DUNOD 1970
Soutif
(Oscillation 1)
PhA3$_3$ SOU

Vibrations Propagation Diffusion

Chap 1 : Mouvements Vibratoires

A] Régime Sinusoïdal

- soit élongation sinusoïdal : $x = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$ comprise entre $\left\langle \begin{array}{l} x_0 \\ -x_0 \end{array} \right.$ amplitude du mouv

  Dans l'argument il y a $\left\langle \begin{array}{l} \text{pulsation } \omega = \frac{2\pi}{T} \\ \text{phase } \varphi \end{array} \right.$

- La vitesse du mouv : $v = \frac{dx}{dt} = -\omega x_0 \sin(\omega t + \varphi) = v_0 \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$

  sa phase est en quadrature avec phase du mouv. ($\neq$ de $\frac{\pi}{2}$)

- L'accélération : $a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t + \varphi) = a_0 \cos(\omega t + \varphi + \pi)$

  en opposition de phase avec le mouv

- éq° diff. du mouv : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

  on utilise plutôt ça car x_0 et φ ont signification physique

  dont solutions générale est de type $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ ~~ou~~ $x = x_0\cos(\omega t + \varphi)$

  cstes d'intégration à déterminer par C.I.

- PFD : $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum \vec{F} = m\vec{a}$ $\therefore$ $-m\frac{d^2x}{dt^2} + F(x) = 0$

  si $F(x) = -Kx$ $\Rightarrow$ $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$ on retrouve éq° diff. du mouv. sinusoïdal

  $\vec{F}$ opposé au mouv et constitue un rappel vers le zéro

- Cette proportionnalité à x $\equiv$ déformation élastique des solides (ressort, fil de torsion)
  mais peut aussi constituer 1ère approx d'un mouv + complexe

  $\therefore$ si solide en équilibre stable $\therefore$ si on écarte de cette position, il y a $\vec{F}$ opposée au mouv. (et nulle à l'éq. stable) $\therefore$ par DL (pour petits mouv) :

  $$F(x) = -Kx + \alpha x^2 + \beta x^3 + \dots$$

  $\Rightarrow$ en se limitant aux petits mouv, oscillations autour pt d'éq. est tjr sinusoïdale

- Par identification : $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}}$

- Remarque $-m\vec{a} + \sum\vec{F} = \vec{0}$ est identique à $\sum\vec{F}' = \vec{0}$ en statique à condition d'inclure dans les $\vec{F}$ (réellement appliquées) la force d'inertie $-m\vec{a}$

  principe de d'Alembert

On considère donc que mouv. sinusoïdal résulte de l'équilibre de 2 Forces $\left\langle \begin{array}{l} \vec{F} \text{ rappel} \\ \vec{F} \text{ d'inertie} \end{array} \right.$

- On peut trouver $\int$ première de l'éq° mouv en multipliant par v : $m\frac{dv}{dt}\cdot v + Kx\cdot\frac{dx}{dt} = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Kx^2\right) = 0$

par intégration : $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = cste$ $\Rightarrow$ Conservat° E totale du syst.

$\frac{1}{2}mv^2$ → E_c accumulée par travail F inertie ($m\vec{a}$ est tjr liée à inertie d'où m = m inertiel)

$\frac{1}{2}Kx^2$ → E_p de F rappel car $W_{0\to x}(F) = \int_0^x -Kx\,dx = -V$

-) ∴ = cste ∴ se transf. l'1 à autre au cours du mouv

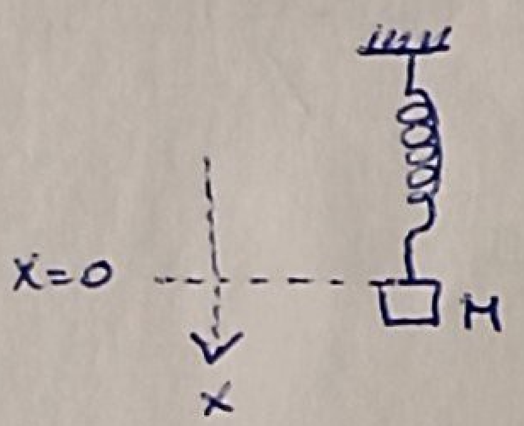
moy. de $[x_0\cos()]^2$ -) $\overline{x^2} = x_0^2\,\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t+\varphi)\,dt = \frac{x_0^2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}[\cos(2\omega t+2\varphi)+1]\,dt = \frac{x_0^2}{2}$

donne sin ∴ impair ⇒ 0 ; donne $[t]_0^T = T$

-) $\overline{v^2} = \frac{v_0^2}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}K\overline{x^2} = \frac{1}{2}m\overline{v^2}$ E_c moy. = E_p moy.

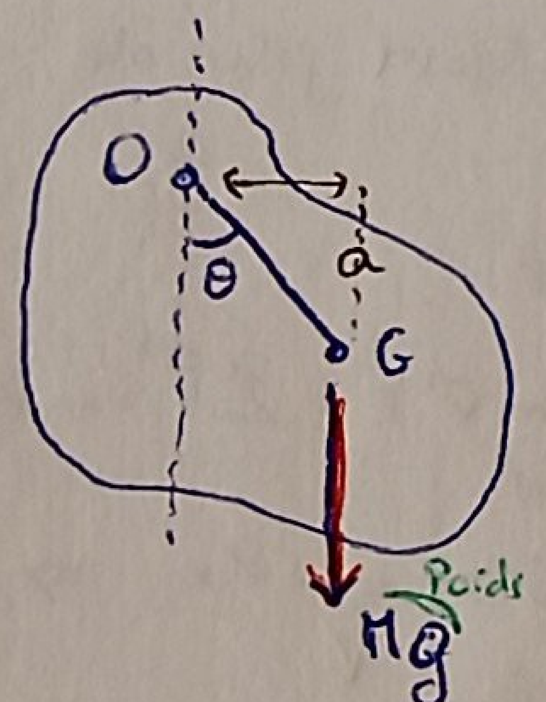
Exemples de mouv. vibratoires



poids de M équilibré par force développée par allongement du ressort

$M\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$

Expression vraie mm ↗ déplacement car la $\vec{F}$ est linéaire ds toute zone d'élasticité du métal



mobile tourne autour axe horizontal O

À l'équilibre, centre gravité G est sur la verticale passant par O

autour de position d'équilibre, mouv défini par θ

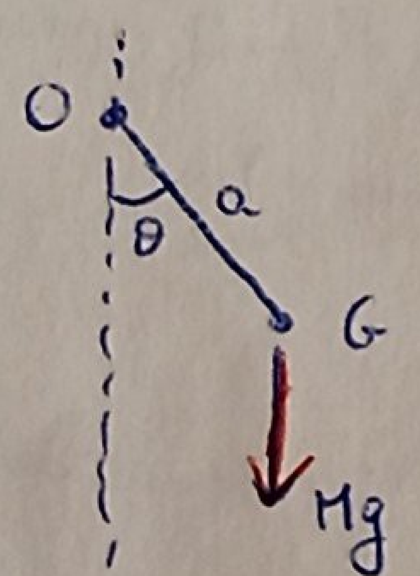
$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum$ moments des $\vec{F}$

moment du poids : $-Mg\sin\theta\,a$ (a = OG)

moment (-if) si tend à ramener solide vers éq. stable

par petits mouv : $\sin\theta \simeq \theta$:

$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + Mga\theta = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{Mga}{I}}$



cas particulier de ça ↗ où toute m concentrée au centre de gravité G

$\Rightarrow$ moment d'inertie $I = Ma^2$

∴ $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$ cas pendule simple

② moment angulaire (en absence de couple) est cste ∴ $L = I\omega = cste$

I dépend de comment la masse est répartie par rapport à l'axe de rotation ∴ écarter les bras fait ↗ I ∴ ω ↘ et serrer les bras fait ↘ I ∴ ω ↗

①

★ Moment d'inertie I : mesure la répartition de la masse d'un obj. par rapport à un axe de rotation

Sa formule est $I = \int r^2\,dm$ [$Kg\,m^2$] (r → dist. entre dm et axe de rotation)

I est ≠ pour chaque forme géométrique

Par dynamique de rotation : $I\alpha = \sum \mathcal{M}(\vec{F})$ éq° fondamentale de rotation

(I → joue rôle m ds PFD (résiste au mouv. rotatif) ; α → acc. angulaire)

Amortissement

les forces d'inertie et de rappel n'introduisent aucune perte (ni aucun gain) vis-à-vis milieu ext.

Cela se traduit par le fait que leur travail sur cycle complet est nul

$$W = \int_0^T -Kx\,dx = \int_0^T Kx_0^2\,\omega\,\underbrace{\cos(\omega t+\varphi)\,\sin(\omega t+\varphi)}_{\text{sin de double angle}}\,dt = 0$$

dx/dt

et pareil pour F inertie

Ce résultat est obtenu car ces F sont en phase ou en opposition de phase avec x

Si on a F en quadrature de phase avec x ∴ en phase (à π près) avec vitesse, $W \neq 0$

car l'expression ~~(par + signe) somme~~ dans ∫ contient termes carrés et non plus rectangle

Ex $\vec{F} = K\vec{v}$ ∴ $W = \int_0^T Kv\,dx = \int_0^T Kv^2\,dt = \int_0^T K v_0^2 \sin^2(\omega t+\varphi)\,dt$

$$= \frac{Kv_0^2}{2}\int_0^T [1-\cos 2(\omega t+\varphi)]\,dt = \frac{Kv_0^2 T}{2}$$

selon signe K, W correspond { pertes d'E / gain d'E

On se limite au cas de perte → $K<0$ ∴ force introduite est opposée à la vitesse

c'est donc force de frottement

∴ mouv n'est plus sinusoïdal...

⇒ en pénalité F déphasée de θ par rapport au mouv ⇒ $W = \int F\,dx = -\int F_0\cos(\omega t+\theta)\cdot \omega x_0 \sin(\omega t)\,dt$

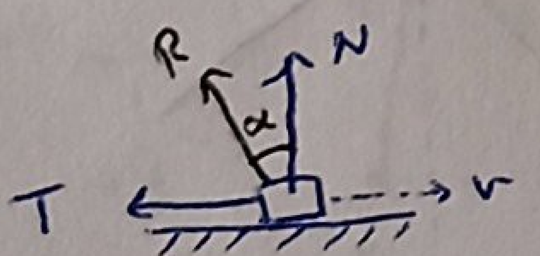
(en prenant $\varphi = 0$ pour simplifier)

$F_0[\cos\omega t\cos\theta - \sin\omega t \sin\theta]$

⇓ $W = 0$ ⇓ $W = +F_0\sin\theta\,\frac{\omega x_0 T}{2} = \frac{v_0 T}{2} F_0 \sin\theta$

∴ Sur une période, seule la composante de F en quadrature avec x travaille

★ Frottement Solide



2 solides en contact, réact° normale N s'accompagne d'une compo. tangentielle T qui traduit le frottement = R° totale est inclinée / normale tant qu'il n'y a pas de mouv

$T \leq N\tan\alpha$
$T \leq kN$

} T est indéterminé ici ∴ R aussi ...

Quand il y a mouv, T prend – sa valeur limite
– la direction de la $\vec{v}$
– mais le sens opposé

[cette T correspond à la condition de phase précédente (bien que c force cste en amplitude)]

Pour étudier son effet, soit syst en rotation soumis à couple de rappel $-C\theta$ (fil de torsion)

- c un moment de force qui agit pour ramener un syst à son équilibre (lorsqu'il est déplacé ou tordu)
  couple [N.m] = $-K\theta$ → angle de torsion (−) car agit ds direct° opposé à déformation
  K : cste de torsion N.m/rad
- Fil de torsion = fil ou tige se tord par couple appliqué ∴ couple de rappel est généré. Ici $K = \frac{GJ}{L}$ — G : module cisaillement du matériau [Pa] ; J : moment inertie polaire de la section transversale [m⁴] ; L : longueur

On ajoute à ce couple le moment des forces de frottement de valeur cste M et de signe ε

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta + \varepsilon M$$

avec la convention $\varepsilon \frac{d\theta}{dt} < 0$

→ si $\theta' > 0$ ∴ $\varepsilon < 0$ et l'inverse

L'intégrale générale = Σ $\underbrace{\text{intégrale sans } 2^{nd} \text{ membre}}_{\text{sol. sinusoïdale = mouv purement oscillatoire}}$ + intég. particulière → le syst. subit acc. angulaire cste supplémentaire modifiant l'oscillation

Mais le + simple c cas du repos ∴ $\frac{d\theta}{dt} = 0$ ⇒ $\theta = \frac{\varepsilon M}{C}$
pour sol. particulière (car θ = cste)

soit $\gamma = \frac{M}{C}$ ∴ $\theta = \varepsilon\gamma$

⇒ sol. générale : $\theta = A\cos(\omega t + \varphi) + \varepsilon\gamma$ (pour CI pour (A, φ) trouver, soit t = 0, θ = θ₀ sans v initiale)

En plus le mouv. est vers θ négatifs ∴ ε = +1 (et pas −1) ds cette 1ère phase du mouv.

∴ $\underline{t=0}$ $\left|\begin{array}{l} \theta = A\cos\varphi + \gamma = \theta_0 \\ \frac{d\theta}{dt} = -A\omega\sin\varphi = 0 \end{array}\right.$ ⇒ $\varphi = 0$, $A = \theta_0 - \gamma$ $\boxed{\theta = (\theta_0 - \gamma)\cos\omega t + \gamma}$

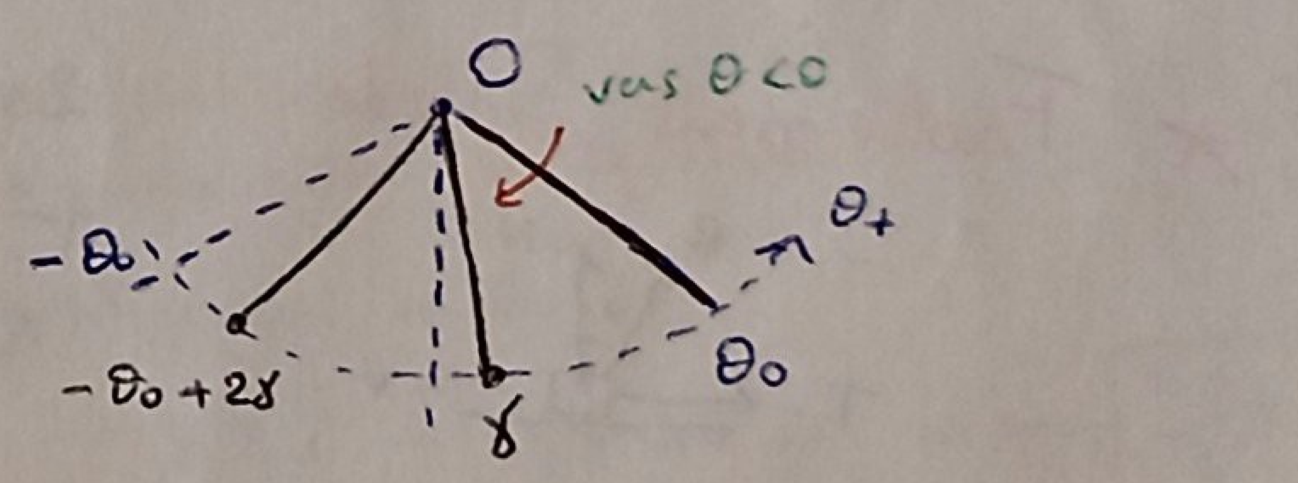
La vitesse : $\frac{d\theta}{dt} = -\omega(\theta_0 - \gamma)\sin\omega t$ est identique à celle d'un oscill. sinusoïdal

- au bout de quart période ($\omega t = \frac{\pi}{2}$), v = max → ($t = \frac{T}{4}$)
- elle s'annule au bout de demi-période

Ensuite elle change de signe (∴ ε change) ∴ on considère que 1ère phase mouv dure $\frac{1}{2}T$

☆ amplitude θ n'est pas nulle à $\frac{T}{4}$ mais = γ   pour pendule par ex, Vmax qd θ = 0 (passe par position éq-libre)
∴ car a perdu du temps par rapport à oscill. sinusoïdal

et $\frac{T}{2}$ → $\theta = 2\gamma - \theta_0$ ∴ amplitude diminue de 2γ

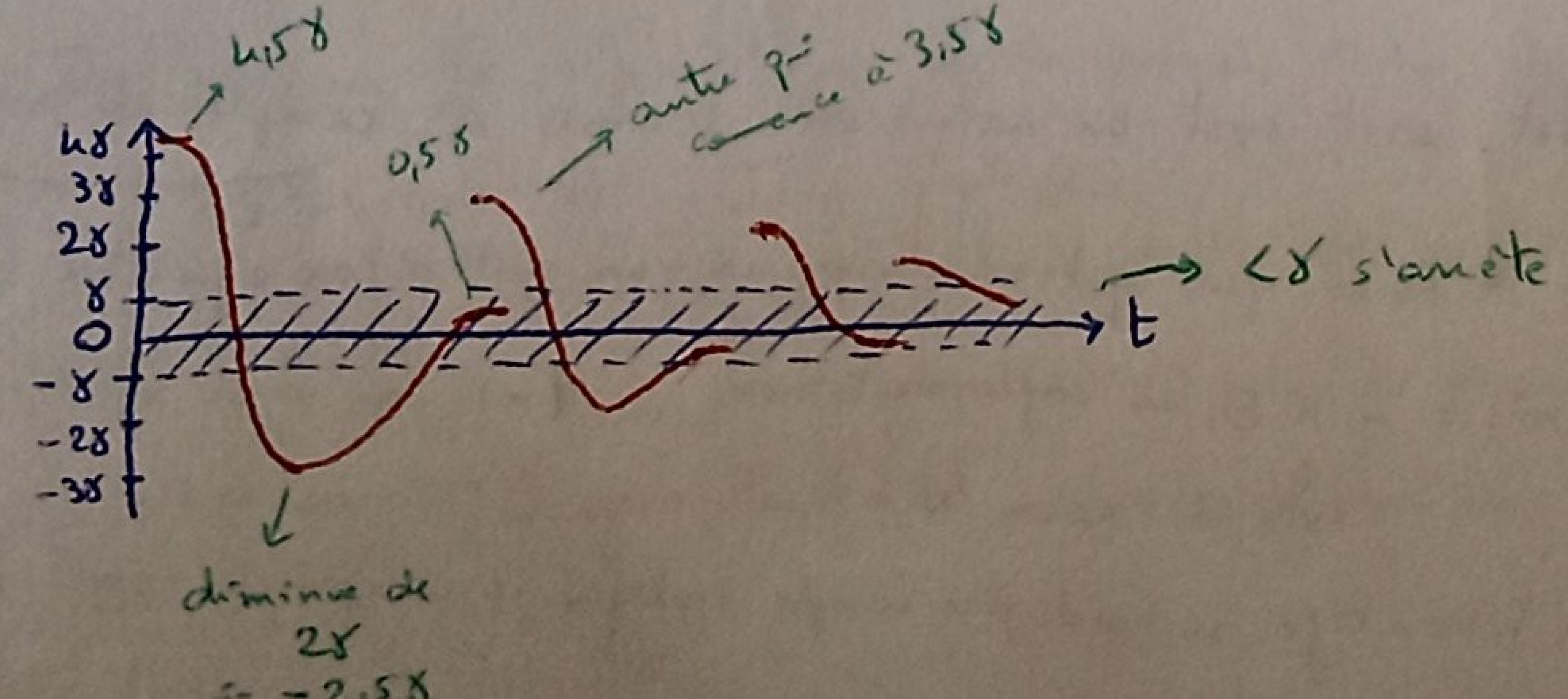


2e phase On recommence m̂ raisonnement
($\frac{1}{2}$ période suivante) ∴ nouvelle diminution
de 2γ alors → $\theta_0 - 4\gamma$

⇒ décroissance arithmétique régulière de 4γ par période

Arrêt du mouv lorsqu'au moment d'une élongation max θ_n, le couple de rappel $-C\theta_n$ sera en valeur absolue < moment de force frottement $|-C\theta_n| < M$ ⇒ $|\theta_n| < \gamma$

diverses possibilités de l'arrêt selon valeur γ



ces possibilités d'arrêt dépendent des CI ∴ varient d'expérience à autre
et mobile s'arrête en position quelconque ds plage de largeur 2γ

* Frottement Visqueux

La viscosité développe une $F \propto v$ et dirigée en sens inverse.

éq° mouv. (pour mobile en rotation) : $I \frac{d^2\theta}{dt^2} + C\theta = -f \frac{d\theta}{dt}$

sol. est Σ 2 expo dont coeff sont racines (EC) : $Ir^2 + fr + C = 0$

- chgt variable temps (pour simplifier) : $\tau = \frac{t}{T_0}$

  tq T_0 = période en absence frottement ∴ $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}$

- On décrit l'amortissement par coeff. α : $\alpha = \frac{f}{f_c}$

  tq f_c = valeur critique annulant discriminant ∴ $f_c^2 - 4IC = 0$

⇒ en remplaçant : $I \frac{d^2\theta}{T_0^2 d\tau^2} + C\theta + \alpha f_c \frac{d\theta}{T_0 d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 4\pi\alpha \frac{d\theta}{d\tau} + 4\pi^2\theta = 0$

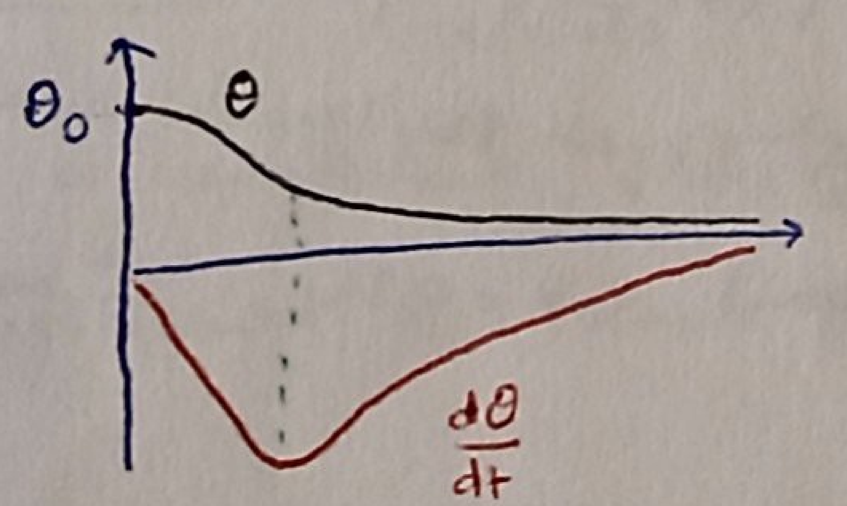
Il y a 3 cas possibles suivant valeur de f par rapport à f_c ∴ de α par rapport à 1

1) Mouv. critique $\alpha = 1$ sol. est de la forme : $\theta = (A + B\tau)e^{-2\pi\tau}$

CI à $\tau = 0$, $\frac{d\theta}{d\tau} = 0$ à $\theta = \theta_0$ (vit initiale nulle)

$\theta = \theta_0 (1 + 2\pi\tau) e^{-2\pi\tau}$ $\frac{d\theta}{d\tau} = -4\pi^2\theta_0 \tau e^{-2\pi\tau}$

Le mobile revient constamment vers l'équilibre qu'il n'atteint qu'à $t\infty$ et vit est constamment < 0



Lorsque mobile ici est un instrument de mesure ∴ faut savoir au bout de combien temps il sera possible de lire le "zéro" avec erreur < valeur mesurée.

Si on cherche t nécessaire pour que l'élongation soit ramenée au 100^e de sa valeur initiale (∴ erreur de 1%), on résoud : $\frac{1}{100} = (1 + 2\pi\tau)e^{-2\pi\tau} \Rightarrow \tau = 1{,}06$

∴ $t = 1{,}06\, T_0$ ∴ de l'ordre de la période du syst. non amorti

2) Mouv. oscillatoire : $\alpha < 1$ "oscillations amorties" racines : $r = -2\pi\alpha \pm i\,2\pi\sqrt{1-\alpha^2}$

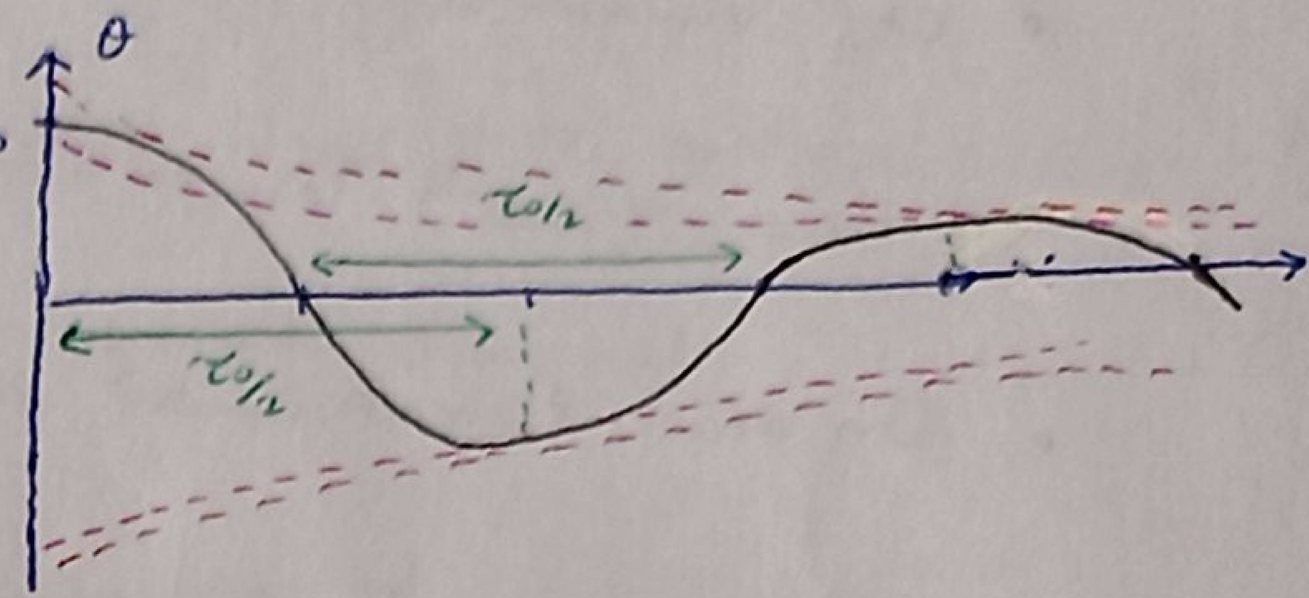
$$\therefore\ \theta = A e^{-2\pi\alpha\tau} \sin\left[2\pi\sqrt{1-\alpha^2}\,\tau + \varphi\right] \xrightarrow[\left.\frac{d\theta}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0]{CI} \tan\varphi = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}$$

Nous choisirons : $\cos\varphi = \alpha$

$$\theta = \frac{\theta_0}{\sqrt{1-\alpha^2}} e^{-2\pi\alpha\tau} \sin\left[2\pi\sqrt{1-\alpha^2}\,\tau + \varphi\right] \qquad \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{-2\pi\theta_0}{\sqrt{1-\alpha^2}} e^{-2\pi\alpha\tau} \sin\left(2\pi\sqrt{1-\alpha^2}\,\tau\right)$$

Ces 2 fct présentent des zéro périodiques bien qu'elles ne soient pas elles m. périodiques en raison du terme exponentiel → ∴ mouv. pseudo-périodique

de période : $\tau_0 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \dfrac{1}{\sin\varphi}$



- La courbe est enveloppée par les 2 expo $\pm \dfrac{\theta_0}{\sqrt{1-\alpha^2}} e^{-2\pi\alpha\tau}$

- À $\dfrac{d\theta}{d\tau} = 0 \Rightarrow 2\pi\sqrt{1-\alpha^2}\,\tau = K\pi$ donc le lieu des maxima $\theta_M = \pm\theta_0 e^{-2\pi\alpha\tau}$

- La durée d'une mesure pour erreur de 1% ∴ max des oscillations est tombé à 1% de la valeur initiale ∴ $\dfrac{\theta_M}{\theta_0} = e^{-2\pi\alpha\tau} = 10^{-2} \Rightarrow \tau = \dfrac{\ln 10}{\pi\alpha}$

  Il est invers. α à α ∴ amortiss. ↗ le t ↘

  pour $\alpha = 0{,}34$ (amortissement ↗↗ qu'on verra après) ⇒ $\tau = 2{,}1$ ∴ durée > à celle exigée ds le cas d'amortiss. critique. On a ∴ intérêt à se rapprocher de ce régime

- par D.L de τ_0. $\tau_0 \simeq 1 + \dfrac{\alpha^2}{2}$ ∴ au 2e ordre près, la pseudo-période = période sans amortiss.

  chatgpt. $\tau_0 = \dfrac{t}{T_0} \Rightarrow t \simeq T_0\left(1 + \dfrac{\alpha^2}{2}\right)$ qui n'est pas loin de T_0

  la ≠ est seulement $\dfrac{\alpha^2}{2}$ qui est négligeable si α faible

Même si syst. très amorti (on verra après) ∴ $\alpha = 0{,}34$, $\dfrac{\alpha^2}{2}$ représente une ≠ de 5% ∴ rien ...

- Décrément logarithmique δ α n'est pas physiquement mesurable directement.

  Pour les mouv. lents, on peut mesurer séparément θ_n et θ_{n+1} de 2 max successifs séparé par τ_0

  $$\therefore\ \frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} = e^{2\pi\alpha\tau_0} \qquad \delta = \ln\left(\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}}\right) = 2\pi\alpha\tau_0 \qquad \text{par } \tau_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

  $$\Rightarrow\ \tau_0^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2}$$

Soit amortiss. tq après chaque oscillation, l'amplitude est divisée par 10 (∴ amortiss grand) → $\delta = \ln(10) = 2$

∴ τ_0 ne diffère que de 5% de la valeur 1 et ∴ pour amortiss + faible, il sera + proche de 1 et on pourra tj. confondre pseudo-période τ_0 avec la période sans amortiss. T_0

$$\therefore\ \delta = 2\pi\alpha\tau_0 \simeq 2\pi\alpha \quad \therefore \text{pour } \delta = 2{,}3 \longrightarrow \alpha = 0{,}34$$

Facteur de Qualité Quand les mouv. deviennent rapides, le décrément logarithmique n'est plus mesurable et sa mesure est remplacée par celle du facteur de Qualité

$$Q = 2\pi \frac{E_{max\ stockée}}{E_{perdue\ par\ cycle}}$$

- $E_{stockée} = E_c + E_p \neq cste$ à cause des pertes mais si pertes faibles $\therefore \approx cste$ et on peut dire que $E_{sto} = E_c + E_p = E_{c\,max} = \frac{1}{2} I \omega_M^2 = I \overline{\omega^2}$ (ω_M ← max)

- Eperdue provient du travail du couple de frottement : $f \frac{d\theta}{dt} = f\omega$

  ↳ par cycle $= \int_0^T f\omega \cdot \omega dt = fT \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \omega^2 dt}_{moyenne} = fT\,\overline{\omega^2}$

- $Q = 2\pi \frac{I\overline{\omega^2}}{fT\overline{\omega^2}} = \frac{2\pi I}{fT}$. par $\begin{cases} f = \alpha f_c = 2\alpha\sqrt{IC} \\ T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} \end{cases}$

$$Q = \frac{1}{2\alpha} \qquad \text{par } \delta = 2\pi\alpha \rightarrow \qquad Q = \frac{\pi}{\delta}$$

chatgpt : $Q \nearrow\nearrow (\gg 1)$ $\therefore$ amortissement faible $\therefore$ oscillations durent avant de s'éteindre
Q faible (≈ 1) $\therefore$ " fort $\therefore$ extinction rapide des oscillations

si $\underline{Q = 10}$ $\therefore$ environ 10 cycles complets sont effectués avant que $E \searrow$ rapidement
$\therefore$ c nb oscill. effectuées avant que Esyst soit dissipée (= utile pour mesurer durabilité vibrations ds instrument musical par ex)

Il est aussi relié à la sélectivité en fréq. Ds syst résonant, $Q \nearrow$ $\therefore$ syst répond fortement à une plage étroite de fréq proches de la résonance
(= utilisé pour évaluer qualité cavité laser par ex)

3) Mouvement apériodique $\alpha > 1$

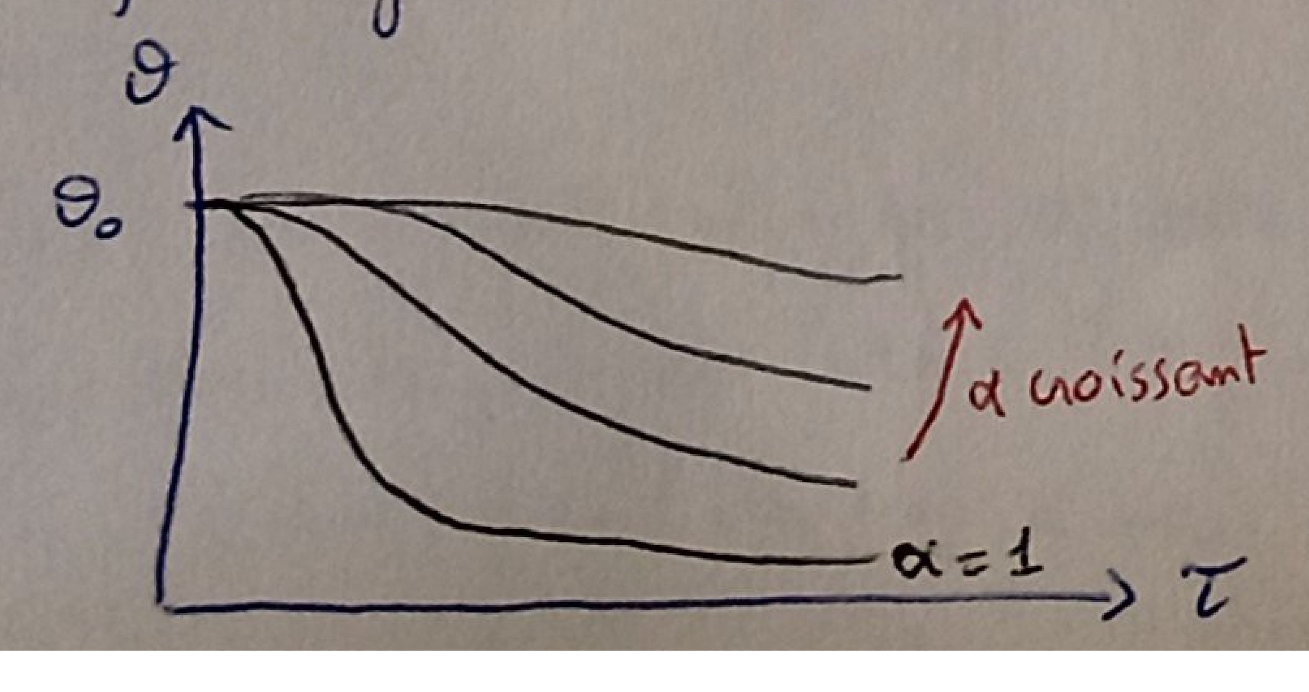
racines réelles $r = -2\pi\alpha \pm 2\pi\sqrt{\alpha^2 - 1}$

(prenant formule $\alpha < 1$ et remplaçant $\sqrt{1-\alpha^2}$ par $i\sqrt{\alpha^2-1}$)
(on établit aussi ce remplacement ds formule θ et $\frac{d\theta}{dt}$)

par $\begin{cases} \sin ix = i\,\mathrm{sh}\,x \\ \cos ix = \mathrm{ch}\,x \end{cases}$ et en posant $i\varphi = \Psi$ et par $\underline{\mathrm{ch}\,\Psi = \alpha}$

$$\theta = \frac{\theta_0}{\sqrt{\alpha^2-1}} e^{-2\pi\alpha\tau} \mathrm{sh}\left[2\pi\sqrt{\alpha^2-1}\,\tau + \Psi\right] \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{-2\pi\theta_0}{\sqrt{\alpha^2-1}} e^{-2\pi\alpha\tau} \mathrm{sh}\left(2\pi\sqrt{\alpha^2-1}\,\tau\right)$$

la fct hyperbolique est croissante mais $2\pi\sqrt{\alpha^2-1} < 2\pi\alpha$ $\therefore$ argument exp > sh au 1er ordre et en plus négatif $\therefore$ fct θ décroissante constamment



- Au bout d'un temps suffisamment long, sin hyperb. peut être confondu avec une expo positive et on aura : $\theta = \frac{\theta_0}{\sqrt{\alpha^2-1}} e^{\Psi} e^{-2\pi(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})\tau}$

$\because$ $e^{\Psi} = ch\,\Psi + sh\,\Psi = ch\,\Psi + \sqrt{ch^2\Psi - 1}$ $\Rightarrow$ $\theta = \theta_0 \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^2-1}} e^{-2\pi\tau/(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})}$

- Le temps nécessaire pour retour à éq. avec erreur 1% :

$$\frac{2\pi\tau}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}} = \ln(100) = 2\ln(10) \Rightarrow \tau = \frac{\ln(10)}{\pi}\left[\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right]$$

temps ↗ si amortiss (α) ↗ (comme le montre graphique), c'est l'inverse du mouv. oscillant amorti $\therefore$ pour réduire le temps ici aussi on doit se rapprocher du régime critique

Oscillations Forcées

Tout ce qui est avant c oscillation libre d'un syst écarté de sa position d'éq. puis libéré sans $\vec{F}ext$ autres que $\vec{F}rappel$ et frottement

$\therefore$ s'il y a $\vec{F}ext$: $$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + f\frac{d\theta}{dt} + C\theta = M(t)$$ ↑ couple dépend de t

sol :

a) sans 2nd membre : c'est ce qu'on a vu avant = mouv amorti qui devient négligeable au bout d'un certain t

Elle représente régime transitoire au moment d'établissement du mouv

b) sol part. complètement déterminée car les cste d'intégration sont déjà contenues ds régime transitoire

si M(t) cste $\Rightarrow$ sol-part. : $\theta_0 = \frac{M}{C}$ $\therefore$ déplacement de la position d'éq. et le retour exponentiel s'effectue vers θ_0 et non vers zéro

(comme cas de courant permanent continu ds galvanomètre = ds bobine il y a un couple EM créé = un couple M constant) → ancien ampèremètre

si M(t) sinusoïdale $\therefore$ éq° diff linéaire $\therefore$ sol. part. trouvée facilement de forme sinusoïdale de m période et $\therefore$ pas amortie = subsistera après extinction du régime transitoire

c le régime permanent qui consiste en une vibration forcée à la fréq. extérieure

Détermination du régime permanent

Cherchons sol. à : $I \frac{d^2\theta}{dt^2} + f\frac{d\theta}{dt} + C\theta = M_0 \cos \omega t$

sol. part. de la forme : $\theta = \theta_0 \cos(\omega t - \varphi)$ en supposant phase > 0 correspondant à retard de la vibration θ sur l'excitation M

En intégrant θ ds éq° diff (mettant) et par (choisi) $\left| \begin{array}{l} (\omega t - \varphi) = 0 \\ (\omega t - \varphi) = \pi/2 \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ (par identification) $\left| \begin{array}{l} (C - I\omega^2)\theta_0 = M_0 \cos\varphi \\ f\omega\theta_0 = M_0 \sin\varphi \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \tan\varphi = \dfrac{f\omega}{C - I\omega^2} \\ \theta_0 = \dfrac{M_0}{\sqrt{f^2\omega^2 + (C - I\omega^2)^2}} \end{array} \right.$$

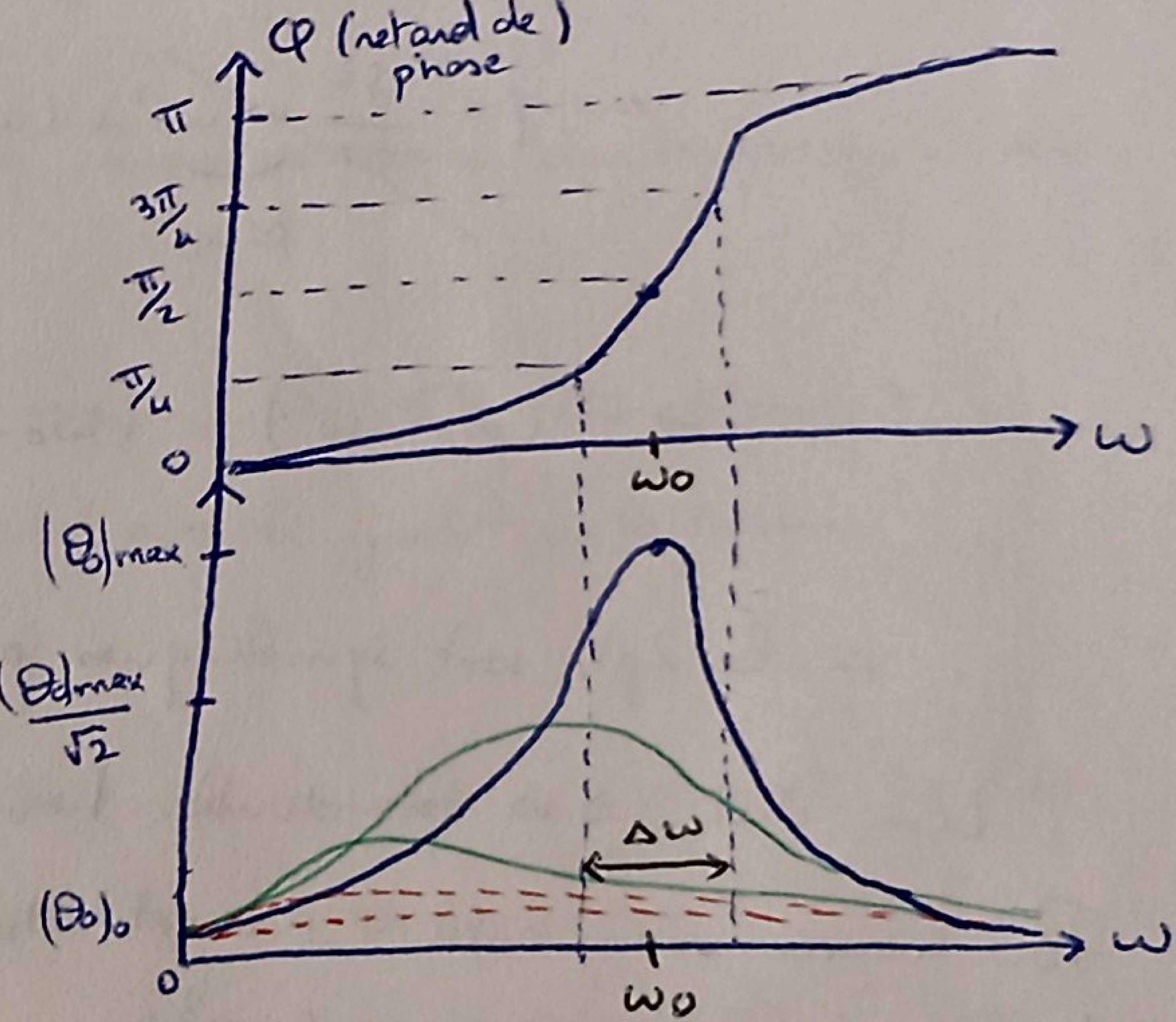
on introduit la pulsation à vide $\omega_0^2 = \frac{C}{I}$

et le décrément logarithmique $\delta \simeq 2\pi\alpha$

$$\delta = 2\pi \frac{f}{f_c} = \frac{2\pi f}{2\sqrt{IC}} = \frac{\pi f}{I\omega_0}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \tan\varphi = \dfrac{f}{I}\dfrac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \dfrac{\delta}{\pi}\dfrac{\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ \theta_0 = \dfrac{M}{I}\dfrac{1}{\sqrt{\frac{\delta^2}{\pi^2}\omega_0^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \end{array} \right.$$

Variation phase avec fréq :



à $\omega = 0$, la tg est nulle, puis $\to \infty$ à $\omega = \omega_0$ puis retombe à 0

∴ mouv est en phase avec l'excitation à fréq. faible d'excitation

puis retard croissant et à ω_0 est en quadrature de phase

à fréq. élevé il est en opposition de phase

Variation Amplitude avec fréq :

Posons : $Y = \frac{\delta^2}{\pi^2}\omega_0^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 \Rightarrow \frac{dY}{d\omega^2} = \frac{\delta^2}{\pi^2}\omega_0^2 - 2(\omega_0^2 - \omega^2)$

et s'annule pour $\omega^2_{max} = \omega_0^2\left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi^2}\right)$

c'est un minimum de Y donc max de θ_0 → Résonance

(par formule de ω^2_{max}) on trouve que max est obtenu pour valeur de ω très voisine de ω_0 tant que amortissement est faible. Lorsque amortissement ↗ ∴ résonance apparaît pour des fréq $< \omega_0$

/!\ ω_{max} $\nexists$ qd $\left(1-\frac{\delta^2}{2\pi^2}\right)<0$ mais ds ce cas, amortissement est ↗↗

∴ hypothèse $\delta = 2\pi\alpha$ pas vérifiée ..

En injectant formule ω_{max}^2 dans θ_0 (l'amplitude) $\Rightarrow (\theta_0)_{max} = \frac{M}{I\omega_0^2}\frac{\pi}{\delta}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\delta^2}{4\pi^2}}}$

on peut exprimer : $(\theta_0)_{max} \simeq \underbrace{(\theta_0)_0}_{\text{amplitude à la fréq 0}} \frac{\pi}{\delta}$

∴ à la résonance, il y a amplification par le facteur $\boxed{\frac{\pi}{\delta} = Q}$

Bande Passante

- Les ≠ courbes (d'amplitude ≠ en fct ω) mq + max est ↗, + courbe de résonance est étroite
  Pour chiffrer ce phénomène, largeur de courbe défini par $\Delta\omega$ entre pts d'ordonnées (=) à $\frac{(\theta_0)_{max}}{\sqrt{2}}$. Comme énergie d'une vibration α carré de l'amplitude, dans $\frac{\theta_{0max}}{\sqrt{2}}$ correspond à ½ puissance max

  (θ_0 a "y" ds $\sqrt{\ }$ dénom.)
  Pour $(\theta_0)_{max}$ le radical du dénominateur vaut

- Si supposons raie étroite ∴ confondre ω avec ω_0 $\Rightarrow$ $y_{max} \simeq \frac{\delta^2}{\pi^2}\omega_0^4$
  Pour les pts cherchés, il doit valoir le double (car à ces pts c'est ½ puissance ∴ dénom = double)

$$\therefore \; y = \cancel{\frac{\delta^2}{\pi^2}\underbrace{\omega^2\omega_0^2}_{\approx\omega_0^4}} + (\omega_0^2-\omega^2)^2 \simeq \cancel{2}\frac{\delta^2}{\pi^2}\omega_0^4 \Rightarrow (\omega_0^2-\omega^2)^2 \simeq \frac{\delta^2}{\pi^2}\omega_0^4$$

$$\rightarrow (\omega_0^2-\omega^2) = (\omega_0-\omega)\underbrace{(\omega_0+\omega)}_{\approx 2\omega_0} = \pm\frac{\delta}{\pi}\omega_0^{\cancel{2}} \Rightarrow \omega_0-\omega = \pm\frac{\delta}{2\pi}\omega_0$$

∴ les 2 pts sont symétriques par rapport à ω_0

Leur dist. $\Delta\omega$ est double $|\omega_0-\omega|$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\delta}{\pi} = \frac{1}{Q}}$

Pour trouver valeur angle φ aux extrémités de Δω :

La formule de $tg\,\varphi = \frac{\delta}{\pi}\frac{\omega_0\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \longrightarrow tg\,\varphi \simeq \frac{\delta}{\pi}\frac{\omega_0^2}{(\omega_0-\omega)\underbrace{(\omega_0+\omega)}_{2\omega_0}} = \frac{\delta}{2\pi}\frac{\omega_0}{\omega_0-\omega}$

$tg\,\varphi = \pm 1$ → $\varphi = \frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$

∴ l'angle φ tourne d'un total de $\frac{\pi}{2}$ ds l'intervalle étroit Δω alors qu'il ne tourne au total que de π qd ω passe de 0 à ∞ ∴ rotation rapide de la phase au voisinage de la résonance

Cas de forts amortissements

(formule $\theta_0 = \frac{M}{I} \frac{1}{\sqrt{---}}$ pas valable car elle suppose $\delta = 2\pi\alpha$)

$$\alpha = \frac{f}{f_c} = \frac{f}{2I\omega_0} \quad \text{d'où} \quad \frac{f}{I} = 2\alpha\omega_0$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{M}{I} \frac{1}{\sqrt{4\alpha^2\omega_0^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

dérivée $\Rightarrow$ $\omega^2_{max} = \omega_0^2(1 - 2\alpha^2)$ $\therefore$ courbes ne présentent pas de max pour $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(courbe rouge ds figure d'avant)

La courbe est constamment descendante

On peut revenir à la valeur de δ correspondante par: $\delta = 2\pi\alpha T_0 = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$

soit ici $\delta > 2\pi$

Intérêt et Inconvénient Résonance

-) Il est très fréquent qu'un circuit soit excité simultanément à plusieurs fréq. et qu'on désire extraire l'une d'elles du mélange (c'est le cas de la réception radio-électrique).

On utilise alors circuit résonnant qui amplifie fréq. comprises dans bande passante $\Delta\omega$ et défavorise les autres.

La sélectivité (+ fréq à séparer sont proches + les résonance doivent être aiguës) du récepteur est écrit par $\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ et son égalité avec Q justifie le terme

facteur de qualité

-) Parfois nécessaire transmettre signal en respectant son amplitude qq soit sa fréq. (réponse linéaire en fréq.) il faut ∴ éviter des pointes de résonance en amortissant le circuit. On place fréq. résonance en dehors de la gamme fréq utilisée

-) Pour dispositif électromécanique type haut-parleur par ex, on choisit amortissement tq courbe de résonance repasse par $(\theta_0)_0$ pour ω_0 (courbe rouge)

4] Analogies Mécaniques - Electriques

On choisit ici phénomène méca à 1 dim pour que loi fondamentale de la méca perde son caractère vectoriel

Loi fondamentale

méca: $F - m\gamma = 0$; $\sum F = 0$

excitation extérieure

électrique: $E - ZI = 0$ Loi d'Ohm ; $\sum E = 0$

Travail

$d\tau = F.v.dt$ $\qquad$ $d\tau = E.I.dt$

Comme Force contre électromotrice (fcem) exprimé en I, on souhaite exprimer F méca en fct v

Les $\vec{F}$ concernant mouv. autour pt d'éq :

- $\vec{F}$ rappel $\quad -Kx = -K\int v\,dt$
- $\vec{F}$ frottem. $\quad -fv$
- $\vec{F}$ inertie $\quad -m\gamma = -m\dfrac{dv}{dt}$

ressort et C ne dissipent pas d'E mais la stockent sous forme potentielle et sont prêts à la restituer qd on libère le ressort ou branche C

Les $\vec{F}$ c.e.m. classiques sont,

f.c.e.m
- capacitive $\quad -\dfrac{q}{C} = \dfrac{1}{c}\int I\,dt$
- résistive $\quad -RI$
- inductive $\quad -L\dfrac{dI}{dt}$

$W = \dfrac{Kx^2}{2}$

$W = \dfrac{q^2}{2C}$

De m̂, l'E correspondant à $\vec{F}$ inertie ou E_c n'∄ que du fait du mouv ce qui est identique à l'E d'auto-induction liée à la présence du courant

Ces 2 E. sont restitués à l'arrêt du phénomène

$W = \frac{1}{2}mv^2$

$W = \frac{1}{2}LI^2$

Les résistances sont analogues au frottement ⇒ perte E. vers ext.

$dW = fv^2dt$

$dW = RI^2dt$

- - - - etc