

, ce qui redonne

its constants

$$\frac{d^2x}{dt^2}$$

solution générale
on particulière de

$$+bx+c=0$$

constants a , b
as :

ent b), les deux
en exponentielles
itoire (car il tend

ient b), les deux
 $-r \pm i\Omega$, d'où une
d'amplitude en

$(\Omega t + \phi)$
es)

zéro). Le régime

$$\dot{x} + c = e \cos(\omega t) ;$$

déphasée (retard

$$\gamma \text{ et } \tan \phi$$

ation générale !

Chapitre 1

COMPLÉMENTS D'ÉLECTROKINÉTIQUE ET D'ÉLECTRONIQUE

Les ordres de grandeur utiles

Résistances en électronique	1 k Ω à 1 M Ω
Capacités en électronique	100 pF à 100 μ F

L'amplificateur opérationnel

Amplification en continu	$\mu_0 \approx 10^6$	coefficient d'amplification de tension
Intensité maximale du courant de sortie	20 mA	
Tension de saturation V_{sat}	$\approx V_{alim} - 1$ Volt	
Vitesse de balayage	$dV/dt \approx 1$ V/ μ s	

Le matériel de TP

Temps de montée du créneau d'un GBF	$dV/dt \approx 50$ V/ μ s
Résistance de sortie d'un GBF	50 Ω
Fréquence maximum d'un GBF	1 MHz
Bandé passante d'un oscilloscope	20 MHz
Impédance d'entrée d'un oscilloscope	$R_e = 1$ M Ω // $C_e = 10$ pF

Le cours d'abord

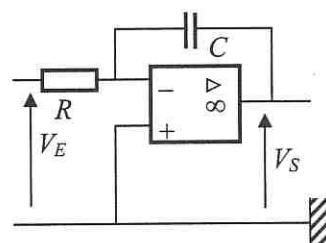
Systèmes linéaires et filtres

1. Donner la définition d'un système linéaire.
2. Donner une propriété caractéristique d'un tel système utilisant l'ensemble des fonctions sinusoïdales de pulsation ω .
3. Définir la fonction de transfert complexe d'un système linéaire et permanent ainsi que l'ordre de ce système.

- 4.** Qu'est-ce qu'un filtre en électronique ? Un filtre actif et un filtre passif ?
5. Dans le cas d'un filtre passif, comment déterminer sans calcul le comportement asymptotique à basse fréquence et à haute fréquence ?
6. Quelle est la condition nécessaire sur les comportements asymptotiques à haute fréquence et à basse fréquence pour avoir un filtre passe-bande ? Cette condition est-elle suffisante ?
7. À partir des composants R (résistance), L (bobine ou self inductance) et C (condensateur), donner les schémas les plus simples possibles de filtres passe-bas et passe-haut du premier ordre.
8. On peut représenter graphiquement une fonction de transfert à l'aide d'un diagramme de Bode. De quoi est-il constitué ? Quel est son intérêt ?
9. Donner la forme mathématique des fonctions de transferts des cinq différents types de filtre d'ordre 2.
- 10.** Il est souvent fait mention du caractère « intégrateur » ou « déivateur » d'un filtre. De quoi s'agit-il ? Comment cela se traduit-il sur le diagramme de Bode ?
11. Qu'appelle-t-on réponse indicielle d'un système (ou réponse à un échelon de tension) ? Quelle méthode faut-il appliquer pour trouver son expression dans le cas d'un système linéaire ?

Utilisation d'amplificateurs opérationnels

- 12.** À partir du schéma d'un montage à ampli op, comment prévoir si le montage est stable ou instable, c'est-à-dire si le l'ampli op fonctionne en régime linéaire ou en régime saturé ?
- 13.** En première approximation, on représente un amplificateur opérationnel par le modèle de l'amplificateur opérationnel parfait. Quelles sont les caractéristiques de ce modèle ? Quelle fonction simple réalise un ampli op nu (sans composants extérieurs en dehors de l'alimentation) ?
14. Donner le schéma des montages dits « amplificateur inverseur » et « amplificateur non inverseur ».
- 15.** Établir la fonction de transfert de chacun des montages précédents dans le cas d'un ampli op parfait.
16. Montrer que le montage ci-contre est (théoriquement), un intégrateur. Pourquoi ne fonctionne-t-il pas en pratique ? On ajoute en parallèle sur le condensateur une résistance R_C de valeur très grande. Dans quel domaine de fréquence le montage se comporte-t-il toujours comme un intégrateur ?



ssif ?

le comportement

ptotiques à haute
'ette condition est-

inductance) et C
filtres passe-bas et

e d'un diagramme

différents types de

ateur » d'un filtre.
3ode ?

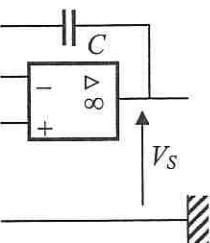
à un échelon de
ession dans le cas

si le montage est
me linéaire ou en

oérationnel par le
actéristiques de ce
iposants extérieurs

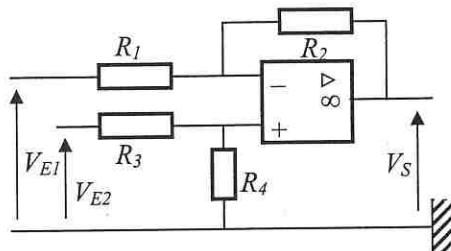
et « amplificateur

s dans le cas d'un



17. À quelle condition sur les valeurs des résistances, le circuit soustracteur ci-contre fait-il effectivement la différence entre les tensions V_{E2} et V_{E1} ?

Décomposition spectrale d'un signal



18. Quelle est la définition de la valeur moyenne d'une fonction f de la variable t sur un intervalle T de t_0 à t_1 ?

19. Rappeler la décomposition en série de Fourier réelle d'une fonction f de la variable t , de période T et de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Donner l'expression des coefficients de Fourier. Quelles sont les pulsations présentes dans le spectre de f et comment les nomme-t-on ?

20. Quelle propriété particulière possède le développement en série de Fourier d'une fonction paire ? d'une fonction impaire ?

Comparateur à hystérésis et oscillateurs (programme de TP-COURS en PT / PT* seulement, conseillé en exercice en MP / MP*)

21. En inversant les bornes + et - de l'ampli op utilisé dans un montage non inverseur on obtient un « comparateur à hystérésis ». Quelles valeurs la sortie de ce montage peut-elle prendre ? Tracer sa caractéristique entrée-sortie.

22. Pour réaliser un générateur de signaux rectangulaires, on associe le montage précédent à un intégrateur. Faire un schéma de l'ensemble avec les deux blocs comparateur à hystérésis et intégrateur, puis expliquer son fonctionnement.

23. À quelle équation différentielle générale obéit un oscillateur donnant une sortie $s(t)$ rigoureusement sinusoïdale à la pulsation ω ? Comment évolue cette équation si on ajoute un terme d'amortissement ? Et si on a une amplification (grâce à un composant actif tel qu'un ampli op) au lieu de l'amortissement ?
Dans ce dernier cas, décrire sans calcul l'allure de la sortie en fonction du temps.

Conseils à suivre ; erreurs à éviter

* La notation complexe en $\exp(j\omega t)$ est très utile en électronique mais elle est n'est valable en toute rigueur qu'en régime sinusoïdal à la pulsation ω . Sinon, quelle serait la signification du ω dans l'exponentielle ? En régime variable quelconque (non sinusoïdal) il est souvent préférable de revenir aux relations linéaires du type $u_L = L di_L / dt$ (tension aux bornes d'une bobine) ou $i_C = dq / dt = C du_C / dt$ (courant

dans un condensateur) et établir une équation différentielle dont la solution est la fonction du temps cherchée (tension ou courant).

Remarque : L'équation différentielle obtenue est bien entendu valable dans le cas du régime sinusoïdal ; étant unique, elle peut être établie dans ce cas particulier avec la notation complexe puis étendue au cas d'une fonction du temps quelconque vue comme une superposition de sinusoïdes au sens de Fourier, mais cette justification doit être présentée et elle est souvent aussi longue que le calcul direct !

* La représentation complexe ne doit pas être utilisée pour exprimer une puissance en régime sinusoïdal. La puissance consommée par un dipôle $P = UI \cos \varphi$ (avec U la tension efficace aux bornes du dipôle, I le courant efficace traversant le dipôle et φ le déphasage tension-courant) est en effet non linéaire. On retrouve la même difficulté en électromagnétisme : *ne pas utiliser la notation complexe pour les énergies et les puissances.*

Rq : une exception en optique où la simplicité des dépendances temporelles permet de trouver une formule toujours valable pour calculer l'intensité (voir le chapitre 4).

* Il faut savoir passer de la forme (partie réelle – partie imaginaire) à la forme (module – argument) d'un complexe dans les deux sens. Pour mémoire :

$$\underline{Z} = a + jb = |\underline{Z}| \exp(j\varphi) \quad a = |\underline{Z}| \cos \varphi \quad b = |\underline{Z}| \sin \varphi \quad |\underline{Z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arg(\underline{Z}) \quad \tan \varphi = \frac{b}{a} \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

* Pour tracer un diagramme de Bode en phase, la connaissance de $\tan \varphi$ (où φ est le déphasage entre tension d'entrée et tension de sortie, c'est-à-dire l'argument de la fonction de transfert) n'est pas suffisante. En effet la fonction tangente est π périodique et φ n'est donc connu qu'à π près avec la tangente. Or, on trace le diagramme sur une plage de 2π . Il faut donc une autre ligne trigonométrique ($\sin \varphi$ ou $\cos \varphi$).

* Le théorème de Millman n'est applicable que pour des dipôles linéaires en régime permanent ou en régime sinusoïdal (on peut alors utiliser les complexes). Avant de l'employer, penser à vérifier ces hypothèses.

Remarque : Si on s'est ramené à un régime sinusoïdal (voir le conseil précédent) et qu'on l'a justifié, on peut cependant l'appliquer.

* Le théorème de Millman n'apporte rien en soi par rapport aux lois des nœuds et des mailles : il n'est qu'une mise en forme commode de ces lois dont l'intérêt principal est de ne pas introduire des inconnues inutiles (des courants le plus souvent).

Lors de son emploi, faire le point sur les données et les grandeurs cherchées (à exprimer en fonction de ces données). Si on a besoin de faire intervenir un courant, il peut être judicieux d'utiliser la formulation du théorème de Millman qui l'emploie (voir la question 4. du chapitre 1 du livre de première année).

* Attention à ne pas traiter un circuit fermé sur une charge comme un circuit ouvert, c'est-à-dire comme si le courant de sortie était nul. On risquerait une application fausse de la formule du diviseur de tension (ou du théorème de Millman).

L'exemple classique d'erreur est celui d'un circuit de ce type :

la solution est la
ble dans le cas du
particulier avec la
conque vue comme
stification doit être

: une puissance en
 $\cos \varphi$ (avec U la
nt le dipôle et φ le
même difficulté en
es énergies et les

porelles permet de
chapitre 4).

a forme (module -

$$| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\therefore$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

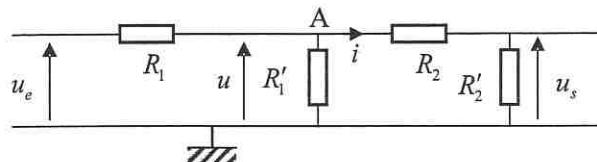
$\tan \varphi$ (où φ est le
l'argument de la
e est π périodique
liagramme sur une
 $\cos \varphi$).

néaires en régime
plexes). Avant de
iseil précédent) et

des nœuds et des
intérêt principal est
nt).

réchées (à exprimer
durant, il peut être
'emploi (voir la

un circuit ouvert,
application fausse



L'étudiant calcule le potentiel en A (égal à la tension u) comme si le courant i était nul

~~$$\frac{u}{u_e} = \frac{R'_1}{R_1 + R'_1} = H_1 \quad (\text{FAUX})$$~~

~~$$\text{Il obtient alors : } H = \frac{u_s}{u_e} = \frac{u_s}{u_e} = \frac{R'_1}{R_1 + R'_1} = \frac{R'_2}{R_2 + R'_2} \quad (\text{encore FAUX})$$~~

Il faut faire le calcul en tenant compte de i (voir par exemple la question 47.)

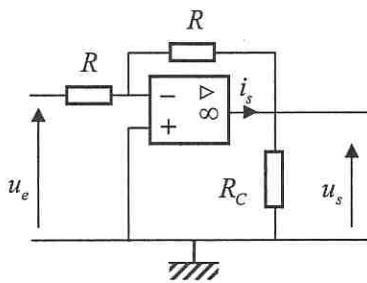
* Un amplificateur opérationnel donne en sortie un courant non nul. Attention à ne pas traiter le point de sortie comme si ce courant n'existe pas, en particulier en y appliquant le théorème de Millman. *Il est donc préférable d'éviter d'utiliser le théorème de Millman en sortie d'un amplificateur opérationnel.*

Exemple : un étudiant applique le théorème de Millman en sortie et écrit

~~$$\frac{V^-}{R} + \frac{0}{R_C} - \frac{V}{R} - \frac{V^+}{R_C} = \frac{V^-}{2} - \frac{V^+}{2} = 0 \quad (\text{Faux})$$~~

Il ne faut pas oublier i_s et écrire :

$$u_s = \frac{\frac{V^-}{R} + \frac{0}{R_C} + i_s}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_C}} = \frac{RR_C}{R + R_C} i_s$$



qui n'a d'intérêt que si on cherche i_s (par exemple si une saturation en courant risque de se produire) et pas pour trouver la fonction de transfert qui elle, ne dépend pas de R_C .

* Sauf précision contraire, tous les ampli op utilisés sont supposés parfaits. Mais cela ne signifie pas nécessairement que la différence de potentiel entre l'entrée inverseuse et l'entrée non inverseuse soit nulle : il faut pour cela que le régime soit linéaire.

* Pour le développement en série de Fourier, bien faire le lien avec les notations différentes utilisées en mathématiques (cours en fin d'année le plus souvent, faire le lien au moment des révisions). En électronique, les fonctions dépendent de la variable temps et on utilise la période T et la pulsation $\omega = 2\pi/T$, pas toujours en mathématiques.

Applications directes du cours

24. Rappeler l'expression de la tension efficace en fonction de la tension maximum aux bornes d'un dipôle dans le cas d'un régime sinusoïdal.

À partir de la définition, faire le calcul de la tension efficace dans le cas d'une tension T périodique, de forme triangulaire, de moyenne nulle, et d'amplitude U_m .

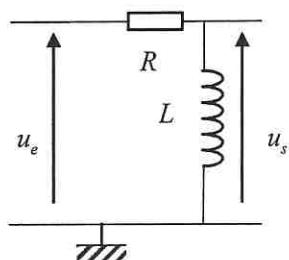
Même question si on ajoute à la tension précédente un « offset » (valeur constante U_0 positive ici).

25. On considère le filtre passif RL suivant :

Trouver sans calcul son comportement asymptotique et préciser sa nature (passe-bas, passe-bande...).

Établir sa fonction de transfert et la donner sous forme canonique. Comment peut-on en déduire son équation différentielle en régime variable quelconque ?

Établir enfin la réponse indicielle du filtre (ou réponse à un échelon de tension) et tracer son allure en fonction du temps.

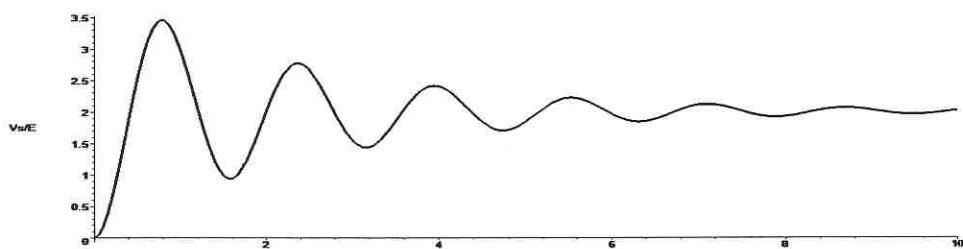


26. On reprend le filtre de la question précédente. Est-il possible qu'il fonctionne en intégrateur ? en déviateur ? Expliquer pourquoi.

En cas de réponse positive, préciser dans quel domaine de fréquence cela est possible. Mêmes questions pour le filtre RCL où on ajoute un condensateur de capacité C en série avec R .

27. Un filtre passif d'ordre 2 présente la réponse indicielle ci-dessous.

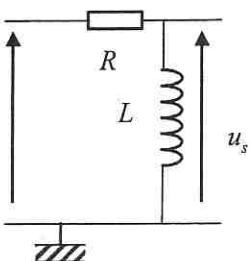
Ce filtre est soit un passe-bas, soit un passe-haut : choisir entre ces deux propositions. Donner l'expression de sa fonction de transfert sous forme canonique, et préciser les valeurs numériques des constantes qui y interviennent.



28. Donner un schéma de filtre passe-bande avec une résistance R , une bobine L et un condensateur C . Préciser les tensions d'entrée et de sortie sur le schéma.

Retrouver sa fonction de transfert et la mettre sous forme canonique (deux formes possibles). À quelle condition aura-t-on un filtre très sélectif ? peu sélectif ? Comment cela se traduit-il sur le diagramme de Bode en amplitude ?

sion maximum aux
le cas d'une tension
ide U_m .
valeur constante U_0



qu'il fonctionne en
ce cela est possible.
r de capacité C en

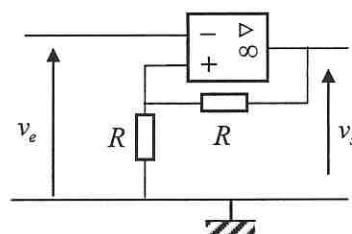
deux propositions.
ique, et préciser les

une bobine L et un
iéma.
rique (deux formes
sélectif ? Comment

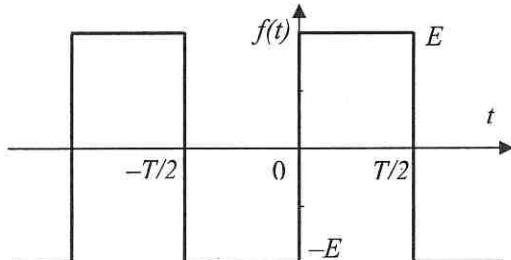
29. Un circuit RLC série à haut facteur de qualité ($Q > 1$) est alimenté par un générateur de tension délivrant une tension crêteau d'amplitude E et de grande période. Calculer l'intensité dans le circuit et donner son allure en fonction du temps. Comment pourrait-on fabriquer un oscillateur sinusoïdal à partir d'un tel circuit RLC ?

30. L'ampli op est supposé idéal, on note V_{sat} sa tension de saturation en sortie. Quelle est la tension de sortie v_s en fonction du temps si la tension d'entrée v_e est de la forme : $v_e = U \cos(\omega t)$?

Représenter graphiquement le résultat suivant la valeur de l'amplitude U .



31. On donne le développement en série de Fourier d'une fonction crêteau f du temps t , de période T , de pulsation ω , et d'amplitude E :



$$f(t) = \frac{4E}{\pi} \left[\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots + \frac{1}{2k+1} \sin ((2k+1)\omega t) + \dots \right]$$

Rappeler le lien existant entre les séries de Fourier de deux fonctions T périodiques dont l'une est la dérivée de l'autre. En appliquant cette propriété, trouver le développement en série de Fourier d'un triangle d'amplitude A à représenter sur un schéma du même type.

32. On prend une tension définie par le crêteau de l'exercice précédent pour l'injecter dans un filtre passe-bande non inverseur d'ordre 2, de pulsation de résonance ω_0 et de facteur de qualité Q .

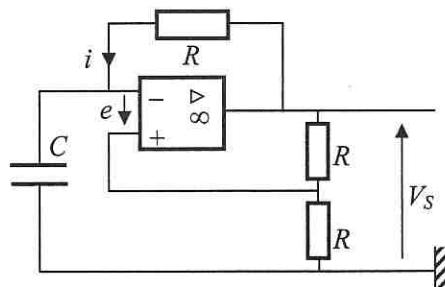
La pulsation ω de la tension crêteau est supposée grande devant ω_0 .

Montrer que le filtre se comporte vis à vis du crêteau d'entrée comme un intégrateur. Qu'obtient-on en sortie du filtre ? Comment seraient modifiés les résultats si on ajoutait une tension continue (un « offset ») au crêteau à l'entrée ?

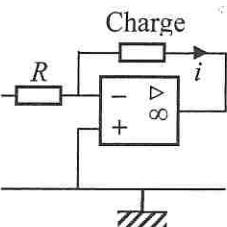
33. Un signal T périodique (de pulsation ω) est utilisé comme entrée d'un filtre passe-bande extrêmement sélectif de pulsation de résonance ω_0 . A quelle(s) condition(s) obtient-on une sortie appréciable à la sortie du filtre ? Quelle peut-être l'application d'un tel dispositif ?

34. Note : en MP / MP*, ceci n'est pas une application directe mais un exercice.

La sortie du montage ci-contre, appelé multivibrateur astable à AO, est un signal rectangulaire. Expliquer pourquoi et calculer sa période en fonction de $\tau = RC$.



que

plus de chance de
tile d'acheter des, c'est le courant ».
A et communiquer
le faire tourner en
deux bornes ?ampli op ? Est-ce
e des alimentationshaute tension ? Plus
lectromagnétiques àir que les fichiers
eux que les fichiers
qualité ? (penser àde tension ou au
sait l'utiliser pour
Quel problème cela
poser des schémas
e.

ent présente-t-il de

able), un dispositif
ie. En électronique,
ur à hystérésis qui

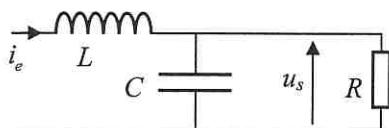
La sortie obtenue est alors intégrée pour commander l'entrée du dispositif jusqu'à provoquer une nouvelle relaxation.

Donner une analogie hydraulique d'un tel oscillateur à relaxation à base d'un récipient qui se remplit et d'un siphon ; décrire l'oscillation correspondante. De quoi dépend sa période ?

Exercices

44. Circuit linéaire à entrée de courant

Dans le circuit linéaire suivant, le courant d'entrée i_e fonction du temps t , est la grandeur d'entrée, et la tension u_s est la grandeur de sortie.



a) Établir une équation différentielle linéaire liant i_e et u_s .

b) Trouver deux solutions particulières en u_s de cette équation, correspondant aux deux cas dont on précisera le nom :

$$* i_e = I_{e0} \text{ continu}$$

$$* i_e = I_{e1} \sin \omega t$$

c) Quelle est la solution en u_s pour une entrée $i_e = I_{e0} + I_{e1} \sin \omega_1 t + I_{e2} \cos \omega_2 t$?

45. Temps de réponse d'un système linéaire du premier ou du deuxième ordre

Définir le temps de réponse à 5% d'un système linéaire. Que caractérise-t-il ?

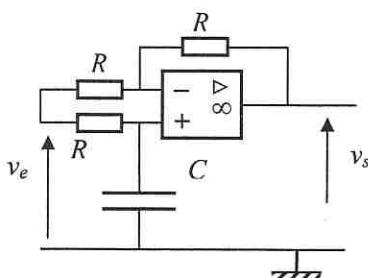
a) Combien vaut-il pour un système du premier ordre ?

b) Trouver sa variation en fonction de σ dans le cas d'un système du second ordre de

$$\text{fonction de transfert : } H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j2\sigma\tau\omega - \tau^2\omega^2}.$$

46. Circuit déphaseur

On considère le circuit suivant, commandé par un générateur sinusoïdal de tension à la pulsation ω où l'ampli op est supposé idéal. On donne $RC = 0,47\text{ ms}$.



a) Calculer la fonction de transfert, en déduire le gain G et le déphasage φ de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée.

b) Tracer les diagrammes de Bode en amplitude et en phase.

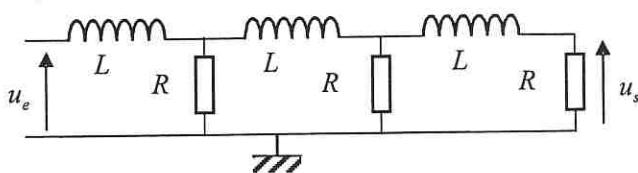
c) Quel peut être l'intérêt d'un tel dispositif ?

d) Déterminer la réponse indicielle du circuit.



47. Étude expérimentale d'un filtre passif

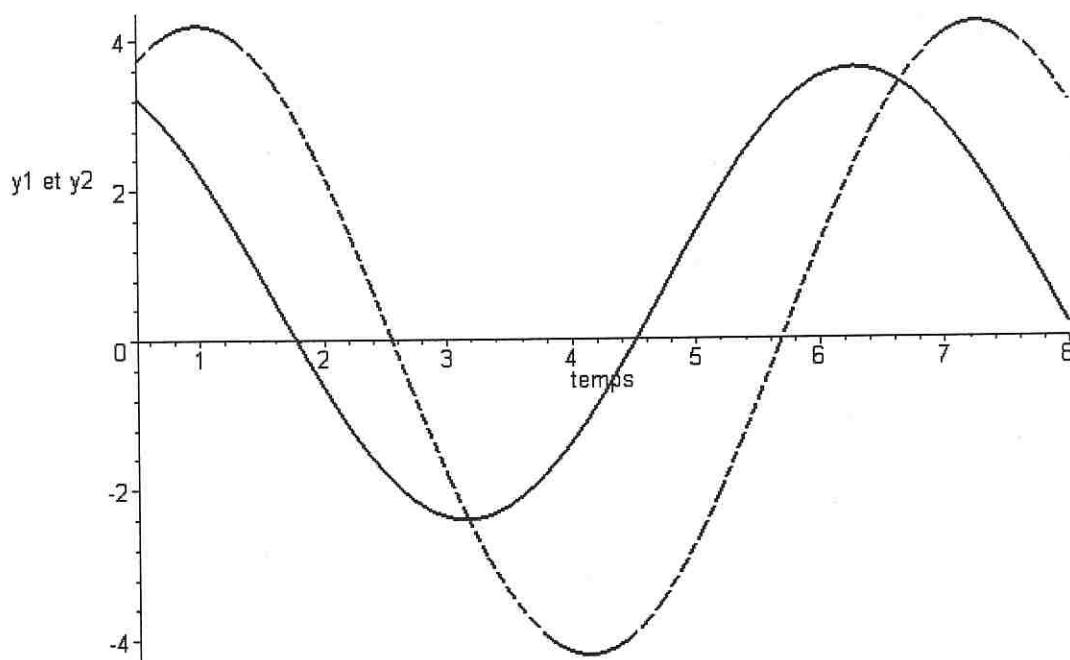
Le filtre passif ci-contre à 3 cellules $L-R$ fonctionne en sortie ouverte (courant de sortie nul). On note j le complexe tel que $j^2 = -1$, et ω la pulsation en régime sinusoïdal ; on pose $\omega_0 = R/L$, et $x = \omega/\omega_0$.

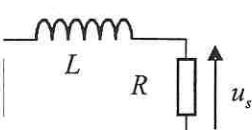


On visualise sur un oscilloscope analogique la tension d'entrée u_e délivrée par un GBF (de pulsation ω_e), et la tension de sortie u_s en fonction du temps. Un fréquencemètre mesure une fréquence de 652 Hz. On obtient le graphe de la figure ci-dessous. La tension d'entrée est sur la voie 1, représentée sur l'écran par un trait plein, et la tension de sortie est sur la voie 2, représentée sur l'écran par un trait pointillé. L'abscisse et l'ordonnée sont toutes deux graduées en carreaux de l'oscilloscope. On donne $\omega_0 = 20\ 500 \text{ rad.s}^{-1}$.

L'atténuateur de la voie 1 est sur la position 10 mV/carreau et celui de la voie 2 sur la position 5 mV/carreau.

- Représenter sur un schéma clair le circuit de branchement, en faisant figurer l'oscilloscope, le GBF, le fréquencemètre, la masse du montage.
- Mesurer sur le schéma le gain en décibels g et le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée φ à cette pulsation ω_e .

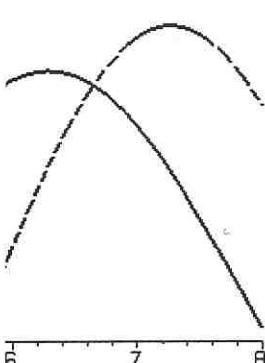




u_e délivrée par un
tion du temps. Un
graphe de la figure
l'écran par un trait
l'écran par un trait
es en carreaux de

ui de la voie 2 sur la

, en faisant figurer
la sortie par rapport



48. Étude théorique du filtre passif

On reprend l'étude du filtre de l'exercice précédent :

- Calculer la fonction de transfert du filtre ; donner le résultat sous la forme

$$H = \frac{H_0}{1 + ax + bx^2 + cx^3}$$
 en précisant les expressions de H_0 , a , b , et c (on rappelle $x = \omega / \omega_0$).
- α) Pour quelle valeur particulière de ω , notée ω_1 , la fonction de transfert est-elle réelle ? Que vaut le déphasage sortie/entrée φ à cette pulsation ω_1 ? Que vaut le gain g en décibels du filtre à cette même pulsation ?
- Trouver le gain g et le déphasage φ à la pulsation ω_0 .
- α) Faire une étude asymptotique de g et φ à basse fréquence.
β) Faire de même une étude asymptotique de g et φ à haute fréquence. Donner l'équation de l'asymptote de g .
γ) Trouver le point d'intersection des deux asymptotes précédentes de g .
- Tracer soigneusement les diagrammes de Bode du filtre. On y fera apparaître clairement les asymptotes et trois points particuliers. On utilisera la grandeur réduite x pour porter les graduations. Echelle demandée : 5 cm par décade de pulsation en abscisse, 1 cm pour 10 dB, et 5 cm pour π radians en ordonnée. Comment peut-on qualifier ce filtre ?

49. Filtre actif passe-bande

Le filtre ci-contre utilise un amplificateur opérationnel idéal en fonctionnement linéaire. Il est alimenté en régime sinusoïdal de pulsation ω .

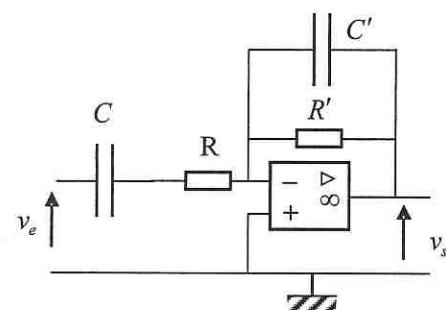
On donne $R = 10 \text{ k}\Omega$ $R' = 100 \text{ k}\Omega$
 $C = 50 \text{ nF}$ $C' = 10 \text{ nF}$.

- Déterminer la fonction de transfert de ce circuit et la mettre sous la forme :

$$H(j\omega) = \frac{a}{1 + j \left(\frac{\omega - \omega_2}{\omega_1} \right)}$$

Donner les expressions et les valeurs numériques de a , ω_1 et ω_2 .

- Montrer que pour une fréquence f_0 que l'on calculera, le gain G (module de la fonction de transfert) passe par un maximum G_0 à préciser. Quel est alors le déphasage entre les tensions v_s et v_e ?
- Tracer les diagrammes de Bode du filtre (asymptotique et réel pour le gain et la phase).
- Calculer la bande passante en fréquence de ce filtre.
- Définir et calculer littéralement et numériquement son facteur de qualité.



50. Filtre actif passe-bas

Un amplificateur opérationnel idéal fonctionne en régime linéaire sinusoïdal avec le montage représenté sur la figure.

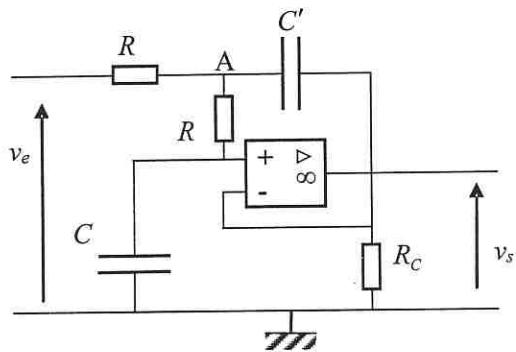
- a) Établir l'expression de la fonction de transfert H du filtre en fonction des paramètres R, C , et C' . Pourquoi H ne dépend-il pas de R_C ?

- b) Déterminer la relation entre les capacités C' et C pour que l'on puisse mettre le gain sous la forme :

$$G = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}}}$$

Donner alors l'expression de ω_0 .

- c) Sachant que $C = 0,1\mu\text{F}$ et $R = 1\text{k}\Omega$ calculer les valeurs numériques de C' et de la fréquence f_0 correspondant à la pulsation ω_0 .
- d) Avec la valeur de C' précédente, Donner les équations des asymptotes du gain en dB : g en fonction de $\log \omega$ (plan de Bode) aux basses et aux hautes fréquences. Tracer rapidement l'allure des diagrammes de Bode en amplitude et en phase.
- e) Indiquer le type de filtre que constitue le circuit et l'expression de la pulsation de coupure ω_c (à -3 dB).



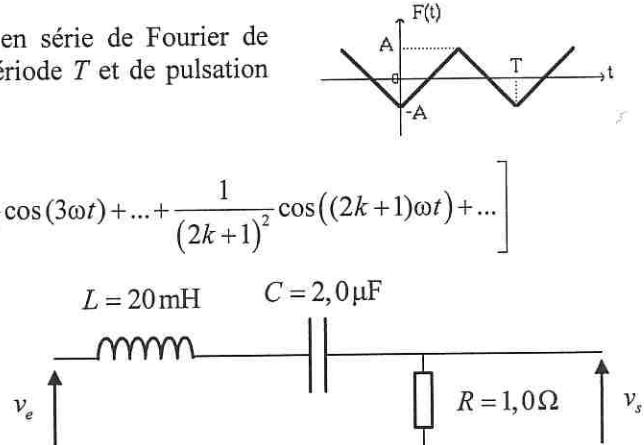
51. Tripleur de fréquence

On rappelle le développement en série de Fourier de cette fonction F du temps de période T et de pulsation

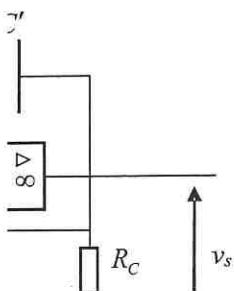
$$\omega = \frac{2\pi}{T} :$$

$$F(t) = -\frac{8A}{\pi^2} \left[\cos \omega t + \frac{1}{3^2} \cos(3\omega t) + \dots + \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\omega t) + \dots \right]$$

$F(t) = u_e(t)$ de période
 $T = 3,77\text{ ms}$ et d'amplitude
 $A = 10,0\text{ V}$ est injectée à
l'entrée du filtre RLC ci-
contre.



- a) Calculer la fonction de transfert $H(j\omega)$ du filtre. Quelle sont sa pulsation de résonance ω_0 et son facteur de qualité Q ? Comparer numériquement ω_0 à ω .
- b) Préciser $u_s(t)$ sous la forme d'une série de Fourier où l'amplitude complexe du terme de rang k sera donnée en fonction de A , du module et de l'argument de la fonction H .

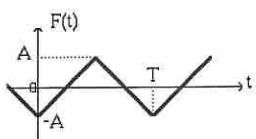


forme :

riques de C' et de la

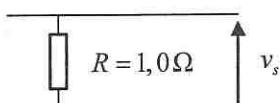
symptotes du gain en
hautes fréquences.

ide et en phase.
on de la pulsation de



$$+1)\omega t) + \dots]$$

F



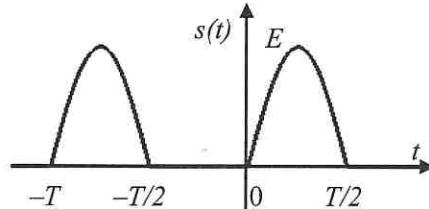
soit sa pulsation de
uement ω_0 à ω .

plitude complexe du
de l'argument de la

- c) Donner enfin $u_s(t)$ sous la forme d'une somme infinie de fonctions sinusoïdales à amplitude réelle dont on précisera pour le terme de rang k l'amplitude A_k et la phase à l'origine φ_k en fonction de R , L , C et A , puis en fonction de Q , ω_0 , et A .
d) AN : calculer A_k et φ_k pour les termes de pulsation ω , 3ω , et 5ω .
Quel est le terme prépondérant? Quelle approximation peut-on faire pour $u_s(t)$?
e) Représenter soigneusement sur le même schéma $u_e(t)$ et $u_s(t)$.
f) Quelle application peut-on imaginer à ce dispositif?

52. Filtrage d'un signal périodique

Le signal s (nommé tension redressée monoalternance) est une fonction périodique de période T du temps et de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$.



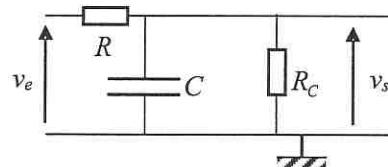
$$s(t) = 0 \text{ pour } t \in \left[-\frac{T}{2}, 0 \right] \text{ et } s(t) = E \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \text{ pour } t \in \left[0, \frac{T}{2} \right]$$

a) Donner les expressions et valeurs numériques de la période T et de la pulsation ω de s .

b) Développer s en série de Fourier en termes réels.

c) On considère le filtre ci-contre avec $C = 10000 \mu\text{F}$, $R = 10 \Omega$, $R_C = 10 \Omega$.

Trouver sa fonction de transfert, son gain statique G_0 , et sa pulsation de coupure ω_c .



d) On injecte la tension $s = v_e$ à l'entrée du filtre précédent. Décrire précisément le spectre de la tension de sortie v_s .

e) On appelle taux d'ondulation τ de v_s le rapport de l'amplitude de la partie variable de v_s à sa valeur moyenne.

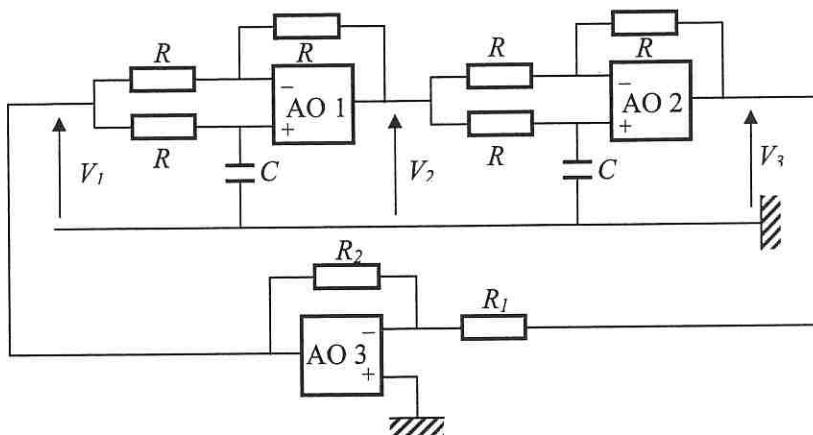
Calculer τ en justifiant que la partie variable peut en première approximation être assimilée au premier harmonique non nul. Faire l'application numérique. Représenter l'allure de v_s .

Quelle application peut-on imaginer à cela sachant que l'on peut facilement obtenir un signal de la forme de s à partir d'une tension alternative ? (grâce à une diode de redressement)

53. Oscillateur quasi sinusoïdal à déphaseur – PT / PT* seulement – (*) en MP / MP*

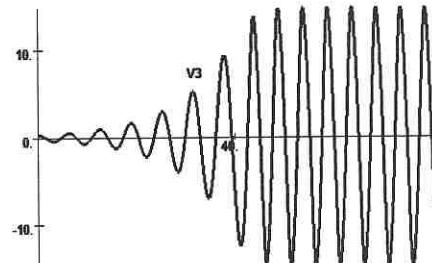
On considère le circuit ci-dessous et on pose : $A = -\frac{R_2}{R_1}$, $\tau = RC$ et $H = \frac{1-j\tau\omega}{1+j\tau\omega}$.

- a) On suppose que tous les AO sont parfaits et fonctionnent en régime linéaire. Quelle doit être la valeur A_0 de A pour que le système soit un oscillateur sinusoïdal ? Quelle est la pulsation d'oscillation ?
b) Expliquer pourquoi le choix $A = A_0$ n'est pas pertinent.
c) Établir l'équation différentielle en $V_3(t)$ seulement.



- d) Vérifier que l'on retrouve le a) pour $A = A_0$? Pour obtenir un oscillateur, faut-il choisir $A > A_0$ ou $A < A_0$?
- e) Donner la forme de la solution dans le cas $A = A_0 - \varepsilon$ avec $0 < \varepsilon \ll 1$.
- f) Montrer qu'il y a nécessairement apparition de la saturation des AO. On suppose par exemple que l'AO3 est saturé. Va-t-il le rester?
- g) Commenter la courbe donnant $V_3(t)$ en fonction du temps réduit t/τ .

Remarque : Cette courbe a été tracée pour $A = -1,2$, en supposant que seul l'AO3 sature et que les deux autres fonctionnent toujours en régime linéaire, ce qui est le cas si la tension d'alimentation de l'AO3 est inférieure à celle des deux autres.



Travaux Pratiques

54. Expliquer quel est l'intérêt de la touche « dB » présente sur la plupart des voltmètres de qualité.
55. Pourquoi la plupart des montages électroniques utilisent-ils des résistances variant entre $1\text{ k}\Omega$ et quelques centaines de $\text{k}\Omega$?
56. Y a-t-il une différence entre potentiomètre et résistance variable?
Comment peut-on simplement, grâce à un potentiomètre, obtenir une fraction réglable d'une tension ? À quelle condition le résultat est-il assuré ?
57. Un filtre est alimenté par un GBF délivrant une tension constante à l'entrée en régime sinusoïdal. Quelle est la méthode à employer pour mesurer la fréquence de coupure à 3 dB ?

Solution 1

Réponses aux questions

COMPLÉMENTS D'ÉLECTROCINÉTIQUE ET D'ÉLECTRONIQUE

Le cours d'abord

Systèmes linéaires et filtres

1. On considère un système qui associe à une grandeur d'entrée $e(t)$ une grandeur de sortie $s(t)$.
À l'entrée $e_1(t)$ est associée la sortie $s_1(t)$ et à l'entrée $e_2(t)$ est associée la sortie $s_2(t)$. Si à l'entrée $\alpha e_1(t) + \beta e_2(t)$ est associée la sortie $\alpha s_1(t) + \beta s_2(t)$, alors le système est linéaire.
2. Un système est linéaire si et seulement si sa réponse à toute entrée sinusoïdale du temps à la pulsation ω est une sortie sinusoïdale du temps à la même pulsation ω .
3. Le système étant linéaire, à l'entrée sinusoïdale $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$ (où $E_m > 0$ est l'amplitude de l'entrée) de représentation complexe $\underline{e}(t) = E_m e^{j\varphi_e} e^{j\omega t}$ correspond une sortie sinusoïdale de même pulsation $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$ (où $S_m \geq 0$ est l'amplitude de la sortie) de représentation complexe $\underline{s}(t) = S_m e^{j\varphi_s} e^{j\omega t}$.

La fonction de transfert complexe est définie par : $\underline{H} = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}$.

Il s'agit d'une fonction de $j\omega$ dont le module est égal au rapport des amplitudes : $\frac{S_m}{E_m}$ et l'argument : $\varphi = \varphi_s - \varphi_e$ est égal à l'avance de phase de la sortie sur l'entrée.

On peut montrer que les systèmes sont linéaires si et seulement si, ils sont décrits par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du type :

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k \underline{s}(t)}{dt^k} = \sum_{\ell=0}^m b_\ell \frac{d^\ell \underline{e}(t)}{dt^\ell}.$$

Dans ce cas la fonction de transfert complexe s'écrit :

pour
 $\sum_k a_k (j\omega)^k \underline{g}(t) = \sum_{\ell=0}^m b_\ell (j\omega)^\ell \underline{e}(t)$
 $\underline{g} = H = \dots$

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{\ell=0}^m b_\ell (j\omega)^\ell}{\sum_{k=0}^n a_k (j\omega)^k}$$

car dériver une fonction sinusoïdale en représentation complexe revient à la multiplier par $j\omega$.

L'ordre du système est ainsi le plus grand des deux entiers ℓ et k , ou encore l'exposant le plus élevé de ω dans la fonction de transfert.

Exemple : un passe-bas du premier ordre obéit à la fonction de transfert :

ordre 0 ordre 1
 $H(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{H_0}{1 + j\omega\tau} \Leftrightarrow \underline{s}(t)(1 + j\omega\tau) = H_0 \underline{e}(t)$, ce qui se traduit par l'équation

différentielle : $\underline{s}(t) + \tau \frac{d\underline{s}(t)}{dt} = H_0 \underline{e}(t)$.

↓
 = filtre d'ordre 1

On peut aussi réaliser l'opération inverse et déduire l'équation différentielle de la fonction de transfert, en remplaçant chaque terme en $j\omega$ par une dérivée $\frac{d}{dt}$.

Rq : Aucun système physique ne peut avoir une réponse qui croît infiniment avec la pulsation ω , l'ordre n du dénominateur est donc forcément supérieur à celui du numérateur en pratique. C'est donc n qui est l'ordre du système.

4. En électronique, on classe les systèmes suivant leur fonction principale : amplificateur de tension, amplificateur de puissance, ligne à retard, déphasageur, filtre,...

Un filtre linéaire est un système linéaire qui agit différemment sur l'amplitude de la sortie suivant la pulsation ω de la sinusoïde qu'il traite. Pour une même amplitude d'entrée, certaines zones de pulsations conduisent donc à des amplitudes élevées, d'autres à des amplitudes faibles.

Un filtre passif est constitué de composants passifs (résistance, bobine, condensateur s'il est linéaire), c'est-à-dire non alimenté par un générateur continu lui fournissant de la puissance. Un filtre actif, au contraire, est alimenté (alimentation d'un ampli op en -15 V et +15 V par exemple).

5. En basse fréquence (on s'approche du continu correspondant à une fréquence nulle), on remplace les bobines (impédance $j\omega L$ tendant vers zéro) par un fil de court

circuit, et les condensateurs (impédance $\frac{1}{jC\omega}$ tendant vers l'infini) par un circuit ouvert. En haute fréquence, c'est le contraire. On obtient ainsi des circuits beaucoup plus simples dont on peut facilement calculer la fonction de transfert ou décrire le comportement.

6. Un filtre passe-bande doit impérativement couper les basses fréquences (donc aussi le continu) et les hautes fréquences. Sa fonction de transfert doit donc tendre vers zéro si la fréquence tend vers zéro ou vers l'infini.

pour passe bas
 $\omega \rightarrow 0$
 $\therefore H \rightarrow H_0$
 $\omega \rightarrow \infty$
 $\therefore H \rightarrow 0$
 = coupure

car si $f_{réq}=0 \Rightarrow$ pas de NM
 = continu continu

Cette condition n'est pas suffisante, car la fonction d'un filtre peut être plus compliquée qu'un simple passe-bande (passe-bande sur une plage et coupe-bande sur une autre par exemple).

Rq : Pour être passe-bande, un filtre linéaire doit au moins être d'ordre deux.

revient à la multiplier
par ℓ et k , ou encore
action de transfert :
traduit par l'équation

n différentielle de la
dérivée $\frac{d}{dt}$.
oît infiniment avec la
supérieur à celui du

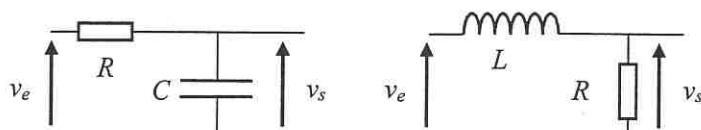
icipale : amplificateur
filtre,...
sur l'amplitude de la
une même amplitude
amplitudes élevées,

bobine, condensateur
tin lui fournissant de
on d'un ampli op en -

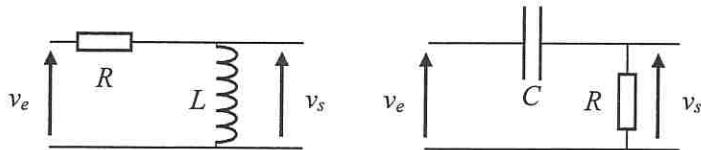
une fréquence nulle),
) par un fil de court
'infini) par un circuit
des circuits beaucoup
transfert ou décrire le

quences (donc aussi le
on tendre vers zéro si

7. Filtre passe-bas :



Filtre passe-haut :



8. Un diagramme de Bode est constitué de *deux* courbes, représentant en fonction du logarithme décimal de la pulsation (ou de la fréquence) :

- le gain en décibel défini par $G(\omega) = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log\left(\frac{S_m}{E_m}\right)$,
- l'argument $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega)) = \varphi_s - \varphi_e$.

L'emploi des coordonnées logarithmiques permet de décrire le comportement du système sur de grands intervalles de fréquence et ces diagrammes sont faciles à tracer à partir des diagrammes dits « asymptotiques » (voir livre de première année).

9. Le dénominateur de la fonction de transfert d'un filtre d'ordre 2 peut s'écrire sous la forme : $1 + 2\sigma j\omega\tau + (j\omega\tau)^2$ ou $1 + 2\sigma j\omega\tau - \omega^2\tau^2$ avec $\sigma > 0$ et $\tau > 0$. On peut lui associer différents numérateurs pour obtenir :

- un filtre passe-bas : $H_{PBas} = H_0 \frac{1}{1 + 2\sigma j\omega\tau - \omega^2\tau^2}$,
- un filtre passe-bande : $H_{PBand} = H_0 \frac{j\omega\tau}{1 + 2\sigma j\omega\tau - \omega^2\tau^2}$,
 $\xrightarrow{-\omega^2\tau^2} (j\omega\tau)^2$
- un filtre passe-haut : $H_{PHaut} = H_0 \frac{1}{1 + 2\sigma j\omega\tau - \omega^2\tau^2}$,
 $\xrightarrow{1-\omega^2\tau^2} 1 + (j\omega\tau)^2$ (link PBas + PHaut)
- un filtre coupe-bande : $H_{CBand} = H_0 \frac{1 - \omega^2\tau^2}{1 + 2\sigma j\omega\tau - \omega^2\tau^2}$,
 $\xrightarrow{1-\omega^2\tau^2} 1 + (j\omega\tau)^2$
- un filtre déphaseur : $H_{Dephas} = H_0 \frac{1 - 2\sigma j\omega\tau - \omega^2\tau^2}{1 + 2\sigma j\omega\tau - \omega^2\tau^2}$.

10. Un intégrateur parfait doit réaliser la fonction suivante : $s(t) = \int_0^t e(t) dt$ où τ , constante de temps de l'intégrateur doit être présent pour des raisons d'homogénéité.

$$\text{car } \frac{e(t)}{\tau} = \frac{\partial s}{\partial t}$$

En complexe, cette relation s'écrit : $j\omega\tau s(t) = e(t) \Leftrightarrow H(j\omega) = \frac{s(t)}{e(t)} = \frac{1}{j\omega\tau}$. Les

diagrammes de Bode correspondants (qui caractérisent cette fonction d'intégrateur) sont :

$$\begin{aligned} &= \alpha - 20 \log \omega \\ &\approx \omega = 10 \\ &\text{ct est } -20 \text{ dB} \end{aligned}$$

- Pour l'amplitude, une droite de pente -20 dB/décade

$$|H| = \frac{1}{\omega\tau} = G = 20 \log \frac{1}{\omega\tau}$$

$$H = -j \frac{1}{\omega\tau} \text{ et } \angle H = -90^\circ$$

Un filtre possède un caractère intégrateur si, dans le domaine de fréquence où se situent tous les harmoniques importants du signal d'entrée, les diagrammes de Bode ont une courbe de gain de pente -20 dB/décade et une courbe de phase C^{te} à $-\frac{\pi}{2}$.

donc amplitude de 20 dB tous les 10 w et phase sortie est de phase de 90° (en retard car < 0) par rapport à l'entrée

$$s = \tau \frac{de}{dt}$$

$$s = j\omega\tau e$$

$$= 20 \log(\omega\tau)$$

$$\text{et } +90^\circ \\ \therefore \text{sortie en avance}$$

De même, un filtre possède un caractère dérivateur si, dans le domaine de fréquence où se situent tous les harmoniques importants du signal d'entrée, les diagrammes de

Bode ont une courbe de gain de pente 20 dB/décade et une courbe de phase C^{te} à $\frac{\pi}{2}$.

11. La réponse indicelle est la réponse $s(t)$ d'un système initialement au repos (la sortie et toutes ses dérivées sont nulles pour $t < 0$) à une entrée en forme d'échelon c'est-à-

dire telle que :

$$\begin{cases} e(t) = 0 & \text{si } t \leq 0 \\ e(t) = E = \text{cte} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Pour trouver son expression, il faut trouver, puis résoudre l'équation différentielle (unique) du système linéaire à laquelle obéissent les grandeurs d'entrée et de sortie.

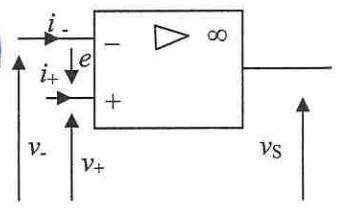
Des conditions initiales sont requises pour exprimer la solution complète. Il en faut une pour une équation du premier ordre, deux pour une équation du deuxième ordre. Elles s'obtiennent par des arguments physiques sur le montage, par exemple, la continuité du courant traversant une bobine et la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur (voir livre de première année et exemples dans les questions 25. et 46.).

12. L'ampli op est stable lorsqu'il est bouclé sur l'entrée inverseuse ; il fonctionne en régime saturé lorsqu'il est bouclé sur l'entrée non inverseuse ou lorsqu'il n'est pas bouclé. En cas de bouclage mixte, à la fois sur l'entrée inverseuse et sur l'entrée non inverseuse, tout est *a priori* possible et seule une étude plus détaillée de la stabilité peut permettre de conclure.

13. Un amplificateur opérationnel parfait est un amplificateur de tension de coefficient d'amplification μ infini. Il est représenté par le symbole ci-contre.

Si la tension de sortie v_s appartient à l'intervalle $[-V_{sat}, V_{sat}]$, l'amplificateur fonctionne en régime linéaire et on a : $v_s = \mu(v_+ - v_-) = \mu e$ (c'est un amplificateur de différence ou amplificateur différentiel).

$$\begin{aligned} v_- &= v_+ - e \\ \therefore e &= v_+ - v_- \end{aligned}$$



Le coefficient μ étant infini, il vient : $e = 0 \Rightarrow v_+ = v_-$ en régime linéaire.

$$\mu = \frac{v_s}{e} \rightarrow \infty \Rightarrow e \rightarrow 0$$

$\omega) = \frac{s(t)}{e(t)} = \frac{1}{j\omega\tau}$. Les fonctions d'intégrateur)

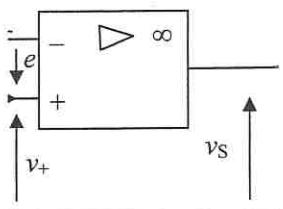
de fréquence où se diagrammes de Bode à phase C^{te} à $-\frac{\pi}{2}$.

domaine de fréquence ée, les diagrammes de rbe de phase C^{te} à $\frac{\pi}{2}$.

ient au repos (la sortie tme d'échelon c'est-à-

équation différentielle l'entrée et de sortie. n complète. Il en faut on du deuxième ordre. tage, par exemple, la la tension aux bornes ns les questions 25. et

use ; il fonctionne en ou lorsqu'il n'est pas use et sur l'entrée non tétaillée de la stabilité



é linéaire.

À l'inverse, si e est non nul l'AO est saturé et

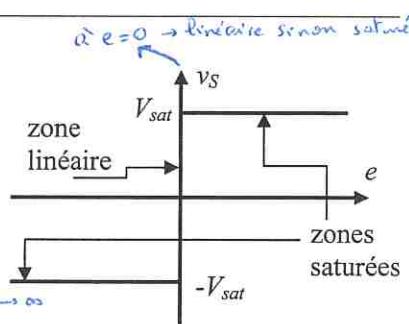
$$\begin{cases} \text{si } e > 0 & v_S = +V_{sat} \\ \text{si } e < 0 & v_S = -V_{sat} \end{cases}$$

La caractéristique est résumée sur le schéma :

La résistance d'entrée est supposée infinie ce qui conduit à $i_+ = i_- = 0$.

$$V_+ = R_{in} i_+ \Rightarrow R_{in} = \frac{V_+}{i_+} \rightarrow \infty$$

Rq : En réalité, l'amplification n'est pas infinie, mais très grande, de l'ordre de 10^5 à basse fréquence et, surtout, varie avec la fréquence.



Pour un ampli op nul, il n'y a pas de boucle de rétroaction et le fonctionnement se fait en régime saturé. La sortie dépend uniquement du signe de e . L'ampli op est donc un comparateur simple, il compare à chaque instant les tensions v^+ et v^- et donne $\pm V_{sat}$ suivant le résultat de la comparaison.

14. Voir la question 15.

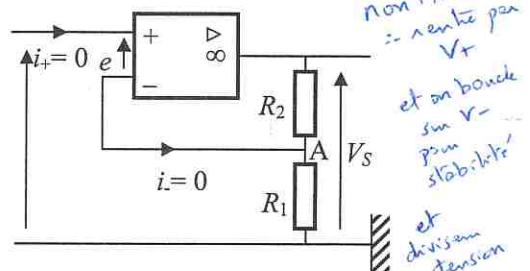
15. Le schéma du montage non inverseur est représenté ci-contre.

En supposant que le montage fonctionne en régime linéaire, on a $e = 0$ soit $V_E = V_A$.

L'application du théorème de Millman au point A conduit à :

$$V_E = V_A = \frac{V_S / R_2 + 0 / R_1 + i_-}{1/R_2 + 1/R_1} = V_S \frac{R_1}{R_1 + R_2} \text{ soit } H_\infty = \frac{V_S}{V_E} = \frac{R_2 + R_1}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Le rapport des tensions est positif, d'où le nom du montage.



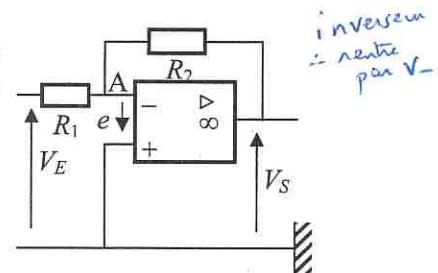
Le schéma du montage inverseur :

En supposant que le montage fonctionne en régime linéaire, on a $e = 0$ soit $V_A = 0$. L'application du théorème de Millman au point A conduit à :

$$V_A = 0 = \frac{V_S / R_2 + V_E / R_1}{1/R_2 + 1/R_1} \Rightarrow \frac{V_S}{V_E} = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$H_\infty = \frac{V_S}{V_E} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Le rapport des tensions est négatif, d'où le nom du montage.



16. Le montage proposé est un montage inverseur où un condensateur d'impédance

$$Z = \frac{1}{jC\omega} \text{ remplace } R_2. \text{ On obtient donc: } \frac{V_S}{V_E} = -\frac{Z}{R} = -\frac{1}{jRC\omega}. \text{ L'intégration étant}$$

une multiplication par $\frac{1}{j\omega}$, ce montage est un intégrateur inverseur.

les AO n'ont
pas de offset
qui est partiellement
généré par la tension de saturation
entre VT et V₋
et en l'absence de résistance de feedback (R_C)
cette tension est intégrée par C
ce qui amène VS
vers +V_{SAT}

En pratique, ce montage ne fonctionne pas, en raison de la présence de la tension de décalage et d'un courant i^- non rigoureusement nul qui amènent l'ampli op à saturation par charge du condensateur.

On utilise donc un montage modifié qui comporte une grande résistance R_C en parallèle sur le condensateur, afin de lui permettre de « laisser passer le continu ».

En régime linéaire, on a :

$$\frac{V_S}{V_E} = -\frac{Z}{R} = -\frac{1}{RY} = -\frac{1}{R\left(\frac{1}{R_C} + jC\omega\right)} = -\frac{R_C}{R} \frac{1}{1 + jR_C C \omega}$$

Pour $\omega \gg \frac{1}{R_C C}$ on peut écrire : $\frac{V_S}{V_E} \approx -\frac{R_C}{R} \frac{1}{jR_C C \omega} = -\frac{1}{jRC\omega}$ et on retrouve le caractère intégrateur du montage.

Rq : On a en fait affaire à un passe-bas d'ordre 1 qui possède un caractère intégrateur hors de sa bande passante.

17. On peut obtenir la tension de sortie à l'aide du théorème de Millman

$$-\text{à l'entrée inverseuse : } V^- = \frac{\frac{V_{E1}}{R_1} + \frac{V_S}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2 V_{E1} + R_1 V_S}{R_1 + R_2}$$

$$-\text{à l'entrée non inverseuse : } V^+ = \frac{\frac{V_{E2}}{R_3} + \frac{V_S}{R_4}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{R_4 V_{E2}}{R_3 + R_4}$$

$$\text{En régime linéaire, } V^+ = V^- \text{ on a alors : } V_S = \left(\frac{R_2 + R_1}{R_1} \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) V_{E2} - \left(\frac{R_2}{R_1} \right) V_{E1}$$

$$\text{En imposant aux résistances la relation } R_1 R_4 = R_2 R_3, \text{ on a : } V_S = \frac{R_2}{R_1} (V_{E2} - V_{E1}).$$

$$18. \text{ Par définition : } \langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \text{ avec } T = t_1 - t_0.$$

19. Pour une fonction f périodique et assez régulière, le théorème de Fourier s'écrit :

$$f(t) = \langle f(t) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$\frac{a_0}{2} \rightarrow \cos(0) = 1$$

Avec (t_0 étant quelconque) :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

$$\text{en complexe : } f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} \quad \text{tq } c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

TF (contrairement à seizer,
s'applique à tout f(t)
pas que périodique)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow (\text{inverse}) \quad \text{avec } F(\omega) \text{ est spectre de Fourier}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

sence de la tension de nénent l'ampli op à ide résistance R_C en isser le continu ».

$$\frac{1}{jR_c C \omega}$$

— et on retrouve le ω

1 caractère intégrateur

man

$$\left. \right) V_{E2} - \left(\frac{R_2}{R_1} \right) V_{E1} \\ = \frac{R_2}{R_1} (V_{E2} - V_{E1}).$$

: Fourier s'écrit :

$$[\omega t]$$

$$s(n\omega t) dt$$

$$(n\omega t) dt$$

Rq : On peut poser avec cette notation : $a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt = 2 \langle f(t) \rangle$ et donc écrire dans le développement de Fourier $\frac{a_0}{2}$ au lieu de $\langle f(t) \rangle$.

20. En choisissant $t_0 = -\frac{T}{2}$, on voit que pour une fonction f paire, tous les b_n sont nuls.

Une fonction paire n'a pas de termes en sinus dans son développement

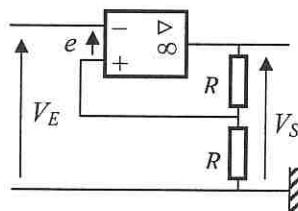
$$\text{On peut alors simplifier : } a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

De même :

Une fonction impaire n'a pas de termes en cosinus dans son développement

$$\text{On peut aussi simplifier : } b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

21. Si on inverse les bornes + et - de l'ampli op utilisé dans un montage non inverseur, le bouclage se fait sur l'entrée non inverseuse. Le montage est donc instable (voir la question 12.) : sa sortie se sature rapidement et ne peut prendre que les valeurs $-V_{sat}$ ou $+V_{sat}$.

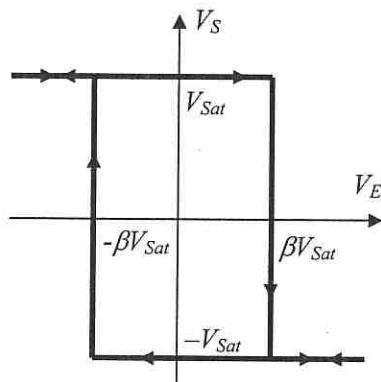


$$\text{On pose : } \beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Si $V_S = -V_{sat}$ alors $V^+ = -\beta V_{sat}$ et V_S garde sa valeur tant que $e = V^+ - V_E$ reste négatif soit tant que $V_E > -\beta V_{sat}$.

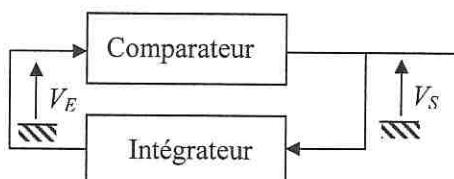
Si $V_S = +V_{sat}$ alors $V^+ = +\beta V_{sat}$ et V_S garde sa valeur tant que $e = V^+ - V_E$ reste positif soit tant que $V_E < +\beta V_{sat}$.

On en déduit la caractéristique entrée-sortie :



22. L'association du comparateur à hystérésis précédent et d'un intégrateur selon le schéma ci-dessous, fournit un "astable", qui ne possède aucun état d'équilibre stable.

En effet : si $V_S = +V_{sat}$, l'intégrateur intègre une tension positive et sa sortie V_E croît et finit par dépasser βV_{sat} : on a alors $V_S = -V_{sat}$ et la sortie V_E de l'intégrateur décroît pour devenir inférieure à $-\beta V_{sat}$ ce qui implique $V_S = +V_{sat}$...



La tension de sortie d'un tel montage passe donc périodiquement de $-V_{sat}$ à $+V_{sat}$ et vice-versa.

23. Un oscillateur sinusoïdal de sortie s obéit à l'équation différentielle : $\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0$

Avec un terme d'amortissement : $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{ds}{dt} + \omega^2 s = 0$

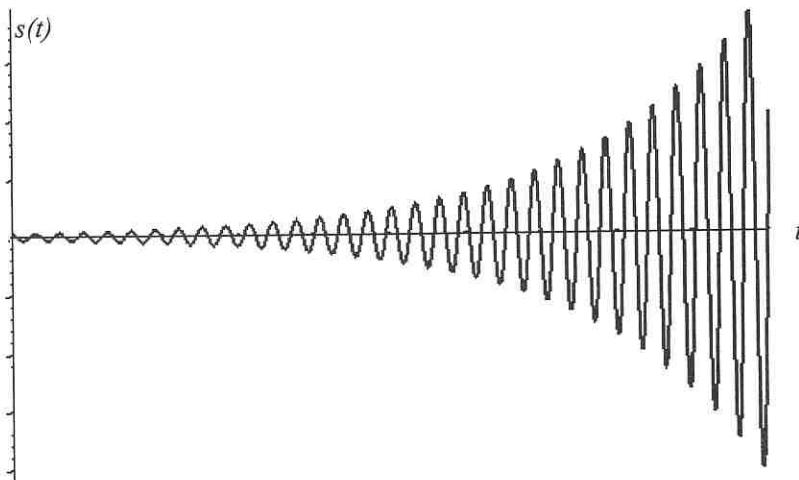
Rq : Cette notation en $\frac{2}{\tau}$ (ou 2σ) n'est pas obligatoire, mais ainsi utilisé, τ est la constante de temps d'amortissement du système (voir à ce sujet le livre de première année, tant en électronique qu'en mécanique).

Dans le cas d'une amplification (amortissement « négatif ») $\tau < 0$.

La solution amplifiée s'écrit sous la forme : $s(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cos(\omega t - \varphi)$ où A et φ sont des constantes dépendant des conditions initiales et ω la pseudo-pulsation :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$$

voisine de ω_0 pour une faible amplification.

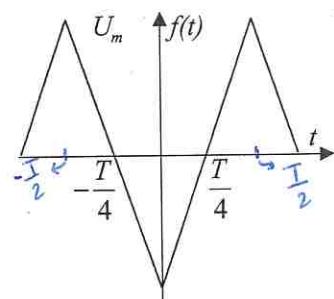


La sortie, bien sûr, ne croît pas jusqu'à l'infini. Elle atteindra une limite lorsque le composant actif qui assure l'amplification (ampli op par exemple) arrivera à saturation.

Applications directes du cours

24. Pour une tension sinusoïdale, $U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$

La définition de la valeur efficace est $U_{eff} = \sqrt{\langle u^2(t) \rangle}$ dans le cas général, où $u(t)$ représente la valeur instantanée (c'est-à-dire à l'instant t par opposition à la



elle : $\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0$

ainsi utilisé, τ est la et le livre de première 0.

$\text{os}(\omega t - \varphi)$ où A et φ pseudo-pulsation :

moyenne) et $\langle u^2(t) \rangle$ la valeur moyenne du carré de cette tension.

Pour le triangle, on calcule la moyenne sur une période :

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt}, f^2 \text{ étant paire, l'intégrale se simplifie en :}$$

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt}$$

Entre 0 et $\frac{T}{2}$ on a facilement l'expression de f qui a une pente de $\frac{2U_m}{T/2} = 4 \frac{U_m}{T}$ et qui

s'annule en $t = \frac{T}{4}$: $f(t) = 4 \frac{U_m}{T} \left(t - \frac{T}{4} \right)$ on en déduit l'intégrale cherchée :

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} 16 \frac{U_m^2}{T^2} \left(t - \frac{T}{4} \right)^2 dt} = \sqrt{\frac{2}{T} 16 \frac{U_m^2}{T^2} \frac{T^3}{96}} = \frac{U_m}{\sqrt{3}}$$

$(\frac{T}{2}, U_m), (0, -U_m)$

$(\frac{T}{4}, 0), (0, -U_m)$

On obtient bien une valeur différente du cas sinusoïdal (elle est plus faible dans le cas du triangle où la tension est « plus proche du zéro » pour la même amplitude).

Si on ajoute un « offset » U_0 , on utilise $f(t) = 4 \frac{U_m}{T} \left(t - \frac{T}{4} \right) + U_0$ et l'intégration

donne: $U_{\text{eff}}^2 = \frac{U_m^2}{3} + U_0^2$. On peut facilement interpréter ceci dans le cas de la tension

aux bornes d'une résistance R où la puissance moyenne consommée vaut $\frac{U_{\text{eff}}^2}{R} = \frac{U_m^2}{3R} + \frac{U_0^2}{R}$ qui est la somme des puissances consommées avec une tension triangulaire à moyenne nulle et avec une tension U_0 continue.

Il y a donc indépendance énergétique entre les deux composantes du signal.

25. En basse fréquence, la bobine se comporte comme un fil et la tension de sortie à ses bornes est nulle. En haute fréquence, elle se comporte comme un coupe-circuit, donc le courant dans la résistance est nul, la chute de tension à ses bornes également, $u_s = u_e$ et la fonction de transfert tend vers 1. $H = \frac{U_s}{U_e} = 1$

Il s'agit donc d'un filtre passe-haut du premier ordre (voir aussi la question 7.)

Par la formule du diviseur de tension : $H(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}$, soit sous forme

$$\text{canonique : } H(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \text{ où } \tau = \frac{L}{R} \text{ constante de temps}$$

$$\begin{aligned} U_e &= U_R + U_L \\ &= (R + j\omega L)i \\ i &= \frac{U_e}{R + j\omega L} \\ i &= \frac{U_s}{j\omega L} \end{aligned}$$

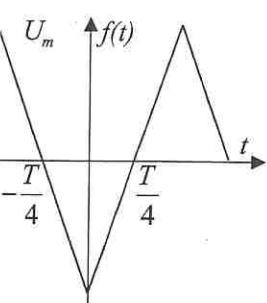
On établit l'équation différentielle à laquelle obéit u_s en régime sinusoïdal : dans ce cas, $j\omega$ peut être remplacé par $\frac{d}{dt}$ et l'équation $u_s(R + jL\omega) = jL\omega u_e$ donne :

$$Ru_s + L \frac{du_s}{dt} = L \frac{du_e}{dt} \Leftrightarrow \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{\tau} u_s = \frac{du_e}{dt}$$

Filtre 1^{er} ordre

$$\text{Car } \frac{d}{dt} e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t}$$

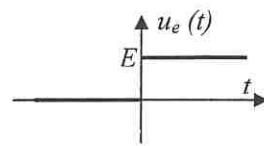
$$T = \frac{1}{RC}$$



L'équation différentielle obtenue est unique pour un circuit linéaire. C'est donc l'équation cherchée, et elle est valable pour toute entrée, même non sinusoïdale.

On peut aussi le justifier en disant qu'une entrée fonction quelconque du temps peut être décomposée au sens de Fourier en une somme de fonctions sinusoïdales ; chaque fonction sinusoïdale vérifiant l'équation différentielle, la superposition la vérifie aussi par linéarité.

$$\frac{du_s}{dt} + \frac{1}{\tau} u_s = \frac{du_e}{dt}$$



$$(EH): \\ u_s = -\frac{1}{\tau} u_s$$

$$\frac{du_s}{u_s} = -\frac{dt}{\tau}$$

$$u_s = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$(SPL, point) \\ u_e = E = u_s$$

$$\therefore u_s = u_e = E$$

$$\therefore \frac{B}{\tau} = 0$$

$$\therefore B = 0$$

$$\therefore \text{finale}$$

$$\text{car } R \ll L$$

$$\text{soit à } t=0$$

$$\therefore V = 0$$

$$\therefore \text{cette vido}$$

Soit un échelon de tension d'amplitude E :

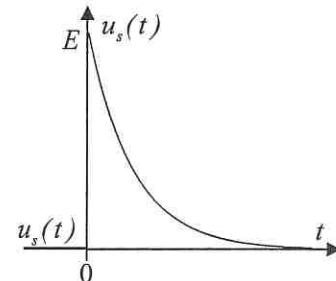
La solution particulière en régime permanent établi ($u_s = \text{Cte}$ au bout d'un temps très long) est : $u_s = 0$.

La solution générale de l'équation sans second membre (régime transitoire libre) est :

$$u_s = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \text{ La solution générale est donc : } u_s = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + 0 = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Pour trouver la constante A , il faut exprimer une condition initiale. Elle s'obtient en traduisant le fait que le courant dans la bobine est continu à l'instant initial : $i(t=0^+) = 0$. Donc, la tension Ri aux bornes de R est continue et nulle à $t=0^+$, et $u_s = u_e = E$ à $t=0^+$. Cette condition initiale donne $A = E$ et la solution discontinue :

$$u_s(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \text{ et } u_s(t) = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ pour } t > 0$$



26. Pour qu'un filtre puisse fonctionner en intégrateur ou en déivateur, il doit avoir sur une entrée sinusoïdale le même effet qu'un intégrateur ou un déivateur idéal :

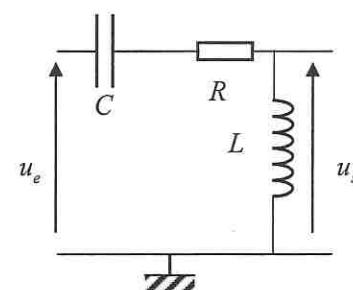
Pour l'intégrateur, il faut une pente de -20 dB/décade dans le diagramme de Bode en amplitude ce qui ne se produit pas dans le cas du filtre passe haut : impossible.

Pour le déivateur, il faut une pente de $+20 \text{ dB/décade}$ dans le diagramme de Bode en amplitude ce qui se produit dans le domaine asymptotique des basses fréquences, soit

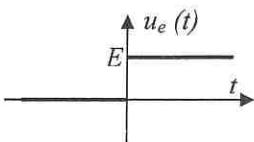
pour des pulsations vérifiant : $\omega \ll \frac{1}{\tau}$. Il faut aussi un déphasage $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée, ce qui est bien le cas dans le domaine de pulsation évoqué. En conclusion :

$$\boxed{\text{Montage déivateur si } \omega \ll \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L}}$$

Dans le cas du filtre RCL représenté sur le schéma, on a un passe-haut du deuxième ordre, ce qui correspond à une pente asymptotique basse fréquence de 40 dB/décade et à une pente asymptotique haute fréquence nulle. Le montage ne se comporte jamais en intégrateur ou en déivateur.



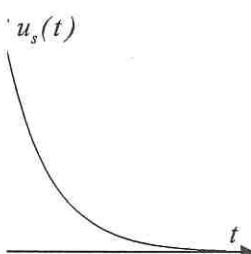
: linéaire. C'est donc non sinusoïdale. conque du temps peut sinusoïdales ; chaque position la vérifie aussi



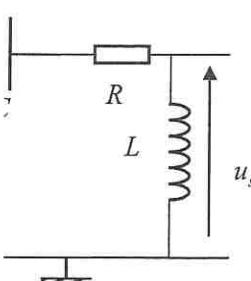
transitoire libre) est :

$$\rightarrow +0 = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

tiale. Elle s'obtient en



ateur, il doit avoir sur ivateur idéal : iagramme de Bode en t : impossible. iagramme de Bode en basses fréquences, soit usage $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ de la t bien le cas dans le



27. La sortie tend vers une valeur constante en continu. À moins d'un décalage en sortie (défaut non envisagé ici), on en déduit que le système laisse passer le continu. En clair, l'échelon de tension à l'entrée a une composante continue que l'on retrouve (éventuellement amplifiée et / ou inversée) en sortie. Le filtre est donc un passe-bas.

Comme il est d'ordre 2 sa fonction de transfert peut s'écrire : $H = \frac{H_0}{1 + 2\sigma j\omega\tau - \omega^2\tau^2}$.

$H = \frac{H_0}{1 + 2\sigma j\omega\tau - \omega^2\tau^2}$

La valeur initiale valant $2,0E$, comme $E=1$ (échelon unité) : $H_0 = 2,0$.

La réponse est pseudo-périodique faiblement amortie, on a donc $\sigma^2 \ll 1$: la pseudo-période $T_P = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\sigma^2}}$ vaut pratiquement $2\pi\tau$. Sur la figure on mesure

$$4T_P = 6,3\text{s}, \text{ soit } \tau = 0,25\text{s}.$$

En notant dep_1 et dep_2 les dépassements (par rapport à la valeur finale de régime permanent), le décrément logarithmique $\delta = \ln\left(\frac{dep_1}{dep_2}\right) = \frac{2\pi\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}$ (voir livre de

première année) est pratiquement égal à $2\pi\sigma$. Sur la figure on mesure

$$\begin{cases} dep_1 = 3,5 - 2,0 = 1,5 \\ dep_2 = 2,8 - 2,0 = 0,8 \end{cases}$$

On en déduit $\sigma = 0,1$. On vérifie bien que $\sigma^2 = 0,01 \ll 1$: les approximations faites sont légitimes.

28. Le passe bande RLC est un montage connu :

On utilise la formule du diviseur de tension en sortie ouverte :

$$H(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} u_e$$

qui est de la forme :

$$H(j\omega) = \frac{2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\text{et } \sigma = \frac{RC}{2} \omega_0 = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

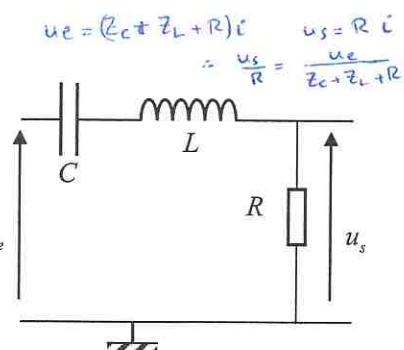
On peut aussi le mettre sous la forme :

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + \frac{j}{R} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)} = \frac{1}{1 + \frac{j}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\omega \sqrt{LC} - \frac{1}{\sqrt{LC}\omega} \right)}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

$$\text{avec } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\sigma}$$

Q facteur de qualité du filtre.

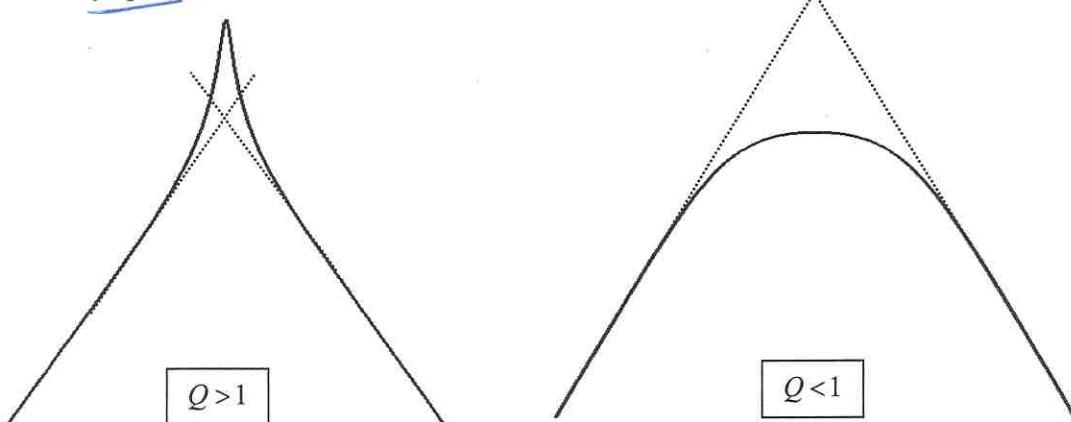


On a un filtre sélectif si : $Q > 1 \Leftrightarrow \sigma < \frac{1}{2} \Leftrightarrow R < \sqrt{\frac{L}{C}}$

Dans ce cas, le diagramme de Bode en amplitude est situé au dessus de ses asymptotes.

On a un filtre peu sélectif si : $Q < 1 \Leftrightarrow \sigma > \frac{1}{2} \Leftrightarrow R > \sqrt{\frac{L}{C}}$

Dans ce cas, le diagramme de Bode en amplitude est situé en dessous de ses asymptotes.

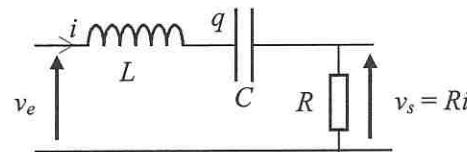


29. On cherche l'équation différentielle à laquelle obéit v_s (proportionnel à i).

La loi aux mailles s'écrit :

$$v_e = v_s + \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} \quad \text{avec } i = \frac{dq}{dt}$$

On dérive cette équation par rapport au temps pour éliminer q :



$$\frac{dv_e}{dt} = \frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{RC} + \frac{L}{R} \frac{d^2v_s}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2v_s}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_s}{dt} + \frac{1}{LC} v_s = \frac{R}{L} \frac{dv_e}{dt}$$

$$\text{et sous la forme canonique : } \frac{d^2v_s}{dt^2} + 2\sigma\omega_0 \frac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = 2\sigma\omega_0 \frac{dv_e}{dt}$$

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } \sigma = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Rq : On aurait pu trouver cette équation aussi à partir de la fonction de transfert calculée dans la question précédente 28. (à condition de justifier la démarche).

Le créneau est une succession d'échelons de tension alternativement positifs et négatifs. On cherche donc la réponse à un échelon de tension d'amplitude E .

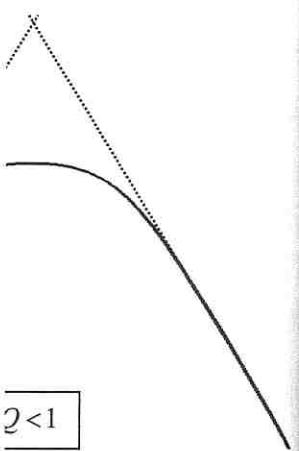
Pour $t > 0$, $v_e = E$ et $\frac{dv_e}{dt} = 0$ et l'équation différentielle se réduit à :

$$\frac{d^2v_s}{dt^2} + 2\sigma\omega_0 \frac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = 0 \quad (1)$$

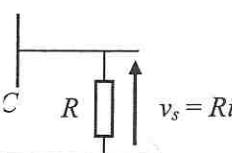
Les conditions aux limites s'obtiennent ainsi :

ué au dessus de ses

é en dessous de ses



$Q < 1$



$$v_s = \frac{R}{L} \frac{dv_e}{dt}$$

$$= 2\sigma\omega_0 \frac{dv_e}{dt}$$

fonction de transfert
la démarche).

ativement positifs et
amplitude E .

it à :

- Continuité de i (courant dans la bobine) : donc continuité de v_s : $v_s(t=0^+) = 0$ (2)
- Continuité de $q = C(v_e - v_s) - LC \frac{di}{dt}$ (d'après la loi aux mailles) ; à $t = 0^+$, q reste nul, et comme $v_e = E$ et $v_s = 0$,

$$0 = q(t=0^+) = CE - LC \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0^+} \Leftrightarrow \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0^+} = \frac{E}{L} \quad (3)$$

L'équation caractéristique associée à l'équation (1) : $X^2 + 2\sigma\omega_0 X + \omega_0^2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = (2\sigma\omega_0)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(1 - \sigma^2) < 0$ car $\sigma = \frac{1}{2Q} < 1$ (pour la relation entre σ et Q , voir la question précédente).

Les deux racines sont conjuguées : $r = -\sigma\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \sigma^2}$

La solution générale est donc pseudo-périodique :

$$v_s(t) = A \exp(-\sigma\omega_0 t) \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \sigma^2} t + \varphi)$$

où A et φ sont des constantes à déterminer par les conditions initiales écrites plus haut.

(1) donne $\varphi = 0$ (on pourrait aussi prendre $\varphi = \pi$, peu importe, le signe de A est indéterminé). Donc $v_s(t) = A \exp(-\sigma\omega_0 t) \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \sigma^2} t)$ on dérive par rapport à t :

$$\frac{dv_s(t)}{dt} = -\sigma\omega_0 A \exp(-\sigma\omega_0 t) \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \sigma^2} t) + \omega_0 \sqrt{1 - \sigma^2} A \exp(-\sigma\omega_0 t) \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \sigma^2} t)$$

(2) donne alors : $\frac{RE}{L} = \omega_0 \sqrt{1 - \sigma^2} A \Leftrightarrow A = \frac{RE}{L\omega_0 \sqrt{1 - \sigma^2}}$, puis :

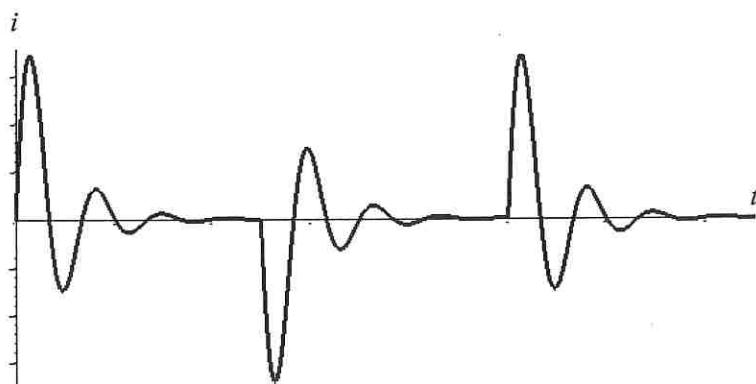
$$v_s(t) = Ri(t) = \frac{RE}{L\omega_0 \sqrt{1 - \sigma^2}} \exp(-\sigma\omega_0 t) \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \sigma^2} t)$$

Pour le créneau descendant, si on est revenu à $v_s = 0$ (période du créneau assez longue devant la pseudo-période $\frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \sigma^2}}$), on obtient la même forme de solution

en changeant E en $-E$. L'allure (page suivante) est obtenue pour $Q = 2 \Leftrightarrow \sigma = \frac{1}{4}$.

Pour fabriquer un oscillateur sinusoïdal à partir d'un tel circuit, il faudrait que les oscillations ne soient pas amorties. Le générateur serait alors inutile pour les relancer. On aurait donc $\sigma = 0$, et on retrouverait l'équation différentielle d'un oscillateur rigoureusement sinusoïdal. Malheureusement, on ne peut jamais annuler la résistance propre de la bobine, (inclusa dans R), et ce n'est pas possible directement. Ceci est d'ailleurs évident pour des questions énergétiques : si la sortie était sinusoïdale avec un courant dans la résistance, qui paierait l'effet Joule ?

Une astuce consiste à introduire un montage à « résistance négative » (ce montage actif peut être fait à partir d'un ampli op) pour compenser exactement les résistances résiduelles. L'oscillation sinusoïdale entretenue devient alors possible.



30. Attention au piège qui consiste à traiter ce montage comme s'il fonctionnait en régime linéaire ! Ici, la rétroaction est sur l'entrée +, donc l'ampli op fonctionne en régime saturé ce qui signifie que sa sortie est à $\pm V_{sat}$ selon le signe de $\varepsilon = V^+ - V^-$.

Or, par la formule du diviseur de tension (ou Millman appliquée à l'entrée +) :

$$V^+ = \frac{R}{R+R} v_s = \frac{v_s}{2}$$

Supposons que $v_s = V_{sat}$, alors $V^+ = \frac{V_{sat}}{2}$ et $V^- = v_e = U \cos(\omega t)$, donc la tension

différentielle vaut $\varepsilon = \frac{V_{sat}}{2} - U \cos \omega t$. L'ampli *bascule* (la sortie passe V_{sat} à $-V_{sat}$)

lorsque ε change de signe : $\varepsilon = 0 \Leftrightarrow \frac{V_{sat}}{2} = U \cos \omega t$ ce qui est impossible si

$U < \frac{V_{sat}}{2}$. Dans ce cas, l'ampli op ne bascule jamais et la sortie reste à la même valeur

(V_{sat} ou éventuellement $-V_{sat}$ si la sortie avait cette valeur au départ).

Si $U > \frac{V_{sat}}{2}$, le basculement se produit pour : $\cos \omega t = \frac{V_{sat}}{2U}$, donc lorsque v_e a la

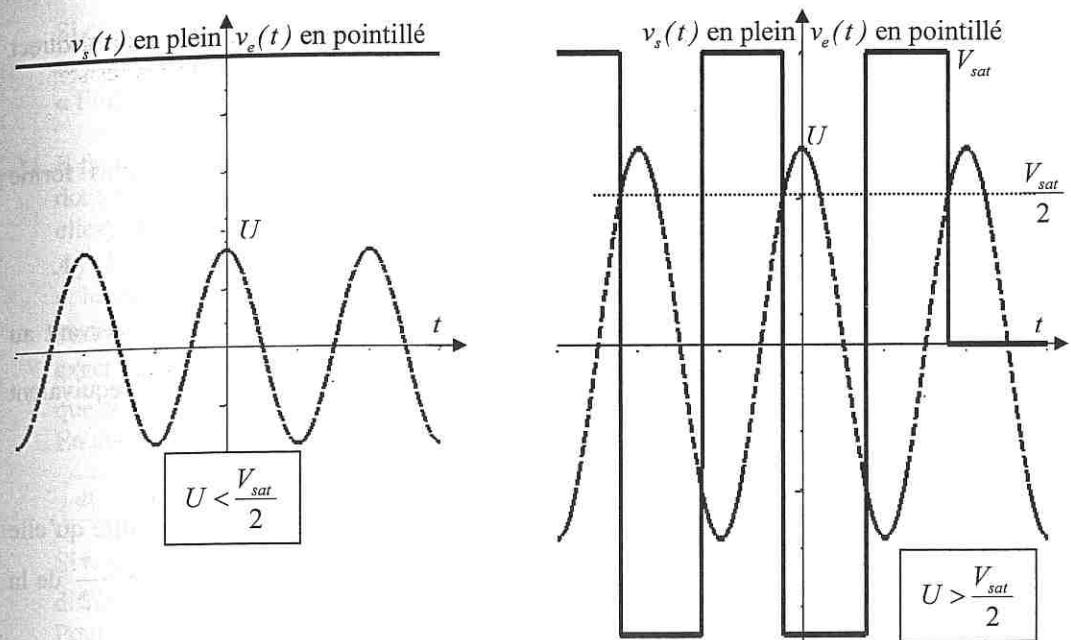
valeur $\frac{V_{sat}}{2}$. Ensuite, v_s bascule à $-V_{sat}$ et $\varepsilon = -\frac{V_{sat}}{2} - U \cos \omega t$.

Un nouveau basculement se produira lorsque $\varepsilon = 0 \Leftrightarrow \frac{V_{sat}}{2} = -U \cos \omega t$ donc

lorsque v_e a la valeur $-\frac{V_{sat}}{2}$. Et ainsi de suite, avec deux basculements par période.

Ce montage classique s'appelle un comparateur à hystérésis ou encore « Trigger de Schmitt ». Voir aussi la question 21. à ce sujet.

égative » (ce montage permet les résistances possibles).



fonctionnait en régime fonctionne en régime $:= V^+ - V^-$.

à l'entrée +) :

ωt), donc la tension passe V_{sat} à $-V_{sat}$) qui est impossible si reste à la même valeur part).

donc lorsque v_e a la

$\frac{V_{sat}}{2} = -U \cos \omega t$ donc éments par période.

u encore « Trigger de

31. Soit g une fonction du temps dont la dérivée est f . Alors le développement en série de Fourier de f est la dérivée terme à terme du développement en série de Fourier de g .

Le créneau est la dérivée d'un triangle de même période pourvu que la pente montante de ce triangle soit égale à la valeur maximale du créneau, c'est-à-dire E .

Le triangle doit croître avec une pente E pendant le temps $\frac{T}{4}$ donc avoir une amplitude $A = E \frac{T}{4}$.

Il y a plusieurs possibilités de triangle pour le même créneau (l'ajout d'une constante ne modifie pas la dérivée). On choisit par exemple le triangle de moyenne temporelle nulle, ce qui lève l'indétermination.

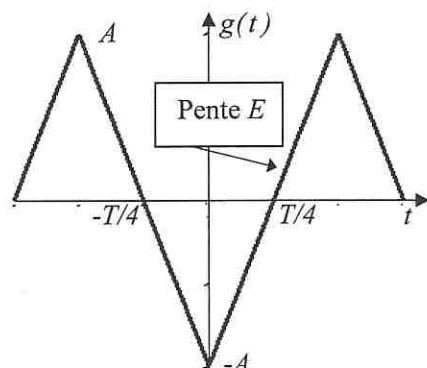
On intègre ensuite terme à terme la série de Fourier du créneau, et on obtient :

$$g(t) = -\frac{4E}{\pi\omega} \left[\cos \omega t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega t + \dots + \frac{1}{(2k+1)^2} \cos ((2k+1)\omega t) + \dots \right] + C^e$$

La constante s'annule avec notre choix pour avoir une moyenne nulle.

En tenant compte de $A = E \frac{T}{4}$ et de la relation $\omega T = 2\pi$, on trouve :

$$g(t) = -\frac{8A}{\pi^2} \left[\cos \omega t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega t + \dots + \frac{1}{(2k+1)^2} \cos ((2k+1)\omega t) + \dots \right]$$



Rq : Il est bien entendu possible de retrouver cette série de Fourier par un calcul direct utilisant l'expression générale des coefficients.
Ce calcul, quoiqu'un peu plus long, est conseillé au lecteur.

32. La fonction de transfert d'un passe-bande d'ordre 2 peut s'écrire sous forme canonique (voir par exemple la question 28.) : $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

L'expression asymptotique à haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$) s'obtient en conservant au dénominateur le seul terme prédominant, ici $jQ\frac{\omega}{\omega_0}$, ce qui donne l'équivalent cherché : $\underline{H}(j\omega) \sim \frac{-jH_0\omega_0}{Q\omega}$.

Cette fonction de transfert est bien celle d'un intégrateur parfait, c'est-à-dire qu'elle correspond à un gain en dB chutant à 20 dB/décade et à un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$ de la sortie par rapport à l'entrée si $H_0 > 0$.

Rq : Si H_0 était négatif (passe-bande inverseur), le déphasage serait de $\frac{\pi}{2}$. On aurait alors un intégrateur *inverseur*.

Chaque composante spectrale de Fourier est donc intégrée par le filtre, et on obtient une primitive du créneau, donc un triangle. Il est important de vérifier que toutes les composantes sont bien dans le domaine de fonctionnement de l'intégrateur : c'est le cas puisque $\omega \gg \omega_0$ et donc $3\omega \gg \omega_0$, $5\omega \gg \omega_0$, etc...

Le résultat de la question précédente est utilisable, en particulier on obtient les mêmes formes de courbes créneau et triangle.

Pour trouver l'amplitude A du triangle de sortie en fonction de l'amplitude d'entrée E du créneau, on a évidemment besoin de la fonction de transfert. Elle est utilisée pour trouver la constante de temps de l'intégrateur.

Ecrivons l'équation différentielle vérifiée par l'entrée créneau et la sortie triangle à partir de la fonction de transfert (pour la justification, voir la question 25) :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{-jH_0\omega_0}{Q\omega} \Leftrightarrow j\omega\underline{v}_s = \frac{H_0\omega_0}{Q}\underline{v}_e$$

et donc : $\frac{d\underline{v}_s}{dt} = \frac{H_0\omega_0}{Q}\underline{v}_e = \frac{\underline{v}_e}{\tau}$. La pente du triangle vaut donc $\frac{E}{\tau} = \frac{EH_0\omega_0}{Q}$.

Son amplitude A correspond à l'augmentation de tension en un quart de période, soit :

$$A = \frac{EH_0\omega_0}{Q} \frac{T}{4} \text{ et finalement, } A = \boxed{\frac{\pi}{2} \frac{H_0\omega_0}{Q\omega} E}$$

Rq : L'amplitude est faible, car $\omega \gg \omega_0$. Pour utiliser un tel intégrateur, il faudra un filtre peu sélectif (Q pas trop grand) et un gain maximum H_0 suffisant.

er par un calcul direct

s'écrire sous forme

$$\frac{H_0}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

ient en conservant au
ui donne l'équivalent

uit, c'est-à-dire qu'elle
phasage de $-\frac{\pi}{2}$ de la

erait de $\frac{\pi}{2}$. On aurait

le filtre, et on obtient
vérifier que toutes les
l'intégrateur : c'est le

on obtient les mêmes
l'amplitude d'entrée E .
Elle est utilisée pour
et la sortie triangle à
question 25) :

v_e

$$\text{donc } \frac{E}{\tau} = \frac{EH_0\omega_0}{Q}.$$

uart de période, soit :

T

tégrateur, il faudra un
 T_0 suffisant.

Si on ajoute une composante continue au triangle, celle-ci n'est pas intégrée. En effet, le passe-bande a un gain nul en continu ($\omega = 0$). Tout se passe en sortie comme si « l'offset » n'existe pas, c'est-à-dire comme si le créneau avait une moyenne nulle.

33. Il faut utiliser un raisonnement spectral, et non temporel, dans ce type de problème, et donc raisonner sur les composantes de Fourier du signal d'entrée et sur la façon dont elles sont affectées par le filtre.

A priori, on trouve dans le spectre du signal d'entrée, le fondamental à la pulsation ω et les harmoniques aux pulsations $2\omega, 3\omega, 4\omega, \dots$

Pour avoir une sortie non négligeable, une de ces pulsations doit correspondre presque exactement à la pulsation ω_0 , car le filtre, très sélectif, ne sélectionne pratiquement que cette seule valeur.

En conclusion, on doit vérifier les conditions :

$\omega_0 = p\omega$ avec p entier	et	l'harmonique p doit exister dans le spectre de l'entrée
--------------------------------------	----	---

Si on fait varier ω_0 (éventuellement ω), on peut balayer successivement les différentes sorties non nulles correspondant aux différents harmoniques (voir TP). Pour chaque harmonique, la sortie obtenue est proportionnelle à l'amplitude spectrale correspondante et au gain maximum du filtre.

On peut utiliser ce dispositif comme un analyseur de Fourier

34. On reconnaît dans ce montage un comparateur à hystérésis associé, non pas à un intégrateur comme dans la question 22. mais à un pseudo intégrateur : un circuit RC . L'essentiel du raisonnement précédent reste cependant valable : la tension de sortie V_S du comparateur à hystérésis ne peut prendre que les valeurs $-V_{sat}$ ou $+V_{sat}$. Si elle est égale à $+V_{sat}$, alors le condensateur se charge et la tension V^- augmente jusqu'à dépasser $V^+ = \frac{V_{sat}}{2}$: la tension de sortie prend alors la valeur $-V_{sat}$ et le fonctionnement s'inverse.

Pour calculer la période T , on choisit l'instant du basculement de $+V_{sat}$ à $-V_{sat}$ comme origine des temps. Juste avant cet instant : $e(0^-) = 0$, soit $V^- = V^+ = V_{sat}/2$, juste après $V^+ = -V_{sat}/2$ alors que V^- , tension aux bornes du condensateur a gardé sa valeur. On en déduit que $e(0^+) = V^+ - V^- = -V_{sat} < 0$ ce qui montre bien que $V_S = -V_{sat}$. Le basculement suivant a lieu au bout d'une demie période, quand e s'annule à nouveau. On a alors $V^-(T/2) = V^+ = -V_{sat}/2$.

Tous ces résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

t	V_S	e	V^-	V^+
0^-	$+V_{sat}$	0	$+V_{sat}/2$	$+V_{sat}/2$
0^+	$-V_{sat}$	$-V_{sat}$	$+V_{sat}/2$	$-V_{sat}/2$
$(T/2)^-$	$-V_{sat}$	0	$-V_{sat}/2$	$-V_{sat}/2$

Entre 0 et $T/2$ la loi des mailles s'écrit : $V^- + Ri = V_S = -V_{sat}$. Comme $i = C \frac{dV^-}{dt}$,

on voit que $\tau \frac{dV^-}{dt} + V^- = -V_{sat}$. Compte tenu de la condition initiale

$V^-(0) = V_{sat}/2$, la solution de cette équation différentielle est :

$$V^- = V_{sat} \left(\frac{3}{2} e^{-t/\tau} - 1 \right)$$

À l'instant $T/2$ on a $V^-(T/2) = -V_{sat}/2$ soit : $-V_{sat}/2 = V_{sat} \left(\frac{3}{2} e^{-T/2\tau} - 1 \right)$ soit :

$$T = 2\tau \ln 3$$

Questions de réflexion ; physique pratique

35. La puissance dissipée par effet Joule par une résistance alimentée sous une tension U (valable en régime périodique à condition de prendre la valeur efficace) : $P_J = \frac{U^2}{R}$.

Au laboratoire, les tensions sont de l'ordre d'une dizaine de volts : $P_J \sim \frac{100}{R}$ en W.

Ainsi une résistance de 100Ω peut être amenée, si l'alimentation arrive à débiter le courant nécessaire pour maintenir la tension, à dissiper une puissance thermique de l'ordre de 1 W , ce qui lui est fatal si elle n'est pas dimensionnée pour cela...

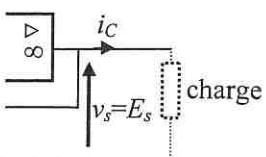
Aucun risque, en revanche, pour une résistance de $1 \text{ M}\Omega$. Le type de résistance basse puissance pouvant dissiper $1/4 \text{ W}$ suffit.

36. Non, pas de risque avec une batterie seule !

Il est vrai en revanche que c'est le courant à travers le corps humain qui a des effets dangereux voire potentiellement mortels, les mécanismes étant l'échauffement dû à l'effet Joule et la tétanie des muscles (le cœur en particulier!).

Mais la résistance du corps humain étant élevée (quelques centaines de $\text{k}\Omega$ entre les deux mains), il faut une tension assez élevée pour avoir des courants dangereux : $U = RI \sim 100 \text{ V}$ pour avoir un courant de 1 mA . Ainsi, le seuil de danger est-il fixé aux environs de 50 V . Une batterie de 12 V est sans effet.

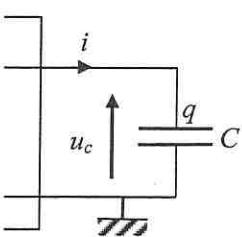
Mais attention, en présence d'une bobine (existant dans le circuit d'allumage d'une voiture), on peut avoir des surtensions élevées. C'est d'ailleurs le but de ce circuit



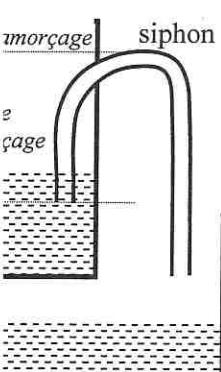
La période du phénomène dépend du débit de la pompe et du volume de récipient entre les deux niveaux. Elle dépend également du temps de vidange par le siphon (d'autant plus court que le tuyau est plus large). Pour l'analogie avec le multivibrateur astable, la pompe joue le rôle de l'intégrateur, et le siphon celui du comparateur à hystérésis (comparaison du niveau d'eau avec les niveaux de référence).

Précédent, une source rait modélisée par un tie infinie.

et donc, aux bornes id donc que de v_e , il on de l'ampli op. tasse, ce qui peut être sans cette difficulté. éairement :



se fonctionne jusqu'à ièce se refroidit et le . Si le thermostat ne fonctionnement trop rait jamais le temps



44. Circuit linéaire à entrée de courant

a) Le courant i_e se sépare en i_C dans le condensateur et en i_R dans la résistance. Par la loi des nœuds, $i_e = i_C + i_R$. Soit $q = Cu_s$ la charge de l'armature supérieure du condensateur : $i_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_s}{dt}$. La loi d'Ohm donne aux bornes de R $u_s = Ri_R$, d'où : $i_e = C \frac{du_s}{dt} + \frac{u_s}{R}$ L'équation cherchée : $\frac{du_s}{dt} + \frac{1}{RC} u_s = \frac{1}{C} i_e$

b) Le premier cas est celui du régime permanent pour lequel la solution est : $u_s = RI_{e0}$
On retrouve bien qu'en régime permanent, la self se comportant comme un fil et le condensateur comme un coupe-circuit, il ne reste que R traversé par I_{e0} avec u_s à ses bornes.

Le deuxième cas est celui du régime sinusoïdal établi. On peut résoudre l'équation différentielle en complexes.
On se place ici en représentation sinus, ce qui veut dire qu'on pose : $i_e = I_{e0} \sin \omega t = \text{Im}(i_e) = \text{Im}(I_{e1} \exp j\omega t)$ où Im désigne la partie imaginaire du complexe.

L'équation du a) donne : $j\omega u_s + \frac{u_s}{RC} = \frac{I_{e1}}{C} \exp j\omega t$ soit en posant la constante de temps du circuit $\tau = RC$: $u_s = \frac{RI_{e1}}{1 + j\omega\tau}$

$$\text{En notation réelle : } u_s = \text{Im}(u_s) = \frac{RI_{e1}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases} \tan \varphi = -\omega\tau \\ \sin \varphi = -\frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \end{cases}$$

c) La solution pour l'entrée en cosinus est analogue en cosinus (entre les deux entrées en sin et cos, il n'y a qu'un décalage temporel de $\pi/2$ qui se conserve en sortie). On en déduit la solution en superposant les solutions des trois entrées qui s'ajoutent (par linéarité de l'équation différentielle) :

$$u_s = RI_{e0} + \frac{RI_{e1}}{\sqrt{1+(\omega_1\tau)^2}} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{RI_{e2}}{\sqrt{1+(\omega_2\tau)^2}} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

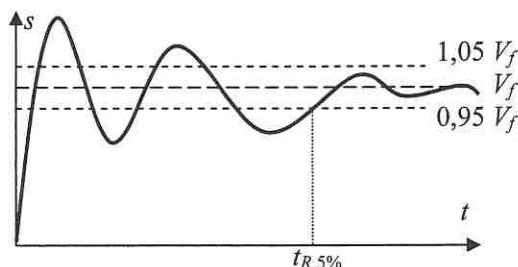
Avec $\begin{cases} \tan \varphi_1 = -\omega_1 \tau \\ \sin \varphi_1 = -\frac{\omega_1 \tau}{\sqrt{1+(\omega_1\tau)^2}} \end{cases}$ et $\begin{cases} \tan \varphi_2 = -\omega_2 \tau \\ \sin \varphi_2 = -\frac{\omega_2 \tau}{\sqrt{1+(\omega_2\tau)^2}} \end{cases}$ où $\tau = RC$

Ainsi, les composantes du signal d'entrée se voient affectées d'une modification d'amplitude et d'un déphasage qui varient suivant la fréquence.

45. Temps de réponse d'un système linéaire du premier ou du deuxième ordre

Le temps de réponse à 5% est le temps nécessaire pour que la réponse indicielle d'un système linéaire, présente un écart inférieur à 5% avec sa valeur finale, de façon définitive (voir schéma ci-dessous).

Ce temps caractérise la rapidité d'évolution du système. En général on cherche à le minimiser, par exemple dans les appareils de mesure.

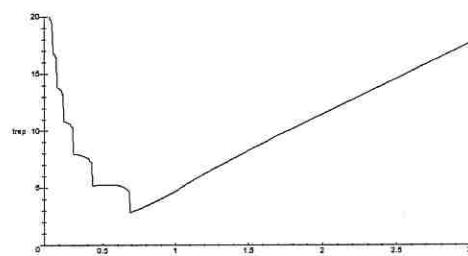


Pour un système d'ordre 1 dont la réponse indicielle s'écrit :

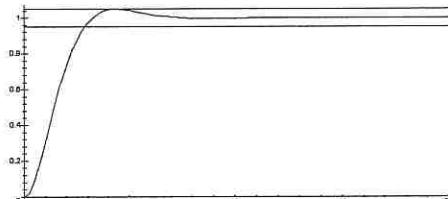
$$s(t) = H_0 E \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$

ce temps de réponse vaut 3τ .

Pour le système d'ordre 2, il faut effectuer une résolution numérique qui conduit à la courbe ci-contre, représentant le temps de réponse réduit (divisé par τ) en fonction de σ .



Le temps de réponse le plus court est obtenu pour $\sigma = 0,69$ et vaut $2,86\tau$. Cela correspond au régime pseudopériodique avec un dépassement pratiquement égal à 5% dessiné ci-contre.



2)

où $\tau = RC$

d'une modification

xième ordre

ponse indicielle d'un
ur finale, de façon

éral on cherche à le

46. Circuit déphaseur

a) En régime sinusoïdal à la pulsation ω , en notation complexe, on applique le théorème de Millman aux entrées - et + de l'ampli op idéal :

$$\underline{V^-} = \frac{\frac{\underline{v_s}}{R} + \frac{\underline{v_e}}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{\underline{v_s} + \underline{v_e}}{2} \text{ et } \underline{V^+} = \frac{\frac{\underline{v_e}}{R} + 0jC\omega}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{\underline{v_e}}{1 + jRC\omega}$$

L'ampli fonctionnant en régime linéaire (rétroaction sur l'entrée inverseuse -) :

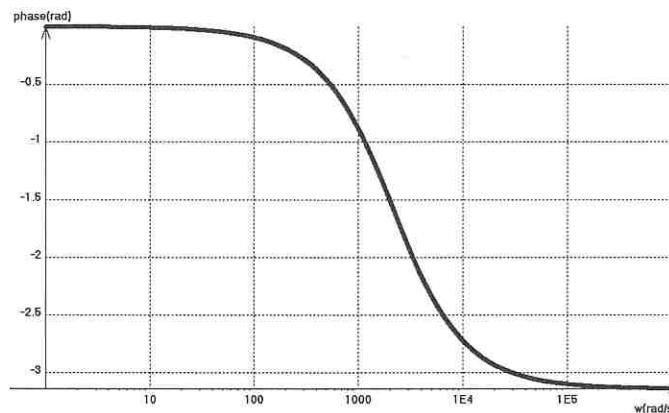
$$\underline{V^+} = \underline{V^-} \Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}}$$

$$G = |H| = 1 \text{ et } \begin{cases} \tan \varphi = -\frac{2RC\omega}{1 - (RC\omega)^2} \\ \sin \varphi = -\frac{2RC\omega}{1 + (RC\omega)^2} \end{cases}$$

Le gain en dB est donc nul pour toute pulsation et $-\pi \leq \varphi \leq 0$.

Étude asymptotique : $\begin{array}{lll} \omega \rightarrow 0 & H \rightarrow 1 & \varphi \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow \infty & H \rightarrow -1 & \varphi \rightarrow -\pi \end{array}$

b)



- c) L'intérêt réside dans la possibilité de choisir le déphasage en faisant varier la fréquence. C'est un circuit déphaseur.
Couplé à un éventuel inverseur, ce montage permet d'obtenir un déphasage choisi entre tensions d'entrée et de sortie.

- d) En posant $\tau = RC$, de $\frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{1 - j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}$ on déduit :

$$\tau \frac{dv_s}{dt} + v_s = -\tau \frac{dv_e}{dt} + v_e$$

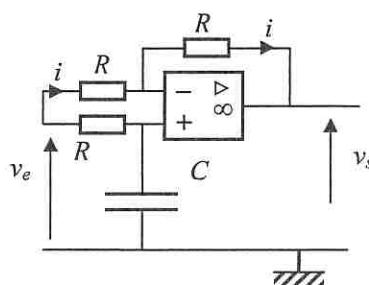
La réponse indicielle obéit, pour $t > 0$ à $\tau \frac{dv_s}{dt} + v_s = E$ et est de la forme :

$$v_s(t) = E + A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Pour trouver la condition initiale, on remarque que la tension aux bornes de C est continue. Elle vaut zéro à $t = 0^+$ et donc $V^+(t = 0^+) = 0$.

Comme l'ampli op fonctionne en régime linéaire, $V^-(t = 0^+) = V^+(t = 0^+) = 0$ et comme $v_e(t = 0^+) = E$, la tension aux bornes de la résistance R entre l'entrée du montage et l'entrée inverseuse de l'ampli op vaut E , d'où $i(t = 0^+) = \frac{E}{R}$ et :

$$v_s(t = 0^+) = -R i(t = 0^+) = -E \text{ d'où } A = -2E \text{ et}$$

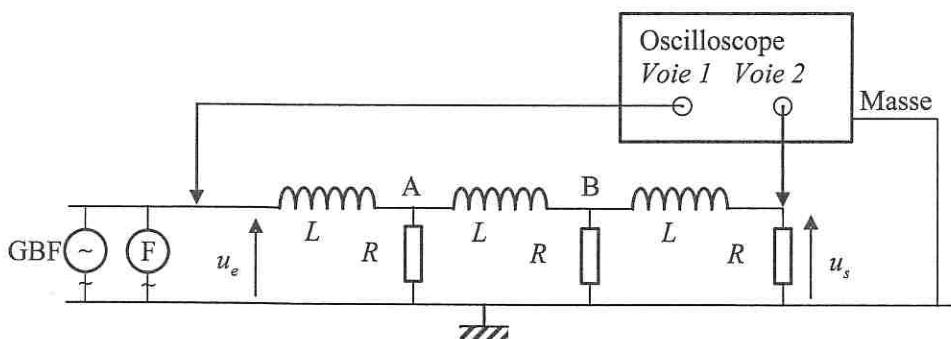


$$v_s(t) = E \left(1 - 2 e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Cette réponse indicielle est remarquable : alors que l'entrée échelon est positive et la valeur finale aussi, le début de la réponse indicielle est négatif : le système est « contrariant ». On peut citer comme système ayant un comportement de ce type une moto en virage : pour tourner à gauche, on donne un coup de guidon à droite, ce qui a pour effet de faire pencher la moto à gauche (à cause de la force centrifuge) et de déclencher le virage à gauche.

47. Études expérimentale d'un filtre passif

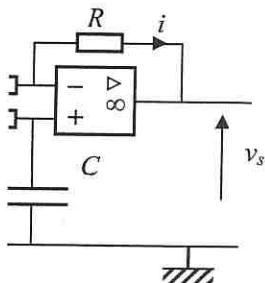
a) F représente le fréquencemètre sur le schéma. Attention, les masses de l'oscilloscope, du GBF, et du fréquencemètre doivent être communes.



b) On mesure les tensions crête à crête sur le schéma (attention la tension d'entrée est décalée soit par un mauvais réglage de l'oscilloscope, soit parce qu'elle présente un offset. On lit alors à la pulsation $\omega_e = 2\pi 652 = 0,20 \omega_0$:

$$\frac{\text{amplitude de } u_s}{\text{amplitude de } u_e} = 0,70. \text{ D'où le gain en dB : } g = 20 \log(0,70) = -3,1 \text{ dB}$$

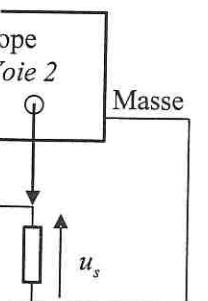
aux bornes de C est



$$v_s = E \left(1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

helon est positive et la gatif : le système est tement de ce type une idon à droite, ce qui a force centrifuge) et de

tion, les masses de mmunes.



la tension d'entrée est parce qu'elle présente

$$70) = -3,1 \text{ dB}$$

Pour le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée à cette pulsation :

$$\varphi = 2\pi \frac{\text{décalage temporel}}{\text{période}} = -0,98 \text{ rad.}$$

48. Étude théorique du filtre passif

a) On applique successivement le théorème de Millman aux points A et B définis sur le schéma précédent (solution de la question 47.) et en sortie du filtre (ainsi, on n'introduit pas de courants inutiles).

$$\underline{V}_A = \frac{\underline{U}_e + \underline{V}_B}{2 + j \frac{L\omega}{R}} \quad \text{et} \quad \underline{V}_B = \frac{\underline{V}_A + \underline{U}_s}{2 + j \frac{L\omega}{R}} \quad \text{enfin} \quad \underline{U}_s = \frac{\underline{V}_B}{1 + j \frac{L\omega}{R}}$$

$$\text{En éliminant } \underline{V}_A \text{ et } \underline{V}_B \text{ de ces équations, on obtient : } \underline{H} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 + 6jx - 5x^2 - jx^3}$$

$$\text{On en déduit } H_0 = 1 \quad a = 6j \quad b = -5 \quad c = -j$$

b) a) La fonction de transfert est réelle si son dénominateur l'est donc si

$$6jx - jx^3 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{6} \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{6} \omega_0$$

À cette pulsation ω_1 on obtient : $H = -\frac{1}{29}$, réel négatif, donc

$$\boxed{\varphi = -\pi \text{ (ou } \pi\text{)} \text{ et } g = 20 \log \left(\frac{1}{29} \right) \Rightarrow g = -29 \text{ dB}}$$

b) Lorsque $\omega = \omega_0$, $x = 1$, et $H = \frac{1}{-4 + 5j}$ donc $\tan \varphi = \frac{5}{4}$ et $\sin \varphi = -\frac{5}{\sqrt{41}} < 0$

$$\boxed{g = -16,1 \text{ dB et } \varphi = -2,25 \text{ rad}}$$

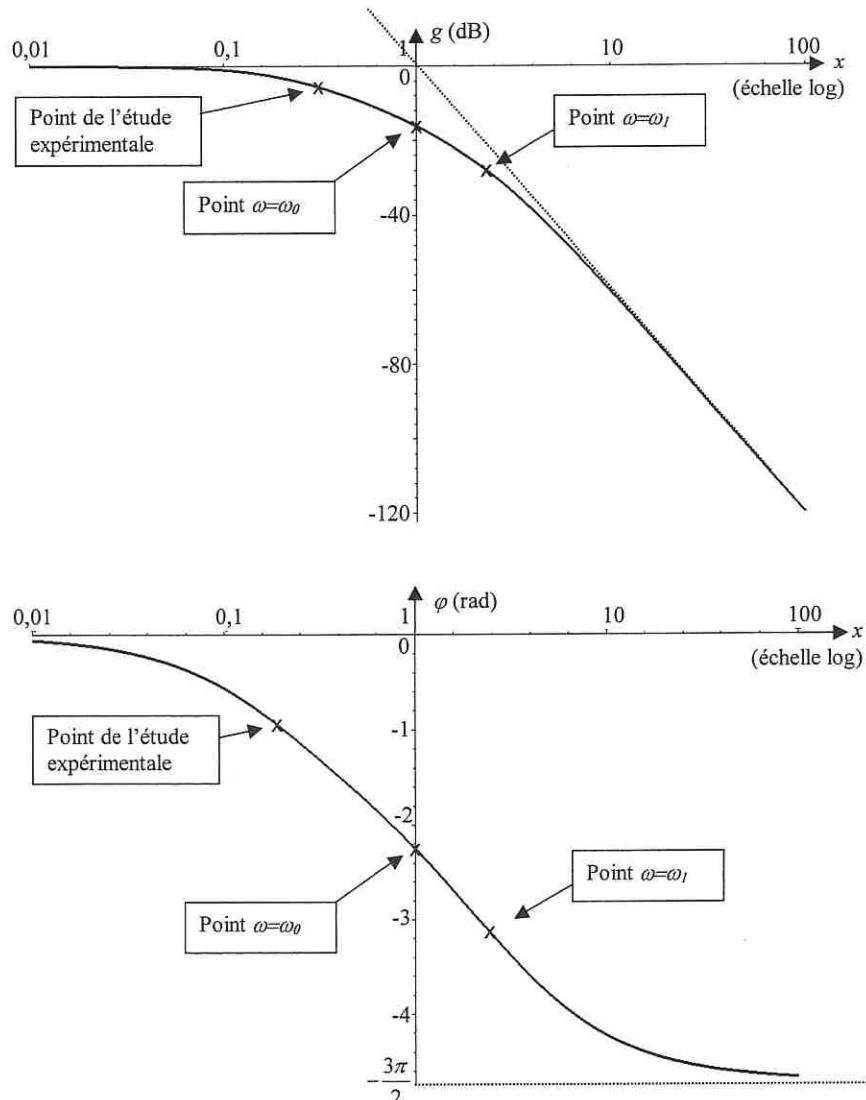
c) a) Si $\omega \rightarrow 0$ $H \rightarrow 1$ $\varphi \rightarrow 0$ $g \rightarrow 1$

b) Si $\omega \rightarrow \infty$ $H \rightarrow -\frac{1}{jx^3}$ $\varphi \rightarrow -\frac{3\pi}{2}$ (ou $\frac{\pi}{2}$) $g \rightarrow 60 \log \omega_0 - 60 \log \omega$

La pente asymptotique à haute fréquence vaut -60 dB/décade , ce qui correspond à un filtre d'ordre 3.

γ) Le point d'intersection vérifie : $60 \log \omega_0 - 60 \log \omega = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0$

d) Les diagramme de Bode en amplitude et en phase tiennent compte des points calculés, y compris celui de l'étude expérimentale de l'exercice précédent. Pour avoir une courbe de phase continue qui part de zéro, on choisit de prendre φ entre 0 et -2π (φ est défini à 2π près). Ce n'est pas une obligation.



49. Filtre actif passe-bande

- a) En régime sinusoïdal à la pulsation ω , on applique à l'entrée – de l'ampli op le théorème de Millman. Par ailleurs, l'ampli op fonctionnant en régime linéaire (rétroaction sur l'entrée –) les potentiels des deux entrées sont égaux à la valeur 0 (entrée + reliée à la masse). D'où

$$0 = \underline{V^+} = \underline{V^-} = \frac{v_s j C' \omega + \frac{v_s}{R'} + \frac{v_e}{R + \frac{1}{j C \omega}}}{j C' \omega + \frac{1}{R'} + \frac{1}{R + \frac{1}{j C \omega}}}$$

100
x
(échelle log)

$$\Leftrightarrow H = \frac{v_s}{v_e} = -\frac{R'}{1+jC'R'\omega} \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega}} = \frac{-\frac{R'C}{RC+R'C'}}{1+j\omega \frac{RR'CC'}{RC+R'C'} + \frac{1}{j\omega} \frac{1}{RC+R'C'}}$$

On obtient donc :	$a = -\frac{R'C}{RC+R'C'}$	$\omega_1 = \frac{RC+R'C'}{RR'CC'}$	$\omega_2 = \frac{1}{RC+R'C'}$
	$a = -3,33$	$\omega_1 = 3000 \text{ rad/s}$	$\omega_2 = 667 \text{ rad/s}$

b) Le gain est maximum quand le module du dénominateur de la fonction de transfert est nul (donc minimum). Cette condition est réalisée pour $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ ce qui

correspond à une fréquence $f_0 = \frac{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}{2\pi} = 225 \text{ Hz}$

À cette fréquence, $H = a$ et $G_0 = |a| = 3,33$

100
x
(échelle log)

c) Étude asymptotique :

$$\omega \rightarrow 0 \quad H \rightarrow \frac{a}{-j\frac{\omega_2}{\omega}} = \frac{j\omega a}{\omega_2} \quad g \rightarrow 20 \log |a| - 20 \log \omega_2 + 20 \log \omega \quad \varphi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$$

En effet, $\arg H \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ (ou $\frac{3\pi}{2}$) et l'asymptote de g a une pente de 20 dB/décade

$$\omega \rightarrow \infty \quad H \rightarrow \frac{a}{j\frac{\omega}{\omega_1}} = -\frac{j\omega a}{\omega} \quad g \rightarrow 20 \log |a| + 20 \log \omega_1 - 20 \log \omega \quad \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

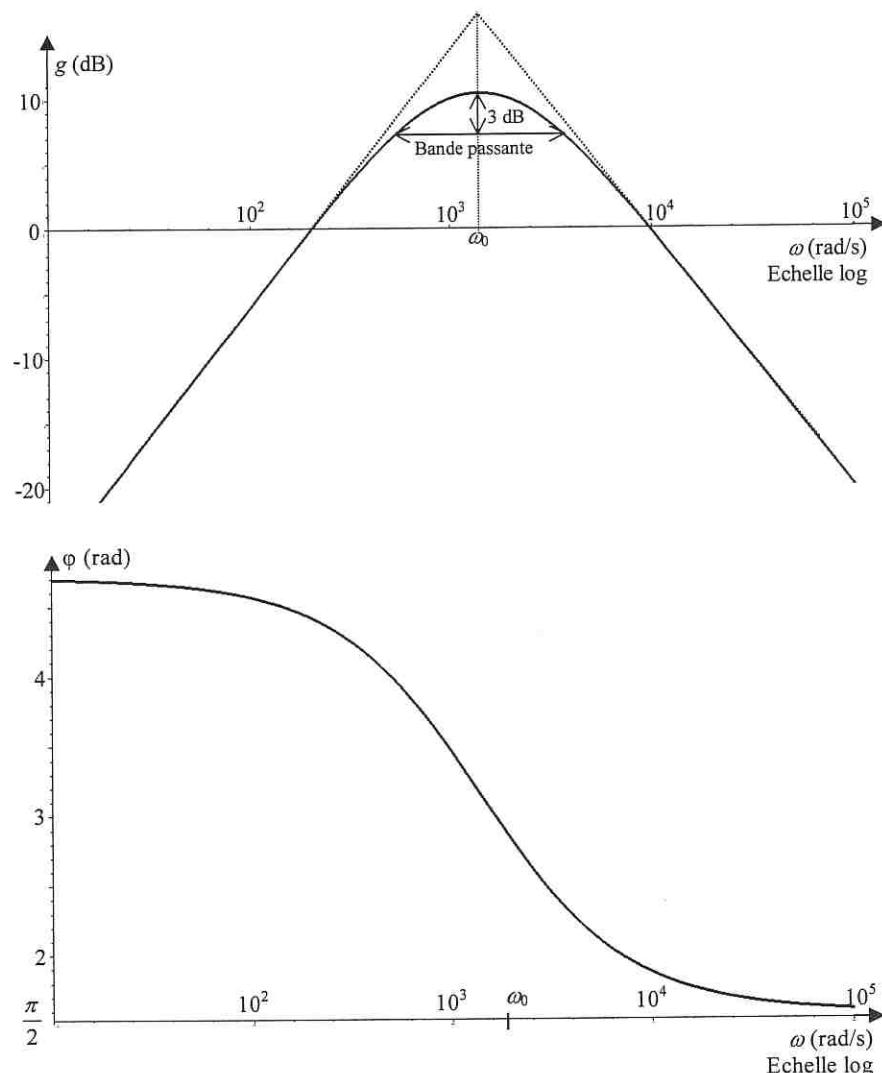
Ici, $\arg H \rightarrow \frac{\pi}{2}$ et l'asymptote de g a une pente de -20 dB/décade.

Les deux asymptotes se coupent lorsque :

$$20 \log |a| - 20 \log \omega_2 + 20 \log \omega = 20 \log |a| + 20 \log \omega_1 - 20 \log \omega \\ \Leftrightarrow \log \omega = \frac{\log \omega_1 + \log \omega_2}{2} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = \omega_0$$

Pour $\omega = \omega_0$, $H = a$ donc $\varphi = \pi$ (ou $-\pi$) et $g = 20 \log G_0 = 10,5 \text{ dB}$.

Pour avoir une courbe de phase continue arrivant à zéro, on choisit de prendre φ entre 0 et 2π (φ est défini à 2π près). On en déduit les tracés :



50.

- d) La bande passante à 3 dB d'un passe-bande est définie par la différence entre les deux fréquences pour lesquelles le gain a chuté de 3 dB par rapport à sa valeur maximale (voir schéma de Bode du gain ci-dessus).

Cherchons les solutions pour les deux pulsations obéissant à cette propriété. Elles

$$\text{doivent vérifier l'équation : } g = g_0 - 3 \Leftrightarrow G = \frac{G_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|a|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega} \right)^2}} = \frac{|a|}{\sqrt{2}}$$

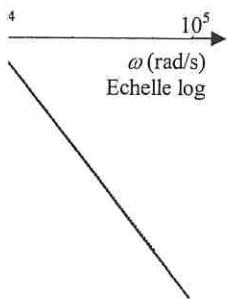
$$\text{Et donc, en élévant au carré, } \left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega} \right)^2 = 1 \text{ soit } \frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega} = \pm 1$$

On obtient deux équations du second degré : $\omega^2 \pm \omega\omega_1 - \omega_1\omega_2 = 0$ donc *a priori* quatre solutions, mais seules les deux solutions positives ont un sens.

Elles s'écrivent : $\omega' = \frac{1}{2}(-\omega_1 + \sqrt{\Delta})$ et $\omega'' = \frac{1}{2}(\omega_1 + \sqrt{\Delta})$

La différence est la bande passante en pulsation, soit

$$\Delta\omega = \omega'' - \omega' = \omega_1 = 3000 \text{ rad/s}$$



La bande passante en fréquence vaut alors : $BP = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = 477 \text{ Hz}$

e) Le facteur de qualité vaut par définition $Q = \frac{f_0}{BP}$: $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{\omega_1} = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} = 0,47$

Le filtre est donc peu sélectif. Le facteur de qualité est inférieur à 1, ce qui correspond à un diagramme de Bode situé sous ses asymptotes.

Rappelons que pour les filtres sélectifs, au contraire, $Q > 1$ et le maximum du diagramme de Bode en amplitude est au dessus des asymptotes.

Rq : On aurait pu trouver directement le facteur de qualité en mettant la fonction de transfert sous la forme : $H(j\omega) = \frac{a}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$. En identifiant avec la forme canonique de l'énoncé, on retrouve immédiatement : $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ et $Q = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}$

canonique de l'énoncé, on retrouve immédiatement : $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ et $Q = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}$

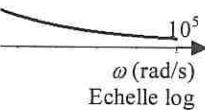
50. Filtre actif passe-bas

a) En régime sinusoïdal à la pulsation ω , on applique successivement au point A et à l'entrée + de l'ampli op le théorème de Millman. On supposera ici conformément à l'énoncé que l'ampli op fonctionne en régime linéaire : ce point n'est pas évident car il y a ici une rétroaction sur l'entrée - et une sur l'entrée +. Dans ce cas, les potentiels des deux entrées - et + sont égaux. Ils ont donc la valeur v_s (sortie reliée à l'entrée -).

$$\begin{cases} \underline{V_A} = \frac{\underline{v_e} + \underline{V^+}}{\frac{1}{R'} + \frac{1}{R} + jC'\omega} = \frac{\underline{v_e} + \underline{V^+} + jRC'\omega v_s}{2 + jRC'\omega} \\ \underline{V^+} = \frac{\underline{V_A}}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{\underline{V_A}}{1 + jRC\omega} = \underline{V^-} = \underline{v_s} \end{cases}$$

En éliminant $\underline{V_A}$, on déduit \underline{H}

$$\underline{\frac{v_s}{v_e}} = \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2jRC\omega - R^2CC'\omega^2}$$



la différence entre les par rapport à sa valeur

à cette propriété. Elles

$$\frac{|a|}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{|a|}{\sqrt{2}}$$

t1

$\omega_1 \omega_2 = 0$ donc *a priori* un sens.

Cette fonction de transfert ne dépend pas de R_C car cette résistance de charge (qui utilise la tension de sortie) est reliée directement à la sortie de l'ampli op.

L'ampli op étant idéal donne une sortie parfaite en tension, c'est-à-dire que sa tension de sortie ne dépend pas du courant demandé par la charge, donc ne dépend pas de la charge. Ceci est équivalent à dire que la résistance de sortie de l'ampli op idéal est nulle, donc vu de la charge, il est équivalent à un générateur de Thévenin sans résistance interne.

b) De l'expression de \underline{H} , on déduit le gain :

$$G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{(1-R^2CC'\omega^2)^2 + 4R^2C^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+R^4C^2C'^2\omega^4 - 2R^2CC'\omega^2 + 4R^2C^2\omega^2}}$$

Pour qu'il ait la forme demandée, il faut que le terme en ω^2 s'annule dans le radical,

$$\text{donc : } -2R^2CC'\omega^2 + 4R^2C^2\omega^2 = 0 \Leftrightarrow C' = 2C \text{ on obtient alors : } \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2RC}}}$$

$$\text{c) L'application numérique donne : } \omega_0 = 7,07 \text{ krad/s et } \boxed{f_o = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1,13 \text{ kHz}}$$

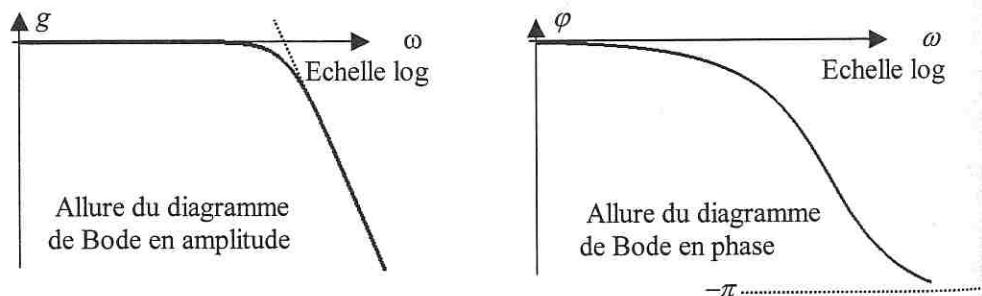
$$\text{d) Avec } C' = 2C, \text{ la fonction de transfert devient : } \underline{H} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}j \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Étude asymptotique :

$$\omega \rightarrow 0 \quad \underline{H} \rightarrow 1 \text{ donc } \varphi \rightarrow 0 \text{ et } g \rightarrow 0$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad \underline{H} \rightarrow -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \text{ donc } \varphi \rightarrow -\pi \text{ (ou } \pi) \text{ et } g \rightarrow 40 \log \omega_0 - 40 \log \omega$$

Ainsi la pente du diagramme de Bode vers les hautes fréquences vaut -40 dB/décade et les deux asymptotes se croisent en ($\omega = \omega_0, g = 0$).



e) La coupure est franche à ω_0 et le filtre est un passe-bas du deuxième ordre simple et efficace.

résistance de charge (qui dépend de l'ampli op.)
ion, c'est-à-dire que sa charge, donc ne dépend pas de sortie de l'ampli op. Il faut alors faire un générateur de

$$\frac{1}{2R^2CC'\omega^2 + 4R^2C^2\omega^2}$$

en ω^2 s'annule dans le

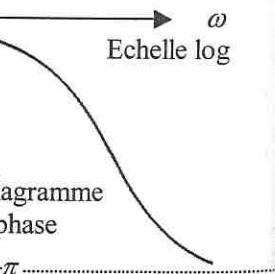
alors : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}RC}$

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = 1,13 \text{ kHz}$$

$$\frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\log \omega_0 - 40 \log \omega$$

autres fréquences vaut $\omega_0, g = 0$.



deuxième ordre simple

La pulsation de coupure est définie par $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ce qui donne immédiatement : $\omega_c = \omega_0 = 7,07 \text{ krad/s}$

51. Tripleur de fréquence

a) La formule du diviseur de tension donne immédiatement :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \text{ que l'on peut mettre sous la forme :}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)} = \frac{1}{1 + j\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\omega\sqrt{LC} - \frac{1}{\omega\sqrt{LC}}\right)}$$

simplement assimilable à la forme canonique : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

où l'on obtient directement le facteur de qualité $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ et la pulsation de

résonance du filtre : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5,0 \text{ krad/s}$

Comme $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1,66 \text{ krad/s}$, on voit : $\omega_0 = 3\omega$ à la précision des données de l'énoncé.

b) Chaque terme de la série entrant dans le filtre est affecté différemment en amplitude et en phase, car module et argument de la fonction de transfert dépendent de ω . Ainsi, le terme fondamental (à la pulsation fondamentale ω) voit son amplitude multipliée par un facteur $|H(j\omega)| = G(\omega)$ et sa phase augmentée de $\phi(\omega)$ dans son passage par le filtre. On obtient en sortie (notation réelle comme demandé par l'énoncé et non complexe) :

$$\begin{aligned} v_s(t) = & -\frac{8A}{\pi^2} \left[G(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega)) + \frac{1}{9} G(3\omega) \cos(3\omega t + \phi(3\omega)) + \dots \right. \\ & \left. + \frac{1}{(2k+1)^2} G((2k+1)\omega) \cos((2k+1)\omega t + \phi((2k+1)\omega)) + \dots \right] \end{aligned}$$

c) La tension de sortie se met donc sous la forme :

$$v_s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos((2k+1)\omega t + \varphi_k) \text{ avec}$$

$$A_k = -\frac{8A}{\pi^2} G((2k+1)\omega) = -\frac{8A}{\pi^2} \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{L(2k+1)\omega}{R} - \frac{1}{RC(2k+1)\omega}\right)^2}}$$

et $\varphi_k = \arg[H(j(2k+1)\omega)] = -\arg\left[1 + j\left(\frac{L(2k+1)\omega}{R} - \frac{1}{RC(2k+1)\omega}\right)\right]$

ou encore : $\boxed{\varphi_k = -\arg\left[1 + jQ\left(\frac{(2k+1)\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{(2k+1)\omega}\right)\right]}$

d) Application numérique :

Pulsation ω correspondant à $k = 0$:

$$A_0 = -\frac{8A}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = -\frac{80}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{1+100^2\left(\frac{1}{3}-3\right)^2}} = -0,12 \text{ V}$$

$$\varphi_0 = -\arg\left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] = -\arg\left[1 + j100\left(\frac{1}{3}-3\right)\right] \approx \frac{\pi}{2}$$

Pulsation 3ω correspondant à $k = 1$:

$$A_1 = -\frac{8A}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{3\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{3\omega}\right)^2}} = -\frac{80}{\pi^2} = -8,1 \text{ V}$$

$$\varphi_1 = -\arg\left[1 + jQ\left(\frac{3\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{3\omega}\right)\right] = -\arg[1] = 0$$

Pulsation 5ω correspondant à $k = 2$:

$$A_2 = -\frac{8A}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{5\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{5\omega}\right)^2}} = -\frac{80}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{1+100^2\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{5}\right)^2}} = -0,076 \text{ V}$$

Le terme largement prépondérant est l'harmonique 3 à la pulsation 3ω .
On peut faire l'approximation que les autres sont négligeables et :

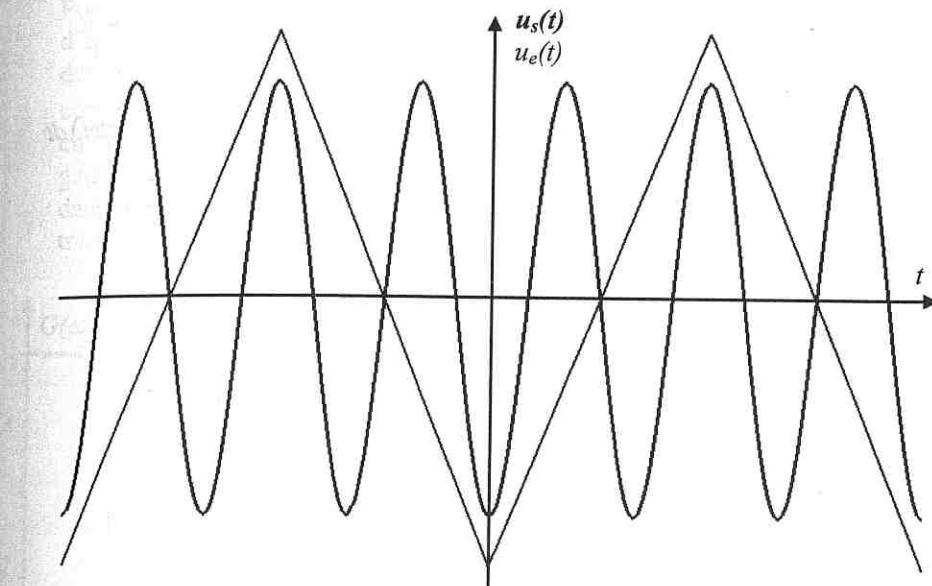
$$\boxed{u_s(t) \approx A_1 \cos(3\omega t + \varphi_1) = -8,1 \cos(3\omega t)}$$

e) Les courbes.

$$\left[\frac{1}{RC(2k+1)\omega} \right]^2 - \left[\frac{1}{RC(2k+1)\omega} \right] \left[\frac{v_0}{(2k+1)\omega} \right]$$

$$\left[\frac{1}{3} \right]^2 = -0,12 \text{ V}$$

$$\left[\frac{1}{3} - 3 \right] \approx \frac{\pi}{2}$$



f) Ce dispositif permet d'obtenir une sinusoïde de fréquence triple à partir d'un triangle. C'est donc un tripleur de fréquence.

8,1V

52. Filtrage d'un signal périodique

a) $T = \frac{1}{f} = 20 \text{ ms}$ et $\omega = 2\pi f = 314 \text{ rad/s}$

b) Coefficients en cosinus : $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E \sin(\omega t) \cos(n\omega t) dt$
 $a_n = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E \sin((n+1)\omega t) + \sin((1-n)\omega t) dt$

Il faut séparer deux cas :

$n=1$

$$a_1 = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E \sin(2\omega t) dt = 0$$

$n \neq 1$

$$a_n = \frac{1}{T} \left[\left[-\frac{E}{(n+1)\omega} \cos((n+1)\omega t) \right]_0^{\frac{T}{2}} + \left[\frac{E}{(n-1)\omega} \cos((n-1)\omega t) \right]_0^{\frac{T}{2}} \right]$$

$$a_n = -E \frac{1 + \cos n\pi}{\pi(n^2 - 1)} \text{ et dans les deux cas}$$

$a_n = 0$ si n impair et $a_n = \frac{2E}{\pi(1-n^2)}$ si n pair
--

La valeur moyenne de la fonction vaut

$$\frac{a_0}{2} = \frac{E}{\pi}$$

Coefficients en sinus : $b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E \sin(\omega t) \sin(n\omega t) dt$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E \cos((n-1)\omega t) - \cos((n+1)\omega t) dt$$

On sépare encore les deux cas

$$\underline{n=1}$$

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E \sin^2(\omega t) dt = \frac{E}{2}$$

$$\underline{n \neq 1}$$

$$b_n = \frac{1}{T} \left(\left[-\frac{E}{(n-1)\omega} \sin((n-1)\omega t) \right]_0^{\frac{T}{2}} - \left[\frac{E}{(n+1)\omega} \sin((n+1)\omega t) \right]_0^{\frac{T}{2}} \right) = 0$$

Finalement (attention que des termes n impairs) :

$$s(t) = E \left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin(\omega t) - \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{3} \cos 2\omega t + \frac{1}{15} \cos 4\omega t + \dots + \frac{1}{n^2-1} \cos n\omega t + \dots \right) \right]$$

c) On note $\underline{Z} = \frac{jC\omega}{R_C + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R_C}{1 + jR_C C\omega}$ l'impédance du condensateur C en parallèle sur la résistance R_C . Par la formule du diviseur de tension :

$$\underline{H(j\omega)} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R} = \frac{\frac{R_C}{1 + jR_C C\omega}}{\frac{R_C}{1 + jR_C C\omega} + R} = \frac{R_C}{R_C + R(1 + jR_C C\omega)} = \frac{\frac{R_C}{R + R_C}}{1 + j \frac{RR_C C\omega}{R + R_C}}$$

On reconnaît une fonction de transfert d'un passe-bas du premier ordre :

$$\underline{H(j\omega)} = \frac{G_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{avec} \quad G_0 = \frac{R_C}{R + R_C} \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{R + R_C}{CR R_C}$$

Numériquement, $G_0 = 0,5$ et $\omega_c = 20 \text{ rad/s}$

d) Chaque composante spectrale de s est affectée différemment par le filtre. Le terme continu (de pulsation nulle) subit le gain G_0 tandis que le terme à la pulsation fondamentale ω subit le gain $G(\omega) = \frac{G_0}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}$ et ainsi de suite ($G(2\omega), G(4\omega), \dots$)

$$\sin(\omega t) \sin(n\omega t) dt$$

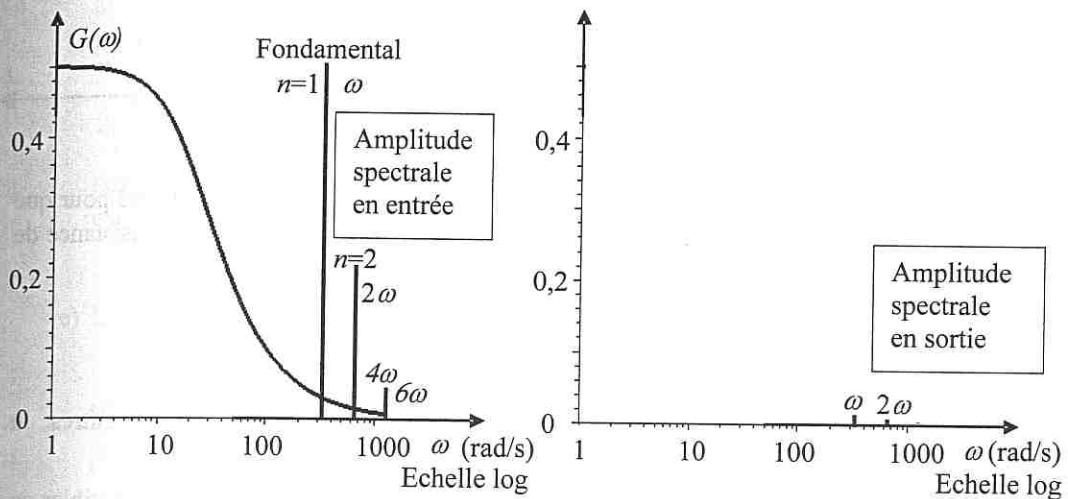
$$t) dt$$

$$(n+1)\omega t \Big]_0^{\frac{T}{2}} = 0$$

$$\left[\frac{1}{n^2-1} \cos n\omega t + \dots \right]$$

densateur C en parallèle

Pour illustrer cela, on peut tracer un graphe de l'amplitude spectrale du signal d'entrée (sans se préoccuper de la phase, termes en sinus ou cosinus) en fonction de ω et y porter l'allure du diagramme de $G(\omega)$. On ne retrouve pas ici l'allure connue du diagramme de Bode d'un passe-bas premier ordre, car l'échelle choisie en ordonnée n'est pas logarithmique. Le terme continu serait en $\omega=0$, à l'infini à gauche, et n'apparaît donc pas sur le graphe. On voit que les pulsations présentes dans le spectre de l'entrée sont largement hors de la bande passante et donc mal transmises par le filtre.



Le graphe de droite représente le spectre du signal de sortie de sortie.

- e) Il ne reste donc pratiquement en sortie que la composante continue de valeur $\frac{1}{\pi}$ affectée du gain G_0 , donc de valeur $\frac{G_0 E}{\pi}$.

Le terme correctif est, avec un bonne approximation le terme fondamental à la pulsation ω (le terme de pulsation 2ω est à peu près cinq fois plus petit).

La partie variable du signal de sortie est donc environ :

$$\sin(\omega t + \arg(H(j\omega)))$$
 dont seule l'amplitude nous intéresse ici, soit :

$$\frac{1}{2} G(\omega) = \frac{EG_0}{2\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

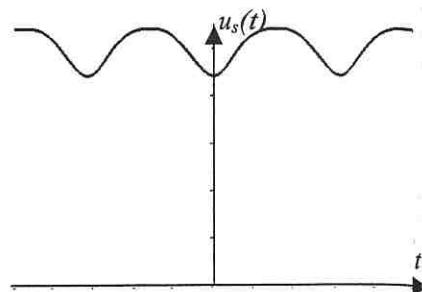
on en déduit : $\tau = \frac{2\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}{\frac{G_0 E}{\pi}}$ soit $\tau = \frac{\pi}{2\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$

Numériquement, $\boxed{\tau = 0,10 = 10 \%}$

$$v_s(t) \approx \frac{E}{\pi} \left[1 + \tau \sin(\omega t + \arg(H(j\omega))) \right] \approx \frac{E}{\pi} \left[1 + \tau \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{E}{\pi} [1 - \tau \cos(\omega t)]$$

Dont l'allure en fonction du temps est donnée ici (on a ajouté la contribution de l'harmonique 2 dans ce tracé pour plus de précision).

L'application est la production d'un courant pratiquement continu dans la résistance de charge R_C (à partir de la tension alternative redressée monoalimentation). On peut ainsi réaliser la conversion alternatif – continu (souvent à la fréquence industrielle de 50Hz).



Remarque : il faut utiliser un condensateur de filtrage de grande capacité pour que la coupure du filtre ω_c soit suffisamment basse (d'autant plus que la résistance de charge est petite). Ceci justifie les valeurs numériques employées.

53. Oscillateur quasi sinusoïdal à déphaseur

a) L'AO3 est monté en inverseur donc : $\frac{V_1}{V_3} = -\frac{R_2}{R_1} = A$ et les deux autres en

déphasage d'où : $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_2} = H$ soit : $\frac{V_3}{V_1} = H^2$. Ces égalités ne sont compatibles en

régime sinusoïdal à ω que si $A = A_0 = \frac{1}{H^2}$ soit :

$$A_0 = \left(\frac{1+j\tau\omega}{1-j\tau\omega} \right)^2 = \frac{1+2j\tau\omega-\tau^2\omega^2}{1-2j\tau\omega-\tau^2\omega^2} \Rightarrow A_0(1-2j\tau\omega-\tau^2\omega^2) = 1+2j\tau\omega-\tau^2\omega^2$$

soit en séparant partie réelle et partie imaginaire :

$$\begin{cases} A_0(1-\tau^2\omega^2) = 1-\tau^2\omega^2 & (\text{Re}) \\ -A_0 2j\tau\omega = A_0 2j\tau\omega & (\text{Im}) \end{cases}$$

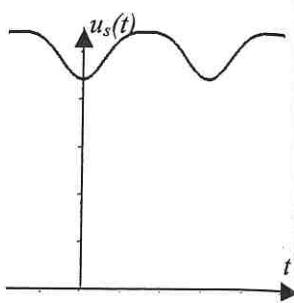
Pour avoir un oscillateur sinusoïdal il faut que $\omega \neq 0$. Dans ce cas, (Im) implique $A_0 = -1$, tandis que (Re) impose la pulsation d'oscillation $\omega = \frac{1}{\tau}$.

b) En pratique, le choix de $A = A_0 = -1$ n'est pas pertinent : la moindre variation des valeurs des composants peut suffire à faire disparaître les oscillations.

c) Les deux premiers AO fonctionnant en régime linéaire, on a encore :

$$\frac{V_3}{V_1} = H^2 = \frac{1-2j\tau\omega-\tau^2\omega^2}{1+2j\tau\omega-\tau^2\omega^2} \text{ soit : } \tau^2 \frac{d^2V_3}{dt^2} + 2\tau \frac{dV_3}{dt} + V_3 = \tau^2 \frac{d^2V_1}{dt^2} - 2\tau \frac{dV_1}{dt} + V_1.$$

$$\left[\dots \right] = \frac{E}{\pi} [1 - \tau \cos(\omega t)]$$



grande capacité pour que plus que la résistance de l'entrée soit compatible avec les deux autres en

et les deux autres en

s ne sont compatibles en

$$\omega^2 = 1 + 2j\tau\omega - \tau^2\omega^2$$

ns ce cas, (Im) implique $\omega = \frac{1}{\tau}$.

la moindre variation des oscillations.

a encore :

$$\tau^2 \frac{d^2V_1}{dt^2} - 2\tau \frac{dV_1}{dt} + V_1.$$

L'AO3 fonctionne en régime linéaire on a : $V_1(t) = A V_3(t)$ d'où :

$$(1-A)\tau^2 \frac{d^2V_3}{dt^2} + 2(1+A)\tau \frac{dV_3}{dt} + (1-A)V_3 = 0 \quad \text{ou en divisant par } (1-A)\tau^2,$$

$$\text{différent de zéro puisque } A \text{ est négatif : } \frac{d^2V_3}{dt^2} + 2\left(\frac{1+A}{1-A}\right)\frac{1}{\tau} \frac{dV_3}{dt} + \frac{1}{\tau^2} V_3 = 0$$

d) Pour $A = A_0 = -1$ on retrouve l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique : $\frac{d^2V_3}{dt^2} + \frac{1}{\tau^2} V_3 = 0$ de pulsation $\frac{1}{\tau}$. Si l'on choisit $A > A_0$ alors $2\left(\frac{1+A}{1-A}\right) > 0$ et tous les coefficients de l'équation différentielle sont de même signe : la solution tend donc vers zéro : il ne s'agit pas d'un oscillateur. Il faut choisir $A < A_0$.

e) L'équation devient : $\frac{d^2V_3}{dt^2} - \frac{\varepsilon}{\tau} \frac{dV_3}{dt} + \frac{1}{\tau^2} V_3 = 0$. Le discriminant de l'équation caractéristique vaut : $\Delta = \left(-\frac{\varepsilon}{\tau}\right)^2 - \frac{4}{\tau^2} \approx -\left(\frac{2}{\tau}\right)^2$ et ses deux racines sont : $\frac{\varepsilon \pm 2j}{2\tau}$. Comme elles sont complexes la solution est pseudopériodique et comme leur partie réelle est positive, la solution est amplifiée : $V_3 = e^{\frac{\varepsilon t}{\tau}} \left[\alpha \cos\left(\frac{t}{\tau}\right) + \beta \sin\left(\frac{t}{\tau}\right) \right]$.

f) L'amplitude de V_3 augmente au cours du temps et finit donc toujours par atteindre la tension de saturation des AO. C'est cette saturation qui limite l'amplitude des oscillations.

Si l'AO3 est saturé, alors $V_1 = \pm V_{sat}$. Si $V_1 = V_{sat}$, alors $V_3 = V_2 = V_1 = V_{sat}$ puisque $H = 1$ pour $\omega = 0$. Le potentiel de l'entrée inverseuse de l'AO3 vaut alors : $V_- = \frac{V_{sat}/R_1 + V_{sat}/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} > V_+ = 0$, la sortie de l'AO3 doit donc être négative : elle

ne peut pas garder la valeur V_{sat} et décroît. L'AO3 ne reste pas saturé, il revient en régime linéaire et les oscillations continuent.

g) Cette courbe montre l'existence d'un régime transitoire amplifié suivi d'un régime quasi-sinusoidal limité par la saturation des amplis op. A cause de cette saturation, les oscillations ne sont pas rigoureusement sinusoidales.