Translation Non uniforme

Soit ascenseur (R') en acc. $\vec{a_e}$ par rapport à $R_{\text{terrestre}}$ galiléen et M en équilibre sur support dans R'.

- Obs. O voit M soumis à $\vec{P} = \underset{\text{m gravitationnelle}}{m_g} \vec{g}$ et $\vec{R}_{\text{support}}$

et $\left| \begin{array}{l} \vec{a}(M/R') = \vec{0} \\ \vec{a_c} = \vec{0} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{a}(M/R) = \vec{a_e}$

$$\therefore \vec{P} + \vec{R} = \underbrace{m_i}_{\text{m. d'inertie}} \vec{a_e}$$

- Obs. O' sait qu'il est ds réf non galiléen $\therefore$ en plus que $\vec{P}$ et $\vec{R}$, il voit force supplémentaire $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F_{ie}} = m_i \vec{a}(M/R') = \vec{0}$

$$\vec{P} + \vec{R} - m_i \vec{a_e} = \vec{0}$$

Donc les 2 obs. aboutissent aux m̂ lois en utilisant les forces d'inertie

- si O' mesure poids M $\therefore \underset{\text{poids apparent}}{\vec{P_a}} = -\vec{R} \Rightarrow \vec{P_a} = \vec{P} - m_i \vec{a_e}$

$$= m_g \vec{g} - m_i \vec{a_e}$$

par identité fondamentale $m_g = m_i = m$

Poids apparent : $\vec{P_a} = m(\vec{g} - \vec{a_e})$

tout se passe localement comme si la gravitation était modifiée

Si chute libre d'ascenseur : $\vec{a_e} = \vec{g} \Rightarrow \vec{P_a}$ **apesanteur**

et O' voit inexistence locale du champ de gravitation

Rotation uniforme

Pour O', M soumis à
- résultante $\vec{F}$ ($\vec{P}, \vec{R}, \vec{F_{EM}}, \cdots$)
- force d'inertie d'entrain. ($-m\vec{a_e}$)
- force d'inertie de Coriolis ($-m\vec{a_c}$)

on avait trouvé avant que $\vec{a_e} = -\omega^2 \vec{HM}$

$\Rightarrow \vec{F_{ie}} = m\omega^2 \vec{HM}$ **Force centrifuge**

(passager ds voiture lors virage)

Résumé Méca
PT
4

Thm Moment cinétique

grandeur caractérisant l'efficacité d'une $\vec{F}$ pour faire rotation

moment de la Force en O $\quad \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} \quad$ [N.m]

comme $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ en translation, en rotation (par analogie) :

moment cinétique en O $\quad \vec{L}_O(M/R) = \vec{OM} \wedge \underbrace{m\vec{v}(M/R)}_{\vec{p}(M/R)} \quad$ [Kg.m².s⁻¹] [N.m.s]

- dans réf. galiléen : $\left(\frac{d\vec{L_O}}{dt}\right)_R = \underbrace{\left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_R}_{\vec{v}} \wedge m\vec{v} + \vec{OM} \wedge m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R$

$\vec{v} \wedge m\vec{v} = \vec{0}$

$$\left(\frac{d\vec{L_O}}{dt}\right)_R = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$$

- dans réf. non galiléen : $\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{R'} = m\vec{a}(M/R') = \vec{F} + \vec{f_{ie}} + \vec{f_{ic}}$

$$\left(\frac{d\vec{L_O}}{dt}\right)_{R'} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f_{ie}}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f_{ic}})$$

pour avoir lois conservées avec Rgal.

Travail

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{AB} = F \times AB\cos\theta$$

$$\delta W_{x_i \to x_{i+1}} = \vec{F}(\vec{r_i})\cdot\Delta\vec{r_i} \Rightarrow W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

<u>Pesanteur</u> $\quad W_{A\to B}(\vec{P}) = \int_A^B (-mg\,\vec{u_z})\cdot d\vec{r} \xrightarrow{\text{cartésienne}} = \int_A^B -mg\,dz = mg(z_A - z_B) = \underline{mgh}$

si $z_A > z_B \Rightarrow$ travail du poids est moteur $\Rightarrow$ sinon résistant

dépend pas de la trajectoire → juste extrémités

<u>Rappel</u> Loi de Hooke $\vec{F} = -Kx\vec{i}$

$$W_{1\to 2}(\vec{F}) = \int_1^2 (-Kx\vec{i}) \cdot dx\,\vec{i} = -\frac{1}{2}K(x_2^2 - x_1^2)$$

Puissance

= taux de variation du travail $P(\vec{F}/R) = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}(M/R)$

$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v}\,dt$ $[J \cdot s^{-1}] = [Watt]$

<u>Forces conservatives</u> : qd W est indép. de la trajectoire

$$W_{A \xrightarrow[1]{} B}(\vec{F}) = W_{A \xrightarrow[2]{} B}(\vec{F}) \quad \therefore \quad W_{A \xrightarrow[1]{} B \xrightarrow[2]{} A}(\vec{F}) = W_{A \xrightarrow[1]{} B} + \underbrace{W_{B \xrightarrow[2]{} A}}_{-W_{A \xrightarrow[2]{} B}} = 0$$

$$\Rightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Energie Potentielle

$\therefore$ F conserv. $\Rightarrow$ $W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(E_p(B) - E_p(A))$ $\delta W = -dE_p$

$$dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \begin{cases} dx,\ dy,\ dz \\ d\rho,\ \rho d\theta,\ dz \\ dr,\ r d\theta,\ r\sin\theta\, d\varphi \end{cases}$$

<u>En 3D</u> $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$

Thm Energie Cinétique

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F} \cdot \vec{v}\,dt = \int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\,dt = \int m \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt}\,dt = \int d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$\underline{W_{A\to B}(\vec{F})} = \underline{E_c(B) - E_c(A)} \qquad \delta W = dE_c$$

<u>ou</u> $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$ $\mathcal{P} = \frac{d}{dt}E_c$

– réf. non galiléen : $m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{R'} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v} + \vec{f_{ie}} \cdot \vec{v} + \vec{f_{ic}} \cdot \vec{v}$ tq $\vec{v} = \vec{v}(M/R')$

$\vec{f_{ic}} = -m\vec{a_c} = -m(2\vec{\omega} \wedge \vec{v})$ $\to 0$ car $\perp \vec{v}$

★ Puissance et travail de $F_{coriolis} = 0$

$$\frac{dE_c}{dt}(M/R') = P(\vec{F}/R') + P(\vec{f_{ie}}/R') \quad \text{et} \quad \Delta E_{c\,A\to B} = W_{A\to B}(\vec{F}) + W_{A\to B}(\vec{f_{ie}})$$

Dans cas particulier où R' est en rotation uniforme à vit. angul. ω

$\Rightarrow \quad \vec{f_{ie}} = m\omega^2 \overrightarrow{HM}$ $\quad d\rho / \rho d\theta / dz$

∴ Travail élémentaire : $\delta W = \vec{f_{ie}} \cdot d\vec{r} = m\omega^2 \rho\, d\rho = d\left(\frac{1}{2} m\omega^2 \rho^2\right)$

Finertie d'entrain. dérive d'une Ep centrifuge par $\delta W = -dEp$

en choisissant l'origine des énergie sur l'axe de rotation : $Ep_{cent} = \frac{-m\omega^2}{2}\rho^2$

Energie Mécanique des $\vec{F}$ conserv.

$E_m = E_c + E_p$

$W_{A\to B} = E_c(B) - E_c(A)$

$W_{A\to B} = E_p(A) - E_p(B)$ $\Rightarrow E_c(B) + E_p(B) = E_c(A) + E_p(A)$

$Em(A) = Em(B)$

Ds réf galiléen, Em d'1 objet soumis à $\vec{F}$ conserv. est conservée

Forces Non conservatives :

Soit Force Frottement $\vec{R_T}$ ∴ travail est négatif et résistant (car R_T s'oppose tjr au mouv)

et il y a aucun travail "retour" qui compense travail "aller" de $\vec{R_T}$ ⇒ non conserv.

$$\underbrace{W_{A\to B}(\vec{F_c})}_{\text{dérive de } Ep \ = \ Ep(A) - Ep(B)} + W_{A\to B}(\vec{F_{nc}}) = E_c(B) - E_c(A)$$

$$\Rightarrow \quad W_{A\to B}(\vec{F_{nc}}) = Em(B) - Em(A) = \Delta Em$$

Réf. non galiléen : m̂ raisonnement mais au lieu de $\vec{F_{nc}}$ c'est $\vec{f_{ie}}$ (car $\vec{f_{ic}}$ donne $W = 0$) ⇒ $[Ep(A) - Ep(B)] + W(\vec{f_{ie}}) = [Ec(B) - Ec(A)]$

$$\Delta(E_c + E_p) = W(\vec{f_{ie}}) = -\Delta Ep_{cent}$$

Donc ici (R' en rotation), Em se conserve à condition de

$$Em = Ec + Ep + Ep_{cent}$$

donc faut ajouter Ep des $\vec{f_{ie}}$

Révision Méca pt
+ Suite Méca pt

DUNOD 1999
A. Gibaud
M. Henry
Cours physique
méca pt
PhO1 GIB salle 323
1

Chap 1 Cinématique

-) Mouv. rectiligne sinusoidal : $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

donc $v = -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi)$ et $a = -\omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$

donc $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ éq. du mouv

- cela est valable pour $X_m \sin(\omega t + \varphi')$ tq $\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$
  ou $A \cos\omega t + B \sin\omega t$ tq $A = X_m \cos\varphi$, $B = -X_m \sin\varphi$
  ∴ par trigo $\rightarrow \cos(\omega t + \varphi)$

-) Mouv. circulaire uniforme : $\frac{d\theta}{dt} = \omega = cste \Rightarrow \theta = \omega t + \theta_0$

$\vec{OM} = \rho \vec{u_\rho} \rightarrow \vec{v} = \rho\dot{\theta}\vec{u_\theta} \rightarrow \vec{a} = -\rho\dot{\theta}^2\vec{u_\rho}$ acc. centripète $\omega^2 R = \frac{v^2}{R}$

$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

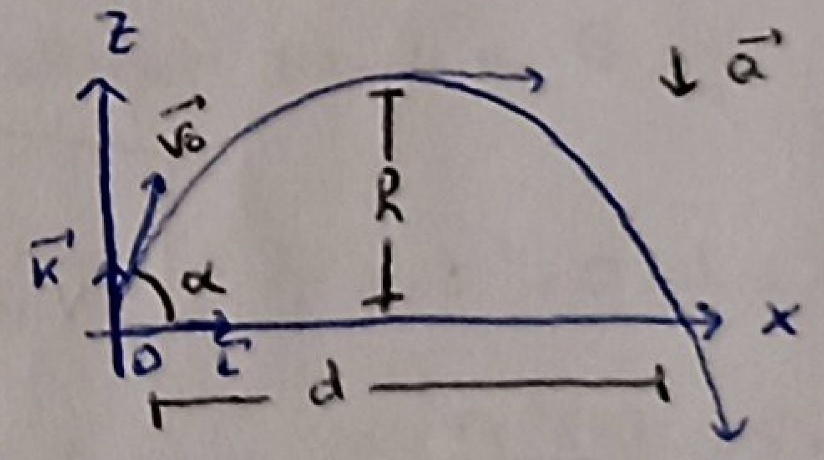
$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$ $\qquad$ $\vec{a} = \vec{\omega} \wedge \vec{v} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$

-) Mouv. hélicoidal : translation rectiligne unif / z + circulaire uniforme ⊂ cxy

sur axes cartésiens $\begin{vmatrix} x(t) = R\cos\omega t \\ y(t) = R\sin\omega t \\ z(t) = v_0 t \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{v}_{M/R} = \begin{vmatrix} -\omega R \sin\omega t \\ \omega R\cos\omega t \\ v_0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{a}_{M/R} = \begin{vmatrix} -\omega^2 R\cos\omega t \\ -\omega^2 R \sin\omega t \\ 0 \end{vmatrix}$

base cylindrique $R\vec{u_\rho} + v_0 t \vec{u_z}$ $\quad \vec{v} = \begin{vmatrix} 0 \\ \rho\dot{\theta} = R\omega \\ v_0 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{a}_{M/R} = \begin{vmatrix} -\rho\dot{\theta}^2 = -R\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\qquad \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = R\omega^2$

-) Mouv. Parabolique : soit $\vec{a} = \vec{cste}$ et à $t=0$ il y a $\vec{v_0}$



soit $\vec{a} = a_0\vec{k}$, $\vec{v_0} = v_{0x}\vec{i} + v_{0z}\vec{k}$

$\vec{a}_{M/R} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a_0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{v}_{M/R} \begin{vmatrix} v_{0x} \\ 0 \\ a_0 t + v_{0z} \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{OM} = \begin{vmatrix} v_{0x} t \\ 0 \\ \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_{0z} t \end{vmatrix} \longrightarrow t = \frac{x}{v_{0x}}$

si $\vec{v_0} = \vec{0}$ on retrouve mouv. rectiligne uniformément varié ($a = cste$)

si $\vec{v_0} \neq \vec{0} \Rightarrow$ mouv. plan défini par $\vec{a}$ et $\vec{v}$ (à $t=0$)

| sur $\vec{e_x}$: mouv unif. de $v = v_{0x}$
| sur $\vec{e_z}$: " uniformément varié d'acc cste a_0

$z = \frac{1}{2}a_0 \frac{x^2}{v_{0x}^2} + v_{0z}\frac{x}{v_{0x}}$ par $\begin{vmatrix} v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_{0z} = v_0 \sin\alpha \end{vmatrix} \Rightarrow z = \frac{1}{2}a_0\frac{x^2}{v_0\cos^2\alpha} + x\tan\alpha$

Trajectoire est une portion de parabole
- h flèche = altitude max
- d portée = dist. max

ici, $a_0 = -g$

Portée : $z=0$, $x=d$ (ou $x=0$) $\Rightarrow$ $\frac{1}{2} g \frac{d^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} = d \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\Rightarrow$ $d = \frac{2v_0^2}{g} \sin\alpha\cos\alpha$

$$d = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

Portée est max $\rightarrow$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (ce résultat est juste pour ($z(t=0) = 0$))

Flèche : une des méthode est de chercher h qd $x = d/2$ $\Rightarrow$ $h = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha$

Chap 2 | Changement de réf

$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$ Transformation de Galilée $\Rightarrow$ $x = x' + v_0 t$ si O' bouge selon $\vec{e_x}$ en transl. rect.

Translation $\rightarrow$ composition vitesses : $\boxed{\vec{v}_{M/R} = \underbrace{\vec{v}_{O'/R}}_{= \vec{v}_{R'/R} = \text{ vit. entrain.}} + \vec{v}_{M/R'}}$

Rotation de vit. angulaire $\vec{\Omega}_{R'/R} = \frac{d\theta}{dt} \vec{z}$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{OM}$$

m̂ O et O' ici

valable pour tout vect $\vec{X}$

cas général $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$

$$\left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_R = \left.\frac{d\vec{OO'}}{dt}\right)_R + \underbrace{\left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_R}_{= \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}}$$

$$\boxed{\vec{v}_{M/R} = \underbrace{\vec{v}_{M/R'}}_{v_{\text{relative}}} + \underbrace{\vec{v}_{O'/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}}_{v_{\text{entrain.}}}}$$

pour acc : on aura $\left(\frac{d\vec{v}_{M/R'}}{dt}\right)_R \longrightarrow \underbrace{\left(\frac{d\vec{v}_{M/R'}}{dt}\right)_{R'}}_{\vec{a}_{M/R'}} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{M/R'}$

on aura aussi $\left(\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_R \rightarrow \underbrace{\left(\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{R'}}_{\vec{v}_{M/R'}} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}$

$$\boxed{\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R'} + \vec{a_e} + \vec{a_c}} \quad \vec{a_c} \rightarrow 2\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{M/R'}$$

Coriolis n'∃ que si M en mouv dans R' et si R' en rotat. / R

$$\vec{a_e} = \vec{a}_{O'/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}) + \frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{dt} \wedge \vec{O'M}$$

acc qu'aurait M par rapport à R s'il était fixe en R'

Ex 4 p20 ♀ en retard et court (pour prendre train) à $v = cste = 8\,m/s$

qd à 100m du train, ce dernier démarre avec $a = cste = 0{,}5\,m/s^2$

DUNOD 99
Méca pt
2

1) Est-ce que ♀ peut atteindre train ? sinon, dist. min entre les 2 ?

♀ $v = v_0 \Rightarrow x_f = v_0 t = 8t$

$a = a_0 \Rightarrow v = a_0 t + 0 = 0{,}5t \rightarrow x_t = \frac{1}{2} a_0 t^2 + x_0 = 0{,}25t^2 + 100$

Les 2 se rejoignent $\therefore x_f = x_t \rightarrow 0{,}25t^2 - 8t + 100 = 0 \rightarrow \Delta = -36 < 0$ pas de sol.

Dist. entre les 2 : $x_t - x_f = 0{,}25t^2 - 8t + 100 = \frac{1}{2} a_0 t^2 - v_0 t + 100$

min $\longrightarrow \frac{d(x_t - x_f)}{dt} = 0 \Rightarrow a_0 t - v_0 = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{a_0} = 16s$

dmin $\Rightarrow 0{,}25(16)^2 - 8(16) + 100 = \boxed{36\,m}$

2) Et si dist = 40m et pas 100m

$\Delta = 24 > 0 \therefore$

$t_1 = 6{,}2s \Rightarrow x_{f_1} = v_0 t_1 = 49{,}6\,m$

$x_{t1} = 9{,}6\,m$ et $v_{t1} = 3{,}1\,m/s$

$\therefore$ fille + rapide et peut monter au train

$t_2 = 25{,}8s \rightarrow x_{f2} = 206{,}4\,m$

$\therefore$ elle a 19,6 s pour monter avant que train la dépasse

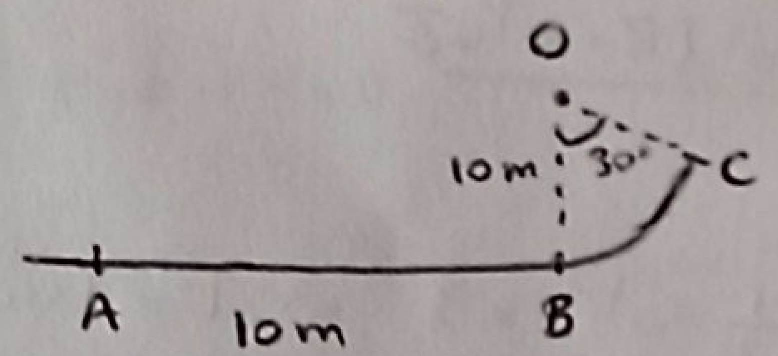
3) Quelle dmin entre train et ♀ pour atteindre train

$\therefore x_t = x_f \Rightarrow 0 = 0{,}25t^2 - 8t + D$

$\Delta = 64 - D$ et doit être $\geq 0 \therefore \boxed{D_m = 64\,m} \Rightarrow t = 16s$

donc $x_f = 128\,m$ pour atteindre train et en 16s $x_t = 28\,m$ à $v_t = 8\,m/s$

Ex 8 p-21



BC arc de cercle de rayon OB

M : voiture part de A au repos et atteint 10 m/s en B

1) a_1 de M sur AB $\quad a_1 = cste \Rightarrow v_1 = a_1 t + 0 = a_1 t \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 + 0 = \frac{1}{2} a_1 t^2$

$t = \frac{v_1}{a_1} \rightarrow x_1 = \frac{1}{2} a_1 \frac{v_1^2}{a_1^2} \Rightarrow a_1 = \frac{v_1^2}{2x_1} = \frac{v_1^2(B)}{2\,AB} = 5\,m/s^2$

2) Durée parcours AB $\quad t = \frac{v_1}{a_1} = 2s$

3) éq° horaire de l'abscisse de M si origine = A et origine des temps = B

à $t = 0$, $x_0 = AB = 10m$, $v_0 = v(B) = 10\,m/s \Rightarrow v = a_1 t + v_0$

$x = \frac{1}{2} a_1 t^2 + v_0 t + AB = 2{,}5t^2 + 10t + 10$

4) M parcourt partie ◡ avec mouv. accéléré angulaire const. $\ddot{\theta} = 0{,}1\,rad/s$. Calcule vit. angul w_0 à B. Calcule éq° horaire $w = f(t)$ et $\theta = g(t)$ tq $t = 0$ à B. Calcule t qd M arrive à C. Calcule vitesse angul. et linéaire de M à C.

$\dot{\theta} = w = \ddot{\theta} t + w_B \quad , \quad w_B = \frac{v(B)}{OB} = \frac{10}{10} = 1\,rad \cdot s^{-1} \quad , \quad \theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta} t^2 + w_B t$

$w = 0{,}1t + 1$
$\theta = 0{,}05t^2 + t$

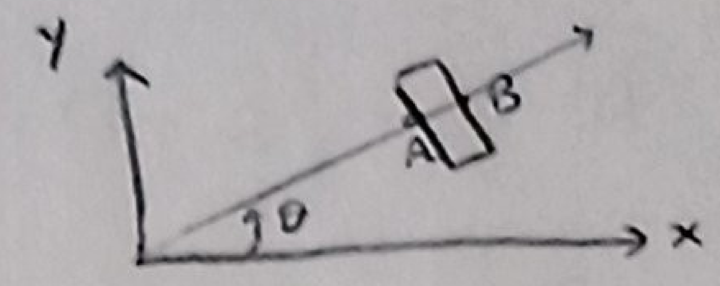
à C, $\theta = 30° = \frac{\pi}{6} = 0{,}05t^2 + t \Rightarrow t = 0{,}51s$

$w_C = 0{,}1t + t \xrightarrow{t = 0{,}51s} 1{,}051\,rad/s \Rightarrow v_C = w_C\,OC = 10{,}51\,m/s \perp OC$

Ex 1. phls

à $t=0$, bus prend virage à vit. angul. cste ω_0 tq O centre virage et $OA = R$

A ce moment, passager P immobile en A, se précipite vers place libre en B par a_0 = cste



1) Dans $R_{bus} = R_A$, préciser repère et mouv P. Déterminer

$\vec{a_r}$, $\vec{v_r}$ ainsi que éq. horaire du mouv

repère $(A, \vec{u_\rho}, \vec{u_\theta})$ $\overset{\rightarrow}{AP}$ tq P a mouv. rectil. unif. accéléré

$a_r = a_0 \longrightarrow v_r = a_0 t + 0 = a_0 t \longrightarrow AP = \frac{1}{2} a_0 t^2$

2) Dans $R_{Terrestre}$, repère? v_T? a_T? éq traject. P en polaire ($\rho = OP$)

repère $(O, \vec{u_\rho}, \vec{u_\theta})$ de coord. polaires, $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP} = (R+x)\vec{u_\rho} = r\vec{u_\rho}$

$\therefore \vec{v_T} = \dot{x}\vec{u_\rho} + (R+x)\dot{\theta}\vec{u_\theta} = a_0 t \vec{u_\rho} + (R + \frac{1}{2}a_0 t^2)\omega_0 \vec{u_\theta}$

$\therefore \vec{a_T} = \ddot{x}\vec{u_\rho} - (R+x)\dot{\theta}^2\vec{u_\rho} + \dot{x}\dot{\theta}\vec{u_\theta} + (R+x)\underbrace{\cancel{\ddot{\theta}}}_{0}\vec{u_\theta} + \dot{x}\dot{\theta}\vec{u_\theta} = \left[a_0 - (R + \frac{1}{2}a_0 t^2)\omega_0^2\right]\vec{u_\rho} + 2a_0 t\omega_0 \vec{u_\theta}$

éq° trajectoire : $r = R + x = R + \frac{1}{2}a_0 t^2$ et $\omega_0 = \frac{\theta}{t} \Rightarrow r = R + \frac{1}{2}\frac{a_0}{\omega_0^2}\theta^2$

éq d'une spirale

3) retrouver $\vec{v_T}$ et $\vec{a_T}$ à partir $\vec{v_r}$ et $\vec{a_r}$ (par composition v et a)

- $\vec{v_T} = \vec{v_r} + \vec{v_e}$ tq $\underline{\vec{v_r} = a_0 t \vec{u_\rho}}$ et $\vec{v_e} = \vec{v_{A/R_T}} + \vec{\Omega}_{R_A/R_T} \wedge \vec{AP}$

$\vec{v_{A/R_T}} = \frac{d\vec{OA}}{dt} = \vec{\Omega}_{R_A/R_T} \wedge \vec{OA}$

$\therefore \vec{v_e} = \vec{\Omega}_{R_A/R_T} \wedge \vec{OP}$

$= \underline{\omega_0 (R+x)\vec{u_\theta}}$

- $\vec{a_T} = \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_c}$ tq $\underline{\vec{a_r} = a_0 \vec{u_\rho}}$

et $\vec{a_c} = 2\vec{\Omega}_{R_A/R_T} \wedge \vec{v_r} = \underline{2\omega_0 a_0 t \vec{u_\theta}}$

et $\vec{a_e} = \frac{d^2\vec{OA}}{dt^2} + \underbrace{\cancel{\frac{d\vec{\Omega}_{R_A/R_T}}{dt}}}_{0} \wedge \vec{AP} + \vec{\Omega}_{R_A/R_T} \wedge \underbrace{\frac{d\vec{AP}}{dt}}_{\vec{\Omega}_{R_A/R_T} \wedge \vec{AP}} = \vec{\Omega}_{R_A/R_T} \wedge (\vec{\Omega}_{R_A/R_T} \wedge [\vec{OA} + \vec{AP}])$

$= \vec{\Omega}_{R_A/R_T} \wedge (\vec{\Omega}_{R_A/R_T} \wedge \vec{OP}) = \underline{-\omega_0^2 (R+x)\vec{u_\rho}}$

4) si $a_0 = 6\ m/s^2$, $\omega_0 = 1/6\ rad/s$, $R = 120\ m$, $AB = 3\ m$

à quelle v, P atteint B? et quel est t? quelle dist a parcouru bus? et quel θ a tourné?

$AB = \frac{1}{2}a_0 t^2 = 3 \Rightarrow t = 1\ sec$

$v = a_0 t \Rightarrow 6\ m/s$

$\theta = \omega_0 t = 1/6\ rad = 9{,}5°$

$\ell = R\theta = 20\ m$

Chap 3 : Lois de Newton

DUNOD 99
Méca pt
3

-) Forces de frottement

→ visqueux : contact solide - fluide
→ solide : contact solide - solide

(visqueux :)

- $\vec{F} = -K\vec{v}$
- si $v \nearrow$: $\vec{F} = -\frac{1}{2} C_x S \rho \vec{v}^2$

S : surf $\perp$ déplacement

C_x : coeff. de ~~pénétration~~ traînée (profil S en contact avec le fluide)

(solide :)

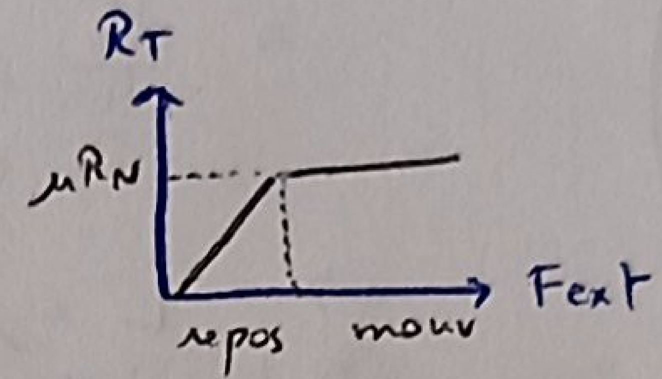
réaction sol s'adapte pour maintenir équilibre

$\Rightarrow \vec{R_N}$ et $\vec{R_T}$

- $\vec{R_T} \propto \vec{R_N} \Rightarrow \vec{R_T} = \mu \vec{R_N}$
  ↳ coeff de friction (de frottement)
- $\frac{R_T}{R_N} = \tan\varphi = \mu$
  ↳ angle de frottement

si $R_T = F_{ext} < \mu R_N$ équilibre

si $R_T = \mu R_N < F_{ext}$ en mouv.



-) Chute freinée

$\downarrow \vec{u_x}$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F_f} = m\vec{g} - K\vec{v}$$

en projetant sur axe x de la chute : $\frac{dv_x}{dt} + \frac{K}{m}v_x = g$

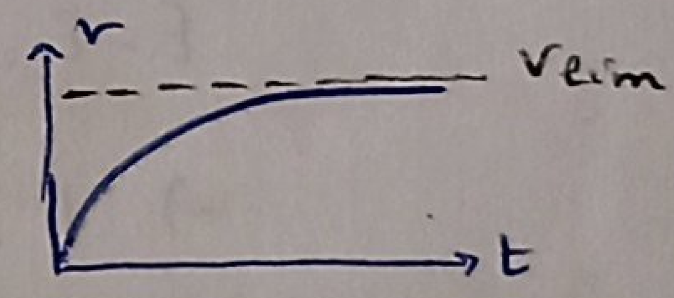
Homogène • $\frac{dv_x}{dt} + \frac{K}{m}v_x = 0 \Rightarrow v_x = Ae^{-\frac{K}{m}t}$

Particulière • $\frac{d\,\text{Cste}}{dt} + \frac{K}{m}\text{Cste} = g \Rightarrow \text{Cste} = \frac{mg}{K}$ (avec $\frac{d\,\text{Cste}}{dt} = 0$)

$\Rightarrow v_x = Ae^{-\frac{K}{m}t} + \frac{mg}{K}$

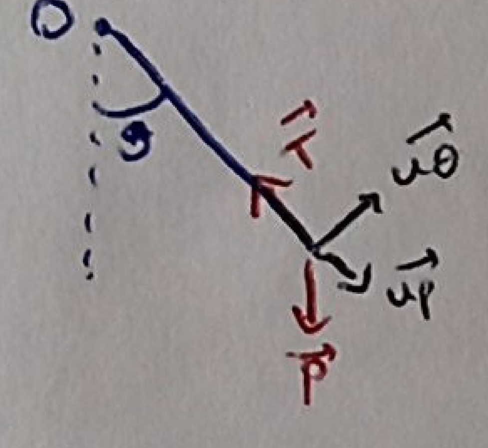
CI : $t = 0 \rightarrow v = 0 \Rightarrow A = -\frac{mg}{K} \Rightarrow v_x = \frac{mg}{K}(1 - e^{-\frac{K}{m}t})$ ∴ $v \nearrow$ progressivement

à $t \rightarrow \infty$ on a $v_{max} = \frac{mg}{K}$ (n'est jamais atteinte) ∴ v_{limite}



$$\Rightarrow x = \frac{mg}{K}\left(t + \frac{mg}{K}\left(e^{-\frac{K}{m}t} - 1\right)\right)$$

-) Pendule simple



$OM = \rho\,\vec{u_\rho}$ $\quad v = \rho\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} = m(-\ell\dot{\theta}^2\vec{u_\rho} + \ell\ddot{\theta}\vec{u_\theta})$$

et $\vec{P}\begin{pmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \end{pmatrix}$ $\vec{T}\begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix}$ dans base (ρ, θ)

$$\Rightarrow \begin{cases} mg\cos\theta - T = -m\ell\dot{\theta}^2 \\ -mg\sin\theta = m\ell\ddot{\theta} \end{cases} \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

éq pas linéaire à cause du sin ∴ si θ petit $\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$ éq différentielle linéaire d'un oscillateur harmonique

la solution : $\theta = \theta_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$
↳ $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$

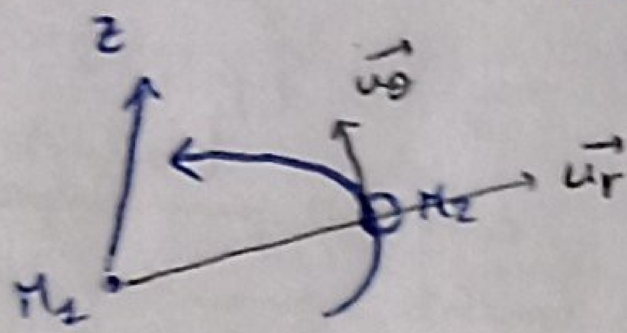
OM : $\ell\vec{e_r} \wedge m\vec{a}$ ~~XXX~~ $= m\ell^2\ddot{\theta}\,\vec{e_z} = \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{T}) = \vec{M}_O(\vec{P}) = \ell\vec{e_r} \wedge -mg\sin\theta\,\vec{u_\theta} = -mg\ell\sin\theta\,\vec{u_z}$

$$\rightarrow m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

Chap 11 | Trajectoires d'un syst à 2 corps

Rappel – syst a une Em qui dépend de CI et évolue soit
- entre 2 limites = état lié $E<0$
- entre position minimale d'approche et l'∞ = état de diffusion $E>0$

– syst à 2 corps peut être réduit à syst à 1 corps dont position M_2 / M_1 est $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$ et $m = m$ réduite $= \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$



– Ce corps subit $F_{gravitation}$, $\vec{F} = \vec{F_2}$ Force centrale

$$\Rightarrow \vec{v}_{M_2/M_1} = \frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

moment cinétique : $\vec{L} = \vec{r} \wedge \mu \vec{v}_{M_2/M_1} = \mu r^2 \dot{\theta}\, \vec{u_z}$

$$\left(\begin{aligned} \vec{r_1} &= -\frac{\mu}{m_1}\vec{r} \\ \vec{r_2} &= \frac{\mu}{m_2}\vec{r} \end{aligned} \right)$$

$\left(\begin{aligned} r &= r_1 + r_2 \\ m_1 r_1 &= m_2 r_2 \end{aligned} \right)$

$\therefore$ force centrale = passe par l'origine du rayon vecteur

$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ $\therefore$ moment cinétique conservé

et trajectoire est ds plan $\perp$ vecteur moment cinétique)

Thm de la force centrale

$$\Rightarrow L = \mu r^2 \dot{\theta} = cste \quad \therefore \quad r^2\dot{\theta} = \frac{L}{\mu} = cste'$$

↳ cste des aires (= 2 aire balayée par M lors du mouv)

$$C' = r^2 \frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dA}{dt}$$

Energie

$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}$

$E_c = \frac{1}{2}\mu v^2$ tq $\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

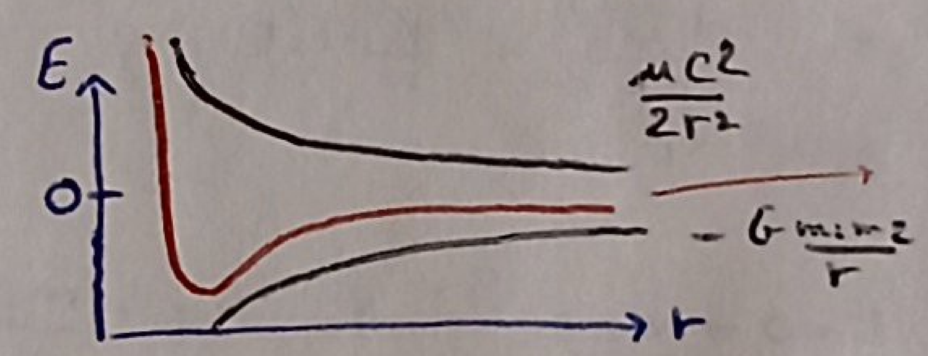
$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - G\frac{m_1 m_2}{r}$$

Loi des aires : $\frac{C}{r^2} = \dot{\theta}$

$$= \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu\frac{C^2}{r^2} - G\frac{m_1 m_2}{r}$$

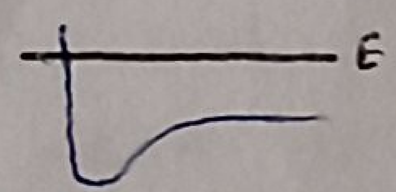
syst isolé $\therefore$ $E_m = cste$

$$\therefore = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + E_{p\,eff}$$



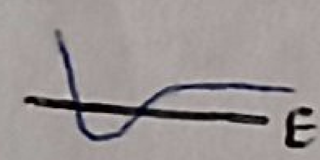
$E - E_{p\,eff} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 > 0$ $\therefore$ Em doit rester $> E_{p\,eff}$

-) $E>0$



état de diffusion car syst n'a aucune limite imposée (se déplace entre r_{min} et ∞)

-) $E<0$



état lié se déplace entre r_{min} et r_{max}

-) $E=0$ état intermédiaire → libération de l'état lié (cond. passage de lié à diffusion)

Force $\vec{F} = \vec{F_2} = -\vec{F_1} = \mu\frac{d\vec{v}_{M_2/M_1}}{dt} = \mu\frac{d\vec{v}}{dt}$

si r pas fixe $\Rightarrow$ $\vec{v} = \begin{cases} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\vec{a} = \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ 0 \end{cases}$

car mouv plan

Formule de Binet (Eq° polaire de la trajectoire)

DUNOD 99
Méca pt
4

$$\mu\left((\ddot r - r\dot\theta^2)\,\vec{u_r} + \underbrace{(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)}_{=0}\vec{u_\theta} \right) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u_r}$$

$$\mu(\ddot r - r\dot\theta^2) = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} = -\mu\frac{K}{r^2} \qquad K = \frac{G m_1 m_2}{\mu}$$

$$= \frac{d(r^2\dot\theta)}{dt} = 0$$ ∴ traduit le fait que moment cinétique est cst

$$\therefore r^2\dot\theta = C$$

Pour éliminer var. temps et obtenir $r = r(\theta)$, Binet a fait chgt var : $u = \frac{1}{r} \Rightarrow \dot\theta = \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} = Cu^2$

$\rightarrow \dot\theta^2 = C^2u^4 \rightarrow r\dot\theta^2 = C^2u^3$

$\rightarrow -\frac{G m_1 m_2}{r^2} = -G m_1 m_2 u^2$

$\rightarrow \dot r = \frac{dr}{du}\frac{du}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -C\frac{du}{d\theta}$

$\rightarrow \ddot r = -C\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right) = -C\dot\theta\frac{d^2u}{d\theta^2} = -C^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$

$\Rightarrow \ddot r - r\dot\theta^2 = -\frac{K}{r^2}$ devient $-C^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - C^2u^3 = -Ku^2$

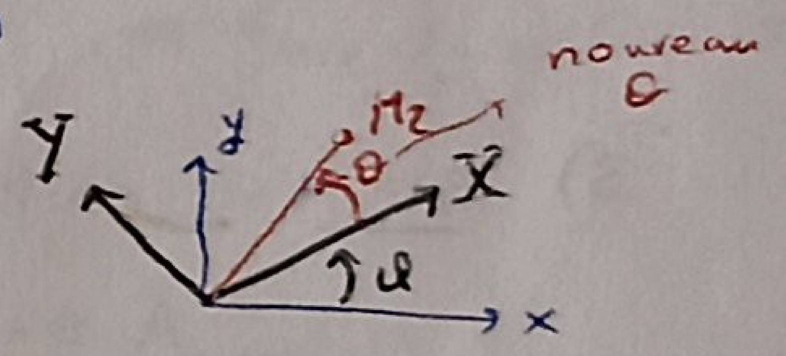
si $u \neq 0 \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{K}{C^2}$ Formule de Binet

Résolution Formule Binet

: $u = A\cos(\theta - \varphi) + \frac{G m_1 m_2}{\mu C^2} = \frac{1}{r}$

En faisant rotation autour axe $M_1 Z$ on s'arrange pour avoir $\varphi = 0$

∴ distance r évolue en fct nouvel angle $\theta(X, Y)$ selon :



$$r = \frac{1}{A\cos\theta + \frac{G m_1 m_2}{\mu C^2}} = \frac{1}{\frac{G m_1 m_2}{\mu C^2}\left[1 + \frac{A}{\frac{G m_1 m_2}{\mu C^2}}\cos\theta\right]}$$

$$p = \frac{\mu C^2}{G m_1 m_2} = \frac{C^2}{G(m_1+m_2)} \Rightarrow r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

éq° polaire paramétrée en (p,e)
éq° conique de paramètre p et d'excentricité e

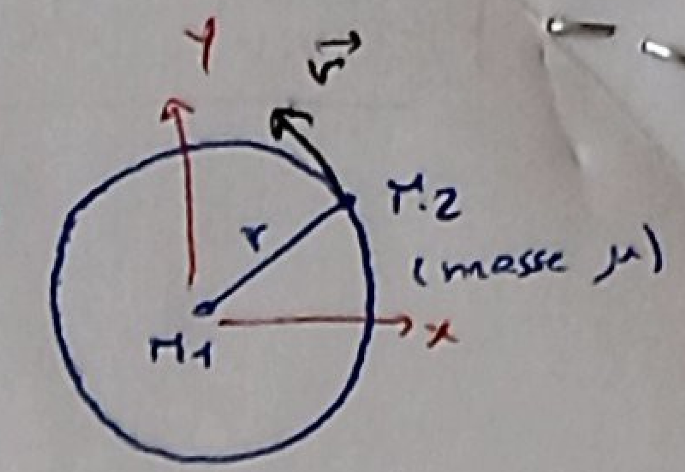
rappelons que : $\begin{cases} r = r_1 + r_2 \\ m_1 r_1 = m_2 r_2 \end{cases}$ $\quad r_1 = \frac{\mu}{m_1} r \quad r_2 = \frac{\mu}{m_2} r$ et que si $m_1 \gg m_2$
∴ M_1 fixe et centre G est sur M_1
∴ M_2 se trouve à dist. r de G

F. gravit : $p > 0$

F. electrostat : $p = \frac{4\pi\varepsilon_0}{q_1 q_2}\mu C^2$ $\begin{cases} > 0 \text{ si charge m̂ nature} \\ < 0 \text{ si charges} \neq \end{cases}$

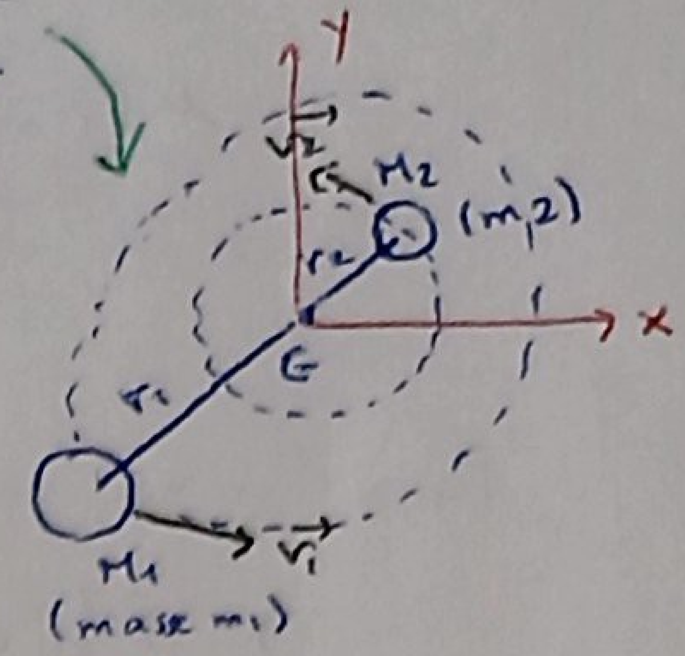
e est choisi > 0
∴ $r = \frac{p}{1 \pm e\cos\theta}$
Si $e < 0$ on fait $\theta \rightarrow \theta + \pi$
∴ rotation axes et on a $1 + e\cos\theta$ ✓

Etude des Trajectoires en fct de e



1) $\underline{e=0}$ $\therefore r=p \rightarrow$ trajectoire circulaire ~~de la masse réduite~~

Les trajectoires des 2 masses se déduisent par simple homothétie de celle de μ, sont $\therefore$ circulaires de centre G et rayons $\left| \begin{array}{l} r_1 = \frac{m_2}{\mu} r \\ r_2 = \frac{m_1}{\mu} r \end{array} \right.$



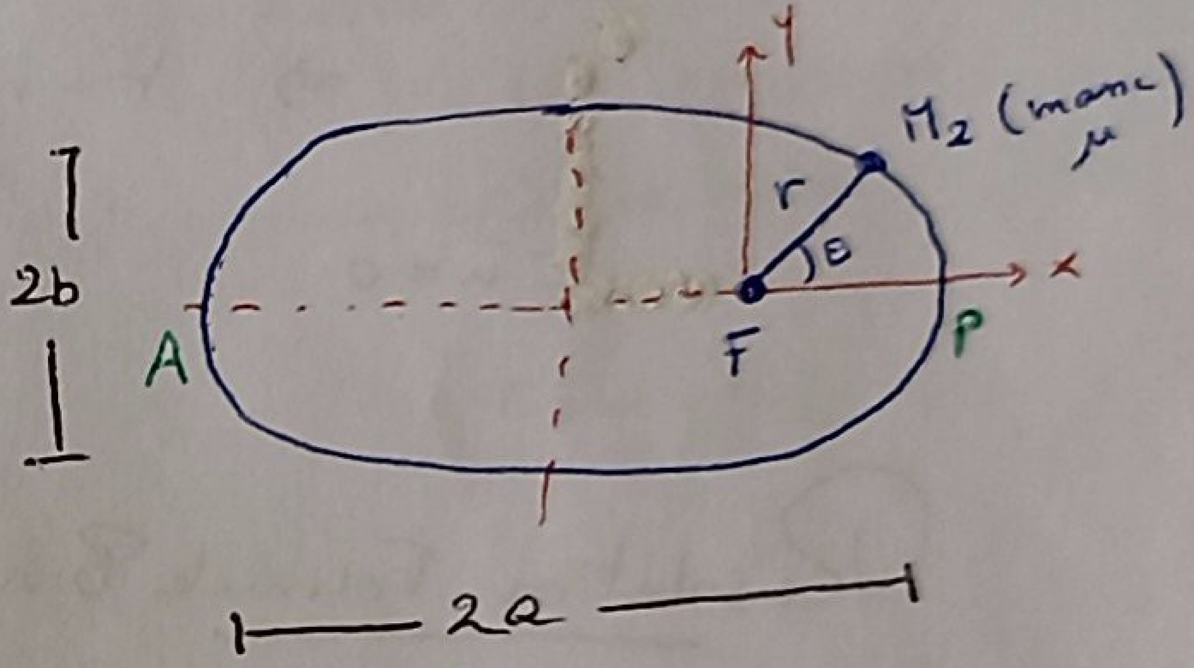
2) $\underline{e<1}$ r varie avec θ. Si $e=0,5$ calculons pour θ de 0 à 2π :

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
r	$\frac{p}{1+e}$	p	$\frac{p}{1-e}$	p	$\frac{p}{1+e}$
valeur r	$0,666p$	p	$2p$	p	$0,666p$

On obtient $\therefore$ (en coord. polaires) une trajectoire elliptique dont l'un des foyers est M_1 et pour laquelle ~~les~~ position min P (périgée) et max A (apogée) sont $< \begin{array}{l} \frac{p}{1+e} = FP = r_P \, (\theta=0) \\ \frac{p}{1-e} = AF = r_A \, (\theta=\pi) \end{array}$

* Le grand axe $2a$ = dist entre A et P

½ grand axe $\Rightarrow$ $a = \frac{p}{1-e^2}$



* si $m_1 \gg m_2$ $\therefore$ M_1 (F) est confondu avec G.
Comme soleil et la Terre

3) $\underline{e=1}$ on passe par trajectoire de transition.

- À $\theta=\pi$, $r \rightarrow \infty$ et trajectoire ne se referme pas sur elle-m̂
- Le Périgée du mouv. est obtenu à $\theta=0$ et correspond à $r=\frac{p}{2}$ et à $\theta=\frac{\pi}{2}$, $r=p$
- En cartésienne $(r\cos\theta = x)$ $\quad r(1+\cos\theta) = p \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = p-x \overset{(\,)^2}{\Rightarrow} y^2 = p^2 - 2px$

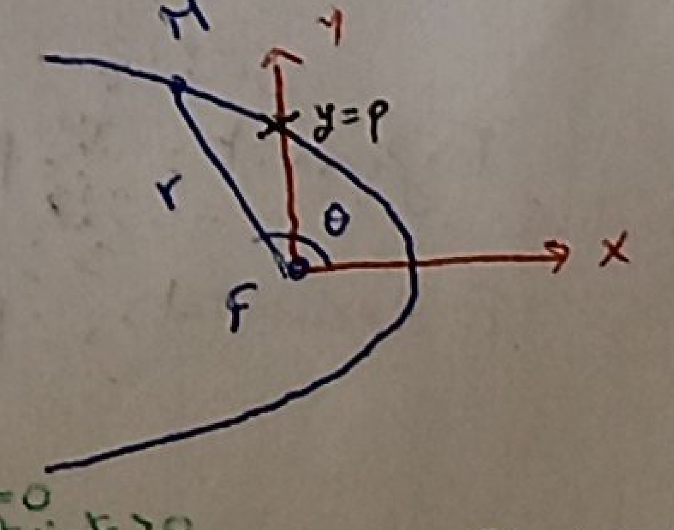
$$\boxed{x = \frac{-y^2}{2p} + \frac{p}{2}}$$

C'est une parabole d'axe $Fx = M_1x$ et pour $\theta=\frac{\pi}{2}$ (où $x=0$) $\Rightarrow y=p$

le O du repère — M_1 à F

On verra après qu'à cette valeur c'est E_m nulle, caractéristique du passage d'état diffusion à lié

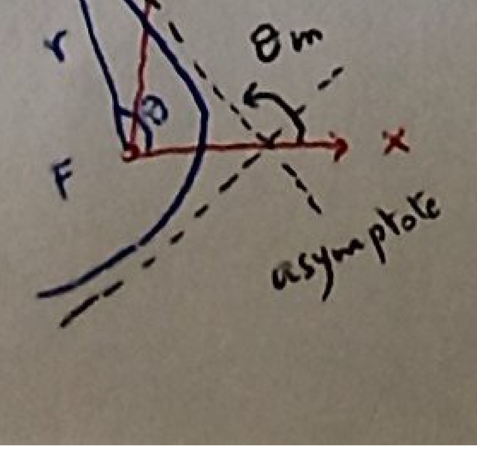
4) $\underline{e>1}$ elle se démarque de la trajectoire parabolique. On reste ds état de diffusion ($\therefore \exists$ valeurs de θ où M_2 s'éloigne de M_1 à l'∞, si M_1 est à F)



$\Rightarrow$ branche d'hyperbole

On passe subitement d'une branche à l'autre pour des val. critiques θ_m tq c'est θ qui annule r : $r>0 \Rightarrow 1+e\cos\theta>0 \Rightarrow \cos\theta > \cos\theta_m = -\frac{1}{e} \Rightarrow -\theta_m < \theta < \theta_m$

pour pas avoir =0 et r>0



physiquement, M_2 est confiné à 1 seule branche, et la nature de la branche est déterminée par CI du mouv

θ	$-\theta m$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	θm
r	∞	p	$\frac{p}{1+e}$	p	∞

COP - 70 05 58 28

Chap 11 : Mouv. de particules chargées

Ex PCSI

Cours

★ Spectométrie de masse : analyse en chimie repose sur mouv d'ions ds $\vec{E}$ et $\vec{B}$

∴ on doit étudier comment ils influencent le mouv des part. chargées

on utilise pompe à vide pour avoir $P = 10^{-4}$ Pa ∴ pas d'interactions entre part. étudiées et part. air

Action $\vec{E}$ ★ ds condensateur plan, $\vec{E}$ considéré unif loin des bords

et dirigé vers l'armature de U le + bas

et si ddp est indép de t ∴ $\vec{E}$ est stationnaire ⟶ zone d'accélération ds spectomètre

$$\underbrace{\vec{E}}_{V\cdot m^{-1}} = E\,\vec{u_x} = \frac{U}{d}\,\vec{u_x}$$

d : dist. entre armatures

pour part. ds $\vec{E}$

Forces ?
- $\vec{P} = m\vec{g}$
- $\vec{F}_{electrostatique} = q\vec{E}$

⟶ $\frac{P}{F_e} \simeq 10^{-10}$! ∴ poids négligeable

Loi fond. mouv $\left.\frac{d\vec{p}}{dt}\right|_{R_{terrestre}} = m\vec{a} = q\vec{E} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{q}{m}E$ acc. constante et mouv. rectiligne en $\vec{u_x}$ (mouv. uniformément accéléré)

★ si $\vec{v}_{initial}$ particule n'est pas // $\vec{E}$ ∴ là elle sera déviée

vitesse finale ?
- $E_{c_f} - E_{c_i} = \int_i^f \vec{F_e}\cdot d\vec{l} = \int_0^d qE\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 - 0 = qEd$ ($E = \frac{U}{d}$)

∴ $v_f = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$

ou

- $\ddot{x} = \frac{q}{m}E \longrightarrow \dot{x} = \frac{q}{m}Et \longrightarrow x = \frac{qE}{2m}t^2$

$x(t_f) = d = \frac{qE}{2m}t_f^2 \longrightarrow t_f = \sqrt{\frac{2md}{qE}}$

$v(t_f) = \frac{q}{m}E\,t_f = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$

Si $\vec{v}_{init}$ pas // à $\vec{E}$ ⇒ éq° trajectoire est une parabole

Action $\vec{B}$ ★ Ds solénoïde de grande longueur parcouru par i cste ⟶ loin des extrémités, $\vec{B}$ est unif et stationn.
Par aimant en forme de U : entre ses branches, $\vec{B}$ est unif et stationn.

pour part. ds $\vec{B}$

Forces?
- poids
- $\vec{F}_{magnétique} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$

⟶ $\frac{P}{F_m} \simeq 10^{-13}$! ∴ poids négligeable

Si $\vec{v}_{init.} = v_0\,\vec{u_x}$ (et $q>0$) ⟶ les cations ds spectomètre

Thm Puissance cinét $\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F_m}) = \vec{F_m}\cdot\vec{v} = 0$ car $\vec{F_m}$ est tjr ⊥ $\vec{v}$

∴ E_c est cste du mouv. ∴ $\vec{B}$ ne modifie pas la norme de la vitesse de part. chargée

Loi fond. mouv $m\vec{a} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$

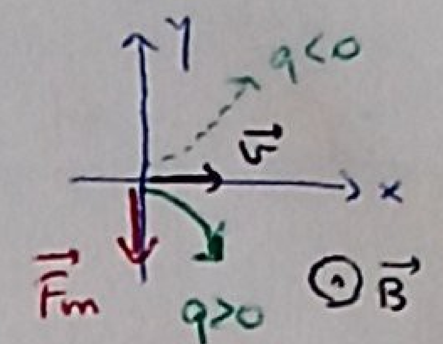
$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{q}{m}B\dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{q}{m}B\dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

⟶ mouv est ds plan (Oxy)

par $\begin{vmatrix} z(0)=0 \\ \dot{z}(0)=0 \end{vmatrix}$ ⟶ $z(t) = 0$

De plus à l'entrée ds $\vec{B}$: $\vec{F_m}(0) = q\vec{v}(0)\wedge\vec{B} = q v_0 \vec{u_x}\wedge B\vec{u_z} = -q v_0 B\vec{u_y}$

⇒ pour $q>0$, particule déviée vers $y<0$



$$\Rightarrow \left| \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{qB}{m}y + v_0 \\ \dot{y} &= -\frac{qB}{m}x \end{aligned} \right.$$ qu'on injecte ds $\left| \begin{aligned} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{aligned}\right.$

$$\Rightarrow \left| \begin{aligned} \ddot{x} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 y &= -\frac{qB}{m}v_0 \end{aligned}\right. \xrightarrow[\text{vit. angul.}]{\omega = -\frac{qB}{m}} \left| \begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + \omega^2 y &= \omega v_0 \end{aligned}\right.$$ 2 éq° diff de type OH

par $\left(\begin{aligned} \vec{OM}(0) &= \vec{0} \\ \vec{v}(0) &= v_0\vec{u_x} \end{aligned}\right. \Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) \\ y(t) &= \frac{v_0}{\omega}(1-\cos(\omega t)) \end{aligned} \xrightarrow[]{\substack{\text{pour éliminer } t \\ c^2+s^2=1}} x^2 + \left(y - \frac{v_0}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$

éq° cercle de centre $(0; \frac{v_0}{\omega})$ et $R = \frac{v_0}{|\omega|} = \frac{m v_0}{|q|B}$

↓

$\omega_c = \frac{v_0}{R}$ pulsation cyclotron

mouv. part. ds $\vec{B}$ unif. et station. $B\vec{u_z}$ est circulaire ds plan $(Oxy) \perp \vec{B}$ et uniforme à la vitesse angulaire ω

R trajectoire est une fct croiss. du rapport $\frac{m}{|q|}$

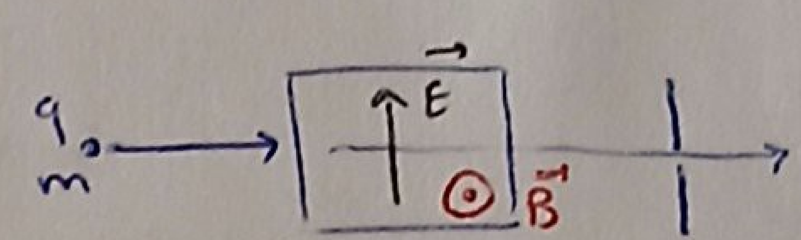
~~* Cette zone du spectromètre est = filtre de vitesse de Wien (FW)~~

action combinée $\vec{E}$ et $\vec{B}$

* si part. en m̂ temps ds $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ∴ soumise à résultante $\vec{F}_{élect}$ et $\vec{F}_{mag}$ = $\vec{F}_{Lorentz}$

$$\vec{F} = \underbrace{\vec{F_e}}_{\text{modifie norme } \vec{v} \text{ et peut dévier traject}} + \underbrace{\vec{F_m}}_{\text{que dévie traject.}} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$$

ds spectromètre, accéléré par $\vec{E}$, puis passe par zone où y a $\vec{E}$ et $\vec{B}$ = filtre de vitesse de Wien
($\vec{v}$ selon $\vec{u_x}$; $\vec{E}$: $\vec{u_y}$; $\vec{B}$: $\vec{u_z}$)



$\vec{F}(0) = q(E\vec{u_y} + v\vec{u_x}\wedge B\vec{u_z}) = q(E\vec{u_y} - vB\vec{u_y}) = q(E - vB)\vec{u_y}$

si $v = \frac{E}{B} \longrightarrow \vec{F} = \vec{0}$ ∴ part. pas déviée ∴ garde mouv. rectiligne et sort du filtre

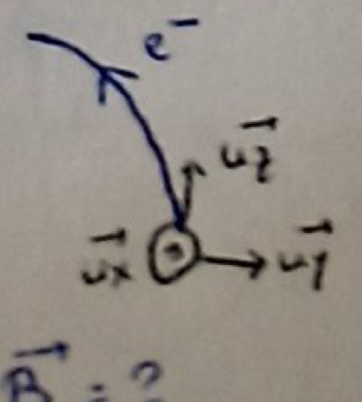
et part. à m̂ vitesse v_0 rentre ds secteur magnétique

∴ seule diff à la fin c'est $\underline{m}$

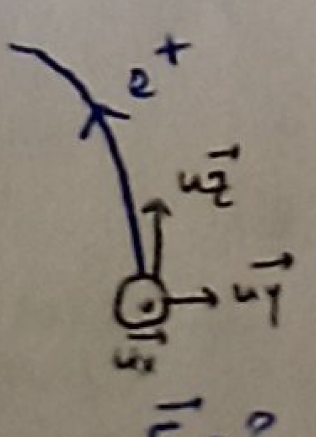
* La puissance de $\vec{F}_{mag}$ est tjr nulle, pour $\vec{F}_{el}$ c pas tjr le cas..

* La $\vec{F}_{el}$ dérive d'une E_p

* quiz



$\vec{B}$ = ?



$\vec{E}$ = ?

1er $\vec{v} \to \vec{u_z}$ et $\vec{F_m} \to -\vec{u_y}$

$-e\,\vec{u_z}\wedge\,? = -\vec{u_y}$ $\quad \vec{B} \to \vec{u_x}$

2e $\vec{F_{el}} \to -\vec{u_y}$ ∴ $\vec{E} \to -\vec{u_y}$

Chap 13 : Champ de Force centrale

Ex PCSI

Cours

- $\vec{F}$ est centrale si sa direction passe constamment par pt fixe ds $\mathcal{R}$ et ce pt fixe est appelé centre de force

- centrale et conservative : dérive d'une E_p : $\vec{F} = -\vec{\text{grad}}\, E_p$

  $\Rightarrow \vec{F} = F\vec{u_r} \;\therefore\; -\dfrac{\partial E_p}{\partial r}\vec{u_r} \quad \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0 \text{ et } \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0 \right)$

- si centrale $\therefore$ $\left.\dfrac{d\vec{L_O}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = r\vec{u_r} \wedge F\vec{u_r} = \vec{0}$

  mom. cinét. au centre de Force est une constante du mouv

  $\vec{OM} \wedge m\vec{v}$ ⟵ $\therefore \underbrace{\vec{L_O}}_{\text{cste}}$ est $\perp \vec{OM}, \vec{v}$ $\Rightarrow$ mouv M ds plan contenant centre de force et $\perp$ direct. cste de $\vec{L_O}$

  si en plus $\vec{L_O} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{OM}$ colin. avec $\vec{v}$ $\Rightarrow$ mouv. rectiligne

  $(r\vec{u_r}) \wedge (\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta})m = mr^2\dot{\theta}\vec{u_z} \rightarrow \underbrace{r^2\dot{\theta}}_{C}$ cste cste des aires

  pour traject. circulaire, $r = R$ fixe et si $\dot{\theta} = $ cste $\therefore$ mouv. circul. unif.

  (surf. balayée par unité t $= \dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}r^2\dot{\theta}$) cette expression appelée vitesse aréolaire

  $\therefore$ ds mouv. à $\vec{F}$ centrale, la v aréolaire représente surf. balayée par unité t par rayon vect. $\vec{OM}$. Elle est $=$ à $\frac{1}{2}$ cste des aires

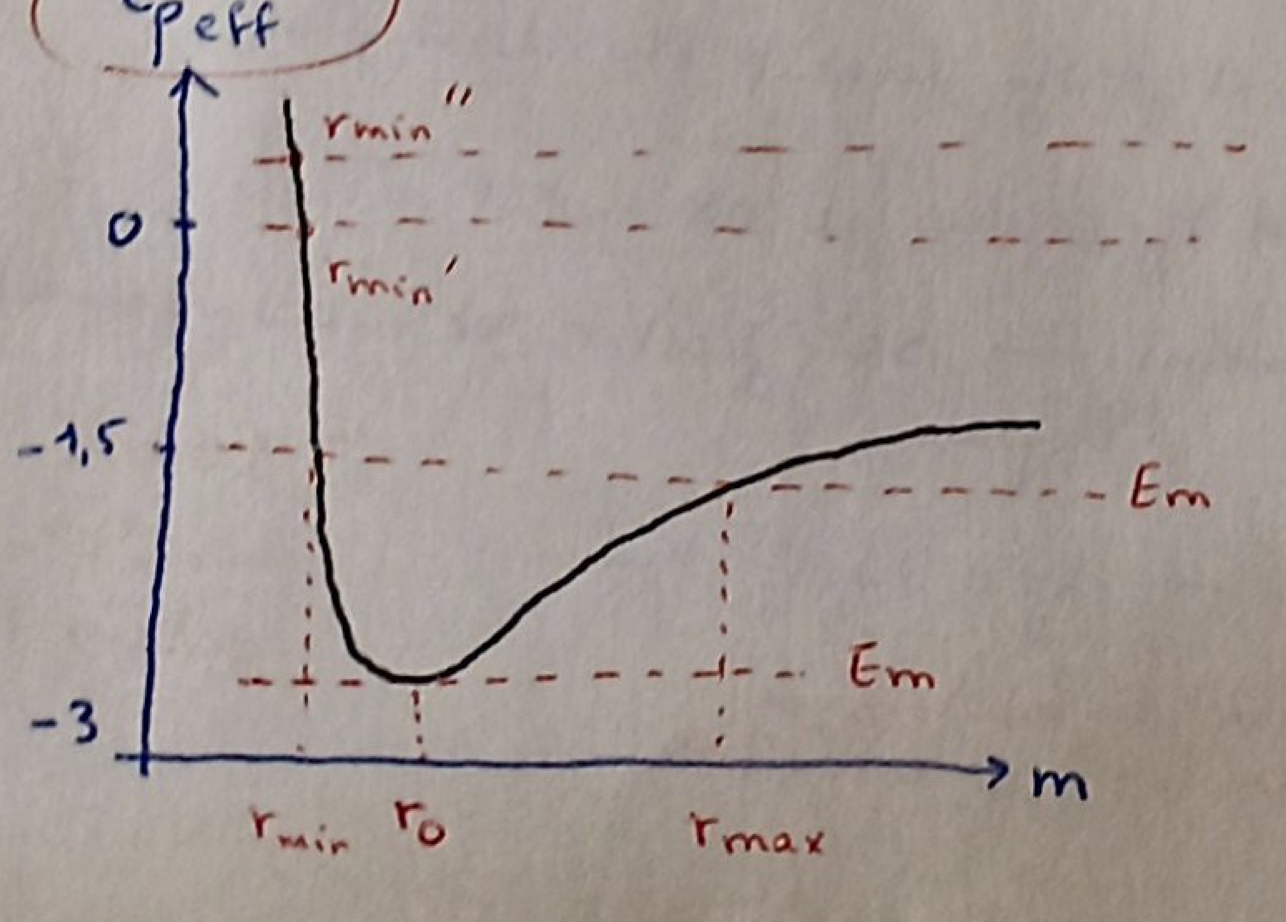
- si centrale + conservative $\Rightarrow$ Em est cste du mouv

  $$E_m = \frac{1}{2}m\left(v_r^2 + v_\theta^2\right) + E_p(r) \quad \Rightarrow \quad E_{p\,eff} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$$

  $v_r^2 \rightarrow \dot{r}^2$; $v_\theta^2 \rightarrow r^2\dot{\theta}^2 = \dfrac{C^2}{r^2}$

- Champ de $\vec{F}$ newtonien $\quad \vec{F} = -K\dfrac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3} = -\dfrac{K}{r^2}\vec{u_r}$ tq K cste >0 attractif ; <0 répulsif

  le champ dérive de Ep : $E_p = -\dfrac{K}{r}$



si $E_m = E_{p\,eff}(r_0) \rightarrow r = r_0$ et $\dot{r} = 0$

$\therefore$ traject. circulaire et par cste aires ($\dot{\theta} =$ c

$\Rightarrow$ mouv circul. unif (état lié)

si $E_{p\,eff}(r_0) < E_m < 0 \rightarrow r \in [r_{min}, r_{max}]$ état lié

et calcul complet mq traject. est ellipse

si $E_m = 0 \rightarrow r \in [r'_{min}, +\infty[$ état diffusion

$\rightarrow$ parabole

si $E_m > 0 \rightarrow r \in [r''_{min}, \infty[$ état diff $\rightarrow$ hyperbole

Ex planète → $\vec{F} = -G\frac{m m_\odot}{r^2}\vec{u_r}$

→ $E_p = -G\frac{m m_\odot}{r}$

$$\Rightarrow m\vec{a} = m(r\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{u_r}) = -\frac{G m m_\odot}{r^2}\vec{u_r}$$

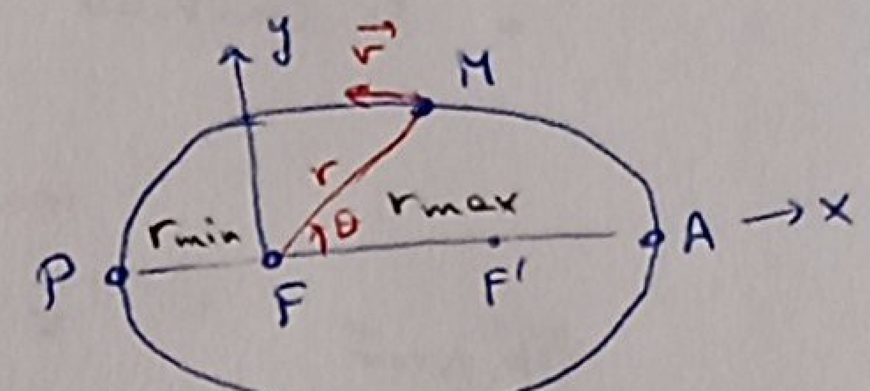
$\therefore$ $\left|\begin{array}{l} m r\ddot{\theta} = 0 \to \dot{\theta} = cste \quad \text{mouv circul. unif} \\ -m r\dot{\theta}^2 = -G\frac{m m_\odot}{r^2} \end{array}\right.$ par $v = r\dot{\theta} \therefore r\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G m_\odot}{r}}$ $+r \nearrow + v \searrow$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{G m m_\odot}{r} = \frac{1}{2}m\frac{G m_\odot}{r} - \frac{G m m_\odot}{r} = -\frac{G m m_\odot}{2r} < 0 \therefore \text{état lié}$$

période de révolution (pour faire tour complet) $T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G m_\odot} r^3}$

$\Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G m_\odot}$ $\therefore$ ne dépend que de la masse du centre attracteur

$\Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = cste$ pour toutes planètes



Pour trajet. elliptique $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$ ← $-\frac{G m m_\odot}{r}$

en A, P ⇒ $\dot{r} = 0$ ⇒ $E_m r^2 + G m m_\odot r - \frac{1}{2}mC^2 = 0$

les sol. donnent r_{min} et r_{max} tq $r_{min} + r_{max} = 2a = -\frac{G m m_\odot}{E_m}$

$$E_m = -\frac{G m m_\odot}{2a}$$

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{G m m_\odot}{r} = -\frac{G m m_\odot}{2a} \Rightarrow v = \sqrt{G m_\odot\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

} des Formules + générales (pour cercle : a = r)

$\therefore$ à P, A $\dot{r} = 0$ → $\vec{v_P} = v_P\vec{u_{\theta,P}} = r_{min}\dot{\theta}_P\vec{u_{\theta,P}}$

$\vec{v_A} = v_A\vec{u_{\theta,A}} = r_{max}\dot{\theta}_A\vec{u_{\theta,A}}$

} → par $C = r^2\dot{\theta} = r_{min}v_P = r_{max}v_A$

$$\frac{v_P}{v_A} = \frac{r_{max}}{r_{min}}$$

et $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G m_\odot}$

$\therefore$ Pour satellite terrestre — orbite circulaire tq centre orbite confondu avec centre masse de T

mouv. circul. unif $C = R^2\dot{\theta} = Rv \to v = \sqrt{\frac{G m_T}{R}}$

et $E_m = -\frac{G m m_T}{2R}$ et $T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G m_T}R^3}$

pour s'échapper de la Terre

$E_m \geq 0$ → état diffusion

$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{G m_T}{R_T} = 0$

$v = \sqrt{\frac{2 G m_T}{R_T}}$

$= 11 \text{ km/s}$

vitesse de libération ou 2e vitesse cosmique

GPS et satell. de navigation → alt. entre $20\times10^3 - 23\times10^3$ Km

altitude ↓ ⇒ où $R < R_T$ ↗ rayon Terre (ISS à 350 km !)

satell. météorologique → d'orbite basse (720–800 km) couvre zone restreinte mais bonne résolution

→ géostationnaire = vue + large

satellite qui reste en permanence à la verticale d'un même pt M_g de la Terre

ds réf géocentrique R_g, trajectoires de ces satell. et pt M_g doivent être ds même plan

$\therefore$ sat. est ∈ plan contenant centre O de T, et M_g ∈ plan ⊥ axe rotation T

$\therefore$ pour que ces 2 plans soient confondus → sat. géostat. est nécessairement équatorial à l'équateur

sa $T = T_{jour} = 8{,}6\times10^4$ s → $R_g = ✓$ et $R_g = R_{Terre} + h_g$ → $h_g = 36\times10^3$ Km

∃ 1 orbite géostation. mais altitude ↗↗ $\therefore$ coûteux d'y mettre satell.

• En orbite basse : $R = R_T + h \approx R_T$ ⇒ $v = \sqrt{\frac{G m_T}{R_T}} = 7{,}9$ km/s vit en orbite basse ou 1ère vit. cosmique