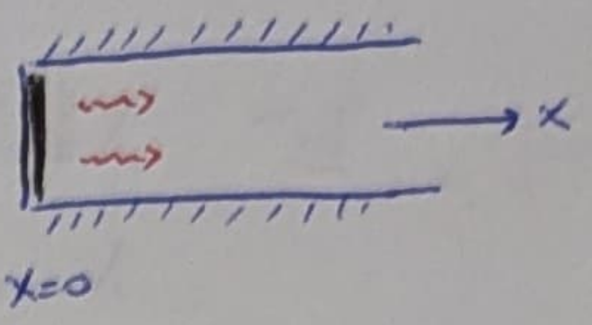
Diffusion Thermique

Youtube
E-learning Phys
1

- tige (solide) orientée par axe x, à sym cylindrique, à $x=0$ et $t=0$
  on apporte qté chaleur et on cherche le profil de T le long de cette barre
  (par la conduction thermique)



- Hypothèse : La barre est calorifugée ∴ pas de transfert thermique latéral

- Diffusion (conduction) thermique : qd on donne qté E à l'entrée, provoque vibrations atomes (si c un cristal) autour position éq. et cette agitation thermique se propage mais sans déplacement de matière (contrairement de diffusion particule)
  ∴ conduction est ≠ que la convection

- Flux ~~t~~hermiques ≡ puissance $\underset{[W]}{\phi(x,t)} = \frac{\delta Q}{\delta t} = \iint \vec{j}_{th}(x,t) \cdot \vec{dS}$
  ↖ car en thermo c'est δQ

  densité surfacique de flux (ou de puissance) (ou courant thermique) $\vec{j}_{th}$ $[W \cdot m^{-2}]$

- on définit une tranche méso (car si tranche → 0, on peut pas définir T car c une notion statistique ∴ beaucoup de part. pour faire moyenne) et on fait moy → T
  → hypothèse de l'éq. thermod. local

- Bilan thermique (en part. en prenant syst ouvert ∴ part. rentre et part. sort mais E non) pour avoir T unif.
  1er principe à $d\tau = S\,dx$ et masse $dm = \rho\, d\tau$ (car peut être solide ou aussi gaz ...)
  pendant dt : $dU = \delta Q + \delta W$ ($E_c = 0$ car barre au repos)
  on pourrait aussi prendre dH car pour phase condensée $dU = dH$
  ∴ incompressible et indilatable (juste transfert thermique) ∴ $\delta W = 0$

on va assimilé dU au bilan temporel et δQ au bilan spatial ... pk ?

- En x, énergie rentrée et en x+dx, énergie sort : $\delta Q = \delta Q_e(x,t) - \delta Q_s(x+dx,t)$
- par c : capacité thermique massique : $dU = dm\, c\, dT = U(t+dt) - U(t)$
  $= dm\, c\, (T(t+dt) - T(t))$
  $= \rho S dx\, c \frac{\partial T}{\partial t} dt$

- $\delta Q = \overset{\text{Flux}}{\phi_e}\, dt - \phi_s\, dt = j_{th}(x,t) S\, dt - j_{th}(x+dx,t) S\, dt = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} dx\, S\, dt$

- $dU = \delta Q \rightarrow \boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} = -\mathrm{div}\, \vec{j}_{th}}$
  pas de j_y ni j_z ∴ $\frac{\partial j_y}{\partial y} = 0$ $\frac{\partial j_z}{\partial z} = 0$
  ∴ $\mathrm{div}\, \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x}$

$\overrightarrow{\text{grad}}$ est de faible à él
d'où le (−)

2022

Loi de Fourier :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \, \overrightarrow{\text{grad}}\, T$$

λ conductivité thermique $[W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}]$

∴ + conductivité ↗ + matériau conduit ($+\vec{j}$ ↗)

Ex $\lambda_{\text{cuivre}} = 390 \ W m^{-1} K^{-1}$

$\lambda_{\text{verre}} \simeq 1$

$\lambda_{\text{air}} = 24 \times 10^{-3}$ ⟶ très bon isolant c pour cela qu'on le met ds double vitrage

∴ + grad ↗ ∴ inhomogénéité T ↗, $+\vec{j}$ ↗

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

a diffusivité thermique $\equiv D$ ∴ $[m^2 \cdot s^{-1}]$

Soit long. et temps caractéristiques (L_c et τ_c) : $a \sim \frac{L_c^2}{\tau_c}$ ∴ $L_c = \sqrt{a \tau_c}$

∴ au début rapide puis ralentit

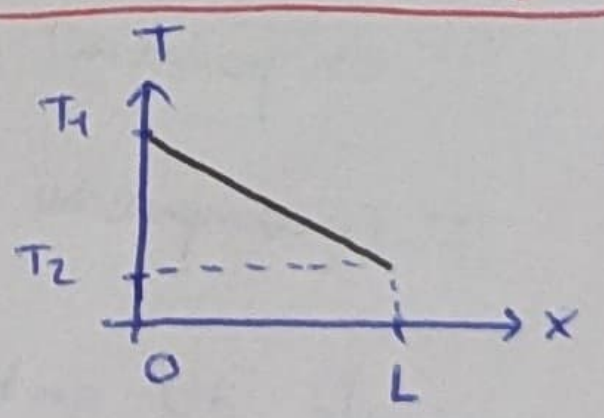
ou $\tau_c = \frac{L_c^2}{a}$ ∴ si je vais 3 fois + loin, j'attends 9 fois + longtemps

---

Solution en régime permanent

CL
$T(0,t) = T_1$
$T(L,t) = T_2$) $\forall t$ ∴ $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ car permanent ∴ $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$

$$\Rightarrow T(x) = ax + b \quad \begin{cases} T(0) = b = T_1 \\ T(L) = aL + T_1 = T_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x}$$



Le flux : $\phi_{th} = j_{th}(x) \, S$

$= -\lambda \frac{dT}{dx} S$ (Loi Fourier)

$$\boxed{\phi_{th} = \frac{T_1 - T_2}{L} S \lambda}$$

si $T_2 > T_1$ ∴ flux < 0

Flux conservé et dépend pas de x

En électricité $R = \frac{V_1 - V_2}{I}$ tq $V_1 > V_2$ et I = flux $= \frac{dq}{dt} = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS}$

la physique est la m̂

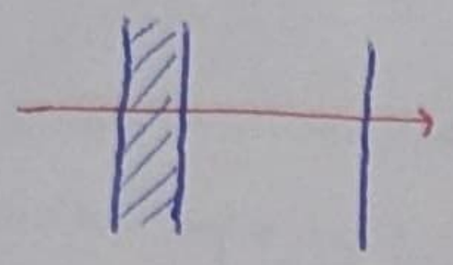
Résistance thermique $\boxed{R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi} = \frac{L}{\lambda S}}$ $[K \cdot W^{-1}]$

	élect.	diff therm	diff part.
	V	T	n
flux	$\frac{dq}{dt} = I$	$\frac{\delta Q}{\delta t} = \phi_{th}$	$\frac{\delta N}{\delta t} = \phi$
conductivité	γ	λ	D
réponse milieu à excitation (= grad)	$\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \, \overrightarrow{\text{grad}}\, V$ Ohm locale	$\vec{j}_{th} = -\lambda \, \overrightarrow{\text{grad}}\, T$ Fourier	$\vec{j} = -D \, \overrightarrow{\text{grad}}\, n$ Fick
	$R = \frac{L}{\gamma S}$	$R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$	

Loi d'association

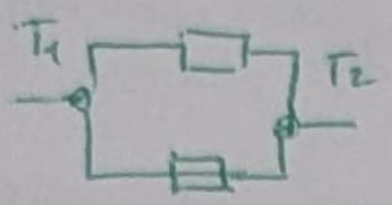
Youtube
Elearning phys.
Diff-Thermi
2

Série



$$R_{th\,eq} = \sum_i R_{th,i}$$

parallèle

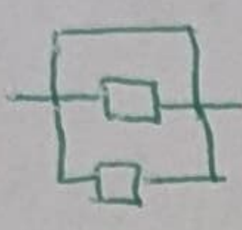


on part du m̂ noeud et on arrive au m̂ noeud ∴ mur et plafond et sol sont en // car on part de Tint et on arrive à Text

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

ça se démontre par loi de noeud thermique

Pont thermique



pas de cohérence entre isolations (≡ fil en électricité)
si on laisse porte ouverte par exemple
⟹ ≡ court-circuit thermique
et le flux sera le + important ∴ tout passe par porte m̂ si on a bien isolé tous les murs

Limites de validité de loi Fourier

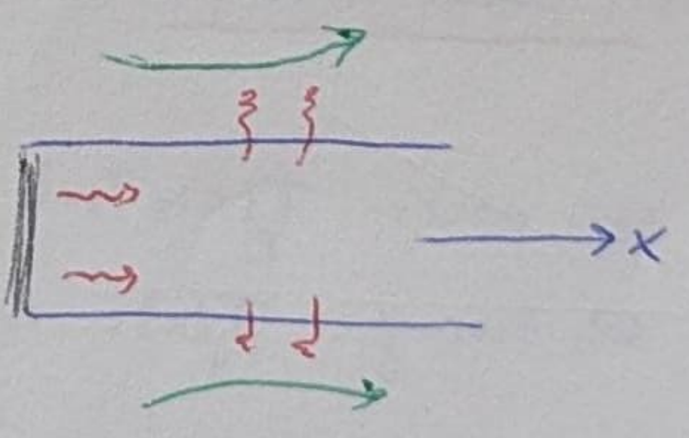
∴ loi phénoménologique (comme loi d'Ohm et loi de Fick) ∴ pas valable ds tous les cas

- si $\vec{grad}$ thermique est très fort ∴ relat° entre flux et grad n'est plus linéaire
- si grad varie rapidement ds t, ∴ relat° entre flux et grad cesse d'être instantanée car il y a retard ds l'établissement du flux thermique
- ∃ milieux anisotropes dont λ dépend de la direction dans l'espace ∴ λ + forte ds direction // couche atomique que ⊥ à celles-ci

Ex graphite a λ 400 fois + forte ds direction // couche atomique
∴ flux pas colin. au $\vec{grad}$ T

Ailette de refroidissement

il y a des pertes thermique latéralement
et ces pertes sont associées à des mouv de convection du fluide qui se trouve en contact avec le solide
(on peut utiliser des ventilateurs pour évacuer cet air
∴ convection forcée)



Loi de Newton de conducto-convection

conducto → conduction (diffusion) thermique ds solide
convection → ds l'air environnant

$$\boxed{\frac{dP}{dS} = h\,(T - T_{ext})}$$

$\frac{dP}{dS}$ en $W.m^{-2}$; $\frac{dP}{dS} = j_{cc}$

h : coeff. de conducto-convection $W.m^{-2}.K^{-1}$

** pas de continuité de T ici entre interface solide-air (ou eau) car il faut avoir (T − Text)

h	convection naturelle	convection forcée
air	10	100
eau	500	5000

Bilan thermique $dU = \delta Q + \cancel{\delta W}$

bilan temporel va rester le même : $dU = U(t+dt) - U(t)$

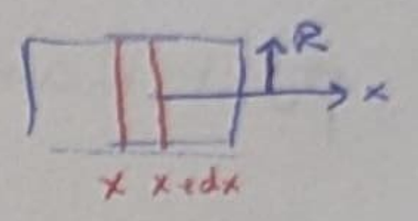
$$= dm\, c\, (T(t+dt) - T(t))$$

$$= \rho S dx\, c \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

bilan de transfert thermique (spatial) : $\delta Q = \underbrace{\delta Q_e(x,t)}_{\text{puissance} \times t \,=\, \text{flux} \times t \,=\, jSt} - \delta Q_s(x+dx,t) + \delta Q_{latéral}$

pour trouver δQ_{lat} il faut donner une forme à l'ailette, supposons circulaire

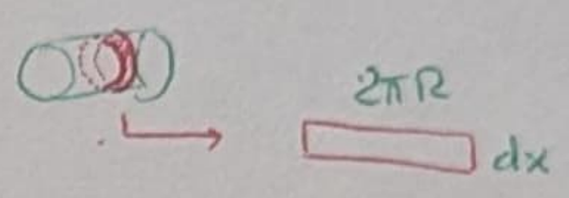
∴ section disque $S = \pi R^2$



δQ_{lat} (énergie) $= -dP\,dt = -h\,\underbrace{(T(x,t) - T_{ext})}_{>0}\, dS_{lat}\, dt$ par loi Newton

>0 ∴ transfert thermique perdu de la tige ∴

$dS_{lat} = 2\pi R\, dx$ si je déroule



$$\Rightarrow \rho \underset{\pi R^2}{S} dx\, c \frac{\partial T}{\partial t} \cancel{dt} = j_{th}(x,t)\, \overset{\text{section}}{\cancel{\pi} R^2} \cancel{dt} - j_{th}(x+dx,t)\, \cancel{\pi} R^2 \cancel{dt} - h(T(x,t) - T_{ext})\, 2\cancel{\pi} R\, dx\, \cancel{dt}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \rho R \cancel{dx}\, c = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} \cancel{dx}\, R - 2h(T(x,t) - T_{ext}) \cancel{dx}$$

Fourier : $j_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ ∴ $\boxed{\rho c R \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda R \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 2h(T - T_{ext})}$

solution en régime permanent : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ∴ $\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda R} T = -\frac{2h}{\lambda R} T_{ext}$

δ : dist. caractéristique $\delta^2 = \frac{\lambda R}{2h}$

sol. part : $T_p(x) = T_{ext}$

sol. homog : $T_H(x) = A e^{x/\delta} + B e^{-x/\delta}$ ⟶ si barre → ∞ ($L \gg \delta$)

ou $C\, ch\left(\frac{x}{\delta}\right) + D\, sh\left(\frac{x}{\delta}\right)$ → si barre a long. finie

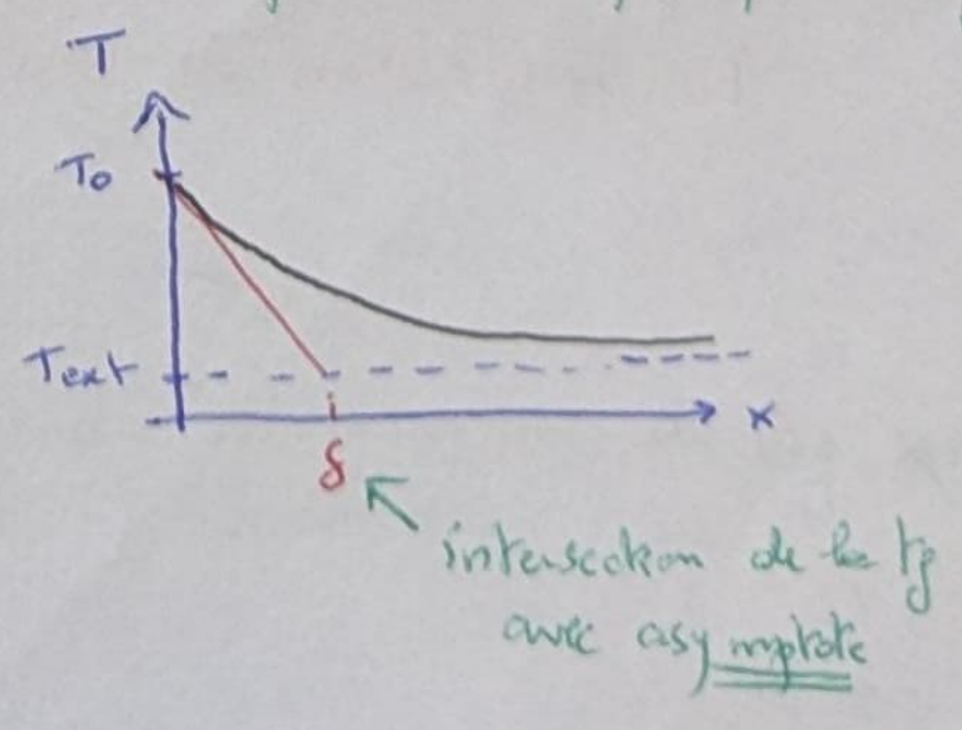
car qd x → ∞ ni ch ni sh sont négligeable et les 2 divergent

alors qu'avec exp, il y a 1 sol qui → 0 et ∴ on pose A = 0 pour pas diverger

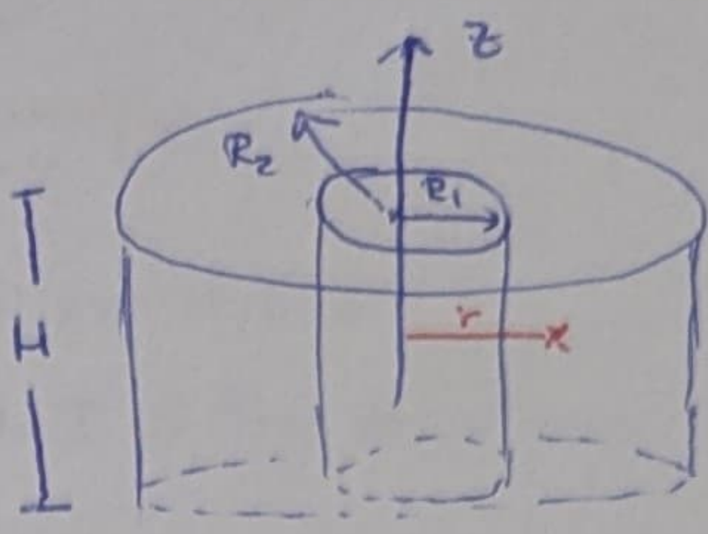
si $L \gg \delta$: $T(x) = T_{ext} + B e^{-x/\delta}$

CL : $T = T_0$ à $x = 0$ → $T(x) = T_{ext} + (T_0 - T_{ext}) e^{-x/\delta}$

au bout de qq δ, T_{barre} sera ≈ T_{ext}



Symétrie cylindrique : R_{th} ?



Youtube
E-learning Phys
Diff. therm.
3

$T(r)$
↳ entre les 2 cylindres
il y a invariance par rotation $\cancel{\theta}$ et
par translation le long de l'axe z $\cancel{z}$

$\begin{cases} T(R_1) = T_1 \\ T(R_2) = T_2 \end{cases}$ et loi Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e_r}$

En régime permanent : $\phi = \iint \vec{j}_{th} \, d\vec{S} = \text{cste}$ flux se conserve (puissance) $\Rightarrow$ l'E (par unité t) ne dépend pas de r

$\Rightarrow$ si je prends cylindre de rayon r entre R_1 et R_2, a tjr m̂ flux qq soit r

Donc $\phi = j_{th}(r) \underbrace{\iint}_{\text{cylindre de } r} dS \begin{cases} \to r\,d\theta\,dz \\ \to \text{on coupe cylindre et on l'étale} \end{cases} = j_{th}(r) \underbrace{2\pi r H}_{\text{surf. latérale}} = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r H$

$\int dT = \frac{-\overset{\text{car cste}}{\phi}}{2\pi H \lambda} \int \frac{dr}{r} \Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{-\phi}{2\pi H \lambda} \ln \frac{R_2}{R_1}$

$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi} \to \boxed{R_{th} = \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi H \lambda}}$

Symétrie cylindrique : Eq° Diff. thermique ?