

Orches

## TCh1) Eq. d'Alm<sup>bert</sup> unidimensionnelle

# 1] Corde Vibrante.

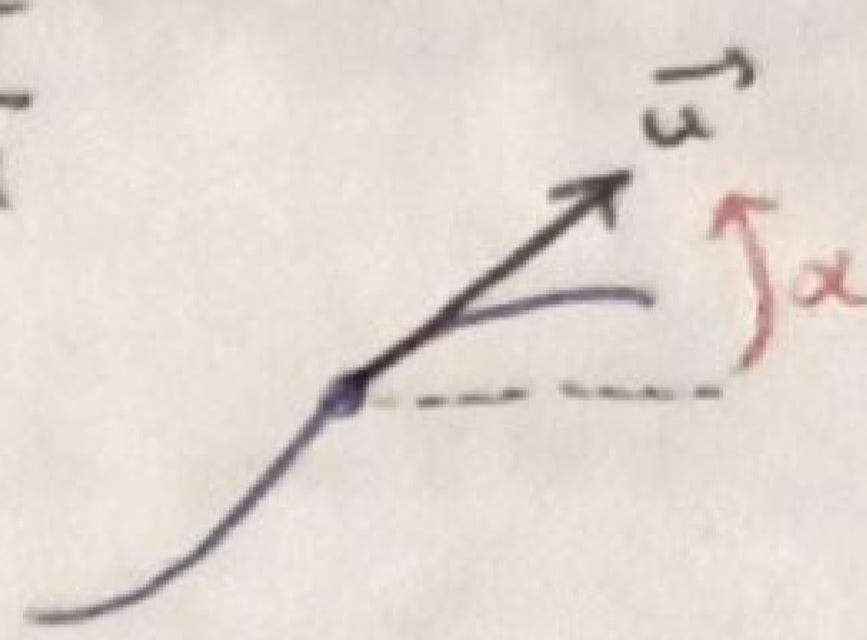
PhA1  
DUN 2022 p-892

Livre  
1 ong.  
 $P_C - P_C^*$

- masse linéaire  $\mu$  [Kg.m<sup>-1</sup>], souple (pas de résist.) et tendue ( $T \nearrow$  devant  $\vec{F}_g$ ) pesanteur
  - par onde, pt x de corde à mouv. en y  $\rightarrow$  mouv-transversal = onde transv.
  - $dx$  de corde c. masse  $\mu dx$   $y(x,t)$
  - et élément os petit est soumis à : tension à droite  $\vec{T}_d(x+dx, t)$   
tension à gauche  $\vec{T}_g(x, t)$

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y = \vec{T}_d + \vec{T}_f = \vec{T}(x+dx, t) - \vec{T}(x, t) \quad \Rightarrow \quad \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x}$$

• soit  $\vec{u}$  vect. unit. tg à combre =  $\begin{cases} 0 = \frac{\partial}{\partial x} (T \cos \alpha) \\ \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (T \sin \alpha) \end{cases}$



$$\cdot |\alpha| \ll 1 \quad \therefore \cos \alpha \approx 1 \text{ et } \sin \alpha \approx \alpha \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial}{\partial x} T \quad \therefore \text{indép de } x \text{ et tension constante} \\ \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (T \alpha) \end{array} \right. \Rightarrow \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad T = \text{cste}$$

$$\text{par } \tan \alpha \approx \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Eq d'Almout}$$

$$\left[ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = m^{-1} \quad \left[ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] = m \cdot s^{-2} \quad \Rightarrow \left[ \frac{c}{T} \right] = s^2 \cdot m^{-2} \quad \therefore v^2 \text{ en invese} \quad c = \sqrt{\frac{1}{\mu}} \text{ v\'elocit\'e}$$

On trouve  $f(x \pm ct)$  solution de l'éq [ou  $f(t \pm \frac{x}{c})$ ]

$\nearrow$  (-) onde vers  $\times \nearrow$   
 $\searrow$  (+) onde vers  $\times \searrow$

l'onde progressive est harmonique quand cette sol. est harmonise = sinusoidale

$$y(x,t) = y_0 \cos(\omega t - kx + \phi_0)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

[rad.s<sup>-1</sup>] pulsation liée  
à T [s] et f [Hz]

$$\text{Complexe} \quad y = \operatorname{Re}(\underline{y}) \quad \text{tq} \quad \underline{y}(x,t) = y_0 e^{j(\omega t - Kx + \phi_0)} = \underline{y}_0 e^{j\phi_0} e^{j(\omega t - Kx)}$$

$y_0$  L'amplitude complexe

$$\frac{\partial \underline{y}}{\partial t} = j\omega \underline{y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{y}}{\partial x} = -j\kappa \underline{y} \quad \Rightarrow \quad -\kappa^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad \text{Eq. dispersion}$$

elle revoie les pulsations temp. et spatiale des ondes prop. harm. Solutions de l'éq. d'Alembert

(OPH) . Onde prop. harm. se propage à vitesse de phase. A x=0, y(0,t)=y<sub>0</sub> cos(wt). A x donné,

$$\text{la } V_Q = \frac{x-0}{\Delta t} = \frac{x}{\frac{\omega}{K} \times} = \frac{w}{K}$$

la v.v. à laquelle la phase OPH se propage =  $V_Q = \frac{\omega}{K}$

- On produit onde des cordes, elle se propage puis s'arrête (par ex) - onde de prof. localisé, dont l'étendue spatial est la distance et

\* Tonnes Ondes prop. me sont pas strictement larm-

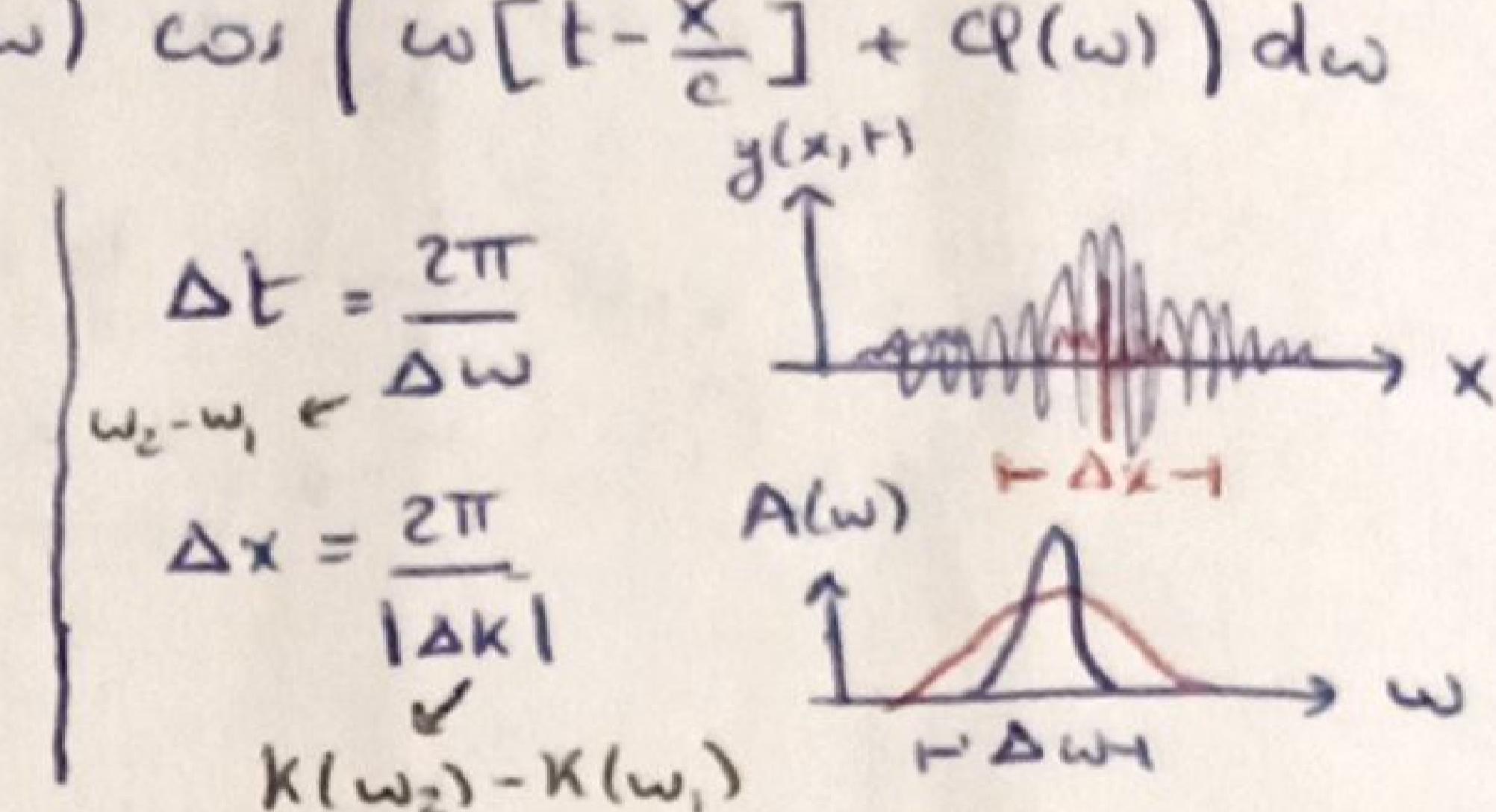
$\star$  Tte onde périod. se décompose en série Fourier =  $\sum \infty$  d'OPH des pulsations multiples de celle du fondamental

- \* OPH ou Fourier d'OPH est défini de  $t \rightarrow -\infty$  à  $t \rightarrow +\infty$  = sans début ni fin

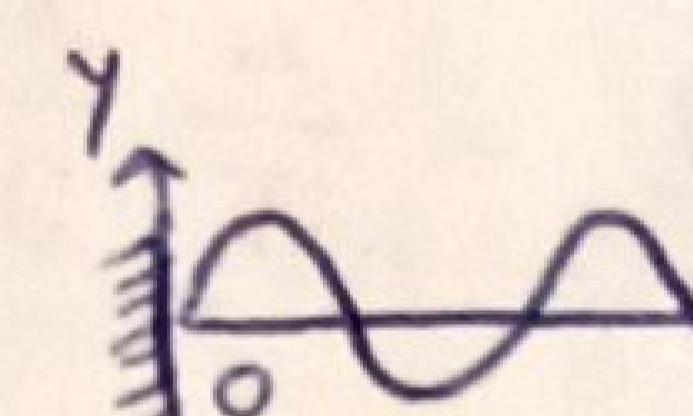
Localiser Onde ds espace et temps  $\Rightarrow$  TF en cosinus :

cette  $\Sigma$  OPN est appelée paquet d'onde.

Si onde est temporellement ou spatiallement breve  
→ spectre est large et vice versa ..



## 2] Stationnaire



Cond. lim.:  $\forall t, y(0, t) = c$

Si on de superpose en  $x$  décroît, sa niféchit en  $x=0$ , puis  $\rightarrow x$  croît  $\Rightarrow$  superposition des 2 ondes

$$(\text{de pulsat. spot. et temp. } \star) : \quad \underline{y}(x,t) = \underline{y}_0^+ e^{j(\omega_r t + K_r x)} + \underline{y}_0^- e^{j(\omega_r t - K_r x)} \rightarrow \text{n'Hechne}$$

$$\text{par C.L. } \underline{\underline{y}}(0,t) = 0 = \underline{\underline{y}^+} e^{j\omega_i t} + \underline{\underline{y}^-} e^{j\omega_r t} \Rightarrow \omega_i = \omega_r = \omega \quad \therefore K_i = K_r = \frac{\omega}{c} = K$$

$$\Rightarrow \underline{y_0^+} + \underline{y_0^-} = 0$$

Pulsation varie pas par réflexion ni transmission  
sur obstacle immobile

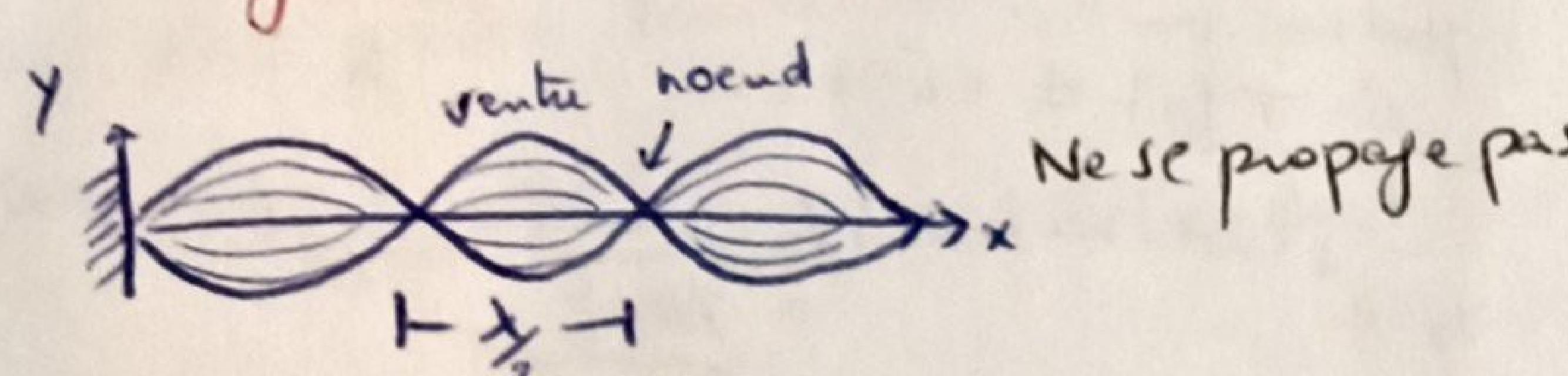
$$\Rightarrow y(x,t) = \underline{y_0} e^{j\omega t} \underbrace{\left[ e^{jKx} - e^{-jKx} \right]}_{2j \sin(Kx)} = \underline{\underline{y_0}} e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} \sin(Kx)$$

(par  $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ ) si on cherche  $\operatorname{Re}(y)$  on aura  $\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow -\sin(\omega t)$

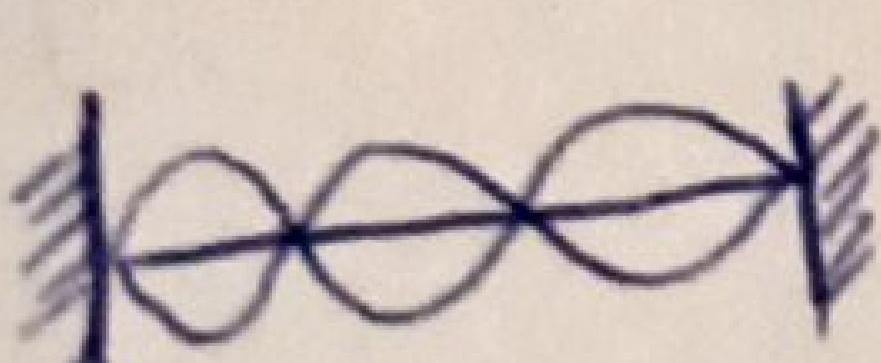
$$\sin \arg(y_0^+) = \varphi$$

$$y(x,t) = -y_0 \sin(\omega t + \alpha) \sin(Kx)$$

# Onde stationnaire (var. temp. et spatiale ds 2 fet +)



- gration  
↓  
OS harm. =  $\sum k_0 P$  de  $m \omega$ , m amplitude et se propagent en sens opposés



ici  $x = \ell$  : on impose un mouvement de vibration  $\Rightarrow \ell = m \frac{\lambda}{2} \Rightarrow K = \frac{m\pi}{\ell} \Rightarrow \omega = cK = m \frac{\pi c}{\ell}$   
 ce sont les pulsations propres de vibration

Les sélections temp. et spet. sont quantifiées et discutée si on a 2 C.L.

- \* Les pulsations temp. et sp.
- \* Chaque n détermine un mode propre de vibration

$$y_n(x,t) = Y_n \sin\left(\frac{m\pi c}{\rho} t + \phi_n\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{\rho}\right)$$

= régime libre harmonique stationnaire

les modes propres d'une corde attachée à 2 extrémités :

Livres  
2 onde



La sol. générale est comb. liné. des modes propres :  $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin\left(n\frac{\pi c}{\ell} t + \phi_n\right) \sin\left(n\frac{\pi}{\ell} x\right)$

•  $\lambda_n = \frac{2\ell}{n}$  = à m $\geq 1$  pas vraiment de sens physique car  $\lambda_n$  devient la distance entre deux noeuds qui forment corde

•  $y(x,t)$  ici est =  $f(x)g(t)$   $\Rightarrow$  par EA  $\Rightarrow f''(x)g(t) - \frac{1}{c^2}f(x)g''(t) = 0 \Rightarrow \frac{f''}{f} = \frac{1}{c^2} \frac{g''}{g} = A$

on intègre sur les pt ou fait g ne s'annule pas

$\frac{f''}{f}$  est indép de t = A aussi et  $\frac{g''}{g}$  indép de x = A aussi  $\Rightarrow A = \text{cste}$

On remplace EA par :  $\begin{cases} f'' - Af(x) = 0 \\ g'' - c^2 A g(t) = 0 \end{cases}$  par C.L.  $\begin{cases} y(0,t) = f(0)g(t) = 0 \\ y(\ell,t) = f(\ell)g(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \text{ car } g(t) \\ f(\ell) = 0 \text{ pas identiquement nulle} \end{cases}$

### \* Résolution sur f

•  $A > 0 \Rightarrow f(x) = \alpha \cosh(x\sqrt{A}) + \beta \sinh(x\sqrt{A})$  ch s'annule jamais  $\Rightarrow$  s'annule pas 2 fois

•  $A = 0 \Rightarrow f(x) = \alpha x + \beta$  s'annule pas 2 fois (fct affine) = X

•  $A < 0$ , on pose  $A = -K^2 \Rightarrow f(x) = \alpha \cos(Kx) + \beta \sin(Kx)$   $\begin{cases} f(0) = \alpha = 0 \\ f(\ell) = \beta \sin(K\ell) = 0 \Rightarrow K\ell = m\pi \end{cases}$

$$f(x) = \beta \sin\left(m\frac{\pi}{\ell} x\right)$$

### \* Résolution sur g

Par la solution sur f,  $g''(t) + c^2 \left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2 g(t) = 0 \Rightarrow g(t) = g_0 \cos\left(\frac{m\pi c}{\ell} t + \phi\right)$

• En posant  $\beta g_0 = y_0 \Rightarrow y(x,t) = y_0 \sin\left(m\frac{\pi}{\ell} x\right) \cos\left(\frac{m\pi c}{\ell} t + \phi\right)$  onde stationnaire

• En posant  $\beta g_0 = y_0 \Rightarrow y(x,t) = y_0 \sin\left(m\frac{\pi}{\ell} x\right) \cos\left(\frac{m\pi c}{\ell} t + \phi\right)$  mouv. à 1 extrémité  $\Rightarrow y(0,t) = a_0 \cos(\omega_0 t)$  en  $x=0$

3] Régime harmonique Force : Corde de Meldé  $\begin{cases} \text{ante extrém. attaché} \Rightarrow y(\ell,t) = 0 \\ \text{autre extrém. attaché} \Rightarrow y(0,t) = 0 \end{cases}$

$$y(x,t) = y_0^+ e^{j(wt-Kx)} + y_0^- e^{j(wt+Kx)}$$

$$\text{par C.L. t} \quad y_0^+ e^{j\omega t} + y_0^- e^{j\omega t} = a_0 e^{j\omega t} \quad \Rightarrow w = \omega_0 \text{ et } K = \frac{\omega_0}{c}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_0^+ + y_0^- = a_0 \\ y_0^+ e^{-jK\ell} + y_0^- e^{jK\ell} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0^+ = a_0 \frac{e^{jK\ell}}{e^{jK\ell} - e^{-jK\ell}} = a_0 \frac{e^{jK\ell}}{2j \sin(K\ell)} \\ y_0^- = -a_0 \frac{e^{-jK\ell}}{e^{jK\ell} - e^{-jK\ell}} = -a_0 \frac{e^{-jK\ell}}{2j \sin(K\ell)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = a_0 \frac{e^{jK\ell}}{2j \sin(K\ell)} e^{j(w\ell - Kx)} - a_0 \frac{e^{-jK\ell}}{2j \sin(K\ell)} e^{j(w\ell + Kx)}$$

$$= a_0 \frac{e^{j\omega t}}{2j \sin(K\ell)} \left[ e^{jK(\ell-x)} - e^{-jK(\ell-x)} \right] = a_0 e^{j\omega t} \frac{\sin(K[\ell-x])}{\sin(K\ell)}$$

En réelle

$$y(x,t) = a_0 \cos(\omega_0 t) \frac{\sin(K[\ell-x])}{\sin(K\ell)}$$

onde stationnaire et harmonique et vibre à la pulsation imposée par C.L.

• Elle rentre en résonance = amplitude diverge à  $\sin(K\ell) = 0$

$$\text{à } K\ell = m\pi \Rightarrow \omega_0 = m\frac{\pi c}{\ell}$$

en réalité, les frottements et non-linéarité limitent l'amplitude = pas de divergence expérimentale --

↑  
résonance de corde de Meldé quand amplitude passe par max aux fréq. propres de la corde

pas de divergence expérimentale --

Donc 2 OPH de m<sup>me</sup> amplitude de direction opp- sont superposés  $\Rightarrow$  OSH

$$a \cos(\omega t - Kx) + a \cos(\omega t + Kx) = 2a \cos(\omega t) \cos(Kx)$$

OSH se décompose en 2 OPH de m<sup>me</sup> amplitude et m<sup>me</sup> pulsation mais dir. opp.

De m<sup>me</sup> OPH se décompose en 2 OSH en quadrature spatiale et temporelle

$$a \cos(\omega t) \cos(Kx) + a \sin(\omega t) \sin(Kx) = a \cos(\omega t - Kx)$$

\* si onde se propage ds milieu  $\infty$   $\Rightarrow$  OP est la + adaptée

\* " " localisé entre 2 pts, soumise à cond. lim.  $\Rightarrow$  OS est la + adaptée

## Résumé

- Appliquer PFD à  $dx$  de corde puis éq. propagation  $\Rightarrow$  EA

- Trouver sol. et éq. dispersion si EA  $\approx \omega = KC$

- Choisir sol. progressive si milieu illimité et sans discontinuité, sinon à milieu fini  $\Rightarrow$  station.

- Ds OSH ne pas oublier les déphasages:  $y(x,t) = y_0 \cos(\omega t + \alpha) \cos(Kx + \psi)$

onde libre  $\approx$  pas d'oscillation qui impose le mouv. corde = chosir origine  
Temps où amp. est max ( $\phi=0$ ) ou nulle ( $\phi=\frac{\pi}{2}$ )  $\cos(\omega t + \alpha) = \sin(\omega t)$

- Pour déphase temporel  $\psi$       ↗  
      Onde générée par oscillation [corde Helde] = C-L. court raccordement entre corde et oscill.

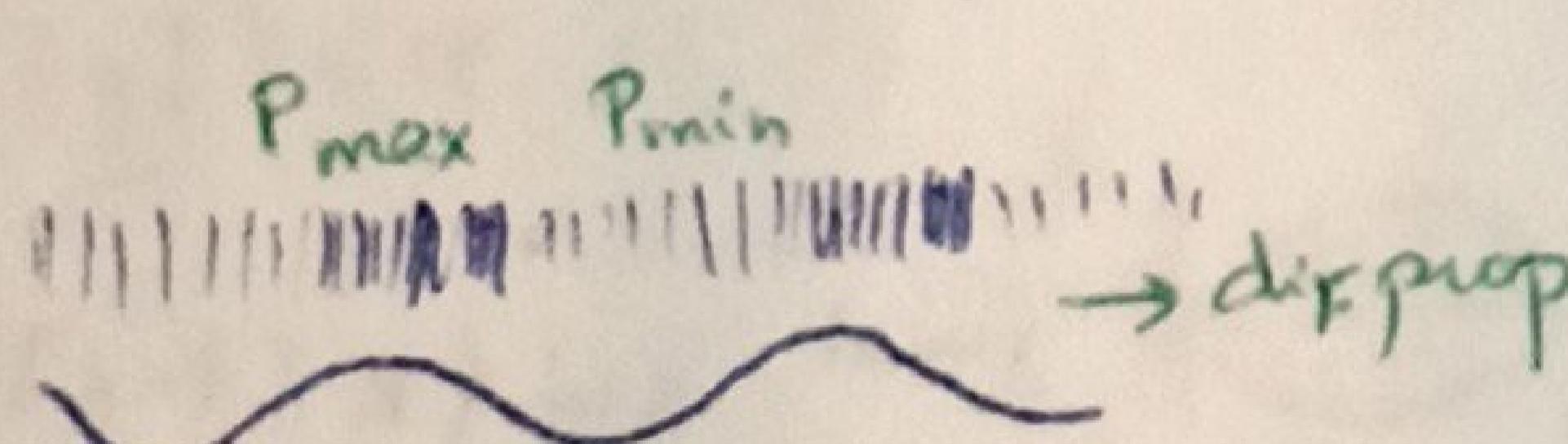
- A 2 C-L. on a pulsations temporelles et spatiales discrétisées

- Notation complexe est fausse dès qu'il y a 1 produit  $\approx$  pas de complexe pour OSH

$$e^{i\omega t} e^{iKx} = e^{i(\omega t + Kx)} \text{ mais } \cos(\omega t) \cos(Kx) \neq \cos(\omega t + Kx)$$

## Ch 2 Ondes Sonores ds fluides p. 9 L9

Son: onde mécanique se propage à travers milieu matériel - Transmise par chgt pression du milieu  
= milieu proche de l'émission est comprimé puis comprime à son tour fluide + loin .. ds direct: on prop. onde

  $\rightarrow$  diff. prop.  $\Delta P$  sont faible  $\approx 10^{-4} - 10^{-2}$  Pa  $\ll$  Press. Atm =  $10^5$  Pa  
= les éq. sont simplifiées  $\Rightarrow$  approximation acoustique

= récepteur sensible aux faibles  $\Delta P$  dont surface bouge par  $\vec{F}$  de cette pression et transforme en sig. élect.

Dans réf. où fluide est au repos  $\Rightarrow P_0, \mu_0, \vec{v}_0 = \vec{0}$       ↗  
 $P(M,t) = P_0 + P_1(M,t)$  surpression       $\Rightarrow P$  pression totale  
 $\mu(M,t) = \mu_0 + \mu_1(M,t)$   
 $\vec{v}(M,t) = \vec{0} + \vec{v}_1(M,t)$

$$|P_1| \ll P_0 \text{ et } |\mu_1| \ll \mu_0$$

- On voit alors que si onde de vitesse  $c$  et  $\lambda \rightarrow |v_1| \ll c$  et  $a \ll 1$   $\downarrow$   $\vec{v}_1$  repos  $\overbrace{\quad}$  onde

- Effet pesanteur négligé  $\rightarrow$  calcul au 1<sup>er</sup> ordre      amp. déplacent particules du fluide

- Ecoulement engendré par onde = parfait (sans viscosité)

PFD une particule de fluide de vol.  $dV$ , masse vol.  $\mu$  et en mouv. pour onde sonore à la vitesse  $\vec{v}(t)$

$$\boxed{\text{L'onde}} \quad \boxed{\vec{F} = \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)}$$

S'exerce sur cette part. le poids et  $\vec{F}$  de pression de résultante volumique  $-\vec{\text{grad}} P$

$$\Rightarrow \mu dt \frac{D\vec{v}_i}{dt} = \mu dt \left( \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + (\vec{v}_i \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}_i \right) = -\vec{\text{grad}} P_i dt \quad \boxed{\frac{dF}{dt} = \sum \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t}}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mu_0 \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} & + \mu_1 \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} & + \mu_0 (\vec{v}_i \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}_i & + \mu_1 (\vec{v}_i \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}_i & = -\vec{\text{grad}} P_i \\ \text{ordre} & 1 & 2 & 2 & 1 \\ \text{cste} \times \cancel{ost}^{\text{petit}} & & \cancel{2ost}^{\text{petit}} & & \end{array} \quad \text{car } P_0 \text{ uniforme}$$

L'amplitude onde est très faible = que 1er ordre :  $\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} P_i \rightarrow (1)$

Conservation de masse éq. locale :  $\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\text{div}(\mu \vec{v})$   $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \dots}$

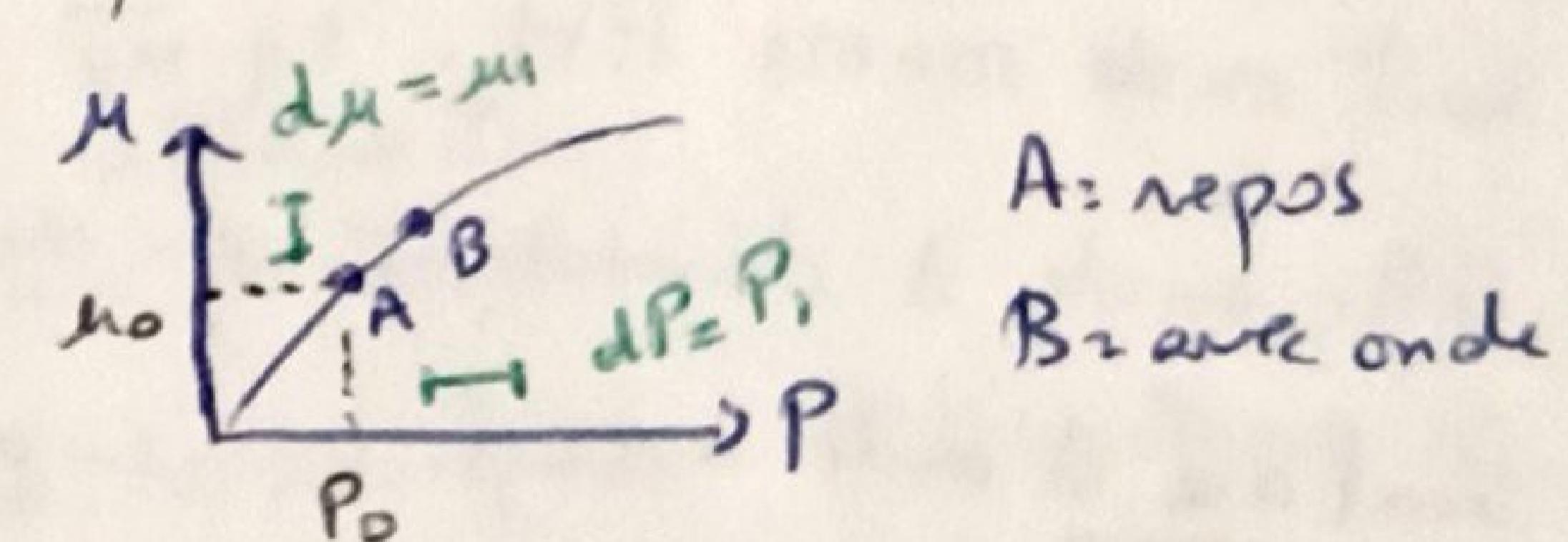
$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial \mu_1}{\partial t} & = -\text{div}(\mu_1 \vec{v}_1) & -\mu_0 \text{div}(\vec{v}_1) \\ \text{ordre} & 1 & 2 \\ \text{cste} & & \end{array}$$

Eq. cons. masse linéarisé :  $\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0 \text{div} \vec{v}_1 \rightarrow (2)$

Onde sonore est isentropique : l'évolution des part. du fluide (en mouv. pour onde son.) est adiabatique et réversible

Par onde, la pression varie localement et masse vol. change. Le lien entre ces 2 est donné par coefficient thermoélastique nommé compressibilité isentropique du fluide

$$X_s = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial P} \Big|_s \xrightarrow[\text{cste}]{\text{isentropique}} \begin{array}{l} \downarrow \\ (\mu_0 + \mu_1) \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ \text{cste} \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ \mu_2 \\ = \frac{\mu_1}{P_1} \end{array}$$



$$X_s \mu_0 P_1 + X_s \mu_1 P_1 = \mu_2$$

$$\begin{array}{ccc} \text{ordre} & 1 & 2 & 1 \\ \text{cste} & & & \end{array} \Rightarrow \mu_2 = X_s \mu_0 P_1 \rightarrow (3)$$

Eq. Propagation

- Par (2) et (3) :  $X_s \frac{\partial P_1}{\partial t} = -\text{div} \vec{v}_1 \rightarrow (4)$

- Appliquons div à PFD (1) :  $\mu_0 \text{div} \left( \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} \right) = -\text{div}(\vec{\text{grad}} P_i)$

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{v}_i) = -\Delta P_i \rightarrow (5) \quad \text{= Laplacien}$$

- On dérive cons-m. (4) par temps :  $X_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{v}_1) \rightarrow (6)$

- Par (5) et (6) :  $-X_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu_0} \Delta P_i \Rightarrow \boxed{\Delta P_i - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0}$

C onde ≠ vi des particules

Thm Schwarz : der (dérivé spatiale) et der. temp. commutant

éq. d'Alembert  
 $c^2 = \frac{1}{\sqrt{X_s \mu_0}}$

## Pour gaz parfait air atm. par ex

- $\Rightarrow$  isentropique = L'ordre de Laplace =  $PV^\gamma = \text{cste} \Rightarrow P\left(\frac{m}{\mu}\right)^\gamma = \text{cste} \Rightarrow P\mu^{-\gamma} = \text{cste}'$
- différentiel logarithmique est :  $\frac{dP}{P} - \gamma \frac{du}{u} = 0$
- Par  $X_s = \frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial P} \Big|_s \Rightarrow X_s = \frac{1}{\gamma P}$
- Par  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu X_s}}$   $\Rightarrow c = \sqrt{\frac{8P}{\mu_0}} \rightarrow = P_0 + P_1 \quad \text{tq } |P_1| \ll P_0$
- $C = \sqrt{\frac{8P_0}{\mu_0}}$

- Fluide de masse  $m$  et vol.  $V$  contenant  $n$  moles de masse molaire  $M$ :

$$\frac{PV}{m} = nRT \Rightarrow \frac{P}{\mu} = \frac{RT}{M}$$

Donc

$$C = \sqrt{\frac{8RT_0}{M}}$$

pour air atm  $\begin{cases} \gamma = 1,4 \\ R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1} \\ T_0 = 293 \text{ K} \end{cases}$

$$C = 343 \text{ m.s}^{-1} \approx \boxed{C \approx 340 \text{ m/s}}$$

$$a^{\circ} 20^{\circ}\text{C}$$

$$\begin{aligned} \text{Mair: } 20\% \text{ O}_2 \text{ de } M = 2 \times 16 \text{ g.mol}^{-1} &= M = 28,8 \text{ g.mol}^{-1} \approx 28 \times 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1} \\ 80\% \text{ N}_2 \text{ de } M = 2 \times 14 \text{ g.mol}^{-1} & \end{aligned}$$

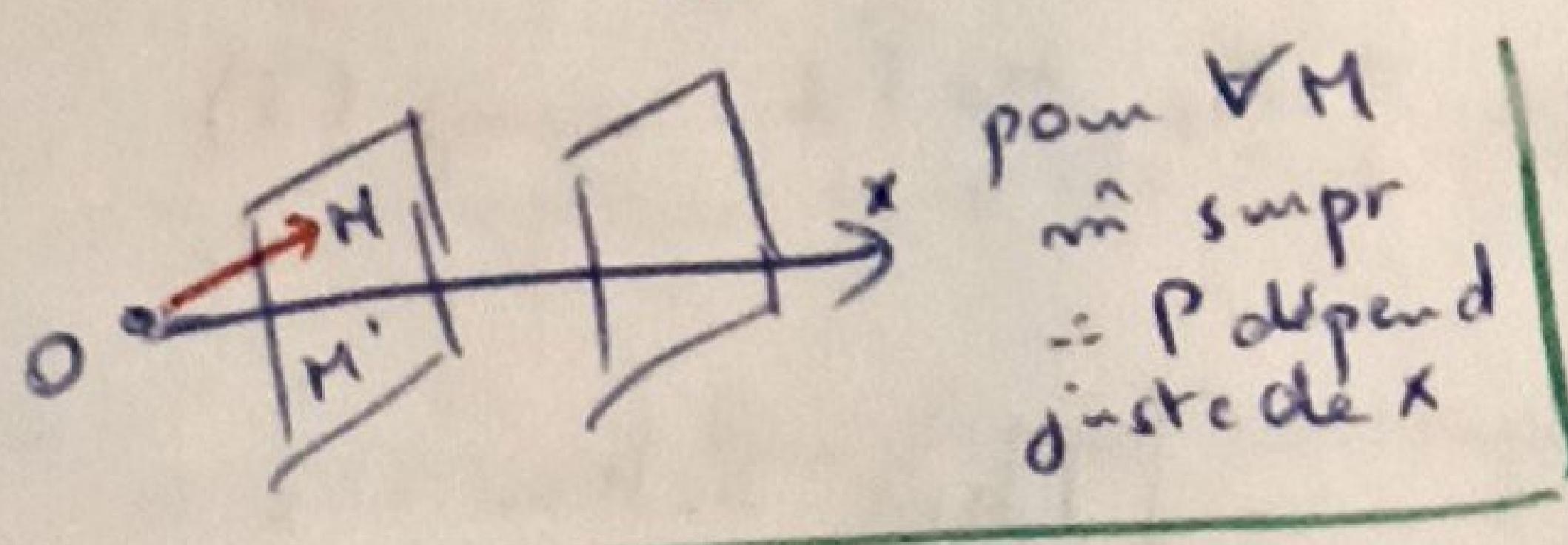
\* coeff. compressibilité  $X_s$  lipide est  $\approx$  cste Pour eau  $\begin{cases} X_s = 5 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1} \\ \mu_0 = 1 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3} \end{cases} \quad C = 1410 \text{ m/s}$

## Onde P.M.

soit onde sonore P.M. tq  $\vec{u}$  colinéaire avec prop. onde et  $x \rightarrow = \underline{P}_1 = P_{10} e^{j(\omega t - Kx)}$   
 celle onde  $\exists$  dans tout vol. de l'esp., la superposition est identique à plan à  $x=\text{cste}$  à propagation

surface d'onde = surf. où superpos. = à t fixe et plan  $\perp (Ox) \Rightarrow$  onde plane

= plane s'il  $\exists$  repère cartésien où grandeur vibrante ne dépend qu'une seule variable



$$\therefore x = \vec{OH} \quad \vec{u} = \vec{u} \quad \text{et } \vec{K} = K \vec{u} \Rightarrow \underline{P}_1(M, t) = P_{10} e^{j(\omega t - K \cdot \vec{OH})}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{P}_1}{\partial t} = j\omega \underline{P}_1 \\ \vec{\text{grad}} \underline{P}_1 = \vec{\nabla} \underline{P}_1 = -j\vec{K} \underline{P}_1 \\ \Delta \underline{P}_1 = \vec{\nabla}^2 \underline{P}_1 = -K^2 \underline{P}_1 \\ \text{div} \vec{v}_1 = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = -j\vec{K} \cdot \vec{v}_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-K^2 \underline{P}_1 + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{P}_1 = 0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{K^2} = c^2 \quad (\text{car } \underline{P}_1 \neq 0)$$

$$\begin{cases} K = +\frac{\omega}{c} \\ K = -\frac{\omega}{c} \end{cases}$$

$$\text{vitesse phase de OPPH} \quad v_{cp} = \frac{\omega}{K} \quad (\text{car } c = c)$$

par PFD on avait trouvé :  $\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{p}_1 \vec{K}$

$$\Rightarrow \mu_0 j \omega \vec{v}_1 = -(-j \vec{K}) \underline{P}_1 \Rightarrow \mu_0 \omega \vec{v}_1 = \underline{P}_1 \vec{K}$$

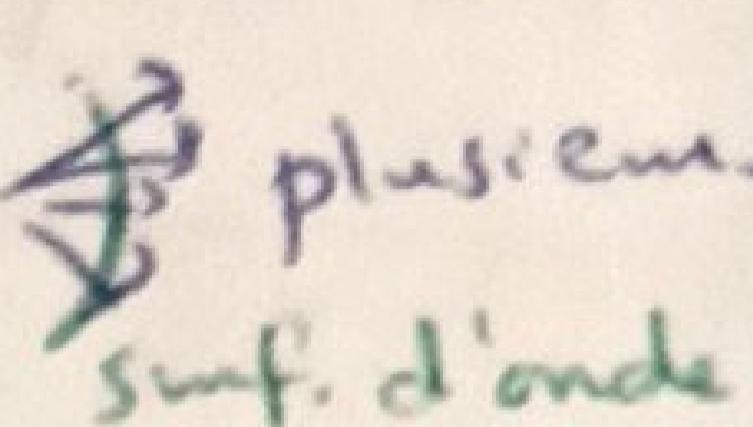
= déplacement particules du fluide de vitesse  $\vec{v}_1$  est colinéaire au vecteur d'onde

= à propagé au sens de prop. onde  $\Rightarrow$  Onde Longitudinale

= OPP sonore est longitudinale et  $v_{rai} \propto p_{rig}$  = Vonde par Z Fourier

Livres Onde  
4

## Onde Sphérique P.H.

onde sonore  plusieurs directions. Invariance par rotation autour centre du sphère  
= s'implique et norme du champ de vitesse sont  
indép. des angles  $\theta$  et  $\phi$ , dépendent que de  $r$ .

$$EA \underline{3dim} \quad \Delta \underline{P}_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{P}_1}{\partial t^2} = 0 \quad \xrightarrow[\text{sph.}]{\text{coord.}} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \underline{P}_1) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{P}_1}{\partial t^2} = 0 \quad \xrightarrow{\text{suppression}}$$

=  $r$  indép de  $t$  = on multiplie tout par  $r$   $\Rightarrow$  on a  $\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \underline{P}_1)$

Donc on a EA pour  $f(r)$

$$\text{Donc sol: } r \underline{P}_1 = f(r - ct) + g(r + ct) \Rightarrow \underline{P}_1 = \underbrace{\frac{f(r)}{r}}_{\substack{\text{onde sph} \\ \text{de } r}} + \underbrace{\frac{g(r)}{r}}_{\substack{\text{onde sph} \\ r}}$$

$\Rightarrow \forall$  O.sph. Prop. est décomposable en Fourier = étudions O.sph.PH ( $A = \text{cste}$ ):

$$\underline{P}_1(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr) \quad \text{ou} \quad \underline{P}_1(r, t) = \frac{A}{r} e^{j(\omega t - kr)}$$

$$\text{par } \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \underline{P}_1) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \underline{P}_1) = 0 \Rightarrow \frac{\omega}{k} = c \quad \text{identique à celle plane}$$

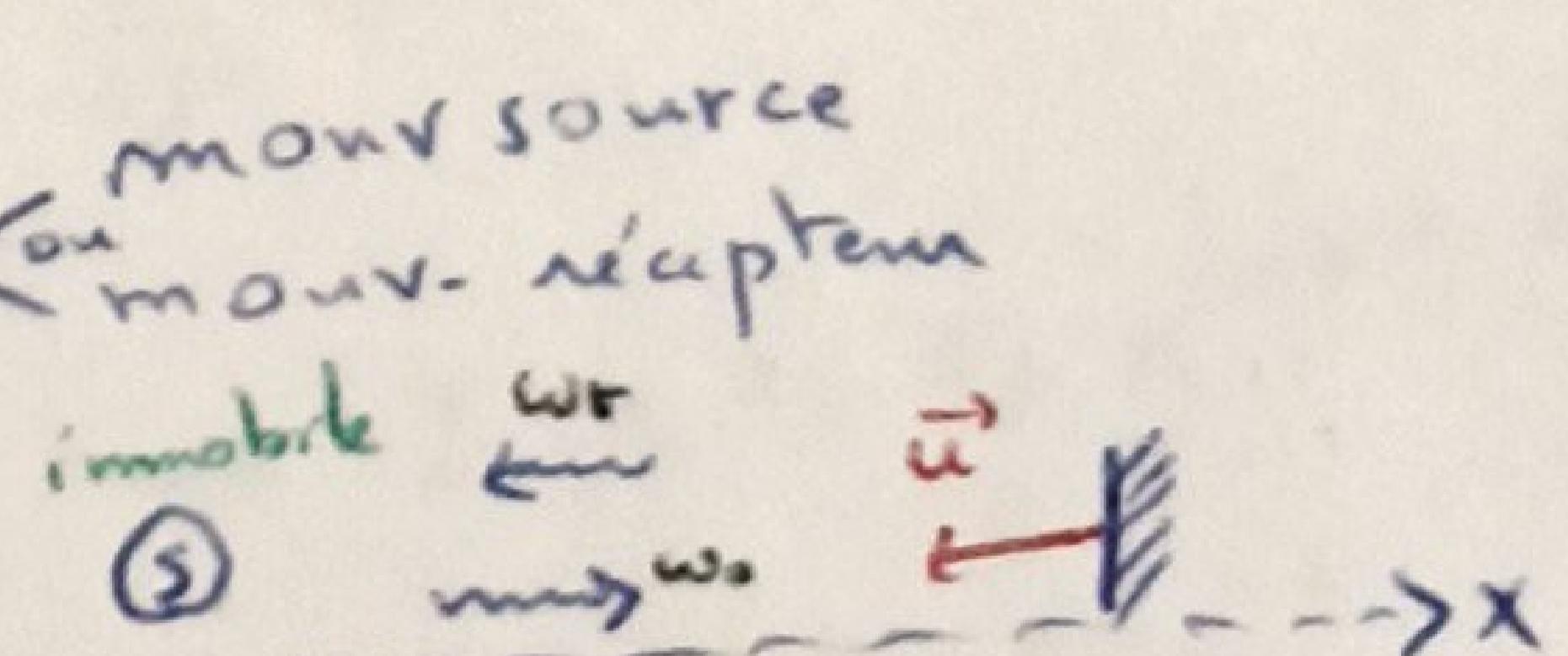
\* Amplitude diminue avec  $r$ . Mais pas absorbé par milieu car aucun phénomène dissipatif n'est pris en compte ds éq. de mouv.

Donc car Puissance onde (cste) est répartie sur surface + grande = amplitude dimine localement

$\Rightarrow$  O.sph.P. (ou autre forme) est localement assimilable à O.Plan P.  
(donc plan d'onde est tan à surf. d'onde comme au pt considéré)  
cette approx est OK pour portion L de O-sph tq  $L \gg \lambda$  si non y aura diffraction ≠ plane

## Effet Doppler

Son + aigu en s'approchant et + grave en s'éloignant



- source  $\rightarrow$  OPPH à  $w_0$  vers sujet mobile  
à la vitesse  $\vec{u}' = -\vec{u}_s \vec{u}_r$

L'onde se réfléchit sur objet et revient à  $w_r$

champ rit. de onde i //  $\vec{u}_r$ :  $v_i(x, t) = v_0 \cos(\omega_0 t - k_r x)$

" " de onde r par rapport à objet:  $v_r(x, t) = v_0 r \cos(\omega_0 t + k_r x)$

" " " " " à source:  $v_r(x, t) = v_0 r \cos(\omega_0 t + k_r x) - u$  vitesse obj

Les 2 OPPH vérifient EA:  $\frac{w_0}{k_0} = c$  et  $\frac{w_r}{k_r} = c$

L'onde totale ( $\Sigma$  i et r) ne peut pas passer à travers obj (à  $x = -ut$ )  
 $\rightarrow x \text{ change}$

$$= v_i(-ut, t) + v_r(-ut, t) = -u \quad \text{car champ-vit à ce x est continu}$$

$$v_0 \cos(\omega_0 t + \frac{\omega_0}{c} ut) + v_r \cos(\omega_r t - \frac{\omega_r}{c} ut) - u = -u$$

Donc  $\omega_0 + \frac{\omega_0}{c} u = \omega_r - \frac{\omega_r}{c} u \Rightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0 \frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}}}$

$$u \ll c = 300 \text{ m/s} \approx 1200 \text{ km/h} \approx 1^{\text{er}} \text{ ordre en } \frac{u}{c} : \boxed{\omega_r = \omega_0 \left(1 + 2 \frac{u}{c}\right)}$$

## Le évolut° fluide est adiabatique ?

Pour faire cette hypothèse thermo, il faut comparer durée caract. de la diffusion thermique  $T_{\text{diff}}$  et celle de variation des grandeurs qui se propagent (pression, vitesse,...)  $T_{\text{var}}$  la m° dist.

$$T_{\text{diff}} = \frac{L^2}{D}$$

diffusivité  
thermique du milieu

$$T = \frac{L}{c}$$

vitesse son

Dans l'air:  $D \approx 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$   $c \approx 340 \text{ m/s}$

les fréq. audibles:  $20 \text{ Hz} - 20 \text{ kHz} = \lambda = 1,7 \text{ cm} - 17 \text{ m}$ , Prendons  $L \approx \lambda$

$$\therefore \frac{T}{T_{\text{diff}}} = \frac{D}{c\lambda} = \frac{f D}{c^2} < 4 \times 10^{-6} \rightarrow \begin{array}{l} \text{vérifié pour } f \leq 6,6 \text{ Hz} \\ \text{valable pour ultrason} \end{array}$$

- = durée caract. diff. thermique  $\gg$  durée caract. varia° grandeurs qui se propagent
- = évolut° fluide est considéré comme adiabatique au passage de plan de sonore

(en micro, libre parcours moyen ( $\approx 0,1 \mu\text{m}$ )  $\ll \lambda$  = fait beaucoup de choc pour échanger des régions chaudes vers froides = échanges thermiques n'ont pas le temps de se faire)

Pour liquide  $D \approx 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$   $c \approx 1600 \text{ m/s} \rightarrow \frac{T}{T_{\text{diff}}} < 10^{-9}$  = aussi valable pour liquides

PK réversible? car on a négligé la viscosité

## Solution D'Alembert

Onde plane: si ens. de pts M tel que  $p_1(M, t_0) = p_{1,0}$  à t<sub>0</sub> fixé est un plan.

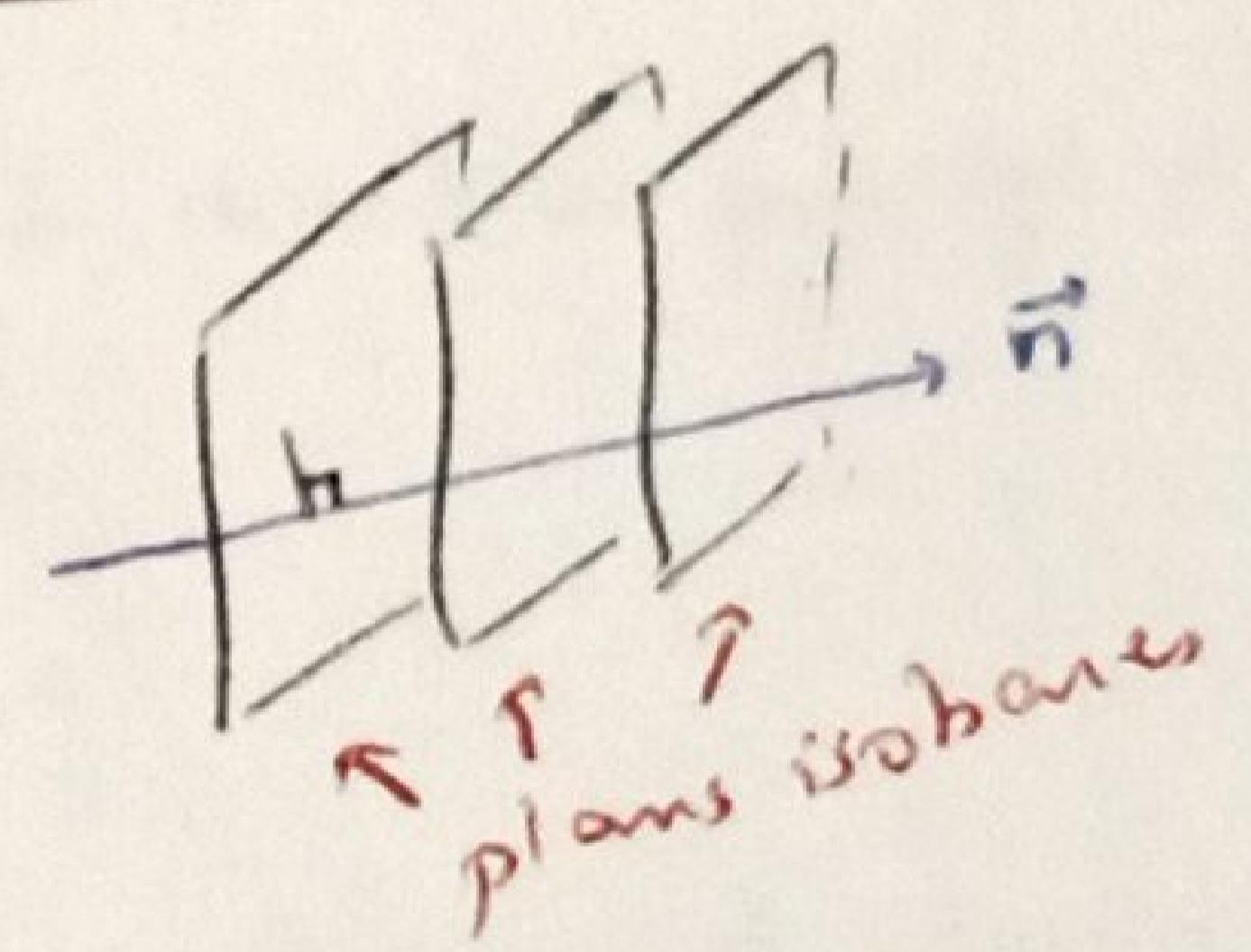
(ou  $\vec{v}_1$ )

à chaque valeur de  $p_{1,0}$  correspond plan affine  $\rightarrow$  plan d'onde.

Tous plans d'ondes sont // entre eux

= superposition ne dépend que de la variable d'espace  $\xi = \vec{OM} \cdot \vec{n}$  et du temps t

= d'Alembert 3D devient 1D:  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} p_1(\xi, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} p_1(\xi, t)$



Onde plane prop. harm:

$$p_1(M, t) = p_0 \cos(wt - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha) \rightarrow p_1(M, t) = p_0 e^{i(wt - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$\vec{OM}$   
 $2\pi \vec{n}$

par les éq°:  $\chi_0 \frac{\partial p_1}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{v}_1 \rightarrow \chi_0 w p_1 = \vec{k} \cdot \vec{v}_1$

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = - \vec{\nabla} p_1 \rightarrow \mu_0 w \vec{v}_1 = \vec{k} p_1$$

la v.t. est colinéaire à  $\vec{k}$  = à la direct° prop.  $\rightarrow$  onde de vitesse est longitudinale

en multipliant (2) par  $\vec{k}$   $\mu_0 w \vec{k} \cdot \vec{v}_1 = \mu_0 w^2 \chi_0 p_1 = k^2 p_1 \rightarrow \frac{w^2}{c^2} = k^2 \Rightarrow w = kc$

Relat° dispersion

$$\text{par } \mu_0 \omega \vec{v}_1 = \vec{P}_1 \vec{k} \Rightarrow \vec{P}_1 = \frac{\omega \mu_0}{k} \vec{v}_1 = \mu_0 c \vec{v}_1$$

amplitude de suppression et  $v$  sont  $\alpha$  avec facteur proportionnel indép. de position et temps = conste et réel et  $> 0 \Rightarrow$  ondes de suppression et de vitesses sont en phase

$$\text{Impédance Aconstante (pour DPPH)}: \boxed{Z_a = \frac{P_1}{v_1} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}$$

si onde plane sous la forme  $P_1 = f(t - \frac{x}{c}) + g(t + \frac{x}{c})$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{1}{\mu_0 c} [f(t - \frac{x}{c}) + g(t + \frac{x}{c})] \vec{u}_x$$

$$OG: Z_{\text{air}} = 1,6 \times 10^6 \text{ kg/m}^2/\text{s}$$

$$Z_{\text{sol}} = 410 \text{ kg.m}^{-2}.s^{-1}$$

$$Z_{\text{sol}} \gtrsim Z_{\text{air}}$$

$\therefore Z_{\text{air}}$  est 5000 fois  $> Z_{\text{sol}}$

car  $P_{\text{air}}$  est 1000 fois  $> P_{\text{sol}}$

mais  $C_{\text{air}}$  est 5 fois  $C_{\text{sol}}$

$$Z_{\text{sol}} > Z_{\text{air}} \gg Z_{\text{gas}}$$

$$\vec{F}_p \cdot \vec{v} \text{ et } \vec{F} = P d\vec{S}$$

$$- \text{Puissance transférée à travers surf. } \Sigma: P = \iint_{M \in \Sigma} (p_0 + p_1(M, t)) d\vec{S}_n \cdot \vec{v}_1(M, t)$$

$\therefore$  c'est un flux de vect.  $(p_0 + p_1) \vec{v}_1$  à travers  $\Sigma \Rightarrow$  vect. densité de courant d'énergie  $\equiv$  vect. de Poynting sonore

$$\boxed{\vec{\Pi} = (p_0 + p_1) \vec{v}_1}$$

Termes d'ordre 1 ( $p_0 \vec{v}_1$ )  
dont  $\langle \rangle_{\text{temporelle}} = 0$  pour DPPH

$$\langle \cos \rangle \text{ ou } \langle \sin \rangle = 0$$

Termes d'ordre 2 ( $p_1 \vec{v}_1$ )  
qui exprime le transfert d'énergie  
du à la suppression = du aux ondes sonores  
 $\langle \cos^2 \rangle \text{ ou } \langle \sin^2 \rangle = \frac{1}{2}$

$$- \text{Energie cinétique: } dE_c = \frac{1}{2} \mu dT v_1^2 \text{ au 1er ordre non nul } = \frac{1}{2} \mu_0 dT v_1^2 = ec dT$$

densité volum. d'énergie  $ec = \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2$

$$\text{Pour } dE_p = ep dT ?$$

- Bilan énergétique:

$$dE_p = \iint e dT$$

$$\text{à } t+dt: E(t+dt) = \iint e(t+dt) dT$$

entre les 2, le fluid. a perdu énergie:  $E_{\text{ext}} = P_{\text{ext}} dt = \iint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} dt$

par conserv. d'E:

$$E(t+dt) = E(t) - E_{\text{ext}} \Rightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} + P_{\text{ext}} = 0}$$

ép. globale de conserv. d'E

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \iint e dT + \iint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \iint \frac{\partial e}{\partial t} dT + \iint \operatorname{div} \vec{\Pi} dT = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\Pi} = 0}$$

ép. locale de conservat. d'E

$$\text{Cas unidirectionnel: } \frac{\partial e_p}{\partial t} + \frac{\partial (\frac{1}{2} \mu_0 v_1^2)}{\partial t} + \frac{\partial (P_0 v_1 + P_1 v_1)}{\partial x} = 0$$

Dunod 2016  
PC-PC\*

$$\therefore \frac{\partial e_p}{\partial t} = -\mu_0 v_1 \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial t}} - P_0 \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial x}} - P_1 \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial x}} - v_1 \cancel{\frac{\partial P_1}{\partial x}} - X_0 \frac{\partial P_1}{\partial t} - X_0 \frac{\partial P_1}{\partial t} - \mu_0 \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial t}}$$

$$\text{par } X_0 \frac{\partial P_1}{\partial t} = -\frac{\partial v_1}{\partial x} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial e_p}{\partial t} = P_0 X_0 \frac{\partial P_1}{\partial t} + P_1 X_0 \frac{\partial P_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( P_0 X_0 P_1 + \frac{1}{2} X_0 P_1^2 \right)$$

terme d'ordre 1

terme d'ordre 2

que l'ordre 2  
( $v^2$ )

$$\Rightarrow \frac{\partial e_c}{\partial t} + \frac{\partial e_{p2}}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial x} = 0$$

$$\text{on trouve } \frac{\partial e_{p2}}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial x} = 0$$

$\therefore$  bilan en énergie est vérifié  
à chaque ordre

$$\therefore \text{Densité volum. d'E:} \quad \begin{cases} \text{ordre 1: } e_1 = e_{p1} = X_0 P_0 P_1 \\ \text{avec } \langle e \rangle_t = 0 \text{ pour OPPH} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{ordre 2: } e_2 = e_c + e_{p2} = \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 + \frac{1}{2} X_0 P_1^2 \end{cases}$$

E est enregistré qd fluide est comprimé  
puis qd il se dilate,  $E_p \rightarrow E_c$

- Intensité sonore = la puissance moy par unité de surf. transportée par l'onde [ $\text{W.m}^{-2}$ ]  
= flux moy. du vect. Poynting sonore à travers surf. ⊥ direction propog.  $\vec{n}$

$$I = \langle \Pi \rangle \quad \text{ou} \quad I = \langle \vec{\Pi} \cdot \vec{n} \rangle$$

oreille capable de détecter son dont I varie d'un facteur  $10^{12}$

et qd intensité est  $\times 10$ , l'oreille le perçoit comme un doublement du vol. sonore  
 $\therefore$  oreille est un récepteur logarithmique

intensité sonore en décibels  
ou niveau sonore

$$I_{dB} = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad \left. \begin{array}{l} I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \\ \text{seuil d'audibilité (dépend de f)} \\ \text{pour fréq. } \approx 1000 \text{ Hz (c'est le min que peut déceler notre oreille)} \end{array} \right.$$

$$\text{par } \Pi = p v_1 = (P_0 v_1) + (P_1 v_1) \quad \text{et } \langle \Pi \rangle = \langle P_1 v_1 \rangle \quad \text{car } \langle P_0 v_1 \rangle = 0$$

$$\text{et } v_1 = \frac{1}{\mu_0 c} P_1 \Rightarrow \langle \Pi \rangle = \frac{P_1^2}{2 \mu_0 c} \quad \text{et par } P_{1,\text{eff}} = \frac{P_1}{\sqrt{2}}$$

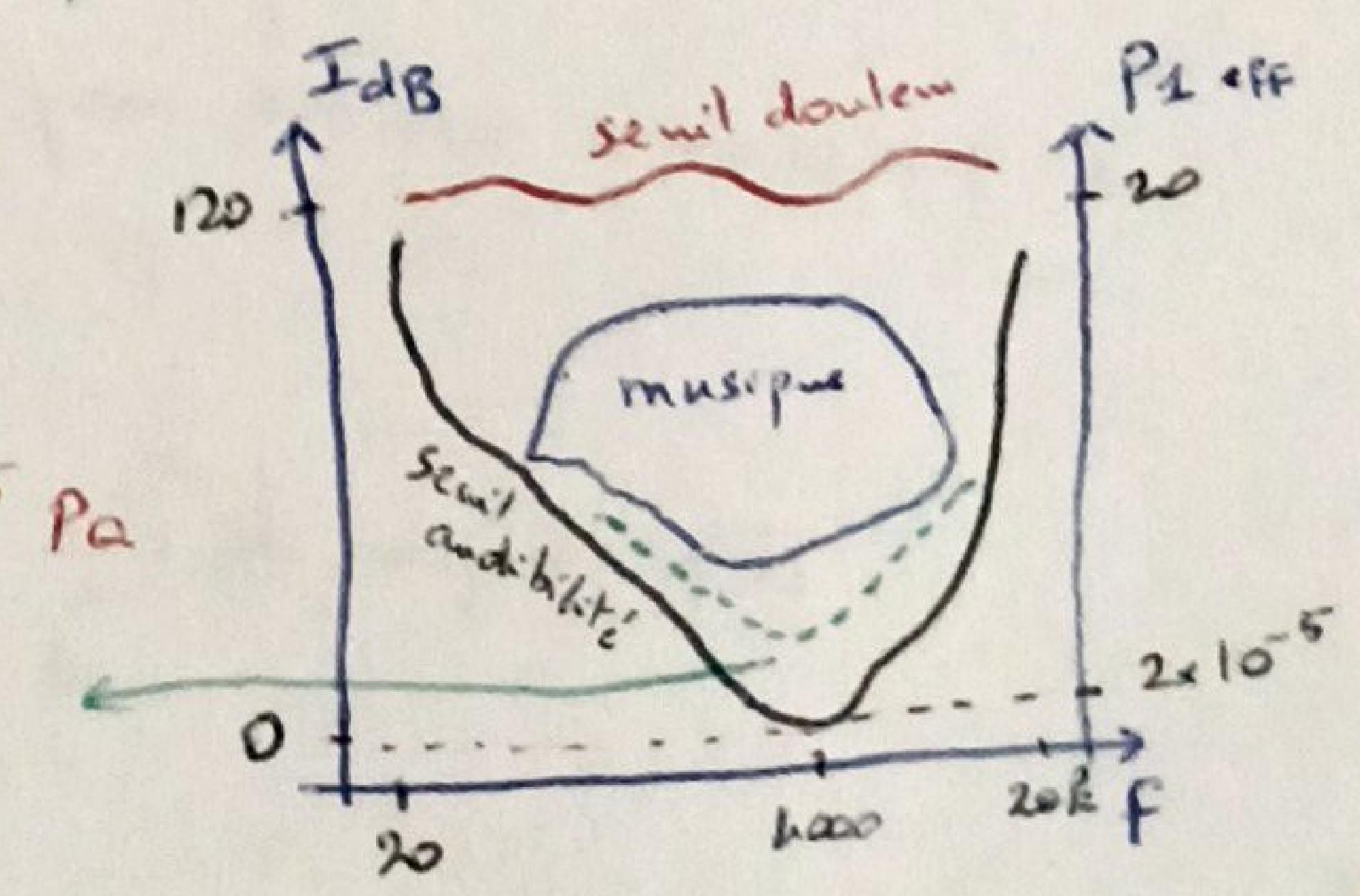
Là par moy

$$\text{pour OPPH: } I = \frac{P_{1,\text{eff}}^2}{\mu_0 c}$$

$$I_{dB} = 20 \log \frac{P_{1,\text{eff}}}{P_{2,\text{eff}},0} \quad \left. \begin{array}{l} \sqrt{\mu_0 c I_0} = 2 \times 10^{-5} \text{ Pa} \\ \text{ici que } 1\% \text{ des humains entendent} \end{array} \right.$$

\* dauphins, baleines, chauves-souris, chiens  
⇒ ultrasons

\* éléphants, girafes ⇒ infrasons



## Ondes Sphériques Harmoniques

Si propg. ondes sonores avec sym. sphérique =  $\frac{P_1}{r}$  ne dépendent que de  $r \rightarrow$  dist. spc fixe

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = c^2 \Delta P_1 = c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r P_1)}{\partial r^2} \quad \text{Laplacien en sphérique}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (r P_1)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (r P_1)}{\partial r^2} \Rightarrow r P_1 = A_0 \cos(\omega t - k_r r + \phi)$$

$$P_1(r, t) = \frac{A_0}{r} e^{i(\omega t - k_r r)}$$

= onde se propage d'1 pt O fixe vers r croissants

$\Rightarrow$  onde sphérique divergente

si  $e^{i(\omega t + k_r r)}$  = convergente (vers le point O)

On cherche champ vit. sous la forme  $\vec{v} = \vec{f}(r) e^{i(\omega t - k_r r)}$

par eq<sup>o</sup> Euler (linéarisé) ds cache approx acoustique:  $\mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \frac{\partial P_1}{\partial r}$   
que ordre 1

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{A_0}{\mu_0 c} \left( \frac{1}{r} - \frac{i\omega}{k_r r^2} \right) e^{i(\omega t - k_r r)} \vec{ur}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \frac{A_0}{\mu_0 c r} e^{i(\omega t - k_r r)} \vec{ur} + i \frac{A_0}{\mu_0 c k_r r^2} e^{i(\omega t - k_r r)} \vec{ur}$$

$$\text{Comparant les 2 amplitudes: } \frac{v_2}{v_1} = \frac{k_r r^2}{r} = k_r r = \frac{2\pi r}{\lambda}$$

= si  $r \gg \lambda \Rightarrow v_1 \gg v_2$

et si  $r \ll \lambda \Rightarrow v_1 \ll v_2$

= 1<sup>er</sup> terme prédomine qd r est grand  $\Rightarrow$  champ lointain

2<sup>nd</sup> prédomine pd r est petit  $\Rightarrow$  champ proche

• pour calculer intensité sonore, on calcule  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle p_1 v \rangle \vec{ur}$

avec  $p_1$  et  $v$  en réel

$$p_1 = \frac{A_0}{r} \cos$$

$$v = \frac{A_0}{\mu_0 c r} \cos + \frac{A_0}{\mu_0 c k_r r^2} \sin$$

le champ proche est en quadrature de phase avec suppression  $\Rightarrow \langle \rangle = 0$

seul champ lointain est en phase avec suppression = contribue à l'intensité

$$I = \frac{A_0^2}{2\mu_0 c r^2} \quad \text{ou} \quad \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (p_1 v^*)$$

• puissance sonore moy. traversant sphère de rayon r =  $P = \oint \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{s} \quad dr$  rds résult de

$$P = \frac{2\pi A_0^2}{\mu_0 c}$$

La seule src d'E sonore  
est la sphère pulsante

dépend pas de r = conservat° d'E

= suppression d'croissant en  $\frac{1}{r}$  traduit simplement le fait que la

m<sup>me</sup> E est répartie sur surf + grand qd on s'éloigne de la src

membrane haut-parleur = sphère de rayon moy.  $r_0$  et fait mouv. radiale  
harmonique:  $r(t) = r_0 + a \cos(\omega t)$  tq  $a \ll r_0$

D'unod 16

PC-PC\*

extra 3

au niveau de la sphère pulsante, compos. normale de  $v_{\text{onde}}$  =  $v_{\text{sphère}}$  (cf. méca. fluides)  
 $\therefore v = -a \omega \sin(\omega t)$

$\lambda \approx 6,8 \text{ m} \gg r_0$  & au voisinage de la sphère, champ de vit. se réduit au champ proche

$\therefore$  en complexe:  $-\frac{A_0}{\rho c} \frac{i}{Rr^2} = raw$  et  $\Rightarrow$  amplitude mouv sphère petite  $\approx r_0 \omega r_0$

$$\Rightarrow A_0 = -a \rho_0 \omega^2 r_0^2 = P = \frac{A_0^2}{2\rho_0 c r^2} = \frac{a^2 \rho_0 \omega^2 r_0^2}{2c r^2} = P \propto a^2 r_0^2 \omega^2$$

+ son est grave +  $r_0$  doit être  $\uparrow$  (et  $a$  doit rester  $\ll r_0$ )  $\therefore$  src de petite taille ne sont pas adaptés à la production de sons graves

$\therefore$  si  $r_0 = 5 \text{ cm}$ , pour produire  $f_{\text{grave}} = 50 \text{ Hz}$  à forte intensité ( $I_{\text{dB}} = 90 \text{ dB}$ ) à dist. 1m ( $r$ )

$$90 = 10 \log \left( \frac{A_0^2}{2\rho_0 c r^2} \times \frac{1}{10^{-12}} \right) \Rightarrow a = 2,8 \text{ mm}$$

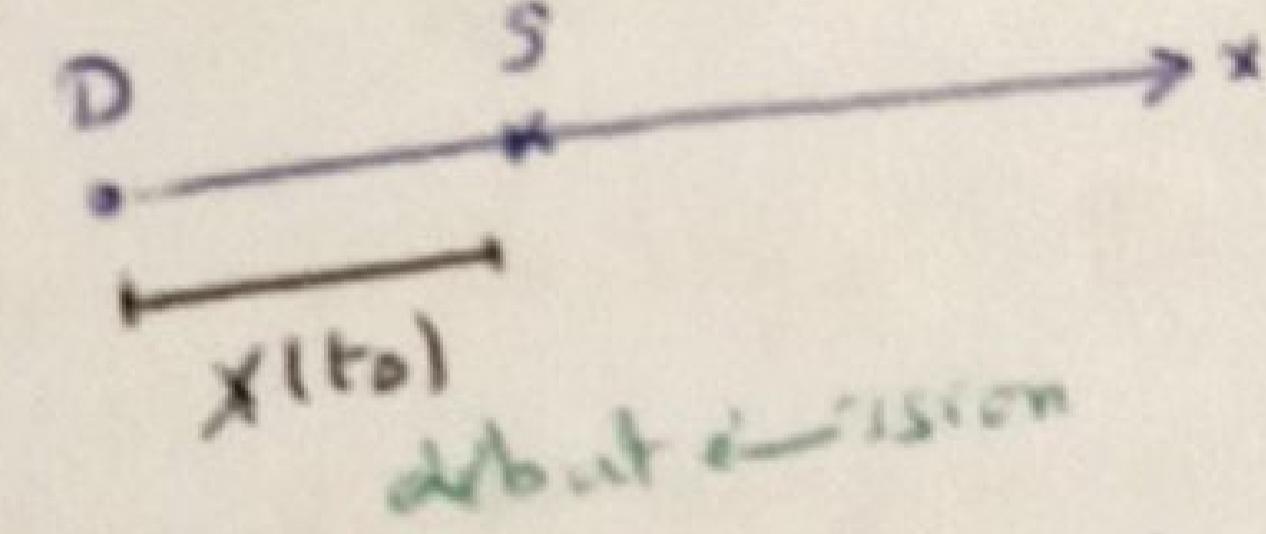
$\therefore$  la membre vibre à amplitude  $a$  partir de  $\ll r_0$  (approx est à peine vérifiée ci-avant)

## Effet Doppler Longitudinal

qd émetteur d'onde sinusoïd. est en mouv./récepteur, celu-ci attribue aux vibrations qu'il reçoit une freq. + de la freq. émise

Ex: sirène - échographie Doppler en médecine - en astro (décalage vers le rouge pour \* Pointaines) - radar

soit détecteur D fixe src S en mouv



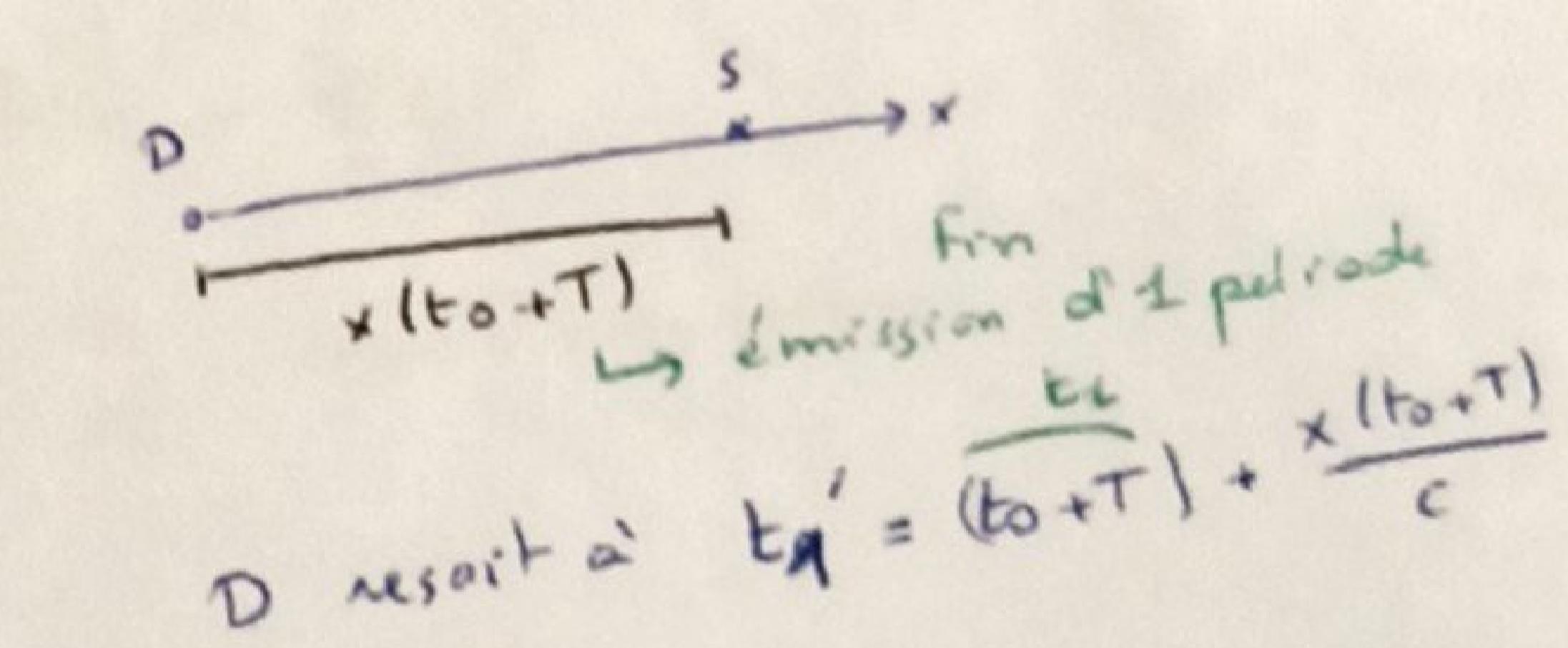
D ressort à instant  $t_0$   
 $t_0' = t_0 + \frac{x(t_0)}{c}$  ultr. 1' onde

$$\therefore 1 \text{ période resue par détecteur est } t_0' - t_0 = T + \frac{x(t_0+T) - x(t_0)}{c}$$

si src se déplace à vit. constante  $\therefore v = \frac{x(t_0+T) - x(t_0)}{t_0+T - t_0} \Rightarrow \Delta x = vT$

$$= \boxed{T' = T \left[ 1 + \frac{v}{c} \right]}$$

$$\text{et } T' = \frac{1}{f'} \Rightarrow \boxed{f' = \frac{f}{1 + \frac{v}{c}}}$$



D ressort à  $t_0' = (t_0+T) + \frac{x(t_0+T)}{c}$

$$\therefore v \ll c \Rightarrow \boxed{f' = f \left( 1 - \frac{v}{c} \right)}$$

si  $v > 0$  - src s'éloigne =  $f' < f$   
et son + grave

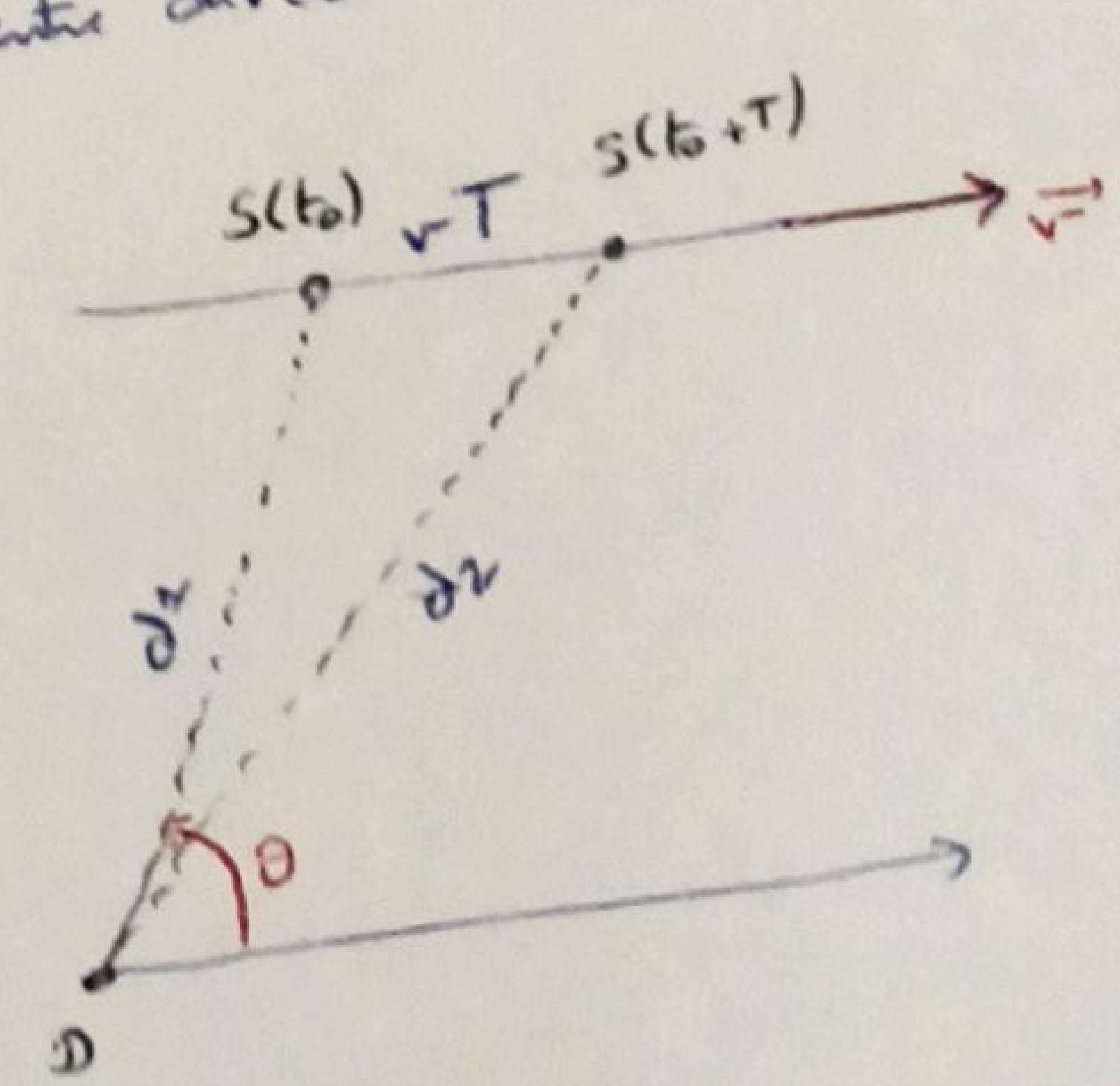
si src pas en direction du détecteur  $\therefore$  on remplace  $v$  par  $v \cos \theta$  tq  $\theta$  entre direct.  $\vec{v}$  et vecteur  $\vec{DS}$

$$T' = T + \frac{d_2 - d_1}{c}$$

$$\text{et } d_2^2 = d_1^2 + (vT)^2 + 2d_1 v T \cos \theta$$

$$\text{par } vT \ll d_2 \xrightarrow{\text{DL}} d_2 = d_1 + vT \cos \theta$$

$$\therefore T' = T \left( 1 + \frac{v \cos \theta}{c} \right) \Rightarrow f' = f \left( 1 - \frac{v \cos \theta}{c} \right)$$



Comment mesurer une faible différence de fréq?

soit fréq émise =  $f$  et reçue =  $f' = f + \delta f$  avec  $18f_1 \ll f$

On utilise multiplexeur, q- prend en entrée 2 signaux  
et donne un signal proportionnel à leur produit

$$\rightarrow s_1 \cdot s_2 = AB \cos(\dots) \cos(\dots) \quad \text{par } \cos X \cos Y = \frac{1}{2} [\cos(X-Y) + \cos(X+Y)]$$

$$\text{on a } s_1 \cdot s_2 = \frac{AB}{2} [\cos(2\pi(f'-f)t) + \cos(2\pi(f'+f)t)]$$

∴ on a 2 composantes

$$\begin{cases} \text{fréq haute} = f + f' \approx 2f \\ \text{fréq basse} = f' - f = \delta f \end{cases}$$

On applique filtre passe-bas pour supprimer la fréq haute ∵ ne reste que  $\delta f$   
q- est le -esue de décalage Doppler et on a  $\sim v_{source}$  par  $\delta f = \frac{v}{c}$

ce procédé porte le nom de détection synchrone

## Tuyaux Sonores : Application aux instruments à vent

Tout son est produit par obj en mouv ds fluides. Pour les instruments,

On fait vibrer la src { en pinçant (guitare, clavecin,..)  
 en frappant (piano, tambour,..)  
 en frottant (violon,..)  
 en soufflant (instr. à vent)

→ produit OS

pour inst. à corde, T son et amplifié par corps de l'instrument ou amplificateur électrique

pour instr. à vent, c vibrations de la colonne d'air ds tube q= produit son

cet tuyau peut être symétriques les 2 extrémités  
 soit ouvert soit fermée

ou mixtes ouverte et autre fermée

Soit tuyau cylindrique de long. L d'axe Ox et que  $R \ll \lambda$  pour avoir problème unidimensionnel  
 = ondes planes (pas sphériques) en fonction de x et t

ouverte

à l'extrémité /  $P = P_{atm} = \text{pression} = 0$

à extrémité fermée, v particulaire = 0

$$\therefore \text{il y a 2 extrémités} = \text{OS} = p_1(x, t) = p_0 \cos(\omega t) [A \cos(kx) + B \sin(kx)] \quad \text{avec } \omega = k c$$

on choisit origine t pour pas avoir de phase supplémentaire cl

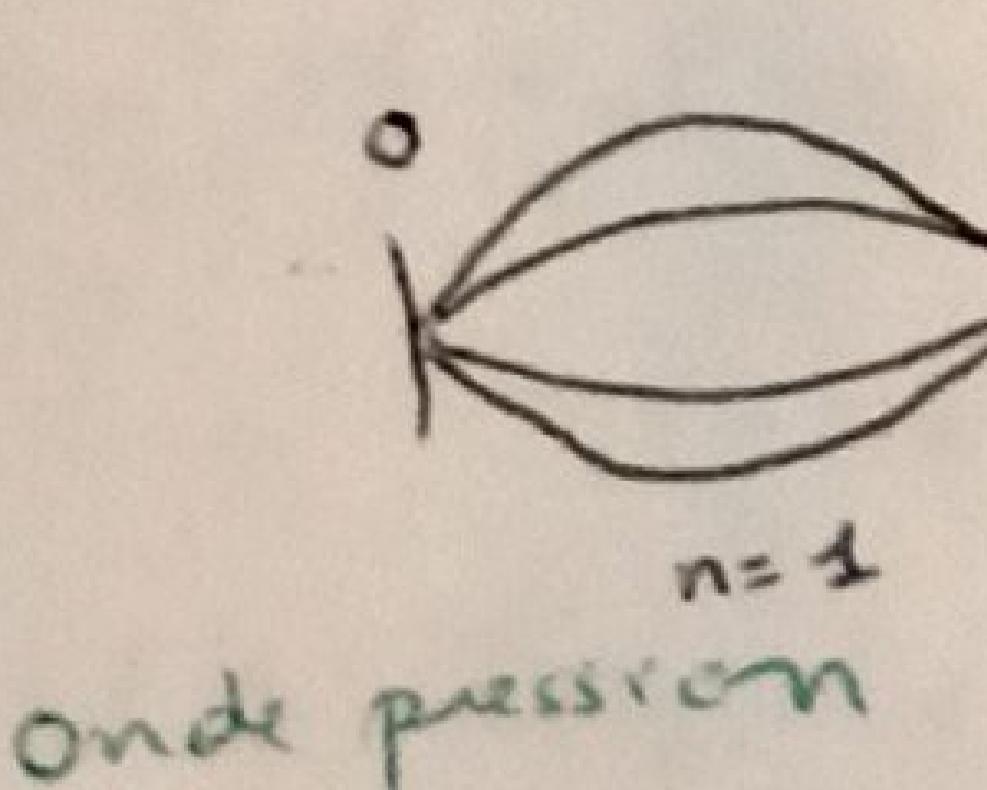
$$\text{et par Euler linéarisée: } v_1 = \frac{1}{M_0 c} p_0 \rho_0 \quad M_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial x}$$

on n'utilise pas l'impédance aoustostopique  $Z_a = M_0 c = \frac{p_1}{v_1}$  car c'est valable  
 que pour onde progressive

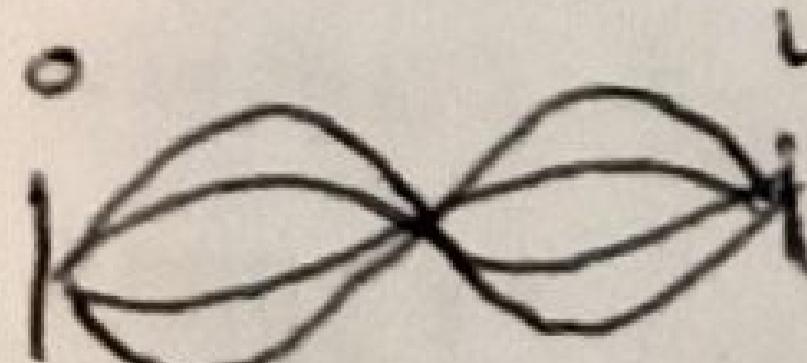
$$v_1 = \frac{1}{M_0 c} p_0 \sin(\omega t) [A \sin(kx) - B \cos(kx)]$$

$$A] \text{ tuyau symétrique (ouvert)} = p_1(0) = p_1(L) = 0 \quad \begin{aligned} & A=0 \\ & kL = n\pi \quad \text{et } n \text{ entier} > 0 \quad (N^*) \\ & \therefore \omega_n = n\pi c \quad \Rightarrow \nu_n = \frac{n\nu_0}{L} \quad \text{et } n=1 \end{aligned}$$

$$\text{et } L = n \frac{\lambda_n}{2}$$

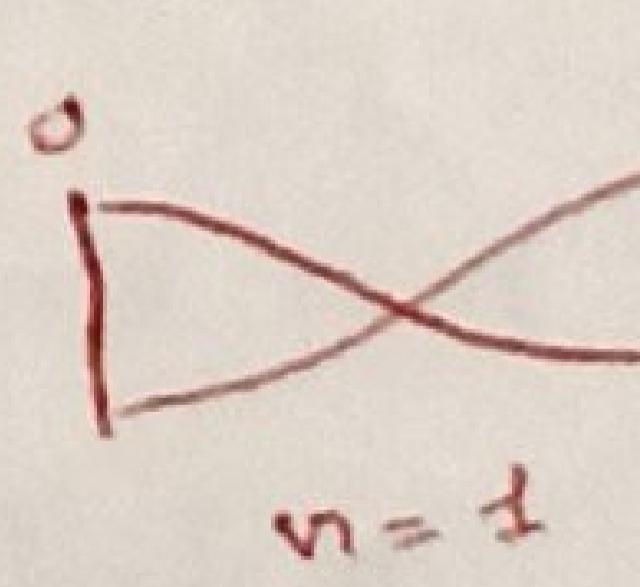


onde pression

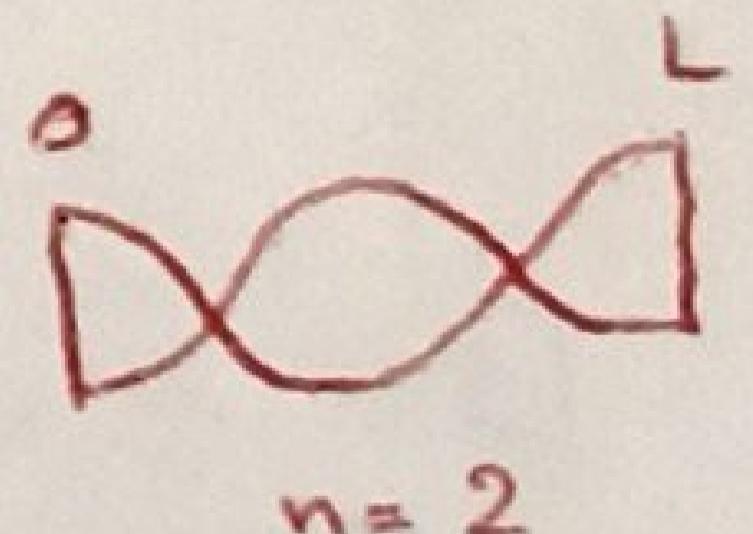


pour extrémités  
 ouvertes  
 ∵ les extrémités = noeuds de  
 pression

onde utile  
 pour extrém.  
 Dernières



n=1



n=2

vertues de l'onde  
 aux extrémités

⇒ analogie avec la corde fixée  
 à ses 2 extrémités

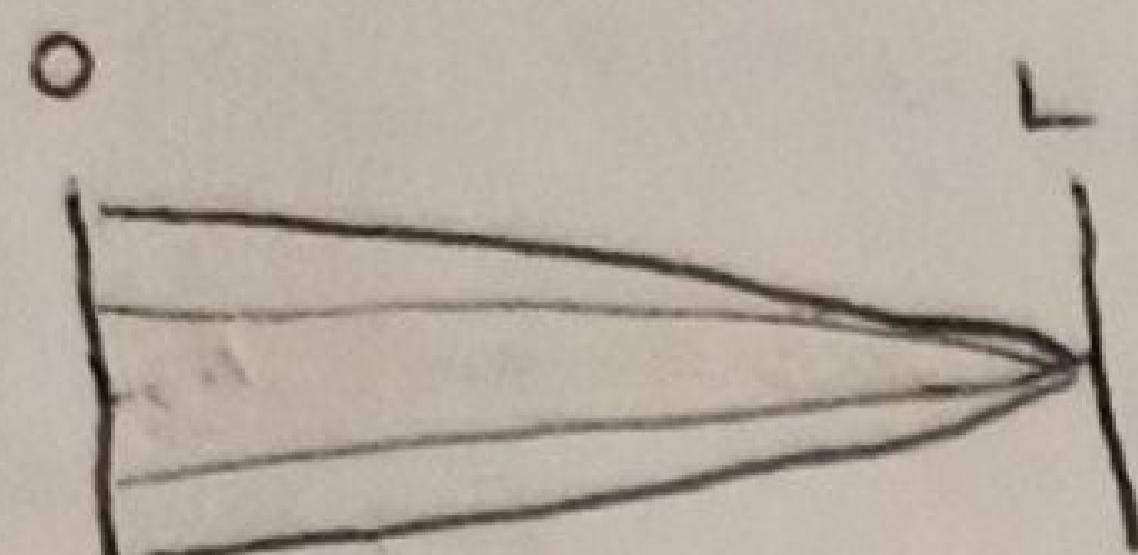
B] Tuyau mixte (par ex fermé à  $x=0$  et ouvert à  $x=L$ )

$$v_0(0) = 0 \quad p_1(L) = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ et } \cos(kL) = 0 \\ \Rightarrow kL = (2n-1) \frac{\pi}{2}$$

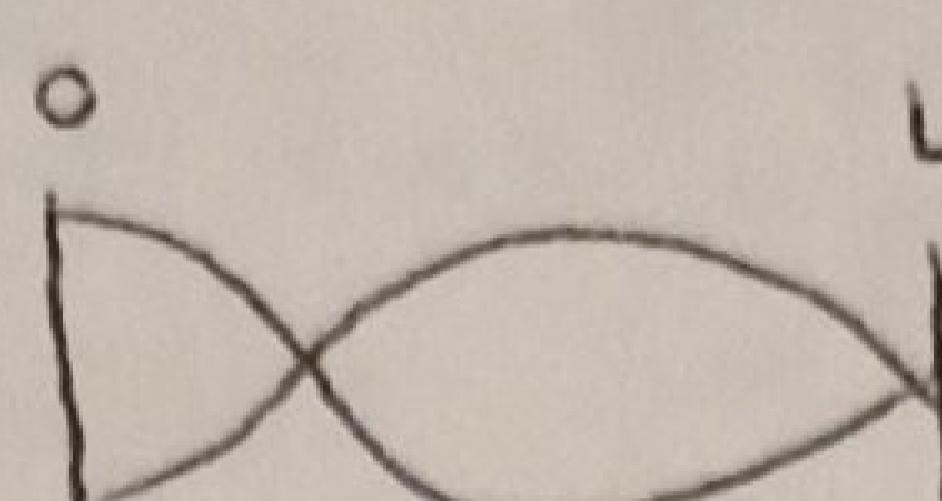
$$\omega_n = (n - \frac{1}{2}) \frac{\pi c}{L} \quad \text{et} \quad v_n = (2n-1) v_0 \frac{c}{4L} \quad \text{que impairs}$$

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} - \frac{\lambda_n}{4} \quad \begin{cases} x=0 : \text{noeud vit et ventre pression} \\ x=L : \text{ventre vit et noeud pression} \end{cases}$$

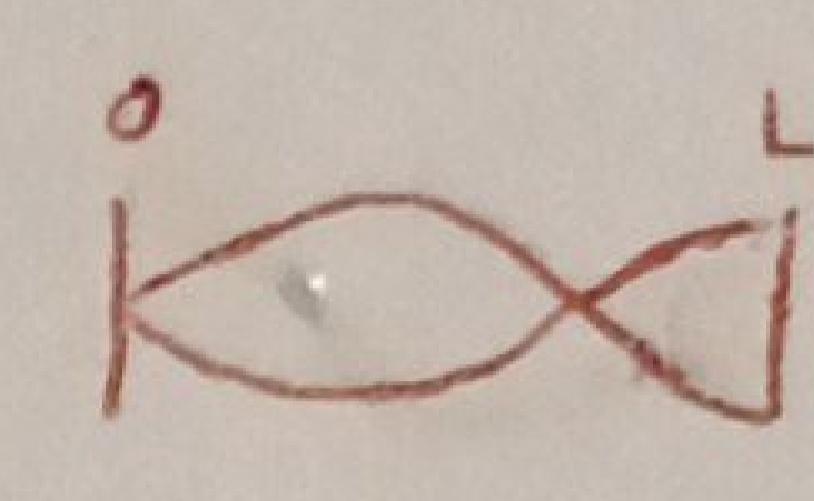
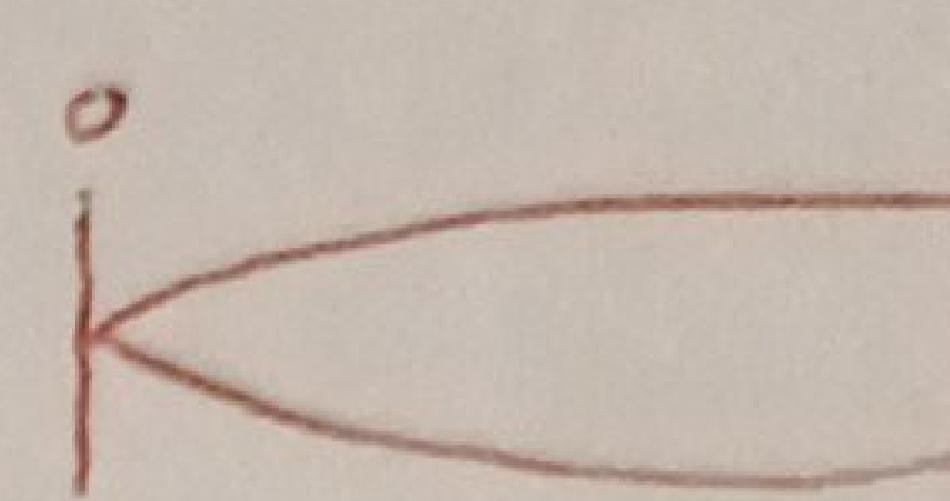
2noeuds  
ou 2vents =  $\frac{\lambda}{2}$        $= \frac{\lambda}{4}$



pression



vitone



C] Comparaison:

	Freq. Fondam.	Harmonique	Longueur
Sym	$v_0 = \frac{c}{2L}$	Tous	$L = n \frac{\lambda}{2}$
mixte	$\frac{c}{4L}$	Impairs	$L = n \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4}$

flûte      à anche  
(ex clarinette)

en débouchant trou (flûte) ou actionnant  
sur les pistons (trompette)  $\Rightarrow$  on ajuste L

Le timbre des 2 types d'instruments est  $\neq$  car 1 est toutes harmoniques et 2 que impaires  
à répartition et amplitude des harmoniques

En général, pdt on souffle on excite mode fondam. et + on souffle + fort + on excite  
les harmoniques supérieures

Trompette banopue est pourvue de piston  $\Rightarrow$  on ne peut que jouer les harmoniques  
naturelles d'une note fondamentale

\*  $\therefore c$  dépend de temp-T (pour  $\lambda$  donnée)  $\therefore v$  dépend de T

+ temp  $\rightarrow$  + freq  $\rightarrow$  (augmenter 35°C peut  $\rightarrow$  freq de  $\frac{1}{2}$  ton  
 $\Rightarrow$  la multiplier par  $\sqrt[12]{2}$ )

Ex si on bloque tous trous flûte  $\rightarrow$  DO à 262 Hz  $\Rightarrow$  c'est tout tuyau  $\Rightarrow L = \frac{\lambda_0}{2} = \frac{1}{2} c = \frac{1}{2} \frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{RT}{M}} = 65$  cm  
à 20°C et si à 10°C  $\Rightarrow v_{10^\circ C} = v_{20^\circ C} \sqrt{\frac{283}{293}} = 259$  Hz

pour jouer Ré à 231 Hz  $\Rightarrow L' = \frac{c}{2v'} = 58$  cm  $\Rightarrow$  on doit boucher le trou qui est à 7 cm du bout  
de la flûte

#### D] Aspect Energétique

pour tuyau sym:  $p_1 = p_0 \cos(\omega t) \sin(kx)$   $\Rightarrow$  Poynting sonore  $\vec{P} = p_1 v_1$   $\langle \vec{P} \rangle = 0$   
 $v_1 = -\frac{1}{\mu_0 c} p_0 \sin(\omega t) \cos(kx)$  ✓ car OS  
ne transporte pas énergie

Densité volumique d'énergie =  $e_C = \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 \Rightarrow \langle e_C \rangle = \frac{1}{4} \chi_0 p_0^2 \cos^2(kx)$  en remplaçant c par  $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_0}}$

$$e_P = \underbrace{p_0 \chi_0 p_1}_{\text{"O pas"}!} + \frac{1}{2} \chi_0 p_1^2 \Rightarrow \langle e_P \rangle = \frac{1}{4} \chi_0 p_0^2 \sin^2(kx)$$

en total  $\langle e \rangle = \frac{1}{4} \chi_0 p_0^2$  L'énergie passe de la forme cinétique en forme potentielle et en moy uniforme et répartie

Remarque ds ce modèle, vect. Poynt = 0 aux extrémités Ouvrante  
fermée  
= aucune puissance ne sort de l'intervalle !!

Dunod 2022

PC - PC\*

extra5

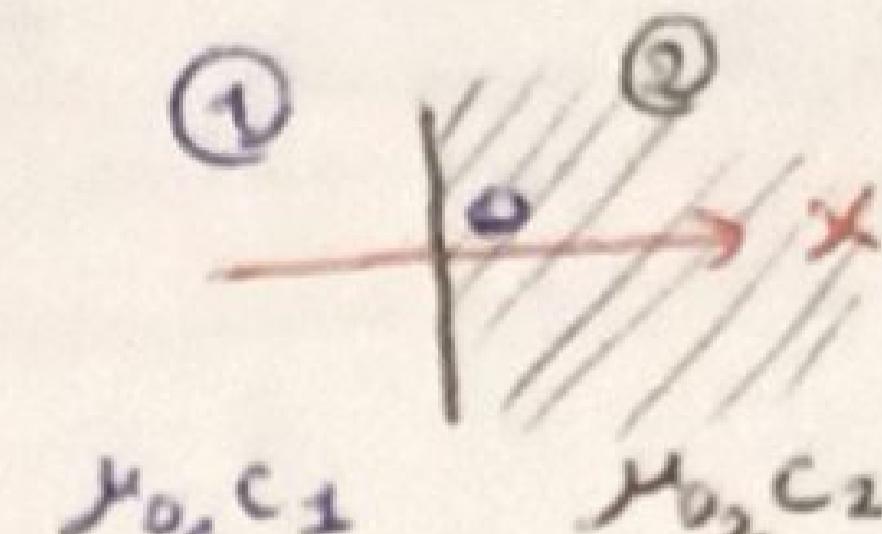
En fait, une extrémité ouverte ne compte pas comme impédance nulle et il faut tenir compte de l'onde sonore rayonnée vers l'ext. )))))) sphérique

## Réflexion et Transmission (onde sonore plane progress. sous incidence $\perp$ )

2 milieux sont caractérisés par  $Z_1 = \rho_1 c_1$

soit onde du milieu 1 qui arrive sous incidence  $\perp$  à l'interface entre les 2 milieux (par exemple air et eau)

Soit pression  $p$  et vitesse  $v$  selon composantes  $\vec{v}_x$   
( $p_1$  ici est milieu 1)



Relat° de Passage à interface, il y a continuité compos.  $\perp$  de vitesse  $\Rightarrow$  sur l'interface = continuité v tout court pour pression? PFD entre  $x = -\varepsilon$  et  $x = +\varepsilon$  en projection sur  $Ox$ :

$$dm \frac{\partial v(0,t)}{\partial t} = (p_0 + p_1(-\varepsilon, t))ds - (p_0 + p_2(+\varepsilon, t))ds$$

$$\text{Si } \varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow dm \rightarrow 0 \Rightarrow p_1(0^-, t) = p_2(0^+, t)$$

continuité pression

car pointe vers ext ② = vers  $x < 0$

- $\Rightarrow$  interface bouge légèrement par l'onde sonore  $\Rightarrow$  les relat° passage sont en  $x = X(t)$  et non  $x = 0$   
mais par approx acoustique  $|X(t)| \ll \lambda \approx x = 0$   $\forall t$

- si l'interface est matérielle (par ex membrane de masse surfacique  $\sigma$ )

$$p_1(0^-, t) - p_2(0^+, t) = \sigma \frac{\partial v(0, t)}{\partial t}$$

coeff r, t en amplitude  
soit onde incidente OPP du sens  $x > 0$ :  $p_i = f(t - \frac{x}{c_1}) \rightarrow v_i = \frac{1}{Z_1} f(t - \frac{x}{c_1})$

donne réflexion en 1 et transmission en 2

$$p_r = g(t + \frac{x}{c_1}) \rightarrow v_r = -\frac{1}{Z_1} g(t + \frac{x}{c_1})$$

$$p_t = h(t - \frac{x}{c_2}) \rightarrow v_t = \frac{1}{Z_2} h(t - \frac{x}{c_2})$$

$$= \underset{x=0}{=} \frac{1}{Z_1} (f(t) - g(t)) = \frac{1}{Z_2} h(t) \quad \text{et} \quad f(t) - g(t) \underset{x=0}{=} h(t)$$

$$\text{par définition: } r_v = \frac{v_r(0^-, t)}{v_i(0^-, t)} \quad r_p = \frac{p_r(0^-, t)}{p_i(0^-, t)} \quad t_v = \frac{v_t(0^+, t)}{v_i(0^-, t)} \quad t_p = \frac{p_t(0^+, t)}{p_i(0^-, t)}$$

$$\Rightarrow r_p = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} = -r_v \quad t_p = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_2}{Z_1} t_v$$

- pour OPPH c'est la même chose
- $t_p$  et  $t_v$  sont réels et  $> 0$  = ondes incid. et transm. sont tg en phase

- Si on étudie propag. onde ds tuyau et que discontinuité est représentée chgt section
  - modèle unidimensionnel à la jonction n'est pas exact.

C'est pas  $v$  qui est continue mais débit massique  $D_m = \mu S v \approx \mu_0 S v$  et on applique conservat° masse et on tend épaisseur à 0 et là  $Z = \frac{P}{Sv}$  et on a une m r et t

- Si  $Z_2 > Z_1 \Rightarrow r_p > 0$  et  $r_r < 0$  = onde pression incid. et réfléch. en phase mais onde vitesse en opposition phase

- Si  $Z_2 = Z_1 \Rightarrow r_p = r_r = 0$  = pas d'onde réfléchie  $\Rightarrow$  adaptation d'impédance tout se passe comme si milieu 1 était  $\infty$

- Si  $Z_2 \gg Z_1 \Rightarrow r_p = 1 \quad r_r = -1$   $\rightarrow$  entièrement réfléchie (sans déphasage pour p et déphasage  $\pi$  pour v)  
 $t_p = 2 \quad t_r = 0 \rightarrow$  voir étude énergétique pour comprendre (comme réflex sur mur où  $v=0$ )

- Si  $Z_1 \gg Z_2 \Rightarrow r_p = -1 \quad r_r = +1$   $\begin{matrix} \text{m qui avant} \\ \text{(ici comme réflex sur milieu au repos où } p=0 \\ \text{comme extrémité ouverte de tuyau sonore)} \end{matrix}$   
 $t_p = 2 \quad t_r = 2$

Au milieu 1 : superposition =  $p(x,t) = f(t - \frac{x}{c_1}) + r_p f(t + \frac{x}{c_1})$

Ni progressive ni stat:ommaire

coeff r, t  
en énergie

vect. Poynting sonore:

$$\vec{\Pi}_i = p_i \vec{v}_i = \frac{1}{Z_1} p_i^2 \vec{u}_x$$

$$\vec{\Pi}_r = -\frac{1}{Z_1} p_r^2 \vec{u}_x$$

$$\vec{\Pi}_T = \frac{1}{Z_2} p_T^2 \vec{u}_x$$

par déf:  $R = \frac{|\langle \vec{\Pi}_r(0^-), \vec{u}_x \rangle|}{\langle \vec{\Pi}_i(0^-), \vec{u}_x \rangle}$

$$T = \frac{\langle \vec{\Pi}_T(0^+), \vec{u}_x \rangle}{\langle \vec{\Pi}_i(0^-), \vec{u}_x \rangle}$$

indép. de l'ordre = si on passe de milieu 1 à 2 cm que  $2 \ll 1$

$$\leftarrow R = |r_r r_p| = r_p^2 = \left( \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2$$

$$T = |t_r t_p| = \frac{Z_1 + p^2}{Z_2} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

$$\boxed{R+T=1}$$

conservat° énergie  
à l'interface

à  $Z_1 = Z_2 = T$  est max  
 $R=0$  = tout est transmis  $\Rightarrow$  adapt. impéd.

,  $Z_2 \ll Z_1$  ou  $Z_1 \ll Z_2 \Rightarrow R=1$  et  $T=0 \Rightarrow$  réfl. totale = valeur de t bizarre ( $=2$ ) n'a pas de sens physique

Où.)  $Z_{\text{air}} = 4 \times 10^2 \text{ kg.m}^{-2}.s^{-1} \Rightarrow T = 10^{-3}$   
 $Z_{\text{eau}} = 1,4 \times 10^6 \text{ kg.m}^{-2}.s^{-1} \Rightarrow R = 1 - 10^{-3}$

~ 0,1% de l'énergie  
pas de l'air à l'eau  
et réciproquement pour cela  
qu'on entend pas les bruits ext.  
quand on est ds l'eau

.)  $Z_{\text{air}}$  et  $Z_{\text{oreille intime}}$  sont  $\neq$  transmission énergétique est faible d'où 3 oreille moyenne qui assume l'adaptation d'impédance

.)  $Z_{\text{eau}} = 10^7 \text{ kg.m}^{-2}.s^{-1}$  = simple vtege =  $T_{\text{vitge}} = T_{\text{arrive}} \times T_{\text{vit/air}} = T^2 = \left( \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \right)^2 = (10^{-4})^2$   
 ~ atténuation de  $|10 \log(10^{-4})^2| = 76,5 \text{ dB}$  ~ double vtege = 153 dB  
 c modèle simple et en double vtege soit <

# Suite: Ondes Mécaniques

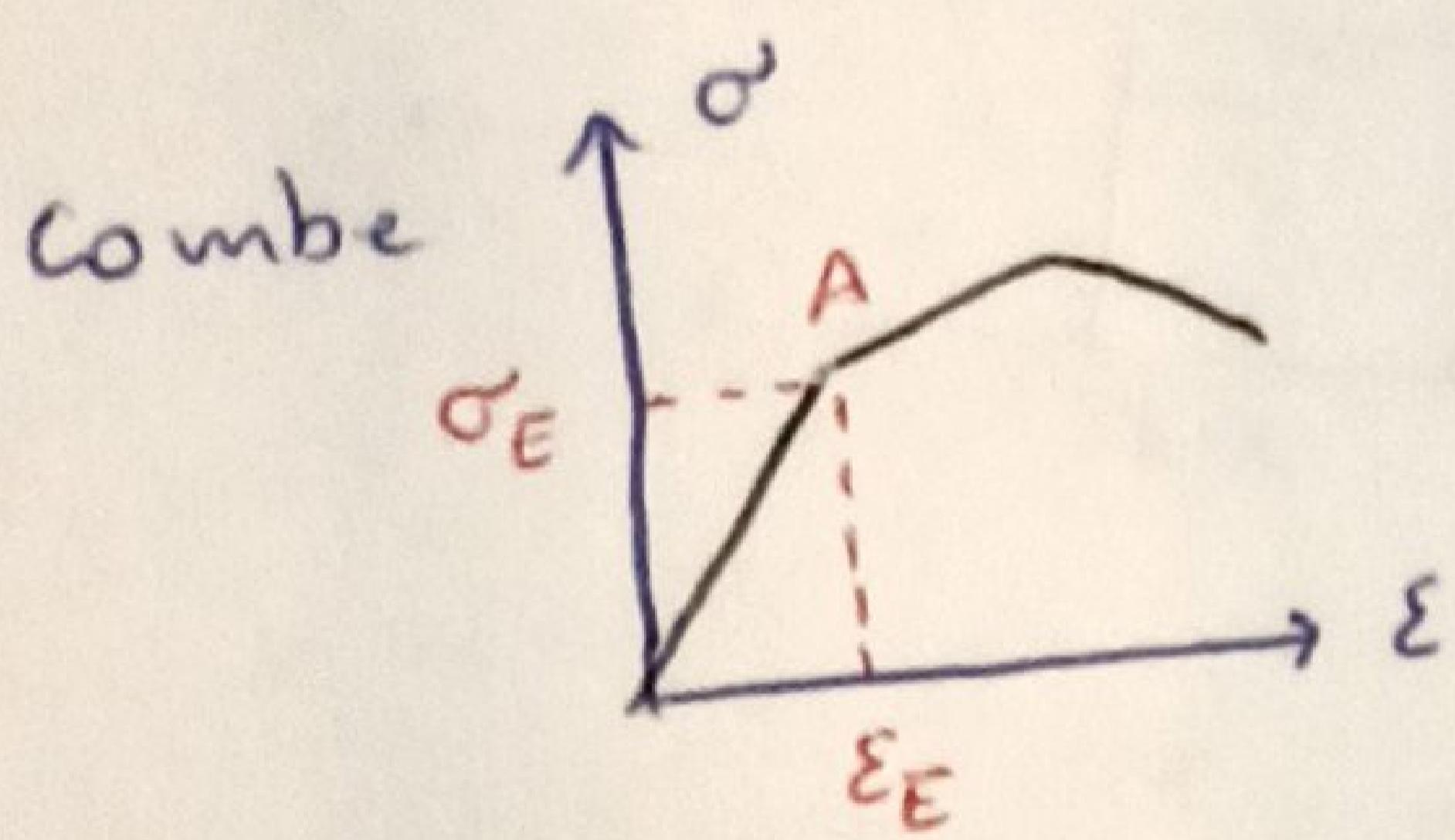
Dunod  
2022  
PC-PC\*  
ondes

## 2] Onde acoustique dans solide élastique

### A) Module d'Young

Solide caractérisé par module d'Young  $E$  qui caractérise l'allongement du solide sous action  $\vec{F}_{\text{ext}}$

Qd on exerce  $\vec{F}$  ds sens long. type  $\Rightarrow$  s'allonge de  $\Delta L$



de la contrainte  $\sigma = \frac{F}{S}$  en fait taux d'allongement  $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$

Qd on  $\nearrow$  progressivement  $\sigma$ ,  $\epsilon$  varie linéairement  
 $\Rightarrow$  déformation réversible et régo repassé  
sa forme initiale qd on décroît la contrainte

si on dépasse limite d'élasticité (pt A)  $\Rightarrow$  déformation pas réversible  
et taux d'allong. n'est plus linéaire avec contrainte

Dans zone d'élasticité:

$$\epsilon = \frac{1}{E} \sigma \rightarrow \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}$$

$$\therefore [E] = [\text{Pression}] = \text{N/m}^2 = \text{Pa}$$

$$\text{Ex: } F_{\text{ex}} : E = 190 \times 10^9 \text{ Pa}$$

### B) modèle micro

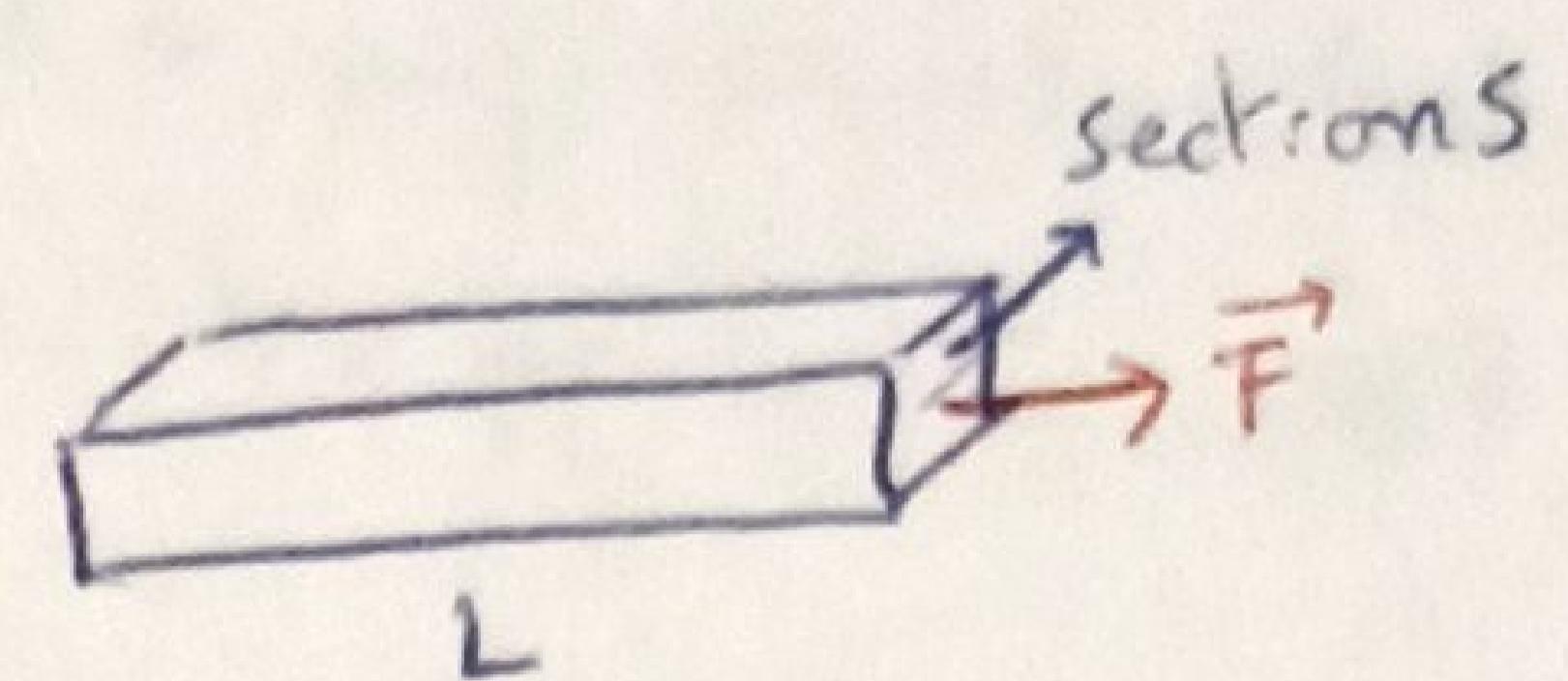
Soit atomes du solide  $\equiv$  pts-ateliers A identiques de masse  $m$   
relés par ressort de raideur  $k$  et long. à vide  $l_0$ .

Cette modélisation permet d'étudier la propg. d'ondes élastiques du réseau cristallin  
ce raideur est relié aux prop. d'élasticité du solide, caractérisées par  $E$   
 $\therefore k, E$  caractérisent m<sup>e</sup> phénomène <<sub>microsc.</sub> k ><sub>macrosc.</sub> E

soit cristal de taille cube et paramètre  $a$ . Soit déformation (des "ressorts")  
juste ds direction  $\vec{F}$   $\Rightarrow$  pas de contraction  $\perp \vec{F}$

$$N \Delta u = \Delta L \quad \text{et} \quad Na = L \Rightarrow \frac{\Delta u}{a} = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\text{et } F = k \Delta u \quad \text{et } F = \frac{F}{n} \rightarrow \text{densité surface}$$



$$n = \frac{S}{a^2} \text{ atomes sur surf.} \rightarrow f = \frac{\alpha^2 F}{S} = k \Delta u$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{a}{k} \frac{F}{S} \rightarrow E = \frac{k}{a}$$

Energie liaison entre 2 atomes  $\equiv E_p$  élastique du ressort  $W = \frac{1}{2} k a^2$   
 $W = \frac{1}{2} E a^3$

dist interatomique  $\sim 10^{-10} \text{ m}$   
 Elévation  $\sim 99 \text{ eV}$   $\rightarrow E = \frac{10^{-19}}{10^{-30}} = 10^{11} \text{ Pa} = 100 \text{ GPa}$

Le modèle simple donne excellente approx. module Young d'un solide

### c) Ondes de déformations longitudinales

soit déformations le long Ox de type solide  
 de section S ( $\perp Ox$ ) et masse vol-  $\mu_0$

À t, plan x au repos se trouve à  $x + \xi(x,t)$

(On néglige pesanteur).

Ds domaine élastique du solide, force traction T permettant type d'allongement

$$\text{est donnée par loi de Hooke } T = E S \frac{\Delta L}{L}$$

$$(E \frac{S}{L} = E L \equiv k)$$

allongement relatif:  $\frac{\xi(x+dx,t) - \xi(x,t)}{dx} = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}$

$\vec{T}$  exercée par partie droite sur gauche est dirigée ds sens  $> 0$  d'axe Ox si solide

$$\text{est allongé} = \frac{\partial \xi}{\partial x} > 0 = \vec{T}(x,t) = E S \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}$$

Le hachure entre x et  $x+dx$  soumis à  $2\vec{T}$  = par loi qté mouv:

$$dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x,t) = T(x+dx,t) - T(x,t)$$

$$\mu_0 S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E S \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\mu_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Eq. de d'Alembert

$$c = \sqrt{\frac{E}{\mu_0}}$$

