

Chapitre 3

ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE ET LES MILIEUX CONDUCTEURS

Les ordres de grandeur utiles

Constantes de la physique

célérité de la lumière dans le vide	$c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \approx 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$
permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 \approx 8,85.10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
charge de l'électron	$-e$ avec $e = 1,6.10^{-19} \text{ C}$
masse de l'électron	$m = 0,9.10^{-30} \text{ kg}$ ($E = mc^2 = 0,51 \text{ MeV}$)
masse du proton	$M = 1,7.10^{-27} \text{ kg} \approx 1850 \text{ m}$

Le cuivre

masse molaire	$M = 63,5 \text{ g.mol}^{-1}$
masse volumique	$\rho \approx 8,9.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
densité volumique de porteurs	$n = \rho N_A/M \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$
conductivité électrique	$\sigma = ne^2\tau/m \approx 5,8.10^7 \text{ S.m}^{-1}$
temps entre deux chocs	$\tau \approx 10^{-14} \text{ s}$
épaisseur de peau $\delta = \sqrt{2/\mu_0\sigma\omega} = 1/\sqrt{\pi\mu_0\sigma f}$	$\delta(50 \text{ Hz}) \approx 1 \text{ cm} ; \delta(50 \text{ MHz}) \approx 10 \text{ }\mu\text{m}$

Le plasma

densité de plasma dans une décharge gazeuse	$n \approx 10^{20} \text{ m}^{-3}$
densité de plasma dans l'ionosphère	$n \approx 10^{12} \text{ m}^{-3}$
pulsation plasma pour l'ionosphère	$\omega_p = \sqrt{ne^2/\epsilon_0 m} ; f_p = \omega_p/2\pi \approx 10 \text{ MHz}$

Notions sur le spectre

photon visible ; X ; γ	$E \approx 1 \text{ eV} ; 1 \text{ keV} ; 1 \text{ MeV}$
ondes radio en MF	$f \approx 100 \text{ MHz}$ et $\lambda \approx 3 \text{ m}$

Pour un tableau plus complet du spectre électromagnétique, voir la page 120.

Le cours d'abord

Structure de l'onde plane progressive monochromatique (OPPM)

1. Déduire des équations de Maxwell les équations d'onde satisfaites par les champs \vec{E} et \vec{B} en gardant les densités ρ et \vec{j} . Qu'obtient-on lorsque $\rho=0$ et $\vec{j}=\vec{0}$?
- Commentaires sur la célérité.
2. Pourquoi dans le vide peut-on prendre un champ électrique complexe de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$? Que signifient ω et \vec{k} ? Par quelle relation sont-ils liés ? Comment avec cette notation se transcrivent les opérateurs de dérivation usuels ?
3. Quelles propriétés sur \vec{E} et \vec{B} en déduit-on en traduisant les équations de Maxwell à divergence ? Quelles autres propriétés sur \vec{E} et \vec{B} en déduit-on en traduisant les équations de Maxwell à rotationnel ?
4. Rassembler les propriétés précédentes dans une représentation spatiale des champs dans le cas d'une propagation suivant Ox^+ .

Aspects énergétiques

5. Quelles sont les précautions à prendre lorsqu'on manipule des grandeurs énergétiques ? Quelles sont les expressions instantanées de la densité volumique d'énergie u et du vecteur de Poynting \vec{R} pour une OPPM ?
6. Si f et g sont deux fonctions sinusoïdales de même pulsation et déphasées, comment s'exprime simplement la moyenne temporelle de leur produit $\langle fg \rangle$ en fonction de leur représentation complexe ? Illustrer cette « formule utile » sur le calcul de la puissance moyenne cédée par le champ à un conducteur, en distinguant le conducteur métallique (loi d'Ohm avec conductivité réelle) et le plasma (loi d'Ohm avec conductivité imaginaire pure) et en déduire des conséquences physiques.
7. Par quels calculs simples accède-t-on directement aux moyennes temporelles de la densité volumique d'énergie u et du vecteur de Poynting \vec{R} ? L'illustrer sur une OPPM et en déduire son intensité (grandeur utile en optique ondulatoire) définie par la moyenne de la puissance surfacique rayonnée.

Polarisation des ondes électromagnétiques

8. Quelle grandeur est concernée par l'étude de la polarisation d'une OPPM ? L'expliciter sur la base d'une OPPM se propageant dans le sens des x croissants.

9. Quels sont les différents états de polarisation possibles ? Comment procéder pour les déterminer ?

10. Quelle sont les deux conditions à vérifier pour avoir un état de polarisation circulaire ? Montrer qu'une onde polarisée rectilignement peut être considérée comme la superposition de deux ondes polarisées circulairement de même amplitude, l'une droite et l'autre gauche.

Changement d'état de polarisation

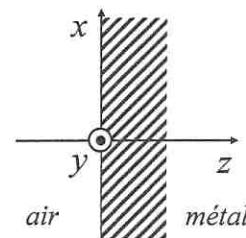
11. Comment fonctionne un polariseur ; quel est son usage ? Rappeler la loi de Malus.

12. Donner le principe de fonctionnement des « lames à retard ».

13. Rappeler l'effet d'une lame demi-onde ou quart d'onde (à définir) sur des états de polarisation simples, rectilignes ou circulaires.

Effet de peau sur un conducteur réel (en ARQS)

14. Le plan $z=0$ sépare l'air ($z < 0$) d'un conducteur métallique ($z > 0$) de conductivité électrique σ et suivant le loi d'Ohm. Si l'onde incidente a un champ électrique $\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$, comment choisir *a priori* le champ transmis \vec{E}_t dans le conducteur ?



15. Justifier les deux approximations faites dans l'écriture des équations de Maxwell dans le conducteur. Quelle est l'équation de propagation à laquelle satisfait le champ \vec{E}_t dans le conducteur ?

16. Résoudre cette équation en donnant en particulier la relation $k'(\omega)$ avec $k' \in \mathbb{C}$, commenter la solution obtenue et proposer une application numérique pour le cuivre dans le cas d'une onde hertzienne de fréquence 100 MHz ; commentaires.

Réflexion sur un conducteur parfait (on garde la géométrie et les notations de la question 14., les questions 18. et 19. viennent en complément)

17. Comment est défini un conducteur parfait ? Montrer que l'onde électromagnétique n'y pénètre pas.

18. Comment se réfléchissent les champs ? Comment peut-on interpréter l'existence d'une densité surfacique de courant (à évaluer) sur le conducteur ?

19. Quelles sont la structure et les propriétés énergétiques de l'onde résultante dans l'air ?

Rayonnement du dipôle oscillant

20. Rappeler les deux hypothèses faites dans la détermination du champ rayonné par un dipôle oscillant.

21. Quelles sont les caractéristiques du champ rayonné à grande distance (définir ce concept) ; à quoi ressemble-t-il localement ? Expliquer sa décroissance spatiale par un argument énergétique et dire pourquoi le rayonnement est qualifié d'anisotrope ?
22. Qu'appelle-t-on diffusion Rayleigh ? Quelles en sont les caractéristiques ?

Conseils à suivre ; erreurs à éviter

- * L'électromagnétisme est une science fondamentalement vectorielle ; les flèches sur les vecteurs sont obligatoires et une égalité du genre « vecteur = scalaire » est à proscrire ; un effort est donc demandé sur l'exactitude et la précision des notations.
- * Dans les applications numériques il convient de ne pas oublier le coefficient 2π intervenant entre la pulsation $\omega = 2\pi f$ (en rad.s⁻¹) et la fréquence f (en Hz).
- * De même s'agissant de la notation complexe (qui suppose la linéarité), il est hautement souhaitable de souligner les grandeurs complexes afin de ne pas les confondre avec les grandeurs réelles correspondantes et de donner un sens à l'écriture $\bar{E} = \text{Re}(\underline{\bar{E}})$.
- * Rappelons que la moyenne temporelle d'un vecteur est un vecteur (et non un scalaire !).
- * Les grandeurs énergétiques sont quadratiques (donc non linéaires) et par conséquent la notation complexe ne s'applique pas. En effet, la partie réelle d'un produit n'est pas égale au produit des parties réelles !
Aucune grandeur énergétique ne peut être complexe.

C'est le cas du vecteur de Poynting, de la densité d'énergie électromagnétique, de la densité de puissance cédée par le champ à la matière,...[les notations \bar{R} , \underline{u} , P_v , ou \bar{E}^2 , $\langle \bar{E}^2 \rangle$ (la moyenne d'un complexe reste complexe),...sont interdites puisque les grandeurs physiques réelles qui s'y rapportent n'existent pas].

Si au cours d'un calcul où les champs sont en $e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$, il apparaît $e^{2i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$, c'est un signe d'erreur et il faut reprendre ! En effet, une « exponentielle double » ne peut apparaître ni dans l'expression $\bar{R} = \frac{\bar{E} \wedge \bar{B}}{\mu_0}$ où les champs sont réels, ni dans

l'expression $\langle \bar{R} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\bar{E} \wedge \bar{B}^*}{\mu_0} \right)$ où le produit des exponentielles complexes conjuguées donne 1 (toute autre expression est fantaisiste).

La première expression est obligatoire lorsque la valeur instantanée du vecteur de Poynting est demandée ; il est alors indispensable de d'abord passer aux champs réels. La deuxième expression est très commode lorsque seule la moyenne temporelle du

(définir ce
atiale par un
rope ?

ches sur les
à proscrire ;

fficient 2π
 z).

st hautement
dre avec les
 $\underline{\underline{E}}$).

scalaire !).

onséquent la
ut n'est pas

étique, de la
, \underline{u} , P_v , ou
puisque les

$\underline{\underline{r}}$, c'est un
e » ne peut
ls, ni dans

complexes

vecteur de
amps réels.
mporelle du

vecteur de Poynting est demandée ; on peut alors travailler avec des champs complexes, mais le résultat est nécessairement réel.

* Bien distinguer $|\vec{E}|^2 = \underline{E} \cdot \underline{E}$ * qui est réel et intervient dans les calculs de moyenne temporelle et $\underline{E}^2 = \underline{E} \cdot \underline{E}$ qui est complexe et n'a pas d'existence physique.

En revanche, si le nombre d'onde est complexe, l'équation de dispersion peut donner $\underline{k}^2 = \underline{k} \cdot \underline{k}$, et qu'il ne faut pas confondre avec $|\underline{k}|^2 = \underline{k} \cdot \underline{k}$ *, grandeur inutile.

* Attention à la convention de signe $e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ ou $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$; les parties réelles sont égales, donc la grandeur physique (réelle) est inchangée, en revanche les opérateurs de dérivation spatio-temporels d'ordre un changent de signe. Il faut toujours prendre la convention indiquée dans un problème et s'y tenir. Un changement de convention modifie l'état de polarisation d'une onde (droite devient gauche et inversement).

* La propriété $\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$ n'est valable que pour une onde plane progressive homogène dans le vide.

Pour une onde non-plane progressive (ex : une onde sphérique), ou une onde plane non-progressive (ex : une onde stationnaire), ou une onde plane progressive non-homogène (dont l'amplitude dans une direction perpendiculaire à la direction de propagation n'est pas uniforme), ou une onde plane progressive dans un milieu conducteur ou diélectrique, il faut revenir aux équations de Maxwell (Maxwell-Faraday pour obtenir \vec{B} connaissant \vec{E} , et Maxwell-Ampère pour obtenir \vec{E} connaissant \vec{B}).

* Un champ magnétique B est homogène à E/c (ou plus généralement E/v_ϕ). Après utilisation de la formule $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$, ne pas garder le rapport $\frac{k}{\omega}$, mais penser à le remplacer par $1/c$ (ou plus généralement $1/v_\phi$).

* Bien faire la distinction (pour ne pas les confondre) pour un champ donné, entre sa direction de propagation (voir pour cela son terme de phase) et sa direction de polarisation (voir le vecteur unitaire qui le porte).

* Pour trouver le sens d'une polarisation elliptique, se placer dans un plan $x = cste$ et regarder dans le sens Ox^- pour une onde se propageant suivant Ox^+ . Puis se placer à deux instants séparés par $T/4$ (un quart de période) : faire $\Phi = 0$, puis $\Phi = +\pi/2$ si $\Phi = \omega t - kx$ et représenter les deux champs réels. (Attention à faire $\Phi = 0$, puis $\Phi = -\pi/2$ au cas où $\Phi = kx - \omega t$!) ; la polarisation est droite lorsque le champ tourne d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre et gauche dans le cas contraire.

* Les expressions des champs rayonnés à grande distance par un dipôle oscillant suppose une double inégalité : $a \ll \lambda \ll r$ (la taille du dipôle est petite devant la longueur d'onde, elle-même petite par rapport à la distance d'observation) ; devant un cas

concret, il faut toujours vérifier numériquement cette double inégalité avant d'utiliser des résultats.

* Il est utile d'avoir de bonnes notions sur le spectre électromagnétique :

Type d'ondes	Production	Quelques utilisations
Électrocinétique	alternateur oscillateurs électroniques	secteur domestique 50 Hz ($\lambda = 6000$ km) électronique BF (< 100 kHz)
Ondes hertziennes	antennes conductrices à courants oscillants	téléphone fixe ($\lambda \approx$ qqs km) radio-télé (λ de 10 cm à 1 km) radio AM : 1 MHz ($\lambda \approx 300$ m) radio FM : 100 MHz ($\lambda \approx 3$ m)
Micro-ondes (hyperfréquences)	antennes conductrices à courants oscillants	téléphone GSM 900 MHz ($\lambda = 33$ cm) four μ -ondes 2,45 GHz ($\lambda = 12,2$ cm) radar : $\lambda \approx$ cm soit 100 GHz
Infrarouge	vibration de la matière absorption $\Rightarrow T$ augmente (sensation de chaleur)	diodes laser pour fibres optiques chauffage (radiateur, lampe IR,...) ou caméra thermique (la nuit) $\approx 10^{14}$ Hz analyse spectrométrique (OH, C=C,...)
Lumière visible	transitions électroniques des atomes (lampe spectrale, à incandescence, laser,...)	vision humaine : réactions photochimiques dans les yeux ($0,4 < \lambda < 0,8$ μm) photographie synthèse chlorophyllienne
Ultraviolet	transitions électroniques des atomes	provoque des réactions chimiques (halogénéation des alcanes) stérilisation bronzage (Soleil, lampe UV) $\approx 10^{16}$ Hz présent dans les lampes Hg
Rayons X	métal bombardé par des électrons de grande énergie cinétique (tube à rayons X)	pouvoir pénétrant important (protection au Pb) : ($10^{-8} \text{ m} < \lambda < 10^{-12} \text{ m}$) radiographie (du squelette) radiothérapie médicale diffraction par la matière cristalline
Rayons γ	radioactivité réactions nucléaires rayons cosmiques	très dangereux (photon $E >$ MeV) destruction de tumeurs

t d'utiliser

ions

)

m)

m)

m)

 $\lambda = 33 \text{ cm}$ $= 12,2 \text{ cm}$

z

ques

IR,...) ou

 $\approx 10^{14} \text{ Hz}$

I, C=C,...)

ix

iques

 $\approx 10^{16} \text{ Hz}$ (protection
m)

stalline

MeV)

Applications directes du cours

23. Écrire explicitement en coordonnées cartésiennes l'équation de d'Alembert (aux dérivées partielles) satisfaite par la composante E_x du champ électrique.
24. Dans quel sens se propage une onde en $e^{i(\omega t-kz)}$? Et une onde en $e^{-i(\omega t-kz)}$?
25. Le champ électrique d'une onde s'écrit $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t+kz)} \vec{u}_x$; commenter cette écriture, établir la relation entre k et ω , et déterminer le champ magnétique \vec{B} et le vecteur de Poynting \vec{R} correspondants.
26. Le champ électrique d'une onde dans un conducteur réel est : $\vec{E} = E_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t-z/\delta)} \vec{u}_x$. Quels sont les deux méthodes qui permettent d'en déduire le champ magnétique \vec{B} ?
27. Caractériser le champ électrique d'une onde s'écrivant $\vec{E} = E_0 \sin(\beta y) e^{i(\omega t-k_g z)} \vec{u}_x$ dans le vide ; quelle est sa relation de dispersion ? Que traduit-elle ? Comment peut-on obtenir une telle onde ?
28. Quelle relation simple existe-t-il pour une OPPM dans le vide entre le vecteur de Poynting et la densité volumique d'énergie ? L'interpréter physiquement.
29. Un laser de puissance émet 400 W dans un faisceau cylindrique de 3 mm de diamètre. Quelle est l'amplitude du champ électrique associé aux ondes supposées planes progressives sinusoïdales que transporte le faisceau ?
30. Le champ électrique d'une onde s'écrit $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_x$; commenter cette structure particulière et proposer des analogies. Où trouve-t-on ce type d'ondes ? Déterminer le champ \vec{B} en régime d'onde ; cette valeur du champ magnétique est-elle compatible avec l'existence de courants de conduction dans le milieu ?
31. Quel est l'état de polarisation d'une onde de champ $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t-kz)} (\vec{u}_x + 2i\vec{u}_y)$? Et pour une onde de champ $\vec{E} = E_0 e^{i(kz-\omega t)} (\vec{u}_x + 2i\vec{u}_y)$?

Questions de réflexion ; physique pratique

32. Pourquoi la structure des OPPM dans le vide s'étend-elle à des OPP quelconques (non forcément monochromatiques) ?
33. Quelle est la réalité physique d'une OPPM ?

- 59.** Pourquoi le ciel est-il bleu ? Et le Soleil au couchant rouge ? En allumant un néon on devrait le voir rouge et les murs de la pièce bleu ; pourquoi n'en est-il pas ainsi ?
- 60.** La lumière naturelle est prédominante dans la nature, et pourtant la lumière ambiante provenant du Soleil est partiellement polarisée, pourquoi ?
- 61.** Une abeille peut aller butiner à plusieurs kilomètres à la ronde ; comment fait-elle pour retrouver sa ruche ?
- 62.** Toute particule chargée et accélérée rayonne ; citer des exemples de ce rayonnement.
- 63.** Au CERN (Centre Européen pour la Recherche Nucléaire) à Genève, les accélérateurs ont des diamètres de plus en plus grands (le plus grand, à cheval sur la France et la Suisse, a un rayon de 4,3 km, soit une circonférence de 27 km) ; dans quel but ? Pourquoi les expériences ont-elles souvent lieu de nuit ?
- 64.** Les fours à micro-ondes utilisent une fréquence de 2,45 GHz. Par quoi ces ondes sont-elles créées ? Pourquoi cette fréquence est-elle si précise ? À quelle longueur d'onde correspond-elle ? Le récipient contenant un aliment chauffe-t-il également ? Dans la porte, derrière la vitre, est placée une plaque métallique, dans quel but ? Le fait qu'elle soit percée de trous (pour le contrôle visuel de la cuisson) est-il gênant ?
- 65.** La téléphonie mobile numérique de norme européenne GSM (Global System for Mobile communication) utilise des fréquences autour de 900 MHz dans une bande de largeur 25 MHz. À quelles longueurs d'onde cela correspond-il ? (en cas de saturation, les appareils bibandes commutent à 1800 MHz, et au-delà à 1900 MHz pour les tribandes). Pourquoi la nouvelle norme UMTS fonctionnant à 2 400 MHz conduit-elle à des inquiétudes ?

Exercices

66. Superposition de deux ondes obliques

Une OPPM de champ \vec{E}_1 d'amplitude E_0 , de pulsation ω , polarisée rectilignement suivant \vec{u}_z , se propage suivant la direction de vecteur unitaire $\vec{n}_1(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$.

a) Donner l'expression du champ complexe \vec{E}_1 en fonction, entre autres, des coordonnées cartésiennes du point M .

On lui superpose une deuxième onde de champ $\vec{E}_2 = -E_0 \exp i\omega \left(t - \frac{x+y}{\sqrt{2}c} \right) \vec{u}_z$.

b) Quel est le vecteur \vec{n}_2 de sa direction de propagation ? Faire un dessin avec les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 , et expliquer physiquement l'existence de la deuxième onde à partir de la première.

c) Commenter la structure du champ électrique de l'onde résultante. Que crée-t-on lorsqu'on dispose un plan conducteur en $x=l$?

1 néon on
isi ?

ambiant

t fait-elle

nement.

élérateurs
ance et la
quel but ?

ces ondes
longueur
lement ?
l but ? Le
enant ?

/stem for
bande de
1 cas de
900 MHz
400 MHz

ignement
 $\sqrt{2}, 0$).
itres, des

avec les
ie onde à
crée-t-on

67. Onde cylindrique

À partir d'un fil source (l'axe Oz) est émise dans le vide une onde dont le champ électrique est donné en coordonnées cylindriques par $\underline{\underline{E}} = E(r) e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_z$.

- Trouver le champ magnétique $\underline{\underline{B}}$ correspondant. Commentaires sur les champs.
- Déterminer le vecteur de Poynting instantané \vec{R} , puis sa moyenne temporelle $\langle \vec{R} \rangle$.
- Quelle est la puissance moyenne rayonnée à travers un cylindre de rayon r et de hauteur h ? En déduire la dépendance $E(r)$.
- Donner l'expression de $\underline{\underline{B}}$ à grande distance (pour $r \gg \lambda$) et commenter.

68. Pression de radiation corpusculaire (*)

À une onde de fréquence ν et de vecteur d'onde $\vec{k} = k \vec{u}_z$ correspond un photon d'énergie $E = h\nu$ et de quantité de mouvement $\vec{p} = \frac{h\nu}{c} \vec{u}_z = \hbar \vec{k}$ (en notant $\hbar = \frac{h}{2\pi}$).

- Un faisceau d'intensité I (suivant Oz^+) tombe normalement sur un conducteur plan parfait. À quel nombre d^2N de photons par unité de surface et de temps cela correspond-il?
- À partir de la quantité de mouvement transférée par un photon au conducteur (pourquoi le choc est-il élastique?), déduire la pression P exercée par le faisceau en fonction de I et c .

Proposer une application numérique sur la base de la question 29.

Comment est modifié ce résultat si le faisceau incident est incliné d'un angle θ ? Si, en conservant $\theta = 0$, la surface est absorbante au lieu d'être réfléchissante?

69. Conductivité en « haute fréquence »

Dans un conducteur métallique les électrons libres (charge $-e$, masse m) de densité volumique n ont une vitesse d'ensemble \vec{v} par rapport au réseau cristallin et sont soumis de la part de ce dernier à une « force de frottement » en $-m\vec{v}/\tau$.

- Donner l'origine de cette force et interpréter τ .
- Le métal est mis en régime sinusoïdal forcé sous l'action d'un champ électrique $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}_0 e^{-i\omega t}$. Établir la loi d'Ohm locale $\underline{\underline{j}} = \sigma \underline{\underline{E}}$ et exprimer la conductivité complexe σ en fonction de $\sigma_0 = ne^2\tau/m$ et de $\omega\tau$.
Commenter en distinguant $\omega\tau \ll 1$ et $\omega\tau \gg 1$.
AN : On mesure $\sigma_0 = 0,57 \cdot 10^8 \text{ S.m}^{-1}$, en déduire τ .
- Exprimer la puissance volumique moyenne $\langle P_v \rangle$ dissipée dans le métal.
Commenter le résultat dans les deux cas $\omega\tau \ll 1$ et $\omega\tau \gg 1$.

70. Oscillations et pulsation de plasma

Un plasma gazeux, globalement neutre, comprend, placés dans le vide, des ions positifs supposés fixes et des électrons de masse m et de charge $-e$ susceptibles de se déplacer. Soient n le nombre d'électrons par unité de volume du plasma au repos, supposé homogène, et $u(z, t)$ un petit déplacement d'ensemble suivant l'axe Oz des électrons situés en z quand le plasma est au repos. L'agitation thermique et le poids sont négligés.

a) En raisonnant sur une tranche comprise entre z et $z + dz$ quand le plasma est au repos, donner la densité d'électrons n^- lors du déplacement en supposant $|\partial u / \partial z|$ petit devant 1, et en déduire la densité de charge totale ρ du plasma.

b) Montrer qu'il apparaît un champ électrique \bar{E} et que sous l'action de ce champ les électrons effectuent des oscillations sinusoïdales avec la pulsation $\omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{\epsilon_0 m}}$.

AN : Calculer $f_p = \omega_p / 2\pi$ pour $n = 10^{12} \text{ m}^{-3}$ (ionosphère) et $n = 10^{21} \text{ m}^{-3}$ (décharge dans un gaz à forte densité).

71. Transparence ou non d'un plasma

L'ionosphère, couche de l'atmosphère située vers 90 km d'altitude, est un milieu ionisé caractérisé par une densité volumique d'électrons libres n_0 et une égale densité volumique de cations de charge $+e$ (le plasma est globalement neutre). On souhaite propager dans ce plasma une onde de champ électrique $\bar{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \bar{u}_y$.

a) Faire le bilan de toutes les forces appliquées à un électron libre et préciser lesquelles sont négligeables.

b) Déterminer, en régime forcé, le champ des vitesses $\bar{v}(x, t)$ de l'ensemble des électrons considéré comme un fluide, et en déduire moyennant une approximation à préciser, la conductivité complexe définie par $\bar{j} = \sigma \bar{E}$; commentaire.

c) Revenir à la notation réelle et établir l'équation de propagation du champ $\bar{E}(x, t)$. En déduire l'équation de dispersion dans laquelle apparaît la pulsation plasma

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m}} ; \text{ application numérique pour } f_p \text{ et } \lambda_p \text{ correspondants.}$$

Le plasma occupe le demi-espace $x \geq 0$ et l'onde est émise à partir de $x = 0$.

d) Pour $\omega < \omega_p$, caractériser entièrement l'onde obtenue. Décrire qualitativement ce que devient une onde électromagnétique envoyée depuis le sol en direction de l'ionosphère.

e) Même question pour $\omega > \omega_p$. Trouver les vitesses de phase v_ϕ et de groupe v_g .

72. Réflexion normale d'une OPPM polarisée circulairement

Une OPPM incidente de pulsation ω se propage dans le vide dans le sens des z croissants. En notation complexe, son champ électrique est :

$$\bar{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \begin{vmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{vmatrix}$$

Le conducteur plan parfait occupe la partie de l'espace correspondant à $z > 0$, sa surface correspond au plan xOy .

a) Donner l'expression du champ \bar{E}_r de l'onde réfléchie. Comparer la polarisation des ondes incidente et réfléchie et expliquer ce résultat.

En déduire le champ \bar{E} de l'onde résultante.

b) Déterminer les champs magnétiques \bar{B}_i et \bar{B}_r , puis le champ \bar{B} total.

sma est au
t $|\partial u / \partial z|$

champ les
 $\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}$
 $= 10^{21} \text{ m}^{-3}$

un milieu
de densité
à souhaiter

t préciser
ensemble des
oximation

à $\vec{E}(x, t)$.
en plasma

vement ce
ection de

de v_g .

ns des z

$z > 0$, sa

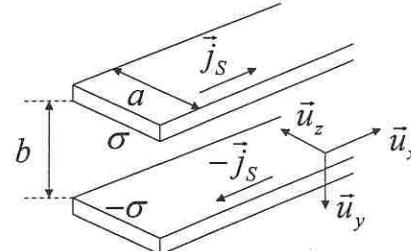
olarisation

Que peut-on dire de \vec{E} et \vec{B} ?

- c) Calculer les valeurs instantanées du vecteur de Poynting \vec{R} et de la densité d'énergie électromagnétique u ; commentaires.
- d) Quelles sont les densités superficielles de charge σ et de courant \vec{j}_s à la surface du conducteur ?

73. Ligne à ruban

Une ligne est constituée de deux rubans conducteurs parfaits, de faible épaisseur, de largeur a , distants de b , l'espace entre les rubans étant vide. Les rubans sont parcourus par des courants de densités surfaciques $\vec{j}_s = j_s(x, t)\vec{u}_x$ et $-\vec{j}_s$ et présentent sur leurs faces en regard des densités surfaciques de charge $\sigma(x, t)$ et $-\sigma(x, t)$.



On étudie les champs \vec{E} et \vec{B} uniquement dans l'espace situé entre les rubans en supposant qu'ils ne dépendent que de x (pas d'effet de bord) et de t .

- a) Exprimer, après examen des conditions aux limites, les champs $\vec{E}(x, t)$ et $\vec{B}(x, t)$ en fonction de j_s et σ .
- b) Déterminer les énergies magnétiques dU_m et électrique dU_e d'une tranche d'épaisseur dx de ligne et en déduire respectivement l'inductance propre linéique L et la capacité linéique C de la ligne. Quelle relation existe-t-il entre L et C ?
- c) Déterminer à partir des équations de Maxwell, deux équations aux dérivées partielles liant $j_s(x, t)$ et $\sigma(x, t)$. Pourquoi peut-on parler d'ondes de courant surfacique et de charge surfacique ? Quelle est leur vitesse de phase ?
- d) Quelles sont les expressions complexes \vec{B} et \vec{E} des champs lorsque le ruban supérieur est parcouru par un courant électrique $i(x, t) = I_0 \exp(i(\omega t - kx))$? Quelle est la structure de l'onde électromagnétique sur la ligne ?

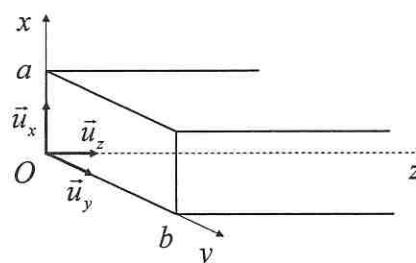
74. Guide d'onde rectangulaire (*)

Quatre plans métalliques parfaitement conducteurs en $x=0$, $x=a$, $y=0$ et $y=b$ sur la figure ci-contre délimitent un « guide d'ondes » de longueur infinie suivant Oz , de section droite rectangulaire et dans lequel règne le vide ; \vec{u}_x , \vec{u}_y et \vec{u}_z désignent les vecteurs unitaires des axes Ox , Oy , Oz .

On se propose d'étudier la propagation dans ce guide suivant la direction Oz d'une onde électromagnétique monochromatique de pulsation ω , dont le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = f(y) \cos(\omega t - k_g z) \vec{u}_x$$

où $f(y)$ désigne une fonction réelle de la variable y , k_g est une constante positive.



On pose $k_g = 2\pi/\lambda_g$ (λ_g est la « longueur d'onde guidée ») et $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega/c$.

- Déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $f(y)$.
- En utilisant les conditions que doit vérifier le champ \vec{E} sur les plans conducteurs $y=0$ et $y=b$, expliciter la fonction $f(y)$. Montrer qu'il intervient un nombre entier n non nul (supposé positif). À chaque valeur de n correspond un « mode » de propagation. Décrire le type d'onde auquel on aboutit. Faire un schéma représentant le mode fondamental $n=1$.
Que laissent prévoir les conditions aux limites de \vec{E} sur $x=0$ et $x=a$?
- Écrire les composantes du champ magnétique \vec{B} ; commentaires. Vérifier que \vec{B} satisfait également aux conditions aux limites en $y=0$ et $y=b$. Que se passe-t-il en $x=0$, $x=a$?
- Exprimer k_g en fonction de ω , c , n et b , et en déduire qu'il existe une fréquence de coupure $f_{c,n}$ (dépendant du mode) en dessous de laquelle il n'y a plus propagation.
AN : Sachant que $f_{c,1} = 2,5$ GHz, calculer b .
- Exprimer les vitesses de phase v_ϕ et de groupe v_g de l'onde en fonction de c et du rapport $f_{c,n}/f$ (f est la fréquence de l'onde).
AN : Calculer v_ϕ et v_g pour $f = 2f_{c,1}$ lorsque $n=1$.
- Montrer, en posant $k_s = n\pi/b$, que l'onde déterminée à la question b) résulte de la superposition de deux ondes obliques se propageant en zigzag dans le vide intérieur au guide avec réflexions totales sur les parois en $y=0$ et $y=b$. Ces ondes sont inclinées d'un angle $\pm\alpha$ sur l'axe du guide; faire un dessin et déterminer $\cos\alpha$, d'abord en fonction de k_g et k_0 , puis en fonction des vitesses v_g , c et v_ϕ , puis proposer une interprétation de la relation $v_g < c < v_\phi$.

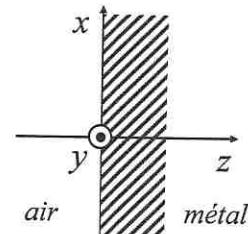
75. Réflexion / transmission sur un conducteur réel (*)

Le demi-espace $z < 0$ est de l'air assimilé à du vide et le demi-espace $z > 0$ est occupé par un conducteur réel de type cuivre de conductivité électrique $\sigma = 0,57 \cdot 10^8 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$. On pose par ailleurs $\tau = \epsilon_0 / \sigma$.

Dans le vide une OPPM polarisée rectilignement de champ électrique $\underline{\underline{E}}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$ tombe sur le métal et y engendre une onde réfléchie et une onde transmise.

- Donner le champ magnétique $\underline{\underline{B}}_i$ de l'onde incidente, puis écrire les expressions des champs électrique $\underline{\underline{E}}_r$ et magnétique $\underline{\underline{B}}_r$ de l'onde réfléchie en notant r le coefficient de réflexion en amplitude du champ électrique.

Le champ électrique transmis est cherché sous la forme $\underline{\underline{E}}_t = t E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$ et la question 16. donne $k' = \frac{1-i}{\delta}$ avec $\delta = c \sqrt{\frac{2\tau}{\omega}}$.



ω/c .ducteurs
nombre
(mode »
schémar que \vec{B}
passe-t-iliste une
il n'y ade c etilte de la
le vide
 $= b$. Ces
lessin et
vitesses

z
métal
ressions
ant r le
 \vec{u}_x et la

- b) Donner l'expression du champ magnétique \vec{B}_t correspondant, où dans l'amplitude, apparaît t , E_0 , c et $\alpha = \sqrt{2\omega\tau}$.
- c) Au niveau mésoscopique (pas de grandeurs surfaciques) les champs sont continus en $z = 0$. En déduire les expressions de \underline{r} et \underline{t} en fonction de α ; commentaires. Retrouve-t-on les résultats du conducteur parfait?
- d) Définir et exprimer en fonction de α les coefficients de réflexion R et de transmission T en énergie. Établir et expliquer la relation simple entre R et T . Donner les expressions approchées de R et de T en tenant compte du fait que $\alpha \ll 1$.
- AN : Calculer T pour le cuivre à une fréquence $f = 320$ MHz et commenter.

76. Durée de vie d'un état excité

La puissance moyenne rayonnée par un dipôle oscillant d'amplitude p_0 à la pulsation ω est donnée par $\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$.

- a) Vérifier que les conditions d'application de cette formule sont satisfaites lorsqu'il s'agit d'étudier le rayonnement (émission de lumière) d'un atome et exprimer cette puissance en fonction du rayon atomique r_a .
- b) Expliquer en quoi les deux points de vue de l'électrodynamique classique et de la mécanique quantique sont *a priori* contradictoires; comment peut-on les concilier? En déduire par un calcul simple une estimation de la durée de vie τ d'un état excité assimilée à la durée de l'émission d'un photon d'énergie $E = h\nu$.

Travaux Pratiques

77. Quelle expérience simple peut-on mettre en avant pour prouver le caractère vectoriel de la lumière?

78. Quel est l'effet de la longueur d'onde sur un polariseur? un analyseur? une lame à retard?

79. On interpose un polariseur entre une source émettant une lumière dont on ignore la polarisation et un écran. Par rotation de ce polariseur (et qui sert donc d'analyseur), on observe sur l'écran un minimum d'éclairement; que peut-on en déduire? Préciser la réponse.

80. On interpose un polariseur entre une source émettant une lumière dont on ignore la polarisation et un écran. La rotation de ce polariseur laisse l'éclairement de l'écran invariant; que peut-on en déduire? Préciser la réponse.

81. On éteint un faisceau de lumière naturelle filtrée en plaçant un analyseur A à angle droit derrière un polariseur P . On dispose ensuite une lame quart d'onde (pour la longueur d'onde concernée) entre P et A ; que constate-t-on, expliquer.

les ondes
si faible ?
récepteur
our qu'un
l ?

les soient
modifier la

Réponses aux questions

ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE ET LES MILIEUX CONDUCTEURS

Le cours d'abord

Structure de l'onde plane progressive monochromatique (OPPM)

1. Pour $\vec{X} = \vec{E}$ ou \vec{B} , calculer $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{X} = \vec{\text{grad}} \vec{\text{div}} \vec{X} - \Delta \vec{X}$ puis appliquer les équations de Maxwell en commutant les opérateurs spatiaux et la dérivée temporelle ; on obtient :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\text{grad}} \rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{\text{rot}} \vec{j}$$

Dans une région de l'espace où $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$, \vec{E} et \vec{B} satisfont à des équations de d'Alembert (vectorielles à trois dimensions) :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Le champ électromagnétique se propage à la vitesse $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \approx 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$ de la lumière dans le vide. Il n'y a pas de dispersion, c'est-à-dire que des ondes de fréquences différentes ont même vitesse de phase (les notions de vitesses de phase, de groupe et de dispersion ont été définies aux questions 17. à 19. du chapitre 1). On de méca

2. \vec{E} est solution d'une équation de d'Alembert (linéaire comme les équations de Maxwell) ; on peut l'écrire sous la forme d'une onde plane progressive monochromatique (OPPM) de pulsation ω et de vecteur d'onde \vec{k} dans une direction quelconque, d'où le champ complexe de la forme $\vec{E} = \underline{\vec{E}_0} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$.

On note $k = |\vec{k}| = \omega/c$.

Avec cette notation les opérateurs se transcrivent en :

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv i\omega \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \equiv -i\vec{k}, \text{ et puis en } \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv -\omega^2 \quad \text{et} \quad \Delta = \vec{\nabla}^2 \equiv -k^2$$

3. $\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow -ik \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow$ avec \vec{k} réel, $\vec{k} \cdot \text{Re}(\vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$;

\vec{B} est transversal

$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E}$ est transversal (il n'a pas de composante sur la direction de propagation)

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$$

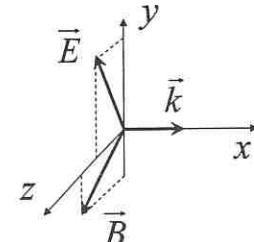
Ceci prouve que \vec{E} et \vec{B} sont en phase, qu'ils sont orthogonaux entre eux [$(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$

est direct], et qu'en norme $|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c}$

Cette relation issue de MF et injectée dans MA conduit à la relation de dispersion $k^2 = \omega^2/c^2$ (obtenue directement par l'équation de d'Alembert) et dont les deux solutions $k = \pm \omega/c$ rappelle que l'onde peut se propager indifféremment dans un sens ou dans l'autre.

4. Suivant Ox^+ , $\vec{E} = \begin{cases} 0 \\ E_y \\ E_z \end{cases}$ et $\vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c} = \begin{cases} 0 \\ B_y = -E_z/c \\ B_z = E_y/c \end{cases}$

La connaissance du champ électrique d'une OPPM suffit à déterminer entièrement son champ magnétique.



Aspects énergétiques

5. Voir le point n° 5 dans « Conseils à suivre ; erreurs à éviter »

$$u = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \Rightarrow u = \varepsilon_0 \vec{E}^2 \quad \text{car } B = \frac{E}{c}$$

$$\vec{R} = \frac{\vec{E}}{\mu_0} \wedge \left(\frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c} \right) = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\vec{E}^2 \vec{u}_x - (\vec{E} \cdot \vec{u}_x) \vec{E} \right) \Rightarrow \vec{R} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u}_x \quad \text{puisque } \vec{E} \cdot \vec{u}_x = 0$$

Le fait que onde et énergie se propagent dans le même sens ($\vec{R} \parallel \vec{u}_x$) justifie la détermination du vecteur de Poynting à la question 15. du chapitre 2.

L'écriture $\vec{R} = uc \vec{u}_x$ montre que la vitesse de groupe v_g vaut c , ce qui est normal en absence de dispersion.

6. Si $f(t) = f_0 \cos \omega t$ et $g(t) = g_0 \cos(\omega t + \phi)$, alors $\langle fg \rangle = \frac{1}{2} f_0 g_0 \cos \phi$ par calcul direct.

Par ailleurs $\underline{f} = f_0 e^{i\omega t}$ et $\underline{g} = g_0 e^{i\omega t} e^{i\phi}$ d'où $\underline{f} \underline{g}^* = f_0 g_0 e^{-i\phi}$ où \underline{g}^* désigne le complexe conjugué de \underline{g} .

D'où la relation importante :

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(f \cdot g^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(f^* \cdot g) \quad \text{et en particulier} \quad \langle f^2 \rangle = \frac{1}{2} |\underline{f}|^2$$

ction de

 $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ ispersion
les deux
dans un $\rightarrow x$ $\vec{u}_x = 0$

istifie la

ormal en

ar calcul

signe le

 $\boxed{\cdot}$

Application : La puissance cédée par le champ à la matière est $\frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$ soit en moyenne temporelle :

$$\langle \frac{dP}{d\tau} \rangle = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{j} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\sigma |\vec{E}|^2) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\sigma) |\vec{E}|^2$$

en appliquant la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

– pour un conducteur métallique, la conductivité σ est réelle et donc les champs \vec{j} et \vec{E} sont en phase (soit $\varphi = 0$) : alors $\langle \frac{dP}{d\tau} \rangle = \frac{1}{2} \sigma |\vec{E}|^2 > 0$, le métal reçoit bien une puissance de la part du champ, c'est la puissance Joule (l'énergie du champ est transformée en énergie cinétique des électrons de conduction, répartie à l'ensemble du réseau par chocs d'où l'échauffement). On en déduit donc que l'onde qui rentre dans le métal s'y amortit (tellement pour une onde hertzienne qu'elle n'y pénètre pratiquement pas).

– pour un plasma (milieu conducteur), la conductivité σ est imaginaire pure et donc les champs \vec{j} et \vec{E} sont en quadrature temporelle (soit $\varphi = \frac{\pi}{2}$) : alors $\langle \frac{dP}{d\tau} \rangle = 0$, le plasma n'absorbe pas l'énergie de l'onde qui peut donc s'y propager sans s'amortir (le plasma est transparent pour des ondes hertziennes de fréquence suffisamment élevée).

7. On applique directement $\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$ et $\langle u \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} |\vec{E}|^2 + \frac{1}{4\mu_0} |\vec{B}|^2$

La surface dS (écran) reçoit la puissance instantanée $dP_r = \vec{R} \cdot \vec{dS} = \epsilon_0 c E^2 dS$ si $\vec{dS} \parallel \vec{R}$ comme sur la figure.

Pour une OPPM de champ électrique $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$, l'intensité est :

$$\langle \epsilon_0 c E^2 \cos^2 \frac{\omega t - kx}{2} dS \rangle \quad I = \frac{\langle dP_r \rangle}{dS} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

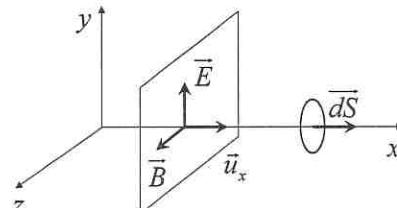
L'intensité lumineuse est proportionnelle au carré de l'amplitude du champ électrique.

Polarisation des ondes électromagnétiques

8. Explicitons les composantes du champ de la question 4. :

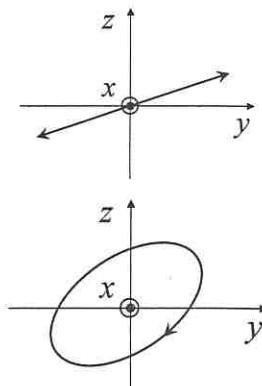
$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_y^0 \cos(\omega t - kx + \varphi_1) = E_y^0 \cos \Phi \\ E_z = E_z^0 \cos(\omega t - kx + \varphi_2) = E_z^0 \cos(\Phi + \varphi) \end{cases}$$

La polarisation de l'onde concerne l'étude de $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, différence de phase entre les deux composantes E_z et E_y . Pour décrire un tel champ, on se place dans un plan



$x = cste$ et on regarde (dans le sens Ox^- pour une onde se propageant suivant Ox^+), la courbe décrite par l'extrémité du vecteur $\vec{E}(t)$ au cours du temps dans ce plan.

9. * Si $\varphi = 0$, la polarisation est rectiligne (les composantes sont en phase, \vec{E} évolue dans le premier cadran). Alors par rotation du plan Oyz autour de l'axe Ox , on peut amener Oy sur \vec{E} (c'est-à-dire faire $E_z = 0$) et donc Oz sur \vec{B} (c'est-à-dire faire $B_y = 0$).



- * Si $0 < \varphi < \pi$, la polarisation est elliptique droite (sens des aiguilles d'une montre) ; pour $\varphi = \pi/2$, les axes de l'ellipse sont ceux du repère.
- * Si $\varphi = \pi$, la polarisation est rectiligne (les composantes sont en opposition de phase, \vec{E} évolue dans le deuxième cadran).
- * Si $\pi < \varphi < 2\pi$, la polarisation est elliptique gauche (sens inverse des aiguilles d'une montre) ; pour $\varphi = 3\pi/2$, les axes de l'ellipse sont ceux du repère.

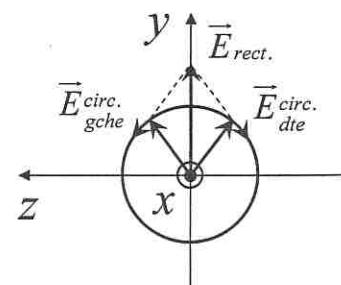
Pour avoir le sens de rotation, se placer à deux instants séparés par $T/4$ (un quart de période) : faire $\Phi = 0$, puis $\Phi = +\pi/2$ si $\Phi = \omega t - kx$ et représenter les deux champs réels. (Attention à faire $\Phi = 0$, puis $\Phi = -\pi/2$ au cas où $\Phi = kx - \omega t$!)

10. Si $\varphi = \pm\pi/2$ et si de plus $E_y^0 = E_z^0$, c'est-à-dire si les deux composantes E_y et E_z sont en quadrature et ont même amplitude, alors l'onde est polarisée circulairement droite ou gauche. Superposons deux ondes polarisées circulairement de même amplitude, l'une droite et l'autre gauche :

$$\frac{E_0}{2} e^{i(\omega t - kx)} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{vmatrix} + \frac{E_0}{2} e^{i(\omega t - kx)} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{vmatrix} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

qui représente une onde polarisée rectilignement.

La représentation spatiale avec deux vecteurs de même norme et tournant en sens inverse à la même vitesse donne bien par somme vectorielle un vecteur vibrant suivant une direction fixe (ici Oy).



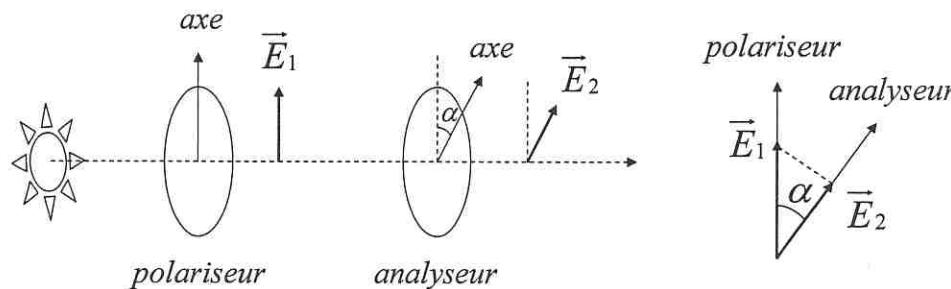
Changement d'état de polarisation

11. Un polariseur ne transmet que les champs électriques parallèles à son axe de transmission et arrête les champs perpendiculaires à cet axe. Il transforme ainsi toute vibration lumineuse en vibration polarisée rectilignement et ceci parallèlement à son axe de transmission appelé direction de polarisation : c'est un polariseur rectiligne.

ant Ox^+),
plan.

En disposant une 2ème lame (l'analyseur) derrière la 1ère (le polariseur), leurs axes faisant un angle α , et en notant \vec{E}_1 le champ sortant du polariseur et \vec{E}_2 celui sortant de l'analyseur, on a en norme $I_2 = E_1 \cos \alpha$ soit en intensité lumineuse :

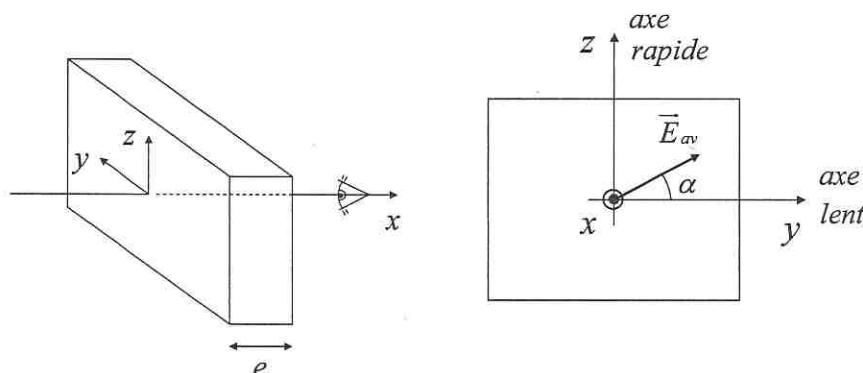
$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha \quad \text{appelée loi de Malus.}$$



Si $\alpha = \pm \pi/2$, $I_2 = 0$ il y a extinction du faisceau ; polariseur et analyseur sont dits croisés.

12. Une lame taillée dans une substance anisotrope possèdent deux directions privilégiées dans son plan ; l'une porte le nom d'axe rapide (Oz par exemple), l'autre, perpendiculaire, le nom d'axe lent (Oy) car les vitesses de propagation de la lumière dans la lame ne sont pas les mêmes suivant que le champ électrique est polarisé suivant l'une ou l'autre (attention, la direction de propagation Ox est unique) :

$$v_z = c/n_r > v_y = c/n_l \Rightarrow n_r < n_l$$



Une OPPM polarisée rectilignement de champ \vec{E}_{av} (pour avant) tombe sur la lame en $x=0$. Après traversée de la lame, en $x=e$, le champ est \vec{E}_{ap} (pour après) en négligeant les réflexions et l'absorption :

$$\vec{E}_{av} = \begin{cases} 0 \\ E_y^0 \cos \omega t \\ E_z^0 \cos \omega t \end{cases} \text{ et } \vec{E}_{ap} = \begin{cases} 0 \\ E_y^0 \cos \omega(t - e/v_y) \\ E_z^0 \cos \omega(t - e/v_z) \end{cases}$$

d'où l'apparition d'une différence de phase entre les deux composantes E_z et E_y :

$$\Delta\varphi = \omega \left(-\frac{e}{v_z} + \frac{e}{v_y} \right) = \frac{2\pi e}{\lambda_0} (n_i - n_r) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}$$

où $\delta = (n_i - n_r)e$ est la différence de chemins optiques et $\lambda_0 = 2\pi c / \omega$ la longueur d'onde dans le vide.

En général la polarisation est donc elliptique ; \vec{E}_{ap} a tourné par rapport à \vec{E}_{av} (et ne garde pas une direction fixe dans l'air après la lame sauf si \vec{E}_{av} parallèle à Oy ou Oz).

- 13.** Une lame est demi-onde si $\delta = \lambda_0 / 2$ soit $\Delta\varphi = \pi$. Pour un état de polarisation quelconque à l'arrivée sur la lame, il suffit de noter $\varphi_{ap} = \varphi_{av} + \Delta\varphi$ pour se convaincre que :

- une rectiligne est transformée en rectiligne de direction symétrique par rapport aux axes de la lame.
- une circulaire gauche est transformée en circulaire droite et inversement.

Une lame est quart d'onde si $\delta = \lambda_0 / 4$ soit $\Delta\varphi = \pi / 2$. Alors :

- une circulaire gauche est transformée en rectiligne (1ère bissectrice) et inversement.
- une circulaire droite est transformée en rectiligne (2ème bissectrice) et inversement.

Effet de peau sur un conducteur réel (en ARQS)

- 14.** On peut chercher le champ transmis dans le conducteur sous la forme :

$$\vec{E}_t = \underline{E}'_0 e^{i(\omega t - k' z)} \vec{u}_x$$

- même pulsation ω que l'onde incidente car les relations de passage sont vraies $\forall t$
- le changement de milieu, donc de vitesse de phase et de longueur d'onde, conduit à $k' \neq k$; par ailleurs la dissipation d'énergie (par effet Joule des courants induits dans le conducteur) amène à prévoir k' complexe.
- la transmission air / métal peut s'accompagner d'un déphasage d'où une amplitude \underline{E}'_0 différente et *a priori* complexe.
- même état de polarisation car le métal est homogène isotrope.

- 15.** * La loi d'Ohm s'écrit dans le conducteur : $\vec{j} = \sigma \vec{E}_t \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = \sigma \operatorname{div} \vec{E}_t$; l'équation de conservation de la charge et l'équation de Maxwell-Gauss donnent alors :

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ soit } \rho(t) = \rho_0 e^{-t/\tau} \text{ avec } \tau = \epsilon_0 / \sigma \approx 10^{-19} \text{ s pour le cuivre}$$

Ceci signifie qu'un supplément de charge ρ_0 en un point donné du métal s'écoule en un temps caractéristique τ (en fait ce temps doit être ramené à 10^{-14} s car en deçà, la loi d'Ohm n'est plus applicable, voir la question 69.). On peut donc poser $\rho = 0$ (ce qui est compatible avec le fait que \vec{E}_t soit transverse). Il est possible aussi de faire un raisonnement en régime sinusoïdal forcé comme en 71. c).

* Le rapport du courant de déplacement au courant de conduction dans l'équation de Maxwell-Ampère est :

$$\frac{|\vec{j}_D|}{|j|} = \frac{\epsilon_0 |\partial \vec{E}_t / \partial t|}{\sigma |\vec{E}_t|} = \frac{\epsilon_0 \omega |E'_0|}{\sigma |E'_0|} = \omega \tau \ll 1$$

pour $\omega \ll 10^{14}$ rad.s⁻¹ (ondes hertziennes) ;

ceci constitue l'approximation des régimes quasi stationnaires notée ARQS.

Les équations de Maxwell avec la loi d'Ohm se réduisent alors dans le conducteur à :

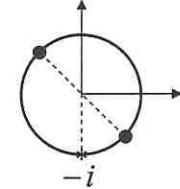
$$\text{div } \vec{B}_t = 0, \quad \text{rot } \vec{E}_t = -\frac{\partial \vec{B}_t}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{E}_t = 0 \quad \text{et} \quad \text{rot } \vec{B}_t = \frac{1}{\tau c^2} \vec{E}_t$$

$$\text{Le calcul de } \text{rot } \text{rot } \vec{E}_t = \text{grad } \text{div } \vec{E}_t - \Delta \vec{E}_t \text{ conduit ensuite à } \Delta \vec{E}_t - \frac{1}{\tau c^2} \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t} = \vec{0}$$

Cette équation à la dérivée partielle temporelle première n'est pas une équation de d'Alembert, mais une équation de type « diffusion » (détalée au chapitre 8).

16. La relation de dispersion est obtenue en injectant $\underline{E}_t = E'_0 e^{i(\omega t - k'z)} \vec{u}_x$ dans cette équation : $-k'^2 - \frac{i\omega}{\tau c^2} = 0 \Rightarrow k' = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\tau c^2}}$;

Pour les racines de $-i$, éviter de passer par les exponentielles complexes ; sur la figure, il apparaît clairement qu'il s'agit des deux points sur le cercle trigonométrique et la 2e bissectrice !



On choisit $\text{Re}(k') > 0$ pour avoir une propagation vers les z croissants, alors :

$$k' = \frac{1-i}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = c \sqrt{\frac{2\tau}{\omega}}$$

Le champ s'écrit aussi :

$$\vec{E}_t = E'_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} \vec{u}_x$$

C'est celui d'une onde progressive dont l'amplitude s'amortit d'un facteur e sur une profondeur δ de ce fait appelé « profondeur de pénétration ».

La vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{\text{Re}(k')} = \omega \delta$ soit $v_\phi = \sqrt{2\omega\tau} c$ dépend de ω ; il y a

dispersion, c'est-à-dire que le conducteur n'a pas le même comportement vis-à-vis d'ondes de fréquences différentes.

Pour 100 MHz (fréquence des ondes radio dans la bande FM), $\delta \approx 6 \mu\text{m}$ appelé « épaisseur de peau » ; par ailleurs $\lambda_0 = 3 \text{ m}$, soit $\delta/\lambda_0 \approx 2.10^{-6}$ et $v_\phi/c \approx 10^{-5}$: l'onde se propage « lentement » et s'amortit « vite ». Le coefficient de transmission en énergie (voir la question 75.) est très faible ($T \approx 3.10^{-5}$), le métal se comporte donc comme un excellent réflecteur pour les ondes hertziennes.

Réflexion sur un conducteur parfait (les questions 18. et 19. sont en complément)

17. Un conducteur parfait est un conducteur dont l'épaisseur de peau δ tend vers zéro ; dans le domaine des ondes hertziennes, $\delta/\lambda_0 \ll 1$ est assuré pour des conductivités σ (très grandes) des métaux ordinaires ; l'hypothèse du métal parfait consiste alors à supposer sa conductivité électrique infinie. Les champs n'ayant d'existence que sur une épaisseur de l'ordre de quelques δ , ne pénètrent donc pas dans le métal : macroscopiquement $\vec{E}_t = \vec{0}$ et $\vec{B}_t = \vec{0}$.

18. Le plan $z = 0$ sépare l'air ($z < 0$) du conducteur parfait ($z > 0$). Si l'onde incidente a un champ électrique $\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$, l'onde réfléchie un champ $\vec{E}_r = r E_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_x$, la continuité $\forall t$ de la composante tangentielle en $z = 0$ donne avec $\vec{E}_t = \vec{0}$:

$$\vec{E}_i(0,t) + \vec{E}_r(0,t) = \vec{E}_t(0,t) \Rightarrow r = -1 :$$

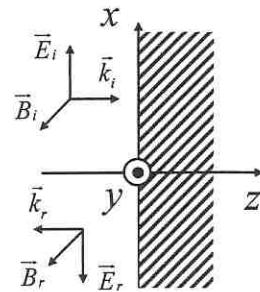
le champ électrique se réfléchit totalement en opposition de phase en $z = 0$.

Alors :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y \text{ et } \vec{B}_r = \frac{-\vec{u}_z \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_y$$

montrent que le champ magnétique se réfléchit totalement en phase en $z = 0$.

Le dessin ci-contre représente les champs en $z = 0$.



La discontinuité en $z = 0$ de la composante tangentielle du champ magnétique rend compte de l'apparition d'un courant surfacique de densité \vec{j}_s donnée par :

$$\vec{0} - (\vec{B}_i(0,t) + \vec{B}_r(0,t)) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z \text{ soit } \boxed{\vec{j}_s(t) = 2\epsilon_0 c E_0 e^{i\omega t} \vec{u}_x}$$

Bien sûr $\vec{j}_s \parallel \vec{E}_i$, en effet c'est le champ électrique incident qui met les électrons libres de la surface du conducteur en mouvement suivant Ox . Cette nappe de courant harmonique engendre à son tour, par rayonnement, une onde plane qui est justement l'onde réfléchie.

19. L'onde résultante pour $z < 0$ est la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie ; en notation réelle :

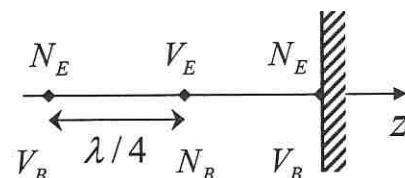
$$\boxed{\vec{E}(z,t) = 2E_0 \sin kz \sin \omega t \vec{u}_x} \text{ et } \boxed{\vec{B}(z,t) = \frac{2E_0}{c} \cos kz \cos \omega t \vec{u}_y}$$

L'onde résultante, comme superposition de deux OPPM de même amplitude et se propageant en sens inverse, a une structure d'onde stationnaire :

- à t fixé, \vec{E} et \vec{B} sont en quadrature spatiale

et donc les nœuds de \vec{E} (N_E) distants de $\lambda/2$ correspondent aux ventres de \vec{B} (V_B) et inversement.

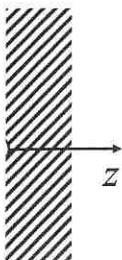
- à z fixé, \vec{E} et \vec{B} sont en quadrature temporelle et non plus en phase comme



nt) pour une OPP.

ers zéro ;
ativités σ
e alors à
que sur
é métal :

cidente a
 $i(\omega t + kz)$ \vec{u}_x ,

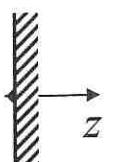


ique rend

électrons
e courant
justement

de l'onde

ude et se



La densité d'énergie électromagnétique $u = \epsilon_0 \vec{E}^2 / 2 + \vec{B}^2 / 2\mu_0$ de l'onde résultante a pour moyenne temporelle $\langle u \rangle = \epsilon_0 E_0^2$; elle est indépendante du point considéré et vaut le double de celle d'une OPPM.

Le vecteur de Poynting $\vec{R} = \vec{E} \wedge \vec{B} / \mu_0 = \epsilon_0 c E_0^2 \sin 2kz \sin 2\omega t \vec{u}_z$ a pour moyenne temporelle $\langle \vec{R} \rangle = \vec{0}$ (les champs sont en quadrature) ; globalement l'énergie ne se propage plus (voir les précisions à la question 43.).

Rayonnement du dipôle oscillant

20. Hypothèse 1 : Le point M d'observation est très éloigné du centre O du dipôle variable $\vec{p}(t) = p_0 \cos \omega t \vec{u}_z$ vis-à-vis de la taille a de ce dernier (les charges opposées sont en $z = \pm a/2$) :

$$OM = r \gg a$$

C'est l'hypothèse dipolaire classique qui justifie les développements limités en a/r .

Hypothèse 2 : La longueur d'onde λ du rayonnement émis (le dipôle oscillant est périodique de période T avec $\lambda = cT$) est très grande devant la taille a du dipôle :

$$\lambda \gg a$$

Cette hypothèse est une conséquence de la faible vitesse devant c des charges mobiles du dipôle oscillant. Elle entraîne que sur la longueur a du conducteur le courant variable I est uniforme, c'est-à-dire indépendant du point source P .

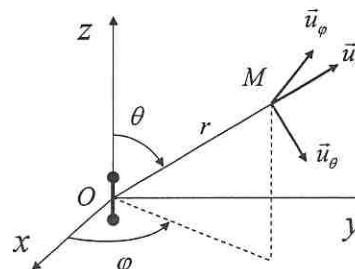
21. Les hypothèses précédentes ne concernent pas λ et r entre eux, il faut donc tenir compte de la propagation (négligeable seulement en ARQS lorsque $r \ll \lambda$, en champ proche). À grande distance (champ lointain), on a en revanche $r \gg \lambda$, d'où finalement la double inégalité :

$$a \ll \lambda \ll r$$

Dans ces conditions, si le moment électrique du dipôle variable s'écrit $\vec{p}(t) = p_0 \cos \omega t \vec{u}_z$, le champ rayonné en un point M est, en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(M) = \alpha \frac{\sin \theta}{r} \cos \omega(t - r/c) \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(M) = \frac{\alpha}{c} \frac{\sin \theta}{r} \cos \omega(t - r/c) \vec{u}_\phi = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c}$$

où le coefficient α est proportionnel à p_0 et ω^2 ($\alpha = -\mu_0 p_0 \omega^2 / 4\pi$). Il s'agit d'une onde sphérique progressive, de célérité c , se propageant $\forall M$ le long de la direction radiale \vec{u}_r .



Elle a une structure transversale, est polarisée rectilignement, $(\vec{u}_r, \vec{E}, \vec{B})$ est direct. Les champs sont orthogonaux, varient en phase et $|\vec{B}| = |\vec{E}|/c$ comme une onde plane progressive (OPP) dans le vide : l'onde a localement une structure d'OPP.

- les champs décroissent en $1/r$ (pour le dipôle électrostatique en $1/r^3$!) d'où un vecteur de Poynting moyen $\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \alpha^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \vec{u}_r$.

La puissance moyenne totale est celle rayonnée à travers une sphère de rayon r :

$$\langle P \rangle = \oint \oint \langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S}$$

soit avec $dS = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$ (une

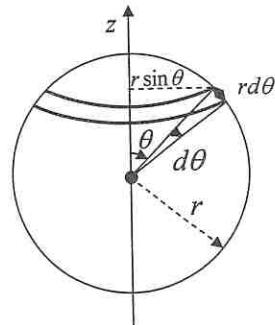
couronne d'axe Oz , de rayon $r \sin \theta$ et d'épaisseur

$$rd\theta), \quad \langle P \rangle = \frac{4}{3} \pi \epsilon_0 c \alpha^2$$

le coefficient numérique venant de

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d(-\cos \theta) = \frac{4}{3}$$

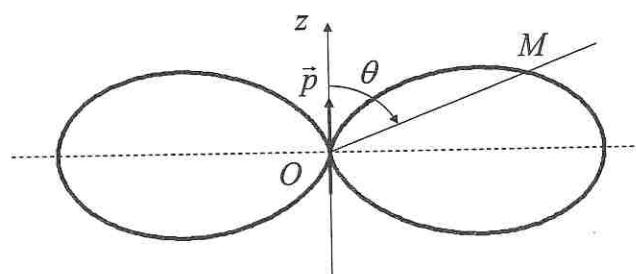
$$\text{d'où } \boxed{\langle P \rangle = \frac{P_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}}$$



Cette puissance est conservée lors de la propagation, en l'absence d'absorption, elle ne dépend pas de r : c'est l'interprétation énergétique de la décroissance des champs en $1/r$.

- le facteur $\sin \theta$ traduit la directivité de l'émission du dipôle oscillant : le long de l'axe polaire $\theta = 0$ il n'y a pas de champ rayonné et il est maximal dans la direction perpendiculaire $\theta = \pi/2$; le rayonnement est qualifié d'anisotrope (différent dans des directions différentes).

Le diagramme de rayonnement est la courbe $|\langle \vec{R} \rangle| = \lambda \sin^2 \theta$ en coordonnées polaires :



22. Le rayonnement solaire interagit avec les molécules de l'atmosphère qui se comportent alors comme des dipôles électriques induits (en régime forcé) qui rayonnent à leur tour des ondes électromagnétiques dans toutes les directions : la lumière du Soleil est diffusée. L'inégalité double $a \ll \lambda \ll r$ est vérifiée ; cette diffusion est celle de Rayleigh. Le rayonnement est partiellement polarisé et sa puissance est en ω^4 (voir les questions 59. et 60.).

23. Équ

24. Le

25. Il s

sui

de

Le

L'

\bar{R}

26. L

de

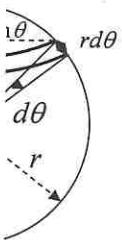
s

c

27.

direct. Les
onde plane

) d'où un
yon r :



ption, elle
sance des
le long de
a direction
érent dans
ordonnées

qui se
forcé) qui
ctions : la
iée ; cette
risé et sa

Applications directes du cours

23. Équation satisfaite par la composante E_x : $\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$.

24. Les deux se propagent dans le sens des z croissants car la phase est en $\omega(t - z/c)$.

25. Il s'agit du champ d'une OPPM polarisée rectilignement suivant \vec{u}_x et se propageant suivant Oz^- (dans le sens des z décroissants) pour $k > 0$. Il est solution de l'équation de d'Alembert, ce qui donne $-k^2 - \frac{1}{c^2}(-\omega^2) = 0$ soit $k = \frac{\omega}{c}$.

$$\text{Le champ magnétique est donné par } \vec{B} = \frac{-\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{c} = -\frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_y.$$

L'obtention du vecteur de Poynting instantané suppose le passage en notation réelle $\vec{R} = -\epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega + kz) \vec{u}_z$ dans le même sens que l'onde.

26. La méthode la plus prudente consiste à revenir à l'équation de Maxwell-Faraday (les dérivées $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ sont sans effet sur le champ, fonction de z seulement) :

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} 0 & E_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} \\ 0 & 0 \\ \partial/\partial z & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_0 (-1/\delta - i/\delta) e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{soit (constante d'intégration nulle en régime d'onde) : } \vec{B} = \frac{1-i}{\omega\delta} E_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} \vec{u}_y.$$

On peut aussi écrire $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$ avec $\vec{k}' = k \vec{u}_z$ et $k' = \frac{1-i}{\delta}$ complexe ; alors

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}' \wedge \vec{E}}{\omega}$$

donne le résultat directement.

27. L'onde est polarisée rectilignement suivant \vec{u}_x , elle est progressive suivant Oz (elle se propage suivant Oz^+), mais n'est pas homogène (son amplitude n'est pas uniforme dans un plan $z = \text{cste}$) ; en fait elle est stationnaire suivant la direction Oy .

La relation de dispersion s'obtient en projetant sur Ox l'équation de d'Alembert écrite pour ce champ :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow -\beta^2 - k_g^2 - \frac{1}{c^2}(-\omega^2) = 0 \text{ soit } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \beta^2 + k_g^2$$

En posant $\beta = k_y$ et $k_g = k_z$, elle traduit simplement le théorème de Pythagore $k^2 = k_y^2 + k_z^2$ pour une OPPM « oblique » de vecteur d'onde $\vec{k} = \pm k_y \vec{u}_y + k_z \vec{u}_z$.

Il est alors facile de vérifier en écrivant $\sin(\beta y) = \frac{e^{i\beta y} - e^{-i\beta y}}{2i}$ que l'onde en question s'obtient par superposition des deux OPPM obliques précédentes, de même amplitude $E_0/2$ et déphasées de π sur le plan $y=0$ (plan de réflexion sur un conducteur parfait) :

$$\underline{\vec{E}} = \frac{E_0}{2i} \exp i[\omega t - (-\beta y + k_g z)] \vec{u}_x - \frac{E_0}{2i} \exp i[\omega t - (\beta y + k_g z)] \vec{u}_x$$

28. La question 5. donne pour une OPPM dans le vide $u = \varepsilon_0 \vec{E}^2$ et $\vec{R} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u}_x$, d'où la relation simple $\vec{R} = u c \vec{u}_x$.

Déterminons la vitesse v_e à laquelle se propage l'énergie comme suit : l'énergie rayonnée pendant dt à travers une surface S perpendiculaire à Ox est celle contenue dans un cylindre de base S et de longueur $v_e dt$ suivant Ox , soit $RSdt = uSv_e dt$ ce qui montre que $v_e = c = v_g$, ce qui est normal en absence de dispersion (égalité des vitesses de phase et de groupe).

29. Pour une onde plane progressive le vecteur de Poynting s'écrit $\vec{R} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u}_x$. Si l'onde est sinusoïdale d'amplitude E_0 , sa valeur moyenne est en norme $\langle R \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2$, d'où la puissance moyenne transportée par l'onde :

$$P_r = \langle R \rangle \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{8P_r}{\pi \varepsilon_0 c d^2}} \text{ soit } E_0 \approx 2.10^5 \text{ V.m}^{-1}, \text{ ce qui est énorme.}$$

30. Il s'agit ici d'une onde longitudinale, la direction de propagation Ox^+ coïncidant avec la direction de « polarisation » \vec{u}_x du champ ; des ondes longitudinales ont été vues parmi les ondes mécaniques (par exemple pour les ondes acoustiques ou les ondes sur une chaîne d'atomes).

L'unique composante E_x du champ ne dépend que de x d'où $\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = \vec{0} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; le champ \vec{B} est donc statique et on peut le prendre nul en régime spatio-temporel d'onde (par inexistence d'un courant continu engendrant un champ statique).

On trouve ces ondes dans les plasmas où une perturbation longitudinale se propage à la pulsation plasma $\omega = \omega_p$. Il y a alors bien un courant de conduction \vec{j} (lié essentiellement au mouvement des électrons) et qui crée un champ magnétique, mais il est exactement compensé par celui créé par le courant de déplacement $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ comme le montre l'équation de Maxwell-Ampère : $\vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D) = \vec{0}$

Le champ magnétique total est bien nul (voir également la question 29. du chapitre 2).

question
amplitude
ducteur

, d'où la

est celle
de ωx , soit
ence de

Si l'onde
 $\frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2$,

orme.

ant avec
été vues
ndes sur

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; le
emporel

rapage à
 \vec{j} (lié
ue, mais

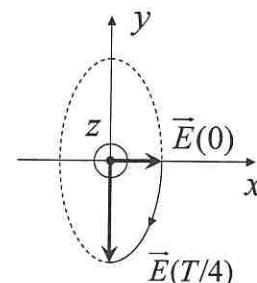
$= \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

pitre 2).

31. Avec $\Phi = \omega t - kz$, on écrit $\vec{E} = E_0 e^{i\Phi} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{E} = \operatorname{Re}(\vec{E}) = E_0 \begin{pmatrix} \cos \Phi \\ -2 \sin \Phi \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour $\Phi = 0$ ($z = 0, t = 0$), $\vec{E}(0) = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour $\Phi = \frac{\pi}{2}$ ($z = 0, t = T/4$), $\vec{E}(T/4) = E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$



Vu le sens de parcours en un quart de tour, il s'agit d'une polarisation elliptique droite de petit axe Ox et de grand axe Oy .

Avec $\vec{E} = E_0 e^{i(kz-\omega t)} (\vec{u}_x + 2i\vec{u}_y)$, la phase diminue cette fois au cours du temps (de $t=0$ à $t=T/4$, la phase passe de $\Phi=0$ à $\Phi=-\pi/2$ en $z=0$), et donc la polarisation elliptique est gauche.

Questions de réflexion ; physique pratique

32. Par décomposition en série de Fourier d'une OPP en OPPM, la structure des OPPM dans le vide se généralise à celle des OPP quelconques (en particulier les relations

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}, \quad u = \epsilon_0 \vec{E}^2 \quad \text{et} \quad \vec{R} = \epsilon_0 c E^2 \vec{u}_x \quad \text{restent vraies pour une OPP dans le vide.)}$$

33. L'OPPM est avant tout très commode pour faire des calculs ! En réalité une onde n'est jamais parfaitement monochromatique et n'existe pas temporellement de $t = -\infty$ à $t = +\infty$; ces deux points sont d'ailleurs reliés car si τ est la durée du train d'onde (évaluée à la question 76.) et $\Delta\nu$ la largeur spectrale de la raie d'émission, on a $\tau \Delta\nu \approx 1$ (résultat utilisé en optique physique).

Par ailleurs une amplitude E_0 indépendante de x et y pour une OPPM se propageant suivant Oz lui donnerait également une étendue spatiale infinie. Il suffit de penser à un faisceau laser dont l'étendue transversale se limite à quelques millimètres pour voir que l'OPPM se propageant suivant Oz est inhomogène et doit s'écrire avec une amplitude $E_0(x, y)$.

34. C'est le choix sur l'origine de t qui le permet (car en général $z = 0$ est imposé).

35. Le vecteur de Poynting est en $E^2(r)$ (r est la distance au point source pris comme origine), la sphère de rayon r a une surface en r^2 , et donc la puissance totale rayonnée est en $E^2(r) \cdot r^2$. Or dans le vide cette puissance est conservée (il n'y a pas

liée au

égré de
soleil.

ahlung)
grande
sion ou
ique, le

articule
ants de
en plus
que de
cindre.

de qui
r (pour
ion est
fié) de
mettant
ue. La

eau) ne
gé avec

dans le
/cm² à
plaqué
s et la

MHz et

quence
voir la
s 2 W
ion des
quence
ortable,

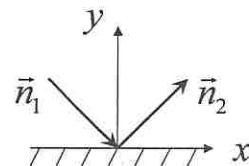
Exercices

66. Superposition de deux ondes obliques

a) Le champ complexe de l'OPPM s'écrit $\vec{E}_1 = E_0 \exp i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) \vec{u}_z$ avec $\vec{k}_1 = \frac{\omega}{c} \vec{n}_1$
dans le vide soit $\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = \frac{\omega}{\sqrt{2}c} (x - y)$ d'où $\vec{E}_1 = E_0 \exp i\omega \left(t - \frac{x-y}{\sqrt{2}c} \right) \vec{u}_z$.

b) Le champ $\vec{E}_2 = -E_0 \exp i\omega \left(t - \frac{x+y}{\sqrt{2}c} \right) \vec{u}_z$ se propage suivant la direction de vecteur
unitaire $\vec{n}_2 (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.

La deuxième onde est obtenue à partir de la première par réflexion sur un plan conducteur parfait placé en $y=0$; sur ce plan, en effet, les deux champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 sont en opposition de phase $\forall t$ et $\forall x$.



c) Le champ électrique résultant, $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, est :

$$\boxed{\vec{E} = 2iE_0 \sin\left(\frac{\omega y}{\sqrt{2}c}\right) \exp i\omega \left(t - \frac{x}{\sqrt{2}c} \right) \vec{u}_z}$$

Cette onde est polarisée suivant Oz , est progressive suivant Ox (elle se propage le long du conducteur) et stationnaire suivant Oy (avec un nœud de champ électrique sur le plan $y=0$).

Un second plan conducteur en $x=l$ permet à des ondes de fréquence donnée (ω est quantifiée par la condition $\vec{E}(y=l, t) = \vec{0}$) d'être guidée entre les deux plans métalliques.

67. Onde cylindrique

a) Il est indispensable de revenir à l'équation de Maxwell-Faraday $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ pour déterminer le champ magnétique. D'après la formule d'analyse vectorielle :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = (E(r) e^{i(\omega t - kr)}) \operatorname{rot} \vec{u}_z + \operatorname{grad} (E(r) e^{i(\omega t - kr)}) \wedge \vec{u}_z = \vec{0} + \left(\frac{dE}{dr} - ikE \right) e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_r \wedge \vec{u}_z$$

car \vec{u}_z est un champ de vecteur uniforme et donc $\operatorname{rot} \vec{u}_z = \vec{0}$.

Alors de $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B} = -\left(\frac{dE}{dr} - ikE \right) e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_\theta$ car \vec{B} varie à la même pulsation,

on déduit
$$\underline{\underline{B}} = \frac{1}{i\omega} \left(\frac{dE}{dr} - ikE \right) e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_\theta$$

La direction de propagation en tout point est \vec{u}_r ; le champ $\vec{E} = E(r) \vec{u}_z$ est transverse (donc respecte $\operatorname{div} \vec{E} = 0$), et il en est de même du champ $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$ (avec $\operatorname{div} \vec{B} = 0$).

- b) Pour déterminer la valeur instantanée du vecteur de Poynting, il est indispensable de revenir à l'expression réelle des champs :

$$\vec{E} = E(r) \cos(\omega t - kr) \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{1}{\omega} \frac{dE}{dr} \sin(\omega t - kr) \vec{u}_\theta - \frac{E(r)}{c} \cos(\omega t - kr) \vec{u}_\theta$$

car l'onde se propageant dans le vide, $k = \frac{\omega}{c}$

$$\text{d'où} \quad \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{1}{2\mu_0\omega} E(r) \frac{dE}{dr} \sin 2(\omega t - kr) \vec{u}_r + \frac{E^2(r)}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kr) \vec{u}_r,$$

et en moyenne temporelle :
$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{E^2(r)}{2\mu_0 c} \vec{u}_r \quad \text{dans le sens de la propagation.}$$

À noter que ce dernier résultat est donné directement par $\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$.

Il apparaît clairement que le terme en dE/dr du champ magnétique, en quadrature par rapport au champ électrique, ne contribue pas à la propagation moyenne de l'énergie. Seul le terme en E du champ magnétique, en phase avec le champ électrique, y contribue.

- c) La puissance moyenne rayonnée à travers un cylindre de rayon r et de hauteur h est :

$$\langle P \rangle = \oint \langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S} \Rightarrow \langle P \rangle = \frac{E^2(r)}{2\mu_0 c} 2\pi r h$$

car $\langle \vec{R} \rangle$ et $d\vec{S}$ sont tous deux colinéaires à \vec{u}_r .

En l'absence d'absorption (il n'y a pas de phénomène dissipatif dans le vide), cette puissance est conservée lors de la propagation : $\langle P \rangle$ est donc indépendant de r , ce qui conduit à un champ électrique $E(r)$ en $1/\sqrt{r}$.

- d) Les deux termes $\frac{dE}{dr}$ et $-ikE$ du champ magnétique sont alors dans un rapport

$$\frac{1}{ikE} \frac{dE}{dr} = \frac{i\lambda}{4\pi r} \quad \text{puisque} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \text{ d'où le champ à grande distance } (r \gg \lambda) :$$

$$\underline{\underline{B}} \approx -\frac{E(r)}{c} e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_\theta = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c}$$

qui s'identifie localement à celui d'une onde plane progressive monochromatique.

68. Pression de radiation corpusculaire (*)

a) Par définition de l'intensité (énergie par unité de surface et par unité de temps) :

$$I = \left| \langle \vec{R} \rangle \right| = \frac{d^2 E}{dS dt} = \frac{d^2 N \cdot h\nu}{dS dt}$$

sachant que les $d^2 N$ photons ont chacun une énergie $h\nu$.

b) La réflexion sur un conducteur parfait étant totale, le choc du photon est élastique, et donc un photon incident de quantité de mouvement $\vec{p}_i = p \vec{u}_z$ engendre un photon réfléchi de quantité de mouvement $\vec{p}_r = -p \vec{u}_z$; la réflexion d'un photon transfère donc au conducteur parfait une quantité de mouvement $2p \vec{u}_z = -(\vec{p}_r - \vec{p}_i)$ opposée à la variation de la sienne.

Les $d^2 N$ photons transfèrent au conducteur une quantité de mouvement totale élémentaire :

$$d^2 \vec{p} = 2 \frac{h\nu}{c} d^2 N \vec{u}_z = 2 \frac{I dS dt}{c} \vec{u}_z$$

correspondant à une pression :

$$P = \left| \frac{d\vec{f}}{dS} \right| = \left| \frac{d^2 \vec{p}}{dS dt} \right| \text{ soit } \boxed{P = \frac{2I}{c}}$$

AN : $I = \langle R \rangle = 4P_r / \pi d^2 = 5,7 \cdot 10^7 \text{ W.m}^{-2}$ d'où $P \approx 0,4 \text{ Pa}$ ce qui est très faible.

Si le faisceau incident est incliné d'un angle θ , alors $P = \frac{2I}{c} \cos^2 \theta$.

Si la surface est absorbante, alors le photon n'est pas restitué (choc mou) soit $P = I/c$ seulement.

69. Conductivité en « haute fréquence »

a) Les électrons subissent régulièrement des chocs sur les imperfections du réseau cristallin perdant ainsi leur énergie cinétique acquise dans le champ ; ce transfert d'énergie du champ au réseau cristallin par l'intermédiaire des électrons constitue l'effet Joule. Plus les électrons vont vite, plus ces chocs sont fréquents ce que le modèle de Drude traduit par une force de frottement opposée à la vitesse. En régime libre (absence de champ) après le dernier choc, la vitesse d'ensemble décroît en un temps caractéristique (ou de relaxation) τ que l'on peut interpréter plus généralement comme la durée entre deux chocs successifs.

b) Négligeant le poids et la force magnétique, la relation fondamentale appliquée à un électron donne $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - m \frac{\vec{v}}{\tau}$.

En régime forcé par l'action du champ $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$, l'électron a un mouvement de même pulsation $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{-i\omega t}$:

$$m \left(-i\omega + \frac{1}{\tau} \right) \vec{v} = -e \vec{E} \text{ qui conduit à la densité de courant :}$$

$$\boxed{\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2\tau/m}{1-i\omega\tau} \vec{E} \equiv \sigma \vec{E}}$$

La conductivité complexe σ s'exprime par $\boxed{\sigma = \frac{\sigma_0}{1-i\omega\tau}}$ avec $\boxed{\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}}$

- pour $\omega\tau \ll 1$, $\sigma \approx \sigma_0$: conductivité réelle « basse fréquence » avec \vec{j} et \vec{E} en phase
- pour $\omega\tau \gg 1$, $\sigma \approx \frac{i\sigma_0}{\omega\tau}$: conductivité imaginaire pure (comme dans un plasma) avec \vec{j} et \vec{E} en quadrature

AN : $\underline{\tau = 2,4 \cdot 10^{-14} \text{ s}}$, on a $\sigma \approx \sigma_0$ tant que $f \ll \frac{1}{2\pi\tau} = 6,6 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$ (en gros jusqu'à 10 GHz, domaine des ondes hertziennes inclus).

- c) La puissance volumique moyenne dissipée dans le métal est :

$$\boxed{\langle P_v \rangle = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{j} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{2} E_0^2 \operatorname{Re}(\sigma) \Rightarrow \langle P_v \rangle = \frac{\sigma E_0^2}{2(1+\omega^2\tau^2)}}$$

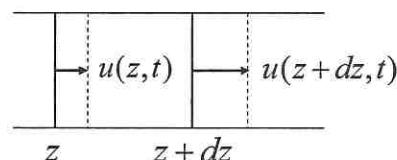
- pour $\omega\tau \ll 1$, $\langle P_v \rangle \approx \frac{\sigma E_0^2}{2}$ c'est l'effet Joule habituel ; le conducteur absorbe l'onde.
- pour $\omega\tau \gg 1$, $\langle P_v \rangle \approx \frac{\sigma E_0^2}{2\omega^2\tau^2}$ devient négligeable par rapport au cas précédent ; le conducteur devient transparent dans l'ultraviolet ($f \gg 6,6 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$ soit à partir de 10^{15} Hz) ; la fréquence des oscillations est tellement élevée que l'électron parcourt une distance inférieure à la distance habituelle entre deux chocs qui ne se font donc plus.

70. Oscillations et pulsation de plasma

- a) La conservation du nombre d'électrons compris au repos dans la tranche de section S entre z et $z+dz$ (en trait plein) et au cours du mouvement dans la tranche en pointillé s'écrit :

$$n^- S [dz + u(z+dz, t) - u(z, t)] = n S dz$$

d'où à l'ordre 1 puisque $\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \ll 1$: $n^- \left(1 + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = n$, puis $n^- \approx n \left(1 - \frac{\partial u}{\partial z} \right)$



Rq : Si comme sur la figure, u augmente avec z à t fixé soit $\frac{\partial u}{\partial z} > 0$, alors le même nombre d'électrons est réparti dans un volume plus grand et donc leur densité diminue, c'est bien ce que donne le résultat $n^- < n$.

Les ions étant fixes (car beaucoup plus inertes que les électrons), leur densité n'a pas varié soit $n^+ = n$, d'où la densité de charge totale :

$$\rho = n^+ e + n^- e \Rightarrow \boxed{\rho(z, t) = ne \frac{\partial u}{\partial z}}$$

b) Les propriétés de symétrie (tout plan contenant Oz est plan de symétrie) et d'invariance (par translation dans un plan perpendiculaire à Oz) du système de charges conduisent à un champ électrique résultant porté par l'axe Oz et dont la seule composante ne dépend que de z et de t : $\vec{E} = E(z, t)\vec{u}_z$, champ manifestement divergent (puisque E_z dépend de z) et longitudinal.

L'équation de Maxwell-Gauss, $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, s'écrit alors :

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{ne}{\epsilon_0} \frac{\partial u}{\partial z} \text{ soit } \boxed{\vec{E}(z, t) = \frac{ne}{\epsilon_0} u(z, t) \vec{u}_z}$$

le champ résultant étant nul dans un plasma au repos ($u = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$).

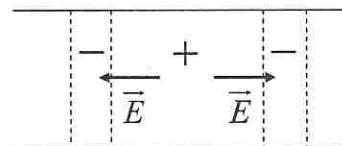
La relation fondamentale de la dynamique appliquée au « fluide » d'électrons de la tranche s'écrit au premier ordre et après simplification par $n^- S dz$:

$$m \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = -e \vec{E} = -\frac{ne^2}{\epsilon_0} \vec{u}$$

d'où un mouvement oscillatoire de pulsation

$$\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}}}$$

Rq : L'équation montre que l'action du champ électrique créé par une perturbation mécanique initiale est équivalente à une force de rappel ce qui se comprend aisément ; le champ électrique est dirigé des tranches dilatées (globalement positives) vers les tranches comprimées (globalement négatives), et donc provoque le retour des électrons (penser à $\vec{F} = -e \vec{E}$). En fait, en l'absence de frottement, mouvement (terme d'inertie) et champ (terme de rappel) s'entretiennent mutuellement (c'est l'équivalent d'un système masse-ressort comme pour les ondes acoustiques).



AN : $n = 10^{12} \text{ m}^{-3} \Rightarrow f_p \approx 9 \text{ MHz}$ (ondes décimétriques)

$n = 10^{21} \text{ m}^{-3} \Rightarrow f_p \approx 280 \text{ GHz}$ (ondes millimétriques).

71. Transparency ou non d'un plasma

a) Le poids et la force magnétique (électrons non relativistes) sont négligeables devant la force électrique. Vu la faible densité ($n \approx 10^{11} \text{ m}^{-3}$ dans l'ionosphère), les forces électromagnétiques entre électrons ou entre électrons et cations sont négligées. Les électrons s'y déplacent donc sans résistance (il n'y a pas d'effet Joule comme dans un conducteur) permettant aux ondes électromagnétiques de s'y propager sans s'amortir.

b) Le champ des vecteurs accélération pour un fluide est $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$.

En régime forcé, le champ $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$ impose un champ de vitesse de la forme $\vec{v} = v(x, t) \vec{u}_y$, soit $\nabla \vec{v} \parallel \vec{u}_x$ d'où $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = 0$ (pas de dérivée convective).

L'équation d'Euler (théorie mésoscopique) appliquée à un volume $d\tau$ contenant $n_0 d\tau$ électrons de charge $-e$, en gardant le même n_0 qu'en l'absence de champ car les mouvements d'ensemble transverses ne modifient pas la densité n_0 , donne :

$$m(n_0 d\tau) \vec{a} = -e(n_0 d\tau) \underline{\vec{E}} \text{ soit, d'après ce qui précède } m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e \underline{\vec{E}}$$

(cette dernière relation donne l'illusion d'une théorie microscopique avec la RFD appliquée à un seul électron).

En régime forcé, \vec{v} est du type $\vec{v} = v_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$; la relation précédente donne :

$$\vec{v} = \frac{ie}{m\omega} \underline{\vec{E}} \text{ (champ et vitesse sont en quadrature)}$$

Les cations (molécules de l'atmosphère ayant perdu un électron) soumis à la même force, mais de masse bien plus élevée que les électrons, sont peu mobiles et contribuent peu à la densité de courant (on les suppose immobiles) d'où :

$$\underline{\vec{j}} \approx -n_0 e \vec{v} = -i \frac{n_0 e^2}{m\omega} \underline{\vec{E}}$$

conduisant par $\underline{\vec{j}} = \sigma \underline{\vec{E}}$ à une conductivité complexe : $\boxed{\sigma = -i \frac{n_0 e^2}{m\omega}}$

indiquant que les champs $\underline{\vec{j}}$ et $\underline{\vec{E}}$ sont en quadrature.

La puissance volumique moyenne fournie par le champ aux électrons est alors nulle (voir la question 6.) ce qui est conforme aux conclusions de la question a).

c) Pour chercher la relation temporelle entre $\underline{\vec{j}}$ et $\underline{\vec{E}}$, dérivons la relation $\underline{\vec{j}} = -n_0 e \vec{v}$ en tenant compte de l'équation d'Euler ; il vient :

$$\frac{\partial \underline{\vec{j}}}{\partial t} = -n_0 e \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{n_0 e^2}{m} \underline{\vec{E}} \quad (1)$$

Cette relation pouvait aussi s'obtenir par la loi d'Ohm avec $i\omega \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}$.

Par ailleurs rappelons (voir b)) qu'au passage de l'onde, le plasma reste neutre $\rho = 0$; ceci est lié au type d'onde recherchée $\underline{\vec{E}} = E(x, t) \vec{u}_y$, transversale,

conduisant directement à $\operatorname{div} \vec{E} = 0$. On peut s'en convaincre autrement par $\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, qui avec la loi d'Ohm et l'équation de Maxwell-Gauss conduit à $(\sigma/\epsilon_0 + i\omega)\rho = 0$; la parenthèse ne s'annule que pour $\omega = \omega_p$, la pulsation de plasma, ce qui est exclu ici, d'où $\rho = 0$.

La relation constitutive (1) associée aux équations de Maxwell :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

conduit en évaluant $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}$ à l'équation du champ électrique :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\mu_0 n_0 e^2}{m} \vec{E} = \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{E} \quad \text{où} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m}} \quad \text{est la pulsation de plasma}$$

En y injectant le champ $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$, il vient l'équation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

La relation $k(\omega)$ n'est pas linéaire d'où la dispersion ; la condition $n_0 = 0$ (absence de plasma) redonne $k = \omega/c$ (le vide).

AN : Pour $n \approx 10^{11} \text{ m}^{-3}$, on calcule $f_p \approx 3 \text{ MHz}$, soit $\lambda_p \approx 100 \text{ m}$.

d) Pour $\omega < \omega_p$, $k^2 < 0$, $k = -i \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$ imaginaire pur, le signe $-$ étant justifié par le fait que l'amplitude ne peut devenir infinie lorsque x augmente. En notant $k = -ik'$ avec k' réel positif, on a $\vec{E}(x, t) = E_0 e^{-k'x} \cos \omega t \vec{u}_y$.

Cette onde ne se propage pas (elle n'est pas progressive) ; elle fait du « sur place » et n'est pas stationnaire au sens habituel du terme (ni nœuds ni ventres) ; on dit qu'elle est évanescante car son amplitude diminue sur une distance caractéristique $\delta(\omega) = 1/k'$ (soit en $e^{-x/\delta}$).

Son champ magnétique (obtenu par Maxwell-Faraday) est :

$$\vec{B}(x, t) = \frac{E_0}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} \cdot e^{-k'x} \sin \omega t \vec{u}_z, \quad \text{en quadrature avec } \vec{E} \quad \text{ce qui assure un vecteur}$$

de Poynting moyen $\langle \vec{R} \rangle = \vec{0}$; en moyenne l'onde évanescante ne rayonne pas d'énergie.

Envoyée depuis le sol, une OPPM ne peut pénétrer dans l'ionosphère si sa fréquence est trop faible ($\omega < \omega_p$) ; elle s'y réfléchit comme sur un miroir (voir la question 51.).

e) Pour $\omega > \omega_p$, $k^2 > 0$, $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ réel choisi positif pour assurer une propagation vers les x croissants. On a cette fois une véritable OPPM $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - k(x)) \vec{u}_y$ de vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega^2 / \omega_p^2}}$ et de vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \omega^2 / \omega_p^2}$.

Envoyée depuis le sol, une OPPM peut pénétrer dans l'ionosphère (si sa fréquence est suffisante $\omega > \omega_p$) qui devient alors transparent (voir la question 51.).

72. Réflexion normale d'une OPPM polarisée circulairement

a) La condition de continuité sur le conducteur parfait $\underline{E}_i(z=0) + \underline{E}_r(z=0) = \underline{0} \quad \forall t$ détermine le champ de l'onde réfléchie :

$$\underline{E}_r = -E_0 e^{i(\omega t + kz)} \begin{vmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{vmatrix}$$

en opposition de phase (au niveau du plan du conducteur) sur le champ incident.

L'onde incidente a une polarisation circulaire droite (voir la question 31.), et l'onde réfléchie une polarisation circulaire gauche (voir la question 45.).

D'où le champ résultant : $\underline{E} = \underline{E}_i + \underline{E}_r \Rightarrow \underline{E} = 2E_0 \sin kz e^{i\omega t} \begin{vmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

b) Champs magnétiques incident $\underline{B}_i = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ et réfléchi $\underline{B}_r = \frac{-\vec{u}_z \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kz)} \begin{vmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ sont en phase sur le plan $z=0$.

D'où le champ résultant : $\underline{B} = \underline{B}_i + \underline{B}_r \Rightarrow \underline{B} = \frac{2E_0}{c} \cos kz e^{i\omega t} \begin{vmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

Les champs $\underline{E} = 2E_0 \sin kz \begin{vmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{vmatrix}$ et $\underline{B} = \frac{2E_0}{c} \cos kz \begin{vmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{vmatrix}$ vibrent en phase,

sont en quadrature spatiale, mais surtout on constate qu'ils sont parallèles ! Ceci est

une curiosité, mais pas une aberration car l'onde résultante est stationnaire (et non progressive).

c) Les valeurs instantanées se calculent en notation réelle :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow \boxed{\vec{R} = \vec{0}}$$

puisque \vec{E} et \vec{B} sont parallèles.

Cette fois donc, l'énergie ne se propage plus, et ce de manière instantanée (car pour une polarisation rectiligne, on a $\vec{R} \neq \vec{0}$ et seulement $\langle \vec{R} \rangle = \vec{0}$).

$$\text{Par ailleurs, } u = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} = 2\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2 kz + \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2 kz \Rightarrow \boxed{u = 2\varepsilon_0 E_0^2}$$

valeur indépendante du temps (et donc $\langle u \rangle = u$) et de l'espace : la densité d'énergie est constante et uniforme.

d) Le champ \vec{E} n'a pas de composante normale au conducteur (suivant Oz) et donc en l'absence de discontinuité : $\boxed{\sigma = 0}$

La composante tangentielle de \vec{B} est discontinue en $z = 0$:

$$\vec{0} - \vec{B}(z=0) = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{u}_z$$

En cherchant *a priori* \vec{j}_S sous la forme $\vec{j}_S = e^{i\omega t} \begin{cases} a \\ b \\ 0 \end{cases}$ car dans le plan xOy en $z = 0$,

$$\text{il vient facilement : } \vec{j}_S = 2\varepsilon_0 c E_0 e^{i\omega t} \begin{cases} 1 \\ i \\ 0 \end{cases}$$

Bien sûr \vec{j}_S est colinéaire à \vec{E}_i puisque c'est le champ électrique incident en $z = 0$ qui met les électrons de conduction en mouvement ; c'est ce mouvement qui, par rayonnement, est à l'origine de l'onde réfléchie.

73. Ligne à ruban

a) Les champs sont nuls dans les conducteurs parfaits ; les relations de passage des champs sur le ruban supérieur (en notant 2 l'air et 1 le conducteur) sont :

$$\vec{B} - \vec{0} = \mu_0 j_S \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y \Rightarrow \vec{B}(x, t) = \mu_0 j_S(x, t) \vec{u}_z \quad (1)$$

$$\text{et } \vec{E} - \vec{0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_y \Rightarrow \vec{E}(x, t) = \frac{\sigma(x, t)}{\varepsilon_0} \vec{u}_y \quad (2)$$

Sur le ruban inférieur, les grandeurs $-\vec{j}_S$, $-\vec{u}_y$ et $-\sigma$ conduisent aux mêmes champs et donc en l'absence de charges et de courants dans l'espace interconducteur (ici l'air), les champs y sont uniformes (indépendants de y et z) ; le fait d'être transverses et fonctions de x montre qu'ils sont à rotationnel non nul.

b) Considérons une tranche d'épaisseur dx et de volume $d\tau = abdx$:

$$dU_m = \frac{\bar{B}^2}{2\mu_0} d\tau = \frac{\mu_0 ab}{2} j_s^2(x, t) dx = \frac{\mu_0 b}{2a} i^2(x, t) dx$$

car le courant sur le ruban est $i = a j_s$

En identifiant à $dU_m = \frac{1}{2} L dx i^2$, il vient : $L = \mu_0 b / a$

De même, $dU_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \bar{E}^2 d\tau = \frac{ab}{2\varepsilon_0} \sigma^2(x, t) dx = \frac{b}{2\varepsilon_0 a} \frac{dq^2(x, t)}{dx}$

car la charge sur l'élément de ruban est $dq = \sigma a dx$.

En identifiant à $dU_e = \frac{1}{2} \frac{dq^2}{C dx}$, il vient : $C = \varepsilon_0 a / b$

Le produit des grandeurs linéaires vaut : $LC = \mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$

c) L'équation de Maxwell-Faraday $\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ s'écrit avec les champs (1) et (2) :

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \nabla \times \bar{u}_y + \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \sigma \wedge \bar{u}_y = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} \text{ soit } \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial j_s}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

L'équation de Maxwell-Ampère $\nabla \times \bar{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$ (car $\vec{j} = \vec{0}$ entre les plaques) s'écrit de même :

$$\mu_0 j_s \nabla \times \bar{u}_z + \mu_0 \nabla \cdot j_s \wedge \bar{u}_z = \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \bar{u}_y \text{ soit } \frac{\partial j_s}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

Les deux relations (3) et (4) conduisent facilement à des équations de d'Alembert pour j_s et σ :

$$\frac{\partial^2 j_s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 j_s}{\partial t^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0$$

Ceci justifie la dénomination d'ondes pour $j_s(x, t)$ et $\sigma(x, t)$; leur vitesse de phase commune est c , la vitesse de la lumière dans le vide.

d) Au courant i correspond une densité surfacique $j_s = i/a$, et donc un champ

magnétique d'après la relation (1) : $\bar{B}(x, t) = \frac{\mu_0 i}{a} \bar{u}_z = \frac{\mu_0 I_0}{a} e^{i(\omega t - kx)} \bar{u}_z$

Les relations (4) ou (3) associent à l'onde j_s une onde $\sigma = j_s / c = i / ca$, et donc

un champ électrique d'après la relation (2) : $\bar{E}(x, t) = \frac{i}{\varepsilon_0 ca} \bar{u}_y = \frac{I_0}{\varepsilon_0 ca} e^{i(\omega t - kx)} \bar{u}_y$

Le champ électromagnétique, avec $\bar{B} = \bar{u}_x \wedge \bar{E} / c$, a une structure d'OPPM qui est celle de l'onde plane progressive dans le vide illimité.

74. Guide d'onde rectangulaire (*)

a) Dans le vide le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \text{ soit ici } \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \text{ car } E_x = E_x(y, z, t)$$

ce qui conduit à :

$$f''(y) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 \right) f(y) = 0$$

b) Le métal étant parfait (conductivité infinie), le champ électrique y est nul ; par continuité de la composante tangentielle de \vec{E} (\vec{E} est suivant \vec{u}_x , il est donc tangent aux parois parallèles à Oxz), il faut $\vec{E}(y=0) = \vec{E}(y=b) = \vec{0}$, d'où $f(y=0) = f(y=b) = 0$. Une solution en exponentielles ne permet pas de satisfaire cette double condition et donc nécessairement $\omega^2/c^2 - k_g^2 > 0$, d'où :

$$f(y) = E^0 \sin \left[\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2} \cdot y + \varphi \right]$$

$$* f(y=0) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$* f(y=b) = 0 \Rightarrow \sin \left[\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2} \cdot b \right] = 0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 = \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \quad (1)$$

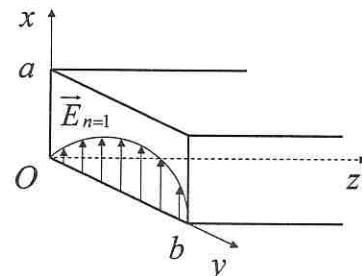
$$\text{d'où pour le mode } n : \quad f_n(y) = E_n^0 \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*$$

Le champ électrique s'écrit alors :

$$\vec{E}_n = E_n^0 \sin \frac{n\pi y}{b} \cos(\omega t - k_g z) \vec{u}_x$$

ce qui confère à l'onde un caractère hybride : progressive suivant Oz et stationnaire suivant Oy (le champ électrique étant polarisé suivant Ox).

Sur les parois $x=0$ et $x=a$ où le champ \vec{E} est normal, on constate une discontinuité du champ, d'où l'apparition de densités surfaciques de charges $\pm \sigma$ (car les normales aux parois en regard changent de sens) avec $\sigma(y, z, t)$.



c) Comme le champ électrique n'est pas celui d'une OPPM homogène, il est indispensable de revenir à l'équation de Maxwell-Faraday pour déterminer le champ magnétique.

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} 0 & E(y, z) \\ \partial/\partial y & 0 \\ \partial/\partial z & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ k_g E_n^0 \sin \frac{n\pi y}{b} \sin(\omega t - k_g z) \\ -\frac{n\pi}{b} E_n^0 \cos \frac{n\pi y}{b} \cos(\omega t - k_g z) \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Le champ \vec{B} où les constantes d'intégration sont nulles (le système ne comporte pas de courants continus, il n'y a pas de champ magnétique statique) s'écrit :

$$\boxed{\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k_g}{\omega} E_n^0 \sin \frac{n\pi y}{b} \cos(\omega t - k_g z) \\ \frac{n\pi}{b\omega} E_n^0 \cos \frac{n\pi y}{b} \sin(\omega t - k_g z) \end{pmatrix}}$$

Alors que le champ \vec{E} est polarisé rectilignement suivant \vec{u}_x , le champ \vec{B} possède une composante transversale B_y (en phase avec E_y) et une composante longitudinale B_z suivant la direction de propagation (en quadrature avec E_y). L'onde est dite transverse électrique, mais elle n'est pas transverse magnétique.

Comme \vec{E} , \vec{B} est nul dans le métal parfait. Sur les plans $y=0$ et $y=b$, B_y est une composante normale donc continue et on a bien $B_y(y=0) = B_y(y=b) = 0$.

En revanche sur ces mêmes plans, B_z est composante tangentielle et non nulle ; cette discontinuité est liée à des courants surfaciques selon \vec{u}_x et variables permettant d'expliquer les densités de charges variables $\pm\sigma$ sur les parois $x=0$ et $x=a$ de la question a).

En $x=0$ et $x=a$, pas de composante normale ($B_x=0$) donc continuité assurée, mais B_y et B_z sont toutes les deux tangentielles et non nulles, d'où l'existence de courants surfaciques sur ces plans.

d) La relation (1) : $k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2}$ conduit à $\boxed{k_g = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c}{b\omega}\right)^2}} \quad (1')$

Cette écriture où $k_g \geq 0$ suppose $\omega \geq \omega_{c,n} = \frac{n\pi c}{b}$ d'où une fréquence de coupure :

$$\boxed{f_{c,n} = \frac{n}{2b} \frac{c}{2}}$$

dépendant du mode n .

AN : La fréquence la plus basse est obtenue pour $n=1$ d'où $b = \frac{c}{2f_{c,1}} = 6 \text{ cm}$

- e) La phase de l'onde est $\omega t - k_g z$; la vitesse de phase est donc $v_\phi = \frac{\omega}{k_g}$, soit d'après la relation (1') :

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - (f_{c,n}/f)^2}} > c$$

Cette vitesse de phase est fonction de la fréquence (il y a dispersion) ce qui n'est pas étonnant puisque la relation de dispersion (1) entre k_g et ω n'est pas linéaire.

La vitesse de groupe est définie par $v_g = \frac{d\omega}{dk_g}$; en différentiant la relation (1)

$$k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}, \text{ il vient :}$$

$$2k_g dk_g = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk_g} = \frac{c^2 k_g}{\omega} = \frac{c^2}{v_\phi} \text{ ou encore } v_\phi v_g = c^2$$

$$\text{d'où } v_\phi = c \sqrt{1 - (f_{c,n}/f)^2} < c$$

$$\text{AN : } v_\phi = 3,46 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1} \text{ et } v_g = 2,60 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}.$$

- f) Le champ électrique du mode n , en notation complexe avec $k_s = \frac{n\pi}{b}$, soit

$$\vec{E} = E_n^0 \sin k_s y \exp i(\omega t - k_g z) \vec{u}_x \text{ s'écrit avec } \sin k_s y = \frac{1}{2} (\exp(ik_s y) - \exp(-ik_s y)) :$$

$$\vec{E} = \frac{E_n^0}{2} \exp i(\omega t - (-k_s y + k_g z)) \vec{u}_x - \frac{E_n^0}{2} \exp i(\omega t - (k_s y + k_g z)) \vec{u}_x$$

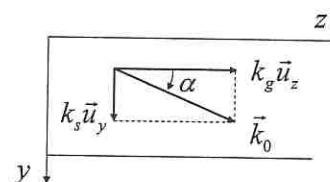
Cette onde est bien la superposition de deux ondes obliques de vecteurs d'onde :

$$\vec{k}_0 = \pm k_s \vec{u}_y + k_g \vec{u}_z \quad (2) \text{ (identifier les phases à } \omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r})$$

donc se propageant en zigzag dans le vide intérieur au guide, soit $k_0 = \omega/c$, avec réflexions totales sur les parois $y=0$ et $y=b$; en effet pour ces valeurs $k_s y = 0$ ou $k_s y = n\pi$ et donc dans les deux cas, ces deux ondes sont en opposition de phase sur ces plans prouvant que chacune est obtenue par réflexion de l'autre.

Ainsi l'onde incidente et l'onde réfléchie sur la paroi donnent suivant Oz une onde progressive par superposition de deux ondes progressives se propageant dans le même sens et suivant Oy une onde stationnaire par superposition de deux ondes progressives (de même amplitude) mais se propageant en sens inverse, d'où la quantification.

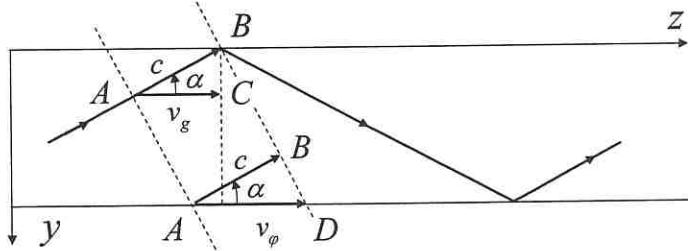
Le théorème de Pythagore à partir de la relation vectorielle (2) conduit à :



$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k_s^2 + k_g^2 = \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + k_g^2$$

qui n'est autre que la relation de dispersion (1).

D'où $\cos \alpha = \frac{k_g}{k_0} = \frac{\omega/v_\phi}{\omega/c} = \frac{c}{v_\phi} = \frac{v_g}{c}$ (3) puisque $v_\phi v_g = c^2$



Lorsque l'onde oblique se propage dans le vide de A à B à la vitesse c , alors dans le même temps l'information liée au transport d'énergie avance de A à C à la vitesse de groupe v_g (dont on peut montrer dans cette situation qu'elle s'identifie à la vitesse de l'énergie) ; la construction montre qu'alors $v_g = c \cos \alpha < c$, vrai d'après la relation (3).

En revanche, dans le même temps, le plan d'onde progresse le long de l'axe Oz de A à D à la vitesse de phase v_ϕ ; la construction montre qu'alors $v_\phi = c / \cos \alpha > c$, vrai d'après la relation (3).

75. Réflexion / transmission sur un conducteur réel (*)

a) Pour une OPPM dans le vide, $\vec{B}_i = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_i}{c}$ soit $\vec{B}_i = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y$.

Le champ électrique de l'onde réfléchie est pris sous la forme $\underline{\vec{E}}_r = r E_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_x$;

alors le champ magnétique est $\vec{B}_r = \frac{-\vec{u}_z \wedge \vec{E}_r}{c}$ soit $\vec{B}_r = -\frac{r E_0}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_y$.

b) Vu la structure de l'onde (détailée questions 14. à 16.), il est prudent de revenir à l'équation de Maxwell-Faraday (voir aussi la question 26.) :

$$\text{rot } \vec{E}_t = \begin{vmatrix} 0 & \frac{t E_0 e^{i(\omega t - kz)}}{0} \\ 0 & 0 \\ \partial/\partial z & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -ik' t E_0 e^{i(\omega t - kz)} \\ 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}_t}{\partial t}$$

d'où $\vec{B}_t = \frac{k'}{\omega} t E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y$ soit avec $\frac{k'}{\omega} = \frac{1-i}{\delta\omega} = \frac{1-i}{\alpha c}$: $\boxed{\vec{B}_t = \frac{1-i}{\alpha c} t E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y}$

c) Continuité de la composante tangentielle de \vec{E} (soit ici E_x) en $z=0$, $\forall t$:

$$1+r=t \quad (1)$$

Continuité de la composante tangentielle de \vec{B} (soit ici B_y) en $z=0$, $\forall t$ car il n'y a pas de densité surfacique de courant sur un conducteur réel à l'échelle mésoscopique :

$$1 + \underline{r} = \frac{1-i}{\alpha} \underline{t} \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) conduisent au résultat demandé :

$$\underline{r} = -\frac{1-\alpha-i}{1+\alpha-i} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2\alpha}{1+\alpha-i}$$

Ces coefficients, par α , dépendent de la fréquence de l'onde et de la conductivité du métal ; le fait qu'ils soient complexes signifie que l'onde réfléchie et l'onde transmise sont déphasées au niveau de l'interface sur l'onde incidente.

Le conducteur parfait ($\sigma \rightarrow \infty$) correspond à la limite $\alpha = \sqrt{2\omega\tau} = \sqrt{2\varepsilon_0\omega/\sigma} \rightarrow 0$, d'où $\underline{r} \rightarrow -1$ et $\underline{t} \rightarrow 0$; on retrouve la réflexion totale en opposition de phase du champ électrique.

d) Pour évaluer les vecteurs de Poynting moyens en $z=0$, utilisons la formule :

$$\begin{aligned} <\vec{R}> &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right), \text{ d'où } <\vec{R}_i> = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z; \quad <\vec{R}_r> = -\frac{E_0^2}{2\mu_0 c} |\underline{r}|^2 \vec{u}_z \\ \text{et } <\vec{R}_r> &= \frac{E_0^2}{2\mu_0 \alpha c} \operatorname{Re} [\underline{t}(1+i)\underline{t}^*] \vec{u}_z = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \alpha c} |\underline{t}|^2 \vec{u}_z \end{aligned}$$

Soit $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$ un élément de surface orientée de l'interface en $z=0$; les coefficients de réflexion R et de transmission T en énergie sont définis par le rapport des puissances moyennes rayonnées à travers $d\vec{S}$:

$$R = \frac{|<\vec{R}_r>.d\vec{S}|}{<\vec{R}_i>.d\vec{S}} = |\underline{r}|^2 \Rightarrow R = \frac{(1-\alpha)^2 + 1}{(1+\alpha)^2 + 1}$$

$$T = \frac{|<\vec{R}_i>.d\vec{S}|}{<\vec{R}_i>.d\vec{S}} = \frac{|\underline{t}|^2}{\alpha} \Rightarrow T = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2 + 1}$$

Il apparaît que $R+T=1$ ce qui traduit la conservation du flux d'énergie au niveau de l'interface.

Avec $\alpha \ll 1$, on a $R \approx \frac{2-2\alpha}{2+2\alpha}$ soit $R \approx 1-2\alpha$ et donc $T \approx 2\alpha$

AN : $T = 5 \cdot 10^{-5}$

Très peu d'énergie électromagnétique pénètre dans le métal qui se comporte comme un excellent réflecteur ; il sert d'écran aux ondes radio.

Il est intéressant de compléter cet exercice par la question 41.

76. Durée de vie d'un état excité

- a) Il s'agit des hypothèses de la question 20. et de la condition du champ lointain, soit la double inégalité : $r_a \approx 0,1 \text{ nm} \ll \lambda \approx 0,5 \mu\text{m} \ll r \approx \text{qqs } 10 \text{ cm}$ où r_a est le rayon atomique (la taille du dipôle), λ la longueur d'onde émise et r la distance d'observation.

$$\text{Avec } \vec{p} = -e\vec{r}_a, \text{ soit } p_0 = er_a, \text{ il vient : } \boxed{\langle P \rangle = \frac{e^2 r_a^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}}$$

- b) L'électrodynamique classique prévoit le rayonnement de l'atome (le système électron / proton -dans le noyau- forme un dipôle tournant donc variable) et donc son instabilité par désintégration de la matière. La mécanique quantique prévoit au contraire pour l'atome l'existence d'états stationnaires (les solutions quantifiées de l'équation de Schrödinger) avec émission possible d'un photon d'énergie $h\nu = E_2 - E_1$ lors de la transition électronique d'un état stationnaire d'énergie E_2 à un autre d'énergie E_1 moindre, d'où la contradiction.

En fait, dans un état stationnaire, un atome ne rayonne pas, mais entre deux états d'énergie stationnaire, le rayonnement permis par la mécanique quantique correspond à celui prévu par l'électrodynamique classique.

Assimilons la puissance moyenne (sur une période) $\langle P \rangle$ rayonnée, supposée constante au cours de la transition, au rapport de l'énergie ΔE émise sur la durée d'émission τ :

$$\langle P \rangle = \frac{\Delta E}{\tau} = \frac{h\nu}{\tau} = \frac{h\omega}{2\pi\tau} = \frac{e^2 r_a^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{3h\epsilon_0 \lambda^3}{4\pi^3 e^2 r_a^2}}$$

AN : $\tau \approx 3 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ en prenant $\lambda \approx 0,5 \mu\text{m}$ et $r_a \approx 0,5 \text{ nm}$.

Cette durée τ conditionne la largeur naturelle de la raie d'émission, faible devant la largeur Doppler aux températures usuelles (paramètres importants en optique ondulatoire).

Travaux Pratiques

77. Si l'on dispose l'un derrière l'autre deux polariseurs dont les axes font entre eux un angle α , on obtient à la sortie du 2ème polariseur (appelé analyseur) un faisceau dont l'intensité I est reliée à l'intensité I_0 du faisceau ayant franchi le 1er polariseur par la relation $I = I_0 \cos^2 \alpha$ (loi de Malus, vue à la question 11.). Les variations de l'éclairement de l'écran par rotation de l'analyseur sont une preuve du caractère vectoriel de la lumière.

78. Polariseurs et analyseurs fonctionnent pour toute longueur d'onde, et donc en lumière blanche. En revanche une lame n'est demi-onde ($\lambda_0/2$) ou quart d'onde ($\lambda_0/4$) que