

$[s^{-1} m^{-2}]$ densité surfacique de flux

⚠ Convection c qd molé de parfum sont emportées par un courant d'air (un courant de convection)

Mais diffusion c que le milieu est au repos

En pratique il y a tjr convection

On verra que diffusion est un phénomène lent alors que convection est très efficace

• On aboutira à : $\quad D \frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial n(x,t)}{\partial t}$

≠ que D'alembert car dérivée 1ère de t

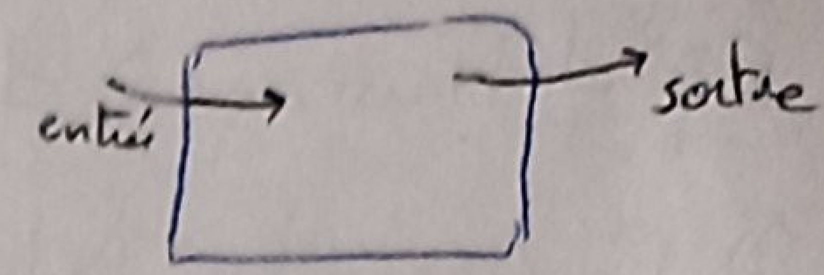
c la ≠ entre diffusion et physique

Pour trouver cette formule, il faut faire Bilan de particules

∴ étudier variation Nb (ds syst ouvert) ds intervalle t petit

total ds cube

$= Nb_{t_2} - Nb_{t_1}$ = variation entre t_1 et t_2



c'est la m̂ chose que $Nb_{entré} - Nb_{sortie}$ durant $(t_1 - t_2)$

∴ bilan Temporel entre t et $t+dt$ = (entrée - sortie) durant ce dt

Bilan de Particules : ~~Da~~ Dans tranche méso de notre tuyau

pour avoir suffisamment de particules

$\left(\therefore \text{ ds } d\tau = S dx \atop \text{pendant } dt \right)$

Bilan Temporel

$dN(t) = n(x,t)\, d\tau = n(x,t)\, S\, dx$

$dN(t+dt) = n(x, t+dt)\, S\, dx$

∴ $d^2N = dN(t+dt) - dN(t) = \frac{\partial n(x,t)}{\partial t}\, dt\, S dx$

Variation Temporelle

Bilan spatial $\quad d^2N = dN_e - dN_s = \phi_e(x,t)\, dt - \phi_s(x+dx, t)\, dt$

$= \bar{j}(x,t)\, S dt - \bar{j}(x+dx, t)\, S dt$

$= -\frac{\partial}{\partial x} \bar{j}(x,t)\, dx\, S dt$

on peut avoir production part. ds ce vol à ce temps

comme ds réaction en chaîne ds diffusion neutrons $\quad \sigma_p \; [m^{-3} s^{-1}]$

Aussi → disparition particules $\quad \sigma_D \; [m^{-3} s^{-1}]$

$= -\frac{\partial}{\partial x} \bar{j}(x,t)\, dx\, S dt + \underbrace{\sigma_p\, S dx\, dt}_{\text{sans dim}} - \sigma_D\, S dx\, dt$

B.T. est comptage du Nb total après - avant
mais B.S. est variation ds zone donnée à t donné
∴ là on met σ_p et σ_D et pas dans B.T.

$\Rightarrow \quad \frac{\partial n}{\partial t} S \cancel{dx}\, dt = -\frac{\partial \bar{j}}{\partial x} S \cancel{dx}\, dt + (\sigma_p - \sigma_D) S \cancel{dx}\, dt$

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{j}}{\partial x} + \sigma_p - \sigma_D}$$

Pour relier vect. $\bar{j}$ avec densité vol. v ⇒ loi empirique phénoménologique

Loi de Fick : $\vec{j} = -D\, \vec{grad}\, n$ ∴ en 1D $\bar{j} = -D \frac{\partial n}{\partial x} \vec{u_x}$

(−) car grad est variation de ↘ à ↗ et part. vont de + concentré à − concentré

/!\ Qd gradient de concentration est très important ∴ loi de Fick n'est plus vérifiée

Diffusion Part 2

terme D = coefficient de diffusion $[m^2 s^{-1}]$

si $D \nearrow$ = molé diffusent facilement dans milieu car $\vec{j} \nearrow$ et = $\phi \nearrow$

Il dépend de :

- nature des molé diffusante à l'échelle micro
  car si elles sont petites = diffusent facilement
- nature du milieu

gaz	liq.	solide
10^{-5}	10^{-9}	10^{-30}

↓ car libre parcours moyen est grand = + d'espace

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \sigma_P - \sigma_D}$$ Eq. de la diffusion + production et + disparition

que ces 2 pour éq diffusion traditionnelle

★ Eq. d'Alembert est invariante par renversement temps mais pas l'éq diffusion
= Eq des propag. d'ondes est thermodynamiquement réversible
mais là c un phénomène irréversible (un sens de t précis)
= Entropie $\nearrow\nearrow$

★ par analyse dimensionnelle : $D = \frac{L^2}{T}$) Longueur et temps caractéristique de la diffusion

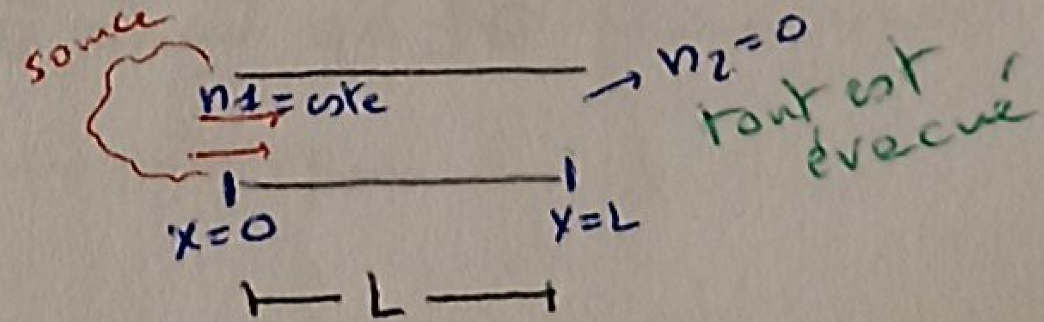
$T = \frac{L^2}{D}$ Si je double longueur tuyau = on attendra 4 fois + longtemps pour que part. arrivent au bout du tuyau

(★ convection $d = v_{courant} \times T$ $= L \propto T$)

$L = \sqrt{DT}$ Ex sentir un parfum à 10 m $\Rightarrow$ $T = \frac{10^2}{10^{-5}} = 10^7 s \simeq 100$ jours !!

Ds liquide et solide c pire !
Laisser sucre fondre ds caffé ça prend $t \nearrow\nearrow$ = faut remuer !

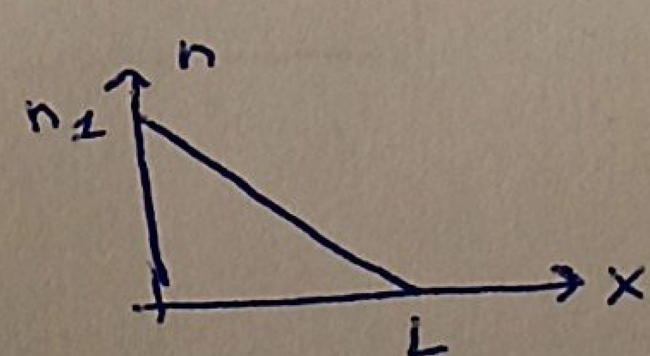
Ex Régime Permanent



= n_1 et n_2 ne dépendent pas du t et tjr les m̂ écoulements

= permanent = pas de Δ / t = $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial n}{\partial x}$ = cste $\Rightarrow$ $n = ax + b$

Par CL $\begin{cases} x=0 & n_1 = b \\ x=L & aL + n_1 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{n(x) = -\frac{n_1}{L}x + n_1}$

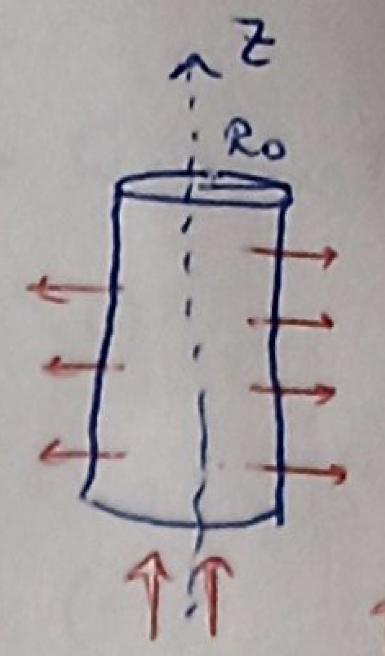


Flux $\phi = \vec{j}(x) S = -SD\frac{dn}{dx} = SD\frac{n_1}{L}$ ϕ dépend pas de x !
= ϕ constant en régime permanent
(si $\sigma_P = \sigma_D = 0$)

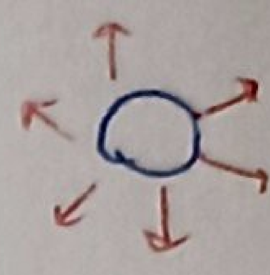
2 Symétrie Cylindrique

Eq. diffusion en 3D : $\boxed{D \Delta n = \frac{\partial n}{\partial t}}$

Cylindre par ex troué & particules sortent des côtés



d'en haut



Ici, n dépend que de (r et t) (coord. cylindriques)

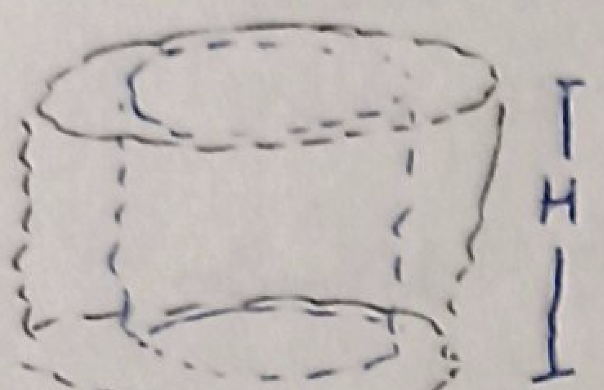
et : $\vec{j} = j(r,t)\,\vec{e_r}$

Par Laplacien en cylindrique : $\boxed{D \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial n}{\partial r}\right) = \frac{\partial n}{\partial t}}$

Ou 2e méthode est Bilan de Particules (ds $d\tau$ pendant dt)

il faut : identifier $d\tau$ $\Rightarrow$ c m̂ découpage en électrostatique et diff. thermique

comme avant c'était entre x et x+dx, donc là entre r et r+dr : entre 2 cylindres



Bilan temporel :

$$dN(t) = n(r,t)\, \underbrace{d\tau}_{\overbrace{2\pi r H}^{S} dr}$$

$$dN(t+dt) = n(r,t+dt)\; 2\pi r H\, dr$$

$$d^2N = \frac{\partial n}{\partial t}\, dt\; 2\pi r H\, dr$$

Bilan spatial :

$$d^2N = \phi_e(r,t)\, dt - \phi_s(r+dr,t)\, dt$$

car si pas permanent : dépend de t

$$d^2N = \iint \vec{j}(r,t).\vec{dS}\,dt - \iint \vec{j}(r+dr,t).\vec{dS}\,dt$$

il faut faire prod. scal.

ici $\vec{j}$ colin. avec $\vec{dS}$: on le sort de $\iint$

$$d^2N = \vec{j}(r,t)\; 2\pi r H dt - \vec{j}(r+dr,t)\; 2\pi H\,(r+dr)\, dt$$

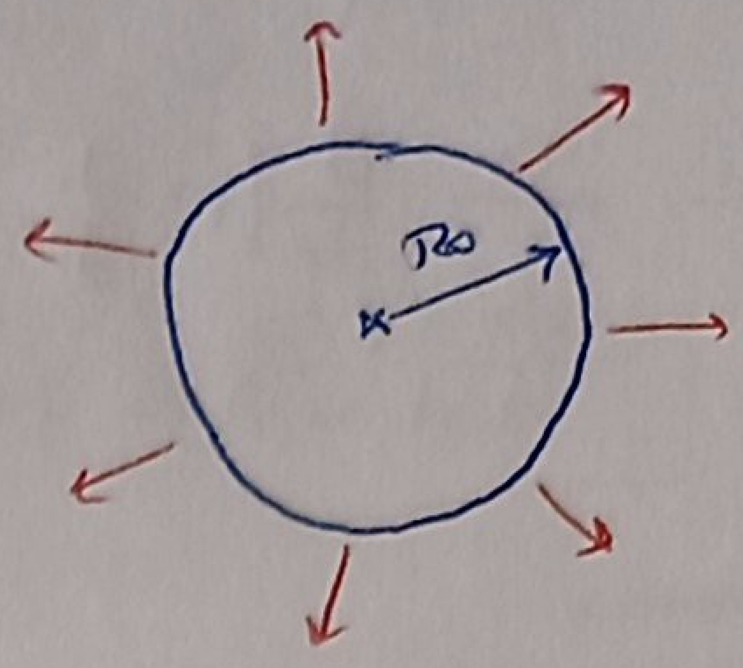
$$= -\frac{\partial}{\partial r}\left(r\, \vec{j}(r,t)\right) 2\pi H\, dr\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial n}{\partial t}\, r = -\frac{\partial}{\partial r}\left(r\, \vec{j}\right)$$

Loi de Fick : $\vec{j} = -D\, \vec{\text{grad}}\, n = -D \frac{\partial n}{\partial r}\vec{e_r}$ (ici)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial n}{\partial r}\right) = D \Delta n}$$

3 Symétrie Sphérique



Ici $n(r,t)$ et donc $\vec{J} = J(r,t)\,\vec{e_r}$

1ère méthode : Eq. diffusion généralisée

$$D\Delta n = \frac{\partial n}{\partial t}$$

par Laplacien sphérique : $\boxed{\frac{D}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial n}{\partial r}\right) = \frac{\partial n}{\partial t}}$

2e méthode : Bilan de particules

volume = boule de rayon r à boule de rayon r+dr

B.T : $dN(t) = n(r,t)\,\underbrace{d\tau}_{4\pi r^2 dr}$ $\qquad dN(t+dt) = n(r,t+dt)\,4\pi r^2 dr$

$$d^2N = dN(t+dt) - dN(t) = \frac{\partial n(r,t)}{\partial t}\,dt\,4\pi r^2 dr$$

B.S : $d^2N = dN_e(r) - dN_s(r+dr) + \underbrace{dN_{prod} - dN_{Disp}}_{\text{on peut les ajouter (pour plaisir)}}$

$$= \phi_e(r,t)\,dt - \phi_s(r+dr,t)\,dt + \sigma_p\,d\tau\,dt - \sigma_D\,d\tau\,dt$$

$\oiint \vec{J}\cdot\vec{dS} = J\,4\pi r^2 dr$

$$= J\,4\pi r^2\,dt - J\,4\pi(r+dr)^2\,dt + (\sigma_p - \sigma_D)\,4\pi r^2 dr\,dt$$

$$= -4\pi\frac{\partial}{\partial r}(r^2 J)\,dr\,dt + (\sigma_p - \sigma_D)\,4\pi r^2 dr\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial n}{\partial t}r^2 = -\frac{\partial}{\partial r}(r^2 J) + (\sigma_p - \sigma_D)r^2}$$

Loi de Fick : déf courant diffusion est dirigé de zone concentré à (-) concentré (à cause du signe (-))

$\vec{J} = -D\,\vec{grad}\,n$

ici $-D\frac{\partial n}{\partial r}\vec{e_r}$

grad est d'autant + grand qd les inhomogénéités sont + intense ds l'espace. Loi phénoménologique

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{D}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial n}{\partial r}\right) + (\sigma_p - \sigma_D) = D\Delta n + (\sigma_p - \sigma_D)}$$

Solution de cette éq° en régime permanent : $n(r,\cancel{t}) \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = 0$

$$\therefore \frac{D}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dn}{dr}\right) = \sigma_D - \sigma_p$$

d et pas ∂ car pas de t

si on dérive $\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{\partial n}{\partial r}\right)$ on aura ED non linéaire ∴ des coeff qui dépendent de et on pourra pas résoudre

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dn}{dr}\right) = \frac{r^2(\sigma_D - \sigma_p)}{D} \Rightarrow r^2\frac{dn}{dr} = \frac{r^3(\sigma_D-\sigma_p)}{3D} + C$$

$$\frac{dn}{dr} = \frac{r(\sigma_D - \sigma_p)}{3D} + \frac{C}{r^2}$$

⚠ si r peut être = 0 ∴ $\frac{C}{r^2}$ diverge ∴ on choisit C = 0 pour pas diverger

(si r peut pas être = 0 ∴ laissons ce terme)

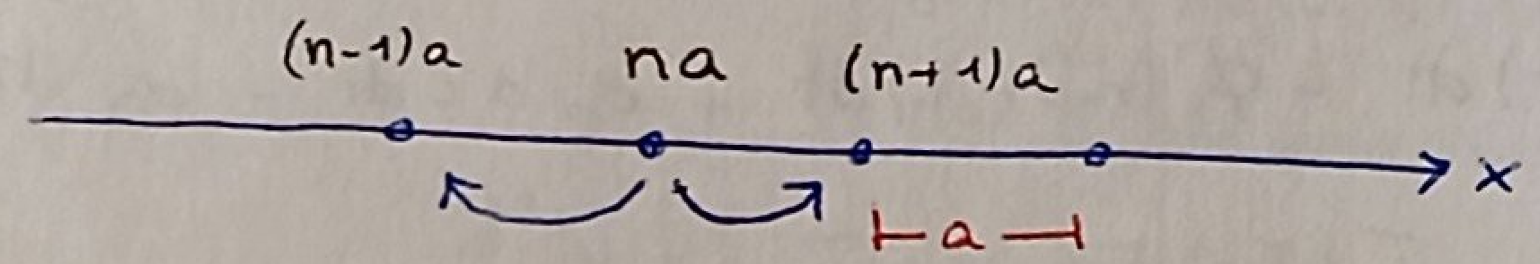
ici $r \geq R_0$ ∴ ✓

$$\boxed{n(r) = \frac{r^2(\sigma_D - \sigma_p)}{6D} - \frac{C}{r} + C'}$$

4 Marche Aléatoire

"La marche de l'homme ivre"

à 1D



"comme ~~sites~~ impuretés ds cristal qui peuvent sauter de site tétraédrique à un autre"

Soit τ durée d'1 saut et on commence à $t=0$ et $x=0$

et à partir de n sauts on sera à $x_n = na$

Quelle est la proba d'être à x_n à t_{n+1} $P(x_n, t_{n+1})$?

Pour être à x_n, avant (∴ à t_n) elle était soit à x_{n-1} soit à x_{n+1}

∴ 2 éven. ~~dif~~ disjoints ∴ on les additionne

$$P(x_n, t_{n+1}) = \frac{1}{2}P(x_{n-1}, t_n) + \frac{1}{2}P(x_{n+1}, t_n)$$

car elle pourrait aller ds l'autre sens et pas forcément x_n

Transformer cette proba discrète en continu -- comment ?

Soit $\tau \ll t$ caractéristique de $P(x,t)$ et $a \ll$ longueur caractéristique de $P(x,t)$

$$p(x = na, t+\tau) = \frac{1}{2}p(x-a, t) + \frac{1}{2}p(x+a, t)$$

⇒ continue

On applique Taylor

$$p(x \pm a, t) \simeq p(x,t) \pm a\frac{\partial p}{\partial x}(x,t) + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$$

$$p(x, t+\tau) \simeq p(x,t) + \tau\frac{\partial p}{\partial t}(x,t)$$

ordre 1 suffit ici

+ $\frac{1}{2}\cancel{p(x,t)}$ + $\cancel{\frac{1}{2}a}\cdots$ + $\frac{a^2}{4}\cdots$

Diffus. Part. 4

$$\tau \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \frac{a^2}{2\tau}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2}} \qquad D = \frac{a^2}{2\tau}$$

~~...~~ $\approx$ ordre de grandeur $D = \frac{L^2}{T}$ était bon

5 Sol. gaussienne

La proba pour que la particule soit sur un site particulier en $x_n = na$ au bout de n sauts est une proba gaussienne

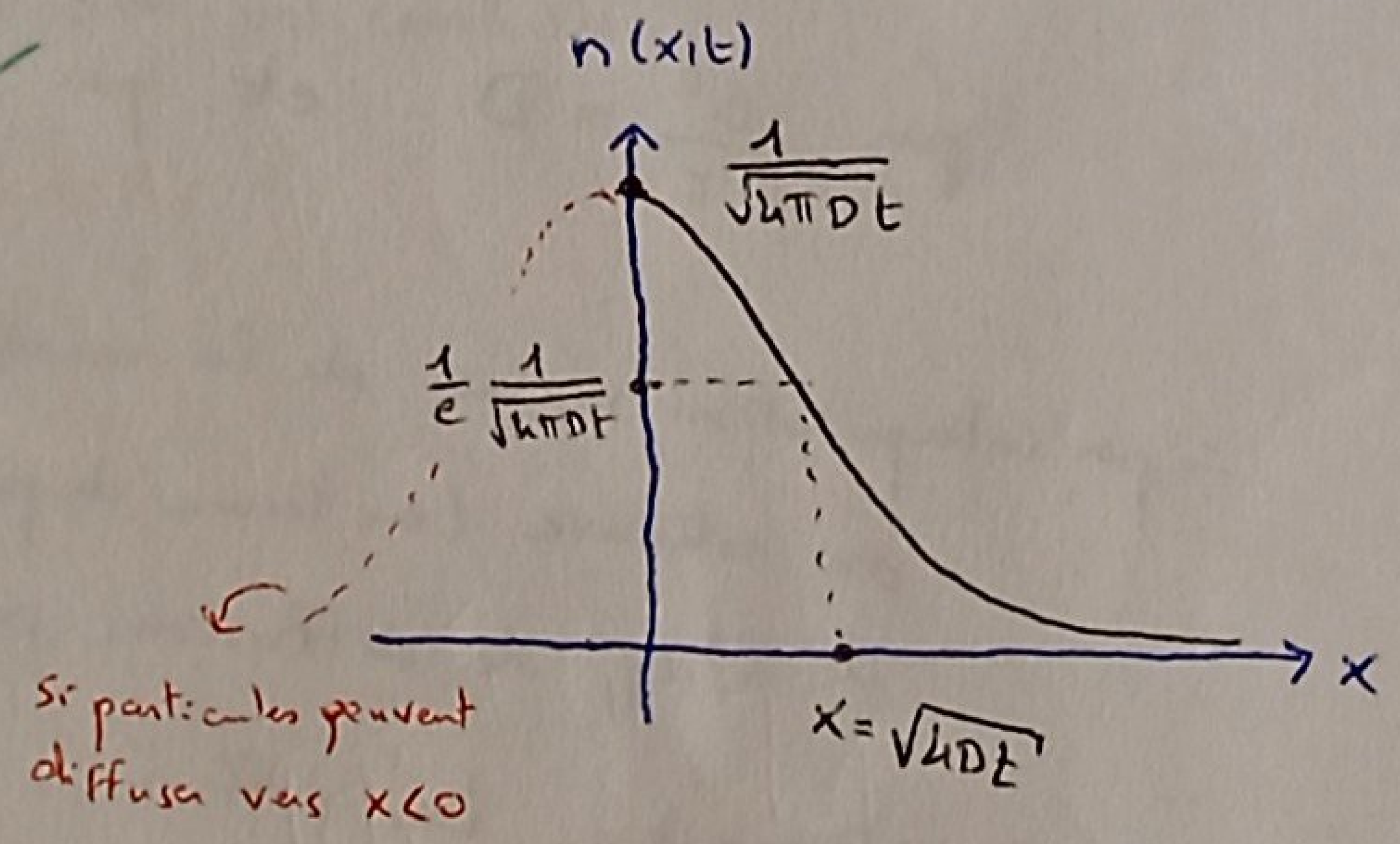
Au début, on avait tuyau et en $x=0$ on avait un dirac de particules (le parfum) qui sont parfaitement localisées en $x=0$ et $t=0$

La sol. de ce pic de Dirac après diffusion ds tuyau est :

$$n(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right)$$

c'est le cas aussi pour conductivité thermique qd on chauffe la barre

Si on $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ on aura $D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{\partial n}{\partial t}$ ✓

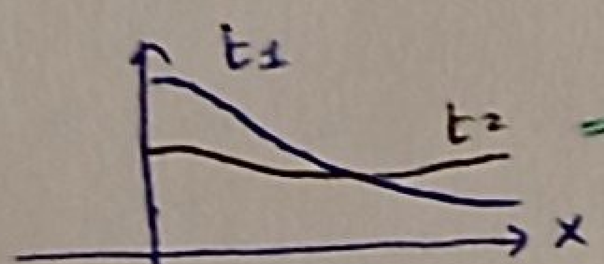


- à t fixé, c'est une fct paire en x avec un max à $x=0$ ⇒ gaussienne
- à $t \to 0$ ⇒ singularité car $n \to \infty$ → Dirac
- Largeur gaussienne ? $\frac{\max}{\exp(1)}$

  $\Rightarrow = \exp\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right)$ avec $\frac{-x^2}{4Dt} = -1 \Rightarrow x = \sqrt{4Dt}$

  par $D = \frac{L^2}{\tau} \Rightarrow L = \sqrt{D\tau}$ $\approx$ bon ordre de grandeur

- (+) t ↗ (+) la courbe a max ↘ et s'étale + largement



⇒ car il y a "l'uniformisation" de la concentration par la diffusion
$\Rightarrow$ il y a (-) particules au centre et (+) aux bords

Maintenant

En raisonnant sur marche aléatoire et en raisonnant sur proba par passage à la limite, on va retrouver ce profil gaussien

- à instant t, au bout de N sauts de durée τ, part. se trouve à $x = na$ après q sauts à gauche et $(N-q)$ sauts à droite

$$p(x,t) = \binom{N}{q} \times \frac{1}{2^N}$$

q gauche parmis N sauts

↘ divisé nb possibilité total

$$\left[\quad \underset{na}{\overset{\shortparallel}{x}} = -\overset{\text{à gauche}}{q a} + (N-q)\,a = (N-2q)\,a \quad \rightarrow \quad q = \frac{N-n}{2} \quad \right]$$

$$p(x,t) = \frac{N!}{q!\,(N-q)!\,2^N} = \frac{N!}{\left(\frac{N-n}{2}\right)!\,\left(\frac{N+n}{2}\right)!\,2^N}$$

proba pour que au bout de (et $t = N\tau$), la part. se trouve

$$\ln P = \ln(N!) - \ln\left(\left(\frac{N-n}{2}\right)!\right) - \ln\left(\left(\frac{N+n}{2}\right)!\right) - \ln(2^N)$$

Faisons DL de $\left(\frac{n}{N}\right)$

= tendre Nb saut à +

à $N \rightarrow +\infty$ Formule de Stirling $\ln N! \simeq N \ln N$

et on trouve $P(\underset{n}{x}, t) \simeq \sqrt{\frac{1}{2\pi N}} \exp\left(\frac{-n^2}{2N}\right)$

par $\begin{cases} x_n = na \\ t = N\tau \end{cases} \Rightarrow \exp\left(\frac{-x_n^2\,\tau}{2a^2 t}\right)$ et $\sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}}$

par $\frac{a^2}{2\tau} = D$ et par $\frac{p(x,t)}{a}$ = densité proba par unité de longueur $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right)$

Profile Gaussien

= par interprétation micro de la marche au hasard

on retrouve (en terme de proba) les sol. classiques

de l'éq° de diffusion, pour un pic de dirac

= intimement : La diffusion est une marche au hasard

(et tout phénomène aléatoire, à N ↗, tend vers gaussienne et c pour cela sol. éq° diff. est gaussienne)

Diffusion 3D

Imaginons molé diffusant ds une pièce.

Mentalement, on isole un volume de contrôle délimité par surf. de contrôle qui délimite un syst ouvert ∴ molé traversent ce vol. (entrant et sortant)

vol. d'échelle méso ds vol. contrôle

- $N_{(t)} = \iiint_{M \in \text{vol. contrôle}} dN = \iiint n(M,t)\, d\tau_M$

∴ variation $\frac{dN}{dt} = \iiint \frac{\partial n}{\partial t}\, d\tau$ ← bilan temporel

- Toutes surf. fermées sont orientées vers ext

Flux à travers cette surf. fermée $\phi = \oiint \vec{j} \cdot d\vec{S}$

bilan spatial

donc si $\vec{j}$ sort ∴ m̂ sens $d\vec{S}$ alors $\phi > 0$

mais $\frac{dN}{dt} < 0$ car sortant

∴ $\frac{dN}{dt} = -\phi$

- $\iiint \frac{\partial n(M,t)}{\partial t}\, d\tau_M = -\oiint \vec{j} \cdot d\vec{S}$ relat° global sur vol. contrôle

on cherche relat° locale → Ostrogradski

$= -\iiint_{M \in \text{vol.}} \operatorname{div} \vec{j}\, d\tau_M$

∴ $\iiint \left(\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}\right) d\tau = 0$ ça veut pas dire que ( ) = 0

mais ∵ c vrai qq soit le choix de vol. contrôle ∴ $\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0}$

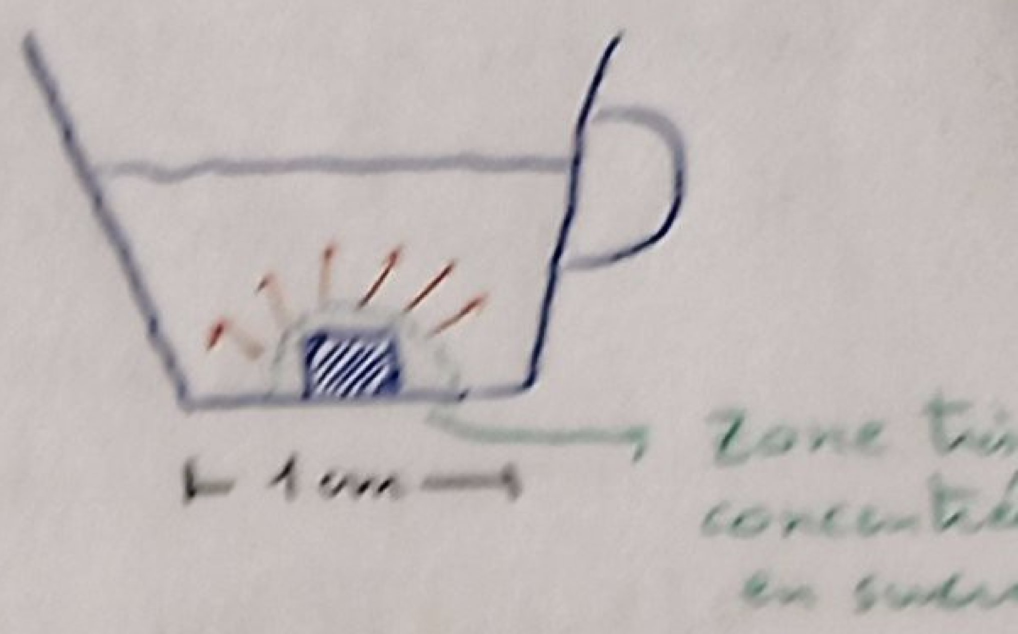
Eq. de continuité (de conservation)

∴ on est passé d'un bilan intégral global à local

loi Fick : $\vec{j} = -D\, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, n$ ⇒ $\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} - D\Delta n = 0}$

Ex : Est-il nécessaire de remuer le sucre ds café ?

= utiliser convection



- c un problème à coord cylindrique ou sphérique
- et on peut par analyse dimensionnelle trouver temps caractéristique

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$$

$$\frac{[L^{-3}]}{[T]} = D \frac{[L^{-3}]}{[L^2]} \rightarrow [D] = L^2 . T^{-1} \qquad D \sim \frac{L^2}{T}$$

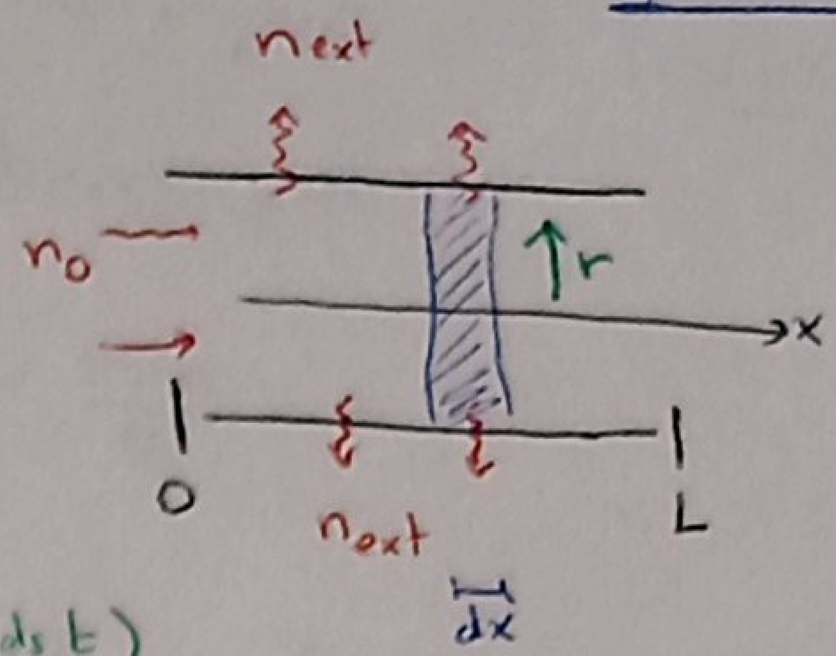
$L \sim cm$

$D \sim 10^{-9}$ (liquide) $\Rightarrow T \sim 10^5 s$ (1 jour !) Faut remuer

Exo qui résume tout

Diffus - Part. 6

diffusion unidirectionnelle avec pertes latérales



En régime permanent, nb molé entrantes ds $d\tau = S dx$ = nb molé sortantes → on s'en fou du bilan temporel

(si entrée > sortie ∴ après certain dt il y aura accumulation (ou diminution si s > e) mais là en permanent = m̂ chose ds t)

$$\Rightarrow \quad dN_e(x) = dN_s(x+dx) + dN_{s\,lat}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{j(x)S - j(x+dx)S}_{-\frac{\partial j}{\partial x}dx\,\pi r^2} - 2\pi r\,dx\,K\,(n(x) - n_{ext}) = 0$$

↳ car $d\Phi_{lat} = \frac{dN_{s\,lat}}{dt} = dS\,K\,(n(x) - n_{ext})$ cte proportionnalité

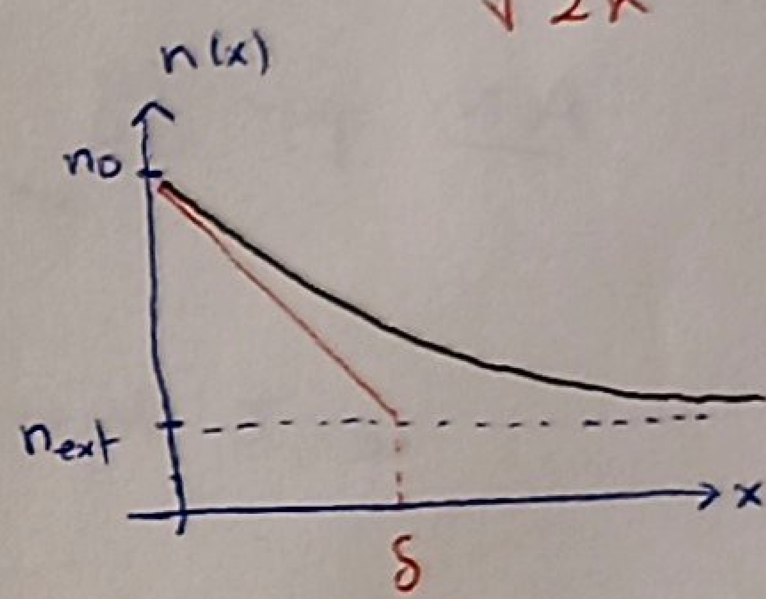
si $n(x) > n_{ext}$ → flux latéral

par Fick $j = -D\frac{\partial n}{\partial x}$ $\Rightarrow$ $$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{2K}{rD}n(x) = -\frac{2K}{rD}n_{ext}$$ ED 2nd ordre

↓ : donne exponentielle ou ch/sh

$$\Rightarrow \quad n(x) = Ae^{x/\delta} + Be^{-x/\delta} + n_{ext}$$ sol. part.

$$\delta = \sqrt{\frac{rD}{2K}}$$



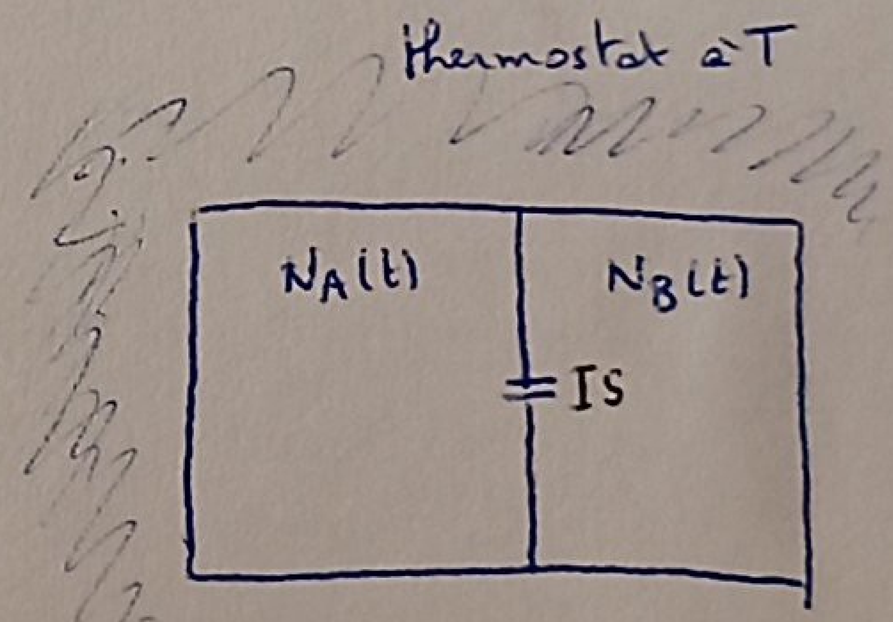
CL $\quad x = 0 : n = n_0$

$L \gg \delta \quad \Rightarrow A = 0$ pour pas diverger au bout de qq δ (à L) $Ae^{x/\delta} \nearrow\nearrow$

$$\Rightarrow \quad n(x) = (n_0 - n_{ext})e^{-x/\delta} + n_{ext}$$

à $x \to \infty$ donc à la fin (à L) on aura m̂ concent. qu'à l'ext

Effusion gazeuse à travers un petit trou



$S = 1\,mm^2$ → section

$N_A(t=0) = \mathcal{N}_A$ (= 1, ...) → nb avo...

$N_B(t=0) = 0$

Quel est t caractéristique τ au bout duquel ces 2 compartiments seront ds m̂ état ?

Normalement à $t \to \infty$ $\quad N_A = \frac{\mathcal{N}_A}{2} = N_B$ par diffusion

La loi Fick n'est peut être pas valable ici car ≠ concent. est très grand entre les 2 compartiments

Faisons ≈ des hypothèses pour résoudre ce problème

Hypothèses

- GP
- gaz reste à temp T qq soit sa concentration (hypo très abusive)
- isotropie champ v ∴ ⅓ selon chaque direction ∴ ⅙ selon chaque sens
- Si toutes molé gaz vont à la vitesse quadratique moyenne $u = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

entre t et t+dt, les part. qui passent de A à B sont ceux qui se trouvent ds cylindre proche du trou tq $d\tau = $ S u...

$$= \quad dN_{A\to B} = \frac{N_A}{V}S\frac{u}{6}dt$$ → que $\frac{1}{6}$ qui ont bonne direction et bon sens

$$dN_{B\to A} = \frac{N_B}{V}S\frac{u}{6}dt$$

autre hypo abusive ici c'est qu'on a considéré que distrib part. est unif. : $n = \frac{N}{V}$

Bilan particule :
$$dN_A = dN_{B \to A} - dN_{A \to B} = \frac{su\,dt}{6V}(N_B - N_A) \Rightarrow \frac{dN_A}{dt} = \frac{su}{6V}(N_B - N_A)$$

$$N_A + N_B = \mathcal{N}_A$$

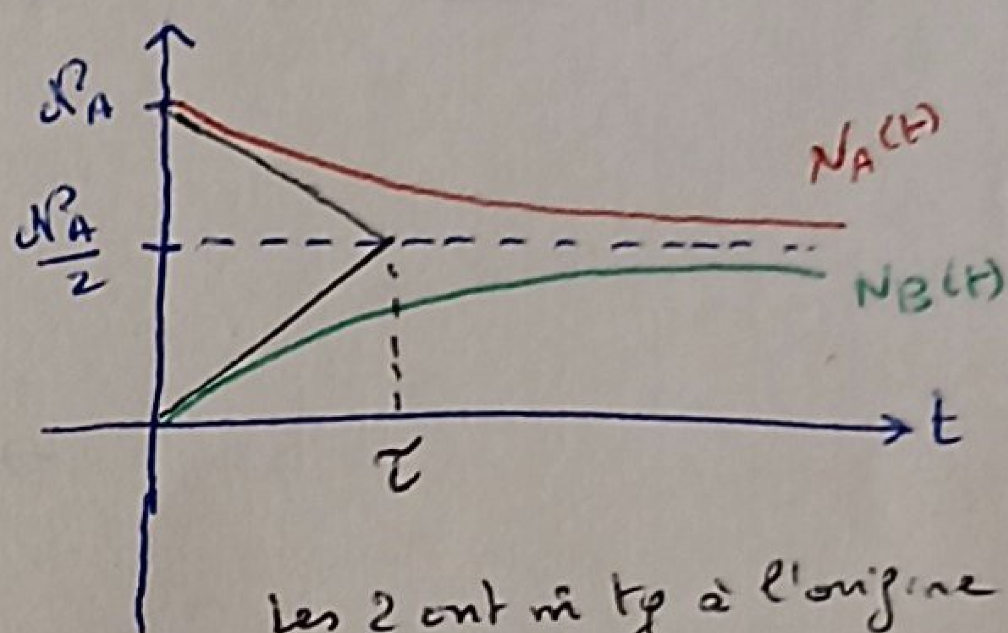
$$\therefore \frac{dN_B}{dt} = -\frac{dN_A}{dt}$$

$$\frac{dN_A}{dt} = \frac{su}{6V}(\mathcal{N}_A - 2N_A) \Rightarrow \boxed{\frac{3V}{su}\frac{dN_A}{dt} + N_A = \frac{\mathcal{N}_A}{2}} \qquad \tau = \frac{3V}{su}$$

$$N_A(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{\mathcal{N}_A}{2} \qquad \text{à } t \to \infty,\ N_A = \frac{\mathcal{N}_A}{2}$$

par $N_A(0) = \mathcal{N}_A \Rightarrow A = \frac{\mathcal{N}_A}{2} \Rightarrow \boxed{N_A(t) = \frac{\mathcal{N}_A}{2}\left[1 + e^{-t/\tau}\right]}$

par $N_B = \mathcal{N}_A - N_A \Rightarrow \boxed{N_B(t) = \frac{\mathcal{N}_A}{2}\left[1 - e^{-t/\tau}\right]}$



Les 2 ont m̂ tg à l'origine

A.N. pour gaz 80% N_2 et 20% O_2
on trouve $\tau \sim 2\,\text{min}$ peut être sous évalué car modèle très simple

ce τ dépend de V, s, m, T