

Chapitre 4

OPTIQUE PHYSIQUE

Les ordres de grandeur utiles

La lumière

| | |
|------------------------------------|---|
| vitesse de la lumière dans le vide | $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$ |
| constante de Planck | $h = 6,62.10^{-34} \text{ J.s}$ |
| longueur d'onde (visible) | $400 \text{ nm} < \lambda < 750 \text{ nm}$ |
| fréquence (visible) | $4.10^{14} \text{ Hz} < \nu = c/\lambda < 8.10^{14} \text{ Hz}$ |
| énergie du photon (visible) | $1,5 \text{ eV} < E = h\nu < 3 \text{ eV}$ |

Les couleurs du spectre visible (λ en nm)

| | | |
|--------|-----------|---------------|
| violet | 390 – 455 | ≈ 450 |
| bleu | 455 – 492 | ≈ 500 |
| vert | 492 – 577 | ≈ 550 |
| jaune | 577 – 597 | ≈ 600 |
| orange | 597 – 622 | ≈ 650 |
| rouge | 622 – 780 | ≈ 700 |

L'œil

| | |
|--------------------|---|
| pouvoir séparateur | $\varepsilon \approx 1' \approx 3.10^{-4} \text{ rad}$ (soit 1 mm à 1 m de distance) |
| temps de réponse | $\approx 0,1 \text{ s}$ |

Indices de réfraction

| | |
|-------------------------------|---|
| vide ; air | $n = 1 ; n = 1,00029 (n - 1 \approx 3.10^{-4})$ |
| eau ; verre ordinaire ; flint | $n = 1,33 ; n \approx 1,5 ; n \approx 1,8$ |

Les doublets jaunes

| | |
|--------------------------|--|
| doublet jaune du sodium | $\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$ $\Delta\lambda = 0,6 \text{ nm}$ |
| doublet jaune du mercure | ≈ 577 et $579 \text{ nm} ; \Delta\lambda = 2,1 \text{ nm}$ |

Largeur spectrale, temps et longueur de cohérence

| | $\Delta\nu$ | $\Delta\lambda$ | τ | $L_c = c\tau$ |
|-------------------------|----------------|-----------------|------------------|---------------|
| lumière blanche | 3.10^{14} Hz | 400 nm | 5.10^{-15} s | 0,1 μ m |
| doublet jaune Na | 5.10^{11} Hz | 0,6 nm | $0,3.10^{-12}$ s | 0,1 mm |
| raie de lampe spectrale | 10^9 Hz | 10^{-12} m | 0,1 ns | 5 cm |
| laser | 10^6 Hz | 2.10^{-15} m | 0,2 μ s | 50 m |

Laser He-Ne de TP

| | |
|---|---|
| longueur d'onde ; longueur de cohérence | $\lambda = 632,8$ nm ; > 1 m |
| diamètre ; divergence angulaire | $d \approx 1$ mm ; $\alpha \approx \lambda/d \approx 10^{-3}$ rad (diffraction) |
| puissance ; puissance surfacique | $P \approx 1$ mW ; $R \approx P/d^2 \approx 10^3$ W.m ⁻² |
| champ électrique ; magnétique | $E \approx \sqrt{2R/\epsilon_0 c} \approx 10^3$ V.m ⁻¹ ; $B \approx \frac{E}{c} \approx 10^{-6}$ T |

en TP

| | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| précision du goniomètre | 1 minute d'arc = $2,9.10^{-4}$ rad |
| précision du palmer du Michelson | 1 centième de millimètre |

Le cours d'abord

Conditions d'interférence

- En quoi consiste l'approximation scalaire de la grandeur lumineuse ? À quoi sont sensibles les récepteurs ? Justifier l'obtention de l'intensité I (ou éclairement E) à partir de l'amplitude complexe A (ou vibration s).
- À quelles conditions sur la fréquence et la polarisation la superposition de deux vibrations lumineuses peut-elles donner des interférences ?
- S_1 et S_2 sont deux sources ponctuelles et monochromatiques d'amplitudes a_1 et a_2 , et vérifiant les hypothèses de la question 2. Pourquoi la différence de phase $\varphi(M,t)$ entre les deux amplitudes arrivant en un point d'observation M dépend-elle de M ? Pourquoi dépend-elle du temps t ? Déduire alors l'intensité $I(M)$ en fonction des intensités I_1 et I_2 de chaque onde et de la moyenne temporelle $\langle \cos \varphi \rangle$; commentaire.
- Que vaut en général $\langle \cos \varphi \rangle$? Quand dit-on que deux sources sont cohérentes ? Qu'en déduit-on expérimentalement sur les sources S_1 et S_2 ? Quand doit-on additionner les amplitudes complexes ? Quand peut-on sommer les intensités ?

τ
n
n
—

on)

-6 T

sont
E) à

deux

t a_2 ,
 M, t)
 $M ?$
des
 $\sigma >$;

tes ?
r les

La formule des interférences

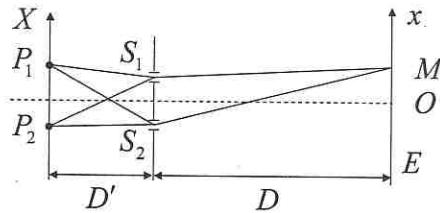
5. Comment établir le plus simplement la formule des interférences donnant l'intensité résultante $I(M)$ en un point M entre deux sources ponctuelles S_1 et S_2 , monochromatiques et cohérentes entre elles, en prenant les deux ondes de même intensité I_0 ?
6. Comment s'exprime la différence de phase en fonction de la différence de marche ? Définir l'ordre d'interférence en un point. Expliquer qualitativement les extrema de l'intensité résultante I au point M .
7. Interpréter par une phrase le phénomène d'interférence, d'abord en terme d'intensité, puis en terme de phase.
8. Quel commentaire peut-on faire sur la phase de l'onde résultante en M ?

Les trous d'Young

9. Décrire le dispositif des trous d'Young ; de quand date-t-il ? Pourquoi les franges sont-elles dites « non localisées » ?
10. Établir l'expression de la différence de marche δ en fonction de $a = S_1S_2$, D la distance des trous à l'écran E et x l'abscisse du point M d'observation par rapport à l'axe médiateur. Décrire le système de franges.
11. Quelle est l'expression de l'interfrange i ? Réécrire la formule des interférences à l'aide de i , tracer la courbe $I(x)$ et la commenter.
Les franges sont facilement observables à l'œil nu dès que $i \geq 1 \text{ mm}$; en déduire une inégalité sur a sachant que $D = 1 \text{ m}$ et $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$; commentaire.
Qu'appelle-t-on frange centrale, et que peut-on en dire ?
12. Pour quelle raison dans un montage réel choisit-on de remplacer les trous par des fentes ? Comment est modifiée la figure d'interférence ? Faire une figure avec des lentilles convergentes L_1 en entrée et L_2 en sortie et expliquer leur rôle ; comment cette dernière modifie-t-elle la différence de marche δ ?

Notions de cohérence spatiale et temporelle

13. Qu'appelle-t-on visibilité des franges ? Comment est défini le contraste ? Comment évolue la courbe d'interférence $I(x)$ lorsque le contraste diminue ?
Quelles sont physiquement les deux causes d'affaiblissement du contraste ?
14. Avec le dispositif des trous d'Young, la source est à présent formée de deux sources ponctuelles P_1 et P_2 , sur un axe parallèle à celui de S_1S_2 à une distance D' . Expliquer qualitativement la situation et montrer d'abord sans grand calcul que le contraste est périodique en fonction de la distance PP_2 .



Comment confirmer ce résultat par un calcul ? Tracer le graphe du contraste $C(P_1P_2)$ avec $\lambda = 0,5 \text{ } \mu\text{m}$, $a = S_1S_2 = 0,5 \text{ mm}$ et $D' = 1 \text{ m}$.

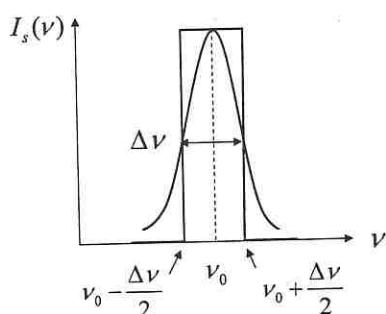
15. Dans le cas où la source est une fente de largeur l et de hauteur h placée à une distance D' des fentes secondaires, comment varie le contraste avec la largeur l ? Proposer une application numérique définissant une fente source « fine ».

16. La source ponctuelle est à présent constituée de deux raies, par exemple le doublet jaune du sodium $\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$. Expliquer qualitativement la situation et évaluer d'abord sans grand calcul l'abscisse x_0 où se produit le premier brouillage de franges. Comment confirmer ce résultat par un calcul ? Que vaut le contraste ? Tracer le graphe $I(x)$. Pourquoi le brouillage des franges avec le doublet jaune du sodium n'est-il pas observable avec un système de type fentes d'Young ? Quel dispositif permet de le voir facilement ?

17. Une raie n'est jamais parfaitement monochromatique car un atome qui émet un train d'onde pendant un temps τ_0 au voisinage de la fréquence centrale ν_0 donne lieu à une raie de largeur à mi-hauteur $\Delta\nu \approx 1/\tau_0$.

En modélisant l'intensité spectrale $I_s(\nu)$ de la raie par un profil rectangulaire comme sur le graphe ci-contre, déterminer le contraste observé et tracer le graphe de l'intensité (il est conseillé de noter $\tau(M) = \delta(M)/c$). Commentaires.

Pourquoi une diminution notable du contraste avec la raie verte du mercure n'est-elle pas observable avec un système de type fentes d'Young ? Quel dispositif permet de le voir facilement ?



L'interféromètre de Michelson

18. Décrire sommairement l'interféromètre de Michelson. Faire le schéma dans une utilisation en « lame d'air » d'épaisseur e et en donner les caractéristiques (on note i l'angle que fait le rayon incident avec l'axe du miroir mobile M_1). Refaire un schéma de principe permettant de localiser les sources secondaires S_1 et S_2 .

19. Quelle est dans ce cas la différence de marche $\delta(i)$? Quelle est la forme des franges ? Quel lien existe-t-il entre la taille de la source et la localisation des franges ?

20. Déterminer le rayon r_k du $k^{\text{ème}}$ anneau brillant compté à partir du centre (où l'on suppose qu'il y a une frange brillante) en fonction de k , λ , e , et f' , la distance focale de la lentille de projection, et commenter le résultat.

21. Faire le schéma de l'interféromètre de Michelson dans une utilisation en « coin d'air » d'angle α éclairé par une source ponctuelle. Refaire un schéma de principe permettant de localiser les sources secondaires S_1 et S_2 .

22. Quelle est dans ce cas la différence de marche $\delta(x)$ où x est l'abscisse par rapport à l'arête des deux miroirs. Quelle est la forme des franges ? Quel lien existe-t-il entre la taille de la source et la localisation des franges ?

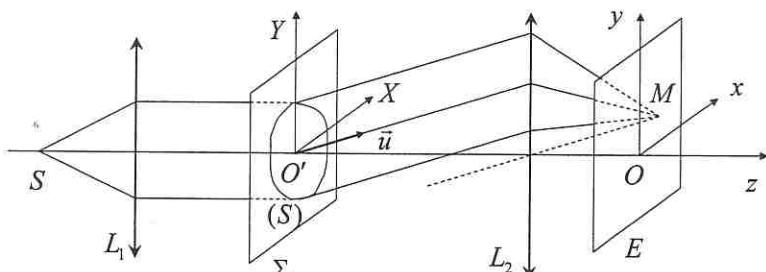
La diffraction de Fraunhofer

23. Énoncer le principe d'Huygens-Fresnel. L'illustrer sur la propagation d'une onde sphérique.

Expliquer qualitativement, à l'aide d'un dessin, la différence observée entre l'optique géométrique et l'application du principe d'Huygens-Fresnel dans l'éclairement obtenu derrière un bord d'écran. ; quelle généralité peut-on en déduire sur la diffraction ?

24. En quoi consiste l'approximation de Fraunhofer ?

Sur le schéma ci-dessous, on note $t(\vec{r}) = t(X, Y)$ la transparence de la pupille ou ouverture diffractante (S) dans le diaphragme plan Σ . Établir l'expression intégrale permettant de calculer l'amplitude diffractée par (S), soit $\underline{A}(\vec{k})$, dans la direction du vecteur d'onde $\vec{k} = k \vec{u}$.



25. Avec $\vec{k} = k \vec{u} = k \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix}$, donner cette formule par $\underline{A}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Que valent les cosinus directeurs α , β et γ en fonction des angles θ (plan horizontal $XO'z$) et ϕ (plan vertical).

26. Comment se généralise la formule $\underline{A}(\vec{k})$ de la question 24. lorsque l'onde incidente arrive sur Σ avec une incidence non nulle donnée par le vecteur \vec{k}_0 ?

Quelques résultats sur la diffraction de Fraunhofer

27. Qu'appelle-t-on fente fine (de hauteur b et de largeur a) ? Établir l'intensité $I(\theta)$ diffractée par une fente fine dans la direction θ de l'axe $O'z$ du plan $XO'z$ en s'appuyant sur un dessin complet. Tracer le graphe $I(\theta)/I_M$ où $I_M = I(\theta=0)$ en fonction de $\sin \theta$ et donner les caractéristiques essentielles en indiquant en particulier la direction θ_0 de la 1ère annulation.

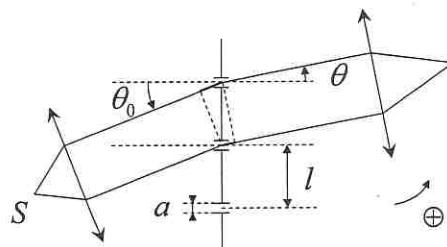
AN : Exprimer l'intensité en fonction de x (abscisse du point M par rapport à O dans le plan d'observation). Quelle est la largeur $2x_0$ de la tache centrale ?

$\lambda = 0,5 \text{ } \mu\text{m}$; $a = 0,1 \text{ mm}$; $f' = 1 \text{ m}$ (distance focale de la lentille L_2).

28. Quelle est l'intensité $I(\alpha, \beta)$ diffractée dans le plan d'une ouverture rectangulaire (lorsqu'on n'a plus $b \gg a$) ? Représenter schématiquement l'intensité diffractée dans le plan Oxy pour $a < b$.
Retrouve-t-on le résultat de la question précédente en faisant $b \rightarrow \infty$?
29. Quels résultats importants faut-il connaître sur la diffraction d'une ouverture circulaire de diamètre d ?
30. Deux écrans sont complémentaires si la partie opaque de l'un correspond à la partie transparente de l'autre. Établir le théorème de Babinet prouvant qu'en dehors de l'image géométrique, les figures de diffraction données par deux écrans complémentaires sont identiques. Comment le comprendre qualitativement ?
31. Faire un dessin sur lequel il apparaît que dans le plan Σ de diffraction, on fait subir à la pupille (S) de transparence $t(\vec{r})$ une translation de vecteur \vec{r}_0 . Sans calcul, comparer les amplitudes diffractées $\underline{A}(\vec{k})$ et $\underline{A}'(\vec{k})$. Qu'en déduit-on sur les intensités diffractées $I(M)$ et $I'(M)$?
32. Montrer qualitativement que la diffraction à l'infini accompagne inévitablement tout montage d'optique géométrique (même aussi simple que objet – lentille convergente – image). L'image d'un point étant une tache d'Airy (lorsque les aberrations géométriques et chromatiques ont été réduites), énoncer le critère de Rayleigh fixant la limite du pouvoir séparateur des instruments d'optique.

Le réseau de diffraction

33. Qu'est-ce qu'un réseau ? S'appuyer sur le dessin ci-contre pour obtenir (sans calcul) la formule du réseau donnant θ_K , la direction dans laquelle est obtenu le maximum de lumière d'ordre K .
Un réseau de $n = 600$ traits/mm est éclairé sous incidence nulle avec une longueur d'onde $\lambda = 0,6 \text{ } \mu\text{m}$; combien peut-on voir d'ordres ?



34. Le réseau est éclairé en incidence nulle ($\theta_0 = 0$) par un faisceau couvrant N fentes.
On pose $u = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$ et $\varphi = \frac{2\pi l \sin \theta}{\lambda}$; quelle est l'expression de l'intensité $I(\theta)$ diffractée dans la direction θ . Faire apparaître sur le graphe l'importance de chacune des trois longueurs a , l et $L = Nl$; commentaire.
Quel est l'intérêt des interférences à N ondes ?

35. Pourquoi le réseau est-il un appareil disperseur ? Pourquoi se pose-t-il un problème de résolution ? Faire le calcul de la résolution intrinsèque en appliquant le critère de Rayleigh. Proposer une application numérique et la commenter.

Conseils à suivre ; erreurs à éviter

- * Même si historiquement la théorie de la nature ondulatoire de la lumière s'est développée au début du XIXe siècle (les trous d'Young datent de 1807 et le principe d'Huygens-Fresnel de 1815) donc bien avant l'électromagnétisme des régimes variables (les équations de Maxwell datent de 1865 et la découverte des ondes électromagnétiques vient en 1888), il ne faut pas oublier le caractère électromagnétique (donc vectoriel) de la lumière en optique ondulatoire.
- * Autre point à ne pas oublier : les phénomènes décrits par l'optique ondulatoire sont vus à travers des yeux humains dont les caractéristiques physiologiques (un peu comme les oreilles en acoustique) agissent comme un filtre, sont sensibles à l'énergie (et pas au champ) et ont un temps de réponse faible (sur lequel ils moyennent les informations) ; ils donnent une perception partielle et altérée de la réalité physique.
- * Il est important de se rendre compte qu'il n'est pas facile d'obtenir des interférences entre deux ondes ou de faire diffracter la lumière autour de l'image géométrique car les conditions d'obtention sont strictes. Par ailleurs il est capital de se familiariser rapidement avec les ordres de grandeur si spécifiques de l'optique ondulatoire.
- * Lorsque deux ondes sont cohérentes (ne pas oublier de les signaler), il faut d'abord faire la somme des amplitudes avant de passer au calcul de l'intensité ; préciser s'il s'agit d'interférences à ondes sphériques ou à ondes planes, d'interférences à division du front d'onde (les fentes d'Young, les miroirs de Fresnel,...), en général non localisées mais peu lumineuses, ou d'interférences à division d'amplitude (le Michelson, le Fabry-Perot,...), en général localisées et plus lumineuses.
Lorsque deux ondes sont incohérentes (ne pas oublier de les signaler), il suffit de faire la somme des intensités.
- * Pour les schémas de montage (toujours recommandés), il faut commencer par soigner l'optique géométrique d'abord, trouver les sources secondaires, hachurer ou colorier les deux faisceaux (il ne suffit pas de dessiner un rayon !) de manière différente, puis délimiter dans leur intersection la zone d'interférence.
- * Se souvenir que dans un milieu homogène d'indice de réfraction n , $(AB) = n AB$, le chemin optique est le produit de l'indice par le chemin géométrique. La connaissance de l'optique géométrique est essentielle ici, et il faut faire l'effort de ne pas seulement raisonner avec des rayons, mais aussi en terme de surfaces d'onde pour la détermination des différences de marche. Le théorème de Malus indique que quel que soit le nombre de réflexions ou de réfractions subies par un rayon, il reste orthogonal aux surfaces d'onde.

- * Dans le cas d'interférence à ondes sphériques où l'écran est placé perpendiculairement à la médiatrice des sources, aucun calcul n'est nécessaire puisque alors les résultats sur les trous d'Young s'appliquent directement.
- * Pour calculer une différence de marche entre deux rayons différents (notés 1 et 2) d'un point source S à un point d'observation M (dans la zone d'interférence), commencer par tracer les deux trajets SS_1M et SS_2M pour bien définir la différence de marche $\delta = (SM)_2 - (SM)_1$. Réduire les calculs en supprimant les tronçons compris entre deux surfaces d'onde (car entre deux surfaces d'onde le chemin optique est indépendant du chemin géométrique suivi) même après réflexion (un miroir plan est stigmatique rigoureux) ou réfraction (une lentille convergente est approximativement stigmatique) en commençant par celles qui passent par S et M . Faire apparaître si possible la partie géométrique de la différence de marche δ pour bien la visualiser. Ne jamais « inventer » une origine sur une lentille (la face avant, le plan médian, la face arrière ?). Ne pas oublier que $(AB) = nAB$ et que le calcul en général n'est pas unique, ce qui signifie qu'il y a toujours une méthode plus rapide et simple.
- * La différence de marche est une grandeur algébrique et la définition retenue $\delta = (SM)_2 - (SM)_1$ est indifférente puisque dans la formule des interférences il intervient $\cos 2\pi\delta/\lambda$. En revanche, si comme c'est souvent le cas, elle est constituée de termes d'origines différentes, le signe relatif de ces termes est capital ! Pour des trous d'Young, on a $\delta = \frac{ax}{D} - (n-1)e$ ou $\delta = \frac{ax}{D} + (n-1)e$ suivant qu'une lame d'épaisseur e et d'indice n est placée sur le trajet S_1M ou sur le trajet S_2M .
- * Se rappeler qu'il y a un déphasage de π lors d'une réflexion vitreuse (plus généralement si $n_2 > n_1$) ou sur un miroir (plan conducteur), ou lors du passage au foyer d'une lentille.
- * La frange centrale n'est pas la frange au centre de l'écran (sauf exception de symétrie) ! C'est la frange définie par une différence de marche nulle : $\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = 0$.
- * Qu'il s'agisse d'interférence ou de diffraction, il convient toujours de bien préciser où est prise l'origine des phases des rayons arrivant au point d'observation M . Lorsque la figure présente une symétrie (une fente unique, 3 fentes parallèles et équidistantes, 4 trous au sommet d'un carré,...), il est judicieux de choisir cette origine sur le rayon provenant du centre géométrique, en vertu du résultat généralisable de la question 8. qui veut que du point de vue de la phase, tout se passe comme si l'onde résultante provenait du milieu de la figure. Exceptions notables pour le choix de l'origine : le cas de deux fentes d'Young, du réseau,...
- * L'utilisation des amplitudes complexes est hautement recommandée car non seulement cela évite la manipulation des formules de trigonométrie, mais surtout cela permet de ne pas considérer le terme temporel (dont on sait qu'il s'élimine par $e^{i\omega t} \cdot e^{-i\omega t} = 1$) pour se concentrer sur l'essentiel : l'amplitude et le déphasage spatial.

lairement
ultats sur

à 2) d'un
mmencer
e marche
ntre deux
ndant du
gmatique
matique)
la partie
e jamais
urrière ?).
e, ce qui

retenue
rences il
stituée de
des trous
uisseur e

générale-
ver d'une

métrie) !
= 0.

éciser où
orsque la
tantes, 4
le rayon
on 8. qui
provenait
de deux

seulement
net de ne
) pour se

* Bien calculer l'intensité I à partir de l'amplitude complexe \underline{A} par l'expression $I = k \underline{A} \cdot \underline{A}^*$ de préférence à $I = k |\underline{A}|^2$ qui, bien que mathématiquement équivalente, donne très souvent lieu à des calculs plus longs.

* Bien se souvenir que pour obtenir ou observer des franges (correspondant à une intensité $I(\phi)$ variable), il faut une phase ϕ fonction d'un paramètre spatial variable.

* Dans les problèmes traitant de cohérence spatiale ou temporelle, les différents éclairements incohérents s'ajoutent (qu'ils proviennent de points sources différents ou qu'il s'agisse de fréquences différentes). Dans l'utilisation de formule de trigonométrie du genre :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2} \quad \text{ou} \quad \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$$

il est recommandé au second membre de commencer par le facteur comportant la différence (et qui s'identifie à la visibilité) et de finir par le facteur comportant la somme (et qui s'identifie au terme de phase habituel) dans la formule des interférence :

$$I(M) = 2I_0(1 + V \cos \phi(M))$$

* Il est toujours conseillé sur un schéma de diffraction à l'infini (de Fraunhofer) de faire figurer deux lentilles, l'une L_1 permettant à partir de la source S d'avoir un faisceau de lumière parallèle et l'autre L_2 ramenant l'observation à l'infini dans son plan focal image. C'est d'ailleurs le rôle du collimateur et de la lunette d'un goniomètre.

* Le théorème de Babinet (question 30.) ainsi que le résultat lié à la translation de la pupille (question 31.) sont d'un usage courant ; il faut donc penser à les utiliser directement, sans qu'il soit nécessaire de les redémontrer.

* La « variable naturelle » de l'expression intégrale permettant de calculer l'amplitude diffractée est une variable angulaire (α et β dans la question 25.) car il s'agit de l'amplitude diffractée dans une direction donnée.

* Pour un calcul de diffraction dans la direction θ portant sur une dimension transversale a , il est conseillé avant de calculer l'intégrale de procéder au changement de variable $u = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$; les calculs en sont allégés.

* Ne pas oublier que la fonction sinus cardinal $\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$ est une fonction paire, prenant, sur certains intervalles, des valeurs négatives !

* Les valeurs intéressantes de la variable angulaire de diffraction θ sont toujours du type λ/l où l est la taille de l'objet diffractant (la diffraction est d'autant plus importante que l'objet diffractant est petit) ; ne pas perdre de vue que $\lambda/l \ll 1$ (ce qui permet les approximations $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$), que le phénomène est chromatique (il dépend de λ) et que plus l'objet est grand, moins la diffraction est importante.

- * Il est grossièrement faux de croire que la diffraction (par une fente de largeur a par exemple) n'est observable qu'à partir du moment où la taille de l'objet diffractant est de l'ordre de la longueur d'onde !! (voir les questions 27. et 51. pour les applications numériques prouvant le contraire) ; d'ailleurs à ce moment-là $\sin \theta_0 = \lambda/a$ serait voisin et même supérieur à 1 (une diffraction à 180° !) et la théorie n'est plus applicable (la diffraction doit être proche de l'axe soit $a \geq 100\lambda$) ; pire, d'un point de vue purement expérimental, la quantité de lumière qui traverse une fente aussi « régulièrement » étroite n'est plus visible à l'œil tellement elle est faible...
- * Il est vrai cependant que pour un réseau à 600 traits/mm, le pas est de l'ordre de quelques λ ; de même en diffraction des rayons X par la matière, la longueur d'onde est de l'ordre de la distance interatomique. Mais dans ces deux cas c'est le phénomène d'interférences constructives (et non de diffraction) qui dicte les directions d'observation du signal, alors forcément important en amplitude vu le nombre élevé d'éléments diffractants.
- * On parle de réseau « de diffraction » car c'est la diffraction des fentes (ou parties transparentes) étroites qui permet l'observation dans une direction éloignée de la direction de l'optique géométrique, mais il ne faut pas oublier que les maxima de lumière ou ordres du réseau sont liés au phénomène d'interférences constructives entre fentes successives ; il est donc plus approprié de parler de « l'ordre d'interférence » plutôt que de « l'ordre de diffraction ».

Applications directes du cours

36. Que représente I_0 dans la formule des interférences dans les trois écritures suivantes :

a) $I = 2I_0(1 + \cos \varphi)$; b) $I = I_0(1 + \cos \varphi)$; c) $I = \frac{I_0}{2}(1 + \cos \varphi)$?

37. Dans l'expérience des fentes d'Young, avec une source S ponctuelle et monochromatique, les sources secondaires sont distantes de $a = S_1S_2 = 1 \text{ mm}$ et la distance des fentes à l'écran est $D = 1 \text{ m}$. La distance sur l'écran E entre les franges brillantes d'ordre -3 et 3 est $\Delta x = 3 \text{ mm}$; que peut-on en déduire ?

38. Pour le dispositif de la question 37., on place sur S_1 une lame de verre d'épaisseur $e = 20 \mu\text{m}$ et d'indice $n = 1,5$; que se passe-t-il ? Sur quoi peut-on agir pour que le système revienne dans son état initial (la distance de S à S_1S_2 est $D' = 0,2 \text{ m}$) ?

39. Trois fentes d'Young, équidistantes et de même largeur (petite devant $S_1S_2 = S_2S_3 = a$), sont éclairées sous incidence nulle par une source ponctuelle monochromatique placée au foyer d'une lentille. Soit $\varphi(x)$ la différence de phase en un point M de l'écran de coordonnée x entre les ondes issues de S_1 et S_2 .

· a par
it est de
ications
t voisin
able (la
irement
ement »

ordre de
d'onde
nomène
rections
e élevé

parties
e de la
tima de
es entre
france »

vantes :

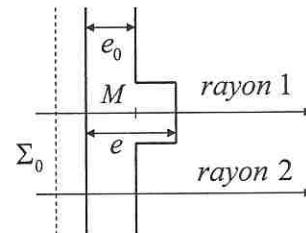
monochro-
mance des
rillantes

passeur
ir que le
) ?

devant
onctuelle
phase en

- a) Donner l'éclairement $I(\phi)$ de l'écran et tracer soigneusement la fonction $I(\phi)/I_0$ pour ϕ de 0 à 2π (I_0 est l'intensité d'une onde) ; commentaire.
 b) Même question si la fente centrale possède une largeur double et si en plus on place sur sa face une lame transparente déphasant de $\lambda/4$ pour la longueur d'onde utilisée (on garde les notations précédentes) ; graphe et commentaire.

40. Une lame de verre parfaitement transparente, à faces parallèles, d'indice de réfraction n et de faible épaisseur e_0 , comporte « un petit accident d'épaisseur », localisé en M , où l'épaisseur totale devient e . Cette lame est éclairée par un faisceau de lumière parallèle de longueur d'onde λ dans le vide.



- a) Déterminer la différence de phase φ entre les rayons 1 et 2 créée par l'irrégularité. Σ_0 représente une surface d'onde avant traversée de la lame ; dessiner une surface d'onde Σ après la traversée de la lame.
 b) On forme sur un écran l'image de cette lame (assimilée à un objet plan) par une lentille convergente ; le défaut d'épaisseur est-il visible sur l'écran ?
 c) En est-il de même si on place la lame contre le miroir M_1 d'un interféromètre de Michelson réglé au contact optique ?

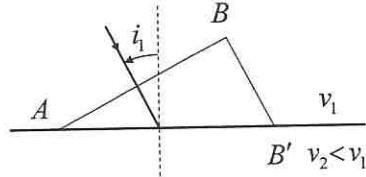
41. Une lame à face parallèle de verre d'indice n et d'épaisseur e est placée dans le vide. Par réflexion multiple sur les dioptres, un rayon incident incliné sur la normale donne lieu à une infinité de rayons émergents (de même que réfléchis). Si i est l'angle que font avec la normale les rayons à l'intérieur de la lame, exprimer, en fonction de n , e et i , la différence de marche δ entre deux rayons émergents successifs.

42. Pour déterminer la distance angulaire α d'un système d'étoiles doubles, on place devant le tube d'un télescope un système de fentes d'Young de distance a réglable ($a_{\max} = 50$ cm) ainsi qu'un filtre ne laissant passer que la longueur d'onde $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$. Sachant que le contraste des franges diminue lorsque a augmente et s'annule pour la première fois pour $a = a_{\max}$, en déduire l'angle minimal α_{\min} (exprimé en seconde d'arc) mesurable avec ce procédé.

43. Quelle est la fréquence centrale ν_0 d'une raie correspondant à la longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 0,5 \mu\text{m}$; quelle est sa couleur ? La longueur de cohérence d'une telle raie de lampe spectrale liée à la seule largeur naturelle serait de $L_c = 300$ m. Expliquer cette notion et en déduire la durée τ des trains d'onde émis ainsi que la largeur spectrale naturelle $\Delta\nu$ de la raie. Quel est son facteur de qualité ?
 En réalité, en raison de l'agitation thermique des molécules émettrices, la fréquence perçue est $\nu = \nu_0 \left(1 \pm \frac{\nu}{c}\right)$ où ν est leur vitesse radiale et le signe \pm lié au sens de leur mouvement vis-à-vis de l'observateur (c'est l'effet Doppler). Quelle est la largeur Doppler $\Delta\nu'$ de la raie si on assimile la vitesse ν à la vitesse quadratique moyenne lorsque la température est $T = 320$ K pour un gaz de masse molaire $M = 44 \text{ g.mol}^{-1}$

(CO_2) ? Quelle est alors le temps τ' ainsi que la longueur de cohérence L'_c réelle ? Quel est l'intérêt du laser ?

44. Deux ondes planes cohérentes et de même amplitude font un angle $+\theta$ et $-\theta$ par rapport à la normale à l'écran (plan xOy) au point M . Elles sont en phase en O ($x=0$) ; quelle est la différence de marche en M d'abscisse x ? En fait, chacune des deux ondes comporte deux modes voisins, de même amplitude, et de fréquences $\nu_1 = \nu + \delta\nu$ et $\nu_2 = \nu - \delta\nu$ avec $\delta\nu \ll \nu$. Exprimer le contraste $C(x)$ des franges en fonction des données ; par quel moyen a-t-on accès à $\delta\nu$?
45. Un interféromètre de Michelson est réglé en « lame d'air » avec la raie verte du mercure ($\lambda \approx 0,55 \mu\text{m}$). La source est au foyer objet de la lentille d'entrée de distance focale $f'_1 = 10 \text{ cm}$ et l'écran dans le plan focal image de la lentille de projection de distance focale $f'_2 = 100 \text{ cm}$.
- La source S est « ponctuelle » ; qu'observe-t-on sur l'écran E en déplaçant l'un des miroirs ?
 - La source est un disque de $d = 2 \text{ cm}$ de diamètre et l'épaisseur de la lame d'air est réglée à $e = 2 \text{ mm}$; combien observe-t-on de franges ? Quel est le rayon du plus grand anneau visible ?
46. On interpose sur le trajet du miroir M_1 d'un Michelson réglé en lame d'air une très mince lame transparente d'indice $n = 1,52$ et d'épaisseur l inconnue, et ce parallèlement au miroir. On observe un défilé de 36 franges avec la raie verte du cadmium à $\lambda = 509 \text{ nm}$. Que vaut l ? Estimer la précision de la mesure.
47. Un dioptre AB' sépare deux milieux dans lesquels les célérités sont v_1 et $v_2 < v_1$. Sur le schéma ci-contre AB est un plan d'onde dans le milieu 1 à l'instant t (A est sur le dioptre). Représenter le plan d'onde correspondant $A'B'$ dans le milieu 2 à l'instant $t + \Delta t$ (B' est sur le dioptre) en appliquant le principe d'Hyugens-Fresnel. Montrer que cela permet de retrouver la loi de Descartes-Snell sur la réfraction ; commentaire.
48. Dans l'expérience simple (sans lentilles), un laser He-Ne ($\lambda = 632,8 \text{ nm}$) est envoyé sur une fente fine de largeur a . Pour quelle valeur de a , la tache centrale de diffraction sur un écran placé à $D = 1,50 \text{ m}$ de la fente vaut-elle $100a$, critère pour une diffraction importante et bien visible ? Comparer alors a à λ . Un cheveu placé dans le même faisceau donne, toujours à $D = 1,50 \text{ m}$, une tache centrale de largeur $\Delta x = 3,8 \text{ cm}$; que peut-on en déduire ?
49. Dans l'intensité diffractée par une fente fine, on note I_0 l'intensité du pic central. Quelle est l'intensité des deux premiers maxima secondaires ?



' réelle ?

t $-\theta$ par
se en O litude, et
ste $C(x)$ verte du
distance
ection de

çant l'un

d'air est
n du plusune très
e, et ce
verte du v_1
 B' $v_2 < v_1$

ll sur la

st envoyé
ntrale de
térie pour

une tache

c central.

50. Incrire une ouverture circulaire de diamètre d dans deux ouvertures carrées, l'une extérieure juste plus grande, l'autre intérieure juste plus petite, et comparer la largeur des taches de diffraction pour les trois ouvertures.

51. On revient sur l'expérience des fentes d'Young en tenant compte de la diffraction : faire un schéma explicatif. λ est la longueur d'onde, f' la distance focale de la lentille de projection, $a = 0,1$ mm la largeur des fentes et $l = 0,5$ mm la distance entre les deux fentes. Évaluer le nombre N de franges d'interférences à l'intérieur du pic central de diffraction. Qu'observe-t-on vraiment avec deux trous d'Young ?

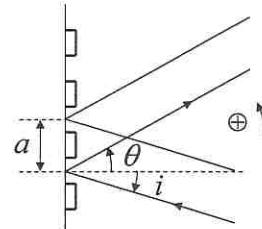
52. Toujours pour l'expérience des fentes d'Young (notations de la question précédente), appliquer le principe d'Hyugens-Fresnel et rétablir simplement la formule des interférences donnant $I(x)$ sur l'écran compte tenu de la diffraction.

53. Un réseau éclairé normalement avec la raie verte du mercure $\lambda = 546,1$ nm donne des maxima pour les deux premiers ordres $K = 1$ et $K = 2$ dans les directions $\theta_1 = 17^\circ 23'$ et $\theta_2 = 36^\circ 40'$. Quel est le nombre n de traits au mm de ce réseau ? Combien est-il possible de voir d'ordres ? Avec une raie bleue, on relève que pour $K = 2$, $\theta'_2 = 32^\circ 33'$; quelle est sa longueur d'onde λ' ?

54. La structure mécanique de la surface d'un disque compact permet de l'assimiler à un réseau par réflexion et explique son aptitude à décomposer la lumière blanche. Suivant un rayon du disque, le pas du réseau est a et l'on note i l'angle d'incidence et θ l'angle de réflexion ; le sens positif des angles est indiqué sur la figure.
a) Montrer que la relation fondamentale des réseaux par réflexion est, en notant k l'ordre de la diffraction :

$$\sin \theta + \sin i = k \lambda / a$$

et la commenter.

AN : $a = 1,6 \mu\text{m}$, $i = -10^\circ$; calculer, pour l'ordre $k = 1$ les deux valeurs extrêmes θ_{\min} et θ_{\max} correspondants aux longueurs d'onde extrêmes du spectre visible.b) Le faisceau de lumière blanche, parallèle et suffisamment large pour éclairer complètement un rayon du disque, est toujours placé tel que $i = -10^\circ$. La largeur de la partie enregistrée d'un CD est $l = 33$ mm. À quelle distance minimale D_m faut-il approcher le disque de son œil pour commencer à voir l'ensemble du spectre visible ? (il est conseillé de faire un dessin clair).

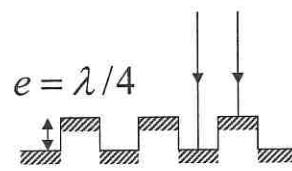
Questions de réflexion ; physique pratique

55. En quoi, pour « l'homme de la rue », le phénomène d'interférence ou de diffraction paraît-il paradoxal ? Pour quelles raisons les lois de l'optique géométrique sont-elles impuissantes à les expliquer ?

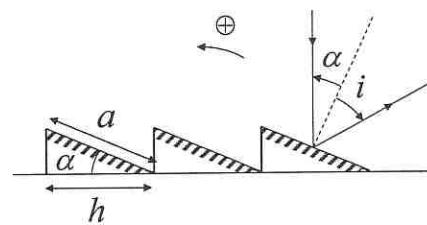
74. Quel est l'ordre de grandeur de la puissance et de la longueur d'onde de la diode laser utilisée dans un lecteur de CD ou dans une imprimante laser ?
Quel est l'avantage des diodes bleues (le fameux « blue ray ») sur les diodes rouges pour la lecture d'informations contenues sur des DVD ?

75. En radioastronomie une des longueurs d'onde utilisée est $\lambda = 21 \text{ cm}$ (correspondant à une raie hyperfine du spectre de l'hydrogène) ; pour des télescopes de diamètre identique, comparer la résolution en ondes radio et en ondes lumineuses ; quel est alors l'intérêt des observations en ondes radio ? Comment est-il possible d'améliorer cette résolution ?

76. Le dispositif ci-contre est un réseau par réflexion composé de deux rangées décalées de minuscules facettes de miroirs. Lorsqu'il est éclairé normalement par une raie de longueur d'onde λ et que la différence des niveaux est $e = \lambda/4$, le maximum de lumière est-il renvoyé dans la direction de l'optique géométrique ?



77. De petits miroirs (ou facettes), en nombre N important, de longueur a , sont inclinés sur le plan du réseau par réflexion d'un angle α (le pas est $h = a \cos \alpha$). Un faisceau lumineux de longueur d'onde λ arrive normalement au plan du réseau.



- a) Sans calcul, dire dans quelle direction i_d , l'amplitude diffractée par une facette est maximale. Les ondes envoyées par deux facettes successives dans cette direction sont-elles forcément en phase ?
b) Sans calcul, dire dans quelle direction i_0 les interférences entre facettes successives conduisent à l'ordre $K = 0$; quelle est la particularité de cet ordre ? Comment est la diffraction dans cette direction ?
c) Dans ce dispositif, comparer pour la lumière la largeur apparente d'une facette et le pas du réseau ; qu'en déduit-on ? Quel peut être l'intérêt de ce dispositif ?

78. Quels analogies et différences peut-on évoquer à propos des interférences et de la diffraction ? S'agit-il de phénomènes utiles ou gênants ?

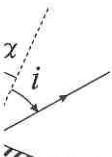
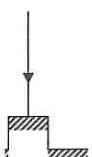
Exercices

79. Influence de l'incidence sur une lame à faces parallèles (*)

On interpose sur le trajet d'un rayon lumineux une lame à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice n . L'inclinaison du rayon sur la lame est noté i (angle pas forcément petit). Calculer rigoureusement la variation $\Delta\delta$ de la différence de marche introduite par la lame sur le trajet dans l'air en fonction de n , i et e . Que retrouve-t-on pour $i = 0$? Donner le premier terme non nul par rapport à $\Delta\delta(i=0)$ pour i petit.

iode laser

es rouges

pondant à
diamètre
; quel est
améliorer

direction

successives

moment est

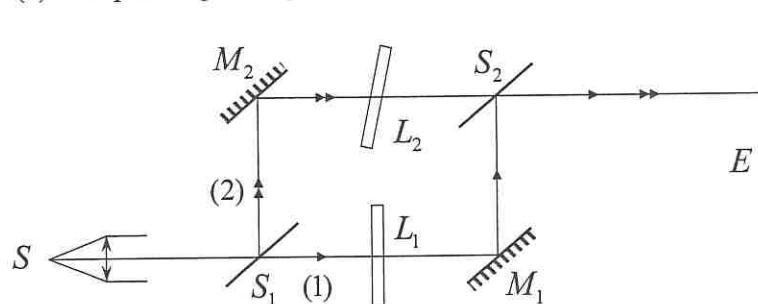
icette et le

'

s et de la

épaisseur
forcément
introduite
-t-on pour
t.**80. Interféromètre de Mach Zendher**

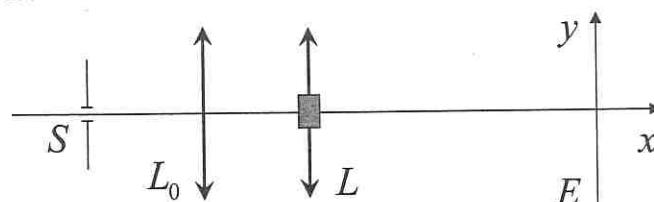
Dans le dispositif ci-dessous un faisceau de lumière émis par une source S quasi ponctuelle et monochromatique ($\lambda = 0,55 \mu\text{m}$) est rendu parallèle par une lentille d'entrée. Il est ensuite divisé en deux faisceaux (1) et (2) de même intensité par la lame semi-réflechissante S_1 ; après réflexion sur les miroirs M_1 et M_2 placés à 45° des axes, ils sont recombinés à la sortie de la lame semi-réflechissante S_2 . On introduit sur le trajet (1) une lame à face parallèle L_1 d'épaisseur $e = 2 \text{ mm}$, d'indice $n = 1,5$ et perpendiculaire à (1). Sur le trajet (2) une lame L_2 identique à L_1 est inclinée sur (2) d'un petit angle i réglable.



Comment varie l'éclairement sur l'écran E lorsque, à partir de $i = 0$, on augmente progressivement l'angle i (se servir du résultat de l'exercice précédent) ? Pour quelles valeurs de i cet éclairement est-il nul ?

81. Bilentilles à obturation

Une fente source S fine, monochromatique ($\lambda = 589,3 \text{ nm}$) est placée dans le plan focal d'une lentille convergente L_0 . Un peu plus loin sont placées les deux moitiés d'une lentille convergente L de distance focale $f = 25 \text{ cm}$. Cette lentille a été sciée en deux suivant un diamètre ; les deux moitiés sont écartées symétriquement d'une distance $2\varepsilon = 2 \text{ mm}$. L'intervalle ainsi créé entre les demi-lentilles est obturé par un cache opaque (parallèle à la fente S). On observe dans un plan de front yEz situé à $d = 50 \text{ cm}$ de L .

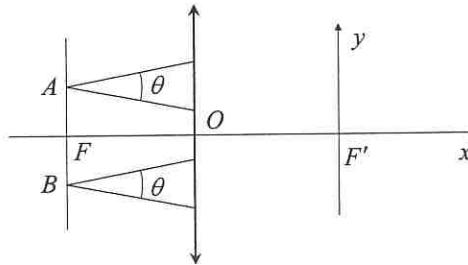


- Réaliser une figure claire et l'expliquer. Décrire le système de franges et déterminer la largeur du champ d'interférence sur l'axe Ey . Quelle est l'intensité lumineuse en un point M du champ ? Combien y a-t-il de franges brillantes visibles ?
- La source émet en réalité un doublet : $\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$. Au bout de combien de franges les deux systèmes peuvent-ils se brouiller ? Conclusion.

- c) On place entre les deux lentilles, sur la partie droite de l'axe Sx dans le sens de la lumière et perpendiculairement à cet axe, une lame à faces parallèles d'un verre d'indice $n = 1,52$. Déterminer son épaisseur e permettant de « visualiser » au centre de l'écran la première anticoïncidence de la question b). Qu'observe-t-on alors sur l'écran ?

82. Vélocimétrie laser

Un interféromètre, représenté sur la figure ci-contre, est composé de deux sources monochromatiques cohérentes A et B ($\lambda = 630 \text{ nm}$) placées dans le plan focal objet d'une lentille L de foyers F et F' . A et B sont symétriques par rapport à F et on note $AB = a = 1 \text{ cm}$ et $f' = \overline{OF'} = 50 \text{ cm}$.

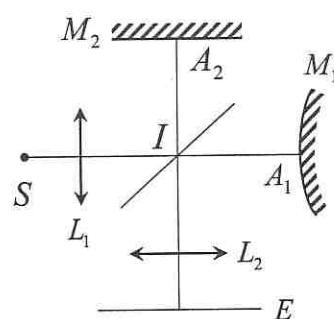


Chaque source émet un faisceau de largeur angulaire $\theta = 1^\circ$ dans une direction moyenne parallèle à l'axe $FOF'x$ du système.

- Compléter la figure et faire apparaître la zone d'interférence. Quelle est la direction α des faisceaux émergeant de la lentille par rapport à l'axe optique ? Estimer les dimensions suivant les axes x et y de la zone d'interférence et indiquer l'orientation des franges.
- Sachant que A et B sont en phase, montrer que le déphasage des deux ondes est nul en F' . Déterminer le déphasage $\phi(M)$ des deux ondes en un point M de coordonnées x et y du champ d'interférence. En déduire l'expression de l'intensité lumineuse $I(x, y)$ en précisant notamment la valeur de l'interfrange i .
- Un fluide est en écoulement à la vitesse v suivant l'axe $F'y$; une particule diffusante y est mélangée en vue de traverser la zone d'interférence. Sachant qu'elle réfléchit une portion de l'intensité lumineuse $I' = KI$, à quelle condition sur sa taille le signal reçu par un détecteur est-il une réplique temporelle des franges spatiales ? Le signal observé a pour fréquence $f = 950 \text{ Hz}$; en déduire la vitesse v recherchée.
- Pour augmenter l'éclairement, on répartit de manière aléatoire dans le fluide un nombre important N de particules diffusantes. Que dire alors du signal détecté ?

83. Interféromètre de Twyman

Le dispositif est un interféromètre de Michelson où le miroir M_1 est un miroir sphérique convexe de grand rayon R ; le miroir M_2 reste plan et au début $IA_1 = IA_2$. La source S , placée au foyer objet de L_1 , est peu étendue ; elle est monochromatique de longueur d'onde λ .



- Quel type de franges observe-t-on ? Où sont-elles localisées ? Quel est le rôle de la lentille L_2 ?
- Déterminer le rayon r_k de la $k^{\text{ème}}$ frange brillante.
- Le miroir M_1 est déplacé vers I ; que deviennent les franges d'interférences ?

le sens de la
d'un verre
utiliser » au
observe-t-on

y
x
x'

e direction
la direction
Estimer les
et indiquer

x ondes est
oint M de
pression de
frange i.
le particule
ce. Sachant
e condition
porelle des
i déduire la
e fluide un
déTECTé ?

2
M₁
A₁
L₂
E

ences ?

- d) Comment un tel interféromètre peut-il être utilisé pour détecter les défauts d'usinage d'une lentille convergente placée convenablement entre I et A_1 ?

84. Interféromètre de Fabry-Perot

- a) Pour un dioptre séparant deux milieux d'indice n_1 et n_2 , les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ électrique, puis en énergie sont (ces résultats sont établis aux questions 24. à 26. du chapitre 7) :

$$r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \text{ et } t_{12} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}, \text{ puis } R = r_{12}^2 \text{ et } T = \frac{n_2}{n_1} t_{12}^2 \text{ (avec } R + T = 1\text{).}$$

Pour une lame à faces parallèles (en voir la définition question 63.) d'indice n_2 placée dans un milieu d'indice n_1 , monter qu'au bout de deux réflexions internes l'amplitude est multipliée par R et qu'au bout de deux transmissions « inverses » elle est multipliée par T .

En déduire les amplitudes complexes des rayons successifs transmis à travers une telle lame en notant A_0 l'amplitude de l'onde incidente et φ le déphasage entre deux ondes émergeantes successives. Que peut-on dire des possibilités d'interférence ?

- b) Évaluer l'expression de l'intensité transmise $I(\varphi)$ (fonction d'Airy) en fonction de

$$I_0, \varphi \text{ et du coefficient } m = \frac{4R}{(1-R)^2}.$$

- c) Faire l'application numérique de R et de m dans le cas d'une lame de verre dans l'air. En réalité, dans un interféromètre de Fabry-Perot, e représente l'intervalle entre deux miroirs où alors $R = 0,9$; en déduire m . Quel est l'intérêt de ce dernier dispositif ? Calculer dans ce cas les intensités maximale I_{\max} et minimale I_{\min} , puis tracer et commenter la courbe $I(\varphi)/I_0$ en fonction de φ . Quel est l'intérêt des dispositifs à N ondes ?

- d) Le calcul de la différence de marche entre deux rayons successifs émergeant d'une lame à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice n placée dans le vide a été effectué à la question 41. : $\delta = 2ne \cos i$.

En déduire la forme des franges.

85. Filtre « gris » : apodisation

Dans le plan de diffraction $O'XY$ (les notations sont celles de la question 24.) est placée une fente fine ($b \gg a \gg \lambda$) dont la transparence est maximale au centre et s'annule sur les bords suivant la loi $t(X) = \cos \frac{\pi X}{a}$.

- a) Poser $u = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$ et calculer l'amplitude $A(u)$ diffractée dans la direction θ .

Commenter le résultat après l'avoir présenté sous forme pertinente.

- b) En déduire l'intensité diffractée sous la forme $I(u) = I_{\max} g(u)$. Tracer sur le même graphe les fonctions $g(u)$ et $f(u) = \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$ (fente habituelle) et comparer f et

g : largeur du pic central, position des minima nuls, décroissance de l'amplitude des maxima secondaires ; commentaires.

86. Réseau sinusoïdal (*)

Les notations sont celles de la question 24.

Un réseau placé dans le plan $XO'Y$ possède une transparence :

$$t(X) = t_0 \left(1 + m \cos \frac{2\pi X}{p} \right)$$

Le pas p du motif est petit devant la largeur a (suivant $O'X$) du réseau ($p \ll a$).

a) Donner l'expression de l'amplitude $A(\theta)$ diffractée dans la direction θ ; montrer qu'il y a trois ordres (-1, 0, 1) et représenter la courbe $A(\sin \theta)$.

b) Que peut-on dire de la fonction d'intensité $I(\theta)$?

c) Quelle est la résolution R d'un tel réseau ?

87. Diffraction d'une fente avec lame déphasante (*)

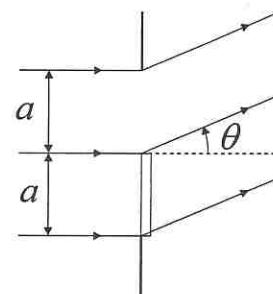
Une fente fine de largeur $2a$ est éclairée sous incidence normale par une lumière monochromatique de longueur d'onde λ . Sur sa moitié droite (dans le sens de la lumière, c'est-à-dire sa moitié inférieure en vue de dessus) est placée une lame transparente très mince dont le seul effet est de créer un déphasage φ supplémentaire.

On pose $u = \pi a \sin \theta / \lambda$ et on note A_0 l'amplitude de l'onde incidente sur la largeur totale.

a) Avec peu de calculs, établir l'expression de l'intensité

$I(u)$ diffractée en fonction de I_0 , u et φ . Vérifier le résultat pour $\varphi = 0$.

b) La lame est telle que $\varphi = \pi$; tracer la courbe $I_{\varphi=\pi}(u)$ et comparer (même graphe) à $I_{\varphi=0}(u)$.



88. Interférence à quatre trous diffractants

Quatre petits trous de même diamètre d sont perforés aux sommets d'un carré de côté a dans un écran opaque éclairé sous incidence nulle par une lumière parallèle et monochromatique de longueur d'onde λ . L'observation se fait dans le plan focal d'une lentille de projection de distance focale f' .

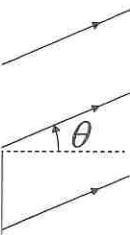
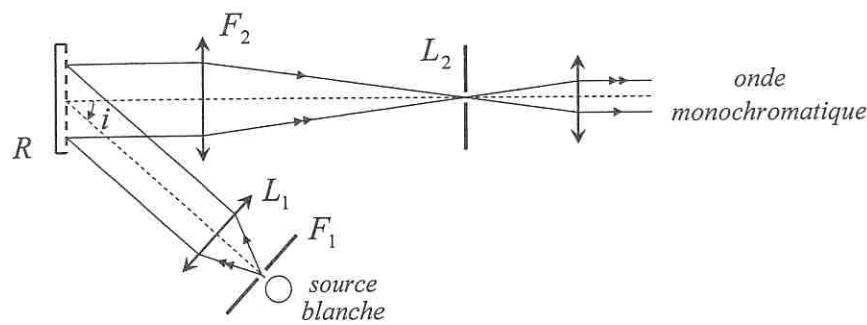
Déterminer $I(x, y)$, l'intensité lumineuse en un point $M(x, y)$ de l'écran d'observation sachant que l'axe optique du système coupe le plan diffractant au centre du carré et décrire la figure observée.

89. Le monochromateur à réseau (*)

F_1 est une fente de largeur $a_1 = 0,1 \text{ mm}$, L_1 une lentille convergente de distance focale $f'_1 = 10 \text{ cm}$, R un réseau par réflexion de $n = 500$ traits/mm éclairé sur une largeur $L = 2 \text{ cm}$, L_2 une lentille convergente de distance focale $f'_2 = 50 \text{ cm}$ et de même axe que R , et F_2 est une fente de largeur $a_2 = 0,2 \text{ mm}$.

Le monochromateur à réseau est un dispositif permettant d'obtenir une onde quasi monochromatique à partir d'une source blanche.

l'amplitude

 $p \ll a$). θ ; montrerJ.
me graphe)in carré de
parallèle et
plan focalin d'obser-
centre dule distance
iré sur une
0 cm et de
onde quasi

- a) Quelle valeur faut-il donner à l'angle d'incidence i sur le réseau pour observer après F_2 une lumière autour de $\lambda_0 = 0,5 \mu\text{m}$ dans le spectre d'ordre $K = 2$?
- b) En fait on observe λ_0 à $\pm \Delta\lambda/2$ près ; évaluer $\Delta\lambda$ pour chacun des trois phénomènes (largeurs des fentes et celle du réseau) limitant le pouvoir séparateur. Conclusion.

Travaux Pratiques

90. À quelles couleurs correspondent les longueurs d'onde suivantes : $0,4 \mu\text{m}$; $0,55 \mu\text{m}$; $0,7 \mu\text{m}$? Quelle est l'origine des abréviations Na et Hg marquées sur les lampes spectrales ? Rappeler en nm les longueurs d'onde des deux raies jaune du sodium ; que vaut l'écart du doublet jaune du mercure ? Quelle est la longueur d'onde de la raie rouge du laser He-Ne ?
91. Avec un système de type fentes d'Young justifier les ordres de grandeur utilisés pour la largeur de chacune des fentes ainsi que leur distance. Combien typiquement cela permet-il d'observer de franges d'interférence ?
Indiquer avec précision comment est modifiée la figure produite lorsque :
- on élargit les deux fentes en conservant leur distance ?
 - on écarte les deux fentes en conservant leur largeur ?
 - on translate le système parallèlement à son plan (sans sortir du faisceau incident) ?
 - on fait subir au système une rotation dans son plan (autour de l'axe optique) ?
 - le système, au lieu d'être éclairé normalement, est éclairé par un faisceau oblique ?
92. Quel est le rôle de la séparatrice dans un interféromètre de Michelson ? Montrer par un schéma que la moitié du flux est irrémédiablement perdue. Quel est le rôle de la compensatrice ? Ne suffirait-il pas de reculer le miroir M_2 pour compenser la différence de chemin optique ?
93. En quoi consiste le réglage « d'optique géométrique » d'un Michelson ? Quelles sont les deux raisons pour lesquelles l'angle α entre les deux miroirs doit être très petit dès le départ ? Pourquoi voit-on des images parasites ?

réglé en
ont-elles
? Et en
-elle un
e α .
up » en
omment,
frange
ou avec

réglé en
ont-elles
? Et en
-elle un
anges ?
up » en
franges
que les
Que se

place le

à lampe
pour les
mm et
d'onde

t-on sur
re de la

ssion et
Quel est

-t-on le

Réponses aux questions

OPTIQUE PHYSIQUE

Le cours d'abord

Conditions d'interférence

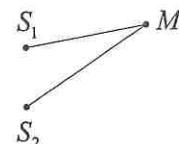
1. L'optique physique s'appuie sur la nature ondulatoire de la lumière qui n'est représentée correctement que par le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}). Néanmoins pour une onde progressive monochromatique polarisée rectilignement, une seule grandeur scalaire, l'amplitude du champ électrique par exemple, suffit à le déterminer. On décide de représenter « la grandeur lumineuse » par une fonction scalaire appelée amplitude de la vibration.

Les récepteurs (œil, plaque photo, photomultiplicateur, photodiode, capteur CCD,...) ne sont pas sensibles à un champ, mais à une énergie, c'est-à-dire au carré du champ. De plus l'œil a un temps de réponse de l'ordre de 0,1 s (les meilleurs appareils de 10^{-9} s), or les fréquences lumineuses vont de 10^{14} à 10^{15} Hz ; il est donc sensible à un éclairement moyen.

De la même manière qu'en électromagnétisme, un champ $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \hat{u}_x$ conduit à un éclairement moyen $|<\vec{R}>| = \frac{<dP>}{dS} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$ (puissance par unité de surface), en optique physique, l'amplitude complexe A conduit à une intensité : $I = k A A^*$

2. Deux ondes ne peuvent interférer que si elles ont la même fréquence (voir la question 56.). Par ailleurs on suppose que leurs champs électriques sont colinéaires, car deux champs polarisés perpendiculairement ne peuvent interférer (voir la question 61.).
3. Pour S_1 et S_2 fixés, la différence de marche $\delta = (S_2 M) - (S_1 M)$ dépend du point M d'observation ; il en est donc de même de la différence de phase φ (ou déphasage) entre les deux ondes arrivant au point M .

Par ailleurs l'émission de lumière relève de la physique atomique ; les atomes en S_1 et S_2 émettent des trains d'onde d'une durée de l'ordre de 10^{-8} s, ce qui est très court vis-à-vis des 0,1 s d'intégration de l'œil, mais comportant tout de même 10^7 périodes de 10^{-15} s. Dans une source, chaque atome se comporte de manière indépendante quant à sa désexcitation. Les différentes émissions s'enchaînent avec des « sauts de phase » aléatoires. Et donc la différence de phase entre les deux amplitudes issues des deux sources est une fonction du temps.



Les amplitudes complexes au point M des vibrations lumineuses issues de S_1 et S_2 sont, en choisissant l'origine des phases sur celle issue de S_1 :

$$\underline{A}_1(M) = a_1 \text{ et } \underline{A}_2(M) = a_2 e^{-i\varphi} \text{ en notant } \varphi = \varphi(M, t)$$

Rq : L'intensité de chaque onde seule est $I_1 = ka_1^2$ et $I_2 = k(a_2 e^{-i\varphi})(a_2 e^{+i\varphi}) = ka_2^2$; le calcul de I_2 est instructif car il montre que l'information sur la phase est perdue lorsqu'on se limite à une seule onde.

L'amplitude totale en M est : $\underline{A}(M) = \underline{A}_1(M) + \underline{A}_2(M) = a_1 + a_2 e^{-i\varphi}$

Elle correspond à une intensité : $I(M) = k \underline{A} \underline{A}^* = k(a_1 + a_2 e^{-i\varphi})(a_1 + a_2 e^{+i\varphi})$

Après développement et en n'oubliant pas que le passage de \underline{A} à I fait prendre la moyenne temporelle :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \varphi(M, t) \rangle$$

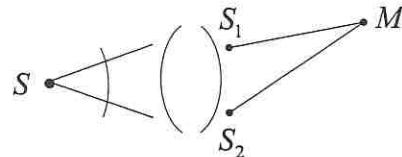
En superposant une onde d'intensité I_1 et une onde d'intensité I_2 , il peut se faire que l'on n'ait pas une onde d'intensité $I_1 + I_2$, mais I qui peut varier entre :

$$I = I_1 + I_2 \pm 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} \pm \sqrt{I_2})^2 = k(a_1 \pm a_2)^2$$

ce qui se comprend puisque les amplitudes peuvent s'ajouter (lorsque les ondes sont en phase en M) ou se retrancher (lorsqu'elles sont en opposition de phase en M).

4. Si S_1 et S_2 sont deux sources différentes, elles vont émettre des radiations avec entre elles une différence de phase aléatoire dans le temps : $\cos \varphi$ varie de -1 à $+1$ et ceci 10^7 fois en $0,1$ s et donc en général $\langle \cos \varphi \rangle = 0$. Dans ce cas les deux sources sont incohérentes entre elles et il n'y a pas d'interférence : $I = I_1 + I_2$ (situation de la vie courante).

Pour avoir interférence, les ondes issues de S_1 et S_2 doivent provenir de la désexcitation du même atome. Alors les variations aléatoires de phase au cours du temps affectent S_1 et S_2 de la même manière et la différence de phase φ est alors constante dans le temps. S_1 et S_2 doivent être les images d'une source unique S (souvent au moyen d'un dispositif d'optique géométrique), les ondes parcourent simplement des chemins optiques différents, mais sont émises par le même point S . On dit alors que les deux sources secondaires S_1 et S_2 sont cohérentes entre elles.



Conclusion : Pour des sources non cohérentes, il suffit d'ajouter les intensités.

Pour des sources cohérentes, il faut ajouter les amplitudes complexes.

La formule des interférences

5. Avec deux sources cohérentes de même amplitude : $\underline{A}_1(M) = a$ et $\underline{A}_2(M) = a e^{-i\varphi(M)}$, l'amplitude totale en M est : $\underline{A}(M) = \underline{A}_1(M) + \underline{A}_2(M) = a(1 + e^{-i\varphi})$

• S_1 et S_2

$|=ka_2^2$; le
est perdue

prendre la

• faire que

ondes sont
n M).

avec entre
+1 et ceci
urces sont
de la vie

nir de la
cours du
est alors
unique S



s.
lexes.

$a e^{-ip(M)}$,

Elle correspond à une intensité : $I(M) = ka^2(1 + e^{-i\varphi})(1 + e^{+i\varphi})$

En notant $I_0 = ka^2$, l'intensité de chaque de chacune des ondes, il vient la formule des interférences :

$$I(M) = 2I_0(1 + \cos \varphi(M))$$

6. Avec $\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M)$ la différence de marche entre les deux rayons issus de S et arrivant en M , la différence de phase est, en notant λ_0 la longueur d'onde dans le vide :

$$\varphi(M) = \frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_0}$$

On définit l'ordre d'interférence au point M par : $p(M) = \frac{\varphi(M)}{2\pi} = \frac{\delta(M)}{\lambda_0}$

montrant que le déphasage est à 2π ce que la différence de marche est à λ_0 . Ces grandeurs dépendent du milieu par l'indice n puisque $(AB) = nAB$.

Aux points où la différence de marche est un multiple entier de la longueur d'onde, $\delta(M) = p(M)\lambda_0$, les deux champs vibrent en phase, l'amplitude est double et l'intensité quadruple, $I(M) = 4I_0$, on a « lumière + lumière = $4 \times$ lumière » et en M on observe une frange brillante : les interférences sont dites constructives.

Aux points où la différence de marche est un multiple demi-entier de la longueur d'onde, $\delta(M) = (p(M) + 1/2)\lambda_0$, les champs vibrent en opposition de phase, l'amplitude et l'intensité sont nulles, $I(M) = 0$, on a « lumière + lumière = obscurité » et en M on observe une frange sombre : les interférences sont dites destructives.

7. D'après ce qui précède, il y a interférence entre deux ondes lorsque la répartition spatiale de l'intensité lumineuse (entre les différentes parties d'un écran par exemple) n'est pas uniforme et ne correspond donc pas à la somme des intensités des deux ondes, qui constitue néanmoins l'intensité lumineuse moyenne (sur cet écran). La phase n'est pas une grandeur « visible » pour une onde seule ; elle disparaît dans le passage de l'amplitude à l'intensité puisque $e^{-i\varphi} \cdot e^{+i\varphi} = 1$. En revanche, par superposition de deux ondes cohérentes, le déphasage $\varphi(M)$ vient moduler spatialement l'amplitude par le facteur $\cos \varphi(M)$ dans la formule des interférences ; l'information sur la phase est cette fois conservée et peut « s'observer » sous forme de modulation de l'intensité.

Rq : C'est le principe de l'holographie où la phase traduit la profondeur ou dimension axiale de l'objet, ce qui rajouté aux deux dimensions transversales habituelles en photographie, permet la restitution de l'objet en 3D.

8. Reprenons le calcul de l'amplitude totale de la question 5. :

$$\underline{A}(M) = \underline{A}_1(M) + \underline{A}_2(M) = a(1 + e^{-i\varphi}) = a e^{-\frac{i\varphi}{2}} \left(e^{\frac{+i\varphi}{2}} + e^{\frac{-i\varphi}{2}} \right) = 2a \cos \frac{\varphi}{2} e^{-\frac{i\varphi}{2}}$$

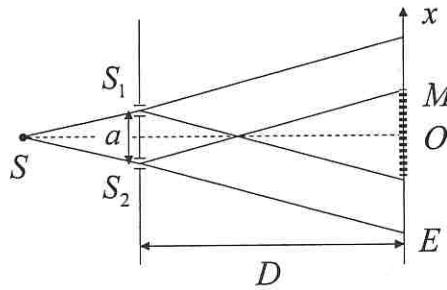
La phase de l'onde résultante en M est $+\varphi/2$; et donc tout se passe du point de vue de la phase comme si l'onde provenait du centre C de S_1S_2 .

$$\text{L'intensité s'écrit alors : } I(M) = 4I_0 \cos^2 \frac{\varphi(M)}{2} = 2I_0(1 + \cos \varphi(M))$$

Les trous d'Young

- 9.** Vers 1807 Thomas Young perce un cache opaque de deux trous S_1 et S_2 ; en l'éclairant par une source S , il constate que la répartition de la lumière derrière le cache n'est celle prévue par l'optique géométrique.

S est sur la médiatrice de S_1S_2 ; les trous étant petits, il y a diffraction (l'optique géométrique n'est plus applicable) et chaque trou envoie de la lumière dans un cône. Les sources S_1 et S_2 , obtenues par division du front d'onde, sont cohérentes. On observe des interférences « non localisées » dans la zone de recouvrement des deux faisceaux ; la position de l'écran E n'est donc pas imposée.



- 10.** Dans le dispositif, on réalise $SS_1 = SS_2$ afin qu'il n'y ait pas de différence de marche liée à la position de la source S et donc $\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M) = n(S_2M - S_1M)$ où $n \approx 1$ est l'indice de l'air.

Avec l'origine des coordonnées au centre C de S_1S_2 et l'axe z suivant SO , on a :

$$S_1 \begin{vmatrix} a/2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad S_2 \begin{vmatrix} -a/2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad M \begin{vmatrix} x \\ y \\ D \end{vmatrix}$$

$$S_1M = \left((x-a/2)^2 + y^2 + D^2 \right)^{1/2} = D \left(1 + \frac{(x-a/2)^2 + y^2}{D^2} \right)^{1/2} \quad \text{et comme } OM \ll D,$$

$$S_1M \approx D + \frac{(x-a/2)^2 + y^2}{2D}, \quad \text{et de même } S_2M \approx D + \frac{(x+a/2)^2 + y^2}{2D}$$

$$\boxed{\delta(M) = S_2M - S_1M = \frac{ax}{D}}$$

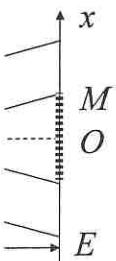
À cet ordre de calcul, δ ne dépend pas de y ; les franges, lieu d'égale intensité, sont données par $\delta(x) = \text{cste}$; il s'agit donc ici de franges rectilignes ($x = \text{cste}$ sur E) perpendiculaires à l'axe S_1S_2 des trous (en réalité il s'agit des segments tangents aux sommets des hyperboles $S_2M - S_1M = \text{cste}$).

- 11.** Les franges brillantes où l'intensité est maximale ($I_{\max} = 4I_0$) sont données par :

$$\delta = \frac{ax}{D} = p\lambda \quad (\text{avec } n=1, \text{ on a } \lambda_0 = \lambda) \quad \text{correspondant à } x_p = p \frac{\lambda D}{a}$$

L'interfrange i est la distance séparant deux maxima consécutifs :

nt de vue



in cône.
entes. On
des deux

le marche
 $A - S_1 M$)

on a :

 $t \ll D$,

isité, sont
e sur E)
gents aux

par :

$$i = x_{p+1} - x_p \Rightarrow i = \frac{\lambda D}{a}$$

À noter que l'interfrange dépend de λ ; chaque couleur du spectre visible donne donc son propre système de franges.

La formule des interférences s'écrit alors :

$$I(x) = 2I_0 \left(1 + \cos 2\pi \frac{x}{i} \right)$$

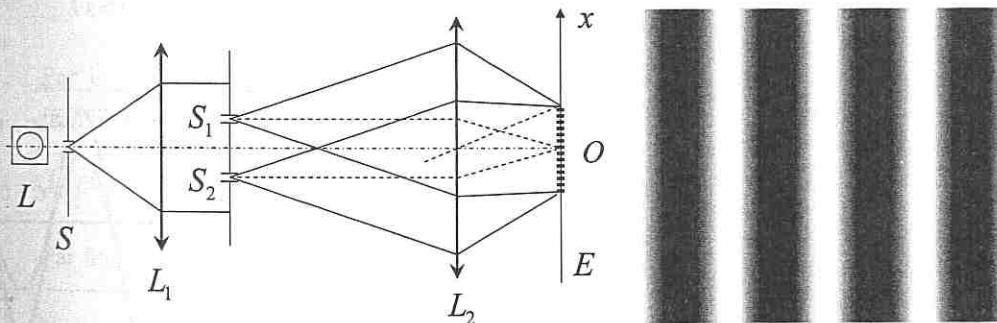
On obtient le long de Ox des franges parallèles à Oy où les franges claires ($I = 4I_0$) alternent avec les franges sombres ($I = 0$). Sur l'écran, la moyenne spatiale de l'énergie le long de Ox est $2I_0$ comme pour des ondes non cohérentes.

AN : Pour que $i \geq 1 \text{ mm}$, il faut $a = \frac{\lambda D}{i} \leq 0,5 \text{ mm}$, donc des sources très voisines.

Ceci montre la difficulté liée à l'observation de franges ; il n'y a pas d'interférences entre deux sources non cohérentes (par exemple deux lampes de poche), et même si cela était possible, l'interfrange serait tellement faible avec $a \approx 10 \text{ cm}$ que le système de franges serait invisible à l'œil nu.

La fringe centrale est celle pour laquelle la différence de marche est nulle : elle est définie par $\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M) = 0$; elle est brillante puisqu'elle correspond au cas $\delta = p\lambda$ où $p = 0$ et ceci pour toute longueur d'onde. Dans le cas des trous d'Young, elle se trouve (mais ceci n'est pas général) au centre $x = 0$ de l'écran.

12. Dans le montage précédent (celui de la question 9.) la source S est ponctuelle et les trous S_1 et S_2 très petits ; on a donc très peu de lumière et le système de franges est difficilement visible.



De plus, sur l'écran, les centres géométriques des deux cônes sont distincts. Pour remédier à cela, on remplace la source ponctuelle par une fente source éclairée par la lampe L et les trous d'Young par des fentes d'Young (perpendiculaires au plan de la figure) et on utilise deux lentilles : S est au foyer objet de L_1 , ce qui permet d'obtenir un faisceau parallèle, et E dans le plan focal image de L_2 , ce qui permet de faire coïncider les centres des cônes de diffraction en O , conjugué de S à travers les deux

lentilles. Le système est alors plus lumineux et par invariance par translation suivant Oy , on observe de grandes franges rectilignes suivant Oy .

À noter que ce montage est celui utilisé en TP avec le goniomètre puisqu'à gauche apparaît le collimateur, à droite la lunette (sans oculaire), le système de fentes étant posé sur la plate forme.

La figure ci-contre indique les chemins suivis depuis S vers M . La différence de marche en M est :

$$\delta(M) = (SS_2 M) - (SS_1 M) \\ = (SS_2) + S_2 H + (HM) - (SS_1) - (S_1 M)$$

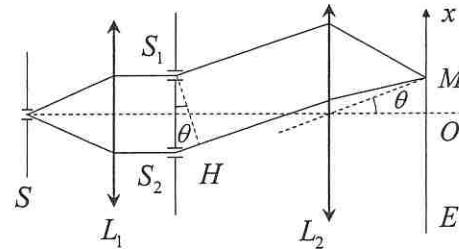
où H est la projection orthogonale de S_1 sur le rayon issu de S_2

$$\text{or } (SS_2) = (SS_1) \text{ et } (HM) = (S_1 M)$$

car entre deux surfaces d'onde (S et $S_1 S_2$ d'une part et $S_1 H$ et M d'autre part), le chemin optique est indépendant du chemin géométrique suivi. On peut également invoquer le stigmatisme des lentilles (leur présence oblige à considérer les chemins optiques à cause de la traversée du verre).

Il reste, à cause de la diffraction des fentes : $\delta(M) = S_2 H = a \sin \theta \approx a \tan \theta = a \frac{x}{f'_2}$

$$\boxed{\delta(M) = a \frac{x}{f'_2}}$$



Notions de cohérence spatiale et temporelle

13. Dans la réalité, au lieu de trouver $I(M) = 2I_0(1 + \cos \varphi(M))$, on trouve en général :

$$\boxed{I(M) = 2I_0(1 + V \cos \varphi(M))} \quad \text{où } V \text{ est le facteur de visibilité } (|V| \leq 1)$$

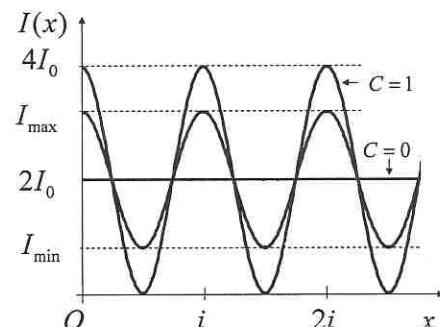
Le contraste des franges est

$$\boxed{C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}}$$

on a $C = |V|$, soit $\boxed{0 \leq C \leq 1}$

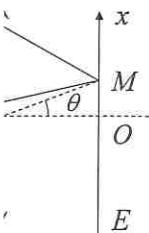
Remarquons que $\varphi(M)$ est invariant, donc la nouvelle intensité possède le même interfrange, seule l'amplitude d'oscillation autour de la valeur moyenne $2I_0$ varie. Dans le cas $0 < C < 1$ (le graphe concerne $C = 0,6$), des franges de plus faible amplitude ($I_{\max} < 4I_0$) s'ajoutent sur un fond uniforme ($I_{\min} \neq 0$). Ces franges sont donc d'autant moins visibles, moins contrastées, que C est faible. $C = 0$ correspond à un écran uniforme.

Le contraste C est lié au degré de cohérence des ondes, c'est-à-dire à leur capacité de pouvoir interférer. Les causes d'affaiblissement du contraste sont :



ion suivant

u'à gauche
tentes étant

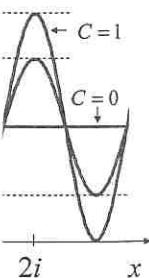


re part), le
également
es chemins

$$= \alpha \frac{x}{f'_2}$$

général :

$\leq 1)$



uniforme
es, que C

capacité de

- la source S n'est pas ponctuelle, mais possède une certaine étendue dans l'espace ; en un point M de l'écran, l'ordre d'interférence varie suivant le point P considéré de la source et les franges se brouillent. Si le contraste reste bon, on dit qu'il y a « cohérence spatiale » (le cas des petites sources).
- la source S n'est pas monochromatique, mais émet dans une certaine largeur spectrale, de λ_1 à λ_2 . Chaque longueur d'onde donne son propre système de franges car $i = \lambda D/a$ et ils se brouillent en se superposant. Si le contraste reste bon, on dit qu'il y a « cohérence temporelle » (le cas des spectres étroits).

14. La source P_1 n'est pas sur la médiatrice de S_1S_2 et donc $P_1S_1 \neq P_1S_2$; il y a donc déjà une différence de marche entre les rayons issus de P_1 et arrivant en S_1 et S_2 :

$$\delta_{tot}(P_1M) = (P_1S_2M) - (P_1S_1M) \\ = \underbrace{(P_1S_2)}_{\delta(P_1)} - \underbrace{(P_1S_1)}_{\delta(P_1)} + \underbrace{(S_2M)}_{\delta(M)} - \underbrace{(S_1M)}_{\delta(M)}$$

$$\delta_{tot}(P_1M) = \frac{aX_1}{D'} + \frac{ax}{D} \text{ et de même pour } P_2 : \delta_{tot}(P_2M) = \delta(P_2) + \delta(M) = \frac{aX_2}{D'} + \frac{ax}{D}$$

Rq : La frange centrale du système d'interférence donné par P_1 , n'est pas au centre O , mais à une abscisse $x_c = -X_1D/D'$ donnée par $\delta_{tot}(P_1M_c) = 0$.

P_1 et P_2 sont deux points sources différents, indépendants et ne sont donc pas cohérents entre eux : leurs systèmes de franges se superposent et il suffit d'additionner les intensités.

Raisonnement qualitatif : le contraste est maximal, $C=1$, si le système de franges issu de P_1 vient coïncider avec celui issu de P_2 soit :

$$\delta_{tot}(P_1M) - \delta_{tot}(P_2M) = K\lambda \Rightarrow \frac{a(X_1 - X_2)}{D'} = \frac{aP_1P_2}{D'} = K\lambda \text{ soit } P_1P_2 = K \frac{\lambda D'}{a}$$

Par le calcul : on suppose les intensités I_0 identiques ; les intensités (systèmes de franges) dus à P_1 et P_2 sont, au point M de l'écran :

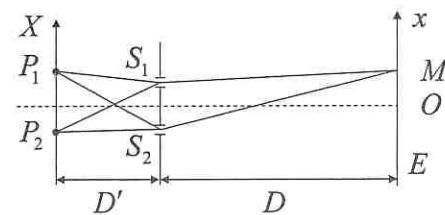
$$I_1(M) = 2I_0 \left[1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\delta(P_1) + \delta(M)) \right] \text{ et } I_2(M) = 2I_0 \left[1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\delta(P_2) + \delta(M)) \right]$$

Par incohérence, leur somme est, en utilisant $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) = 4I_0 \left[1 + \cos \frac{\pi}{\lambda} (\delta(P_1) - \delta(P_2)) \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\delta(P_1) + \delta(P_2)}{2} + \delta(M) \right) \right]$$

Le second cosinus contient l'information sur le point M et donne les franges ; le premier correspond au facteur de visibilité, d'où le contraste :

$$C = \left| \cos \frac{\pi}{\lambda} (\delta(P_1) - \delta(P_2)) \right| = \left| \cos \frac{\pi}{\lambda} \frac{aP_1P_2}{D'} \right|$$



On retrouve que $C=1$ régulièrement pour

$$P_1P_2 = K \frac{\lambda D'}{a} \quad (K \text{ entier}) \text{ et } C=0 \text{ pour}$$

$$P_1P_2 = (K'+1/2) \frac{\lambda D'}{a}.$$

$$\text{AN : } K=1 ; P_1P_2 = \frac{\lambda D'}{a} = 1 \text{ mm}$$

À noter que le contraste ne dépend pas du point M , et donc pour P_1P_2 fixé, il est uniforme sur tout l'écran.

15. La petite surface $d^2S = dXdY$ au point P de la source donne au point M de l'écran un éclairement :

$$d^2I(M) = 2I_S d^2S \left[1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\delta(P) + \delta(M)) \right] \text{ où } \delta(P) = \frac{aX}{D'} \text{ et } \delta(M) = \frac{ax}{D}$$

et I_S l'intensité de la source par unité de surface (la luminance), supposée uniforme sur la fente source et donc indépendante du point P .

Suivant OY (hauteur h), le système est invariant par translation (la diffraction se fait dans le plan horizontal); on obtient de grandes franges lumineuses suivant Oy en sommant les intensités produites par les différentes surfaces d^2S puisqu'elles sont incohérentes entre elles.

$$I(M) = 2I_S h \int_{-l/2}^{l/2} \left[1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{aX}{D'} + \delta(M) \right) \right] dX$$

Pour les variations de la primitive il faut utiliser $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$

$$\text{d'où } I(M) = 2I_0 \left[1 + \frac{\sin(\pi al/\lambda D')}{\pi al/\lambda D'} \cos \frac{2\pi\delta(M)}{\lambda} \right]$$

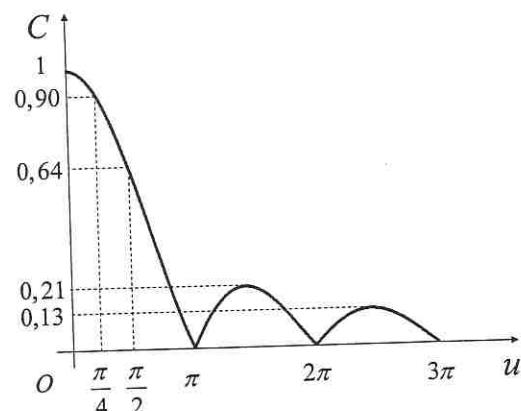
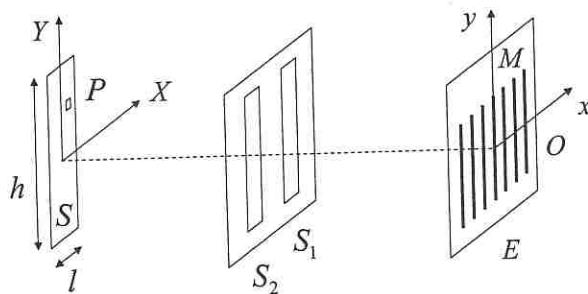
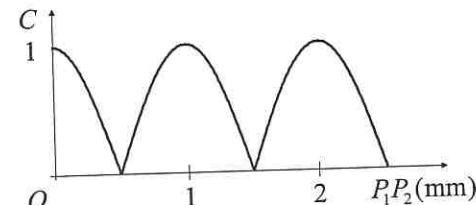
du type $I(M) = 2I_0 (1 + V \cos \varphi(M))$

$$\text{avec } I_0 = I_S h l \text{ et } V = \frac{\sin(\pi al/\lambda D')}{\pi al/\lambda D'}$$

Le contraste est :

$$C = \left| \frac{\sin u}{u} \right| \text{ en notant } u = \frac{\pi al}{\lambda D'}$$

On peut définir une fente fine par l'obtention d'un très bon contraste $C \geq 0,9$ soit $u = \pi al/\lambda D' \leq \pi/4$;



avec les valeurs numériques de la question précédente, on obtient $l \leq 0,25 \text{ mm}$, ce qui est réalisable avec la fente d'entrée d'un collimateur et explique la faible luminosité des franges d'interférences à fentes d'Young.

16. L'interfrange valant $i = \lambda D/a$, chaque longueur d'onde donne son propre système de franges. Les deux systèmes se superposent puisque deux longueurs d'onde différentes donnent des éclairements incohérents : il suffit d'additionner les intensités. La différence de marche $\delta(M) = S_2 M - S_1 M = ax/D$ est inchangée et en particulier, $\delta(O) = 0 \quad \forall \lambda$: au centre O de l'écran, il y a une frange brillante pour toutes les longueurs d'onde.

Raisonnement qualitatif : le contraste s'annule pour la première fois, $C = 0$, en un point M_0 où une frange claire du système donné par λ_1 correspond à une frange sombre du système donné par λ_2 :

$$p(M_0, \lambda_1) = p(M_0, \lambda_2) + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x_0}{\lambda_1 D/a} = \frac{x_0}{\lambda_2 D/a} + \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 \approx \frac{D\lambda^2}{2a\Delta\lambda}$$

Par rapport à $x = 0$, ceci se produit au bout d'un nombre de franges égal à :

$$p_0 = \frac{x_0 - 0}{i} = \frac{D\lambda^2 / 2a\Delta\lambda}{\lambda D/a} = \frac{\lambda}{2\Delta\lambda} = 491 \text{ franges}$$

Ceci est énorme et ne joue pas avec un système de type fentes d'Young où, à cause de la diffraction des fentes, on voit au maximum 5 franges de chaque côté de O ; le contraste n'est donc pas limité par le doublet.

Par le calcul : on suppose les intensités I_0 identiques ; les intensités (systèmes de franges) dus à λ_1 et λ_2 sont, au point M de l'écran :

$$I_1(x) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi ax}{\lambda_1 D} \right) \text{ et } I_2(x) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi ax}{\lambda_2 D} \right)$$

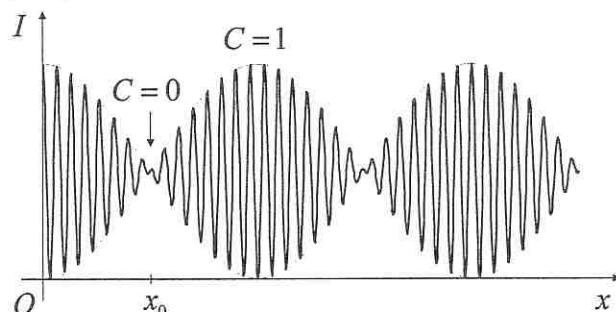
Par incohérence, leur somme est, en utilisant $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$

$$I(x) = 4I_0 \left[1 + \cos \frac{\pi a \Delta \lambda x}{\lambda^2 D} \cos \frac{2\pi ax}{\lambda D} \right]$$

Le second cosinus contient le terme de phase habituel $2\pi\delta/\lambda$ et donne les franges ; le premier, de variation beaucoup plus lente car $\Delta\lambda/\lambda \ll 1$ correspond au facteur de visibilité, d'où le contraste qui dépend cette fois de x donc de l'endroit sur l'écran :

$$C(x) = \left| \cos \frac{\pi a \Delta \lambda x}{\lambda^2 D} \right|$$

Il s'annule la 1ère fois pour $\frac{\pi a \Delta \lambda x_0}{\lambda^2 D} = \frac{\pi}{2}$, ce qui redonne la valeur précédente.



Dans un fuseau (entre deux annulations de contraste), on compte $2p_0 = 982$ franges, qui sont faciles à faire défiler avec un interféromètre de Michelson. Le graphe ci-dessus donne une idée de l'allure des franges, mais les rapports ne sont pas respectés.

17. Une petite largeur $d\nu$ du spectre donne sur l'écran, après interférence par passage à travers S_1 et S_2 , l'intensité :

$$dI(M) = \underbrace{2I_s d\nu}_{dI_0} (1 + \cos \varphi(M, \nu)) \quad \text{avec} \quad \varphi(M, \nu) = \frac{2\pi\delta(M)}{\lambda} = \frac{2\pi\delta(M)\nu}{c} = 2\pi\tau(M)\nu$$

où $\tau(M) = \frac{\delta(M)}{c} = \frac{S_2 M}{c} - \frac{S_1 M}{c}$ est la différence des temps de propagation.

Il y a incohérence entre les différentes bandes de largeur $d\nu$, il suffit donc de sommer les intensités sur le profil rectangulaire.

$$I(M) = 2I_s \int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} (1 + \cos(2\pi\tau(M)\nu)) d\nu$$

Pour les variations de la primitive il faut utiliser $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$

$$\text{d'où } I(M) = 2I_0 \left[1 + \frac{\sin \pi\tau(M)\Delta\nu}{\pi\tau(M)\Delta\nu} \cdot \cos(\varphi(M)\nu_0) \right] \quad \text{avec } I_0 = I_s \Delta\nu$$

Le contraste est :

$$C(M) = \left| \frac{\sin u}{u} \right| \quad \text{en notant } u = \pi\tau(M)\Delta\nu$$

Il dépend du point M et diminue lorsque x augmente.

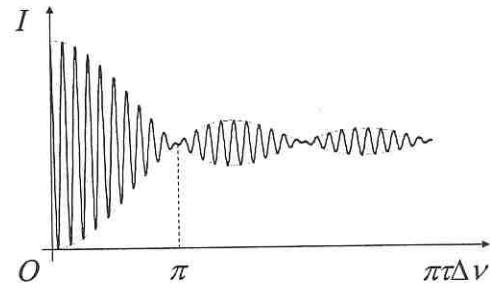
On constate que le contraste ne s'annule pas tant que $\pi\tau\Delta\nu \leq \pi$ soit

$$\tau = \frac{\delta}{c} \leq \frac{1}{\Delta\nu} = \tau_0 \quad \text{ou encore} \quad \delta \leq c\tau_0, \quad \text{c'est-à-dire}$$

à-dire tant que la différence de chemin optique est inférieure à la longueur spatiale du train d'onde (ou longueur de cohérence), voir la question 60.

En réalité avec un dispositif à fentes d'Young, δ ne dépasse guère quelques λ et n'atteint pas $c\tau_0 \approx 5 \text{ cm}$; de telles différences de marche sont accessibles avec un interféromètre de Michelson.

Par ailleurs, au-delà de π , le contraste doit rester nul; les « pieds » du sinus cardinal, conséquence de la modélisation par un profil rectangulaire de l'intensité spectrale, n'ont pas lieu d'être.



L'interféromètre de Michelson

18. Figure 1. L'interféromètre de Michelson est constitué de deux miroirs plans M_1 (mobile) et M_2 (fixe) et d'une lame semi-réfléchissante appelé séparatrice Sp qui, à partir d'une onde incidente donne naissance à deux ondes d'éclairements voisins : \rightarrow se réfléchit sur M_1 et $\rightarrow\rightarrow$ sur M_2 . Ici M_1 et M_2 sont perpendiculaires, mais

182 franges,
graphe ci-
respectés.

ar passage à

$$= 2\pi r(M)v$$

n.

de sommer

$$\cdot \cos \frac{p+q}{2}$$

Δv

$\sim \sim \sim \sim$

$$\pi r \Delta v$$

ir spatiale du

quelques λ et
bles avec un

inus cardinal,
ité spectrale,

rs plans M_1
ice Sp qui, à
ents voisins :
culaires, mais

il est plus commode de raisonner sur M'_1 , symétrique de M_1 par rapport à Sp : alors M'_1 et M_2 sont parallèles et constituent une « lame d'air » d'épaisseur e . Les deux rayons ressortant du dispositif sont cohérents entre eux puisque issus du même rayon provenant du point source S ; on parle d'interférences par division d'amplitude. Les rayons qui interfèrent en M (interférences à deux ondes) ont une égale inclinaison i sur l'axe.

Figure 2. Soit S' le symétrique du point source S par rapport à la séparatrice Sp . Le rayon \rightarrow qui interfère en M semble provenir de S_1 , symétrique de S' par rapport à M'_1 . Le rayon $\rightarrow \rightarrow$ qui interfère en M semble provenir de S_2 , symétrique de S' par rapport à M_2 . Alors S_1 et S_2 sont les sources secondaires, cohérentes, telles que $S_1S_2 = 2e$ et $(SS_1) = (SS_2) = 0$ (rappelons que les chemins optiques correspondant à des trajets virtuels sont comptés négatifs).

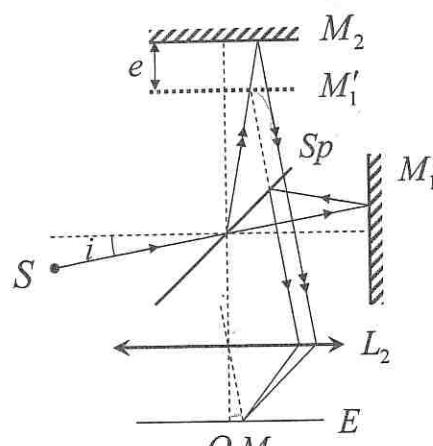


fig. 1

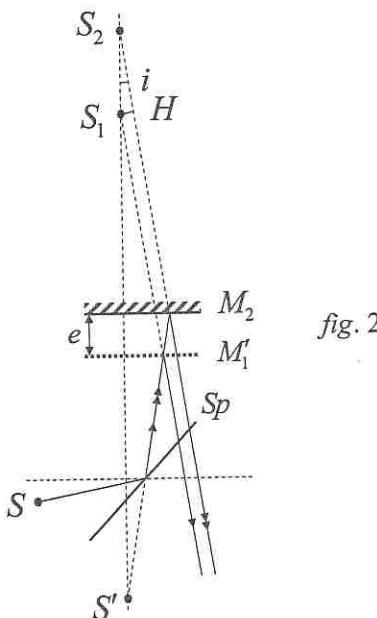


fig. 2

19. La différence de marche $\delta(i)$ peut s'évaluer de plusieurs façons.

* d'après la figure 1 de la question 18. dont un agrandissement est reproduit ci-contre :

$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1$$

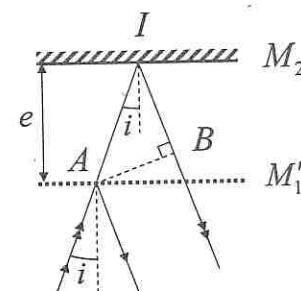
$$= (SA) + AI + IB + (BM) - [(SA) + (AM)]$$

car entre deux surfaces d'onde (AB et M), le chemin optique est indépendant du chemin géométrique suivi (ou stigmatisme de la lentille).

$$\delta(i) = AI + IB = \frac{e}{\cos i} + \frac{e}{\cos i} \cos 2i = \frac{e}{\cos i} 2 \cos^2 i \Rightarrow \boxed{\delta(i) = 2e \cos i}$$

* d'après la figure 2 de la question 18. avec $(SS_1) = (SS_2) = 0$, il reste :

$$\delta(i) = (S_2M) - (S_1M) = S_2H = 2e \cos i \text{ puisque } S_1S_2 = 2e$$



Les franges $\delta = cste$ sont données par $i = cste$ (égale inclinaison) ; il s'agit donc d'anneaux centrés sur O ce qui est logique vu la symétrie de révolution (on peut dire également qu'il s'agit de l'intersection d'hyperboïdes de foyers S_1 et S_2 avec un plan perpendiculaire à l'axe des foyers).

Lorsque la source S est ponctuelle, les franges ne sont pas localisées (on peut les voir dans tout l'espace), mais elles sont très peu lumineuses. À e fixée, pour qu'il ait des franges, il faut i variable (de 0 à i_{\max}), d'où l'emploi d'une source étendue sans problème de cohérence spatiale car la différence de marche est indépendante du point S choisi dans la source étendue. Néanmoins, les sources secondaires S_1 et S_2 sont différentes pour chaque point source. Les franges se brouillent presque partout sauf à l'infini d'où la localisation des franges à l'infini, observées à distance finie dans le plan focal image d'une lentille L_2 ; les anneaux sont alors lumineux.

20. La frange au centre de l'écran correspond à un ordre d'interférence :

$$p_0 = \frac{\delta(i=0)}{\lambda} = \frac{2e}{\lambda}$$

Supposons p_0 entier (anneau brillant au centre). Le $k^{\text{ième}}$ anneau brillant compté à partir du centre correspond à l'ordre $p = p_0 - k$ car avec $\cos i < 1$, l'ordre p décroît lorsque i augmente (l'ordre est maximal au centre).

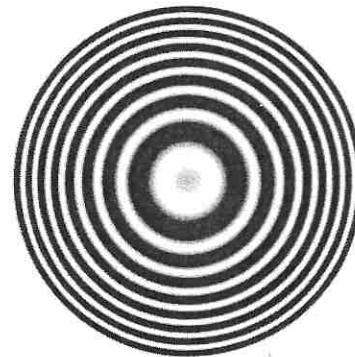
$$\left. \begin{array}{l} 2e = p_0 \lambda \\ 2e \cos i = p \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 2e(1 - \cos i) = (p_0 - p)\lambda \Rightarrow 2e \frac{i_k^2}{2} \approx k\lambda$$

car l'angle i est petit (on travaille dans les conditions de Gauss).

D'où le rayon de l'anneau : $r_k = f' \tan i_k \approx f' i_k$ soit

$$r_k = f' \sqrt{\frac{k\lambda}{e}}$$

- r_k est en \sqrt{k} : les anneaux sont de plus en plus serrés lorsque k augmente
- r_k est en $1/\sqrt{e}$: lorsque e augmente, les rayons diminuent et pour un champ donné, on voit de plus en plus d'anneaux serrés. Au contact optique $e = 0$, on a la teinte plate, c'est-à-dire un éclairement uniforme
- r_k est en $\sqrt{\lambda}$: chaque longueur d'onde donne son propre système de franges, d'où un problème de cohérence temporelle.



21. Figure 3. Le miroir M_1 est incliné d'un faible angle α sur la normale au dispositif.

Ici $e = M'_1 M_2 = 0$ mais $\alpha = \widehat{M'_1 M_2} \neq 0$. Les miroirs constituent un « coin d'air ». Pour simplifier, on se limite à l'incidence normale. Le rayon \rightarrow réfléchi sur M_1 (ou son symétrique M'_1 par rapport à Sp) et le rayon $\rightarrow\rightarrow$ réfléchi sur M_2 semblent tous les deux provenir d'une région de l'espace au voisinage du miroir M_2 .

I s'agit donc (on peut dire t S_2 avec un

peut les voir pour qu'il ait étendue sans ante du point S_1 et S_2 sont partout sauf à finie dans le

ant compté à tre p décroît

Figure 4. Soit S' le symétrique du point source S par rapport à la séparatrice Sp . Les sources secondaires S_1 et S_2 respectivement symétriques de S' par rapport à M'_1 et M_2 sont cohérentes ; elles sont pratiquement dans un plan parallèle à M_2 . La situation se compare aux trous d'Young et les franges sont rectilignes.

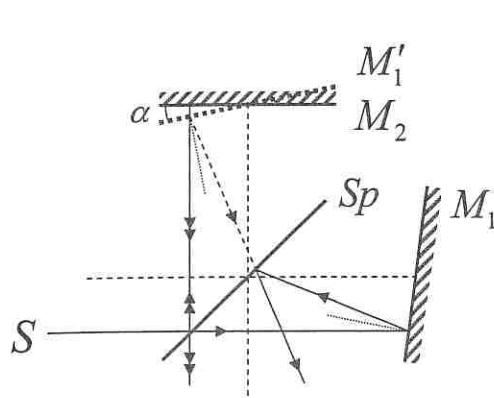


fig. 3

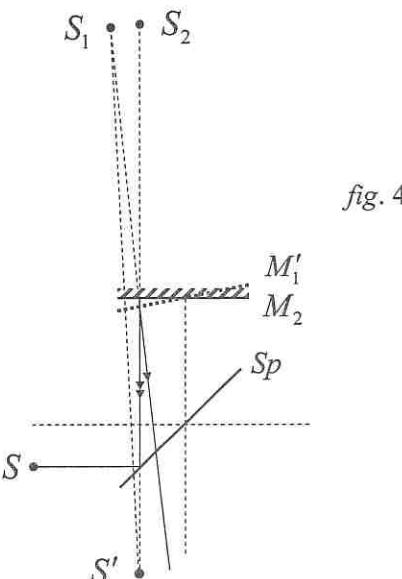


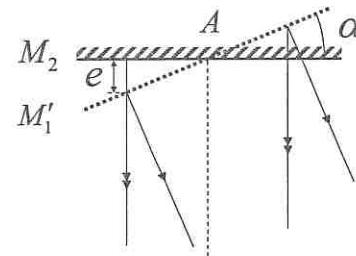
fig. 4

22. Si $e(x)$ est l'épaisseur du coin à l'abscisse x de l'arête, alors la différence de marche entre les deux rayons est $\delta(x) \approx 2e(x) \approx 2\alpha x$ en se limitant au terme du 1er ordre en α .

Les franges données par $\delta(x) = cste$, d'où le nom de frange d'égale épaisseur (celle du coin d'air), soit $x = cste$, sont des segments parallèles à l'arête du coin d'air.

La frange brillante d'ordre p se trouve en x_p tel que $\delta = 2\alpha x_p = p\lambda \Rightarrow x_p = p \frac{\lambda}{2\alpha}$

Les franges brillantes sont équidistantes et l'interfrange vaut : $i = \frac{\lambda}{2\alpha}$



- ceci montre, avec λ en μm et i au moins en mm pour être visible, que l'angle α doit être très petit, de l'ordre de 10^{-3} rad.
- l'interfrange augmente lorsque l'angle diminue
- i étant proportionnel à λ , chaque longueur d'onde donne son propre système de franges, d'où un problème de cohérence temporelle, sauf au voisinage de l'arête où $\delta = 0, \forall \lambda$.

Quand la source S est ponctuelle, les franges ne sont pas localisées (on peut les voir dans tout l'espace), mais elles sont très peu lumineuses. L'emploi d'une source étendue permet d'y remédier. À α fixé, pour qu'il ait franges, il faut x variable ce qui est atteint avec un faisceau qui couvre les miroirs, et ceci sous incidence nulle. La

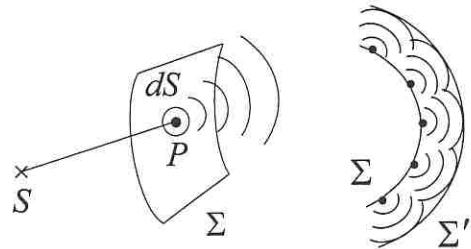


au dispositif.
d'air ». Pour
c M_1 (ou son
semblent tous

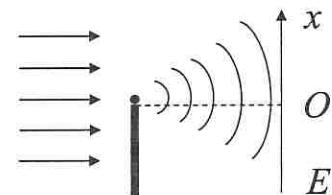
source étendue est placée au foyer d'une lentille convergente L_1 (sans problème de cohérence spatiale car la différence de marche est indépendante du point S choisi dans la source étendue). Néanmoins, les sources secondaires S_1 et S_2 sont différentes pour chaque point source. Les franges se brouillent presque partout sauf au voisinage du miroir M_2 , d'où la localisation des franges (l'endroit de la localisation est l'intersection de deux émergents issus d'un même incident).

La diffraction de Fraunhofer

23. S est une source et Σ une surface (fictive ou non) de l'espace. Tout point P d'une surface atteinte par la lumière émise par S peut être considéré comme une source secondaire émettant une onde sphérique. L'amplitude de cette onde est proportionnelle à l'amplitude de l'onde incidente et à l'aire dS autour de P ; sa phase est prise égale à celle de l'onde incidente. Les vibrations issues des différentes sources secondaires interfèrent entre elles. Si Σ est une surface d'onde sphérique, alors l'enveloppe des ondelettes émises par les sources secondaires donne la surface d'onde Σ' à un instant ultérieur, qui est encore une sphère.



Le bord d'un écran opaque (en gras sur la figure) est éclairé en incidence nulle par des rayons parallèles. D'après l'optique géométrique, sur l'écran E placé derrière, il y a discontinuité d'éclairement en O : pour les $x < 0$, on a la zone d'ombre (uniformément obscure) et pour $x > 0$, la zone de lumière (uniformément brillante). Cependant, l'application du principe d'Huygens-Fresnel (prendre le point P près du bord) conduit à des éclairages non uniformes dans le voisinage de O et une transition continue; en effet, il y a un peu de lumière dans la zone d'ombre géométrique (et corrélativement un peu moins dans la zone de lumière géométrique). Cet exemple montre qu'il faut systématiquement associer les phénomènes de diffraction à des effets de bords.

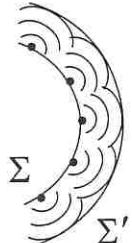


24. L'approximation de Fraunhofer se limite aux rayons diffractés au voisinage de l'axe (et plus généralement au voisinage de la direction de l'optique géométrique) et concerne une observation à l'infini ou dans le plan focal image de la lentille de projection L_2 .

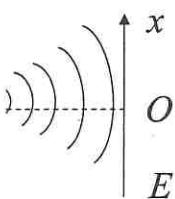
L'onde incidente est plane et arrive sous incidence nulle :

- à gauche de Σ , son amplitude surfacique est A_s
- à droite, son amplitude surfacique est $t(X, Y)A_s$ où $t(X, Y)$ est la transparence au point $P(X, Y)$ de (S) avec $|t(X, Y)| \leq 1$ (t peut être complexe pour traduire un déphasage)
- sur l'écran E , la phase en M dépend de la direction \vec{u} et du point P considéré sur (S) (\vec{u} est arbitraire, c'est la variable, et ne résulte pas de considérations

problème de
oint S choisi
ont différentes
f au voisinage
calisation est



sur de P ; sa
les différentes
émises par les
qui est encore



onduit à des
continue ; en
rrélativement
énomènes de
nage de l'axe
ométrique) et
la lentille de

ansparence au
ur traduire un
considéré sur
considérations

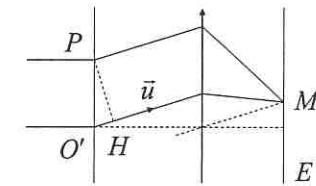
optiques) ; sur le schéma, le rayon issu de P tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ est en avance sur celui issu de O' pour lequel on choisit de prendre la phase nulle : $\phi_M(O') = 0$

Alors la phase de l'onde en M due au rayon issu de P est $\phi_M(P) = \frac{2\pi\delta(P/O')}{\lambda}$ où la différence de marche vaut

$$\delta(P/O') = (PM) - (O'M) = -OH = -\overrightarrow{OP} \cdot \vec{u} = -\vec{r} \cdot \vec{u}, \text{ car}$$

à l'arrivée les ondes en P et O' sont en phase et après diffraction, le chemin optique entre les surfaces d'onde passant par PH et M sont les mêmes, soit :

$$\phi_M(P) = \frac{2\pi\delta(P/O')}{\lambda} = -k \vec{u} \cdot \vec{r} = -\vec{k} \cdot \vec{r}$$



D'après le principe d'Huygens-Fresnel, l'amplitude au point M diffractée par dS autour de P dans la direction \vec{k} est : $d\underline{A} = t(\vec{r}) A_s dS e^{-i\phi_M(P)}$

Ces amplitudes proviennent toutes du même point source S , elles sont donc cohérentes entre elles. L'amplitude totale diffractée par (S) dans la direction \vec{k} est la somme :

$$\underline{A}(\vec{k}) = A_s \iint_{(S)} t(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} dS$$

L'intensité lumineuse dans la direction \vec{k} est $I = K \underline{A} \cdot \underline{A}^*$.

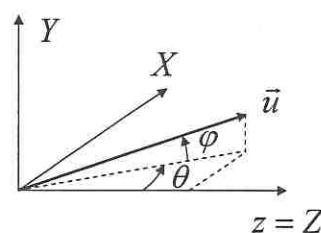
25. Avec $\vec{k} = k \vec{u} = \begin{vmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix}$ et $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{vmatrix}$, l'expression s'écrit :

$$\underline{A}(\alpha, \beta) = A_s \iint_{(S)} t(X, Y) e^{ik(\alpha X + \beta Y)} dXdY$$

Les cosinus directeurs sont :

$$\vec{u} = \begin{cases} \alpha = \cos \varphi \sin \theta \approx \theta \approx x/f' \\ \beta = \sin \varphi \approx \varphi \approx y/f' \\ \gamma = \cos \varphi \cos \theta \approx 1 \end{cases}$$

où x et y sont les coordonnées du point M de l'écran au foyer image de la lentille L_2 de distance focale f' .



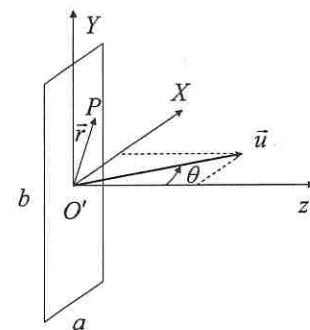
26. En incidence oblique de vecteur \vec{k}_0 , il existe déjà un déphasage entre P et O' à l'arrivée de l'onde ; il suffit de remplacer dans $\underline{A}(\vec{k})$, $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ par $e^{i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{r}}$.

Quelques résultats sur la diffraction de Fraunhofer

27. Une fente fine est telle que $b \gg a \gg \lambda$, avec typiquement les ordres de grandeur suivants : $b \approx 2 \text{ cm}$, $a \approx 0,1 \text{ mm}$ et $\lambda \approx 0,5 \mu\text{m}$.

On peut donc négliger la diffraction dans la direction $O'Y$ ($\varphi = 0$) pour ne considérer que les vecteurs \vec{k} dans le plan $XO'z$ ($\theta \neq 0$).

$$\text{Avec } \vec{k} = \begin{cases} k \sin \theta \\ 0 \\ k \cos \theta \end{cases} \text{ et } \vec{r} = \begin{cases} X \\ Y \\ 0 \end{cases}, \quad t(\vec{r}) = 1 \text{ sur la fente et } t(\vec{r}) = 0 \text{ ailleurs, on a : } \underline{A}(\theta) = A_s \int_{-a/2}^{a/2} e^{\frac{2i\pi X \sin \theta}{\lambda}} b dX$$



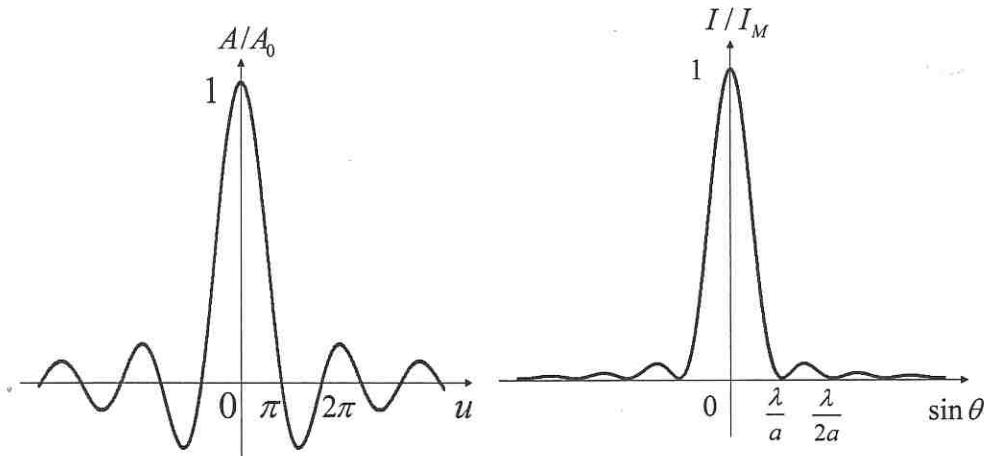
$$\text{Le calcul de l'amplitude diffractée est facile : } \boxed{\underline{A}(\theta) = A_0 \frac{\sin u}{u}}$$

en ayant posé $A_0 = A_s ab$ l'amplitude totale de l'onde et $u = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$.

Rq : Cette amplitude est réelle, donc du point de vue de la phase, tout se passe comme si l'amplitude résultante en M provenait du centre O' (ce qui *a posteriori* justifie le choix de l'origine).

$$\text{L'intensité diffractée dans la direction } \theta \text{ est donnée par : } \boxed{I(\theta) = I_M \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2} \text{ où}$$

$$I_M = I(\theta = 0) = KA_0^2 \text{ est l'intensité maximale.}$$



La figure de diffraction est obtenue sur l'axe Ox perpendiculaire à la direction $O'Y$ de la fente. Le maximum d'intensité est obtenu pour $\theta = 0$, c'est-à-dire dans la direction de l'optique géométrique.

La tache centrale est deux fois plus large que les taches latérales, peu lumineuses (le premier maximum secondaire, en $1,43 \lambda/a$ vaut $I/I_M = 0,047 \approx 1/20$).

La première annulation s'obtient pour : $\sin \theta_0 \approx \theta_0 = \lambda/a$

et montre que la diffraction est d'autant plus importante (θ_0 élevé) que la fente est fine (largeur a petite, tout en restant très supérieure à λ).

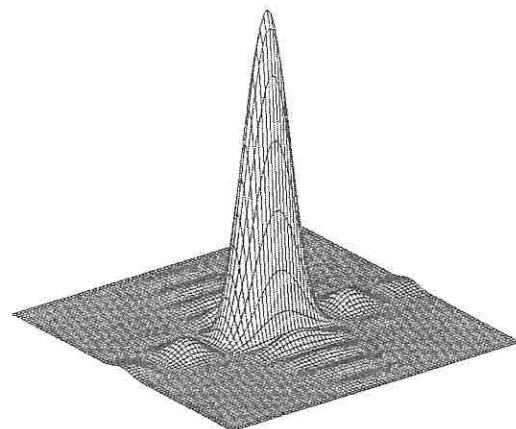
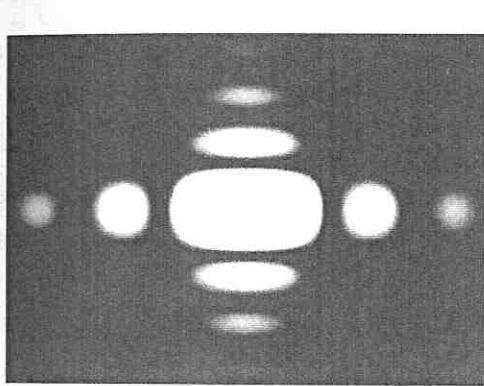
AN : Avec θ petit, $\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{x}{f'}$, d'où $I(x) = I_M \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2$ avec $u = \frac{\pi ax}{\lambda f'}$

La largeur de la tache centrale est $2x_0 = 2f'\theta_0 = 2f' \frac{\lambda}{a} = 1 \text{ cm}$

28. Pour une ouverture rectangulaire pour laquelle les deux côtés diffractent

$$\underline{A}(\alpha, \beta) = A_s \iint_{(S)} e^{ik(\alpha X + \beta Y)} dX dY = A_s \int_{-a/2}^{a/2} e^{\frac{2i\pi\alpha X}{\lambda}} dX \int_{-b/2}^{b/2} e^{\frac{2i\pi\beta Y}{\lambda}} dY$$

$$\text{d'où } I(\alpha, \beta) = I_M \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \left(\frac{\sin v}{v} \right)^2 \text{ où } u = \frac{\pi a \alpha}{\lambda} \text{ et } v = \frac{\pi b \beta}{\lambda}.$$



Sur l'écran d'observation, le premier facteur donne la répartition suivant Ox (α est le cosinus directeur suivant $O'X$) et le second suivant Oy (β est le cosinus directeur suivant $O'Y$). Les taches en dehors de l'axe sont très faiblement lumineuses.

La tache centrale est la plus large dans la direction où l'ouverture est la plus étroite (ici $a < b$).

Si b devient très grand, $\frac{\sin v}{v} \rightarrow 0$ sauf pour $\beta = 0$ où $\frac{\sin v}{v} = 1$: il n'y a alors de lumière que sur l'axe Ox , ce qui redonne le résultat de la fente fine.

29. Pour une ouverture circulaire, l'intégrale $\underline{A}(\theta) = A_s \iint_{\text{disque}} e^{ik\vec{r}} dS$ n'admet pas de

primitive analytique simple (elle fait appel à des fonctions spéciales de Bessel). Vu la symétrie de révolution autour de Oz , on observe au centre (la direction de l'optique géométrique) une tache brillante appelée tache d'Airy entourée d'anneaux alternativement sombres et brillants.

$\frac{1}{\lambda} \frac{u}{a}$

se passe comme
si a posteriori

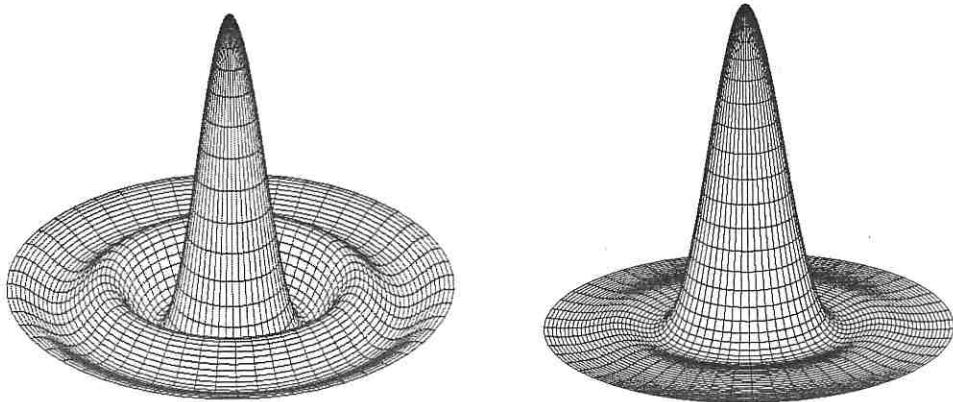
$\left(\frac{\sin u}{u} \right)^2$ où

$\frac{\lambda}{a}$ sin θ

direction $O'Y$
à-dire dans la
lumineuses (le

L'allure de la fonction $I(\theta)/I_M$ ressemble à celle de la question 27., la direction θ_0 correspondant au bord de la tache centrale est $\theta_0 \approx 1,22 \frac{\lambda}{d}$ où d est le diamètre de l'ouverture.

Ceci correspond à des cas pratiques importants : diaphragmes, lentilles,...



La représentation de gauche concerne l'amplitude diffractée par un trou (avec valeurs négatives) et celle de droite, l'intensité (peu présente au-delà de θ_0).

30. Si deux écrans 1 et 2 sont complémentaires, leurs transparencies sont : $t_1(\vec{r}) = t(\vec{r})$ et $t_2(\vec{r}) = 1 - t(\vec{r})$; dans la pratique, ceci est limité (ne serait-ce que par la taille du faisceau lumineux) à une zone Σ de l'espace, par exemple un rectangle de côtés a et b grands. Alors :

$$\underline{A}_1(\vec{k}) = A_s \iint_{\Sigma} t(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} dS \quad \text{et} \quad \underline{A}_2(\vec{k}) = A_s \iint_{\Sigma} (1 - t(\vec{r})) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} dS = \underline{A}'(\vec{k}) - \underline{A}_1(\vec{k})$$

où $\underline{A}'(\vec{k}) = A_s \iint_{\Sigma} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} dS = A_s ab \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{\sin v}{v}$ comme à la question 28., sauf qu'ici, à cause de la taille a et b grande du cadre, cette amplitude est nulle partout sauf au centre O (correspondant aux variables $\alpha = \beta = 0$).

Donc, en dehors de O (image géométrique), $\underline{A}_2(\vec{k}) = -\underline{A}_1(\vec{k})$ soit $I_1(M) = I_2(M)$

Deux écrans complémentaires (penser à une fente et un fil) présentent les mêmes bords ; et donc les effets de bord, la diffraction, sont identiques.

31. En pointillé sur la figure, la direction de l'optique géométrique dans les deux situations : pupille (S) centrée sur O' , puis pupille translatée de \vec{r}_0 et centrée sur P . On constate que l'image géométrique O de la source S n'est pas modifiée.
En un point M de l'écran arrivent des rayons qui avant ou après translation sont obligatoirement diffractés dans la même direction \vec{k} ; l'amplitude diffractée (uniquement commandée par l'écart angulaire) est donc la même dans les deux cas ; seule la phase de l'amplitude totale change (vu de M , c'est celle du centre P et non plus celle du centre O'), le déphasage correspondant à la différence de phase du centre O' (origine des phases) translaté de \vec{r}_0 , d'où :

direction θ_0

diamètre de

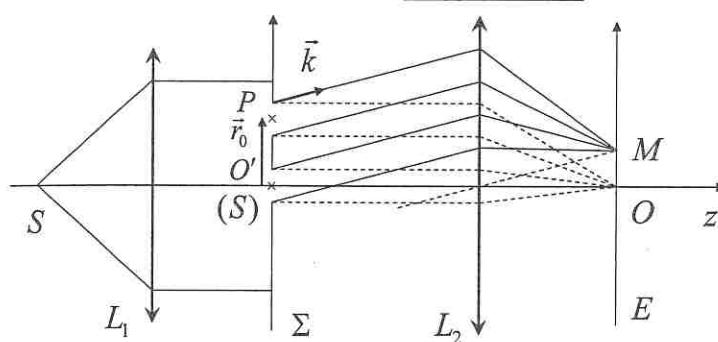
(avec valeurs

 $t(\vec{r}) = t(\vec{r})$ et
r la taille du
de côtés a et $-A_1(\vec{k})$ sauf qu'ici, à
tout sauf au $I = I_2(M)$

et les mêmes

ans les deux
entrée sur P .
se.nslation sont
le diffractée
les deux cas ;
tre P et non
de phase du

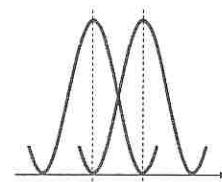
$$\underline{A}'(\vec{k}) = e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_0} \underline{A}(\vec{k}) \Rightarrow [I'(M) = I(M)]$$



C'est le « théorème de translation de la pupille », qui indique que la figure de diffraction est inchangée.

32. Dans le schéma de principe de la diffraction (voir la figure de la question 24. de l'énoncé), les distances de la lentille L_1 au plan Σ et du plan Σ à la lentille L_2 ne jouent aucun rôle ; les supprimer revient à accolter les deux lentilles pour en faire une lentille convergente unique (de distance focale f' telle que $1/f' = 1/f'_1 + 1/f'_2$) donnant de la source S une image O . La pupille ((S)) dans le plan Σ sert de diaphragme et si elle n'y est pas, c'est la monture de la lentille qui joue ce rôle. La diffraction à l'infini accompagne donc inévitablement tout montage d'optique géométrique (même aussi simple que objet – lentille convergente – image).

Deux points distincts d'un objet donnent par un instrument d'optique deux taches d'Airy. Si les deux points sont trop rapprochés, les disques d'Airy se chevauchent et l'œil ne distingue plus qu'une seule tache : le pouvoir séparateur est limité. Le critère de Rayleigh estime que la limite de séparation est obtenue lorsque le centre de l'une coïncide avec le bord de l'autre.



Le réseau de diffraction

33. Un réseau par transmission est une plaque de verre sur laquelle ont été gravés des sillons ; on peut également l'obtenir par holographie. Cela revient à considérer N fentes parallèles, équidistantes (le pas est l) et de même largeur a .

À l'arrivée sur le réseau le 2e rayon est en avance sur le 1er de $l \sin \theta_0 > 0$ (l'angle θ_0 est donné), et au départ, il accuse un retard de $l \sin \theta > 0$ (l'angle θ est la variable) ; la différence de marche entre deux rayons successifs est donc $\delta = l(\sin \theta - \sin \theta_0)$.

On obtient des maxima d'interférence dans les directions pour lesquelles les ondes diffractées sont en phase soit $\delta = K\lambda$ (K entier), d'où la formule du réseau :

$$\sin \theta_K = \sin \theta_0 + K \frac{\lambda}{l}$$

AN : $\theta_0 = 0$; $l = 1/n = 1/600^\circ$ mm et $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$; il faut traduire $|\sin \theta_K| \leq 1$ soit $|K| \leq 2$, on peut donc voir les 5 ordres $-2, -1, 0, 1$ et 2 .

34. Les ondes issues des différentes fentes sont cohérentes entre elles : il faut donc sommer les amplitudes complexes avant de passer à l'éclairement.

Chaque fente diffracte $A_d(\theta) = A_0 \frac{\sin u}{u}$ avec $u = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$ et le même A_0 car les fentes sont de même largeur. Le déphasage $\varphi = \frac{2\pi l \sin \theta}{\lambda}$ d'une fente à la suivante est constant car les fentes sont équidistantes, d'où l'amplitude totale :

$$\underline{A}(\theta) = A_d \left(1 + e^{-i\varphi} + e^{-2i\varphi} + \dots + e^{-(N-1)i\varphi} \right) = A_d \frac{1 - e^{-iN\varphi}}{1 - e^{-i\varphi}}$$

en mettant la phase moitié en facteur au numérateur et au dénominateur et en multipliant et divisant par N , il vient :

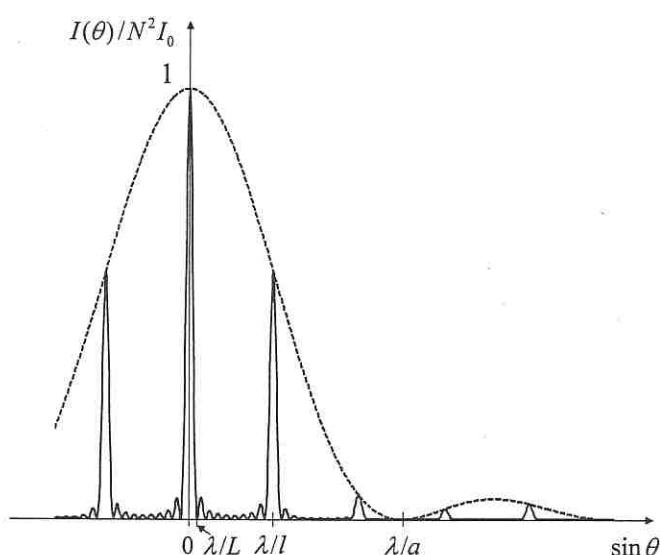
$$\underline{A}(\theta) = N A_d e^{-i\frac{N-1}{2}\varphi} \frac{\sin N\varphi/2}{N \sin \varphi/2}$$

L'onde résultante semble par sa phase provenir du centre du réseau : $\frac{N-1}{2}l$
d'où l'intensité observée dans la direction θ :

$$I(\theta) = N^2 I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \left(\frac{\sin N\varphi/2}{N \sin \varphi/2} \right)^2$$

Sous cette forme, la fonction $I(\theta)$ fait apparaître le produit de :

- l'intensité maximale (N sources cohérentes d'intensité I_0 donnent $N^2 I_0$)
- la fonction sinus cardinal de diffraction de chaque fente (cette diffraction est importante, car à 500 traits/mm, la largeur d'une fente est inférieure à 2 µm, ce qui met à mal l'approximation paraxiale) ; c'est la courbe en pointillé sur le graphe (qui coiffe la courbe d'interférence) et qui s'annule comme on s'y attend pour λ/a



- la fonction décrivant l'interférence des N ondes (on retrouve pour $N=1$ ou 2 des résultats bien connus, et le cas $N=3$ est traité à la question 39.). Elle donne des

il faut donc
ne A_0 car les
la suivante est

ir et en multi-

$\frac{1}{l}$

I_0^2)
diffraction est
e à $2 \mu\text{m}$, ce
sur le graphe
nd pour λ/a

$\theta = 1$ ou 2 des
le donne des

pics de lumière pour $\sin \theta_K = K\lambda/l$ (la périodicité du dénominateur), ce qui correspond aux ordres de la formule du réseau ; ces pics ont une largeur de $\lambda/Nl = \lambda/L$ (1ère annulation du numérateur qui varie N fois plus vite) où $L = Nl$ est la largeur totale éclairée du réseau.

Entre deux pics principaux, on a $N-1$ maxima nuls et $N-2$ pics secondaires en gros en $1/N^2$ par rapport au pic à l'ordre zéro, donc invisibles. En effet, la figure est faite pour $N=10$, mais dans la pratique, $N \approx 10\,000$ (500 traits/mm sur 2 cm).

Chacune des trois longueurs $a < l < L$ a donc son rôle spécifique.

Plus N est grand, plus les pics sont lumineux et fins (angulairement), et moins les pics secondaires se manifestent, c'est-à-dire plus on concentre d'énergie lumineuse dans des directions étroites régulièrement espacées. Ceci augmente la résolution, c'est-à-dire la précision maximale avec laquelle on peut faire un pointé.

35. La formule du réseau $\sin \theta = \sin \theta_0 + K\lambda/l$ montre que pour θ_0 donné, θ dépend de λ pour chaque ordre, soit $\theta_K(\lambda)$; c'est l'effet de dispersion, à savoir être capable (sauf pour l'ordre $K=0$ de l'optique géométrique) d'envoyer dans des directions différentes de la lumière de longueurs d'onde différentes. θ est d'autant plus grand que λ est grand (le rouge est davantage dévié que le bleu, alors que c'est l'inverse pour un prisme). La dispersion augmente avec l'ordre et aussi avec le nombre de traits par mm, mais on dispose de moins en moins de lumière...

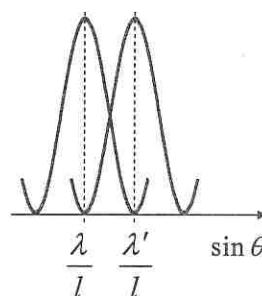
Le graphe ci-contre (pour l'ordre $K=1$) rappelle que les directions des maxima de deux longueurs d'onde λ et λ' ne coïncident pas.

On définit la résolution par $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ où $\Delta\lambda$ est la plus

petite valeur de $\lambda' - \lambda$ pour laquelle deux longueurs d'onde voisines sont justes séparées d'après le critère de Rayleigh :

* la demi-largeur d'un pic est : $\Delta(\sin \theta) = \lambda/Nl$

$$\begin{aligned} * \text{ la distance entre les 2 pics est : } \sin \theta &= \sin \theta_0 + K\lambda/l \\ &\Rightarrow \Delta(\sin \theta) = K\Delta\lambda/l \end{aligned}$$



$$\text{À la limite de séparation : } \frac{\lambda}{Nl} = K \frac{\Delta\lambda}{l} \Rightarrow R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = KN$$

Cette résolution intrinsèque est liée au phénomène de diffraction dû à la limitation spatiale du faisceau incident sur une largeur L ($\sin \theta$ en $\lambda/L = \lambda/Nl$).

AN : $N=10\,000$ (500 traits/mm sur 2 cm) dans l'ordre $K=1$, d'où $R=10\,000$; si $\lambda=0,5 \mu\text{m}$, cela permet de distinguer $\Delta\lambda=0,05 \text{ nm}$.

En réalité, il existe une autre cause, de type instrumentale, de limitation du pouvoir séparateur : la largeur de la fente d'entrée du spectromètre ; en TP, c'est elle qui impose la résolution (voir la question 89.).

Applications directes du cours

- 36.** a) I_0 est l'intensité de chaque faisceau s'il était seul (I varie entre 0 et $4I_0$) ;
 b) I_0 est l'intensité moyenne (au sens spatial) sur l'écran (I varie entre 0 et $2I_0$) ;
 c) I_0 est l'intensité maximale, celle d'une frange brillante (I varie entre 0 et I_0).
- 37.** L'interfrange est $i = \Delta x / 6 = 0,5 \text{ mm}$, et comme $i = \lambda D / a$, on en déduit la longueur d'onde $\lambda = ai / D = 0,5 \mu\text{m}$ (couleur vert bleu).

- 38.** La différence de marche $\delta = (SS_2M) - (SS_1M) = (S_2M) - (S_1M)$ vaut à présent :

$$\delta = \frac{ax}{D} - (n-1)e \quad (\text{attention aux signes})$$

Il apparaît que la frange centrale définie par $\delta = 0$ n'est plus au centre de l'écran comme précédemment, mais en $x_c = \frac{(n-1)eD}{a} = 1 \text{ cm}$;

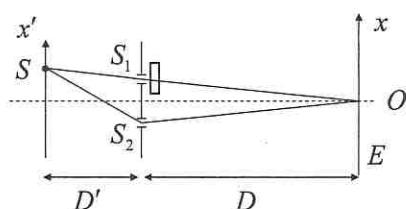
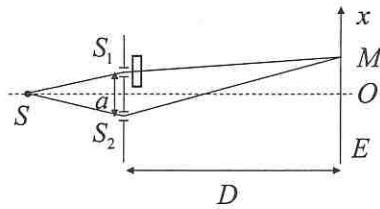
l'ensemble du système de franges s'est donc translaté sur l'écran de 1 cm du côté de S_1 .

Qualitativement, le rayon S_1M a été ralenti au passage par la lame ($c_{verre} \approx 200\,000 \text{ km.s}^{-1}$) ; il faut donc, pour compenser, augmenter la longueur géométrique S_2M , d'où un décalage vers le haut de la figure.

La faible incidence sur la lame est négligée (voir la question 79.) ; pour s'en affranchir, il suffit d'éclairer les fentes secondaires en lumière parallèle (en plaçant S au foyer d'une lentille convergente) et de disposer la lame avant la fente S_1 ...

Pour revenir à la position initiale, il suffit de désaxer la fente source S du côté de S_1 de telle manière à rallonger cette fois le chemin par S_2 en imposant $(SS_2) - (SS_1) = (S_2O) - (S_1O)$ puisqu'on souhaite le retour de la frange centrale en O ; S est donc déplacée d'une quantité x' donnée par :

$$\frac{ax'}{D'} = (n-1)e \Rightarrow x' = \frac{(n-1)eD'}{a} = 2 \text{ mm}$$



- 39.** a) Les trois fentes étant de même largeur, elles ont même amplitude A_0 ; et comme elles sont équidistantes, le déphasage $\varphi(x)$ de S_2 sur S_1 est le même que celui de S_3 sur S_2 . Choisissons l'origine des phases sur l'onde arrivant au point M et issue de la fente S_2 du milieu ; alors les amplitudes complexes au point M sont :

$$\underline{A}_1(M) = A_0 e^{i\varphi(M)} ; \quad \underline{A}_2(M) = A_0 ; \quad \underline{A}_3(M) = A_0 e^{-i\varphi(M)}$$

(l'onde issue de S_3 est en retard sur celle issue de S_2 , mais l'onde issue de S_1 est en avance sur celle issue de S_2)

Les trois ondes étant cohérentes, il faut sommer les amplitudes complexes :

$$\underline{A}(M) = \underline{A}_1(M) + \underline{A}_2(M) + \underline{A}_3(M) = A_0(1 + 2 \cos \varphi(M))$$

Cette amplitude complexe est réelle, prouve que du point de vue de la phase tout se passe si l'onde résultante en M était issue de S_2 , centre géométrique de la figure.

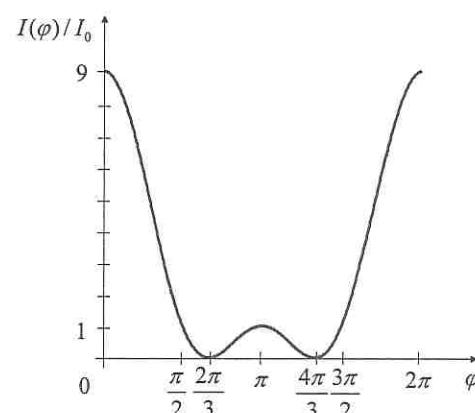
L'éclairement est alors : $I(M) = I_0(1 + 2 \cos \varphi(M))^2$

où $I_0 = kA_0^2$ est l'éclairement de chacune des trois ondes si elle était seule.

Les valeurs remarquables de la fonction $I(\varphi)/I_0$ sont :

- pour $\varphi = 0$ (ou $\varphi = 2\pi$), les 3 ondes sont en phase en M ; l'amplitude est donc multipliée par 3 et donc l'intensité par 9.
- pour $\varphi = \pi/2$ (ou $\varphi = 3\pi/2$), les ondes issues de S_1 et S_3 sont en opposition de phase (déphasage de 2φ) et se compensent, il reste une seule onde d'où l'intensité I_0 .
- pour $\varphi = 2\pi/3$ (ou $\varphi = 4\pi/3$), les 3 ondes se compensent (la somme des racines cubiques de l'unité), et donc l'éclairement au point M est nul.
- pour $\varphi = \pi$, les ondes issues de S_1 et S_2 sont en opposition de phase et se compensent, il reste une seule onde d'où l'intensité I_0 .

Voir la possible généralisation à N fentes à la question 34.

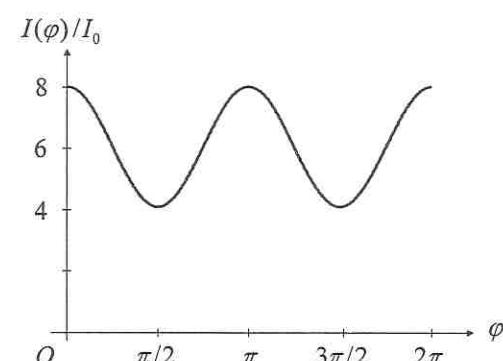


- b) On a toujours des interférences par division du front d'onde ; l'amplitude complexe résultante est : $\underline{A}(M) = A_0 e^{i\varphi(M)} + 2A_0 e^{-i\pi/2} + A_0 e^{-i\varphi(M)} = 2A_0(\cos \varphi - i)$

en gardant l'origine des phases sur l'onde arrivant au point M et issue de la fente S_2 « avant » la lame dont le retard ($\lambda/4$ correspond à $\pi/2$ puisque λ correspond à 2π) sur S_1 est de même signe que celui de S_3 sur S_1 . L'éclairement est alors :

$$I(\varphi) = 4I_0(\cos^2 \varphi + 1)^2$$

soit $I(\varphi) = 6I_0 \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\varphi\right)$



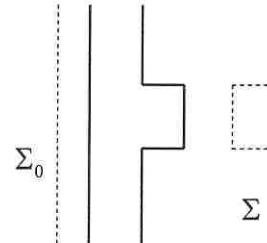
I_0 est l'intensité d'une fente extrême et φ la différence de phase géométrique entre deux fentes successives (sans compter l'effet de la lame).

Le contraste des franges est $C = \frac{1}{3}$ (inutile de calculer $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ puisque l'intensité est sous la forme $I(\varphi) = I_0(1 + V \cos 2\varphi)$). Ceci donne des franges d'amplitude $4I_0$ sur un fond uniforme d'intensité $4I_0$.

40. a) La différence de marche $\delta = (\text{rayon 1}) - (\text{rayon 2})$ évaluée sur la même épaisseur e est :

$$\delta = ne - [ne_0 + (e - e_0)], \text{ et comme } \varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)(e-e_0)$$



Une surface d'onde Σ après la traversée de la lame correspondant au plan d'onde Σ_0 avant traversée est discontinue puisque la lumière est davantage retardée à travers l'irrégularité qu'à travers la lame plus mince.

- b) L'objet est totalement transparent (il est dit « objet de phase ») et donc le défaut n'est pas visible dans un montage d'optique géométrique car son intensité n'est pas altérée (et $e^{-i\varphi} \cdot e^{+i\varphi} = 1$!).
- c) Au contact optique ($e = 0$ et $\alpha = 0$) il n'y a pas de franges et l'éclairement donné par l'interféromètre de Michelson est uniforme et brillant. En plaçant la lame précédente contre le miroir M_1 , le faisceau 1 à travers le défaut est déphasée de 2φ (φ à l'aller et φ au retour) par rapport au faisceau 2, ce qui correspond à un éclairement différent (à condition que $2\varphi \neq 2p\pi$) et donc le défaut devient visible. (voir à ce sujet la question 7.)

41. P est le « point de partage » des deux rayons marqués \rightarrow et $\rightarrow\rightarrow$; il faut calculer $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}$ où

δ est la différence de marche, c'est-à-dire la différence de chemin optique entre les deux rayons entre P (car il n'y en a pas avant) et M_∞ un point « à l'infini » puisque les deux rayons émergents étant parallèles, ils se coupent à l'infini (ou plus précisément dans le plan focal d'une lentille convergente) :

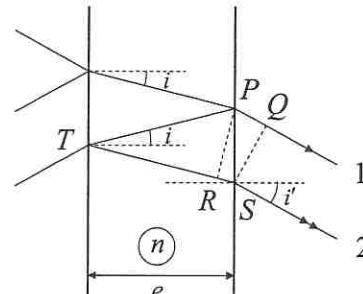
$$\delta = (PM_\infty)_2 - (PM_\infty)_1$$

À noter que les grandeurs $(PM_\infty)_i$ ne sont pas calculables, mais leur différence l'est, et le calcul n'est pas unique ; décomposons le calcul de δ :

$$\delta = n(PT + TR + RS) + (SM_\infty)_2 - [PQ + (QM_\infty)_1]$$

Or entre deux surfaces d'onde (perpendiculaires aux rayons d'après le théorème de Malus), le chemin optique est indépendant du chemin géométrique suivi, d'où :

$$(SM_\infty)_2 = (QM_\infty)_1 \text{ et aussi } nRS = PQ \text{ (le plan d'onde } RP \text{ se réfracte en } SQ\text{)}$$



in
in puisque

: $4I_0$.

Σ

la lumière
ice.

le défaut
é n'est pas

ient donné
it la lame
phasée de
pond à un
ent visible.

Q
 T'
1
2

ence l'est,

orème de
ù :
1 SQ)

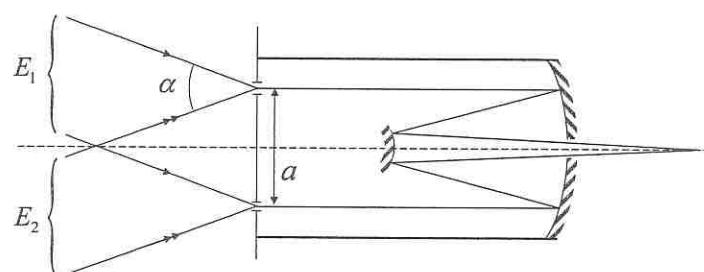
$$\text{il reste } \delta = n(PT + TR) = n\left(\frac{e}{\cos i} + \frac{e}{\cos i} \cos 2i\right) = \frac{ne}{\cos i}(2 \cos^2 i)$$

$$\text{et finalement } \boxed{\delta = 2ne \cos i}$$

Rq : Le choix du plan SQ plutôt que RP est moins judicieux, il conduit à écrire la loi de la réfraction $n \sin i = \sin i'$...

42. Chaque étoile est considérée comme une source ponctuelle ; ces deux sources E_1 et E_2 sont incohérentes et chacune donne à travers les fentes d'Young son propre système de franges. Les deux systèmes se recouvrent bien car α est très petit. La première annulation de contraste $C=0$ est cependant obtenue (voir la question 14. pour le raisonnement et les notations) lorsque $\alpha = \frac{E_1 E_2}{D'} = \frac{\lambda}{2a}$. Sachant que la distance a des fentes est variable, la plus petite valeur mesurable de α est donnée par :

$$\alpha_{\min} = \frac{\lambda}{2a_{\max}} = 5.10^{-7} \text{ rad} = 0,1'' \text{ (seconde d'arc)}$$



43. $\lambda_0 = 0,5 \mu\text{m}$ correspond à du vert (un peu bleu) ; $\nu_0 = c/\lambda_0 = 6.10^{14} \text{ Hz}$. L'émission de lumière lors d'une transition électronique dans un atome est un phénomène de durée limitée. Si τ est la durée des trains d'onde émis, la longueur de cohérence liée à la largeur naturelle est la longueur spatiale de ce train d'onde soit $L_c = c\tau$ d'où $\tau = 10^{-6} \text{ s}$. La largeur spectrale naturelle $\Delta\nu$ à mi-hauteur de la raie (non totalement monochromatique) est liée à τ par la relation $2\pi\tau\Delta\nu = 1$ soit $\Delta\nu = 1,6.10^5 \text{ Hz}$. Son facteur de qualité est $Q = \nu_0/\Delta\nu \approx 4.10^9$, ce qui considérable (la raie est très fine !). La vitesse quadratique moyenne u d'une molécule de masse m est donnée par :

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{3}{2}k_B T, \text{ soit pour les grandeurs molaires } u = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \approx 430 \text{ m.s}^{-1}$$

La largeur Doppler est alors $\Delta\nu' = \nu_0\left(1 + \frac{u}{c}\right) - \nu_0\left(1 - \frac{u}{c}\right) = 2\frac{u}{c}\nu_0 \approx 1,7.10^9 \text{ Hz}$; on note qu'elle est très supérieure à la largeur naturelle : $\Delta\nu' \approx 10^4 \Delta\nu$ et $Q' = 4.10^5$!

D'où $\tau' = 1/2\pi\Delta\nu' \approx 10^{-10} \text{ s}$ et $L_c' = c\tau' \approx 3 \text{ cm}$, ce qui est peu (et dont les effets par affaiblissement de contraste sont visibles avec un interféromètre de Michelson). L'intérêt du laser est sa longueur de cohérence de plusieurs dizaines de mètres.

44. Les ondes marquées 1 et 2 sont en phase en O .

L'onde 1' en M est en avance sur l'onde 1 en O de $HO = x \sin \theta$, soit $\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta$

L'onde 2' en M est en retard sur l'onde 2 en O de $LM = x \sin \theta$, soit $\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta$

d'où la différence de phase entre les ondes 1' et 2' arrivant en M :

$$\varphi = \varphi_1 - (-\varphi_2) = \frac{2\pi}{\lambda} 2x \sin \theta$$

(une autre méthode est développée à la question 82.)

Le mode de fréquence ν_1 donne sur l'écran un système d'interférence d'intensité :

$$I_1(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi}{c} \nu_1 x \sin \theta \right)$$

Le mode de fréquence ν_2 donne sur l'écran un système d'interférence d'intensité :

$$I_2(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi}{c} \nu_2 x \sin \theta \right) \text{ (le même } I_0\text{)}$$

Il n'y a pas de cohérence entre ondes de fréquences différentes, d'où l'intensité résultante :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) = 4I_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi}{c} \delta \nu x \sin \theta \cdot \cos \frac{4\pi}{c} \nu x \sin \theta \right)$$

Tout se passe comme si on avait la figure d'interférence d'une onde de mode unique de fréquence ν (de franges perpendiculaires au plan de la figure) et dont le contraste varie lentement (car $\delta \nu \ll \nu$) en fonction de x suivant la loi :

$$C(x) = \left| \cos \frac{4\pi}{c} \delta \nu x \sin \theta \right|$$

La première annulation du contraste se produit à une abscisse x_0 telle que

$$\frac{4\pi}{c} \delta \nu x_0 \sin \theta = \frac{\pi}{2}. \text{ La mesure expérimentale de } x_0 \text{ conduit alors à } \boxed{\delta \nu = \frac{c}{8x_0 \sin \theta}}$$

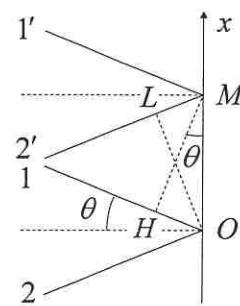
45. a) La source étant ponctuelle, l'interféromètre est éclairé sous une incidence $i=0$ unique (en lumière parallèle). La différence de marche $\delta=2e$ est uniforme à un instant donné d'où un éclairement uniforme sur l'écran E (absence de franges). Lorsque e varie au cours du temps, l'écran est alternativement brillant (lorsque $\delta=2e=p\lambda$) et sombre (lorsque $\delta=2e=(p'+1/2)\lambda$).

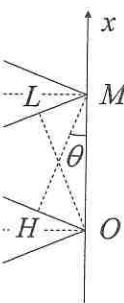
b) L'inclinaison maximale i_{\max} des rayons arrivant sur le système est donnée par

$$\tan i_{\max} = \frac{d}{2f'_1} \text{ (soit } i_{\max} = 5,7^\circ\text{).}$$

L'éclairement sur l'écran a la forme d'un disque (optique géométrique) de rayon

$$R = f'_2 \tan i_{\max} = \frac{df'_2}{2f'_1} = 10 \text{ cm qui s'identifie au rayon du plus grand anneau visible.}$$





L'angle (petit) dans lequel on a le $k^{\text{ième}}$ anneaux (en supposant que le centre est brillant) est donné par $i_k \approx \sqrt{k\lambda/e}$ (voir à la question 20.) en faisant $i_{k_{\max}} = i_{\max}$, soit $k_{\max} = 36$; il y a donc 36 anneaux visibles.

46. Dans cette opération la différence de marche δ varie de $\Delta\delta = 2(n-1)l$, le facteur 2 pour l'aller et le retour.

$$\text{L'ordre d'interférence } p \text{ varie de } \Delta p = \frac{\Delta\delta}{\lambda} = \frac{2(n-1)l}{\lambda} \text{ d'où } l = \frac{\Delta p \cdot \lambda}{2(n-1)} = \frac{17,6 \mu\text{m}}{2(n-1)}$$

Avec une précision d'une demi-frange, soit $\delta \Delta p = 1/2$, celui conduit à une incertitude sur l de $\delta l = \frac{\delta \Delta p \cdot \lambda}{2(n-1)} = 0,2 \mu\text{m}$, ce qui est remarquable.

intensité :

intensité :

où l'intensité

θ)

mode unique
t le contraste

θ_0 telle que

$$\frac{c}{8x_0 \sin \theta_0}$$

idence $i=0$
iforme à un
de franges).
lant (lorsque

donnée par

ie) de rayon
eau visible.

47. Il faut compléter la figure de l'énoncé par les ondelettes émises par les sources secondaires A et B de la surface d'onde AB à l'instant t en faisant bien apparaître que dans leur propagation $v_2 < v_1$. Leur enveloppe donne la surface d'onde $A'B'$ à l'instant $t + \Delta t$. On note que la réfraction des plans d'onde entraîne celle des rayons qui leur sont perpendiculaires (théorème de Malus).

$$\text{Avec } \Delta t = \frac{BB'}{v_1} = \frac{AA'}{v_2} \text{ soit } \frac{AB' \sin i_1}{v_1} = \frac{AB' \sin i_2}{v_2}, \text{ il vient la relation } \boxed{\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}}$$

En optique où $v_i = c/n_i$, on retrouve la loi de réfraction de Descartes-Snell :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

Mais le résultat encadré est plus général et s'applique à d'autres types d'ondes (par exemple les ondes acoustiques).

48. Il suffit d'écrire que $\sin \theta_0 = \frac{\lambda}{a} \approx \tan \theta_0 = \frac{50a}{D} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{\lambda D}{50}} \approx 0,14 \text{ mm}$.

Alors $a \approx 220\lambda$, ce qui assure bien θ_0 petit.

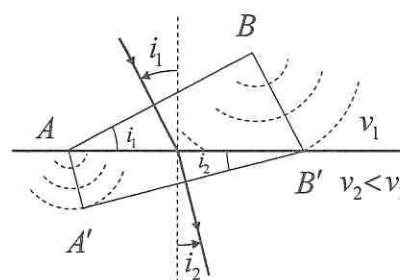
(Une idée couramment répandue voudrait que la diffraction ne soit correctement observable qu'à partir du moment où $a \approx \lambda$, ce qui est manifestement faux!).

Remarque : Dans ces conditions $D = 1,5 \text{ m} = \frac{50a^2}{\lambda} \gg \frac{a^2}{4\lambda} \approx 1 \text{ cm}$ qui est le critère

retenue pour être, sans lentille de projection, dans les conditions de Fraunhofer.

Les figures de diffraction d'une fente et d'un fil sont identiques (théorème de Babinet). Alors pour un cheveu de diamètre a :

$$\sin \theta_0 = \frac{\lambda}{a} \approx \tan \theta_0 = \frac{\Delta x}{2D} \Rightarrow a = \frac{2\lambda D}{\Delta x} \approx \boxed{50 \mu\text{m}}$$



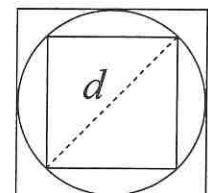
49. L'intensité diffractée par une fente fine est donnée par $I(u) = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2$. Le pic central est obtenu pour $u = 0$ et les annulations pour $u = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$. Une estimation de la position des deux premiers maxima secondaires est $u_1 \approx \frac{3\pi}{2}$ et $u_2 \approx \frac{5\pi}{2}$, ce qui correspond à des intensités relatives : $\frac{I_1}{I_0} \approx \left(\frac{2}{3\pi} \right)^2 = 0,045$ et $\frac{I_2}{I_0} \approx \left(\frac{2}{5\pi} \right)^2 = 0,016$.

50. L'ouverture carrée extérieure de côté d diffracte dans un cône de demi-angle au sommet λ/d .

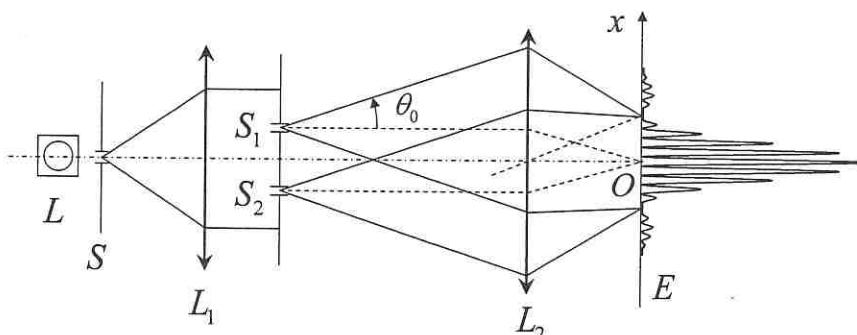
L'ouverture circulaire de diamètre d diffracte dans un cône de demi-angle au sommet $1,22\lambda/d$.

L'ouverture carrée intérieure de diagonale d et donc de côté $d/\sqrt{2}$ diffracte dans un cône de demi-angle au sommet $\sqrt{2}\lambda/d$.

L'encadrement $1 < 1,22 < 1,41$ montre bien que la tache de diffraction est d'autant plus large que l'ouverture est petite.



51. Sur la figure ci-dessous, L est la lampe spectrale, S la fente source dans le plan focal objet de la lentille L_1 , S_1 et S_2 les fentes diffractantes d'Young, L_2 la lentille de projection et E l'écran d'observation dans son plan focal image.



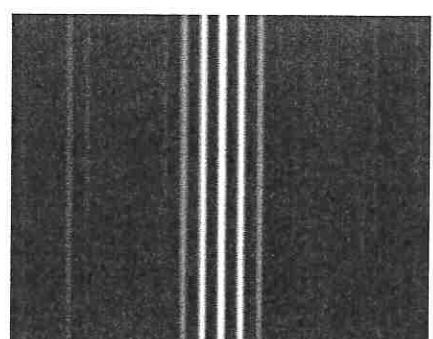
Chaque fente présente une figure de diffraction ; l'angle $\theta_0 \approx \lambda/a$ qui donne la première annulation est le demi-angle au sommet du cône de lumière.

Le maximum de diffraction (tache centrale) de chaque fente se trouve dans la direction de l'optique géométrique, donc en O , grâce à L_2 .

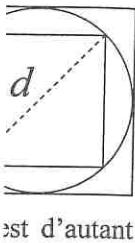
* largeur de la tache centrale de diffraction sur l'écran : $\Delta x \approx 2\theta_0 f' = \frac{2\lambda f'}{a}$ où a est la largeur des fentes

* l'interfrange est : $i = \frac{\lambda f'}{l}$ où l est la distance entre les deux sources $S_1 S_2$ (avec $l > a$)

d'où le nombre de franges d'interférences à l'intérieur du pic central de diffraction :



$\left(\frac{d}{l}\right)^2$. Le pic de estimation $\frac{5\pi}{2}$, ce qui $= 0,016$.



est d'autant

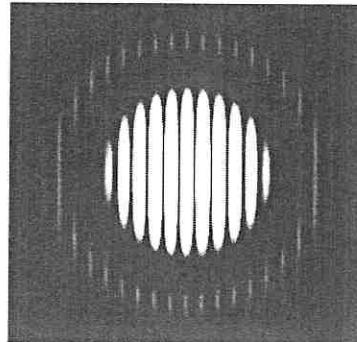
à plan focal lentille de



$$N = \frac{\Delta x}{i} = \frac{2l}{a} = 10 \text{ franges}$$

(en théorie $N = 1 + E\left(\frac{\Delta x/2}{i}\right) = 9$ franges, un nombre impair puisque la fringe du centre est brillante, et sur la figure ci-dessus n'en apparaissent que 7 car les zéros de diffraction en rognent une sur chaque bord...).

Dans l'expérience des trous d'Young, les franges d'interférences rectilignes (perpendiculaires à l'axe des trous) s'inscrivent dans la figure de diffraction des trous, et pour la partie la plus visible (même avec un laser) dans la tache d'Airy centrale (figure ci-contre).



52. Choisissons l'origine des phases sur l'onde provenant du centre de S_1 ; l'amplitude diffractée par le système dans la direction θ du vecteur \vec{k} est alors :

$$\underline{A}(\theta) = A_s \int_{-a/2}^{a/2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} dS + A_s \int_{-l-a/2}^{-l+a/2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} dS$$

ce qui sans calcul pour A_1 et à l'aide du théorème de translation pour A_2 donne :

$$\underline{A}(x) = A_0 \frac{\sin u}{u} \cdot e^{i\theta} + A_0 \frac{\sin u}{u} \cdot e^{-i\varphi} = A_d (1 + e^{-i\varphi}) \quad \text{avec } A_d = A_0 \frac{\sin u}{u}$$

et $u = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \approx \frac{\pi a x}{\lambda f'} \approx \frac{\pi a x}{\lambda f}, \varphi = \vec{k} \cdot \vec{l} = \frac{2\pi l \sin \theta}{\lambda} \approx \frac{2\pi l x}{\lambda f'} \quad (\text{ou encore } \varphi = \frac{2\pi \delta}{\lambda} \dots)$

$$\text{Alors l'intensité est } I(x) = 2I_d(x)(1 + \cos \varphi(x))$$

ce qui est la formule des interférences compte tenu de la diffraction.

Rq : Si la source S n'est pas ponctuelle ou pas monochromatique, il faut y rétablir le facteur de visibilité : $I(x) = 2I_d(x)(1 + V(x) \cos \varphi(x))$.

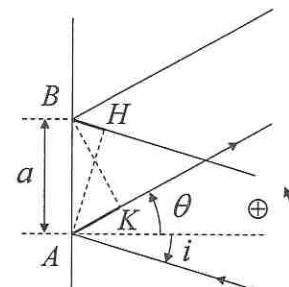
53. La formule du réseau $\sin \theta = \sin \theta_0 + Kn\lambda$ avec $\theta_0 = 0$ donne $n = \frac{\sin \theta}{K\lambda}$. Il faut convertir les angles en degrés décimaux d'où $n = 547$ traits/mm.

En traduisant $\sin \theta \leq 1$, il vient $K \leq 3,3$, ce qui permet de voir les 7 ordres suivant : -3, -2, -1, 0, 1, 2 et 3.

Pour la raie bleue, écrire la formule pour le même ordre $K = 2$ que le vert, d'où sans passer par n : $\lambda' = \lambda \sin \theta'_2 / \sin \theta_2 = 492 \text{ nm}$.

54. a) Considérons deux points A et B du disque distants du pas a du réseau.

Par rapport au rayon arrivant en A , le rayon arrivant en B est en retard de HB correspondant algébriquement à $a \sin i < 0$ (car $i < 0$).



Par rapport au rayon quittant A , le rayon quittant B est en avance de AK correspondant algébriquement à $a \sin \theta > 0$ (car $\theta > 0$).

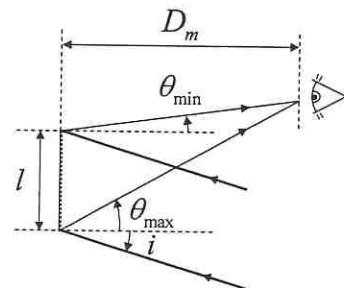
La différence de marche totale est $\delta = a(\sin \theta + \sin i)$.

Les interférences sont constructives (maximum d'intensité) pour $\delta = k\lambda$, ce qui conduit la formule du réseau par réflexion : $\sin \theta + \sin i = k\lambda/a$

On note que l'ordre $k=0$ est obtenu dans la direction $\theta=-i$ de la réflexion prévue par l'optique géométrique.

AN : Pour le bleu $\lambda = 0,4 \mu\text{m}$, $\underline{\theta_{\min} = 25,1^\circ}$;

pour le rouge $\lambda = 0,8 \mu\text{m}$, $\underline{\theta_{\max} = 42,3^\circ}$.



- b) À une distance trop faible du CD, l'œil n'a pas le champ nécessaire pour percevoir la totalité du spectre. Le rouge et le bleu sont perçus simultanément à la distance minimale D_m lorsque chacune des couleurs provient d'une extrémité de la partie enregistrée. La figure montre clairement que :

$$D_m \tan \theta_{\max} = D_m \tan \theta_{\min} + l \Rightarrow \underline{D_m = \frac{l}{\tan \theta_{\max} - \tan \theta_{\min}} \approx 7,5 \text{ cm}}$$

Questions de réflexion ; physique pratique

55. Le résultat « lumière + lumière = $4 \times$ lumière » (frange brillante) et surtout le résultat « lumière + lumière = obscurité » (frange sombre) sont surprenants et peu fréquents dans la vie quotidienne où les éclairements ne sont pas cohérents (et donc simplement « lumière + lumière = $2 \times$ lumière »). De même la taille des objets courants (très grande devant la longueur d'onde) favorise l'application des lois de l'optique géométrique et en particulier du principe de propagation rectiligne de la lumière dans les milieux homogènes, et donc tout phénomène de diffraction paraît paradoxal. L'optique géométrique fondée sur la notion de rayons lumineux, en ignorant la notion d'ondes, est impuissante à les expliquer.

Attention à l'utilisation abusive courante du mot « interférence » ; ainsi, en montant dans un avion, on s'entend dire : « Veuillez éteindre vos téléphones portables qui risquent « d'interférer » avec les appareils de commande à bord ». Cela signifie simplement que des signaux se superposent (l'un brouille l'autre) mais sans interférer au sens physique du terme puisqu'ils ne sont pas cohérents entre eux...

56. Superposons deux ondes de pulsation ω_1 et ω_2 ; l'amplitude résultante est :

$$A = a_1 \cos(\omega_1 t) + a_2 \cos(\omega_2 t + \phi)$$

où ϕ est le déphasage spatial au point d'observation M .

Dans A^2 , remplaçons le produit des cosinus par une somme :

$$A^2 = a_1^2 \cos^2(\omega_1 t) + a_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \phi) + a_1 a_2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \phi) + a_1 a_2 \cos((\omega_1 + \omega_2)t + \phi)$$

Le passage à la valeur moyenne temporelle donne :

74. Dans les deux cas, la puissance de la diode laser utilisée est de l'ordre de 5 mW et la longueur d'onde se situe dans la fourchette de 770 à 810 nm, ce qui n'est plus guère visible puisqu'au début de l'infrarouge.

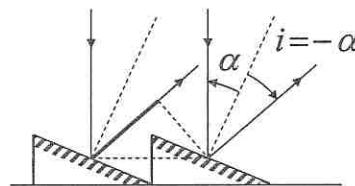
Les diodes bleues émettent une lumière de longueur d'onde en gros moitié de celle des diodes précédentes ; la diffraction est donc deux fois moindre, et comme il s'agit d'un problème bidimensionnel (un faisceau doit lire les informations sur la surface d'un disque gravé), la résolution du « blue ray » est quatre fois supérieure à celle d'une diode rouge classique, ce qui permet aux DVD HD (pour Haute Définition) ainsi lus de stocker quatre fois plus d'informations.

75. La résolution d'un télescope de diamètre D est liée à la diffraction en λ/D ; la résolution en ondes radio ($\lambda = 21 \text{ cm}$) est donc nettement moins bonne qu'en ondes lumineuses ($\lambda \approx 0,5 \mu\text{m}$). L'intérêt cependant des ondes radio à $\lambda = 21 \text{ cm}$ est d'exister, d'être peu perturbées par la traversée de l'atmosphère, de permettre aux radioastronomes de travailler de jour (il n'y a pas de perturbation vers 1,4 GHz) ; de plus, la réalisation de tel gros télescope à $\lambda/20$ près, soit à 1 cm, ne pose aucun problème de fabrication (un simple grillage métallique de maille inférieure à λ suffit, et ceci sur une surface énorme focalisée vers un foyer récepteur).

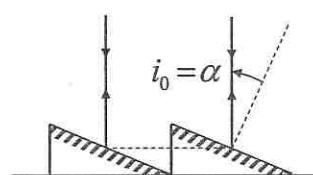
L'amélioration de la résolution s'effectue en associant plusieurs antennes en parallèle de manière à constituer un réseau et produire des interférences à N ondes comme au radiotélescope de Nançay. C'est d'ailleurs pour la même raison que la réception domestique d'ondes hertziennes télévisées s'effectue avec des antennes (sur les toits) en forme de « râteau ».

76. Considérons un motif de ce réseau constitué par deux seules facettes décalées de e . Les deux rayons renvoyés dans la direction de l'optique géométrique interfèrent destructivement puisqu'en opposition de phase ; en effet, leur différence de marche est de $2e = \lambda/2$. Il n'y a donc pas d'intensité lumineuse renvoyée dans la direction de l'optique géométrique !

77. a) L'amplitude diffractée par une facette est maximale dans la direction de la réflexion $i_d = -\alpha$ prévue par l'optique géométrique. Dans cette direction, la différence de marche entre deux ondes de facettes successives (en gras sur la figure) dépend des paramètres du réseau (elle vaut $\delta = h \sin 2\alpha$) ; les interférences peuvent être constructives ou destructives.



- b) Pour un faisceau arrivant normalement au plan du réseau il n'y a pas de différence de marche à l'arrivée entre deux facettes successives. Il en est de même si le faisceau repart dans la même direction, soit $i_0 = \alpha$, ce qui ne correspond évidemment pas à la direction de l'optique géométrique des facettes ! (mais à celle du plan du réseau). La diffraction n'est pas maximale dans cette direction, qui peut même correspondre à un zéro de la diffraction. La caractéristique de l'ordre $K=0$ est de ne pas être dispersif ($\delta = K\lambda = 0, \forall \lambda$).



c) Pour la lumière la largeur apparente d'une facette, soit $a \cos \alpha$ (et qui gouverne la diffraction) est égale au pas h du réseau (qui gouverne les interférences) ; on en déduit que la demi-largeur du pic central de diffraction est égale à la distance entre deux ordres d'interférence. Et donc qu'avec un bon choix des paramètres, la diffraction peut éliminer l'ordre d'interférence $K = 0$ non dispersif (donc sans intérêt) ; le maximum de lumière prévue par la diffraction dans la direction de l'optique géométrique correspond alors à un ordre dispersif $K \neq 0$. Contrairement au réseau par transmission, ici, dispersion et luminosité peuvent s'obtenir simultanément ; c'est l'intérêt du réseau par réflexion.

78. Si interférence et diffraction peuvent toutes les deux d'un point de vue théorique se décrire par le principe d'Huygens-Fresnel, on observe dans la pratique la différence suivante :

- les interférences sont recherchées (et on a vu que les conditions d'obtention ne sont pas faciles) car utiles pour la métrologie lorsque la micromécanique a atteint ses limites (question 46.), la spectrométrie par transformée de Fourier (largeur de raie), les mesures de défaut (questions 40. et 83.), d'indice de réfraction (interféromètre de Rayleigh), de distance angulaire entre étoiles (méthode de Fizeau, question 42.), la vélodimétrie laser (question 82.), interférométrie pour la détection d'ondes gravitationnelles, filtres interférentiels, holographie,...
- la diffraction est présente dès que l'on limite l'ouverture d'une onde, par effets de bord, c'est-à-dire toujours (question 32.) ; elle accompagne inévitablement la formation des images et apparaît, lorsque les aberrations géométriques et chromatiques ont été réduites devant elle, comme la limite naturelle à la notion d'image ponctuelle, ce qui en fait une gêne, voire une difficulté. Elle est bien sûr utile et même recherchée dans d'autres domaines (voir la question 65.).

Exercices

79. Influence de l'incidence sur une lame à faces parallèles (*)

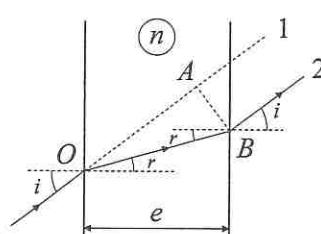
Le rayon rectiligne OA_1 dans l'air est celui en absence de la lame. Le rayon doublement réfracté OB_2 (les deux extrémités étant parallèles) est celui qui passe dans la lame d'indice n . Jusqu'en O leur trajet est commun, et à partir du plan d'onde AB , il n'y a pas de différence de marche supplémentaire. La variation $\Delta\delta$ de la différence de marche introduite par la lame sur le trajet dans l'air est donc :

$$\Delta\delta = nOB - OA = n \frac{e}{\cos r} - \frac{e}{\cos r} \cos(i - r)$$

Il vaut mieux choisir ce plan d'onde « intérieur » qui coupe la lame sur le rayon 2 plutôt que le plan d'onde « extérieur » et parallèle, qui coupe la lame sur le rayon 1...

Par ailleurs les réfractions se font suivant la loi des Descartes-Snell : $\sin i = n \sin r$

$$\text{Alors : } \Delta\delta = n \frac{e}{\cos r} - \frac{e}{\cos r} (\cos i \cos r + \sin i \sin r) = n \frac{e}{\cos r} (1 - \sin^2 r) - e \cos i$$



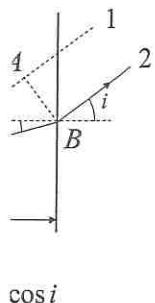
i gouverne la
nances) ; on en
listance entre
aramètres, la
f (donc sans
direction de
l'contrairement
nt s'obtenir

théorique se
la différence

nition ne sont
a atteint ses
geur de raie),
terféromètre
question 42.),
tion d'ondes

par effets de
tablement la
métriques et
à la notion
est bien sûr

e. Le rayon
lui qui passe
artir du plan
iation $\Delta\delta$ de
nc :



$$\text{soit } \Delta\delta = \left(n\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}} - \cos i \right) e$$

ce qui pour $i = 0$ redonne le résultat classique $\Delta\delta = (n-1)e$

La fonction $\Delta\delta(i)$ est paire (i et $-i$ conduisent évidemment au même problème) ; dans le développement, le premier terme à conserver par rapport à $\Delta\delta(i=0)$ est donc en i^2 :

$$\Delta\delta \approx \left[n\left(1 - \frac{i^2}{2n^2}\right) - \left(1 - \frac{i^2}{2}\right) \right] e \quad \text{et finalement} \quad \Delta\delta = \left(1 + \frac{i^2}{2n}\right)(n-1)e$$

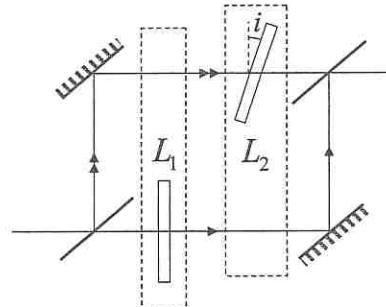
80. Interféromètre de Mach Zendher

En décalant les lames pour bien montrer qu'il s'agit, comme à la question précédente, de comparer le chemin dans la lame au chemin dans l'air, la différence de marche totale trajet (2) – trajet (1) (attention aux signes) est :

$$\delta(i) = \Delta\delta_2 - \Delta\delta_1 = \Delta\delta(i) - \Delta\delta(0) = \frac{n-1}{2n} ei^2$$

Les ondes sont cohérentes entre elles (interféromètre à division d'amplitude) et la formule des interférences s'applique pour l'éclairement sur E :

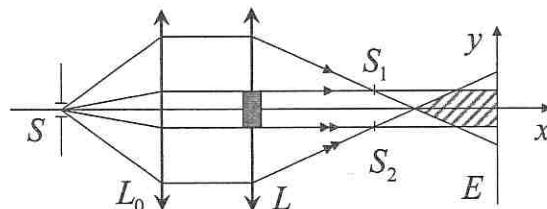
$$I(i) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta(i)}{\lambda} \right)$$



Elle montre que l'éclairement est uniforme pour toute valeur de i . Au départ, $i = 0$, l'écran est brillant (l'éclairement est maximal car les faisceaux sont en phase par symétrie). Lorsque i augmente, l'éclairement diminue jusqu'à s'annuler la première fois pour i_1 tel que $\delta(i_1) = \lambda/2$ (les ondes sont en opposition de phase entre S_2 et E) et l'écran est sombre, soit pour $i_1 = \sqrt{n\lambda/(n-1)e} = 2,87 \cdot 10^{-2}$ rad = $1^\circ 39'$. En continuant d'augmenter i , l'écran est alternativement brillant et sombre ; l'éclairement est nul pour les angles i_p tels que $\delta(i_p) = (2p-1)\lambda/2$, soit $i_p = \sqrt{2p-1}i_1$. Et donc en augmentant régulièrement l'angle i , l'éclairement sur l'écran « clignote » et ce de plus en plus vite puisque i_p est en $\sqrt{2p-1}$.

81. Bilentilles à obturation

Il faut avant tout faire une figure soignée avec deux faisceaux de part et d'autre de l'axe Sx (un rayon passant par le centre, même décalé, d'une lentille, n'est pas dévié !).



a) L'onde plane issue de la lentille L_0 converge après les deux demi-lentilles formées à partir de L aux deux « demi-foyers » notés S_1 et S_2 , car ces deux points servent de sources cohérentes au système d'interférence. Ce sont les sources secondaires au sommet chacune d'un faisceau lumineux ; le recouvrement de ces faisceaux délimite la zone d'interférence hachurée sur la figure. L'ensemble est équivalent à deux trous d'Young S_1 et S_2 , et les franges sont des segments de droite dans la direction Ez .

La largeur du champ d'interférence sur l'axe Ey donc simplement $2\varepsilon = 2 \text{ mm}$.

L'analogie avec les trous d'Young évite tout calcul ; la différence de marche en un point M du champ s'obtient par analogie :

$$\delta = \frac{\alpha x}{D}, \text{ soit avec les notations d'ici : } \delta(M) = S_2 M - S_1 M = \frac{2\varepsilon y}{d-f}$$

d'où l'intensité :
$$I(y) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{2\varepsilon y}{d-f} \right)$$

L'interfrange est $i = \frac{\lambda D}{a} = \frac{\lambda(d-f)}{2\varepsilon} \approx 0,074 \text{ mm}$ (les franges ne sont pas visibles à l'œil).

Le nombre de franges est : $N = \frac{2\varepsilon}{i} = \frac{(2\varepsilon)^2}{\lambda(d-f)} = 27$ (formule homogène)

Rq 1 : En augmentant la taille 2ε du cache, on augmente d'autant la largeur du champ d'interférence en diminuant d'autant l'interfrange (car S_1 et S_2 s'écartent) ; il n'est donc pas étonnant que N soit en $(2\varepsilon)^2$.

Rq 2 : Pour évaluer plus correctement N , il conviendrait de rajouter à la frange centrale brillante, le nombre (entier) de franges brillantes de part et d'autre de l'axe soit : $N = 1 + 2 \times E\left(\frac{\varepsilon}{i}\right) = 1 + 2 \times 13 = 27$.

b) Soit y_0 l'ordonnée du point où se produirait la première anticoïncidence et à laquelle correspond δ_0 . On a $\delta_0 = p_0 \lambda_1 = (p_0 - 1/2) \lambda_2$ où p_0 est l'ordre entier soit :

$$\underline{p_0} = \frac{\lambda_2}{2\Delta\lambda} = \underline{491 \text{ franges}}$$

Or il y a seulement 13 franges dans le champ de chaque côté ; ce phénomène n'est donc pas visible (pas de problème d'incohérence temporelle) et le doublet se comporte comme une radiation monochromatique ($\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$).

c) Placer une lame à faces parallèles sur le trajet 2 revient sur l'écran à translater le système de franges (voir la question 38.) ; il faut que $\delta = (n-1)e = p_0 \lambda_1$, soit :

$$\underline{e} = \frac{p_0 \lambda_1}{n-1} \approx \underline{0,56 \text{ mm}}$$

L'éclairage de l'écran est alors uniforme puisque le contraste à cet endroit est nul.

lentilles formées
ix points servent
rces secondaires
le ces faisceaux
est équivalent à
le droite dans la

$2\varepsilon = 2 \text{ mm}$.
de marche en un

$$= \frac{2\varepsilon y}{d-f}$$

sont pas visibles

iogène)

nt la largeur du
(car S_1 et S_2

uter à la frange
e part et d'autre

cidence et à la-
ire entier soit :

hénomène n'est
t le doublet se
).

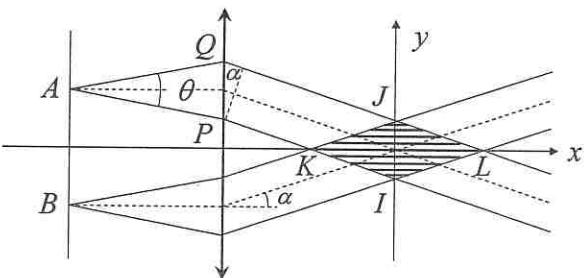
n à translater le
 $p_0\lambda_1$, soit :

et cet endroit est

82. Vélocimétrie laser

a) Vu les ordres de grandeur, il n'est pas possible de faire un dessin à l'échelle.

Les sources cohérentes A et B étant dans le plan focal objet de la lentille, celle-ci transforme les faisceaux divergents en faisceaux parallèles. Le losange $IJKL$ de recouvrement délimite la zone d'interférence. À noter qu'il s'agit d'interférences entre ondes planes, et donc dans le plan de la figure, les franges sont des segments de droite $y = \text{cste}$.



L'angle α est donné par $\tan \alpha = \frac{a}{2f'} \Rightarrow \alpha \approx 10^{-2} \text{ rad} = 0,58^\circ = 34'$. Vu la faible valeur de α , on a $IJ \approx PQ = 2f' \tan \frac{\theta}{2} \approx f'\theta = 8,7 \text{ mm}$ et $KL \approx \frac{IJ}{\alpha} = 87 \text{ cm}$.

b) Notons d'abord que les chemins optiques (AF') et (BF') sont identiques par stigmatisme de la lentille (ou par symétrie du système par rapport à Ox). A et B étant en phase, on en déduit que le déphasage des deux ondes est nul en F' .

Le déphasage des deux ondes planes de vecteurs d'onde $\vec{k}_A = k(\cos \alpha \vec{u}_x - \sin \alpha \vec{u}_y)$ et $\vec{k}_B = k(\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_y)$ en un point M est alors donné par :

$$\varphi(M) = \vec{k}_B \cdot \overrightarrow{F'M} - \vec{k}_A \cdot \overrightarrow{F'M} = (\vec{k}_B - \vec{k}_A) \cdot \overrightarrow{F'M} \text{ qui vérifie bien } \varphi(F') = 0$$

soit
$$\boxed{\varphi(M) = 2k \sin \alpha \cdot y = \frac{4\pi \sin \alpha}{\lambda} y}$$

Une autre méthode est développée à la question 44. Ce déphasage est indépendant de x , ce qui confirme que les franges sont des plans $y = \text{cste}$.

La formule des interférences s'écrit alors :

$$I(y) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi \sin \alpha}{\lambda} y \right) \text{ du type } I(y) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{i} \right)$$

donnant l'interfrange
$$\boxed{i = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha} \approx \frac{\lambda}{2\alpha}}$$

AN : $i = 31 \mu\text{m}$ invisible à l'œil nu (mais ce n'est pas le but du dispositif).

Rq : Avec $\tan \alpha \approx \alpha = \frac{a}{2f'}$, on retrouve $i = \frac{\lambda f'}{a}$ comme pour les trous d'Young !

c) Si le mouvement de la particule entraînée par le fluide est $y(t) = y_0 + vt$, le détecteur capte l'intensité $I'(t) = KI(y) = 2KI_0 \left(1 + \cos 2\pi \frac{y_0 + vt}{i} \right)$, ce qui est une réplique temporelle des franges spatiales.

Ceci suppose néanmoins que la taille de la particule soit inférieure à l'interfrange (mais la quantité de lumière diffusée est alors faible), car dans le cas contraire, la particule « intègre » toute la lumière qu'elle reçoit et la lumière globalement diffusée donne lieu à un éclairement bien moins contrasté voire quasi constant.

Ce signal en $\cos\left(\varphi_0 + \frac{2\pi t}{T}\right)$ est périodique de période $T = \frac{i}{v} = \frac{\lambda f'}{av}$

Cela représente simplement le temps que met la particule de vitesse v pour parcourir la distance i entre deux franges brillantes successives.

AN : à la fréquence $f = 1/T = 950$ Hz correspond la vitesse du fluide $v = 3 \text{ cm.s}^{-1}$

- d) Alors $I'_{total}(t) = \sum_{n=1}^N 2KI_0 \left(1 + \cos 2\pi \frac{y_n(t)}{i}\right)$, et pour une concentration trop importante, sachant que les particules sont aléatoirement réparties sur l'axe y , les $\cos 2\pi \frac{y_n(t)}{i}$ prennent à tout instant une distribution aléatoire entre -1 et $+1$ d'où $\sum_{n=1}^N \cos 2\pi \frac{y_n(t)}{i} \approx 0$ et $I'_{total}(t) = N2KI_0$. Cet éclairement est alors certes important (par la présence de N), mais constant au cours du temps. Le système perd son intérêt puisque la mesure de la vitesse v du fluide devient impossible.

83. Interféromètre de Twyman

- a) Les miroirs sont éclairés par un faisceau de lumière quasi parallèle ; on observe des franges d'égale épaisseur, non localisées si S était ponctuelle, et localisées près du miroir M_2 dès que la source est un peu étendue (sans perte de cohérence spatiale). Par raison de symétrie autour de l'axe, les franges sont des anneaux centrés sur A_2 . Pour une observation sur l'écran E , la lentille convergente L_2 doit conjuguer M_2 et E .

- b) Un dessin à l'échelle n'est pas possible ; bien se rendre compte que R est très grand et que θ est petit et donc $r \ll R$ et $e \ll R$.

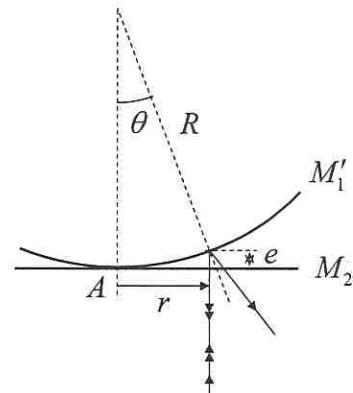
La différence de marche entre les deux rayons émergeants obtenus à partir d'un même incident par réflexion sur M_2 et M'_1 , symétrique de M_1 par rapport à la séparatrice, est, à des termes du second ordre près, $\delta \approx 2e$.

$$\text{Or } e = R(1 - \cos \theta) \approx R \frac{\theta^2}{2} \approx \frac{r^2}{2R} \text{ car } \theta \approx \frac{r}{R}$$

d'où pour le $k^{i\text{ème}}$ anneau brillant de rayon r_k :

$$\delta = 2e = \frac{r_k^2}{R} = k\lambda \Rightarrow r_k = \sqrt{k\lambda R}$$

Avec l'éloignement à l'axe, ces anneaux (dits de Newton) sont de plus en plus serrés.



eure à l'interfrange le cas contraire, la mière globalement quasi constant.

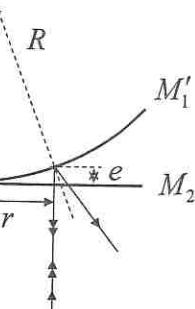
$\lambda f'$
av

de vitesse v pour

fluide $v = 3 \text{ cm.s}^{-1}$

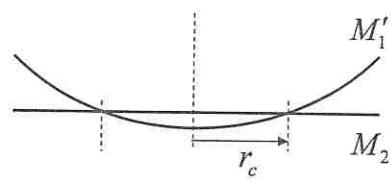
concentration trop
les sur l'axe y , les
entre -1 et $+1$ d'où
rs certes important
système perd son
sible.

le ; on observe des
t localisées près du
cohérence spatiale).
meaux centrés sur
 L_2 doit conjuguer

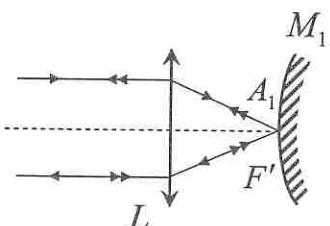


t de plus en plus

- c) Précédemment la frange centrale ($\delta = 0$), brillante, s'obtenait au centre de la figure là où $A_1 = A_2$; à présent, la frange centrale, à « l'intersection » de M'_1 et M_2 , est obtenue pour un anneau de rayon $r_c > 0$. Ceci correspond à un élargissement au cours du déplacement des rayons de tous les anneaux donnant l'impression de naître en A_2 .



- d) L'objectif ou lentille convergente L est placée à une distance de M_1 égale à sa distance focale, soit F' confondu avec A_1 . Si cet objectif est « parfait », les rayons réfléchis sont parallèles aux rayons incidents et, à l'inversion près, l'ensemble lentille + miroir sphérique est équivalent à un miroir plan, comme pour un Michelson habituel. La différence de marche entre les deux bras du Michelson est la même pour tous les rayons (par stigmatisme de la lentille) et l'éclairage sur E (en arrière du foyer de L_2) est uniforme. Alors qu'un défaut d'usinage fait apparaître une modulation de l'éclairage...

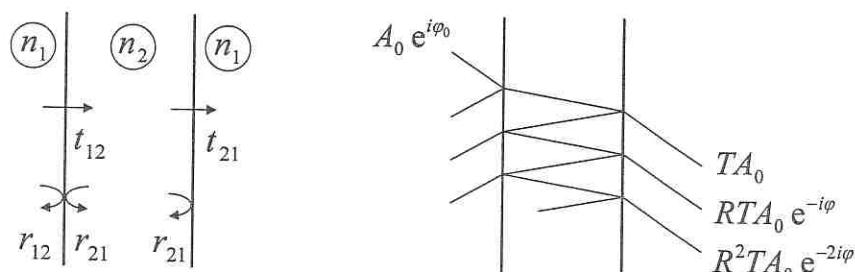


84. Interféromètre de Fabry-Perot

- a) Les notations sont précisées sur le schéma de gauche. Avec les rappels de l'énoncé :

$$r_{21} = -r_{12} \quad \text{et} \quad t_{21} = \frac{n_2}{n_1} t_{12}$$

Au bout de deux réflexions internes, l'amplitude est multipliée par $r_{21}^2 = R$ et au bout de deux transmissions « inverses » elle est multipliée par $t_{12} t_{21} = T$.



Les amplitudes complexes des rayons successifs transmis à travers la lame sont indiquées sur la figure de droite (pour plus de lisibilité, les angles d'incidence ont été augmentés). Il est important de noter que l'origine des phases a été choisie sur la première onde émergeante, et que le déphasage φ entre deux ondes émergentes successives est constant, la lame étant à « faces parallèles ».

Au total, on obtient par division d'amplitude à partir d'une onde incidente, une infinité d'ondes par transmission (ainsi que par réflexion, non étudiées ici). Elles sont cohérentes entre-elles (puisque issues de la même onde) et il faut donc sommer

leurs amplitudes complexes. Les différents rayons émergeants, tous d'amplitude différente et déphasés, sont parallèles entre eux et interfèrent donc à l'infini.

b) L'amplitude complexe résultante est : $\underline{A} = TA_0(1 + R e^{-i\varphi} + R^2 e^{-2i\varphi} + \dots) = \frac{TA_0}{1 - R e^{-i\varphi}}$

(série géométrique convergente car de raison telle que $|Re^{-i\varphi}| < 1$).

L'intensité résultante est $I = K \underline{A} \underline{A}^* = \frac{KT^2 A_0^2}{(1 - R e^{-i\varphi})(1 - R e^{+i\varphi})} = \frac{T^2 I_0}{1 - 2R \cos \varphi + R^2}$

Le dénominateur de cette expression se transforme comme suit :

$$1 - 2R \cos \varphi + R^2 = (1 - R)^2 + 2R(1 - \cos \varphi) = (1 - R)^2 + 4R \sin^2 \varphi / 2$$

$$\text{d'où } I = \frac{T^2}{(1 - R)^2} \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Avec $R + T = 1$ et en posant $m = \frac{4R}{(1 - R)^2}$, l'intensité résultante s'écrit :

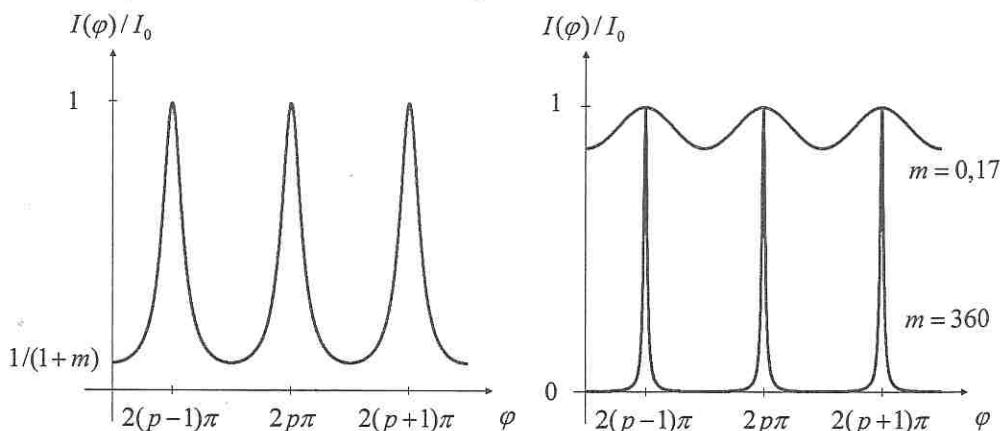
$$\frac{I(\varphi)}{I_0} = \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

C'est la fonction d'Airy

c) AN : Pour la lame de verre $n_2 = 1,5$ dans l'air $n_1 = 1$; $R = 0,04$ et $m = 0,17$ ce qui est très faible.

Pour la lame d'air entre deux miroirs pour lesquels $R = 0,9$ au moins, on a $m = 360$ ce qui est considérablement mieux.

Les graphes de droite montrent clairement que pour $m = 0,17$, les franges sont larges et uniformément brillantes, c'est-à-dire peu contrastées, alors que pour $m = 360$, les franges sont très fines sur un fond quasi sombre.



La courbe $I(\varphi)$ est périodique de période 2π ; elle présente une suite de pics d'autant plus étroits que m est grand (car quand m est grand, $I(\varphi)$ décroît beaucoup plus rapidement en s'éloignant des maxima), d'où l'intérêt du dispositif à

is d'amplitude à l'infini.

$$\therefore \frac{TA_0}{1-R e^{-i\varphi}}$$

$$\frac{I^2 I_0}{\cos \varphi + R^2}$$

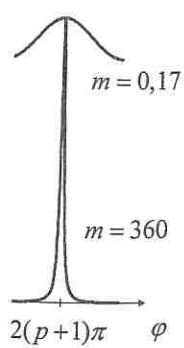
$\varphi/2$

it :

t $m = 0,17$ ce

u moins, on a

es sont larges
our $m = 360$,



suite de pics
 $I(\varphi)$ décroît
du dispositif à

deux miroirs appelé interféromètre de Fabry-Perot. Ces pics correspondent à des franges très brillantes et très fines sur un fond quasi sombre. En effet :

$I_{\max} = I_0$ pour $\varphi = 2p\pi$, $p \in \mathbb{N}^*$; toute la lumière incidente traverse le dispositif et ceci $\forall R$, mais pour une longueur d'onde λ seulement.

$I_{\min} = I_0/(1+m)$ pour $\varphi = (2p+1)\pi$; pour m important l'intensité minimale est quasi nulle.

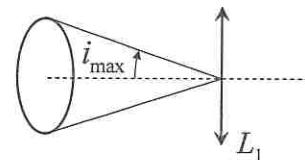
Le graphe de gauche correspond à la valeur $m = 10$.

d) Pour observer des franges, il faut une phase

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{4\pi e \cos i}{\lambda} \quad (n=1)$$

fonction d'un paramètre spatial variable. Dans la pratique on utilise une source étendue afin que l'angle i varie de 0 à i_{\max} .

Les interférences sont localisées à l'infini; on les observe dans le plan focal d'une lentille convergente L_2 . Pour un angle i donné et un faisceau ayant la symétrie de révolution autour de l'axe, on obtient des points équidistants de O , c'est-à-dire un système d'anneaux ou franges d'égale inclinaison. Le nombre de franges visibles est déterminé par i_{\max} . Le rayon du $k^{\text{ème}}$ anneau brillant à partir du centre où l'ordre est maximal, est déterminé comme pour un Michelson en lame d'air (voir la question 20.): $r_k = f_2' \sqrt{\frac{k\lambda}{e}}$.



85. Filtre « gris » : apodisation

a) L'intégrale qui donne l'amplitude diffractée dans la direction θ est :

$$\underline{A}(\theta) = A_0 \int_{-a/2}^{a/2} \cos \frac{\pi X}{a} e^{\frac{2i\pi}{\lambda} X \sin \theta} b dX$$

On pose $u = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$ dans l'exponentielle de phase et le cosinus de la transparence est remplacé par une demi-somme d'exponentielles :

$$\underline{A}(u) = A_0 b \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{2} \left(e^{\frac{i\pi X}{a}} + e^{-\frac{i\pi X}{a}} \right) e^{\frac{2iuX}{a}} dX = \frac{A_0 b}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(e^{\frac{2iX(u+\pi/2)}{a}} + e^{\frac{2iX(u-\pi/2)}{a}} \right) dX$$

Rappel : $\int_{-a/2}^{a/2} e^{\frac{2iuX}{a}} dX = a \frac{\sin u}{u}$, cela évite de recalculer ces intégrales obtenues par simple translation.

$$\underline{A}(u) = \frac{A_0 ab}{2} \left[\frac{\sin(u+\pi/2)}{u+\pi/2} + \frac{\sin(u-\pi/2)}{u-\pi/2} \right] = \frac{A_0 ab}{2} \frac{\pi \cos u}{(\pi/2)^2 - u^2} \quad (1)$$

et finalement :
$$\boxed{\underline{A}(u) = \frac{2}{\pi} A_0 ab \frac{\cos u}{1 - (2u/\pi)^2}}$$

Cette amplitude est réelle (car l'origine des phases a été prise sur l'onde provenant du centre et la pupille de diffraction est symétrique). La fonction $\frac{\cos u}{1-(2u/\pi)^2}$ a pour valeur maximale 1, $A_0 ab$ est l'amplitude habituelle sur la surface ab de la fente, mais le coefficient $2/\pi$ (<1) indique que le filtre gris est moins lumineux qu'une fente transparente.

b) D'où l'intensité diffractée :
$$I(u) = I_{\max} \frac{\cos^2 u}{(1-(2u/\pi)^2)^2}$$

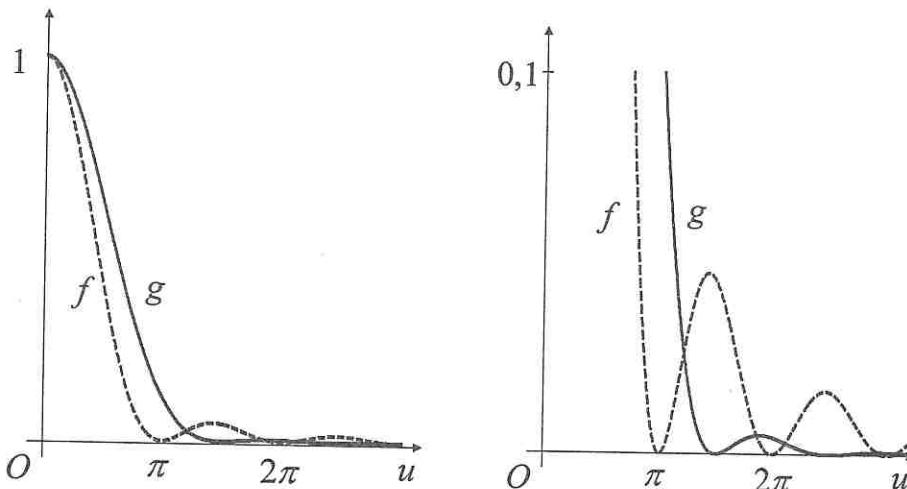
avec la fonction $g(u) = \frac{\cos^2 u}{(1-(2u/\pi)^2)^2}$ à comparer à la fonction $f(u) = \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$
de la diffraction d'une fente transparente de même largeur.

* demi-largeur du pic central :

- pour f : $f(0)=1$ et $f(\pi)=0$; elle vaut π
- pour g : $g(0)=1$ et $g(3\pi/2)=0$; elle vaut $3\pi/2$

(attention : $g(\pi/2)=(\pi/4)^2$; sur l'expression finale, la forme est indéterminée 0/0, mais sur le membre de gauche de l'expression (1), la valeur se trouve facilement).

À cause de la diminution de la transparence sur les bords ($t(X)$ vaut 1 au centre, puis diminue pour s'annuler sur les bords de la fente), la fente étudiée (g) paraît virtuellement moins large que la fente uniformément transparente (f) ; il est donc normal que son pic central de diffraction soit plus large.



Courbes $f(u)$ et $g(u)$; à droite, l'échelle des ordonnées est multipliée par 10.

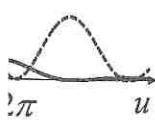
- * La position des minima nuls de g correspond en gros à celle des maxima secondaires de f

onde provenant
 $\frac{\cos u}{1-(2u/\pi)^2}$ à
 rface ab de la
 moins lumineux

$$\hat{r}(u) = \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2$$

t indéterminée
 leur se trouve

$X)$ vaut 1 au
 fente étudiée
 transparente
 large.



liée par 10.

des maxima

* Alors que les maxima secondaires de f sont en $1/u^2$, ceux de g sont en $1/u^4$, donc encore moins marqués. Les « pieds » de la courbe $g(u)$ sont très peu visibles, ce qui justifie la terminologie de « apodisation » (sans pieds). Par rapport à la fente de transparence uniforme, on assiste à une modification de la répartition de l'énergie, presque exclusivement envoyée dans le pic central.

86. Réseau sinusoïdal (*)

a) L'intégrale qui donne l'amplitude diffractée dans la direction θ est :

$$\underline{A}(\theta) = A_0 \int_{-a/2}^{a/2} t_0 \left(1 + m \cos \frac{2\pi X}{p} \right) e^{\frac{2i\pi X \sin \theta}{\lambda}} b dX$$

On pose $u = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$ dans l'exponentielle de phase et le cosinus de la transparence est remplacé par une demi-somme d'exponentielles :

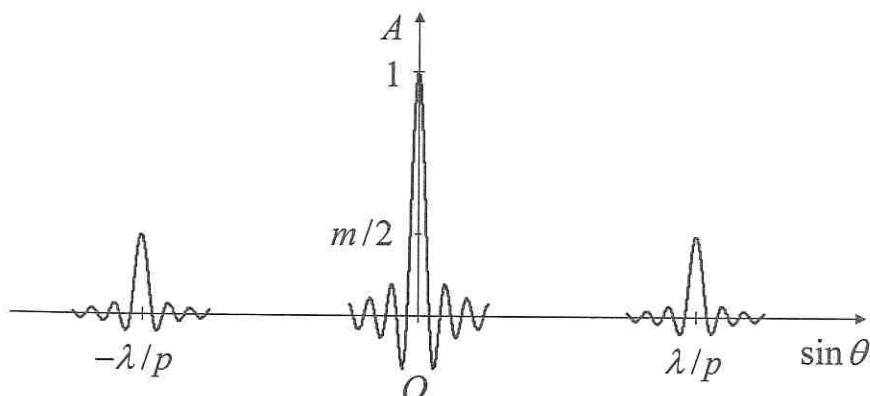
$$\underline{A}(u) = A_0 b t_0 \int_{-a/2}^{a/2} \left[1 + \frac{m}{2} \left(e^{\frac{2i\pi X}{p}} + e^{-\frac{2i\pi X}{p}} \right) \right] e^{\frac{2iuX}{a}} dX$$

$$\underline{A}(u) = A_0 b t_0 \int_{-a/2}^{a/2} \left(e^{\frac{2iuX}{a}} + \frac{m}{2} e^{\frac{2iX(u+\pi a)}{p}} + \frac{m}{2} e^{\frac{2iX(u-\pi a)}{p}} \right) dX$$

Rappel : $\int_{-a/2}^{a/2} e^{\frac{2iuX}{a}} dX = a \frac{\sin u}{u} = a \text{sinc}(u)$ où sinc est la fonction sinus cardinal ; cela évite de recalculer ces intégrales obtenues par simple translation.

$$\boxed{\underline{A}(u) = A_0 a b t_0 \left[\text{sinc}(u) + \frac{m}{2} \text{sinc}\left(u + \pi \frac{a}{p}\right) + \frac{m}{2} \text{sinc}\left(u - \pi \frac{a}{p}\right) \right]}$$

Cette amplitude est réelle (car l'origine des phases a été prise sur l'onde provenant du centre et la pupille de diffraction est symétrique) ; on peut représenter $A(\sin \theta)$



Ceci permet effectivement de distinguer trois ordres :

- l'ordre 0, d'amplitude 1 et centré en $u=0$, soit $\sin \theta=0$; la première annulation se situe en $\sin \theta = \lambda/a$ (résultat classique pour une largeur a)

- les ordres ± 1 , d'amplitude $m/2$ et centrés en $u = \pm \pi a/p$, soit $\sin \theta = \pm \lambda/p$; le pas p du réseau étant petit devant sa largeur a ($p \ll a$), soit $\lambda/p \gg \lambda/a$, ces ordres latéraux n'empiètent pas sur l'ordre 0.

b) Écrivons symboliquement l'amplitude sous la forme $A = A_0 + A_1 + A_{-1}$

L'intensité est alors :

$$I = K(A_0 + A_1 + A_{-1})^2 = I_0 + I_1 + I_{-1} + 2K(A_0A_1 + A_1A_{-1} + A_{-1}A_0)$$

Le graphe ci-dessus montre clairement que les doubles produits sont quasi inexistantes car dans toute direction θ , l'une au moins des fonctions est quasi nulle.

$$\text{d'où } I(u) = I_0(u) + I_1(u) + I_{-1}(u)$$

On observe donc au centre une tache lumineuse (l'ordre 0), et de part et d'autre, deux taches de moindre luminosité (les ordres ± 1).

c) L'ordre 0 est dans la direction $\theta = 0$ de l'optique géométrique et ceci pour toute longueur d'onde : il n'est pas dispersif.

En revanche, si l'on considère deux longueurs d'onde proche λ et $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$, l'ordre +1 est obtenu dans des directions différentes puisque $\sin \theta = \lambda/p$; cet

ordre est dispersif et l'écart angulaire vaut $\Delta_1(\sin \theta) = \frac{\Delta\lambda}{p}$.

$$\text{La demi-largeur de chacun de deux pics est de } \Delta_2(\sin \theta) = \frac{\lambda}{a}$$

$$\text{La limite de résolution est donnée par le critère de Rayleigh : } \Delta_1 = \Delta_2 \Rightarrow \frac{\lambda}{a} = \frac{\Delta\lambda}{p}$$

$$\boxed{\text{d'où la résolution : } R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{a}{p}}$$

Avec $p \ll a$, on a $R \gg 1$ ce qui est souhaitable. Par ailleurs le rapport a/p représente le nombre N de motifs du réseau, on retrouve ainsi l'expression connue $R = KN$ avec ici l'ordre $K = 1$.

87. Diffraction d'une fente avec lame déphasante (*)

a) Sur la largeur $2a$ de la fente, on a la juxtaposition de deux demi-fentes de même largeur a , l'une (notée 1) habituelle et l'autre (notée 2) comportant la lame déphasante. Les ondes issues de ces deux parties étant cohérentes, il faut sommer leur amplitudes complexes.

Choisissons l'origine des phases sur le rayon provenant du centre C_1 de la fente 1 ; son amplitude diffractée est alors réelle et s'écrit avec la variable $u = \pi a \sin \theta / \lambda$:

$$A_1(u) = \frac{A_0}{2} \frac{\sin u}{u} \cdot e^{i\phi}$$

L'amplitude diffractée par la fente 2, de même taille, est similaire à la précédente,

$$\text{mais subit deux déphasages : } A_2(u) = \frac{A_0}{2} e^{i\phi} \frac{\sin u}{u} \cdot e^{i\nu}$$

– l'un de ϕ , induit par le retard engendré par la présence de la lame

soit $\sin \theta = \pm \lambda / p$;
soit $\lambda / p \gg \lambda / a$,

$+ A_{-1}$

$+ A_{-1}A_0)$

produits sont quasi nuls est quasi nulle.

de part et d'autre,

et ceci pour toute

λ et $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$,
 $\sin \theta = \lambda / p$; cet

$= \Delta_2 \Rightarrow \frac{\lambda}{a} = \frac{\Delta\lambda}{p}$

le rapport a/p
expression connue

di-fentes de même
important la lame
es, il faut sommer

C_1 de la fente 1 ;
 $u = \pi a \sin \theta / \lambda$:

é à la précédente,

ne

l'autre ψ , un retard également, car son centre C_2 est distant de a de C_1 , origine des phases, d'où $\psi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta = 2u$ (c'est le théorème de translation...)

L'amplitude totale est :

$$\underline{A}(u) = \frac{A_0}{2} \frac{\sin u}{u} (1 + e^{i(2u+\phi)})$$

L'intensité diffractée est alors :

$$I(u) = \frac{I_0}{2} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot (1 + \cos(2u + \phi))$$

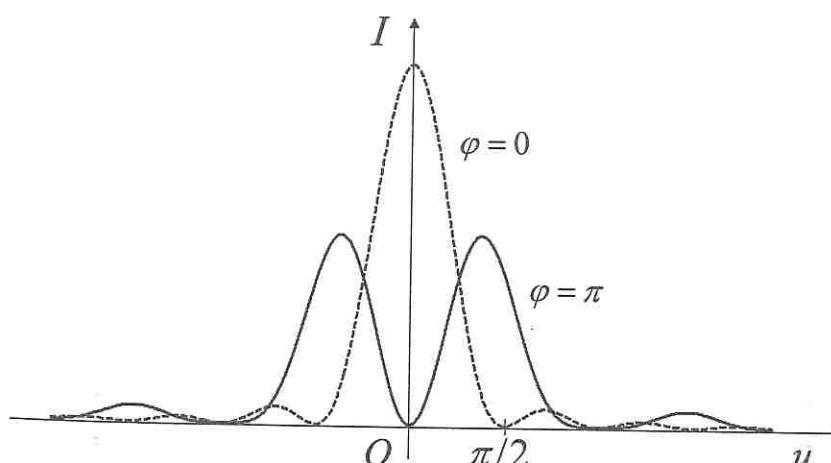
Cette écriture sous la forme du produit de deux fonctions met bien en évidence le facteur lié à la diffraction de chaque demi-fente et le facteur lié à leur interférence, avec ici comme cas particulier le fait que la distance des demi-fentes soit égale à la largeur de chacune d'entre-elles (d'où $\psi = 2u$!).

Le cas particulier $\phi = 0$ donne $I_{\phi=0}(u) = \frac{I_0}{2} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot 2 \cos^2 u = I_0 \left(\frac{\sin 2u}{2u} \right)^2$, ce qui est, sans surprise, l'intensité diffractée par une fente habituelle de largeur $2a$.

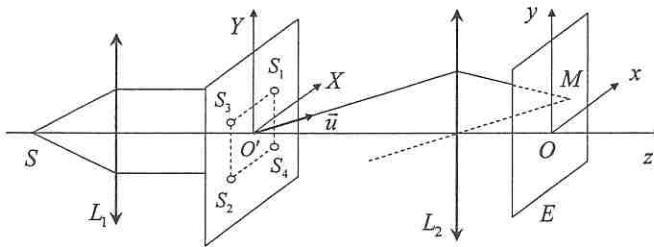
b) Le cas particulier $\phi = \pi$ donne $I_{\phi=\pi}(u) = \frac{I_0}{2} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot (1 - \cos 2u)$; ceci fait apparaître que le terme d'interférence est nul dans la direction $\theta = 0$ de l'optique géométrique, ce qui n'est pas courant mais logique pour deux ondes de même amplitude, cohérentes et en opposition de phase.

Le calcul est facile : $I_{\phi=\pi}(u) = \frac{I_0}{2} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot 2 \sin^2 u \Rightarrow I_{\phi=\pi}(u) = I_0 \frac{\sin^4 u}{u^2}$

Le maximum de cette fonction est donné (cela se calcule par simple dérivée) par : $\tan u = 2u$ soit $u_m \approx 1,165 \approx 0,37\pi$ avec $I_{\phi=\pi}(u_m) \approx 0,52$.



88. Interférence à quatre trous diffractants



Le théorème de translation de la pupille affirme que chaque trou diffracte la même amplitude $A_d(\vec{k})$ que s'il était au centre O' (origine des phases), à un simple déphasage près en $\exp i\varphi_i$ où $\varphi_i = \vec{k} \cdot \vec{r}_i$; le vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}$ de norme $2\pi/\lambda$ a pour cosinus directeurs α , β et γ , et $\vec{r}_i = \overrightarrow{O'S}_i$ est la position du trou numéro i .

$\underline{A}_1 = A_d e^{\frac{2i\pi}{\lambda} \left(\frac{\alpha a}{2} + \frac{\beta a}{2} \right)}$, $\underline{A}_2 = A_d e^{\frac{2i\pi}{\lambda} \left(-\frac{\alpha a}{2} - \frac{\beta a}{2} \right)}$, $\underline{A}_3 = A_d e^{\frac{2i\pi}{\lambda} \left(-\frac{\alpha a}{2} + \frac{\beta a}{2} \right)}$ et $\underline{A}_4 = A_d e^{\frac{2i\pi}{\lambda} \left(\frac{\alpha a}{2} - \frac{\beta a}{2} \right)}$. Les ondes issues des différents trous (éclairés par la même onde incidente) étant cohérentes entre elles, il faut sommer les amplitudes complexes ; en associant les deux premières et les deux dernières :

$$\underline{A}(\alpha, \beta) = 2A_d(\alpha, \beta) \left[\cos\left(\frac{\pi a}{\lambda}(\alpha + \beta)\right) + \cos\left(\frac{\pi a}{\lambda}(-\alpha + \beta)\right) \right]$$

$$\underline{A}(\alpha, \beta) = 4A_d(\alpha, \beta) \cos\left(\frac{\pi a \alpha}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{\pi a \beta}{\lambda}\right)$$

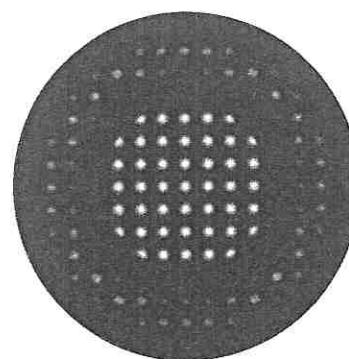
Cette amplitude complexe est réelle par choix de l'origine des phases. L'intensité résultante est donnée par :

$$I(\alpha, \beta) = 16I_d(\alpha, \beta) \cos^2\left(\frac{\pi a \alpha}{\lambda}\right) \cos^2\left(\frac{\pi a \beta}{\lambda}\right)$$

La diffraction étant proche de l'axe, les cosinus directeurs (voir la question 25.) s'expriment simplement en fonction des coordonnées du point M sur l'écran : $\alpha \approx x/f'$ et $\beta \approx y/f'$, d'où :

$$I(x, y) = 4I_d(x, y) \left(1 + \cos \frac{2\pi ax}{\lambda f'} \right) \left(1 + \cos \frac{2\pi ay}{\lambda f'} \right)$$

On distingue au niveau de la fonction d'interférence entre les quatre trous le « produit » de franges rectilignes parallèles à Oy et Ox et dont l'interfrange est commun : $i = \lambda f'/a$. Ne subsiste dans ce produit qu'un quadrillage régulier de points lumineux, à l'intersection des franges brillantes précédentes. Cet ensemble s'inscrit dans la tache d'Airy de la figure de diffraction d'un trou ; en effet, si d est le diamètre de chaque trou avec forcément $d < a$, le diamètre de la tache sur l'écran est $D = 2 \times 1,22 \lambda f' / d$ bien supérieur à l'interfrange i .



89. Le monochromateur à réseau (*)

a) La formule du réseau par réflexion est $\sin \theta = -\sin \theta_0 + Kn\lambda$.

Ici l'angle d'incidence est $\theta_0 = i$ et l'angle de réflexion $\theta = 0$ pour $\lambda = \lambda_0$ dans l'ordre $K = 2$, d'où $i = -30^\circ$.

b) * La résolution intrinsèque liée à la diffraction de la largeur totale éclairée du réseau est donnée par $R = \lambda_0 / \Delta\lambda_i = KN = KnL = 20\,000$. À $\theta = 0$ fixé, l'incertitude sur la longueur d'onde est alors $\Delta\lambda_i = 25 \cdot 10^{-12} \text{ m}$

* À $\theta = 0$ fixé, i , à cause de la largeur de la fente d'entrée, peut varier de $\Delta i \approx a_1 / f'_1$, ce qui par $\sin i = Kn\lambda_0$ correspond à une incertitude $\Delta\lambda_1$ sur λ_0 de : $\cos i \Delta i = Kn\Delta\lambda_1 \Rightarrow \Delta\lambda_1 = 0,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}$

* À $i = -30^\circ$ fixé, θ , à cause de la largeur de la fente de sortie, peut varier de $\Delta\theta \approx a_2 / f'_2$, ce qui par $\sin \theta = -\sin i + Kn\lambda_0$ correspond à une incertitude $\Delta\lambda_2$ sur λ_0 de : $\cos \theta \Delta\theta = Kn\Delta\lambda_2 \Rightarrow \Delta\lambda_2 = 0,4 \cdot 10^{-9} \text{ m}$

Ce sont donc les largeurs des fentes d'entrée et de sortie qui limitent la monochromaticité du dispositif à environ $\Delta\lambda \approx 1 \text{ nm}$, c'est-à-dire que les deux raies jaunes du sodium ne sont pas séparées (ou résolues) ou plus exactement qu'elles passent ensemble...

diffracte la même (ses), à un simple de norme $2\pi/\lambda$ a ou numéro i .

$$A_4 = A_d e^{\frac{2i\pi}{\lambda} \left(\frac{\alpha a}{2} - \frac{\beta a}{2} \right)}$$

le incidente) étant ; en associant les

$$\cdot \beta)$$

phases. L'intensité

la question 25.)
M sur l'écran :

Travaux Pratiques

90. Les réponses sont toutes regroupées dans les tableaux au début des questions.

Le symbole Na sur les lampes à vapeur de sodium vient du nom latin Natrium et le symbole Hg sur les lampes à vapeur mercure vient du nom grec latinisé Hydrargyrum signifiant « argent liquide ».

91. Pour qu'une fente diffracte bien, il faut que sa largeur soit inférieure à $a \approx 0,1 \text{ mm}$.

Pour que l'interfrange ne soit pas trop petit, il faut que les deux fentes ne soient pas séparées de plus de $l \approx 0,5 \text{ mm}$. Cela permet typiquement d'observer à l'œil $N = 2l/a$ soit 10 franges d'interférence dans le pic central de diffraction (le calcul est fait à la question 51.).

Voici ce que l'on observe :

- le pic central de diffraction se rétrécit mais l'interfrange est inchangé : on voit donc moins de franges de même largeur
- l'interfrange diminue mais la largeur du pic central de diffraction est inchangée : on voit donc davantage de franges serrées
- la translation du système laisse la figure inchangée
- la figure étant orthogonale à la direction des fentes, la rotation du système entraîne une rotation identique de la figure
- la figure est alors translatée, son centre étant donné par la nouvelle direction de l'optique géométrique.