I Eu PCSI

Puits de Potentiel

Dunod 2016
PCSI
Méca Extra

★ **puits de potentiel harmonique** : objet se déplace de la forme :

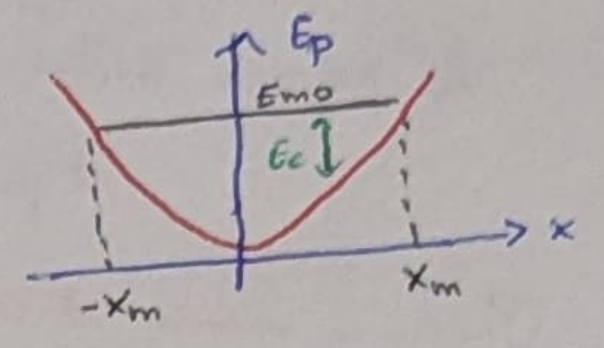
$$E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

et on néglige toute $\vec{F}_{nc}$ (frott.) ∴ $E_m = cste = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$

E_{m0} = ~~$E_m(t=0)$~~ $= \frac{1}{2} m (0)^2 + \frac{1}{2} k X_m^2 =$

max E_p

∴ $X_m = \sqrt{x^2 + \frac{m}{k} v^2}$

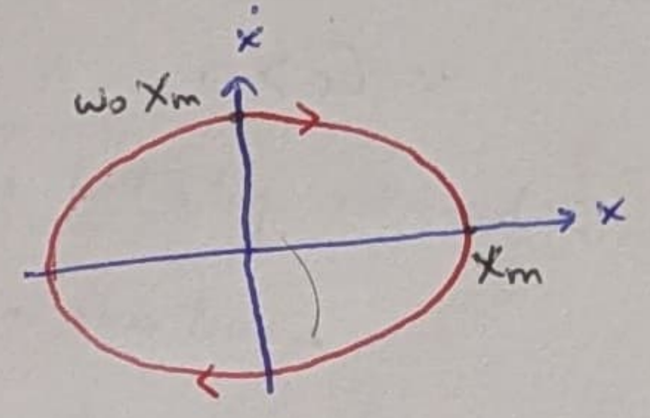


$$\Rightarrow \frac{k}{m} x^2 + \dot{x}^2 = \frac{k}{m} X_m^2$$

par $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{X_m^2} + \frac{\dot{x}^2}{(\omega_0 X_m)^2} = 1$$

éq° ellipse ds plan de phase $(x, \dot{x})$ $\quad \frac{\dot{x}}{a} + \frac{\dot{x}^2}{b} = 1$ $\quad$ Ib



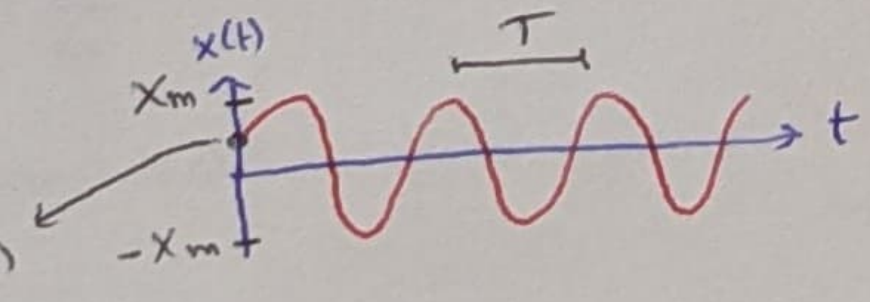
∴ traject. phase d'un mouv. harmonique = ellipse

∴ courbe fermée ∴ mouv périodique

et l'amplitude $= X_m$ (tjr car pas de frott.)

si $x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2} = X_m^2$ ∴ éq° cercle ds plan $(x, \frac{\dot{x}}{\omega_0})$ de rayon X_m

$$\Rightarrow x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$



$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

isochronisme des oscillations

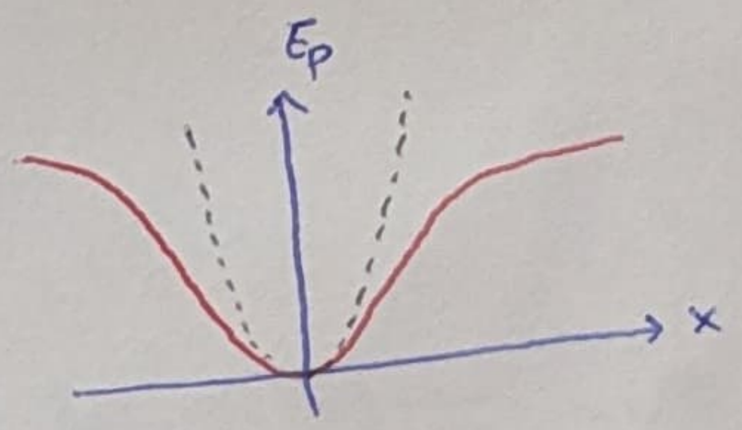
par $X_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$ $\Rightarrow$ φ_0 : $\tan \varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}$ $\quad \begin{cases} \cos \varphi_0 = \frac{x_0}{X_m} \\ \sin \varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega_0 X_m} \end{cases}$

★ **puits de potentiel quelconque** :

$$E_p(x) = E_p(x_{éq}) + (x - x_{éq}) \cancel{\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_{éq}}}^{0} + \frac{(x-x_{éq})^2}{2} \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{éq}}^{k>0} + o\left((x-x_{éq})^2\right)$$

mouv. de faibles amplitudes au voisinage de position éq stable peuvent être assimilés à mouv. OH centré sur $x_{éq}$

et pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ tq $k = \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_{éq}}$



si **fortes amplitudes** ?

on va trouver que mouv est tjr constitué d'oscillations mais ni sinusoïdales ni isochrones

le puits choisi ici est de la forme $E_p(x) = E_0 [1 - e^{-(\frac{x}{L})^2}]$

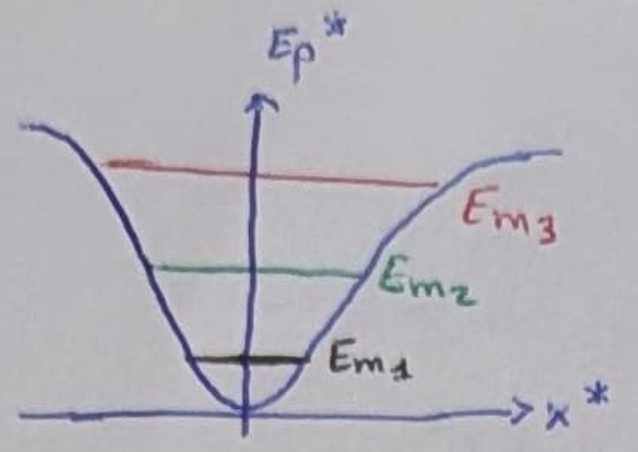
↳ échelle caract. de largeur puit

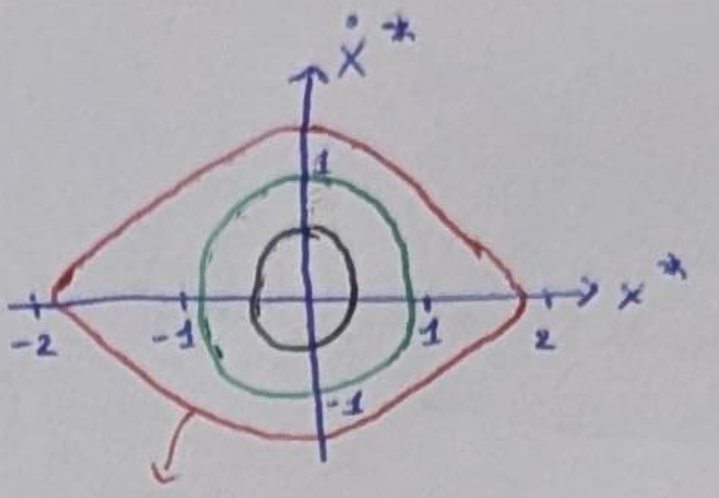
∴ échelle de vit : $v_0 = \sqrt{\frac{E_0}{m}}$ et échelle de temps : $t_0 = \frac{L}{v_0} = L\sqrt{\frac{m}{E_0}}$

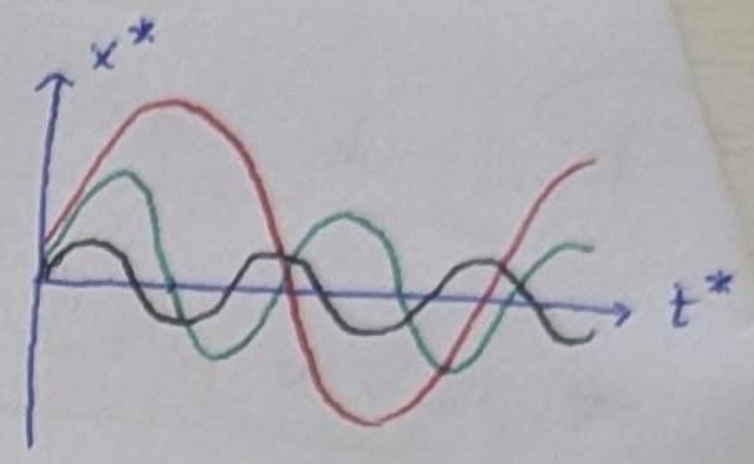
PFD : $\frac{d(m\dot{x})}{dt} = -\frac{dE_p}{dx} = -E_0 \frac{2x}{L^2} e^{-(\frac{x}{L})^2} = \frac{d^2}{dt^2}(mx)$

on introduit grandeurs adimensionnées $x^* = \frac{x}{L}$ et $t^* = \frac{t}{t_0}$ $\Rightarrow$ $\frac{mL}{t_0^2} \frac{d^2x^*}{dt^{*2}} = \frac{-2E_0}{L} x^* e^{-x^{*2}}$

$t_0^2 = L^2 \frac{m}{E_0} \Rightarrow$ $\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} = -2x^* e^{-x^{*2}}$ et on résout numériquement par $\left| \begin{array}{l} x(t=0)=0 \\ \dot{x}(t=0)>0 \end{array} \right.$ $\Rightarrow$







la période évolue avec l'amplitude $\Rightarrow$ isochronisme pas vérifiée à grandes amplitudes

et par traject. de phase, on voit qu'à grandes ampl. les oscill. sont pas sinusoïd.

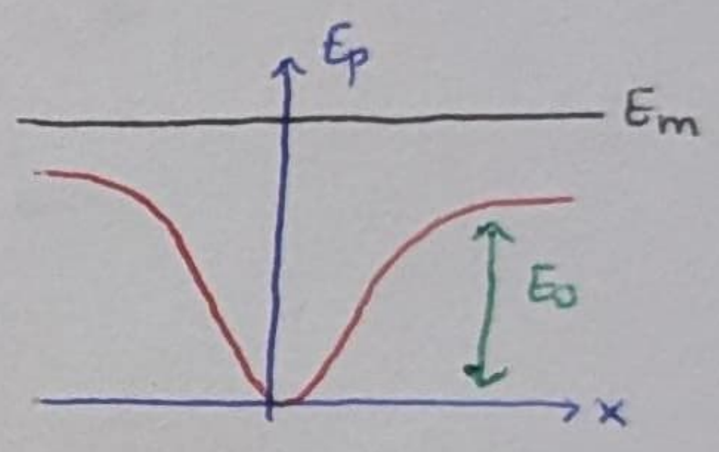
Présence mouv. d'oscill. sinusoïd. isochrones est une signature des mouv. ds des potentiels rigoureusement ou quasiment harmoniques

Comment sortir du puits ?

$\Rightarrow E_c > 0 \quad \Rightarrow E_m \geq E_p$

Si barrière potentiel est de profondeur E_0 $\Rightarrow$ E_m doit être $> E_0$

$\Rightarrow$ particule n'est plus confinée



Puits de Potentiel : Influence des frottements

Dunod 2016
PCSI
méca extra 2

Soit $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$

on restreint l'étude aux p-ts har-oniques pour que résolut° analytique soit possible

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{nc})$$

$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x}$ $\qquad$ $\vec{F}\cdot\vec{v} = -\lambda v^2 = -\lambda \dot{x}^2$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$ ED oscill. amort.

La forme canonique

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Q : Facteur de qualité ; ω_0 : pulsation propre

ou

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

↳ facteur d'amortissement $\xi = \frac{1}{2Q}$

- en choisissant les grandeurs adim $x^* = \frac{x}{x_0}$ ← $x(t=0)$ et $t^* = \frac{t}{T_0}$ ← $\frac{2\pi}{\omega_0}$ et $\dot{x}^* = \frac{dx^*}{dt^*} = \dot{x}\frac{T_0}{x_0}$

et $E_c^* = \frac{E_c}{E_0}$ ← E_m initiale et $E_p^* = \frac{E_p}{E_0}$

on trace ≠ comportements du syst selon valeur de Q dans Régime Libre de OH amort. (éloigner de x_0 et laisser retourner à éq librement)

discriminant de "$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$"

est $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = (2\omega_0)^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$

A] Pseudo-Périodique :

$\Delta < 0$ et $Q > \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \lambda < \frac{1}{2\sqrt{mk}}$ Frott. faible

$$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega$$

$$x(t) = X_m \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\cos(\omega t + \varphi)$$ X_m, φ à trouver par CI

oscillations décroit exponentiellement avec temps caract. $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$

qu'on caractérise par pseudo-période et décrément logarithmique (mesure diminution amplitude pendant pseudo période)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} > T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

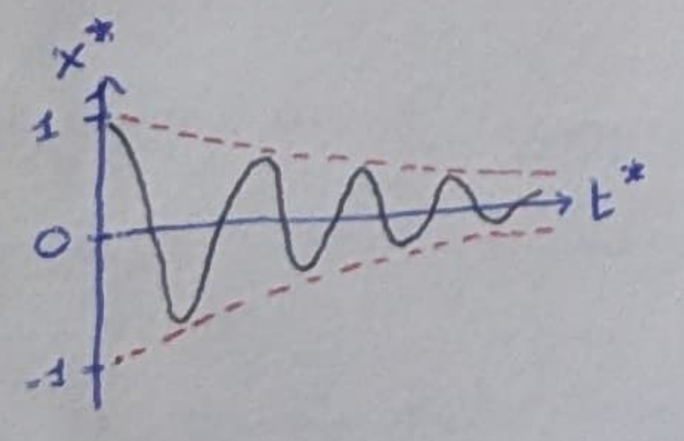
$$\delta = \ln\left(\frac{A(t)}{A(t+T)}\right)$$

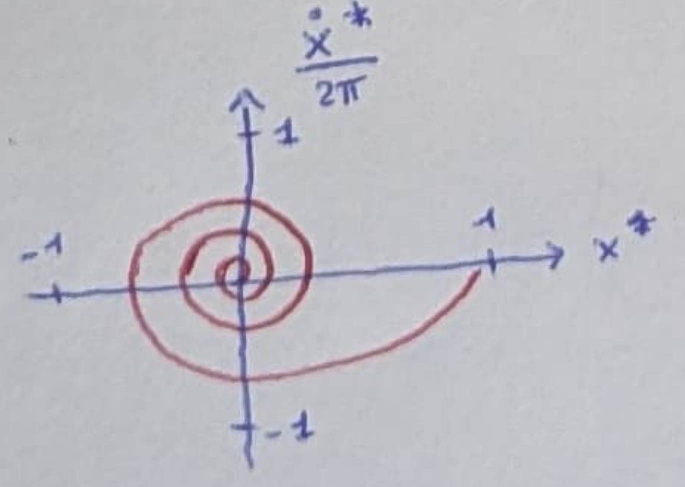
$$\delta = \ln\left(\frac{A(t)}{A(t)\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}T\right)}\right) = \frac{\omega_0}{2Q}T$$

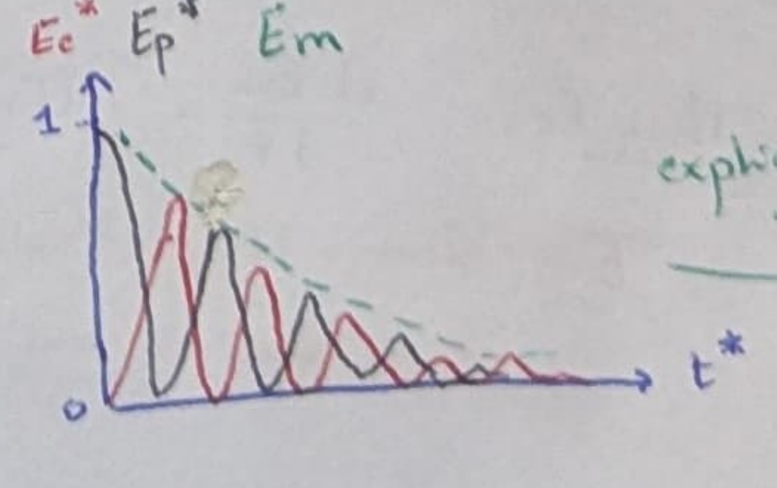
pour amortissement faible (= plusieurs oscill. avant amort)

$\therefore Q \gg 1 \Rightarrow T \simeq \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$ et $\delta \simeq \frac{\pi}{Q}$ si amplitude est cste (OH) $\therefore \delta = 0$ et $T = T_0$

★ qd Q est suffisamment grand (en pratique > 3), nb d'oscill. observables ≃ Q ± 1 après, c'est du à voir







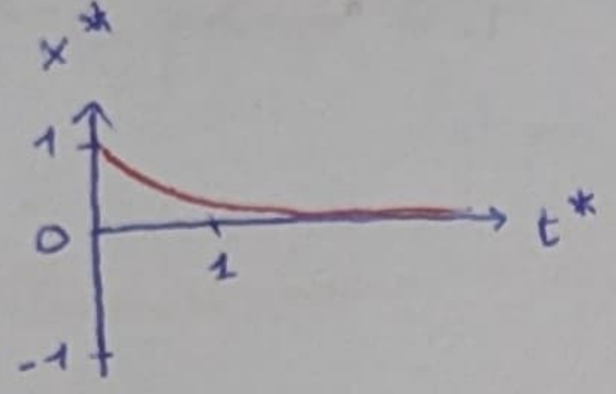
explication à la fin

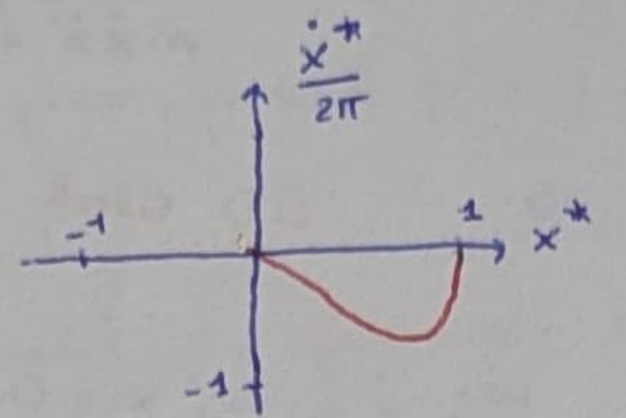
B] Régime Apériodique : $\Delta > 0 \Rightarrow Q < \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda > \frac{1}{2\sqrt{mk}}$ Frott. Fort

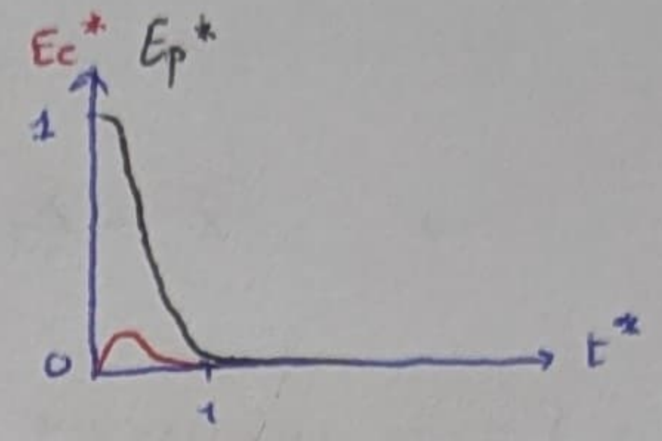
$$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}$$ 1er terme > 2nd $\therefore$ $r_\pm$ les 2 sont tjr <0

$$x(t) = X_+ e^{r_+ t} + X_- e^{r_- t}$$ Σ de 2 expo décroissantes

L'amplitude diminue sans faire apparaître oscill.







C] Régime Critique : $\Delta = 0 \Rightarrow Q = \frac{1}{2}$

$$r = -\omega_0 \Rightarrow x(t) = (\lambda t + \mu)e^{-\omega_0 t}$$ λ, μ par CI

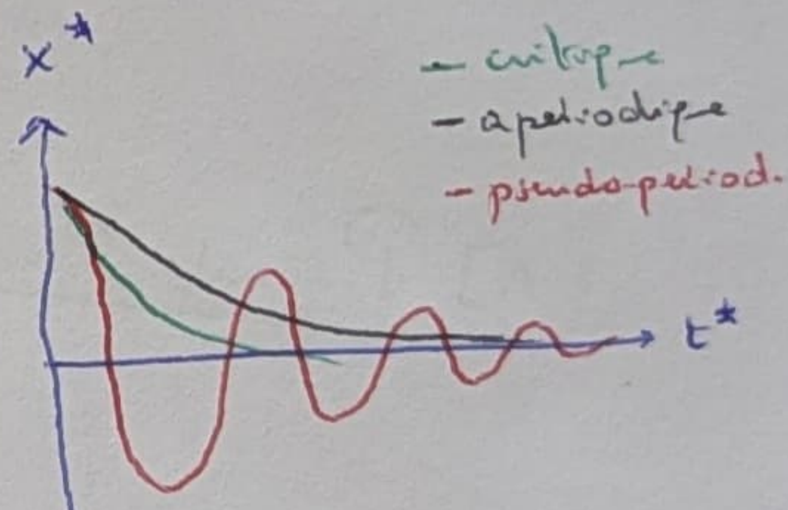
m allure que "apériodique" et : pas d'oscill.

Durée des ≠ régimes :

par $e^{-\frac{t}{\tau}}$, la valeur est réduite à 1% de la val. initiale après $\Delta t = -\tau \ln\left(\frac{1}{100}\right) \approx 4{,}6\tau$

- pseudo-périod. : $\tau_1 = \frac{2Q}{\omega_0}$
- apériodique : $\tau_2 = -\frac{1}{r_+} = \frac{2Q}{\omega_0}\frac{1}{1-\sqrt{1-4Q^2}}$
- critique : $\tau_3 = \frac{1}{\omega_0}$

$\Delta t_i = 4{,}6\,\tau_i$



pour retour en $x=0$, critique est le + rapide car $\tau_3 < \tau_1$ à $Q > \frac{1}{2}$, $\tau_3 < \tau_2$ à $Q < \frac{1}{2}$

les amortisseurs de voitures ramènent rapidement la voiture à l'éq. sans oscill. excessives : on les règle pour qu'ils fonctionnent quasiment en régime critique

Aspects Energétiques $Ec = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ et $Ep = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$ et $Em = Ec + Ep$

pour pseudo-périod : $x(t) = X_m e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega t + \varphi)$ tq $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$

$\therefore Ep = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_m^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} \frac{1}{2}[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)]$ $\therefore$ Ep présente oscill. tq amplitude diminue, avec pseudo-période $= \frac{T}{2}$ et amplitude décroît en temps caract. $\tau' = \frac{\tau}{2}$

L'Ec a m caractéristique mais est en opposition de phase

Au final, Em n'oscille quasiment pas ⇒ décroissance exponentielle à τ'

(voir courbe pseudo-périod.)

Par Thm Ec : $\frac{dEm}{dt} = \mathcal{P}(F_{nc}) = -\lambda\dot{x}^2 < 0$

Em diminue par l'action du frottement et est dissipée sous forme de chaleur