

Chapitre 2

PHÉNOMÈNES DE TRANSPORT DIFFUSION

Les ordres de grandeur utiles

Le cuivre

masse molaire	$M = 63,5 \text{ g.mol}^{-1}$
masse volumique	$\rho \approx 8,9.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
densité volumique de porteurs	$n = \rho N_A / M \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$
conductivité électrique	$\sigma = ne^2\tau/m \approx 5,8.10^7 \text{ S.m}^{-1}$
temps entre deux chocs	$\tau \approx 10^{-14} \text{ s}$

Conductivités électriques

Métaux : argent ; cuivre or ; fer	$\sigma = 6,3.10^7 \text{ S.m}^{-1}; \sigma = 5,9.10^7 \text{ S.m}^{-1}$ $\sigma = 4,3.10^7 \text{ S.m}^{-1}; \sigma = 1,0.10^7 \text{ S.m}^{-1}$
Non métaux : eau distillée verre ; polystyrène	$\sigma \approx 10^{-9} \text{ S.m}^{-1}$ $\sigma \approx 10^{-17} \text{ S.m}^{-1}; \sigma \approx 10^{-20} \text{ S.m}^{-1}$

Constantes

cste des gaz parfaits ; nbre d'Avogadro	$R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$; $N_A = 6,02.10^{23} \text{ mol}^{-1}$
constante de Boltzmann	$k_B = R / N_A = 1,38.10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$

L'air

masse molaire ; masse volumique	$M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$; $\rho = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$
densité particulaire (à 20 °C sous 1 bar)	$n = P / k_B T \approx 2,5.10^{25} \text{ m}^{-3}$
coefficient d'autodiffusion	$D \approx 2.10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$
capacité thermique massique à V = cste	$c_v = 0,72 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
capacité thermique massique à P = cste	$c_p = 1,0 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
conductivité thermique	$\lambda = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
coefficient de diffusion thermique	$D = \lambda / \rho c_p = 2.10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$

L'eau

masse molaire ; masse volumique	$M = 18 \text{ g.mol}^{-1}$; $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
densité moléculaire	$n = \rho N_A / M \approx 10^{28} \text{ m}^{-3}$
capacité thermique de l'eau liquide	$c = 4,18 \text{ kJ.kg}^{-1}.K^{-1}$
conductivité thermique	$\lambda = 0,6 \text{ W.m}^{-1}.K^{-1}$
coefficient de diffusion thermique	$D = \lambda / \rho c_p = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2.s^{-1}$

Coefficients de diffusion

molécules dans un gaz (autodiffusion)	$D \approx 10^{-4} \text{ à } 10^{-5} \text{ m}^2.s^{-1}$
molécules dans un liquide (autodiffusion)	$D \approx 10^{-8} \text{ à } 10^{-10} \text{ m}^2.s^{-1}$
atomes dans un solide (semi-conducteur)	$D \approx 10^{-17} \text{ à } 10^{-30} \text{ m}^2.s^{-1}$

Conductivités thermiques

mauvais conducteurs (gaz, polystyrène)	$\lambda < 0,1 \text{ W.m}^{-1}.K^{-1}$
conducteurs moyens (bois, verre, eau, béton)	$\lambda \approx 0,1 \text{ à } 10 \text{ W.m}^{-1}.K^{-1}$
très bons conducteurs (métaux)	$\lambda \approx 200 \text{ à } 400 \text{ W.m}^{-1}.K^{-1}$

Le cours d'abord : La conduction électrique

- Qu'appelle-t-on modèle de Drude dans la description simple et classique d'un conducteur métallique ? Préciser ce que représente la grandeur τ dans la « force de frottement » $-m\vec{v}/\tau$; de quel phénomène permet de rendre compte cette force ?
- Établir la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ et retrouver l'expression de la conductivité électrique σ d'un métal. Rappeler pour le cuivre l'ordre de grandeur de σ (avec son unité), de sa densité volumique d'électrons libres n , et en déduire celle de τ .
- Faire la démonstration du passage de $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ à $U = RI$ pour un conducteur filiforme de longueur l et de section s , et retrouver ainsi l'expression de sa résistance électrique $R = l/\sigma s$.

Le cours d'abord : La diffusion de particules**Un exemple générique**

- Dans un tube de verre (pour éviter la convection) on introduit par le côté droit deux morceaux de coton notés 1 et 2, imbibés de phénophthaléine et disposés à des endroits différents, puis on ferme cette extrémité par le bouchon 3. Juste après, on introduit par le côté gauche un coton noté 4 imbibé d'ammoniaque et on ferme cette extrémité par le bouchon 5. Décrire l'observation et l'interpréter en terme de diffusion.

La loi de Fick

- Soit un échantillon de volume V et de surface S . Soit n la densité partielle de particules dans l'échantillon. Montrer que la vitesse de diffusion v est proportionnelle à n et à S .
- Estimer la vitesse de diffusion d'un atome dans un solide à partir de la vitesse de diffusion d'un gaz à la même température.
- Montrer que la vitesse de diffusion v est proportionnelle à la concentration partielle n et au gradient de concentration Δn .
- Des molécules diffusent dans un gaz à température constante. Comment dépend la vitesse de diffusion de la température ?
- Donner l'équation de la loi de Fick à une dimension.
- Le nombre de particules dans un volume donné est proportionnel à la densité partielle n et à la taille a de la particule. Généraliser la loi de Fick à plusieurs dimensions.
- Quelles sont les conditions nécessaires pour que la loi de Fick soit valable ?

Les modes

- Qu'appelle-t-on mode fondamental ?
- Qu'est-ce qu'un mode fondamental ?
- Quelle est la condition pour que la loi de Fick soit valable ?

La loi de Fick

- g.m⁻³
3

s⁻¹

4
-1

5. Soit un élément de volume $d\tau$ entourant le point M . Quelle est la définition de la densité particulaire $n(M,t)$ en un point M à l'instant t ?
 6. Estimer le nombre d^2N de particules qui, par diffusion, traversent un élément de surface orienté $d\vec{S}$ pendant l'intervalle de temps dt . En déduire que le flux de particules $\Phi = \frac{dN}{dt}$ à travers une surface (S) finie conduit à définir un vecteur densité volumique de courant de particules $\vec{j}_p(M,t)$; quelle est son expression ? son unité ?
 7. Des molécules identiques de concentration $n(M,t)$ non uniforme diffusent dans un gaz, et le problème est considéré uniquement suivant un axe Ox . Énoncer la loi de Fick à une dimension qui lie j_p à $\frac{\partial n}{\partial x}$ et commenter le signe qui y intervient ; comment s'appelle le coefficient D qui y intervient ? quelle est son unité ?
 8. Donner l'expression de la loi de Fick à trois dimensions et la commenter.

sique d'un
i « force de
orce ?

conductivité
r (avec son
τ .

ur filiforme
résistance

droit deux
les endroits
introduit par
trémité par

Équation de diffusion

9. Le nombre de particules est conservé ; établir d'abord simplement à une dimension (variable x en coordonnées cartésiennes) l'équation de conservation du nombre de particules, relation entre j_p et n . En déduire l'équation de diffusion à une dimension de la fonction $n(x,t)$.
10. Généraliser la question précédente pour la fonction $n(x,t)$ en introduisant un terme de création de particules diffusantes (citer des exemples) avec σ_a , le nombre algébrique de particules apportées au volume $d\tau = Sdx$ pendant dt (σ_a en m⁻³.s⁻¹).
11. Quelles sont les propriétés immédiates de l'équation de diffusion ?

Le cours d'abord : La diffusion thermique

Les modes de transfert thermique

12. Qu'appelle-t-on conduction ou diffusion thermique ? Quel est l'état de la matière le plus concerné ? Citer un exemple simple de diffusion thermique forcée dans un solide.
13. Quelle est la caractéristique de la convection par rapport à la conduction ? Citer des exemples de convection naturelle et de convection forcée. Quel est le troisième mode de transfert thermique que l'on peut citer ?

Loi de Fourier

14. Définir à partir du flux thermique noté P ou Φ le vecteur densité de courant thermique \vec{j}_{th} (préciser les unités). Quel est le rôle du produit scalaire dans cette expression ? Exprimer ensuite la quantité d'énergie d^2E qui par conduction thermique traverse l'élément de surface dS pendant le temps dt .

15. Énoncer la loi phénoménologique de Fourier et la commenter. Quelles analogies peut-on faire avec la loi d'Ohm ?

« L'équation de la chaleur »

Une tranche de volume Sdx est constituée d'un milieu de masse volumique ρ possédant une capacité thermique massique c et une conductivité thermique λ ; ces grandeurs sont prises uniformes et constantes sur tout le matériau.

16. Établir d'abord l'équation de diffusion à une dimension (variable x en coordonnées cartésiennes) en l'absence d'autres phénomènes (pas de pertes latérales, pas de terme de création). Donner l'expression et l'unité du coefficient de diffusion thermique D .

17. Généraliser la question précédente (toujours à une dimension) en introduisant un terme d'apport d'énergie thermique (citer des exemples) en notant p_v la puissance volumique algébrique apportée au volume Sdx pendant dt (p_v en W.m^{-3}). Indiquer également l'équation de conservation.

18. Que faut-il traduire de manière générale sur la limite d'un domaine ? Comment cela se traduit-il dans les cas suivants : l'extrémité d'une tige est isolée, deux solides (de même surface) sont mis en contact, un solide est en contact avec un fluide ?

Résistance thermique

Les extrémités d'une tige cylindrique (conduction axiale) homogène de section S et de longueur L sont maintenues (en régime forcé) à des températures constantes T_1 en $x = 0$ et $T_2 < T_1$ en $x = L$. Il y a isolation thermique sur la paroi latérale.

19. Trouver le profil de température $T(x)$ en régime stationnaire et tracer le graphe.

20. Montrer que la puissance transférée P (ou flux thermique Φ) s'écrit sous la forme

$$P = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} = G_{th}(T_1 - T_2) ; \text{ donner l'expression de } R_{th}, \text{ son unité, et interpréter } G_{th}.$$

21. Proposer un tableau comparatif des grandeurs électrocinétiques et thermiques équivalentes. Que peut-on dire des règles d'association série et parallèle des résistances thermiques ?

* Il faut trouver
(mais avec un scopique)

* Il faut introduire comme l'intensité des débits (régime du soldé)

* Attention à l'énergie

* Dans l'équation à la bonne place les signes pénétrant le siège de dynamique

* Comme il faut écrire
 $dT = \frac{\partial T}{\partial x}$
intervient

* En revanche pour $T(r)$ pourra-t-on

* Un flux est un champ qui est donc total aucun cas $S = 4\pi r^2$

* Le mot « thermodynamique » préférer à « équation des expressions »

* Un des buts de la physique est d'intégrer les équations, pas de les dériver ! Il faut donc absolument garder dans les équations de la diffusion la forme « compacte » issue des bilans en coordonnées cylindriques : $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right)$ ou sphériques : $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right)$ sans développer ces dérivées (ici par invariance n'intervient que la variable r).

24.

* Lorsque les conditions initiales et aux limites sont précisées, la solution de l'équation de diffusion est unique, mais le type de solution dépend de ces conditions, d'où la grande variété de solutions possibles. En revanche, la solution est rarement analytique et la résolution se fait en général numériquement, sauf dans un nombre limité de cas particuliers. Dans le cadre du programme de BCPST, seules sont envisagées des solutions simples en régime stationnaire.

25.

* En régime stationnaire, lorsque la distribution de température $T(x)$ est une fonction affine, il importe de faire apparaître dans son expression un signe pertinent : par exemple si pour une barre $T(x=0)=T_1 > T(x=L)=T_2$, alors il faut préférer

$$T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L} x, \text{ et fuir l'écriture non pertinente } T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x$$

26.]

* La règle générale sur la limite d'un domaine consiste à traduire la continuité du flux de particules ou thermique (la surface de séparation n'a pas d'épaisseur et donc rien ne peut s'y accumuler). La continuité de la température est également vraie, mais souvent cela ne conduit pas à grand chose car la température de surface n'est en général pas connue.

27. A

* Pour un solide en contact avec un fluide de température T_0 , il ne faut pas commettre l'erreur de traduire $T(x_{\text{lim}}, t) = T_0$ car si la température est bien continue en x_{lim} , le fluide ne retrouve sa valeur T_0 qu'au-delà d'une couche limite d'épaisseur δ . En effet, la conductivité du fluide n'est pas assez élevée pour évacuer vite le transfert thermique sans modifier sa température, sauf en cas de convection avec un débit suffisant.

28. I

U

fc

F

a

b

c)

Applications directes du cours

22. Le conducteur métallique est le cuivre, de masse volumique $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et de masse molaire $M = 63,5 \text{ g.mol}^{-1}$ dont on admet que chaque atome met en jeu un électron libre. Donner l'expression puis la valeur numérique de la densité volumique d'électrons libres n , puis rappeler pour le cuivre l'ordre de grandeur de la conductivité électrique σ (avec son unité). En déduire celle de τ .

29. T

U

ce

de

23. Quelle est l'unité du système international de la résistivité électrique ? Comment cette unité s'exprime-t-elle en fonction des quatre unités fondamentales m, kg, s et A ?

th

te

r ! Il faut donc
ste » issue des
 $\left(r^2 \frac{d}{dr} \right)$ sans

l'équation de
l'où la grande
analytique et la
limité de cas
visagées des

une fonction
pertinent : par
er

$$\frac{-T_1}{L}x$$

ité du flux de
donc rien ne
mais souvent
1 général pas

as commettre
e en x_{lim} , le
 δ . En effet,
ert thermique
ant.

kg.m^{-3} et de
et en jeu un
é volumique
ideur de la

mment cette
et A ?

- 24. Estimer la résistance R d'un fil de cuivre de longueur $l = 40 \text{ cm}$ et de diamètre $d = 1 \text{ mm}$ utilisé en TP ; commentaire. Ce fil est parcouru par un courant électrique d'intensité $I = 100 \text{ mA}$. Quelle est la différence de potentiel ΔV entre ses extrémités ? En déduire la norme E du champ électrique qui lui est appliquée.**
- 25. Le régime stationnaire (se référer à l'exemple unidimensionnel de la question 4.)**
- On se place en régime stationnaire (sans terme de création) ; montrer que le flux de particules est uniforme et en donner une interprétation qualitative.
 - Montrer pour un tube de section S et de longueur L , que l'on distingue alors deux régimes différents, à nommer suivant qu'il y a équilibre ou pas, en précisant bien les conditions imposées aux limites ; quelle est la solution $n(x)$ dans chaque cas.
- 26. Durée d'un régime transitoire**
- Une tige cylindrique de longueur L (à conduction axiale et calorifugée sur la paroi latérale) est initialement à la température uniforme T_2 (celle de l'air environnant) et à $t = 0$, on lui applique une température T_1 en $x = 0$ (extrémité encastrée dans un four, voir le schéma à la solution de la question 12.) alors qu'elle demeure à T_2 en $x = L$; il s'instaure alors un régime transitoire. Estimer la durée τ d'établissement du régime permanent pour une tige d'acier pour laquelle $L = 25 \text{ cm}$, puis $L' = 50 \text{ cm}$; $\lambda = 82 \text{ W.m}^{-1}.K^{-1}$; $c = 0,46 \text{ kJ.kg}^{-1}.K^{-1}$; $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. Conclusion.
- 27. Application élémentaire à l'isolation thermique**
- L'intérieur (T_i) et l'extérieur (T_e) d'une maison sont séparés par un mur d'épaisseur $l = 30 \text{ cm}$ et de conductivité $\lambda = 0,7 \text{ W.m}^{-1}.K^{-1}$. Ce mur est recouvert d'un revêtement thermique d'épaisseur $e = 2 \text{ cm}$ et de conductivité $\lambda' = 0,03 \text{ W.m}^{-1}.K^{-1}$. Quel est le rapport P'/P de la puissance perdue avec et sans revêtement ? Conclusion.
- 28. Le conducteur cylindrique (conduction radiale)**
- Un tronçon de longueur h d'une gaine d'isolation de conduite de conductivité λ , a la forme d'un cylindre creux de rayon intérieur R_1 (température T_1) et de rayon extérieur R_2 (température T_2)
- Établir l'équation spatio-temporelle de diffusion en coordonnées cylindriques.
 - Quelle est en régime stationnaire, la distribution de température $T(r)$? En déduire la résistance R_{th} du tronçon.
 - Sans passer par la connaissance explicite du champ de température $T(r)$, établir directement l'expression de la résistance R_{th} du tronçon.
- 29. Température cutanée d'un mammifère**
- Un mammifère peut être très sommairement schématisé par une sphère de muscles de centre O , de rayon R dont le métabolisme dégage la puissance thermique P par unité de volume, uniformément dans tout son volume. L'air extérieur a une conductivité thermique λ , sa température loin de l'animal est $T_0 = 20^\circ\text{C}$. On s'intéresse à la température de l'air (donc pour $r \geq R$) en régime permanent.

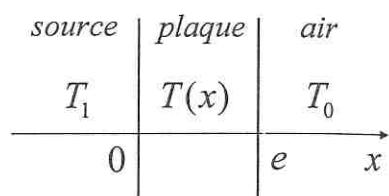
- a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(r)$, pour $r \geq R$. En déduire l'expression de $T(r)$.
- b) Quelle est la température cutanée T_C de l'animal en $r = R$? Commenter les variations de la différence $T_C - T_0$ en fonction de λ seulement (c'est-à-dire à R et P fixés), puis en fonction de P seulement, et enfin en fonction de R seulement.
- c) Quelle doit être la valeur de P pour avoir $T_C = 30^\circ\text{C}$ dans l'air puis dans l'eau ?
On donne : $\lambda = 500 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$ pour l'eau et $\lambda = 5 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$ pour l'air (ces valeurs tiennent compte de la convection). Prendre $R = 25 \text{ cm}$ ce qui permet d'avoir un rapport surface/volume voisin de celui de l'être humain. Commentaire.

30. Importance conduction – convection dans un refroidissement thermique

Une source thermique, qui maintient une température constante et uniforme T_1 , occupe l'espace $x < 0$; elle est séparée de l'air ambiant à la température $T_0 < T_1$ (pour $x > e$) par une plaque d'épaisseur e constituée d'un matériau de conductivité thermique λ . La plaque se refroidit par convection au contact de l'air, le coefficient de convection est h (en $\text{W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}$).

On considère uniquement le régime permanent (aucune température ne dépend du temps), le problème est à une seule dimension x (pas d'effet de bord) et les échanges en $x = 0$ et $x = e$ sont limités à une surface transversale S .

- a) Donner le profil de température $T(x)$ dans la plaque.
- b) Après avoir rappelé la loi de Newton donnant j_{th} en $x = e$ entre la plaque et l'air, déterminer l'expression de la température de surface $T(e)$ de la plaque en fonction de T_0 , T_1 , λ , h et e . Écrire ensuite j_{th} en fonction des mêmes données, et en déduire l'expression de la résistance thermique R_{th} équivalente ; la commenter.
- c) Examiner les deux cas limites suivant la valeur du rapport he/λ , préciser dans chaque cas les conditions physiques, donner la valeur de $T(e)$, de la puissance thermique totale de refroidissement, et proposer un exemple simple de la vie courante.



Questions de réflexion ; physique pratique

31. Comment, par une phrase, peut-on caractériser la « résistance électrique » d'un matériau ?
32. L'effet Joule qui accompagne le passage de tout courant à travers un matériau résistif est-il un effet souhaité ou néfaste ?
33. Soumis à un champ électrique uniforme, les électrons libres d'un métal devraient acquérir un mouvement accéléré. Pourquoi alors la loi d'Ohm s'interprète-t-elle par la proportionnalité entre le champ appliqué et la vitesse de dérive des électrons ?

34. La cui

35. Co

36. Po val déi cin est lib ent

37. On s'é la :

38. Es dis co

39. Po

40. Pe

41. Pa les

42. À Pe un

43. Cc né

44. Ur l'o d'e d'e

45. Ex ac

46. Qu

que ?

Exercices

61. Mesure de la conductivité ionique molaire de Cu^{2+}

1. Étude de la conductivité

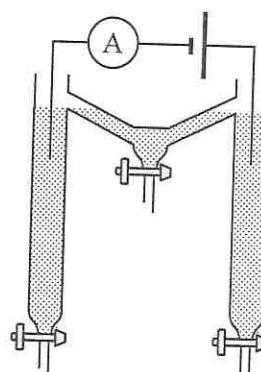
On modélise une cellule d'un conductimètre par deux électrodes planes de surface rectangulaire S d'axe Ox , comprise entre les plans d'équations $x=0$ et $x=L$, contenant une solution aqueuse. Cette solution contient différents types d'ions A_i de charge q_i et de masse m_i ; on note n_i le nombre d'ions A_i par unité de volume. Soit U la différence de potentiel constante entre les plans $x=0$ et $x=L$ telle que dans le cylindre règne un champ électrostatique uniforme et stationnaire $\vec{E} = \frac{U}{L} \vec{u}_x$ où \vec{u}_x est le vecteur unitaire de l'axe Ox . Les ions A_i sont alors soumis à la force électrostatique correspondante $q_i \vec{E}$ et à une force de frottement fluide de la forme $-f_i \vec{v}_i$ où \vec{v}_i est leur vitesse et f_i un coefficient de frottement.

- Écrire l'équation différentielle du mouvement d'un ion A_i . Dans la suite, on se place en régime permanent ; montrer que $\vec{v}_i = \mu_i \vec{E}$ et exprimer le coefficient μ_i (mobilité de l'ion) en fonction de q_i et f_i .
- Quel est le nombre dN_i d'ions A_i franchissant une section d'abscisse donnée de la cellule entre les dates t et $t+dt$? Quelle charge dQ_i transportent ces ions pendant dt ? En déduire la contribution I_i des ions A_i à l'intensité I du courant traversant la cellule en fonction de q_i , f_i , n_i , L , S et U . Vérifier que le signe de q_i n'influe pas sur le signe du courant.
- En déduire que la résistance R du cylindre s'écrit $R = \frac{1}{\sigma S} L$ et donner l'expression de la conductivité σ en fonction d'abord des n_i , q_i , f_i , puis des n_i , q_i , μ_i .

2. Méthode de Hittorf

Par définition le nombre de transport t_i est la fraction du courant total transporté par les ions d'un type donné : $t_i = \frac{I_i}{I}$.

Pour mesurer ce nombre de transport, on utilise une cellule de Hittorf modélisée ci-contre. Elle est constituée de 3 compartiments, 2 électrodes de cuivre reliées à un générateur de courant continu et un milliampèremètre. À $t=0$, on ferme le circuit électrique ; l'intensité est maintenue à $I=8 \text{ mA}$ et on effectue l'électrolyse pendant un temps $t_e = 2 \text{ heures}$ au bout duquel on dose les ions Cu^{2+} de concentration initiale $C_0 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. Après 2 heures la concentration du compartiment cathodique de volume $V_0 = 20 \text{ mL}$ est $C_C = 4,4 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.



a) Montrer que le nombre de transport des ions Cu^{2+} vaut : $t_{Cu^{2+}} = \frac{2N_A e (C_0 - C_C) V_0}{It}$.

Calculer numériquement $t_{Cu^{2+}}$.

- b) Une mesure de la conductivité de la solution initiale de sulfate de cuivre de concentration C_0 donne $\sigma = 1,34 \text{ S.m}^{-1}$. Exprimer le nombre de transport de Cu^{2+} en fonction notamment de σ et de $\mu_{Cu^{2+}}$, la mobilité des ions Cu^{2+} , puis en déduire une valeur numérique de la conductivité ionique molaire des ions Cu^{2+} définie par : $\lambda_{Cu^{2+}} = 2N_A e \mu_{Cu^{2+}}$.

62. Diffusion de neutrons

On étudie la diffusion unidirectionnelle de neutrons dans un barreau cylindrique, de longueur L et de section S , en supposant qu'il n'y a pas d'évasion par la surface latérale. On note $n(x, t)$ la densité volumique des neutrons à l'abscisse x et à l'instant t et $j_n(x, t)$ la densité de courant de neutrons diffusés.

1. Préliminaires

- a) Donner par une phrase la signification de $j_n(x, t)$.

Rappeler l'expression de la loi de Fick reliant $j_n(x, t)$ et $n(x, t)$ en notant D le coefficient de diffusion (qui garde une valeur constante positive).

- b) On note n_0 et n_L la concentration en neutrons mobiles respectivement en $x = 0$ et à l'abscisse $x = L$. Quelle serait, en régime permanent et en négligeant tout terme de source, la valeur de j_n en fonction de n_0 , n_L , L et D ?

2. Absorption de neutrons

Dans cette question, on suppose qu'une pastille irradiée, placée à l'entrée du barreau, envoie dans celui-ci un flux homogène et constant de neutrons. On note J_0 (valeur constante positive) le nombre de neutrons traversant par unité de surface et de temps la section du barreau d'abscisse $x = 0$ et n_0 la concentration en neutrons mobiles à cet endroit. On tient compte de l'absorption des neutrons par le matériau en notant K (une constante positive) le nombre de neutrons par unité de volume et de temps absorbés par le matériau.

- a) En faisant le bilan des neutrons dans une tranche d'épaisseur dx à l'abscisse x , montrer que $n(x, t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles : $D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{\partial n}{\partial t} = K$
- b) Déterminer, en régime permanent, la loi de variation $j_n = f(x)$ en fonction de J_0 , K et x .
- c) En déduire pour quelle valeur $x = L'$ de l'abscisse le courant de neutrons s'annule. Montrer que ce dernier résultat pouvait être obtenu plus simplement.
- d) Expliquer en quoi l'hypothèse considérant K comme une grandeur uniforme est irréaliste et suggérer une hypothèse de remplacement.

3. Production de neutrons

On étudie la diffusion unidimensionnelle des neutrons dans un barreau de matière fissile. Deux phénomènes se produisent dans la matière fissile : la réaction de fission absorbe des neutrons mais en produit plus qu'elle n'en absorbe. La concentration en

63. Évap

Un b

initia

de ha

d'éth

temp

pressi

l'air)

La d

étant

vapor

a) Da

l'in

b) En

c) Éta

d) En

On

- la

- n

- le

- la

64. Un no

Un nc

produ

unité c

est D.

a) Éta

(r <

inte

b) Cal

dan

con

c) Tra

a e

$$\frac{(C_0 - C_c)V_0}{It}$$

le cuivre de port de Cu^{2+}
 $^{2+}$, puis en s ions Cu^{2+}

indrique, de r la surface t à l'instant

otant D le en $x = 0$ et tout terme

u barreau, J_0 (valeur de temps mobiles à notant K de temps scisse x , $= K$ n de J_0 , s'annule. orme est

matière à fission ation en

neutrons mobiles vérifie alors l'équation différentielle : $D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{\partial n}{\partial t} = -\alpha n$, le coefficient constant et uniforme α étant positif. La concentration en neutrons mobiles est nulle aux deux extrémités du barreau : $n = 0$ en $x = 0$ et en $x = L$.

- En posant $n(x, t) = f(x).g(t)$, montrer que $n(x, t)$ diverge au cours du temps si la longueur L du barreau est supérieure à une valeur limite L_0 à exprimer en fonction de D et α .
- Que se passe-t-il si L est supérieure à L_0 ?

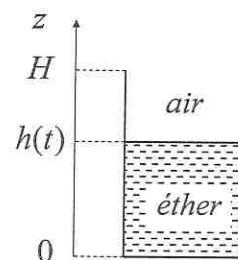
63. Évaporation de l'éther (*)

Un bêcher cylindrique contient de l'éther liquide. À l'instant initial l'éther remplit une hauteur $h_0 = 5$ cm dans un bêcher de hauteur $H = 8$ cm. À l'interface $h(t)$, la pression partielle d'éther est égale à sa pression de vapeur saturante à la température ambiante $T_0 = 293$ K et à la sortie du tube, la pression partielle de l'éther est négligeable (il est évacué par l'air) ; les vapeurs d'éther sont assimilées à un gaz parfait.

La durée caractéristique de diffusion de l'éther dans l'air étant très inférieure à la durée caractéristique de la vaporisation de l'éther, elle s'effectue en régime quasi permanent.

- Dans ces conditions, déterminer la densité particulaire $n(z)$ d'éther entre l'interface $z = h(t)$ et l'extrémité $z = H$.
- En déduire le flux Φ d'éther à l'interface, en notant S la section du bêcher.
- Établir l'équation différentielle vérifiée par la hauteur d'éther $h(t)$ et l'intégrer.
- En déduire le temps τ nécessaire à l'évaporation totale de l'éther ; commentaire.
On donne :

 - la masse molaire de l'éther : $M = 74,1 \text{ g.mol}^{-1}$
 - masse volumique de l'éther : $\mu = 626 \text{ kg.m}^{-3}$
 - le coefficient de diffusion de l'éther dans l'air : $D = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
 - la pression de vapeur saturante de l'éther à 293 K : $P_s = 0,58 \text{ bar}$



64. Un noyau sphérique à production de neutrons (*)

Un noyau sphérique de centre O et de rayon R , appelé cœur, est le siège d'une production de neutrons : p , supposé constant, est le nombre de neutrons émis par unité de volume et de temps. Le coefficient de diffusion des neutrons dans le milieu est D . Le problème, à symétrie sphérique, est étudié en régime permanent.

- Établir l'équation différentielle donnant la densité n_c de neutrons dans le cœur ($r < R$) et en déduire $n_c(r)$ en fonction de p , D et d'une constante a à interpréter.
- Calculer de même $n_E(r)$, la densité de neutrons à l'extérieur ($r > R$), domaine dans lequel il n'y a ni émission ni absorption de neutrons, en fonction d'une constante b sachant que n_E devient nulle lorsque $r \rightarrow \infty$.
- Traduire les conditions à la limite $r = R$ du domaine et déterminer les constantes a et b .

65. Sédimentation de macromolécules

Un récipient contient un liquide homogène, de masse volumique ρ , dans lequel on ajoute des macromolécules insolubles de masse volumique $\rho_0 > \rho$.

La solution obtenue est maintenue homogène jusqu'à la date $t=0$. À partir de cet instant elle est abandonnée à elle-même et, sous l'action des forces de pesanteur, les macromolécules se déplacent vers le fond du récipient (pour les projections, prendre un axe Oz vertical ascendant, avec l'origine O au fond du récipient). Le mouvement est supposé unidirectionnel vertical et les macromolécules soumises, entre autres, à une force de frottement de type visqueux $\vec{F} = -f\vec{v}$ (f est une constante positive et \vec{v} la vitesse des molécules).

On rappelle que le produit de la constante de Boltzmann k_B par le nombre d'Avogadro N_A est égal à la constante des gaz parfaits : $R = k_B N_A = 8,31 \text{ J.K.mol}^{-1}$.

- Quelles sont les trois forces auxquelles est soumise chaque macromolécule ? En déduire l'équation différentielle du mouvement d'une macromolécule de masse m et montrer que ces particules atteignent une vitesse limite \vec{v}_{lim} .
- Cette vitesse limite étant atteinte rapidement, exprimer la densité du flux d' entraînement moléculaire \vec{j}_E des macromolécules à la cote z où leur concentration molaire est $c(z)$, en introduisant la masse molaire M des macromolécules.
- Justifier qu'il existe un courant ascendant \vec{j}_D . On note D le coefficient de diffusion ; donner l'expression de \vec{j}_D à l'aide de la fonction $c(z)$.
- Déterminer, en régime stationnaire, la loi de variation de c avec z .
- On donne la relation d'Einstein $D = k_B T / f$; $\rho / \rho_0 = 0,8$ et $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$. Des mesures optiques montrent que, à 25°C , $c(z=0) = 2c(z=2 \text{ cm})$.
En déduire la masse molaire M des macromolécules ; commentaire.

66. Intérêt d'un double vitrage

Une pièce rectangulaire de $5,0 \text{ m} \times 8,0 \text{ m}$, dont les murs ont une hauteur de $2,5 \text{ m}$ et une épaisseur de $E = 0,3 \text{ m}$, comprend une baie vitrée de $2,0 \text{ m} \times 1,8 \text{ m}$ et deux fenêtres de $1,2 \text{ m} \times 1,2 \text{ m}$, toutes les trois d'épaisseur de vitres $e = 2,0 \text{ mm}$. L'intérieur de la pièce est à la température $T_1 = 19^\circ\text{C}$, et les deux grands murs avec baie et fenêtres donnent sur l'extérieur à la température $T_2 = 0^\circ\text{C}$. Il n'y a aucun échange thermique à travers les deux autres (petits) murs, le sol et le plafond, les appartements voisins étant à la même température T_1 .

Les conductivités thermiques du verre, d'un mur (béton + isolant) et de l'air sont $\lambda_V = 0,78 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$, $\lambda_M = 0,10 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$ et $\lambda_A = 0,026 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$.

- Calculer les résistances thermiques R_V des vitres, R_M des murs concernés, puis R de l'ensemble. En déduire les flux thermiques Φ_V à travers les vitres, Φ_M à travers les murs concernés, et Φ_T à travers l'ensemble. Évaluer le rapport Φ_M / Φ_T et conclure.

Po
du
cou
b) Cal
d'a
son
vitr
« d
c) Afi
tem
deu

67. Ailetté

Pour é
on mu
Chaque
d'épais
 $b=10$
les cal
En fo
de l'a
 $T_M = \epsilon$
est à t
de l'ai
tempér
Dans l
est $T($
Il exis
couche
l'élém

- Écr
trar
l'éc

en p
b) Rés
l'in
c) Exp
l'ai
l'ai
pou

Pour limiter les pertes par les parties vitrées, les vitres simples sont remplacées par du « double vitrage » : deux vitres d'épaisseur $e = 2,0 \text{ mm}$ séparées par une couche d'air sans convection et d'épaisseur $e' = 4,0 \text{ mm}$.

- Calculer la résistance thermique d'une simple couche de vitre R_V , de la couche d'air comprise entre les deux couches de vitres R_A , puis du « double vitrage » dans son ensemble R_{DV} . En déduire le flux thermique Φ_{DV} à travers le « double vitrage » et conclure. Que vaut alors le flux Φ'_T à travers l'ensemble murs + « double vitrage » ?
- Afin d'avoir une idée du profil de température dans le double vitrage, calculer les températures T_1' et T_2' des parois du verre au contact de l'air compris entre les deux vitres. Conclure.

67. Ailettes de refroidissement

Pour éviter un échauffement trop important d'un appareil électrique, dû à l'effet Joule, on munit l'arrière de son boîtier d'ailettes de refroidissement métalliques.

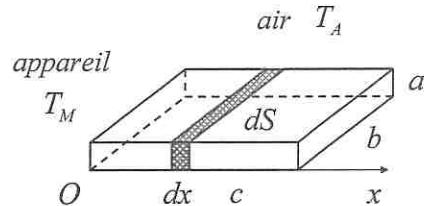
Chaque ailette est parallélépipédique, d'épaisseur $a = 2,0 \text{ mm}$, de largeur $b = 10 \text{ cm}$ et de longueur $c = 12 \text{ cm}$. Dans les calculs on admet $a \ll b$.

En fonctionnement permanent, le boîtier de l'appareil maintient une température $T_M = 60^\circ\text{C}$. L'air extérieur, qui circule, est à une température constante et uniforme $T_A = 20^\circ\text{C}$, sauf au voisinage immédiat de l'ailette, entourée d'une couche limite d'air thermiquement peu conductrice dont la température reste localement voisine de celle de la surface de l'ailette.

Dans l'ailette, on admet une conduction thermique unidimensionnelle ; la température est $T(x)$, la loi de Fourier s'applique et la conductivité est $\lambda = 20 \text{ W.m}^{-1}.^\circ\text{C}^{-1}$.

Il existe par ailleurs un transfert thermique de l'ailette vers l'air ambiant, à travers la couche limite. Le flux thermique entre la surface latérale dS (en gris sur la figure) de l'élément d'ailette de longueur dx et l'air ambiant est de la forme :

$$dP = h(T(x) - T_A)dS \quad \text{où } h = 180 \text{ W.m}^{-2}.^\circ\text{C}^{-1}$$



- Écrire le bilan en régime stationnaire permanent des échanges thermiques de la tranche d'ailette de largeur dx . En déduire que la température $T(x)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{L^2}(T(x) - T_A) = 0$$

en précisant l'expression de L ainsi que sa valeur numérique et son unité.

- Résoudre cette équation et donner l'expression simplifiée de $T(x)$ compte tenu de l'inégalité entre L et c .
- Exprimer et calculer numériquement la puissance thermique totale P évacuée par l'ailette, puis la puissance thermique P' transmise par le boîtier de l'appareil à l'ailette en $x = 0$ et commenter. Combien faudrait-il fixer d'ailettes sur le boîtier pour évacuer une puissance totale $P_{tot} = 200 \text{ W}$?

68. Fusible en régime stationnaire

Un fusible est constitué par un fil conducteur cylindrique homogène, de section droite d'aire s , de longueur utile L , de masse volumique μ et de capacité thermique massique c . Il possède une conductivité électrique γ et une conductivité thermique K . Il est traversé par un courant électrique continu d'intensité I . Ce fil est enfermé dans une capsule remplie d'une substance assurant une isolation thermique et électrique parfaite. Les températures en $x=0$ et $x=L$ sont imposées et égales à la température T_0 du milieu ambiant.

On donne les valeurs suivantes, dans le système international d'unités (SI) :

$$K = 65 \text{ SI} ; \gamma = 1,2 \cdot 10^6 \text{ SI} ;$$

$$c = 460 \text{ SI} ; \mu = 2,7 \cdot 10^3 \text{ SI} ;$$

$$T_0 = 290 \text{ K} ; L = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

On suppose que le régime stationnaire est établi.

- Considérer une tranche d'épaisseur dx du barreau. Quelle est l'expression de sa résistance dR ? À partir d'un bilan énergétique effectué sur cette tranche, établir l'équation différentielle donnant la température $T(x)$ et faisant intervenir I , s , γ et K .
- Intégrer cette équation et donner l'expression littérale du profil de température $T(x)$; représenter graphiquement $T(x)$. Expliquer qualitativement pourquoi le flux thermique dépend de x .

Le matériau constituant le fil fond à $T_F = 390 \text{ K}$. On veut fabriquer un fusible qui admette une intensité maximale $I_{max} = 16 \text{ A}$.

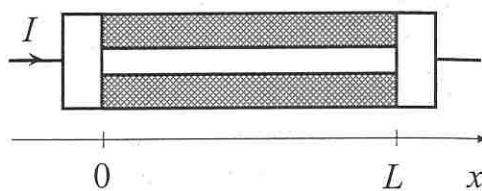
- Préciser l'endroit de la rupture en cas de dépassement de I_{max} . Puis déterminer l'expression littérale de l'aire s à prévoir. Faire l'application numérique en exprimant le résultat en mm^2 .

Jusqu'à la fin du problème, on fixe $I = 10 \text{ A}$ et le fil a la section s trouvée à la question c).

- Évaluer littéralement, puis numériquement les puissances thermiques $P_{th}(0)$ et $P_{th}(L)$ transférée par conduction en $x=0$ et $x=L$. Préciser si ces puissances sont reçues par le système {fil}. Faire de même pour la puissance électrique P_e reçue par le fil et conclure.
- On désire faire un bilan entropique du fil sur une durée Δt . Évaluer d'abord la variation d'entropie ΔS du fil pendant cette durée, puis les expressions littérales des termes d'échange $\delta S_{éch.}$ et de création $\delta S_{crée}$ pendant cette durée. Donner une interprétation physique argumentée de ce résultat, et évaluer numériquement l'entropie créée dans le fil par unité de temps.

69. Mise en chambre d'un vin en bouteille

Une bouteille de vin, choisie dans la cave à une température de $T_0 = 8^\circ\text{C}$ est mise en « chambre » dans la cuisine dont la température vaut $T_A = 22^\circ\text{C}$.



O
ha
d
co
l'e
la
Pa
su
du
fo
co
qu
D

a)

b)

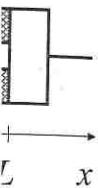
c)

d)

e)

70. 1
U
V
I
E
S
t
1

tion droite
thermique
thermique
t enfermé
mique et
gales à la



ion de sa
ie, établir
 I , s , γ

température
arquois le

sible qui

terminer
rique en

vée à la
 $P_{th}(0)$ et
ices sont
 P_e reçue

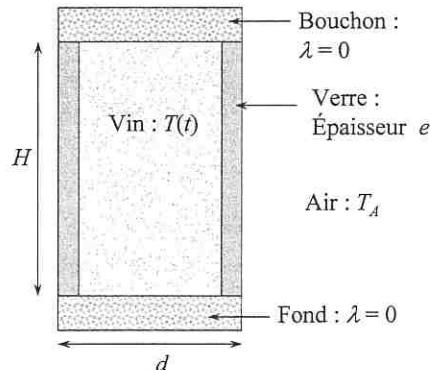
abord la
littérales
mer une
quement

mise en

On assimile la bouteille à un cylindre de hauteur $H = 19,5 \text{ cm}$, de diamètre extérieur $d = 7,6 \text{ cm}$ et d'épaisseur $e = 3 \text{ mm}$. On considère que les échanges thermiques entre l'extérieur et le vin se font uniquement par la surface latérale de la bouteille.

Par ailleurs la température $T(t)$ du vin est supposée uniforme, mais dépend lentement du temps ; celle du verre, en revanche, est fonction de r (distance à l'axe des coordonnées cylindriques) et le régime est quasi stationnaire.

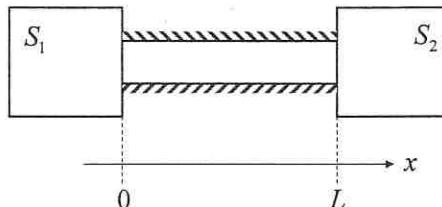
Données : conductivité du verre $\lambda = 0,78 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$.
coefficeint d'échange convectif $h = 10 \text{ U.S.I.}$
capacité thermique massique du vin $c = 4 \text{ kJ.kg}^{-1}\text{.K}^{-1}$.



- Calculer le volume V de vin dans la bouteille, en déduire la masse m (en kg) de vin en prenant sa masse volumique $\rho_{\text{vin}} \approx 1 \text{ g.cm}^{-3}$.
 - Calculer la résistance thermique R_{cond} de conduction de la surface latérale de la bouteille, en notant T_s la température en surface de la bouteille.
 - L'échange thermique par convection entre la bouteille et l'air ambiant est bien représenté par la loi de Newton : $\varphi = hS(T_s - T_A)$ où le coefficient d'échange thermique h est considéré comme constant et uniforme sur toute la surface S et φ est le flux thermique. Quelle est l'unité de h ? De quelles grandeurs et de quels phénomènes physiques dépend ce coefficient? Calculer la résistance thermique R_{conv} de convection de la surface latérale de la bouteille. En déduire la résistance thermique totale R_h d'échange entre le vin et l'extérieur.
 - Écrire le bilan énergétique de la bouteille entre deux instants infiniment voisins t et $t + dt$. En déduire une équation différentielle vérifiée par $T(t)$. Il y apparaît une constante de temps τ ; quelle est sa signification et sa valeur numérique?
 - Résoudre l'équation différentielle avec la condition initiale proposée. Indiquer l'allure du graphe $T(t)$. Quel est le schéma électrique équivalent?
- AN : Calculer le temps nécessaire pour que le vin atteigne sa température optimale de dégustation $T_D = 16^\circ\text{C}$.

70. Transfert thermique dans une barre (*)

Une barre cylindrique homogène, de masse volumique ρ , de capacité thermique massique c , de conductivité thermique λ , a une longueur L et une section droite Σ . Ses parois latérales sont calorifugées de telle sorte que les pertes thermiques sont négligées; en revanche, chaque extrémité de la barre, en $x = 0$ et $x = L$, est en contact avec un thermostat, respectivement S_1 et S_2 , qui impose la température $T_1 = T(0, t)$ et $T_2 = T(L, t)$.



1. Bilan énergétique

- a) Rappeler la loi de Fourier en notant $\vec{j}_{th} = j_{th}(x, t)\vec{u}_x$ le vecteur densité de courant thermique dans la barre. Puis effectuer un bilan d'énergie sur une tranche élémentaire du conducteur, comprise entre les abscisses x et $x+dx$, et établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T(x, t)$:

$$D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Expliciter D et donner son unité.

- b) Dans cette seule question les deux thermostats ont des capacités thermiques infinies. En déduire :
- que les thermostats imposent alors des températures T_1 et T_2 constantes
 - la distribution de température $T(x)$ dans la barre en régime permanent (on peut supposer $T_1 > T_2$)
 - la résistance thermique R_{th} de la barre métallique.

Dans les deux questions qui suivent, les deux thermostats de conductivité thermique infinie, ont la même capacité thermique C , non infinie, mais très grande devant la capacité thermique totale de la barre ; l'ensemble constitué par les thermostats et la barre est parfaitement calorifugé. Le thermostat S_1 a une température initiale T_1^0 et le thermostat S_2 a une température initiale T_2^0 .

- c) Quelles conséquences, sur les températures des thermostats et de la barre, les différentes hypothèses faites à propos des thermostats entraînent-elles ? Donner $T(x, t)$.

- d) Montrer que $\frac{dT_1}{dt} = -\frac{dT_2}{dt}$ et établir les expressions des températures $T_1(t)$ et $T_2(t)$

des thermostats au cours du temps en fonction des températures initiales, de C et de la résistance thermique de la barre (on peut supposer $T_1^0 > T_2^0$ et écrire $T_1(t)$ et $T_2(t)$ sous des formes physiquement pertinentes à l'aide de T_1^0 , T_2^0 , t et d'un temps τ à exprimer).

Dessiner le circuit électrocinétique équivalent à cette étude et indiquer à quelles grandeurs thermiques correspondent la tension et le courant.

2. Bilan entropique

On considère d'abord entre les instants t et $t+dt$ une tranche élémentaire de la barre comprise entre les abscisses x et $x+dx$.

- a) Exprimer successivement :

- la variation d'entropie d^2S de la tranche élémentaire (supposée indilatatable) pendant dt en fonction, entre autres, de $\frac{\partial T}{\partial t}$
- l'entropie échangée $\delta^2S_{ech.}$ par la tranche élémentaire pendant dt en fonction de $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{j_{th}}{T} \right)$
- l'entropie créée $\delta^2S_{cree.}$ par la tranche élémentaire pendant dt si l'on note $\sigma(x, t)$, la quantité d'entropie créée par unité de volume et de temps.

- b) En déduire la relation entre les grandeurs spatio-temporelles précédentes traduisant le bilan d'entropie local.

La fin du problème concerne la totalité de la barre, uniquement dans le régime permanent de la question 1.b).

- c) Exprimer $\sigma(x)$, l'entropie créée par unité de volume et de temps, en fonction de x et des données. En déduire la quantité totale $\frac{dS_{crée}}{dt}$ d'entropie créée dans la barre par unité de temps et commenter son signe.

- d) Évaluer directement l'entropie échangée $\frac{dS_{éch.}}{dt}$ par la barre avec les thermostats par unité de temps et commenter.

- e) Déduire des questions précédentes la variation $\frac{d\Delta S}{dt}$ d'entropie de la barre par unité de temps. Ce résultat était-il prévisible ? En quoi cependant est-il original vu le système et la transformation étudiés ?

71. Température à l'intérieur de la Terre

La Terre est assimilée à une sphère homogène de rayon $R = 6370 \text{ km}$ et de masse volumique $\rho = 2800 \text{ kg.m}^{-3}$.

Le température à l'intérieur de la Terre est une fonction de $r = OM$ distance entre le point d'étude M et la centre de la Terre O ; elle est notée $T(r)$ et décroît en fonction de r . La température à la surface de la Terre est $T_0 = 290 \text{ K}$.

On suppose que le régime permanent de refroidissement de la Terre est atteint.

La conduction est le seul mode de transfert thermique envisagé et la conductivité thermique de la Terre, $\lambda = 4 \text{ W.m}^{-1}.K^{-1}$, est supposée uniforme.

La loi de Fourier concernant la diffusion thermique s'écrit en coordonnées sphériques (le flux est radial) :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u}_r$$

Dans cette modélisation simplifiée, on définit deux zones :

- du centre de la Terre jusqu'à la limite de la lithosphère en $r_m = 6280 \text{ km}$ soit pour $0 \leq r \leq r_m$, il n'y a aucune source de production de « chaleur ».
- pour l'ensemble de la lithosphère (d'une épaisseur de 90 km), soit pour $r_m \leq r \leq R$, on tient compte de la source de chaleur que constitue la radioactivité d'éléments, essentiellement l'uranium. Ces sources radioactives dégagent, dans la lithosphère, une puissance thermique par unité de masse notée $H = 5 \cdot 10^{-10} \text{ W.kg}^{-1}$ supposée constante et uniforme.

- a) À partir d'un bilan d'énergie portant sur une coquille sphérique d'épaisseur dr , comprise entre deux sphères, une de rayon r et l'autre de rayon $r + dr$, montrer rigoureusement que l'équation de diffusion s'écrit, pour $0 \leq r \leq r_m$:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

- b) Intégrer cette relation afin d'obtenir l'évolution de la température en fonction de r . Exprimer $T(r)$ en fonction de deux constantes d'intégration A et B . Quelle condition aux limites permet de déterminer la valeur de l'une d'entre elles ? Commenter les résultats j_{th} et $T(r)$ obtenu dans cette zone.
- c) En considérant une coquille sphérique similaire à celle définie plus haut, mais pour $r_m \leq r \leq R$, faire un nouveau bilan d'énergie et en déduire la nouvelle équation de diffusion.
- d) Déduire de l'équation précédente l'évolution de la température dans la lithosphère en fonction de r , de différents paramètres, et des deux constantes d'intégration C et D .
- e) Quelles conditions aux limites doit-on appliquer à la lithosphère ? En déduire C et D en fonction de T_0 , R , r_m , ρ , H et λ , puis donner, pour la lithosphère, l'expression de la température en fonction de r .
- f) Tracer sommairement la fonction $T(r)$ dans la Terre, puis calculer numériquement la température T_c au centre de la Terre ainsi que le gradient de température dT/dr en $\text{K}.\text{km}^{-1}$ à la surface de la Terre.
- g) Exprimer le flux thermique total Φ en surface de la Terre en fonction de la quantité de puissance radioactive dissipée P_d ; commenter ce résultat et faire l'application numérique.

Réponses aux questions

PHÉNOMÈNES DE TRANSPORT DIFFUSION

Le cours d'abord : La conduction électrique

1. Dans le modèle de Drude, on considère que le métal est constitué d'un réseau fixe d'ions (par exemple Cu^+) avec des électrons libres de masse m et de vitesse \bar{v} responsables de la conduction électrique. Ces électrons « libres de se déplacer » subissent néanmoins des interactions ou chocs sur les failles du réseau, ce qui se traduit par une force de « frottement fluide » en $-m\bar{v}/\tau$ où le temps τ caractérise la durée moyenne entre deux chocs successifs. C'est lors de ces chocs que les électrons transfèrent au réseau leur énergie cinétique acquise dans le champ électrique qui les a accélérés, ce qui conduit à l'échauffement du conducteur (appelé effet Joule).

2. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à un électron s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - m \frac{\vec{v}}{\tau} = \vec{0} \quad \text{en régime stationnaire} \quad \text{soit} \quad \vec{v} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}$$

La définition du vecteur densité volumique de courant $\vec{j} = -ne\vec{v}$ (où n est la densité particulaire) conduit alors à la loi d'Ohm locale :

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}} \quad \text{où} \quad \boxed{\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}}$$

Pour le cuivre, $\sigma \approx 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ et $n \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$; on en déduit $\tau \approx 10^{-14} \text{ s}$ (pour plus de précisions, voir la question 22.).

3. Dans un élément de circuit filiforme AB (un fil en TP) de conductivité électrique σ , un champ électrique $\vec{E} = -\overline{\text{grad}} V$ (l'opérateur gradient est traité au début du chapitre 3) engendre un courant électrique de densité volumique \vec{j} supposée uniforme. La circulation du vecteur $\vec{E} = -\overline{\text{grad}} V = \vec{j}/\sigma$ entre les extrémités A et B s'écrit :

$$-\int_A^B \overline{\text{grad}} V \cdot d\vec{l} = \int_A^B \frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{\sigma}$$

Comme $\overline{\text{grad}} V \cdot d\vec{l} = dV$, la première intégrale vaut $-(V_B - V_A) = V_A - V_B = U$.

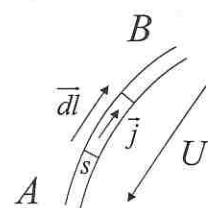
Par ailleurs \vec{j} et $I\vec{dl}$ sont colinéaires et de même sens, on a donc $\vec{j} \cdot d\vec{l} = j \cdot dl = \frac{I}{s} dl$

où I est l'intensité du courant électrique circulant dans le fil orienté de section s , d'où la deuxième intégrale $Il/\sigma s$. Finalement on aboutit à la loi d'Ohm :

$$U = RI \quad (\text{qui date de 1826})$$

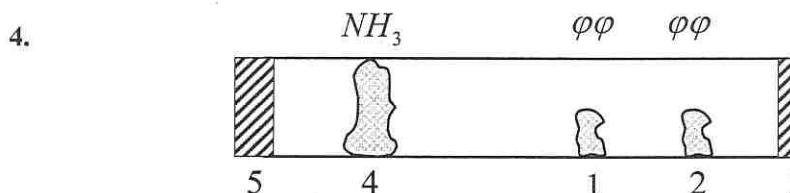
avec l'expression de la résistance du fil : $R = \frac{l}{\sigma s}$

Rq : À noter que U et I sont fléchés en sens inverse, ce qui correspond à la convention récepteur vus en électrocinétique.



Le cours d'abord : La diffusion de particules

Un exemple générique



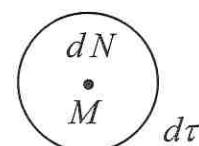
Au bout de plusieurs minutes, le coton 1 rosit, et encore plusieurs minutes après, le coton 2 rosit, preuve que les molécules NH_3 ont migré. Aucun courant d'air n'a entraîné ces molécules ; on dit qu'elles ont diffusé et on parle de phénomène de transport. Ce sont les collisions entre molécules NH_3 et O_2/N_2 au niveau microscopique qui sont responsables de la lente diffusion des particules.

La loi de Fick

5. Soit un élément de volume $d\tau$ considéré au point M (il doit être choisi petit à l'échelle macroscopique pour que les grandeurs macroscopiques (continues) y soient uniformes, mais grand à l'échelle microscopique afin de contenir un très grand nombre de particules : typiquement $d\tau \approx 1 \mu\text{m}^3$ pour les liquides à $d\tau \approx 1 \text{ mm}^3$ pour les gaz).

Alors on peut définir une grandeur locale comme la densité volumique particulaire : si dN est le nombre de particules dans $d\tau$ à l'instant t ,

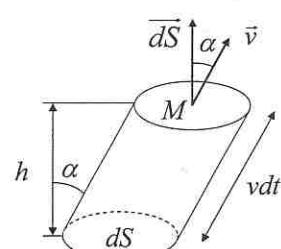
$$n(M, t) = \frac{dN}{d\tau}$$



L'unité de la densité volumique particulaire est le m^{-3} .

6. Le nombre d^2N de particules qui, par diffusion, traversent à la vitesse d'ensemble (ou vitesse particulaire) \vec{v} un élément de surface dS en M pendant l'intervalle de temps dt est $d^2N = n\vec{v} dt \cdot \overrightarrow{dS}$.

Il s'agit du nombre de particules qui sont contenues dans





le volume $\bar{v} dt \cdot \overrightarrow{dS}$ du cylindre (incliné) de base dS et de longueur $v dt$:

$$d^2 N = n(dS \times h) = ndS v dt \cos \alpha = n \bar{v} dt \cdot \overrightarrow{dS}$$

(le « point » du produit scalaire représentant $\cos \alpha$).

À travers une surface (S) finie, et par unité de temps, on définit le flux comme nombre de particules ayant traversé la surface par unité de temps :

$$\Phi = \frac{dN}{dt} = \iint_S n \bar{v} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_S \vec{j}_p \cdot \overrightarrow{dS}$$

Il apparaît comme le flux du vecteur $\boxed{\vec{j}_p = n \bar{v}}$ (en $\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$) à travers la surface (S), appelé vecteur densité volumique de courant de particules (en réalité toutes les grandeurs sont spatio-temporelles : $\vec{j}_p(M, t)$).

7. La loi de Fick exprime la proportionnalité entre la densité de courant de particules et la dérivée donnant l'inhomogénéité de la densité particulaire le long de l'axe :

$$\boxed{j_p = -D \frac{\partial n}{\partial x}}$$

où D est le coefficient de diffusion (en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$).

Elle indique que la diffusion ne se fait que dans un milieu où la densité particulaire n'est pas uniforme. Et comme $\frac{\partial n}{\partial x}$ est positif pour $n(x)$ croissant, le signe $-$ traduit que les particules diffusent spontanément des endroits les plus concentrés vers les endroits les moins concentrés.

8. La loi de Fick à trois dimensions s'écrit : $\boxed{\vec{j}_p = -D \nabla n}$

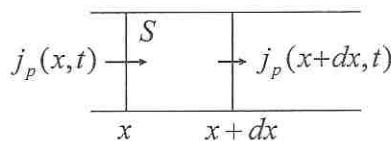
(l'opérateur « gradient » est traité au début du chapitre 3 de mécanique ; s'y reporter) Ici également, si le milieu est uniforme $\nabla n = \vec{0}$ et donc $\vec{j}_p = \vec{0}$, il n'y a pas de diffusion.

De plus le gradient étant orienté dans le sens de n croissant, le signe $-$ de la loi de Fick traduit que les particules diffusent spontanément des endroits les plus concentrés vers les endroits les moins concentrés.

Équation de diffusion

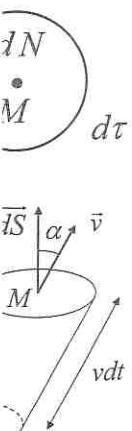
9. On considère une tranche de section S et d'épaisseur dx du milieu dans lequel les particules diffusent. Avec une densité particulaire $n(x, t)$, la tranche contient $dN = n S dx$ particules. La différence du flux entrant de particules en x et du flux sortant de particules en $x + dx$ pendant dt :

$$+ j_p(x, t) S dt - j_p(x + dx, t) S dt = - \frac{\partial j_p(x, t)}{\partial x} dx \times S dt$$



tes après, le
nt d'air n'a
énomène de
au niveau

voisi petit à
ies) y soient
très grand
1 mm³ pour



contribue à la variation de ce nombre pendant dt :

Rq :]

$$dN(x, t + dt) - dN(x, t) = \frac{\partial(dN)}{\partial t} dt = \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} S dx \times dt$$

d'où par identification et en simplifiant par $S dx dt$: $\frac{\partial j_p}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial t} = 0$ (1)

L'équation

j_p la

qui représente l'équation de conservation du nombre de particules.

Rq : Sur la figure, le courant entrant à gauche est plus important que le courant sortant à droite, et donc le nombre de particules dans la tranche augmente au cours du temps ; en effet d'après l'équation de conservation, si $j_p(x, t) > j_p(x + dx, t)$ soit

$$\frac{\partial j_p}{\partial x} < 0, \text{ alors } \frac{\partial n}{\partial t} > 0.$$

L'équation de diffusion à une dimension s'obtient alors à partir de (1) en y traduisant pour j_p la loi de Fick $j_p = -D \frac{\partial n}{\partial x}$:

$$D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{\partial n}{\partial t} = 0 \quad (1')$$

10. Il se peut que le milieu dans lequel diffusent les particules puisse créer ou au contraire absorber des particules diffusantes : c'est le cas lors de réactions nucléaires avec création de protons dans le cœur, entouré d'un modérateur, substance absorbant les neutrons, l'ensemble constituant une pile nucléaire. On peut également imaginer un milieu où des particules sont créées ou consommées à la suite d'une simple réaction chimique...

11. * Lin pos
* Irré doi irré der der d'e * Lie car (1'

* La différence du flux entrant de particules en x et du flux sortant de particules en $x + dx$ pendant dt :

$$+j_p(x, t)Sdt - j_p(x + dx, t)Sdt = -\frac{\partial j_p(x, t)}{\partial x} dx \times Sdt$$

* augmenté du terme d'apport :

$$\sigma_a S dx dt$$

* contribue à la variation du nombre de particules dans la tranche pendant dt :

qu ter co qu

Les mod

$$dN(x, t + dt) - dN(x, t) = \frac{\partial(dN)}{\partial t} dt = \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} S dx \times dt$$

d'où par identification et en simplifiant par $S dx dt$: $\frac{\partial j_p}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial t} = \sigma_a$ (2)

12. La co dont macr Un e métal dans (à l'i tion va vc

équation dans laquelle le second membre (algébrique) non nul traduit le terme de source.

Si $\sigma_a > 0$, il y a effectivement création de particules, et si $\sigma_a < 0$, on a affaire à un phénomène d'absorption de particules.

Rq : La relation (2) écrite sous la forme $\frac{\partial n}{\partial t} = \sigma_a - \frac{\partial j_p}{\partial x}$ montre que la variation de la densité particulaire au cours du temps est due à la somme d'un terme de création σ_a et d'un terme d'échange $-\frac{\partial j_p}{\partial x}$.

(1)

L'équation de diffusion généralisée s'obtient alors à partir de (2) en y traduisant pour j_p la loi de Fick $j_p = -D \frac{\partial n}{\partial x}$:

$$D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{\partial n}{\partial t} = -\sigma_a \quad (2')$$

11. * Linéarité : L'équation de diffusion est linéaire en n et donc le théorème de superposition s'applique.

* Irréversibilité : L'équation de diffusion est du premier ordre par rapport au temps et donc le changement de t en $-t$ ne la laisse pas invariante. Ceci traduit la profonde irréversibilité des phénomènes de diffusion car ils tendent à l'uniformisation de la densité particulaire ; la diffusion, par essence irréversible, est donc créatrice d'entropie.

* Lien entre grandeurs caractéristiques : Soit L et τ une distance et un temps caractéristiques de la diffusion des particules. Alors par homogénéité, l'équation (1') :

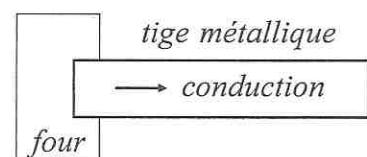
$$D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{\partial n}{\partial t} \text{ conduit à } D \frac{n}{L^2} \approx \frac{n}{\tau} \text{ soit } L \approx \sqrt{D\tau}$$

qui s'interprète également comme la distance L atteinte par la diffusion pendant le temps τ . Cette distance est proportionnelle à la racine carrée du temps, où D est le coefficient de diffusion, c'est-à-dire que la diffusion couvre une portion d'espace qui s'étend de moins en moins vite.

Le cours d'abord : La diffusion thermique

Les modes de transfert thermique

12. La conduction ou diffusion thermique est le transfert qui intervient dans un milieu dont la température n'est pas homogène et qui ne s'accompagne pas, à l'échelle macroscopique, de mouvement de matière. Ce mode est prépondérant dans les solides. Un exemple générique consiste à prendre une tige métallique dont l'extrémité gauche est encastrée dans un four maintenant une température donnée (à l'image d'un manche de casserole). La conduction fait que l'extrémité droite qui donne sur l'air va voir sa température augmenter.



(2)

terme de
aire à un

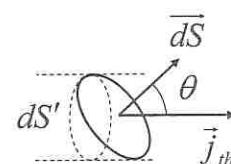
13. La convection, en revanche, implique un déplacement macroscopique de matière, et concerne donc les fluides (liquides et gaz) et pas les solides.

- la convection se produit naturellement dans un fluide dans lequel existe un gradient de température : l'eau dans une casserole chauffée par le fond, l'air dans une pièce chauffée dans la partie basse ; les parties chaudes, moins denses, ont tendance à s'élever.
- la convection peut être forcée par exemple en tournant son café avec une cuiller pour homogénéiser la concentration en sucre, ou par une pompe provoquant l'écoulement d'un fluide « caloporeur » dans un système de conduites ; c'est le cas de l'eau dans un chauffage central depuis la chaudière vers le radiateur, ou d'un fluide frigorigène qui circule dans un circuit fermé (avec en plus changement d'état) comme dans un réfrigérateur ou une climatisation de voiture.

Par ailleurs, tout corps émet un rayonnement électromagnétique qui transporte de l'énergie susceptible d'échauffer le corps qui la reçoit. Contrairement à la conduction et à la convection, le transfert par rayonnement peut s'effectuer dans le vide. Le spectre d'émission est continu et dépend de la température du corps (le corps humain émet essentiellement dans l'infrarouge).

Loi de Fourier

14. La densité volumique de courant thermique \vec{j}_{th} est un champ de vecteur dont le flux à travers une surface élémentaire orientée $d\vec{S}$ est la puissance thermique (en W) qui traverse cette surface :



$$dP = \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} \quad (\vec{j}_{th} \text{ s'exprime en } \text{W.m}^{-2})$$

Le produit scalaire permet de tenir compte de l'inclinaison de $d\vec{S}$ sur \vec{j}_{th} ; en effet, $\vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = j_{th} \times dS \cos \theta = j_{th} \times dS'$ où dS' , projection de dS , est la surface « utile ».

Rq : Autre notation : $d\Phi = \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}$ où Φ est appelé flux thermique (en W)

La quantité d'énergie d^2E qui par conduction thermique traverse l'élément de surface dS pendant le temps dt est : $d^2E = dPdt = \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} dt$

15. La cause du flux thermique de type conductif est la non uniformité du champ de température ; Fourier propose la loi :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \nabla T$$

(l'opérateur « gradient » est traité au début du chapitre 3 de mécanique ; s'y reporter) Le signe – traduit conformément au 2nd principe de la thermodynamique que les transferts thermiques s'effectuent *spontanément* dans le sens des températures décroissantes. Le coefficient λ positif est la conductivité thermique du corps étudié (en $\text{W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$).

La loi d'Ohm s'écrit sous forme analogue : $\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \nabla V$ (σ est la conductivité électrique).

« L'équa

16. On c
d'épa
En l
différ
entr
condu
tranc

On y
diffus

D es
Les p

17. On p
le mi
réact
effet
volur
alime

* L'ē
x-

* ajo

* cor

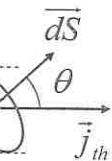
d'où

qui r

Rq :

e matière, et
e un gradient
ns une pièce
t tendance à
c une cuiller
provoquant
; c'est le cas
eur, ou d'un
changement

transporte de
a conduction
le vide. Le
orps humain



j_{th} ; en effet,
utile ».

)

'élément de

1 champ de

y reporter)
que que les
températures
corps étudié

(σ est la

« L'équation de la chaleur »

16. On considère une tranche de section S et d'épaisseur dx ; sa masse est $\rho S dx$.

En l'absence d'autres phénomènes, le différentiel de flux d'énergie thermique entrant – sortant pendant le temps dt conduit à modifier la température de la tranche pendant dt (penser à $Q = mc\Delta T$!) :

$$j_{th}(x, t)Sdt - j_{th}(x+dx, t)Sdt = \rho S dx c \frac{\partial T}{\partial t} dt \text{ soit } -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

On y traduit la loi de Fourier : $j_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ où λ est pris constant, d'où l'équation de diffusion à une dimension :

$$D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \text{avec} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c}$$

D est le coefficient de diffusion thermique (ou diffusivité), en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Les propriétés immédiates de cette équation sont les mêmes qu'à la question 11.

17. On peut imaginer des apports volumiques d'énergie thermique tel qu'un effet Joule si le milieu conducteur électrique est parcouru par un courant électrique, ou à la suite de réactions chimiques ou nucléaires si le milieu en est le siège. On peut citer aussi un effet photothermique dans un verre absorbant où un laser pulsé sert de source volumique de chaleur, ou encore considérer la puissance volumique reçue par un aliment dans un four à micro-ondes,...

* L'énergie thermique reçue pendant dt par conduction à travers les parois en x et $x+dx$:

$$j_{th}(x, t)Sdt - j_{th}(x+dx, t)Sdt = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} dx Sdt$$

* ajoutée à celle reçue par d'autres apports pendant dt :

$$p_v S dx dt \text{ où } p_v \text{ est leur puissance volumique (en } \text{W.m}^{-3}\text{)}$$

* contribue à modifier la température de la masse dans la tranche pendant dt :

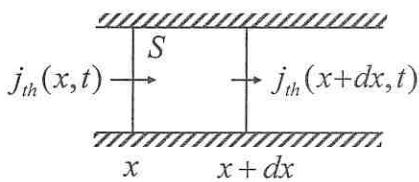
$$\rho S dx c (T(x, t+dt) - T(x, t)) = \rho S dx c \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

d'où en simplifiant par $S dx dt$:

$$\frac{\partial j_{th}}{\partial x} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = p_v$$

qui représente l'équation de conservation avec un terme de source.

Rq : Là aussi, cette équation écrite sous la forme $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = p_v - \frac{\partial j_{th}}{\partial x}$ montre que la variation de la température au cours du temps est due à la somme d'un terme de création p_v et d'un terme d'échange $-\frac{\partial j_{th}}{\partial x}$.



La loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x$, conduit alors à l'équation de diffusion généralisée :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p_v = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Bien sûr, on retrouve $D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0$ avec $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ si $p_v = 0$.

18. De manière générale, il faut traduire la continuité du flux thermique sur la limite d'un domaine, car il ne peut pas y avoir d'accumulation d'énergie sur la surface de contact (d'épaisseur et de masse nulles) séparant deux milieux.

En notant $\Phi_{lim}(t) = j_{th,lim}(t).S = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}(x_{lim}, t)$, on peut distinguer trois cas simples :

- * si l'extrémité est thermiquement isolée : $\Phi_{lim}(t) = 0$ soit $\frac{\partial T}{\partial x}(x_{lim}, t) = 0, \forall t$
- * si deux solides sont en contact (même surface) : $\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(x_{lim}, t) = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(x_{lim}, t), \forall t$, et donc plus λ est grand, plus $\partial T / \partial x$ est petit : le solide de meilleure conductivité (qui évacue le mieux le flux thermique) a la répartition de température la plus uniforme.
- * pour un solide en contact avec un fluide de température T_0 au loin, l'échange est régi par la loi de Newton : par unité de surface,

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x_{lim}, t) = h(T(x_{lim}, t) - T_0)$$

proportionnel à la différence de température où h est le coefficient de transfert thermique de surface (en $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$).

Résistance thermique

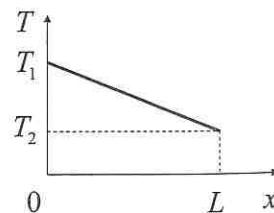
19. En régime stationnaire $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, l'équation de diffusion se

limite à $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ de solution affine $T(x) = ax + b$; les conditions aux limites $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$ donnent immédiatement :

$$T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L} x$$

(le signe $-$ est justifié par le fait que $T_2 < T_1$).

20. La puissance transférée est $P = j_{th}.S = -\lambda \frac{dT}{dx} S = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} S$; elle est indépendante de l'abscisse x de la surface S choisie le long de la tige (le flux Φ est uniforme).



Ce résu
la résist

L'inver
montre
d'autan

21. Les règ
qu'en é

d
—
—
—
—

22. Il y a ρ
de cuiv
manière
Chaque
unité de

AN : $n =$
Par aille
On en dé

23. L'unité
est le S.I.
Partant c
s et m e

diffusion

mite d'un
de contact

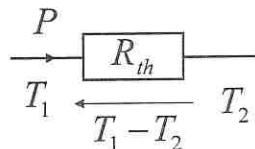
simples :

 t $m, t), \forall t,$
ductivité
e la plus
hange est

transfert

Ce résultat s'écrit sous la forme $T_1 - T_2 = R_{th}P$ où R_{th} est la résistance thermique :

$$R_{th} = \frac{L}{\lambda S} \quad (\text{en K.W}^{-1})$$



L'inverse $G_{th} = 1/R_{th}$ est la conductance thermique ; sa définition par $P = G_{th}(T_1 - T_2)$ montre que pour une différence de température donnée, la puissance transférée est d'autant plus grande que la conductance du milieu est élevée.

21. Les règles d'association série et parallèle des résistances thermiques sont les mêmes qu'en électricité. Voici le tableau comparatif :

Électrocinétique	Thermique
différence de potentiel : $V_1 - V_2$	différence de température : $T_1 - T_2$
intensité du courant : I	puissance ou flux thermique : P ou Φ
résistance électrique : $R = V_1 - V_2 / I$	résistance thermique : $R_{th} = T_1 - T_2 / \Phi$
conductivité électrique : σ	conductivité thermique : λ
capacité électrique : C	capacité thermique : C
$I = C \frac{d(V_1 - V_2)}{dt}$	$\Phi = C \frac{d(T_1 - T_2)}{dt}$

Applications directes du cours

22. Il y a ρ kg de cuivre par m^3 , donc ρ/M mol de cuivre par m^3 , soit $\rho N_A / M$ atomes de cuivre par m^3 où N_A est le nombre d'Avogadro (on peut aussi écrire de deux manières différentes la masse d'un atome de cuivre : $M/N_A = \rho/n$).

Chaque atome mettant en jeu un électron de conduction, le nombre de porteurs par unité de volume est :

$$n = \rho N_A / M$$

AN : $n = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$

Par ailleurs la conductivité du cuivre est $\sigma = 0,57 \cdot 10^8 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

On en déduit la valeur de τ par $\tau = \frac{m\sigma}{ne^2}$ soit $\tau = 2,4 \cdot 10^{-14} \text{ s}$

23. L'unité du système international de la conductivité σ (l'inverse de la résistivité ρ) est le S.m^{-1} ou, ce qui est équivalent, le $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

Partant de $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$ où n est en m^{-3} , e en C, soit en A.s (penser à $i = dq/dt$), τ en s et m en kg, il vient que σ s'exprime en $\text{m}^{-3} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{A}^2$.

24. La section du fil est $s = \frac{\pi d^2}{4}$, d'où la résistance $R = \frac{4l}{\pi \sigma d^2} \approx 0,9 \cdot 10^{-2} \Omega$; ce centième

d'Ohm est largement négligeable devant les résistances couramment utilisées en TP d'électrocinétique ou d'électronique, de l'ordre du kΩ.

La différence de potentiel à ses bornes est donnée par $\Delta V = RI = 0,9 \text{ mV}$, ce qui est tout à fait négligeable en TP où les tensions sont de l'ordre de quelques volts.

La norme E du champ électrique qui lui est appliquée est donnée par :

$$\Delta V = EL \quad (\text{penser à } \vec{E} = -\vec{\text{grad}} V) \Rightarrow E = \Delta V / L = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ V.m}^{-1}$$

25. Le régime stationnaire

a) En régime stationnaire, l'équation de conservation $\frac{\partial j_p}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial t} = 0$ se réduit à

$\frac{d j_p}{dx} = 0$ soit j_p indépendant de x : le flux de particules est uniforme sur toute la longueur. Si le nombre de particules d'une tranche est constant au cours du temps, cela signifie bien qu'il rentre autant de particules à gauche qu'il en sort à droite.

Rq : En régime stationnaire, l'équation de diffusion $D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{\partial n}{\partial t} = 0$ se réduit à

$\frac{d^2 n}{dx^2} = 0$ soit $n(x) = ax + b$ qui redonne bien $j_p = -D \frac{dn}{dx} = -aD$ indépendant de x .

b) * il y a équilibre (le régime est libre).

Le tube est fermé en $x=0$ et $x=L$; on répartit N_0 particules avec une densité $n(x, t=0)$ non uniforme et on attend l'équilibre.

Aucune particule ne peut entrer ou sortir du tube :

$$j_p(x=0) = j_p(x=L) = 0 \text{ soit } a = 0, \text{ alors } n(x) = b = \frac{N_0}{SL}$$

donc à l'équilibre, la densité est uniforme et la diffusion a cessé.

* il n'y a pas équilibre (le régime est forcé).

Le tube est ouvert cette fois : en $x=0$, on maintient une densité n_0 constante par une alimentation de particules, et en $x=L$, le tube donne sur l'air et donc n_L faible et constant, d'où :

$$n(x) = n_0 - \frac{n_0 - n_L}{L} x, \text{ fonction affine décroissante}$$

C'est bien le maintien de la contrainte $n_0 \neq n_L$ qui empêche le système d'atteindre l'état d'équilibre thermodynamique pour lequel la densité serait uniforme.

26. Durée d'un régime transitoire

L'analyse dimensionnelle réalisée sur l'équation de diffusion

$$D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \text{ conduit à } D \frac{T}{L^2} \approx \frac{T}{\tau} \text{ soit } L \approx \sqrt{D\tau}$$

qui s'interprète aussi comme la distance L atteinte par la diffusion pendant le temps τ .

2 ; ce centième utilisées en TP

nV, ce qui est volts.

V.m⁻¹

) se réduit à ne sur toute la cours du temps, soit à droite.

0 se réduit à) indépendant

éc une densité

constante par r et donc n_L

ème d'atteinte uniforme.

lant le temps

Avec $D = \frac{\lambda}{\rho c}$, il vient $\tau \approx \frac{L^2 \rho c}{\lambda} \approx 45 \text{ min}$ (et avec $L' = 2L$, $\tau' = 4\tau \approx 3 \text{ h}$), résultat numérique qui confirme que la diffusion thermique est un phénomène lent.

27. Application élémentaire à l'isolation thermique

Les résistances thermiques du mur et du revêtement de surface S sont :

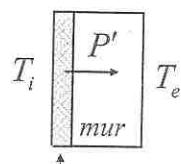
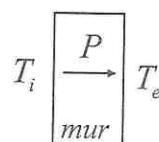
$$R_m = \frac{l}{\lambda S} \quad \text{et} \quad R_r = \frac{e}{\lambda' S}$$

Sans et avec revêtement, les puissances thermiques perdues sont :

$$P = \frac{T_i - T_e}{R_m} \quad \text{et} \quad P' = \frac{T_i - T_e}{R_m + R_r}$$

car les deux résistances sont en série.

Rq : La température intérieure T_i n'est pas modifiée, car le but de l'isolation n'est pas de l'augmenter en gardant la même consommation d'énergie, mais bien de réduire la consommation pour une température inchangée.



28. Le conducteur cylindrique (conduction radiale)

a) On considère une couronne cylindrique d'épaisseur dr (entre r et $r+dr$) et de hauteur h ; le bilan thermique pendant dt s'écrit :

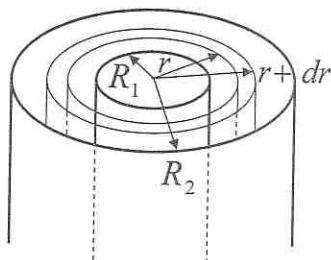
$$+2\pi rh j_{th}(r, t) dt - 2\pi(r+dr)h j_{th}(r+dr, t) dt = \rho(2\pi r dr h)c \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

En effet, les surfaces des cylindres ne sont pas les mêmes en r et $r+dr$; par ailleurs le volume de la couronne s'obtient par : surface de base \times hauteur. L'application de la formule de Taylor doit alors concerner la fonction $r j_{th}(r)$:

après simplification par $2\pi h dr dt$,

$$-\frac{\partial(r j_{th})}{\partial r} = \rho c r \frac{\partial T}{\partial t}$$

et avec la loi de Fourier $j_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$



$$\text{il vient } D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \text{avec } D = \frac{\lambda}{\rho c}$$

b) En régime stationnaire, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ soit $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$.

$$r \frac{dT}{dr} = A \Rightarrow T(r) = A \ln r + B$$

et avec les conditions aux limites $T(r=R_1)=T_1$ et $T(r=R_2)=T_2$,

le profil de température est :

$$T(r) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln R_2 / R_1} \ln \frac{r}{R_1}$$

Pour $T_1 > T_2$, la température décroît avec l'éloignement par rapport à la conduite.

Le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_{th} = -\lambda \nabla T = \lambda \frac{T_1 - T_2}{(\ln R_2 / R_1)r} \vec{u}_r$

donne alors accès au flux : $\Phi = \iint \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = j_{th} \cdot 2\pi r h = \frac{2\pi\lambda h(T_1 - T_2)}{\ln R_2 / R_1}$

indépendant de r (le flux est conservatif en régime stationnaire).

La définition $\Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$ conduit à la résistance $R_{th} = \frac{\ln R_2 / R_1}{2\pi\lambda h}$

30. Ir

c) On peut accéder directement à R_{th} sans passer par l'établissement de $T(r)$.

La résistance, indépendante du temps, s'évalue en régime stationnaire. Et comme le problème est à symétrie cylindrique, la température n'est fonction que de r ; la loi de Fourier s'écrit simplement : $j_{th} = -\lambda \frac{dT}{dr}$.

Le flux thermique (radial) à travers un cylindre de rayon r et de hauteur h dans le conducteur est :

$$\Phi = \iint \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r h$$

Or en régime stationnaire ce flux est uniforme, soit Φ indépendant de r , d'où :

$$dT = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda h} \frac{dr}{r} \Rightarrow T_2 - T_1 = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda h} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

résultat du type $T_1 - T_2 = R_{th}\Phi$ d'où la résistance thermique $R_{th} = \frac{\ln R_2 / R_1}{2\pi\lambda h}$

29. Température cutanée d'un mammifère

a) À l'extérieur de l'animal, en régime stationnaire et en l'absence de terme volumique de source dans l'air, le flux thermique est uniforme ; à travers une sphère de rayon r , il est indépendant du rayon de la sphère, et est donc égal à la puissance dégagée par l'animal :

$$\Phi = j_{th}(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 P \quad \text{avec } j_{th}(r) = -\lambda \frac{dT}{dr} \quad (\text{loi de Fourier})$$

$$\text{soit } dT = -\frac{PR^3}{3\lambda} \frac{dr}{r^2} \quad \text{qui s'intègre en } T(r) = T_0 + \frac{PR^3}{3\lambda r}$$

compte tenu de la condition aux limites $T(r = \infty) = T_0$ (l'animal ne modifie pas la température de l'air au loin).

b) La température cutanée T_C de l'animal est alors donnée par :

$$T_C = T(r = R) = T_0 + \frac{PR^2}{3\lambda}$$

La différence $T_c - T_0$ entre la température cutanée de l'animal et celle du milieu est d'autant plus importante que la conductivité thermique du milieu est faible (difficulté d'évacuation de la chaleur), que la puissance thermique volumique de production est grande (métabolisme important), ou que l'animal est gros (effet thermique plus important).

- c) P est donnée par $P = \frac{3\lambda}{R^2}(T_c - T_0)$ (on retrouve la loi de Newton)

AN : dans l'air : $P = 2,4 \text{ kW.m}^{-3}$; dans l'eau : $P = 240 \text{ kW.m}^{-3}$

Cette dernière application numérique explique pourquoi il n'existe pas de petits mammifères marins.

30. Importance conduction – convection dans un refroidissement thermique

- a) En régime stationnaire, l'équation de la diffusion thermique s'écrit $\frac{d^2T(x)}{dx^2} = 0$; les conditions aux limites sont $T(0) = T_1$, imposée par la source, et $T(e)$, température de surface à ce stade inconnue (intermédiaire entre T_1 et T_0) :

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{T_1 - T(e)}{e} \quad \text{et} \quad T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T(e)}{e}x, \text{ fonction affine}$$

- b) La densité de courant thermique dans la plaque est donnée par la loi de Fourier :

$$j_{th}(0 \leq x \leq e) = -\lambda \frac{dT}{dx} = \lambda \frac{T_1 - T(e)}{e} > 0 \text{ uniforme}$$

Au niveau de l'interface plaque – air, la loi de Newton donne :

$$j_{th}(x = e) = h(T(e) - T_0) > 0$$

La continuité du flux thermique ($j_{th} \cdot S$) en $x = e$ (le flux thermique issu de la plaque est entièrement communiqué à l'air) entraîne celle de j_{th} :

$$\lambda \frac{T_1 - T(e)}{e} = h(T(e) - T_0) \Rightarrow T(e) = \frac{\lambda T_1 + h e T_0}{\lambda + h e} = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{1 + h e / \lambda} = T_1 - \frac{T_1 - T_0}{1 + \lambda / h e}$$

De ces trois expressions, la 1ère montre que $T(e)$ est bien comprise entre T_1 et T_0 (c'est un barycentre), la 2e et la 3e donnent les écarts par rapport à T_0 ou T_1 .

L'élimination de $T(e)$ conduit alors aux expressions suivantes de j_{th} :

$$j_{th} = h \frac{T_1 - T_0}{1 + h e / \lambda} = \frac{\lambda}{e} \frac{T_1 - T_0}{1 + \lambda / h e} = \frac{T_1 - T_0}{e / \lambda + 1 / h}$$

Le flux thermique total est alors : $\Phi = j_{th} \cdot S = \frac{T_1 - T_0}{e / \lambda + 1 / h} S \equiv \frac{T_1 - T_0}{R_{th}}$

$$\text{soit une résistance thermique : } R_{th} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{h S} = R_{cond.} + R_{conv.}$$

qui s'écrit sous la forme d'une somme (les milieux sont en série) d'une résistance thermique due à la conduction, d'expression classique $R_{cond.} = e / \lambda S$, et d'une résistance décrivant la convection dans l'air $R_{conv.} = 1 / h S$.

- c) * $he/\lambda \ll 1$ (soit $R_{\text{cond.}} \ll R_{\text{conv.}}$) est obtenu pour une plaque peu épaisse, bonne conductrice thermique et un faible coefficient de convection (air immobile), la conduction dans la plaque est plus efficace que la convection dans l'air ; alors $T(e) \approx T_1$ et $j_{th} = h(T_1 - T_0)$ qui montre que c'est la convection qui limite les échanges thermiques entre la source et l'air.
- * $he/\lambda \gg 1$ (soit $R_{\text{cond.}} \gg R_{\text{conv.}}$) est obtenu pour une plaque plutôt épaisse, mauvaise conductrice thermique et un coefficient de convection élevée (air ventilé), la convection dans l'air est donc plus efficace que la conduction dans la plaque ; $T(e) \approx T_0$ et $j_{th} = \lambda(T_1 - T_0)/e$ qui montre que c'est la conduction qui limite les échanges thermiques entre la source et l'air.

Le critère expérimental pour savoir si on est dans un cas ou dans l'autre est la température de contact avec l'air. Par exemple pour le corps humain, la température extérieure de la peau est plutôt celle du corps (cas 1) : on sait alors qu'il vaut mieux éviter les courants d'air pour ne pas s'enrhumer... Dans le cas d'une bouteille thermos qui se refroidit, la température extérieure de la bouteille est pratiquement celle de l'air (cas 2) : la placer en plein vent ne la refroidira guère plus vite !

En fait les deux cas sont des situations non optimales, car si l'on souhaite un refroidissement important, par exemple dans le cas où la source est un moteur ou un appareil électrique qui chauffe, on a intérêt à prendre une plaque métallique et de ventiler l'air à son contact (soit $R_{\text{cond.}}$ et $R_{\text{conv.}}$ faibles) ; au contraire, si l'on souhaite éviter le refroidissement, on a alors intérêt à prendre une plaque isolante non ventilée (plus exactement $R_{\text{cond.}}$ et / ou $R_{\text{conv.}}$ importants).

Questions de réflexion ; physique pratique

31. La résistance électrique est la propriété physique qui caractérise l'aptitude d'un matériau à s'opposer au passage du courant électrique ; les métaux, bons conducteurs, ont une faible résistance par rapport aux isolants électriques. De manière équivalente, la résistance est le rapport entre la cause (différence de potentiel) et la conséquence (passage du courant électrique).
32. L'effet Joule est la dissipation de l'énergie électrique amenée par le générateur sous forme de transfert thermique (ou chaleur) dans le matériau. Cette production de chaleur est parfois un effet souhaité comme dans les radiateurs électriques (on parle de résistances de chauffage), parfois un effet néfaste comme dans tout appareil électrique en fonctionnement : générateur, oscilloscope, ordinateur et qui doivent être ventilés (on parle alors de pertes Joule).
33. Le mouvement serait effectivement accéléré s'il était libre ; en réalité les électrons subissent régulièrement des chocs sur les failles du réseau cristallin perdant ainsi leur énergie cinétique (ce transfert d'énergie du champ au réseau cristallin par

l'inte
moye
const
propo
la loi

34. Plus
pour
d'alir
est ir
const

35. Pour
fréqu
dimii
électr
temp
expéri
résist
augm

36. Pour
que j
solid
La d
présé
plus
scala
 T &
micro
trans
dépla
énerg
l'éne

où λ

AN :

En a
 τ en

métalliques de l'unité centrale pour une meilleure ventilation par évacuation de l'air chaud pour éviter les désagréables dysfonctionnements...

- 56.** Dans le but de réduire les pertes thermiques, le double vitrage est constitué de deux vitres (chacune plus épaisse qu'une vitre ordinaire pour en réduire la conductivité) séparées par de l'air ou un gaz neutre (et mauvais conducteur) maintenu immobile par des joints pour réduire les transferts par convection d'une vitre à l'autre (l'étude est proposée à la question 66.).
- 57.** Les déperditions thermiques peuvent se faire soit par le mur, soit par les vitres de la fenêtre, qui sont donc associés en parallèle ; de ce fait, c'est celui dont la résistance thermique est la plus faible (le plus souvent la fenêtre) qui est responsable des plus grandes pertes. Il ne sert donc à rien d'isoler les murs (l'isolant et le mur sont alors en série) sans poser simultanément un double vitrage.
- 58.** Les fenêtres sont fermées pour éviter la circulation avec l'air chaud de l'extérieur ; les volets sont rabattus pour éviter que les rayons de soleil ne pénètrent dans les pièces. Pour une meilleure efficacité, il est souhaitable de laisser une libre circulation d'air entre les vitres et les volets (plus chauds que l'air extérieur).
- 59.** Dans le sol, il n'y a pas de convection et les écarts de température en surface sont très rapidement amortis en profondeur, surtout s'ils sont de courte durée, ce qui, sous nos latitudes, met les canalisations à l'abri du gel.
- 60.** Le brassage de l'air (phénomène de convection) le rend « plus chaud » au contact de l'aliment à cuire d'où un flux thermique plus important vers l'aliment ; mais si ce dernier a un coefficient de diffusion thermique trop faible, l'extérieur risque d'être brûlé et l'intérieur pas assez cuit (le choc thermique !). Pour la même raison, un courant d'eau froide est bien plus efficace qu'un bain Marie pour refroidir un biberon... Dans un réfrigérateur à froid brassé, un ventilateur force la circulation de l'air ce qui permet une meilleure homogénéité des températures (par rapport à un réfrigérateur à froid statique), surtout en cas d'ouverture fréquente de la porte.

Exercices

61. Mesure de la conductivité ionique molaire de Cu^{2+}

1. Étude de la conductivité

- a) L'équation différentielle du mouvement d'un ion A_i s'écrit :

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = q_i \vec{E} - f_i \cdot \vec{v}_i$$

En régime stationnaire $\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{0}$, il vient $\vec{v}_i = \frac{q_i}{f_i} \vec{E}$, ce qui permet d'exprimer la

mobilité des ions A_i définie par $\vec{v}_i = \mu_i \vec{E}$ sous la forme :

$$\boxed{\mu_i = \frac{q_i}{f_i}}$$

on de l'air
té de deux
ductivité)
nobile par
l'étude est

itres de la
résistance
à des plus
ut alors en

rieur ; les
es pièces.
tion d'air

sont très
sous nos

ontact de
tais si ce
ue d'être
aison, un
oïdir un
lation de
ort à un

- b) Le nombre dN_i d'ions A_i franchissant une section S d'abscisse donnée de la cellule pendant dt est le nombre d'ions A_i contenu dans le cylindre de base S et de longueur $v_i dt$, soit $dN_i = n_i \times S v_i dt$.

Cela correspond à une charge électrique :

$$dQ_i = dN_i \times q_i = n_i S q_i v_i dt = n_i S \frac{q_i^2}{f_i} E dt$$

et à un courant (charge mobile par unité de temps) :

$$I_i = \frac{dQ_i}{dt} = \frac{n_i q_i^2}{f_i} \frac{SU}{L}$$

Ce courant ne dépend pas du signe de q_i , car les ions positifs (Cu^{2+} et H_3O^+) et les ions négatifs (SO_4^{2-} et OH^-) se déplacent en sens inverse, contribuant tous à un courant de même sens.

- c) L'intensité totale du courant est la contribution des intensités de chaque type d'ions :

$$I = \sum_i I_i = \sum_i \frac{n_i q_i^2}{f_i} \frac{S}{L} U$$

Elle s'écrit sous la forme $I = \frac{U}{R}$ avec $R = \frac{1}{\sum_i \frac{n_i q_i^2}{f_i}} \frac{L}{S}$ du type $R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S}$,

d'où la conductivité électrique, somme des conductivités de chaque ion :

$$\sigma = \sum_i \frac{n_i q_i^2}{f_i} = \sum_i n_i q_i \mu_i$$

2. Méthode de Hittorf

- a) Il a réagi $(C_0 - C_c)V_0$ moles de Cu^{2+} correspondant, pour une demi-réaction redox $Cu^{2+} + 2e^- \rightleftharpoons Cu$, à un transfert de $2N_A(C_0 - C_c)V_0$ électrons, et donc à un courant partiel :

$$I_i = \frac{2N_A e (C_0 - C_c) V_0}{t_e} \quad \text{d'où} \quad t_{Cu^{2+}} = \frac{I_i}{I} = \frac{2N_A e (C_0 - C_c) V_0}{I t_e}$$

AN : $t_{Cu^{2+}} = 0,40$

- b) À l'aide de la question 1.c), on évalue $t_i = \frac{I_i}{I} = \frac{U/R_i}{U/R} = \frac{\sigma_i}{\sigma} = \frac{n_i q_i \mu_i}{\sigma}$

Pour les ions Cu^{2+} : $n_{Cu^{2+}} = N_A C_0$, $q_{Cu^{2+}} = 2e$

$$\text{d'où } t_{Cu^{2+}} = \frac{2N_A e C_0 \mu_{Cu^{2+}}}{\sigma}$$

On en déduit la conductivité ionique molaire des ions Cu^{2+} :

$$\lambda_{Cu^{2+}} = 2N_A e \mu_{Cu^{2+}} = \frac{\sigma t_{Cu^{2+}}}{C_0}$$

$$\text{AN : } \lambda_{Cu^{2+}} = 10,7 \text{ S.m}^{-1} / \text{mol.L}^{-1} = 10,7 \cdot 10^{-3} \text{ S.m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$$

Rq : Il s'agit là d'une méthode physique de détermination de la conductivité. Les compartiments sont quasi séparés (à la dérivation près pour fermer le circuit) afin de pouvoir suivre l'évolution de la concentration en ions Cu^{2+} ; si on assiste à leur réduction à cathode, on a, à l'anode, une oxydation des ions OH^- avec dégagement de dioxygène.

62. Diffusion de neutrons

1. Préliminaires

a) $j_n(x, t)$ est le nombre algébrique de neutrons traversant par unité de surface et de temps la section du barreau d'abscisse x , à la date t , dans le sens des x croissants.

La diffusion des neutrons dans le barreau obéit à la loi de Fick : $j_n = -D \frac{\partial n}{\partial x}$

b) En régime permanent et en l'absence d'absorption, j_n est uniforme et donc également $\frac{\partial n}{\partial x}$.

$$\text{De } \frac{\partial n}{\partial x} = -\frac{n_0 - n_L}{L} < 0 \text{ on déduit } j_n = D \frac{n_0 - n_L}{L} > 0$$

2. Absorption de neutrons

a) La différence entre le nombre de neutrons ayant pénétré à l'abscisse x et le nombre de neutrons sortis à l'abscisse $x + dx$ pendant dt ainsi que le nombre de neutrons absorbés dans le volume de la tranche pendant dt contribuent à faire varier le nombre de neutrons dans le volume de la tranche pendant dt :

$$j_n(x, t)S dt - j_n(x + dx, t)S dt - K S dx dt = \frac{\partial(n(x, t)S dx)}{\partial t} dt$$

d'où par application de la formule de Taylor et après simplification par $S dx dt$ l'équation de conservation, dont le membre de gauche est la somme d'un terme

$$\text{d'échange et d'un terme d'absorption : } -\frac{\partial j_n}{\partial x} - K = \frac{\partial n}{\partial t} \quad (1)$$

$$\text{La loi de Fick } j_n = -D \frac{\partial n}{\partial x} \text{ conduit alors au résultat : } D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{\partial n}{\partial t} = K \quad (2)$$

b) En régime permanent, $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$, j_n n'est plus fonction que de x , soit d'après (1) :

$$\frac{dj_n}{dx} = -K$$

Par intégration, on obtient $j_n(x) = J_0 - Kx$ satisfaisant la condition en $x = 0$.

c) Le courant de neutrons s'annule pour $L' = J_0 / K$.

Ce résultat pouvait être obtenu en écrivant simplement que les neutrons pénétrant par unité de temps à l'abscisse $x = 0$ sont absorbés en totalité dans le volume SL' , d'où $J_0 S = KSL'$.

d) Il est
volur
supp

3. Produ

a) Le s
fois
conc

soit
ou
rap
Le
de

L'

so
co

L'

f
A

C

P

E

r

b)
c

63. Év a)

- d) Il est irréaliste de supposer que le nombre de neutrons absorbés par unité de volume est indépendant de la concentration en neutrons ; il est plus naturel de le supposer proportionnel à cette concentration.

3. Production de neutrons

- a) Le second membre de l'équation de diffusion $D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{\partial n}{\partial t} = -\alpha n$ traduit bien cette fois un terme de source (production de neutrons) proportionnel à leur concentration. En posant $n(x, t) = f(x)g(t)$, on obtient :

$$Dg(t) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - f(x) \frac{dg(t)}{dt} = -\alpha f(x)g(t)$$

soit en divisant les deux membres par le produit $f(x)g(t)$: $\frac{\dot{g}}{g} = D \frac{f''}{f} + \alpha$ (3)

où \dot{g} est la dérivée de g par rapport à t et f'' la dérivée seconde de f par rapport à x .

Le premier membre de cette égalité ne dépend que de t et le second ne dépend que de x , ils sont donc tous les deux égaux à une constante notée λ .

$$\text{Alors } \dot{g} = \lambda g \text{ et } f'' = -\frac{\alpha - \lambda}{D} f$$

L'hypothèse $\frac{\alpha - \lambda}{D} = -k^2 < 0$ est à rejeter car elle conduirait pour $f(x)$ à une solution exponentielle du type $f(x) = A e^{kx} + B e^{-kx}$ incapable de satisfaire les conditions aux limites $f(0) = f(L) = 0$ issues de $n(x=0) = 0$ et $n(x=L) = 0$.

L'hypothèse $\frac{\alpha - \lambda}{D} = k^2 > 0$ conduit pour $f(x)$ à une solution sinusoïdale du type $f(x) = A \cos kx + B \sin kx$. Les mêmes conditions aux limites imposent cette fois $A = 0$ et $kL = \pi$, traduisant que n ne peut s'annuler qu'aux extrémités du barreau.

Cette dernière condition conduit à la relation $\lambda = \alpha - \frac{\pi^2 D}{L^2}$.

Par ailleurs, l'équation différentielle $\dot{g} = \lambda g$ a pour solution une exponentielle $g(t) = C e^{\lambda t}$.

Et donc si $\lambda > 0$, $g(t)$ croît indéfiniment, et par conséquent la concentration en neutrons $n(x, t)$ diverge si la longueur L du barreau est supérieure à $L_0 = \pi \sqrt{\frac{D}{\alpha}}$.

- b) Si L est supérieure à L_0 , il y a augmentation exponentielle du nombre de neutrons dans le barreau et donc du nombre de réactions de fission (qui libèrent de l'énergie) : il se produit alors une explosion nucléaire.

63. Évaporation de l'éther (*)

- a) En régime quasi stationnaire la distribution de la densité particulaire d'éther dans l'air est une fonction linéaire décroissante : $n(z) = A - Bz$. Pour déterminer les constantes A et B , il faut traduire les deux conditions aux limites suivantes :

– en $z = H$, la densité est pratiquement nulle : $n(H) \approx 0 \Rightarrow A - BH = 0$ (1)

– en $z = h$, on applique à la vapeur d'éther la loi des gaz parfaits : $P_S = \frac{n}{N_A} RT_0$

(en effet, n étant la densité volumique particulaire et N_A le nombre d'Avogadro, le rapport n/N_A est bien le nombre de mole d'éther par unité de volume)

$$\text{d'où } n(h) = A - Bh = \frac{N_A P_S}{RT_0} \quad (2)$$

Les conditions (1) et (2) donnent $B = \frac{N_A P_S}{RT_0(H-h)}$ et $A = \frac{N_A P_S L}{RT_0(H-h)}$

$$\text{d'où le profil } n(z) = \frac{N_A P_S}{RT_0} \frac{H-z}{H-h}$$

En réalité comme $h = h(t)$, on a $n(z) = n(z,t)$.

64. Ur
a)

- b) Sous l'influence de ce gradient de densité particulaire, la vapeur d'éther diffuse dans l'air et la loi de Fick donne $j_p = -D \frac{\partial n}{\partial z} = \frac{DN_A P_S}{RT_0(H-h(t))} > 0$; ce flux vers le haut est uniforme (indépendant de z) et dépend lentement du temps (régime quasi stationnaire).

Le flux de particules en $z = h$ est donc $\Phi = \frac{dN}{dt} = j_p \cdot S = \frac{DN_A P_S S}{RT_0(H-h(t))} \quad (3)$

- c) Au cours de l'évaporation le niveau $h(t)$ diminue, soit $dh < 0$. Dans le volume $-dh \cdot S$, il y a une masse $-dh \cdot S \mu$ correspondant à un nombre de particules :

$$dN = -dh \cdot S \mu \frac{1}{M} N_A \quad (4)$$

Le nombre de molécules d'éther qui diffusent à l'interface pendant le temps dt , soit $dN = \Phi dt$ donné par (3) s'identifie au nombre de molécules d'éther s'évaporant donné par (4) et qui sont responsables de la baisse $-dh$ du niveau pendant dt :

$$\frac{DN_A P_S S}{RT_0(H-h(t))} dt = -dh \cdot S \mu \frac{1}{M} N_A \Rightarrow -(H-h(t)) dh = \frac{MDP_S}{\mu RT_0} dt$$

Pour le membre de gauche, il faut écrire $-(H-h(t)) dh = (H-h(t)) d(H-h(t))$

$$\text{ce qui s'intègre facilement en } \frac{1}{2}(H-h(t))^2 - \frac{1}{2}(H-h_0)^2 = \frac{MDP_S}{\mu RT_0} t$$

vérifiant la condition $h(t=0) = h_0$.

La solution est alors :

$$h(t) = H - \sqrt{(H-h_0)^2 + \frac{2MDP_S}{\mu RT_0} t}$$

b)

- d) Le temps τ nécessaire à l'évaporation totale de l'éther est donné par $h(\tau) = 0$

c)

(1)

 $-RT_0$

4

.vogadro,

$$\text{soit } \tau = \left(H^2 - (H - h_0)^2 \right) \frac{\mu R T_0}{2 M D P_s}$$

AN : $\tau = 6,4 \cdot 10^4 \text{ s} \approx 18 \text{ h}$, ce qui est long.

Rq : Il est *a posteriori* possible de vérifier l'hypothèse du régime quasi stationnaire. Au début s'installe un régime transitoire dont la durée τ' est celle que met l'éther vapeur à diffuser sur une distance $H - h_0$, soit (voir la question 26.) $\tau' = (H - h_0)^2 / D = 1 \text{ min}$. Cette durée caractéristique τ' de diffusion de l'éther dans l'air étant très inférieure à la durée caractéristique τ de la vaporisation de l'éther, la diffusion s'effectue en régime quasi permanent.

64. Un noyau sphérique à production de neutrons (*)

a) D'après la loi de Fick, la densité de courant de neutrons est, dans un problème à symétrie sphérique, $j_p(r) = -D \frac{dn_c}{dr}$. En régime stationnaire, le nombre de neutrons dans une couronne sphérique comprise entre les rayons r et $r + dr$ est constant ; cependant le flux n'est pas conservé en présence d'un terme de création :

$$+j_p(r).4\pi r^2 dt - j_p(r+dr).4\pi(r+dr)^2 dt + p.4\pi r^2 dr dt = 0$$

En effet, ici, les surfaces des sphères ne sont pas les mêmes en r et $r + dr$; par ailleurs le volume de la couronne s'obtient par : surface \times épaisseur. Le terme de production en p est positif (on peut aussi dire que le flux sortant est égal au flux entrant augmenté du terme de création). L'application de la formule de Taylor doit alors concerter la fonction $j_p(r).r^2$: après simplification par $4\pi dr dt$,

$$-\frac{d(j_p(r).r^2)}{dr} + p.r^2 = 0 \Rightarrow D \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dn_c}{dr} \right) + p = 0$$

La résolution est facile (penser aux constantes d'intégration c , puis α) :

$$n_c(r) = -\frac{p}{6D} r^2 - \frac{c}{r} + \alpha$$

Afin que $n_c(r)$ reste finie lorsque $r \rightarrow 0$, il faut $c = 0$; alors

$$n_c(r) = \alpha - \frac{p}{6D} r^2$$

où la constante α représente $n_c(r=0)$, la densité au centre.

b) Pour $r > R$, l'équation se réduit à $D \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dn_E}{dr} \right) = 0$, de solution :

$$n_E(r) = -\frac{b}{r} + c' \quad \text{avec } c' = 0 \text{ pour que } n_E(r \rightarrow \infty) = 0 \text{ d'où} \quad n_E(r) = -\frac{b}{r}$$

c) À la limite $r = R$ du domaine, il faut traduire la continuité de la densité et du vecteur courant :

$$n_C(R) = n_E(R) \Rightarrow a - \frac{p}{6D} R^2 = -\frac{b}{R}$$

$$j_{pC}(R) = j_{pE}(R) \text{ soit } \frac{dn_C}{dr}(R) = \frac{dn_E}{dr}(R) \Rightarrow -\frac{p}{3D} R = \frac{b}{R^2}$$

de solution : $a = \frac{p}{2D} R^2$ et $b = -\frac{p}{3D} R^3$

d'où $n_C(r) = \frac{pR^2}{2D} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right)$ et $n_E(r) = \frac{pR^3}{3Dr}$

65. Sédimentation de macromolécules

- a) Outre leur poids et la force de frottement fluide, il fait tenir compte de la poussée d'Archimède qu'exerce le liquide sur les macromolécules.

Le volume qu'occupe une macromolécule est $\frac{m}{\rho_0}$; l'opposé du poids du fluide

déplacé est donc $-\frac{m}{\rho_0} \rho \vec{g}$.

L'équation différentielle du mouvement d'une macromolécule s'écrit alors :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - m \frac{\rho}{\rho_0} \vec{g} - f \cdot \vec{v} = m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \vec{g} - f \cdot \vec{v}$$

Après un régime transitoire de courte durée $\tau = m/f$ qui apparaît dans l'écriture $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = (1 - \rho/\rho_0)\vec{g}$, il s'établit un régime permanent où $\frac{d\vec{v}}{dt} \approx \vec{0}$, conduisant à la vitesse limite :

$$\vec{v}_{lim} = \frac{m}{f} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \vec{g} = -\frac{mg}{f} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \vec{u}_z$$

évidemment dirigée dans le sens du champ de pesanteur (l'axe Oz est vertical ascendant).

- b) À ce mouvement de chute rectiligne uniforme dans le champ de pesanteur correspond le vecteur densité de courant de macromolécules défini à l'aide de la densité volumique de particules $n(z)$:

$$\vec{j}_E = n(z) \vec{v}_{lim} = N_A c(z) \vec{v}_{lim} = -N_A c(z) \frac{mg}{f} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \vec{u}_z = -\frac{Mg}{f} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) c(z) \vec{u}_z$$

où $M = N_A m$ est la masse molaire des macromolécules.

- c) L'inhomogénéité de concentration des molécules (davantage concentrées au fond du récipient) entraîne un flux de diffusion suivant la verticale ascendante et donné par la loi de Fick :

$$\vec{j}_D = -D \overrightarrow{\text{grad}} n(z) = -DN_A \frac{dc(z)}{dz} \vec{u}_z$$

d) En régime stationnaire, les deux flux inverses s'équilibrivent : $\vec{j}_E + \vec{j}_D = \vec{0}$, soit en projection sur l'axe Oz vertical ascendant :

$$-\frac{Mg}{f} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) c(z) - N_A D \frac{dc(z)}{dz} = 0$$

ou encore

$$\frac{dc}{dz} + \frac{c}{h} = 0 \quad \text{avec } h = \frac{N_A D f}{M g (1 - \rho / \rho_0)} \quad \text{de solution} \quad c(z) = c(0) \exp\left(-\frac{z}{h}\right)$$

e) Avec la relation d'Einstein, $h = \frac{N_A k_B T}{M g (1 - \rho / \rho_0)} = \frac{RT}{M g (1 - \rho / \rho_0)}$

On déduit de $\ln \frac{c(0)}{c(z)} = \frac{z}{h} = \frac{M g z (1 - \rho / \rho_0)}{R T}$ la masse molaire des macromolécules :

$$M = \frac{RT}{(1 - \rho / \rho_0) g z} \ln \frac{c(0)}{c(z)}$$

AN : $M \approx 43.10^3 \text{ kg.mol}^{-1}$

Cette valeur anormalement élevée concerne de « grosses » macromolécules rencontrées dans le domaine de la biologie animale.

écriture

tant à la

vertical

santéur
le de la

) \vec{u}_z

au fond
t donné

66. Intérêt d'un double vitrage

Les associations (en série ou en parallèle) des résistances thermiques suivent les mêmes lois que les résistances électriques (voir la question 57.).

a) La surface totale des vitres est :

$$S_V = 2,0 \times 1,8 + 2(1,2 \times 1,2) = 6,48 \text{ m}^2$$

correspondant à une résistance thermique $R_V = \frac{e}{\lambda_V S_V} = 0,396 \cdot 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$

Des deux grands murs en contact avec l'air extérieur il faut décompter la surface des vitres, la surface concernée est donc :

$$S_M = 2(8,0 \times 2,5) - 6,48 = 33,52 \text{ m}^2$$

correspondant à une résistance thermique $R_M = \frac{E}{\lambda_M S_M} = 89,5 \cdot 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$

Les pertes thermiques se font ou par les vitres ou par les murs qui sont donc placés en parallèle, d'où la résistance thermique de l'ensemble :

$$R = \frac{R_V R_M}{R_V + R_M} = 0,398 \cdot 10^{-3} \text{ K.W}^{-1} \approx R_V \quad \text{car } R_M \gg R_V$$

Les flux thermiques correspondants sont :

$$\Phi_V = \frac{T_1 - T_2}{R_V} = 48,0 \text{ kW.m}^2 ; \quad \Phi_M = \frac{T_1 - T_2}{R_M} = 0,21 \text{ kW.m}^2$$

et finalement $\Phi_T = \Phi_V + \Phi_M = \frac{T_1 - T_2}{R} = 48,2 \text{ kW.m}^2$

La rapport demandé vaut $\frac{\Phi_M}{\Phi_T} = 4,4 \cdot 10^{-4}$; il y a donc seulement 0,4 % des pertes qui s'effectuent par les murs, soit 99,6 % par les vitres, d'où la nécessité d'agir.

- b) $R_V = \frac{e}{\lambda_V S_V} = 0,40 \cdot 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$ est la valeur calculée à la question a) pour une simple couche de vitre.

La résistance thermique de la couche d'air comprise entre les deux couches de vitres est :

$$R_A = \frac{e'}{\lambda_A S_V} = 23,7 \cdot 10^{-3} \text{ K.W}^{-1} \gg R_V$$

Pour le « double vitrage » dans son ensemble, les deux couches de verre et celle d'air sont en série, d'où :

$$R_{DV} = 2R_V + R_A = 24,5 \cdot 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$$

Comme on pouvait s'y attendre, c'est la couche d'air qui limite la conduction en élevant la résistance thermique.

À travers le « double vitrage » $\Phi_{DV} = \frac{T_1 - T_2}{R_{DV}} = 0,775 \text{ kW.m}^2$ soit en gros 60 fois moindre que Φ_V pour une simple vitre.

La résistance totale est cette fois $R' = \frac{R_{DV} R_M}{R_{DV} + R_M} = 19,2 \cdot 10^{-3} \text{ K.W}^{-1} \gg R$ et le nouveau flux total vaut $\Phi'_T = \frac{T_1 - T_2}{R'} = 0,99 \text{ kW.m}^2$, ce qui ne représente plus en gros qu'un 50° du flux Φ_T précédent.

Dans la pratique l'amélioration, bien qu'incontestable, est nettement moindre, car ici il n'a pas été tenu compte des pertes par convection avec l'air extérieur ou par rayonnement.

- c) Le flux $\Phi_{DV} = 0,78 \text{ kW.m}^2$ est le même à travers les trois couches du double vitrage ; de plus en régime stationnaire, les profils de température sont linéaires dans chaque couche.

Vitre intérieure : $T_1 - T'_1 = R_V \Phi_{DV} \Rightarrow T'_1 = 18,7^\circ\text{C}$

Couche d'air : $T'_1 - T'_2 = R_A \Phi_{DV} \Rightarrow T'_2 = 0,3^\circ\text{C}$

Pour obtenir T'_2 , on aurait pu considérer la vitre extérieure : $T'_2 - T_2 = R_V \Phi_{DV} \Rightarrow T'_2 = 0,3^\circ\text{C}$

La température apparaît donc pratiquement uniforme dans la partie vitrée, alors que le gradient de température est beaucoup plus important (et pratiquement total) dans la couche d'air.

67. Ailett

a) Er
lar

ap

et

ou

b) L'

L'

la

l'e

Ei

R

c) L

gr

i

ce

L

ap

cr

é

L

68. Fusi

a) L
p

L

co

67. Ailettes de refroidissement

a) En régime stationnaire, le bilan de puissance thermique sur la tranche d'ailette de largeur dx s'écrit (attention aux signes et à l'évaluation des surfaces concernées) :

$$j_{th}(x).ab - j_{th}(x+dx).ab - h(T(x) - T_A).2(a+b)dx = 0$$

après simplification par $b dx$, puisque $a \ll b$: $-\frac{d j_{th}}{dx}a = 2h(T(x) - T_A)$

et avec la loi de Fourier $j_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx}$, il vient $\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{L^2}(T(x) - T_A) = 0}$

où L est clairement homogène à une longueur avec $L = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}} \approx 1,05 \text{ cm}$

b) L'équation se résout en $T(x) - T_A = A e^{x/L} + B e^{-x/L}$

L'inégalité $c \gg L$, à savoir une ailette bien plus longue que l'ordre de grandeur de la variation de température, assure que l'extrémité en $x = c$ est à la température de l'air : $T(c) - T_A = A e^{c/L} + B e^{-c/L} \approx 0$ conduit à prendre $A = 0$ (car $A \ll B$).

En $x = 0$, il reste $T_M - T_A = B$

d'où $\boxed{T(x) = T_A + (T_M - T_A)e^{-x/L}}$

Rq : En réalité l'écriture correcte des conditions aux limites en $x = c$ (la continuité du flux) assure après détermination de A et B que $\forall x < c, A e^{x/L} \ll B e^{-x/L}$.

c) La surface d'évacuation de la puissance est sensiblement constituée des deux grandes faces latérales :

$$dP = h(T(x) - T_A) dS = h(T_M - T_A) e^{-x/L} 2b dx \Rightarrow P \approx 2hbL(T_M - T_A) \approx 15,1 \text{ W}$$

car dans l'intégrale, on a $e^{-c/L} \ll 1$

La puissance thermique transmise par l'appareil à l'ailette en $x = 0$ est :

$$P' = -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} \times ab = \frac{\lambda}{L} (T_M - T_A) ab = P$$

après avoir remplacé L par son expression ; en régime stationnaire (sans terme de création) le flux est conservatif : toute la puissance fournie par l'appareil est évacuée dans l'air.

Le nombre d'ailettes à placer en parallèle pour évacuer la puissance totale est :

$$\underline{N} = \frac{P_{tot}}{P} = 13,2 ; \text{ il suffit donc d'en disposer 14.}$$

68. Fusible en régime stationnaire

a) La résistance élémentaire du tronçon d'épaisseur dx et de section s est donnée par :

$$dR = \frac{dx}{\gamma s}$$

La puissance Joule élémentaire cédée par le passage du courant au tronçon de conducteur est :

$$dP = dR I^2 = \frac{I^2}{\gamma s} dx$$

Cet apport local d'énergie thermique constitue pour le conducteur une source effective de puissance Joule (à ne pas assimiler ici à une perte). Le bilan d'énergie pour la tranche de section s et d'épaisseur dx s'écrit pendant dt :

$$j_{th}(x).s.dt + \frac{I^2}{\gamma s} dx.dt = j_{th}(x+dx).s.dt \quad (1)$$

Il traduit qu'en régime stationnaire le flux entrant en x pendant dt augmenté du terme d'apport pendant dt est égal au flux sortant en $x+dx$ pendant dt .

Après développement de Taylor et simplification par $sdxdt$, il vient l'équation :

$$-\frac{dj_{th}}{dx} + \frac{I^2}{\gamma s^2} = 0$$

qui, associée à la loi de Fourier $j_{th} = -K \frac{dT}{dx}$, conduit à l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$:

$$K \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{I^2}{\gamma s^2} = 0$$

b) L'équation précédente $\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{I^2}{\gamma K s^2}$ s'intègre en $T(x) = -\frac{I^2}{2\gamma K s^2} x^2 + Ax + B$

Compte tenu des conditions imposées aux limites $T(0) = T(L) = T_0$, les constantes

d'intégration valent $B = T_0$ et $A = \frac{I^2}{2\gamma K s^2} L$, d'où le profil parabolique :

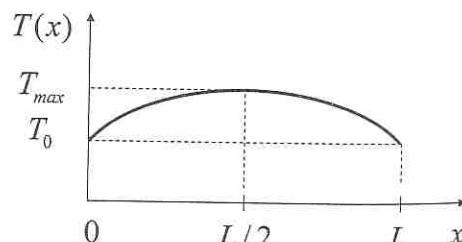
$$T(x) = T_0 + \frac{I^2}{2\gamma K s^2} x(L-x)$$

En présence d'un terme de source comme ici, le flux n'est pas uniforme le long du barreau en régime stationnaire ; s'en convaincre par :

$$P_{th} = j_{th}.s = -Ks \frac{dT}{dx} = -\frac{I^2}{\gamma s} \left(\frac{L}{2} - x \right) \text{ qui est fonction linéaire de } x$$

Plus physiquement, on peut faire remarquer que le flux sortant est égal au flux entrant augmenté de la puissance Joule reçue comme indiqué sur la relation (1) de la question a) ; le flux n'est donc pas uniforme le long du fusible.

La courbe est une parabole dont la concavité est dirigée « vers le bas » (présence du terme en $-x^2$) et symétrique par rapport à $x = L/2$ où la température est maximale.



c) L'endroit de la rupture est celui où la température est maximale $dT/dx = 0$, c'est-à-dire là où le flux est nul : $P_{th} = 0$, soit $x = L/2$, au centre du fusible.

La température maximale y est : $T_{max} = T(L/2) = T_0 + \frac{I^2 L^2}{8\gamma K s^2}$

La condition $T_{max} < T_F$ pour $I = I_{max}$ conduit à $s > \frac{I_{max} L}{2\sqrt{2\gamma K(T_F - T_0)}}$

AN : $s > 16 \text{ mm}^2$

d) L'expression $P_{th} = -\frac{I^2}{\gamma s} \left(\frac{L}{2} - x \right)$ a été établie à la question b).

En $x = 0$, $P_{th}(0) = -\frac{I^2 L}{2\gamma s} < 0$ correspondant à $j_{th}(0) < 0$; la puissance thermique quitte le fil sur l'extrémité avant du fusible.

En $x = L$, $P_{th}(L) = \frac{I^2 L}{2\gamma s} > 0$ correspondant à $j_{th}(L) > 0$; la puissance thermique quitte le fil sur l'extrémité arrière du fusible, avec $P_{th}(L) = |P_{th}(0)|$ par symétrie.

AN : $P_{th}(L) = |P_{th}(0)| = 0,65 \text{ W}$

La puissance électrique totale reçue par le fil est $P_e = RI^2 = \frac{L}{\gamma s} I^2$ puisque $R = \frac{L}{\gamma s}$ est sa résistance électrique totale. Il apparaît que $P_e = P_{th}(L) + |P_{th}(0)| = 1,3 \text{ W}$, on retrouve ainsi que toute la puissance Joule apportée au fusible par le passage du courant électrique est évacuée par conduction au niveau des deux extrémités.

e) En régime stationnaire, l'entropie du fil est constante au cours du temps, et donc :

$$\Delta S = 0$$

Mais le fusible échange de l'entropie avec la source extérieure qui maintient une température T_0 aux deux extrémités ; comme il s'agit à chaque extrémité d'une perte, l'entropie échangée est négative :

$$\delta S_{éch.} = \frac{\delta Q(0)}{T_0} + \frac{\delta Q(L)}{T_0} = -\frac{|P_{th}(0)| \Delta t}{T_0} - \frac{|P_{th}(L)| \Delta t}{T_0} = -\frac{I^2 L}{\gamma s T_0} \Delta t < 0$$

Du second principe écrit pour le fil pendant l'intervalle de temps Δt :

$$\Delta S = \delta S_{éch.} + \delta S_{créée}$$

il vient par $\Delta S = 0$ l'entropie créée :

$$\delta S_{créée} = -\delta S_{éch.} = \delta S_{éch.} = \frac{I^2 L}{\gamma s T_0} \Delta t > 0$$

et par unité de temps :

$$\boxed{\frac{\delta S_{créée}}{\Delta t} = \frac{I^2 L}{\gamma s T_0} > 0}$$

L'entropie créée est strictement positive car le fil est le siège d'une conduction thermique dont on sait qu'il s'agit d'un phénomène irréversible.

AN : $\frac{\delta S_{créée}}{\Delta t} = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ W.K}^{-1}$

69. Mise en chambre d'un vin en bouteille

a) Le volume de vin fait apparaître le rayon intérieur : $V = \pi(d/2 - e)^2 H = 750 \text{ cm}^3$, soit un volume habituel de 75 cL.

La masse correspondante est $m = \rho_{\text{vin}} V = 0,75 \text{ kg}$

b) Comme le problème est à symétrie cylindrique, la température n'est fonction que de r ; la loi de Fourier s'écrit simplement : $j_{\text{th}} = -\lambda \frac{dT}{dr}$.

Le flux thermique à travers un cylindre de rayon r et de hauteur H dans le verre est, sachant que le flux est uniquement radial (il n'y en a pas à travers les bases) :

$$\Phi = \iint j_{\text{th}} \cdot d\vec{S} = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r H < 0$$

Or en régime quasi stationnaire ce flux est uniforme (Φ indépendant de r), d'où :

$$dT = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda H} \frac{dr}{r}$$

Après intégration de $r = d/2 - e$ à $r = d/2$, il vient $T_s - T = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda H} \ln \frac{d}{d-2e} > 0$

résultat du type $T - T_s = R_{\text{cond}} \Phi$ d'où la résistance thermique

$$R_{\text{cond}} = \frac{\ln \frac{d}{d-2e}}{2\pi\lambda H}$$

AN : $R_{\text{cond}} = 0,086 \text{ K.W}^{-1}$

c) φ est le flux thermique en Watt (W) donc h s'exprime en $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Physiquement, h dépend essentiellement des propriétés physiques de l'air (conductivité thermique, viscosité, etc), de la vitesse de l'air, et de la forme et de la structure de la surface d'échange.

Là aussi, $\varphi = hS(T_s - T_A) < 0$, le flux est rentrant (l'air de la cuisine échauffe la bouteille). En écrivant $\varphi = \frac{T_s - T_A}{R_{\text{conv}}}$, il vient $R_{\text{conv}} = \frac{1}{hS} = \frac{1}{h\pi dH} = 2,15 \text{ K.W}^{-1}$

Par continuité du flux en surface de la bouteille, on a $\Phi = \varphi$, d'où la différence de température entre le vin et l'air de la cuisine :

$$T - T_A = (T - T_s) + (T_s - T_A) = (R_{\text{cond}} + R_{\text{conv}})\varphi = R_{\text{th}}\varphi$$

Il apparaît que les deux résistances sont en série, d'où la résistance thermique totale :

$$R_{\text{th}} = R_{\text{cond}} + R_{\text{conv}} = 2,24 \text{ K.W}^{-1}$$

d) La température $T(t)$ du vin (supposée uniforme) augmente sous l'effet du flux en provenance de l'air extérieur ; le bilan de puissance thermique s'écrit :

$$mc \frac{dT}{dt} = -\frac{T - T_A}{R_{\text{th}}} > 0$$

En notant $C = mc = 3 \text{ kJ.K}^{-1}$ la capacité thermique totale du vin, puis $\tau = R_{\text{th}} C$, l'équation différentielle précédente s'écrit :

$= 750 \text{ cm}^3$,

$$\frac{d(T-T_A)}{dt} = -\frac{T-T_A}{\tau}$$

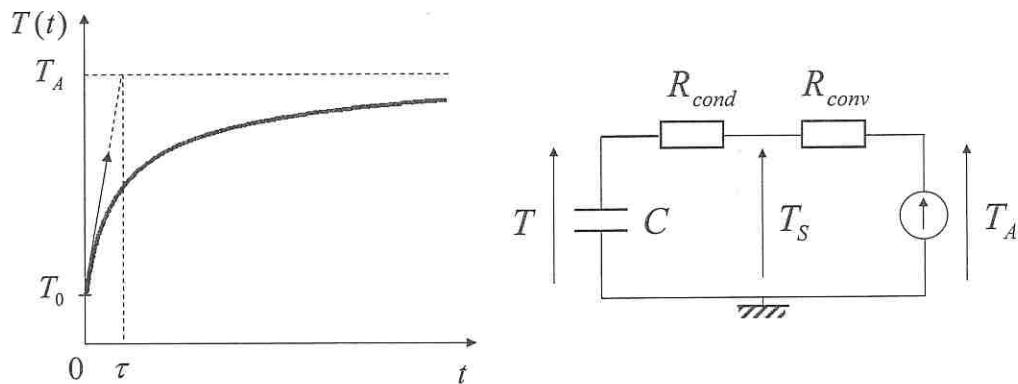
Elle montre que l'écart de température $T(t)-T_A < 0$ se réduit avec un temps caractéristique $\tau = R_{th}C = 6720 \text{ s} = 1 \text{ h } 52 \text{ min}$.

nction que

e) La solution de cette équation est, compte tenu que $T(t=0)=T_0$:

$$T(t)-T_A = (T_0-T_A)e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ soit } T(t) = T_A + (T_A-T_0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Cette dernière forme montre mieux que $T(t)$ est une fonction croissante de T_0 à T_A avec une constante de temps τ . Dans le circuit équivalent, le vin est représenté par un condensateur de capacité C sous la tension T , l'air extérieur par un générateur de force électromotrice T_A , et les résistances thermiques par des résistances électriques, la tension centrale étant T_S .



La durée t_D cherchée est donnée par $T(t_D)=T_D$ soit $t_D = \tau \ln \frac{T_A-T_0}{T_A-T_D}$

AN : $t_D = 5690 \text{ s} = 1 \text{ h } 35 \text{ min}$

Rq : Comme $R_{cond} \ll R_{conv}$ (le phénomène limitant est la convection, pas la conduction), la température de surface de la bouteille est beaucoup plus proche de celle du vin que de celle de l'air (voir aussi la question 30.).

70. Transfert thermique dans une barre (*)

1. Bilan énergétique

a) Se reporter aux questions de cours 15. et 16. $D = \lambda / \rho c$ s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

b) * Physiquement, si la capacité thermique des thermostats est infinie (ce sont alors de vraies sources), ils peuvent fournir de l'énergie thermique sans modifier leur température. Par l'équation de la diffusion écrite pour les thermostats :

$$D_i = \frac{\lambda_i}{\rho_i c_i} \rightarrow 0 \text{ d'où } \frac{\partial T_i}{\partial t} \rightarrow 0 : T_1 \text{ et } T_2 \text{ sont constantes}$$

* La barre finit alors par atteindre un régime permanent forcé :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \text{ soit } \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \Rightarrow T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L}x$$

car pour $T_1 > T_2$, $T(x)$ diminue avec x

* En régime permanent, le flux thermique Φ est uniforme :

$$\Phi = j_{th} \cdot \Sigma = -\lambda \frac{dT}{dx} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} \Sigma \Rightarrow R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi} = \frac{L}{\lambda \Sigma}$$

c) * Les thermostats, des métaux par exemple, conduisent très bien la chaleur ; leur température T_i est donc uniforme

$$\text{en effet, } j_{th} = -\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \text{ étant fini avec } \lambda_i \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\partial T_i}{\partial x} = 0$$

* C non infinie, les températures des thermostats ne sont plus constantes et dépendent du temps : $T_1(t)$ et $T_2(t)$.

* $C \gg (\rho \Sigma L)c$ soit $c \approx 0$ et donc $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$ pour la barre. Le flux Φ dans la barre est donc uniforme comme en régime stationnaire ; on a un régime quasi stationnaire avec $T(x,t) = T_1(t) - \frac{T_1(t) - T_2(t)}{L}x$.

d) L'ensemble thermostats et barre étant isolé (et de volume constant), l'énergie interne est constante dans une évolution élémentaire :

$$dU = CdT_1 + CdT_2 + \rho \Sigma L c dT = 0 \text{ et comme } \rho \Sigma L c \ll C, \text{ il vient } \frac{dT_1}{dt} = -\frac{dT_2}{dt}$$

Rq : On pouvait dire aussi que le flux étant uniforme le long de la barre, toute la puissance reçue par S_1 est transférée à S_2 , soit $-C \frac{dT_1}{dt} = C \frac{dT_2}{dt}$.

$$\text{d'où } T_1(t) + T_2(t) = \text{cste} = T_1^0 + T_2^0 \quad (1)$$

De même le flux reçu par S_1 s'identifie à celui dans la barre :

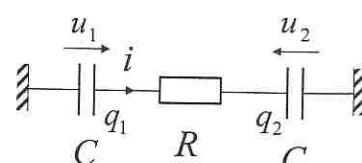
$$-C \frac{dT_1}{dt} = \Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} = \frac{2T_1 - T_1^0 - T_2^0}{R_{th}} \quad \text{d'après (1)}$$

Par intégration avec la condition initiale $T_1(t=0) = T_1^0$ et en posant $\tau = \frac{R_{th}C}{2}$,

$$T_1(t) = T_1^0 - \frac{T_1^0 - T_2^0}{2} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{et de même} \quad T_2(t) = T_2^0 + \frac{T_1^0 - T_2^0}{2} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Circuit électrocinétique équivalent : la décharge d'un condensateur dans un autre à travers une résistance. La tension et le courant correspondent respectivement à la température et au flux.

Au début $u_1^0 > u_2^0$, donc $i > 0$



$$\begin{cases} u_1 - u_2 = Ri \\ i = -\frac{dq_1}{dt} = -C \frac{du_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt} = C \frac{du_2}{dt} \end{cases}$$

2. Bilan entropique

a) * L'identité thermodynamique pour la tranche s'écrit :

$$dU = TdS - PdV = TdS \text{ car la tranche est indilatante}$$

$$\text{d'où } d^2S = \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial t} dt = \frac{\rho \Sigma dx c}{T} \frac{\partial T}{\partial t} dt \text{ pendant } dt \text{ pour la tranche } dx$$

* En régime général, le flux thermique $\Phi(x, t) = j_{th}(x, t)\Sigma$ dépend de x et de t .

$$\text{L'entropie échangée est } \delta^2 S_{éch.} = \left(\frac{\Phi(x, t)}{T(x, t)} - \frac{\Phi(x + dx, t)}{T(x + dx, t)} \right) dt = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Phi(x, t)}{T(x, t)} \right) dx dt$$

$$\text{soit } \delta^2 S_{éch.} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{j_{th}(x, t)}{T(x, t)} \right) \Sigma dx dt$$

* L'entropie créée par la tranche pendant dt est : $\delta^2 S_{créée} = \sigma(x, t)\Sigma dx dt$

b) Le 2nd principe sous la forme $d^2S = \delta^2 S_{éch.} + \delta^2 S_{créée}$ donne en simplifiant par

$$\Sigma dx dt, \text{ le bilan local : } \frac{\rho c}{T} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{j_{th}}{T} \right) + \sigma$$

c) En régime permanent, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, soit $\sigma(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{j_{th}}{T(x)} \right) = -j_{th} \frac{1}{T^2} \frac{dT}{dx}$

car $j_{th} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L}$ est indépendant de x ;

$$\text{et comme } T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L} x, \text{ il vient } \sigma(x) = \frac{\lambda(T_1 - T_2)^2}{[T_1 L - (T_1 - T_2)x]^2}$$

$$\text{Alors } \frac{dS_{créée}}{dt} = \int_0^L \sigma(x)\Sigma dx = \frac{\lambda \Sigma (T_1 - T_2)^2}{LT_1 T_2} > 0 \text{ car il s'agit d'entropie créée}$$

Rq : En fait la connaissance de $\sigma(x)$ n'est pas nécessaire ici ; il suffit d'écrire

$$\frac{dS_{créée}}{dt} = \int_0^L \sigma(x)\Sigma dx = \int_0^L \frac{d}{dx} \left(\frac{j_{th}}{T(x)} \right) \Sigma dx = j_{th} \Sigma \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

$$d) \frac{dS_{éch.}}{dt} = \frac{\Phi}{T_1} - \frac{\Phi}{T_2} = -j_{th} \Sigma \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) < 0$$

La barre reçoit un flux thermique sous T_1 et le cède sous $T_2 < T_1$; globalement elle a donc effectivement cédée de l'entropie aux deux thermostats.

e) On note que $\frac{dS_{éch.}}{dt} = -\frac{dS_{créée}}{dt}$ d'où $\frac{d\Delta S}{dt} = \frac{dS_{éch.}}{dt} + \frac{dS_{créée}}{dt} = 0$, et pour une durée

donnée : $\Delta S = S_{éch.} + S_{créée} = 0$ permettant de revenir à des notations plus classiques.

Ce résultat est bien sûr attendu, puisqu'en régime stationnaire, l'entropie de la barre doit rester constante ; la transformation qu'elle subit est donc isentropique. Mais cette transformation n'est ni adiabatique (échange avec les thermostats, $S_{éch.} < 0$), ni réversible (la diffusion thermique est irréversible, $S_{crée} > 0$).

d) 1

71. Température à l'intérieur de la Terre

- a) Le bilan thermique sur une coquille sphérique comprise entre les rayons r et $r + dr$ s'écrit en l'absence de terme de source et en régime permanent :

$$+j_{th}(r).4\pi r^2 dt - j_{th}(r+dr).4\pi(r+dr)^2 dt = 0$$

e)

Il s'identifie à la conservation du flux thermique.

L'application de la formule de Taylor concerne la fonction $j_{th}(r).r^2$:

$$-\frac{d}{dr}(j_{th}(r).r^2) dr.4\pi dt = 0$$

Après simplification par $4\pi dr dt$ et application de la loi de Fourier $j_{th} = -\lambda \frac{dT}{dr}$, il vient l'équation de diffusion :

$$\boxed{\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq r \leq r_m}$$

- b) Par intégration, on a d'abord $r^2 \frac{dT}{dr} = A$ soit $\frac{dT}{dr} = \frac{A}{r^2}$ puis $T(r) = B - \frac{A}{r}$

f)

Cette solution, pour $A \neq 0$, conduit à une densité de flux et une température infinies au centre de la Terre $r = 0$, ce qui est impossible, d'où $A = 0$.

On en déduit $j_{th} = -\lambda \frac{dT}{dr} = 0$ et $T(r) = B = T_C$ uniforme pour $0 \leq r \leq r_m$.

En particulier $j_{th}(r = r_m) = 0$; en effet aucun flux thermique ne peut exister au niveau de la lithosphère car un flux entrant ou sortant de la zone centrale de la Terre conduirait forcément à une variation au cours du temps de sa température et donc à un régime non permanent.

- c) Le bilan thermique sur une coquille sphérique comprise entre les rayons r et $r + dr$, donc de volume élémentaire $4\pi r^2 dr$, s'écrit en présence d'un terme de source et en régime permanent :

$$j_{th}(r).4\pi r^2 dt + H 4\pi r^2 dr dt = j_{th}(r+dr).4\pi(r+dr)^2 dt$$

Cette écriture traduit que le flux entrant en r augmenté du terme de source dans le volume est égal au flux sortant en $r + dr$; bien qu'en régime permanent, il n'y a alors plus conservation du flux thermique.

L'application de la formule de Taylor concerne toujours la fonction $j_{th}(r).r^2$:

$$-\frac{d}{dr}(j_{th}(r).r^2) dr.4\pi dt + \rho 4\pi r^2 dr H dt = 0$$

Après simplification par $4\pi dr dt$ et application de la loi de Fourier $j_{th} = -\lambda \frac{dT}{dr}$, il vient, en divisant par r^2 , la nouvelle équation de diffusion :

$$\boxed{\frac{\lambda}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \rho H = 0} \quad \text{pour } r_m \leq r \leq R$$

d) On écrit $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\rho H}{\lambda} r^2$ soit après intégration $\frac{dT}{dr} = -\frac{\rho H}{3\lambda} r + \frac{C}{r^2}$ (1)

$$\text{Une nouvelle intégration fournit } T(r) = -\frac{\rho H}{6\lambda} r^2 - \frac{C}{r} + D$$

e) Par continuité du flux thermique à l'interface $r = r_m$, il faut traduire $j_{th}(r = r_m) = 0$

$$\text{comme à la question b) soit } \frac{dT}{dr}(r = r_m) = -\frac{\rho H}{3\lambda} r_m + \frac{C}{r_m^2} = 0 \text{ d'après la relation (1).}$$

$$\text{Ceci fournit la constante } C = \frac{\rho H}{3\lambda} r_m^3 \text{ d'où } T(r) = -\frac{\rho H}{6\lambda} r^2 - \frac{\rho H}{3\lambda} \frac{r_m^3}{r} + D$$

Cette solution doit vérifier la condition $T(r = R) = T_0$, la température en surface.

Cela conduit à $D = T_0 + \frac{\rho H}{6\lambda} R^2 + \frac{\rho H}{3\lambda} \frac{r_m^3}{R}$, et finalement :

$$\boxed{T(r) = T_0 + \frac{\rho H}{6\lambda} (R^2 - r^2) - \frac{\rho H}{3\lambda} r_m^3 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)} \quad \text{pour } r_m \leq r \leq R$$

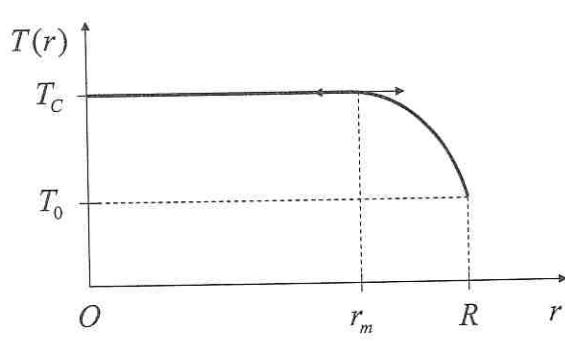
f) La température dans la zone centrale (et donc au centre) est obtenue par continuité de la température à l'interface $r = r_m$, ce qui achève la détermination de B :

$$T_C = T(r_m) = T_0 + \frac{\rho H}{6\lambda} (R^2 - r_m^2) - \frac{\rho H}{3\lambda} r_m^3 \left(\frac{1}{r_m} - \frac{1}{R} \right)$$

ou plus simplement :

$$\boxed{T(r) = T_C = T_0 + \frac{\rho H}{6\lambda} R^2 \left(1 - \frac{3r_m^2}{R^2} + \frac{2r_m^3}{R^3} \right)} \quad \text{pour } 0 \leq r \leq r_m$$

La courbe $T(r)$ est tracée ci-après ; en $r = r_m$, il y a continuité de la fonction et de la pente (par le flux).



AN : $T_c \approx 290 + 1400 = 1690$ K soit 1420°C , ce qui est une valeur qui s'approche de la température de fusion du fer (au environ de 1500°C).

$\frac{dT}{dr}(r=R) = -\frac{\rho H}{3\lambda} R \left(1 - \frac{r_m^3}{R^3}\right) = -0,031 \text{ K.m}^{-1} = \underline{-31 \text{ K.km}^{-1}}$; cette augmentation de la température avec la profondeur (gradient thermique) est conforme à celle mesurée dans les mines.

g) Le flux thermique total en surface de la Terre est (en Watt) :

$$\Phi = j_{th}(r=R).S = -\lambda \frac{dT}{dr}(r=R).4\pi R^2 = \frac{4\pi\rho H}{3} R^3 \left(1 - \frac{r_m^3}{R^3}\right)$$

AN : $\Phi = 1,5 \cdot 10^{15} \text{ W}$; cette valeur de 1,5 millions de gigawatts est absolument colossale.

La puissance radioactive dissipée dans la lithosphère de volume $\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r_m^3$ est :

$$P_d = \rho \frac{4}{3} \pi (R^3 - r_m^3) H$$

Le résultat $P_d = \Phi$ était prévisible car l'énergie produite par radioactivité dans la lithosphère, en régime stationnaire, ne diffuse pas par $r = r_m$ sinon la partie centrale s'échaufferait (voir $j_{th}(r = r_m) = 0$), mais uniquement en surface $r = R$.