

Diffraction de Fraunhofer

Niveau : Licence 3 (vérifier que c'est pas CPGE 2e)

Pré-requis :

- Optique géométrique
- Interférences
- Transformée de Fourier

Bibliographie :

- Optique (une approche expérimentale et pratique), Sylvain Houard, De Boeck
-

Introduction

Newton : vision corpusculaire

Grimaldi 1665 : écrit un livre où il décrit une nouvelle propriété lumière → diffraction (4e mode propagation après la ligne droite/réflexion/réfraction)

Newton essaie de l'expliquer par des forces attractives ou répulsives qui changent la trajectoire de la lumière corpusculaire. Mais ce n'était pas convaincant.

A la même époque (Fin 17^e siècle) : Huygens a une vision ondulatoire en opposition avec Newton. Par sa théorie des rondelettes secondaires, il retrouve les lois de la réfraction et de la réflexion. Mais il lui manque le calcul intégral pour expliquer la diffraction

Le calcul mathématique est basé sur une sommation à l'infini d'ondelette et l'intégrale était juste en train d'être inventé par Newton et Leibniz. Donc Huygens n'avait pas les outils mathématiques nécessaires pour expliquer ce phénomènes.

En 1818 : Fresnel donne une théorie quantitative de la diffraction.

Académie des sciences : Poisson et Arago font les calculs et trouvent paradoxalement de la lumière dans l'ombre géométrique d'un objet, confirmé plus tard par l'expérience

Quand dimensions $> \lambda \rightarrow$ optique géométrique (approximations)

Quand obstacle de faible dimension \rightarrow diffraction

La diffraction s'observe quand un faisceau lumineux rencontre un obstacle ou une ouverture de très petite dimension et est caractérisée par une déviation des rayons lumineux par rapport à la direction prévue par l'optique géométrique.

Expérience qualitative montrant la diffraction de Fraunhofer à travers une fente fine.

Grimaldi a fait 2 expériences. La 1ère : lumière soleil pénètre dans une petite ouverture puis rencontre un objet fin comme un cheveu. Il n'observe pas sur l'écran une séparation franche entre ombre du cheveu et lumière mais plutôt une frontière non définie et que de chaque côté de l'ombre apparaît une série de 3 franges (irritées de bleu vers l'intérieur et de rouge vers l'extérieur). Les franges suivent le contour de la zone d'ombre et leur intensité diminue plus on s'éloigne de l'ombre.

Dans la 2nd expérience, il place comme objet diffractant un écran opaque comportant une petite ouverture. La tache sur l'écran éloigné est plus grande que celle qui résulterait d'une simple propagation rectiligne de la lumière.

C'est lui qui nomme ce phénomène "diffraction".

I. Le phénomène de la diffraction

A. Principe de Huygens

A partir d'une analogie avec les ondes concentriques observées à la surface de l'eau, Huygens émet l'hypothèse que la lumière est une onde qui se propage de proche en proche selon le principe dit des "ondelettes secondaires".

Si $\Sigma(t)$ est la surface d'onde à l'instant t donc chaque point de $\Sigma(t)$ se comporte comme une source secondaire émettant à son tour une onde sphérique. La nouvelle surface d'onde est formée de l'enveloppe des ondelettes sphériques secondaires.

Ce principe permet de retrouver les lois de réflexion et réfraction mais a 2 défauts :

- Il ne donne que les surfaces d'onde et pas l'expression de l'onde elle-même
- Il ne fait pas intervenir la λ . La forme de la surface d'onde est identique quelle que soit la taille de l'obstacle ce qui est en contradiction avec l'expérience.

B. Principe de Huygens-Fresnel

Deux siècles après Huygens, Fresnel a élaboré une théorie de la diffraction qui repose sur le principe de "Huygens-Fresnel".

Il postule que l'onde diffractée par une ouverture ou par un obstacle opaque de surface Σ est la somme des rondelettes secondaires fictives émises en chacun de ses points.

L'énoncé du Principe :

Soit une source ponctuelle S de lumière monochromatique et une surface Σ entourant S

- Chaque surface élémentaire dS_P autour d'un point P de Σ , atteinte par l'onde incidente venant de S , se comporte comme une source secondaire ponctuelle qui émet donc une onde sphérique. Cette onde secondaire a la même phase au point P que l'onde incidente et une amplitude proportionnelle à l'amplitude de l'onde incidente en P et à l'élément de surface dS_P
- Toute rondelette secondaire possède même fréquence que l'onde directe
- Les sources secondaires sont cohérentes entre elles : les ondes secondaires interfèrent au point M

Donc ce principe combine le principe des ondelettes secondaires (de Huygens) et le principe de superposition des ondes (à la base de la théorie des interférences).

Donc il ramène le problème de la diffraction à un problème d'interférences à une infinité d'ondes cohérentes.

Fresnel utilise des vibrations sinusoïdales (forme périodique la plus simple) et calcule leur somme par des intégrales (qui n'existaient pas au XIX^e siècle).

Soit l'amplitude de l'onde incidente : $\underline{a}(P) = A(P)e^{i\phi(P)}$

L'onde sphérique émise par la source secondaire de surface dS_P autour du point P a une amplitude en M de la forme : $\frac{\alpha}{PM}e^{i(\phi_0+k_0(PM))}$ avec $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ et $(PM) = n\overline{PM}$

Avec $\alpha \propto A(P) dS_P = C_0 A(P) dS_P$ tq C_0 la constante de proportionnalité et $[C_0] = L^{-1}$ et $\phi_0 = \phi(P)$

Ce C_0 contient le coefficient d'inclinaison qui l'angle entre la direction \overrightarrow{PM} et la normale à la surface Σ (après avoir traversé la pupille $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PM}$). On rassemble tout dans C_0 car on considère l'angle varie peu sur la surface ou que le champ est perpendiculaire à la surface.

Alors l'amplitude de l'onde secondaire en M est :

$$d\underline{a}(M) = C_0 \frac{A(P)}{PM} e^{i(\phi(P)+k_0(PM))} dS_P = C_0 \frac{\underline{a}(P)}{PM} e^{ik_0(PM)} dS_P$$

Puisque les différentes sources secondaires sont cohérentes donc les amplitudes s'ajoutent.

L'expression mathématique du principe d'Huygens-Fresnel :

$$\underline{a}(M) = C_0 \iint_{P \in \Sigma} \frac{\underline{a}(P)}{PM} e^{ik_0(PM)} dS_P$$

Puisqu'on connaît pas C_0 donc les amplitudes et les éclairements diffractés seront connus à une constante multiplicative près.

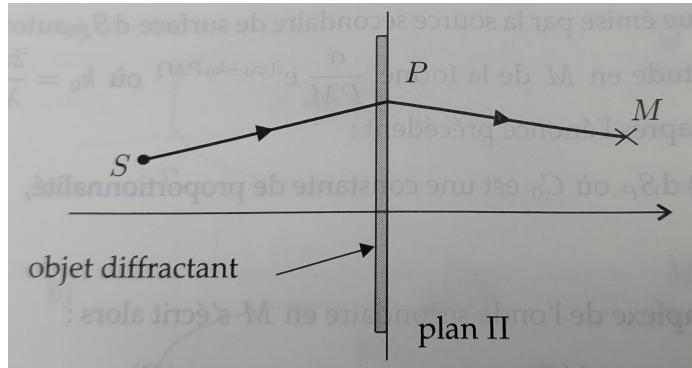
C. Le calcul de la diffraction

Considérons des objets diffractants plans. Ces objets comportent des détails fins de dimensions < qq dixième de mm comme une petite ouverture dans un écran opaque (pupille diffractante) ou un fil tendu (cheveu ~ 70 micron) par exemple.

Cherchons l'amplitude et l'intensité en un point M situé après l'objet diffractant (éclairé en lumière monochromatique).

Appliquons alors le principe d'Huygens-Fresnel au plan Π situé juste derrière l'objet.

Dans l'intégrale, on remplace $\underline{a}(P)$ par $\underline{a}_{obj}(P)$ car modifiée par la présence de l'objet.



Cas d'une pupille diffractante :

Lorsque l'objet est une ouverture de petite taille dans un écran opaque, l'amplitude dans le plan Π est :

- $\underline{a}_{obj}(P) = \underline{a}(P)$ si $P \in$ ouverture
- $\underline{a}_{obj}(P) = 0$ si $P \notin$ ouverture

L'amplitude diffractée est alors : $\underline{a}(M) = C_0 \iint_{P \in \text{ouverture}} \frac{\underline{a}(P)}{PM} e^{ik_0(PM)} dS_P$

Les sources secondaires situées dans la partie opaque sont "éteintes".

Cas d'un objet diffractant quelconque :

Dans le cas général :

- L'amplitude devient $A_{obj}(P) = t(P)A(P)$ où $t(P)$ est un facteur sans dimension compris entre 0 et 1
- Le retard de phase devient $\phi_{obj}(P) = \phi(P) + \psi(P)$

On définit la fonction de transparence de l'objet : $\underline{t}(P) = t(P)e^{i\psi(P)}$

Donc $\underline{a}(P) = A(P)e^{i\phi(P)}$ deviendra $\underline{a}_{obj}(P) = \underline{t}(P)\underline{a}(P)$

L'amplitude diffractée est alors : $\underline{a}(M) = C_0 \iint_{P \in \Pi} \frac{\underline{t}(P) \underline{a}(P)}{PM} e^{ik_0(PM)} dS_P$

Fonction de transparence d'une pupille :

- $\underline{t}(P) = 1$ si $P \in$ ouverture
- $\underline{t}(P) = 0$ si $P \notin$ ouverture

Et on retrouve bien la formule d'avant.

Fonction de transparence d'un objet de phase :

Un objet de phase a pour seul effet de déphaser la lumière. Sa fonction de transparence prend des valeurs complexes de module constante $t(P) = 1$.

Donc si on regarde l'objet directement, il est simplement transparent.

Les variations de l'argument $\psi(P)$ de la fonction de transparence peuvent en revanche donner une figure de diffraction.

Exemple :

Soit une lame de verre d'indice n_v et d'épaisseur variable $e(P)$. Lorsque la lumière traverse cette lame au niveau de P et sous incidence quasiment normale :

- son chemin optique est augmenté de $\delta(P) = (n_v - n_{air})e(P)$

- son retard de phase est augmenté de $\psi(P) = \frac{2\pi\delta(P)}{\lambda_0}$

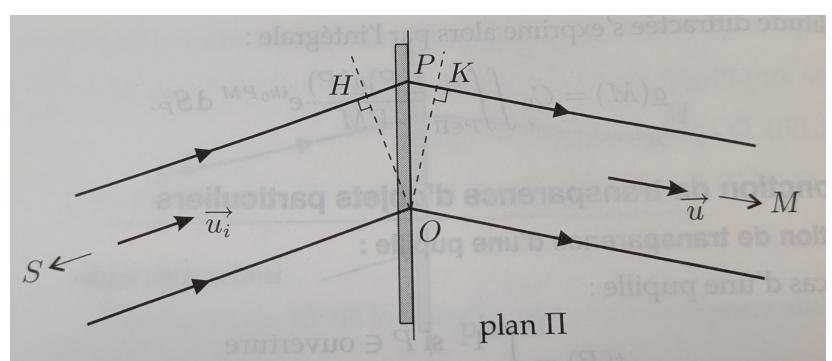
La fonction de transparence est alors : $\underline{t}(P) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda_0}(n_v - n_{air})e(P)}$

Pour la manip acousto-optique : $\delta(P) = \Delta n e(P)$ mais c'est la variation d'indice entre zone de compression et de détente (dans l'eau). Ces nouveaux n (dans les 2 zones) sont comme des trous placés de façon régulière donc forment un réseau.

II. Diffraction de Fraunhofer (diffraction à l'infini)

A. Conditions de Fraunhofer

- La source S éclairant l'objet diffractant est située à l'infini avec $-\vec{u}_i$ le vecteur unitaire pointant vers S
- Le point d'observation M est situé à l'infini avec \vec{u} le vecteur



unitaire pointant vers M

B. Retard de phase d'une ondelette diffractée

Cas d'une pupille diffractante :

Le retard de phase est :

$$\Phi_P(M) = \phi(P) + k_0(PM) = \phi(S) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(SP) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(PM) = \phi(S) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(SPM)$$

Donc elle dépend du chemin optique (SPM) qui est infini ici !

Pour contourner ce problème, on prend un rayon de référence : celui qui arrive en M et qui a été diffracté en un point de référence quelconque O . On choisit O le centre de symétrie de l'objet pour faciliter les calculs. On s'intéresse alors au déphasage entre l'onde diffractée en O et celle diffractée en P :

$$\Phi_{P/O}(M) = \Phi_P(M) - \Phi_O(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} [(SPM) - (SOM)] \text{ ce qui ramène à calculer la}$$

différence de marche $\delta = (SPM) - (SOM)$.

On considère alors K et H les projetés \perp de O sur les rayons SP et PM .

L'onde incidente est plane et d'après le théorème de Malus, les plans d'ondes sont $\perp \vec{u}_i$

Alors O et H sont dans le même plan d'onde et $(SO) = (SH)$:

$$(SP) - (SO) = (HP) = \overrightarrow{HP} = \vec{u}_i \cdot \overrightarrow{OP}$$

De manière analogue on trouve : $(PM) - (OM) = (PK) = \overrightarrow{PK} = -\vec{u} \cdot \overrightarrow{OP}$

$$\text{Donc } \delta = -(\vec{u} - \vec{u}_i) \cdot \overrightarrow{OP} \quad \text{et} \quad \Phi_{P/O}(M) = -\frac{2\pi}{\lambda_0}(\vec{u} - \vec{u}_i) \cdot \overrightarrow{OP}$$

Cas d'un objet diffractant quelconque :

Le retard de phase est augmenté du retard de phase supplémentaire $\psi(P) = \arg(\underline{t}(P))$ dû à l'objet. En prenant le même rayon de référence d'avant :

$$\Phi_{P/O}(M) = -\frac{2\pi}{\lambda_0}(\vec{u} - \vec{u}_i) \cdot \overrightarrow{OP} + \arg(\underline{t}(P))$$

C. Amplitude d'une ondelette diffractée

L'onde incidente étant plane : $A(P) = A(O) = A_0$

En plus en pratique on peut confondre les distance PM et OM (car grandes devant OP).

Si on pose $C = \frac{C_0}{OM}$ alors l'amplitude en M de l'ondelette diffractée par dS_P est :

- Dans le cas d'une pupille : $CA_0 dS_P$
- Dans le cas d'un objet quelconque : $CA_0 t(P) dS_P$

Donc on voit bien que l'amplitude de l'ondelette est proportionnelle à dS_P et l'amplitude A_0 de l'onde incidente.

D. Expression du principe Huygens-Fresnel dans les conditions de Fraunhofer

Dans le cas d'un objet diffractant quelconque :

$$\underline{a}(M) = CA_0 e^{i\Phi_0(M)} \iint_{P \in \Pi} \underline{t}(P) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda_0} (\vec{u} - \vec{u}_i) \cdot \vec{OP}} dS_P$$

Avec $\Phi_0(M) = \phi(S) + \frac{2\pi}{\lambda_0} (SOM)$ la phase en M de l'onde issue de S et diffractée par le point de référence O.

Remarque :

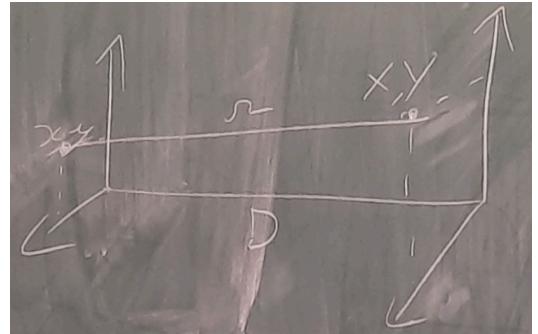
les expériences s'interprètent à partir de l'éclairement $\varepsilon(M) = \frac{1}{2} K \underline{a}(M) \underline{a}(M)^*$ donc le facteur de phase $e^{i\Phi_0(M)}$ n'a pas d'influence.

III. Montage à 2 lentilles

E. Diffraction de Fresnel et diffraction de Fraunhofer

Onde sphérique sur la forme : $A \propto \frac{e^{ikr}}{\frac{r}{D} - X}$

Développement limité à l'ordre 1 en $\frac{x - X}{D}$ et $\frac{y - Y}{D}$
pour trouver r



$$A \propto \exp(ikD) \exp\left(\frac{ik(X^2 + Y^2)}{2D}\right) \exp\left(\frac{ik(xX + yY)}{D}\right) \exp\left(\frac{ik(x^2 + y^2)}{2D}\right)$$

Diffraction de Fraunhofer : On néglige le terme de déplacements sur la pupille

$$\exp\left(\frac{ik(x^2 + y^2)}{2D}\right) \text{ si } D \gg \frac{\pi(x^2 + y^2)}{2} \lambda$$

Application numérique :

x et y = 0.1mm donc D \gg 5cm

x et y = 1mm donc D \gg 5m

x et y = 1cm donc D \gg 500m

L'approximation est moins valable quand la taille de la tâche augmente.

F. Montage à deux lentilles

Présentation du montage

On a une pupille diffractante \rightarrow on dessine donc des rayons diffractés (\vec{K}_l et \vec{K}_d)

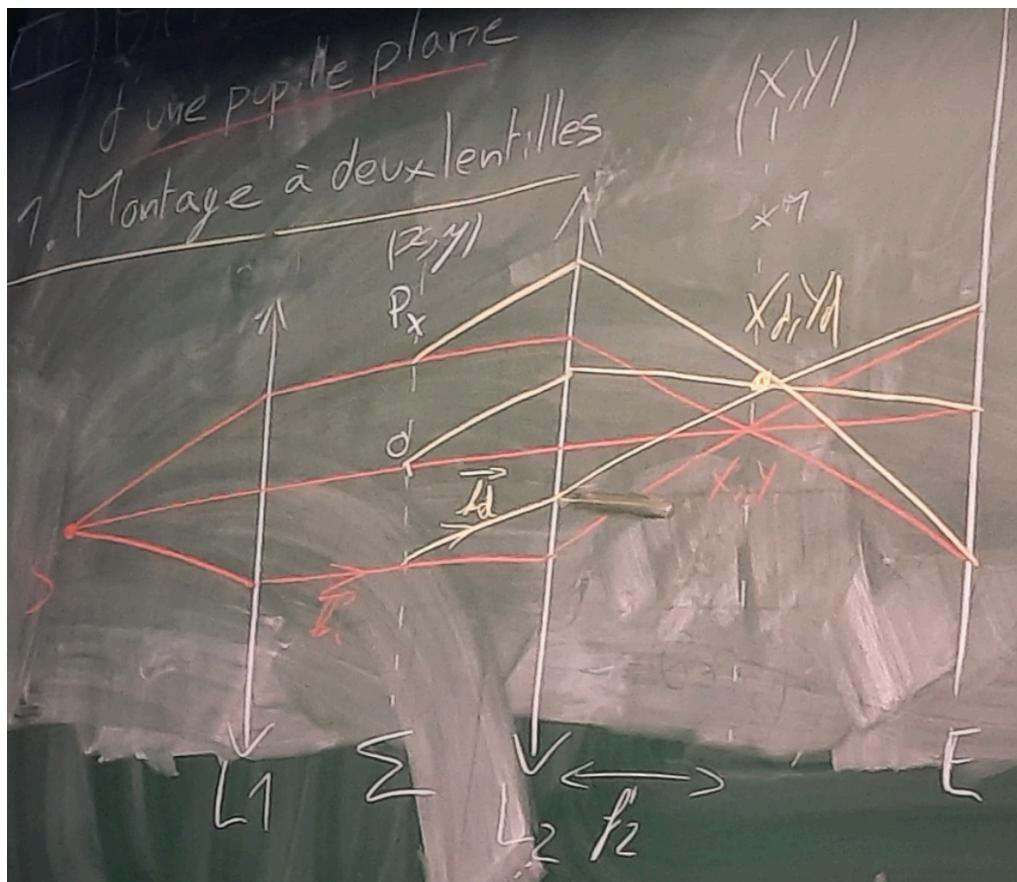
Lorsque l'on filtre, on voit que l'intensité lumineuse change sur l'écran, on va l'interpréter dans la partie suivante

G. Diffraction à l'infini et fréquence spatiale

D'après Huygens-Fresnel : $d\underline{E}_P(M, t) = \underline{K}_t(P) \underline{E}_0 \exp(i(\omega t - \phi_i(P))) \exp(-i\phi_{P \rightarrow M})$

t : transmittance

K : constante de Kirchhoff (Facteur d'obliquité)



$$\phi_P(M) = \phi_i(M) + \phi_{P \rightarrow M}$$

$$\phi_O(M) = \phi_i(O) + \phi_{O \rightarrow M}$$

$$\underline{E}(M, t) = \iint_{xOy} \underline{K}_t(P) \underline{E}_0 \exp(i(\omega t - \phi_i(P))) \exp(-i\phi_{P \rightarrow M}) dx dy$$

$$\underline{E}(M, t) = \iint_{xOy} \underline{K}_t(P) \underline{E}_0 \exp(i[\omega t - \phi_O(P)]) \exp(-i[\phi_P(M) - \phi_0(M)]) dx dy$$

On reconnaît que $\underline{E}_0 \exp(i[\omega t - \phi_O(M)]) = \underline{E}_0(M, t)$

$$\text{Donc } \phi_i(P) - \phi_O(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_{OP}(M)$$

$$\delta_{OP}(M) = (HP) - (OH) = n(\vec{u}_l - \vec{u}_d) \cdot \overrightarrow{OP}$$

$$\phi_i(P) - \phi_O(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n(\vec{u}_l - \vec{u}_d) \cdot \overrightarrow{OP} = -(\vec{k}_l - \vec{k}_d) \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{2\pi}{\lambda_0} [(\alpha_i - \alpha_d)x + (\beta_i - \beta_d)y]$$

$$\text{On identifie 2 fréquences spatiales : } u = \frac{(\alpha_i - \alpha_d)}{\lambda} \text{ et } v = \frac{(\beta_i - \beta_d)}{\lambda}$$

Les rayons très diffractés se retrouvent, dans le plan de Fourier, plus loin de l'axe optique que les rayons peu ou pas diffractés.

On retrouve également la transformée de Fourier de la transmittance au niveau du plan focal image, c'est la figure de diffraction.

A présent on va essayer de filtrer le centre. Il ne reste que les rayons diffractés qui apparaissent maintenant blanc.

Questions

Question : Vous avez diffracté un objet complexe, est-ce que vous pouvez nous parler d'objets plus classiques ?

Une fente, TF d'une porte donc sinc

Tracez la fonction sinc en indiquant le lien entre le tracé de la courbe et les caractéristiques géométriques de l'objet diffractant

Entre le centre et le premier 0, il y a $\frac{\lambda f'}{a}$ le zéro suivant se situe à $\frac{2\lambda f'}{a}$

Cette représentation correspond à E, comment peut-on la lier à l'intensité ?

On prend le carré de la fonction précédente.

Où est la figure de diffraction ?

Dans le plan de Fourier

Vous avez parlé de fréquences spatiales, de quoi dépendent-elles ?

Plus un rayon va être diffracté plus il va correspondre à des fréquences spatiales élevées.

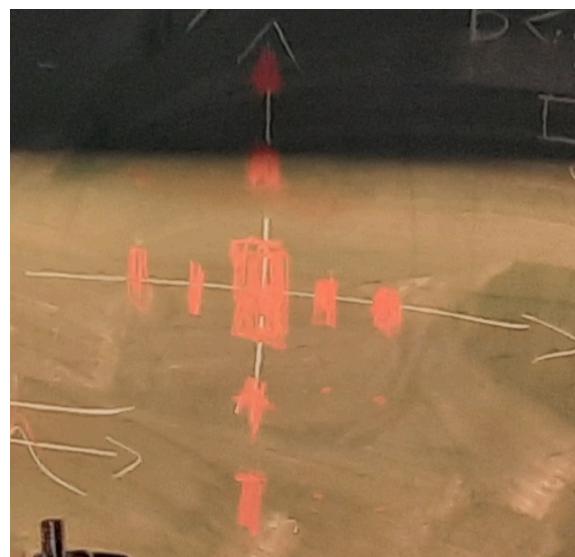
Parlez moi de la tache centrale

Elle donne la limite de résolution. Elle est deux fois plus large que les taches voisines (pour une fente diffractante)

Que se passe-t-il si l'on prend une fente plus petite ?

Les 0 s'écartent

Si on ne prend plus une fente de coté a, mais un rectangle de cotés a et b, que voit-on dans le plan de Fraunhofer ?



On suppose maintenant que vous supprimez la tâche centrale de votre fente (filtrage spatial), que se passe-t-il sur l'écran ?

On va voir les endroits où les rayons sont très diffractés, à savoir les bords qui seront très lumineux et le centre plutôt sombre

Si maintenant on filtre tout sauf le centre, que voit-on sur l'écran ?

Le rectangle, avec les bords clairs. L'intérieur du rectangle et son extérieur sont sombres

Si on prend le complémentaire de la fente à la place de la fente, que va-t-on voir ?

La même chose, théorème de Babinet, la transmittance et son complémentaire donnent les mêmes figures de diffraction.

Si je ne garde que le point en (0,0), je garde la fréquence spatiale nulle

Alors on voit la source ($k=0$) (une tache homogène)

Si je décide de déplacer mon objet diffractant, mettons une fente que je bouge verticalement. Que se passe-t-il dans le plan de Fourier ?

Cela ne va rien changer, le plan de Fourier ne dépend que des angles alpha et beta, pas de la position de l'objet diffractant. On rajoute juste une phase sur le champ et qu'on ne détecte pas en intensité

Si je construis une image avec plein d'objets sur une feuille placés de façon aléatoire, que voit-on ?

La même chose qu'avec un seul mais plus lumineux

Si maintenant on les range, on voit n en intensité ?

Toutes les figures de diffraction sont les mêmes à la phase près. Il va y avoir des interférences entre les différentes figures de diffraction

Est-ce que je peux bouger mon objet entre les lentilles ?

On ne forme plus l'image sur l'écran, mais le plan de Fourier n'est pas modifié, il est toujours dans le plan focal de la deuxième lentille.

Est-ce que la distance entre L1 et L2 a une importance ?

Non

Que se passe-t-il si l'on accolé les deux lentilles et que je place l'objet devant la lentille 1 ?

On obtient une lentille équivalente. On est en train de faire un montage à une lentille ($f'=f'1*f'2/(f'1+f'2)$)

De manière générale, la transformée de Fourier n'est pas en f' . Elle est TOUJOURS dans le plan image de la source ! Il se trouve que dans le montage à deux lentilles, cette image se trouve dans le plan focal image.

Titre : Diffraction de Fraunhofer**Présentée par :** TUGAYE Vincent**Rapport écrit par :** LLOMPART Lucas**Correcteur :** MAITRE Agnès**Date :** 08/11/2022

Bibliographie		
Titre	Auteurs	Éditeur
Optique, une approche expérimentale et pratique	Sylvain Houard	De Boeck
Physique Expérimentale, Optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique	Fruchard, Lidon, Thibierge, Champion, Le Diffon	De Boeck
Introduction to Fourier Optics	Goodman	Robert and Company Publishers

Plan détaillé

(indiquer parties, sous-parties, 1 ou 2 phrases d'explications par sous-partie, et références)

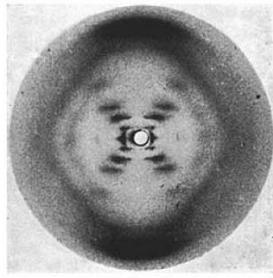
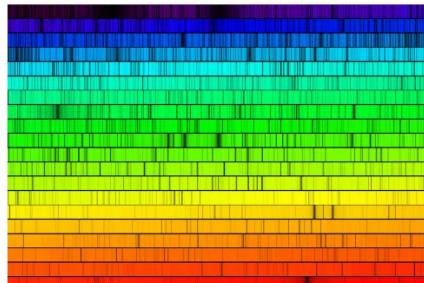
Niveau choisi pour la leçon : L3

- Pré-requis :
- Equation d'onde
 - Interférences
 - Transformée de Fourier

Introduction : Expérience qualitative montrant la diffraction de Fraunhofer à travers une fente fine.



Première image de calibration du James Webb Space Telescope, NASA

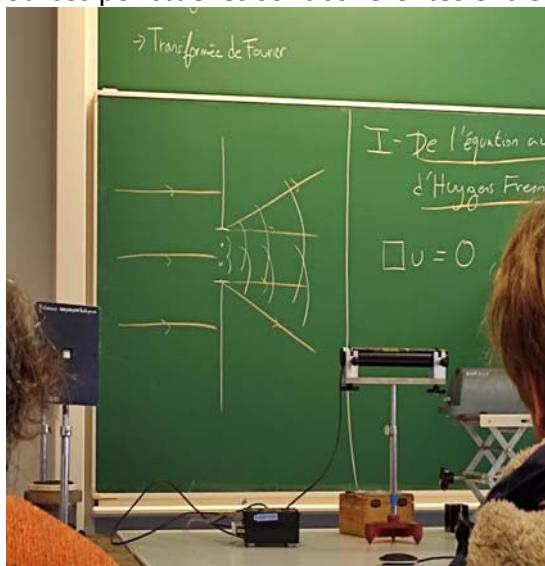
photo 51, image de l'ADN par diffraction aux rayons X
prise par Rosalind Franklin (pris sur wikipedia)

Spectre solaire, LESIA / Observatoire de Paris

Contexte: On retrouve aujourd'hui de nombreux domaines où la diffraction de Fraunhofer intervient :

- Diffraction avec le James Webb Space Telescope.
- Etude de la matière : ADN
- Etude de spectres : avec un réseau pour étudier les raies d'absorptions du spectre solaire.

Principe d'Huygens Fresnel : chaque point de l'ouverture se comporte comme une source secondaire ponctuelle. Ces sources ponctuelles sont cohérentes entre elles et interfèrent.



I) De l'équation d'onde au principe d'Huygens Fresnel. 3'30

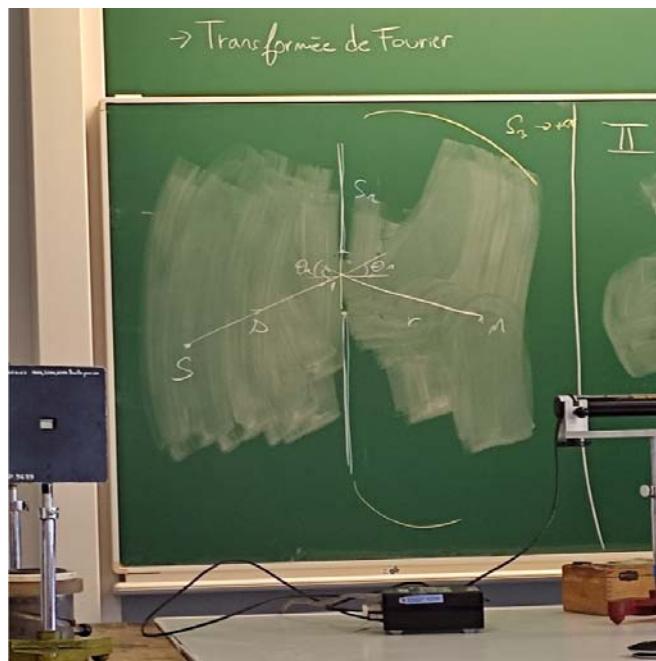
Equation d'onde → équation de Helmholtz.

$$\square u = 0, \quad u = U(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Sur une surface fermée S, il est alors possible d'utiliser l'identité de Green pour trouver :

$$U(M) = \iint (U \vec{\nabla} G - G \vec{\nabla} U) \cdot d\vec{S}$$



On suppose que $U(P)$ vaut $U_S(P)$ sur S_1 et est nul sur S_2 (surface opaque de l'objet diffractant) et S_3 (qui ferme la surface fermée $S_1-S_2-S_3$).

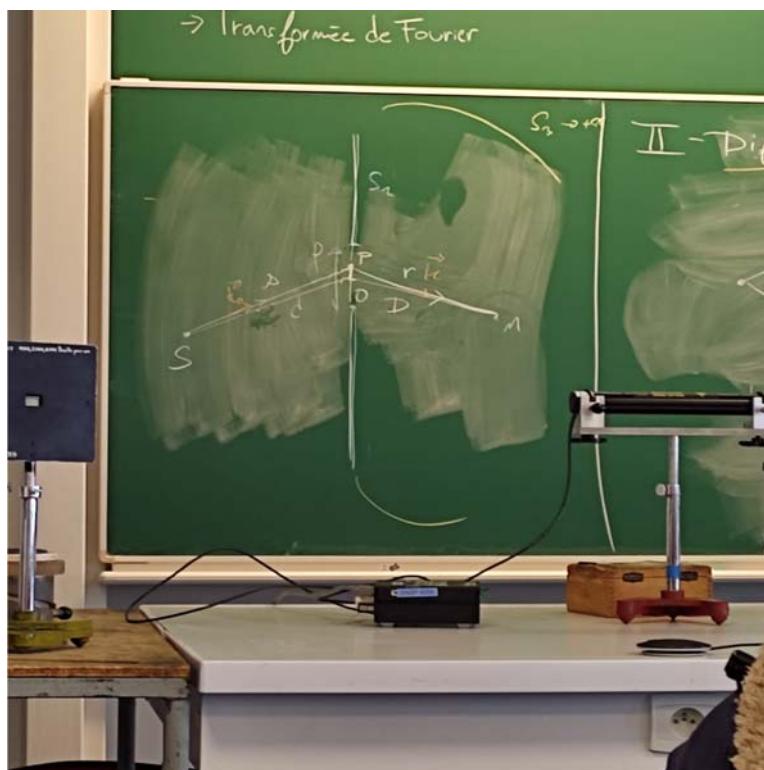
Le gradient de U sera alors nul sur S_2 et S_3 .

Pour des distances de la source et de l'observation très grandes devant λ

$$U(M) = \frac{1}{i\lambda} \iint U_0 \cdot K(P) \frac{e^{ik(r+\Delta)}}{r\Delta} dS$$

$K(P)$ vaut environ 1 en approximation paraxiale.
on retrouve le principe d'Huygens-Fresnel.

II) Diffraction de Fraunhofer 13'00



Approximation paraxiale :

$$r \simeq |D| + \frac{1}{2} \frac{|D|}{D^2} OP^2 - \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}}{OM}$$

$$s \simeq |d| + \frac{1}{2} \frac{|d|}{d^2} OP^2 - \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OS}}{OS}$$

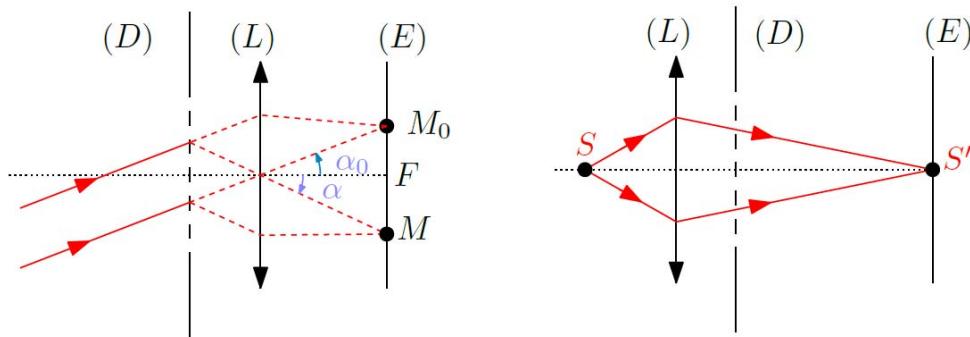
En combinant ces deux résultats dans le principe d'Huygens Fresnel, on obtient le résultat suivant :

$$U(M) = U_0 e^{i\phi} \iint e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \overrightarrow{OP} + 2\pi F \cdot OP^2} dS$$

$$F = \frac{\rho^2}{2\lambda} \left(\frac{|d|}{d^2} + \frac{|D|}{D^2} \right)$$

F : nombre de Fresnel

La diffraction de Fraunhofer est approchée pour $F \ll 1$



1. pour la figure de gauche on peut estimer que $d=\infty$
- 2.

Dans le cas de la figure de droite, la relation précédente est modifiée. En effet la lentille modifie la surface d'onde et sa focale doit apparaître dans la relation. On montre qu'on est en Fraunhofer exact quand le plan d'observation est dans le plan géométrique de la source

Expérience : 21'30 → 23'

Apparition d'une tâche de diffraction avec un laser et une lentille: conditions de Fraunhofer.
(onde plan du laser sur l'objet diffractant et focalisation)

Dans le cas de Fraunhofer :

$$U(M) = U_0 \cdot T_F(t) [\vec{k} - \vec{k}_0]$$

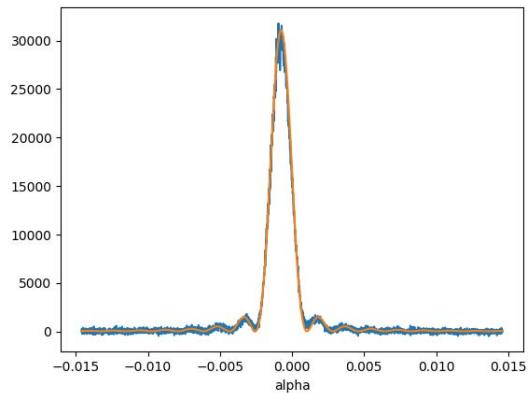
Nous pouvons ainsi récupérer toutes les propriétés de la diffraction de Fraunhofer avec les propriétés de la TF.

Propriétés de la diffraction de Fraunhofer :

- ⇒ Invariance par translation.
- ⇒ Dilatation. Si l'on referme la fente, on élargit la figure de diffraction : augmentation de la dispersion de la lumière en sortie de la fente.
- ⇒ Relation d'incertitude : position / direction. Critère de Rayleigh permettant de distinguer deux points sur un écran placé dans le plan de Fraunhofer. Un 1^{er} objet **y** forme **une image** constituée par une figure de diffraction et si un second objet est trop près, il ne sera pas possible de le distinguer car les deux figures de diffraction vont se superposer.

Expérience, mesure quantitative : 32'30 → 36'20

Récupérer la figure de diffraction sur une barrette CCD. Programme Python pour ajuster la figure à l'aide d'une fonction sinc^2 (TF d'une fonction porte).



I) Diffraction par N structures identiques. 36'20

Réseau

Facteur de structure :

$$S = e^{\frac{ik(N-1)d}{2}} \frac{\sin(\frac{kNd}{2})}{\sin(\frac{kd}{2})}$$

Questions posées par l'enseignant (avec réponses)

(l'étudiant liste les questions posées, ainsi que les réponses données par l'enseignant. Si certaines réponses manquent, l'enseignant pourra compléter le document)

Sur la première expérience, il n'y avait pas de lentille, pourquoi ? Il fallait effectivement utiliser soit utiliser une lentille, et mettre l'écran dans le foyer de la lentille, soit placer l'écran, à très grande distance (condition de Fraunhofer) de l'objet diffractant. **De manière générale le message essentiel de la leçon est que la figure de diffraction de Fraunhofer se trouve dans le plan image de la source qui éclaire l'objet diffractant**

R(z) joue un rôle dans la question qu'on se pose ? En quoi est-il important dans le cas d'une diffraction par une fente ?

Normalement si l'on se met précisément en Fraunhofer (image géométrique de la source = lieu de la transformée de Fourier) R(z) ne joue aucun rôle dans l'obtention de la figure de diffraction de Fraunhofer.

Conditions de Fraunhofer dans la première expérience sans lentille ?

Non, juste approximation de Fraunhofer, mais pour cela il faut bien que l'écran soit à une distance suffisante de l'objet diffractant Il faut donc calculer et vérifier si l'approximation de Fraunhofer est bien vérifiée.

Quels sont les conditions de Fraunhofer ?

$F=0$. Avec $F=\rho^2/\lambda D$, on trouve $F = 0.2$ dans le cas de l'expérience. On n'est donc pas précisément dans les conditions de Fraunhofer.

Comment se mettre vraiment dans les conditions de Fraunhofer.

Il faut utiliser une lentille pour faire l'image de la source. **La figure de de diffraction se trouve dans le plan de l'image géométrique de la source. C'est un point majeur à retenir .**

Quels sont les positions qui permettent de se mettre dans les conditions de Fraunhofer ?

Il faut placer l'écran dans le plan de l'image géométrique **de la source** qui éclaire l'objet diffractant (et donc pas dans le plan de l'image de l'objet diffractant). Si l'image de la source est à l'infini on place alors l'écran très loin pour vérifier l'approximation de Fraunhofer.

Qu'est ce que signifie envoyer la source à l'infini ? Est-ce que c'est nécessaire ?

Cela signifie mettre la source dans le plan focal objet de la lentille. Ce n'est pas nécessaire pour obtenir une figure de diffraction dans les conditions de Fraunhofer. Au contraire, la figure de diffraction étant dans le plan de l'image de la source, elle se trouvera donc à l'infini. On place un écran très loin et on vérifie l'approximation de Fraunhofer

Existe-t-il d'autres formes de diffraction ?

Diffraction de Fresnel qui est aussi un cas spécifique

Si on augmente la taille caractéristique (la largeur de la fente), que se passe-t-il ?

Plus on écarte, plus on se rapproche du régime de Fresnel.

Où voulez-vous voir de la diffraction ?

Diffraction de Fresnel sur les bords de l'image. Plus exactement si on veut observer de la diffraction avec non pas une fente comme élément de diffraction, mais un bord, on est en condition de Fresnel et jamais en Fraunhofer

La diffraction est toujours dans la distance focale de la lentille ?

L'écran doit se trouver à l'endroit où la source est imagée, dans tous les cas, même si la lentille se trouve avant la fente.

Sans la fente, le faisceau est plus petit quand on s'éloigne ? Où est donc l'image de la source ?

L'image de la source est plus loin. On repositionne donc la lentille pour faire l'image de la source. Il est de toutes façons plus convaincant de faire

Peut-on voir de la diffraction dans cette configuration ?

En replaçant la fente, on a un peu de coma mais on observe quelque chose.

Où peut-on placer la fente dans cette configuration ?

Si on fait le montage avec une lentille et que l'on se place dans l'image géométrique de la source on peut placer la fente n'importe où.

Quelle est la taille minimum d'une tâche que l'on peut avoir ?

La taille minimum correspond à la tache d'Airy. On appelle la tache de taille minimum la PSF (Point spread function) ou fonction d'étalement optique. Cela correspond à la figure obtenue quand on image un point source (ou une source/objet de taille très petite devant la longueur d'onde)

Pouvez-vous mieux expliciter le fonctionnement du critère de Rayleigh ?

On dit qu'on ne peut pas distinguer deux points dans une image optique quand les deux maximum des deux tâches de diffraction obtenues sont séparées de moins que la largeur du pic de diffraction.

Existe-t-il des moyens pour observer de manière assez fine les maximums d'intensité de deux points confondus par le critère de Rayleigh ?

Rayleigh est une limite du XIXème siècle qui prend en compte uniquement l'œil. Aujourd'hui avec une caméra et des pixels suffisamment fins, il est possible de distinguer beaucoup plus précisément deux figures d'Airy.

Comment fonctionne la caméra CCD ? Pourquoi se mettre à cette distance importante pour capter l'image de la diffraction ?

Cela permet de se mettre dans l'approximation de Fraunhofer sans lentille, lorsque l'image de la source est à l'infini.

Invariance par translation ? La tâche bouge clairement pourtant lorsque l'on translate la fente ?

Si ça bouge, c'est qu'on n'est pas précisément en Fraunhofer. Normalement en Fraunhofer, il y a une réelle invariance par translation lorsqu'on transalte la fente. Par contre en Fraunhofer, quand

on translate la source, comme la figure de diffraction est centrée sur l'image géométrique de la source, la figure de diffraction est donc translatée (comme l'image géométrique de la source).

Que pouvez vous dire sur le James Webb Space Telescope dont vous avez parlé au début de la présentation ?

Capte dans l'IR. Se trouve au point de Lagrange.

Qu'est ce que sont les points de Lagrange ?

Positions stables d'un objet de masse très faible par rapport aux autres corps dans un système à trois corps.

Pourquoi trouve-t-on la figure de diffraction présentée sur JWST ?

Ensemble de plusieurs miroirs créant cette figure avec 6 rayons de diffraction.

Commentaires lors de la correction de la leçon

(l'étudiant note les commentaires relatifs au contenu de la leçon : niveau, sujets abordés, enchaînement, réponses aux questions, etc. L'enseignant relit, et rectifie si besoin)

- démontrer le principe de Huygens Fresnel est limite hors sujet et c'est long. IL s'agit d'une leçon sur la diffraction de Fraunhofer et pas sur le principe de Huygens Fresnel. Cela se ressent pour faire passer ensuite les messages simples. Il n'est donc pas nécessaire de redémontrer tout le résultat et il peut être suffisant de juste poser ce principe. Il est donc vivement conseillé pour pouvoir consacrer du temps à la diffraction proprement dit, de ne pas redémontrer le théorème de Huygens Fresnel
- Manipulation passée un peu rapidement. Peu d'aspect quantitatif qui est pourtant obligatoire dans la leçon docteur. C'est bien la manip qu'il faut faire (diffraction par une fente) et il est effectivement possible (et indispensable pour les docteurs) de faire facilement du quantitatif avec la caméra.
- Idéalement on fait la manip de diffraction une source ponctuelle incohérente spatialement et monochromatique -lampe filtrée). On peut dans ce cas définir sans ambiguïté l'image de la source. C'est cependant souvent peu lumineux. On peut donc prendre un laser suffisamment élargi pour qu'il éclaire bien l'objet diffractant. S'il est suffisamment large, sa taille minimum sera obtenue au foyer de la lentille quand on la placera. On place alors l'écran en ce point. Pour finir on place l'objet diffractant et la figure de Fraunhofer sera en ce point. Une bonne idée est d'utiliser une fente de taille connue. On peut alors non seulement montrer la figure de diffraction mais aussi faire une expérience quantitative
- La discussion explicite autour de l'approximation de Fraunhofer doit être un point central de la leçon. Quand est on en Fraunhofer strict ? Quand est on juste dans l'approximation de Fraunhofer. L'approximation de Fraunhofer doit être explicitée.
- IL est INDISPENSABLE de faire passer le message que la figure de Fraunhofer se trouve dans le plan de l'image géométrique de la source.

- Il manque l'aspect d'ouverture circulaire qui est indispensable dans cette leçon → fonction de Bessel. Pas besoin de le redémontrer car long et fastidieux mais il faut en parler car elle est essentielle pour les instruments d'optique
- Réseaux : très différents et long donc pas utile d'en parler surtout en docteur (limite hors sujet).
- Si il reste du temps, conséquences de la diffraction sur les instruments d'optique possible
→ Approfondir le critère de Rayleigh.
- Ouverture possible : Apodisation = corollaire de la TF. Modification de l'image à partir du plan de Fourier (plan qui se trouve entre les lentilles dans un montage 4f à 2 lentilles).

Exemples de « passages obligés » sur cette leçon

- résolution en optique

- expérience d'Abbe

-diffraction par une fente

-diffraction par une ouverture circulaire

-optique de fourier

Titre : Diffraction de Fraunhofer**Présentée par :** Gustave**Rapport écrit par :** Romain**Correcteur :** Agnès Maître**Date :** 08/10/2024

Bibliographie

Titre	Auteurs	Éditeur
Optique (une approche expérimentale et pratique)	Sylvain Houard	De Boeck
Optique physique (MP, MP*, PC, PC*, PSI, PSI*) et électronique (MP, MP*)	Daniel Mauras	Puf

Compte-rendu détaillé de la leçon

Pas de photographies de brouillons ! Le compte-rendu doit être rédigé, pour que l'enseignant puisse corriger si nécessaire.

Niveau choisi pour la leçon : L3

Pré-requis :

- Optique géométrique
- Interférences
- Transformée de Fourier

Introduction :

Grimaldi 1650 : recense les différents types de diffraction

Fin 17^e siècle

Newton : vision corpusculaire : n'explique pas la diffraction

Huygens : vision ondulatoire : ondelettes secondaires, mais il lui manque le calcul intégral pour expliquer la diffraction

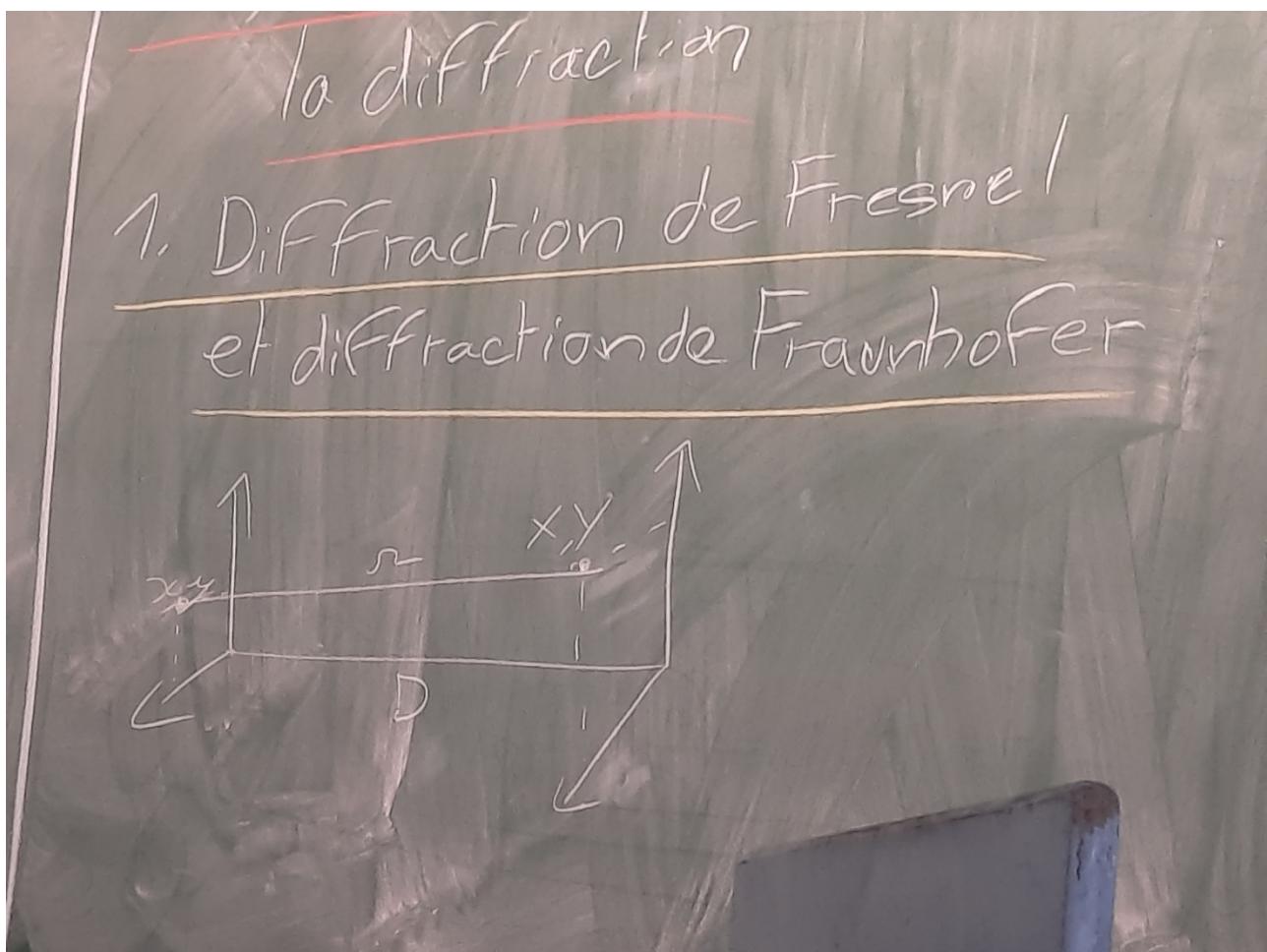
Début 19^e siècle : Fresnel

Académie des sciences : Poisson et Arago font les calculs et trouvent paradoxalement de la lumière dans l'ombre géométrique d'un objet, confirmé plus tard par l'expérience

I / Première partie : Traitement physique de la diffraction (4 :13)

A] Diffraction de Fresnel et diffraction de Fraunhofer

Schéma 1 :



Onde sphérique sous la forme : $A \propto \frac{e^{ikr}}{r}$

Développement limité à l'ordre 1 en $\frac{x-x}{D}$ et $\frac{y-y}{D}$ pour trouver r

$$A \propto \exp(ikD) \exp\left(\frac{ik(X^2 + Y^2)}{2D}\right) \exp\left(\frac{ik(Xx + yY)}{D}\right) \exp\left(\frac{ik(x^2 + y^2)}{2D}\right)$$

Diffraction de Fraunhofer : on néglige le terme des déplacements sur la pupille $\exp\left(\frac{ik(x^2 + y^2)}{2D}\right)$ si $D \gg \frac{\pi(x^2 + y^2)}{2} \lambda$

Application numérique $x, y = 0,1 \text{ mm} \rightarrow D \gg 5\text{cm}$; $x, y = 1\text{mm} \rightarrow 5\text{m}$; $1\text{cm} \rightarrow 500\text{m}$

L'approximation est de moins en valable quand la taille de la tâche augmente

B] Principe de Huygens

Permet de s'affranchir de la résolution d'équations électromagnétiques

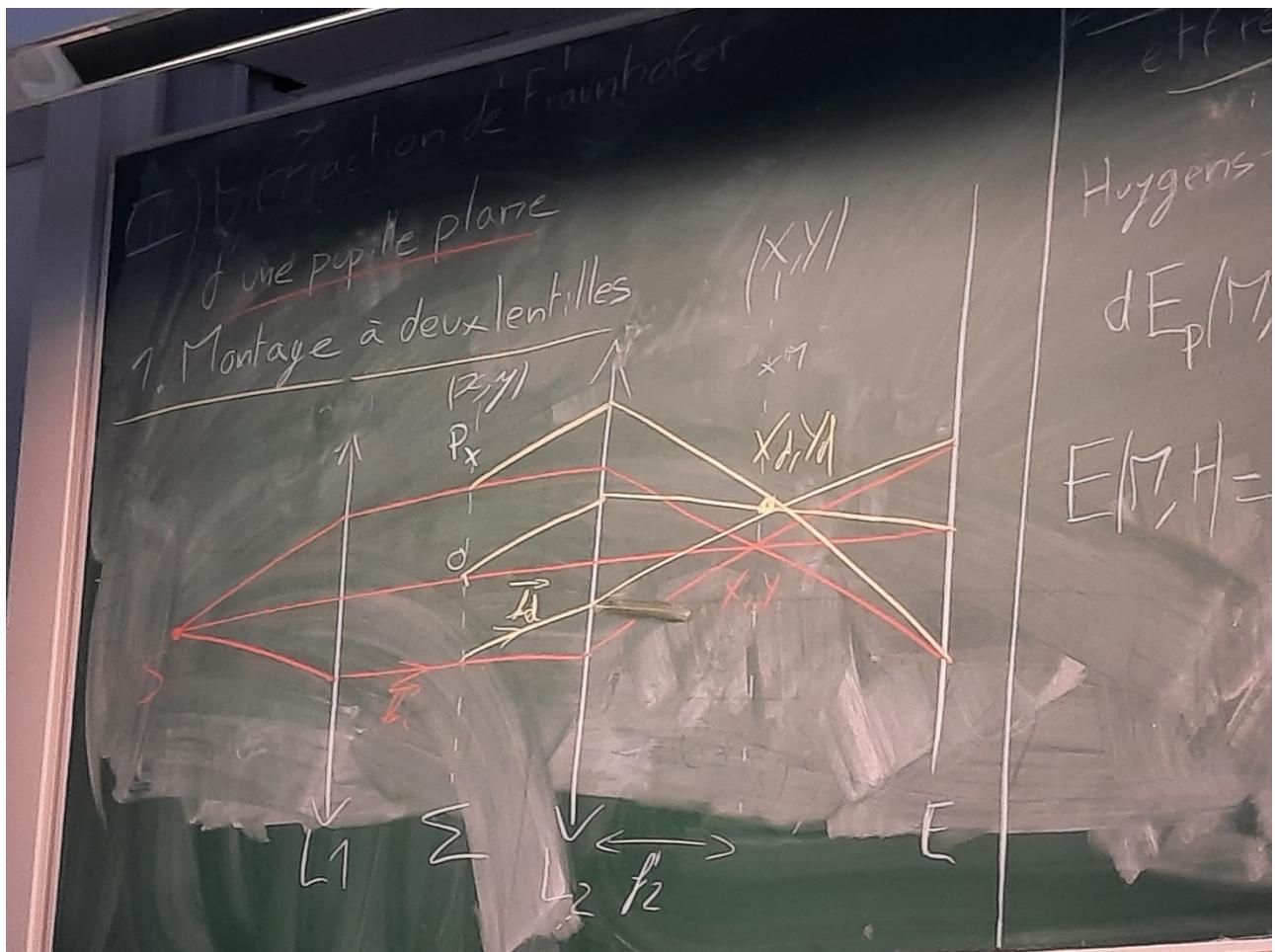
Plein d'ondelettes secondaires scalaires : nombre illimité réparties sur toute la pupille et de même fréquence

II / Deuxième partie : Diffraction de Fraunhofer (15 :23)

A] Montage à deux lentilles

Présentation du montage

Schéma 2



On a une pupille diffractante -> on dessine donc des rayons diffractés (\vec{K}_i et \vec{K}_d)

Lorsque l'on filtre, on voit que l'intensité lumineuse change sur l'écran, on va l'interpréter dans la partie suivante

B] Diffraction à l'infini et fréquence spatiale (20 : 40)

D'après Huygens-Fresnel :

$$dE_p(M, t) = \underline{K} \underline{t}(P) \underline{E}_0 \exp(i(wt - \varphi_i(P))) \exp(-i\varphi_{P \rightarrow M})$$

t : transmittance

K : constante de Kirchhoff (Facteur d'obliquité)

$$\varphi_P(M) = \varphi_i(P) + \varphi_{P \rightarrow M}$$

$$\varphi_O(M) = \varphi_i(O) + \varphi_{O \rightarrow M}$$

$$\underline{E}(M, t) = \iint_{(x \partial y)} \underline{Kt}(P) \underline{E_0} \exp(i(wt - \varphi_i(P))) \exp(-i\varphi_{P \rightarrow M}) dx dy$$

$$\underline{E}(M, t) = \iint_{(x \partial y)} \underline{Kt}(P) \underline{E_0} \exp(i(wt - \varphi_o(M))) \exp(-i(\varphi_P(M) - \varphi_o(M))) dx dy$$

On reconnaît que $\underline{E_0} \exp(i(wt - \varphi_o(M))) = \underline{E_0}(M, t)$

$$\varphi_i(P) - \varphi_o(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_{OP}(M)$$

Schema 3

$$\delta_{OP}(M) = (HP) - (OH) = n(\vec{u_l} - \vec{u_d}) \cdot \overrightarrow{OP}$$

$$\varphi_i(P) - \varphi_o(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n(\vec{u_l} - \vec{u_d}) \cdot \overrightarrow{OP} = -(\vec{k_l} - \vec{k_d}) \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{2\pi}{\lambda} ((\alpha_l - \alpha_d)x + (\beta_l - \beta_d)y)$$

On identifie 2 fréquences spatiales : $u = \frac{(\alpha_l - \alpha_d)}{\lambda}$ et $v = \frac{(\beta_l - \beta_d)}{\lambda}$

Les rayons très diffractés se retrouvent, dans le plan de Fourier, plus loin de l'axe optique que les rayons peu ou pas diffractés.

On retrouve également la transformée de Fourier de la transmittance au niveau du plan focal image, c'est la figure de diffraction.

A présent on va essayer de filtrer le centre. Il ne reste que les rayons diffractés qui apparaissent maintenant blanc.

Expérience(s) réalisée(s) :

- Manip Référence :

Filtrage spatial dans un montage à deux lentilles (diffraction de Fraunhofer)

Questions posées par l'enseignant (avec réponses)

C'est au binôme de prendre en note les questions posées par l'enseignant. Et autant que possible de prendre en note les **bonnes** réponses (donc pas nécessairement celles données par l'étudiant au tableau)

L'enseignant pourra compléter les questions et bien sûr les réponses.

Merci de respecter le format ci-dessous autant que possible.

Question : Vous avez diffracté un objet complexe, est-ce que vous pouvez nous parler d'objets plus classiques ?

Une fente, TF d'une porte donc sinc

Tracez la fonction sinc en indiquant le lien entre le tracé de la courbe et les caractéristiques géométriques de l'objet diffractant.

Entre le centre et le premier 0, il y a $\frac{\lambda f'}{a}$ le zéro suivant se situe à $\frac{2\lambda f'}{a}$

Cette représentation correspond à E, comment peut-on la lier à l'intensité ?

On prend le carré de la fonction précédente.

Où est la figure de diffraction ?

Dans le plan de Fourier

Vous avez parlé de fréquences spatiales, de quoi dépendent-elles ?

Plus un rayon va être diffracté plus il va correspondre à des fréquences spatiales élevées.

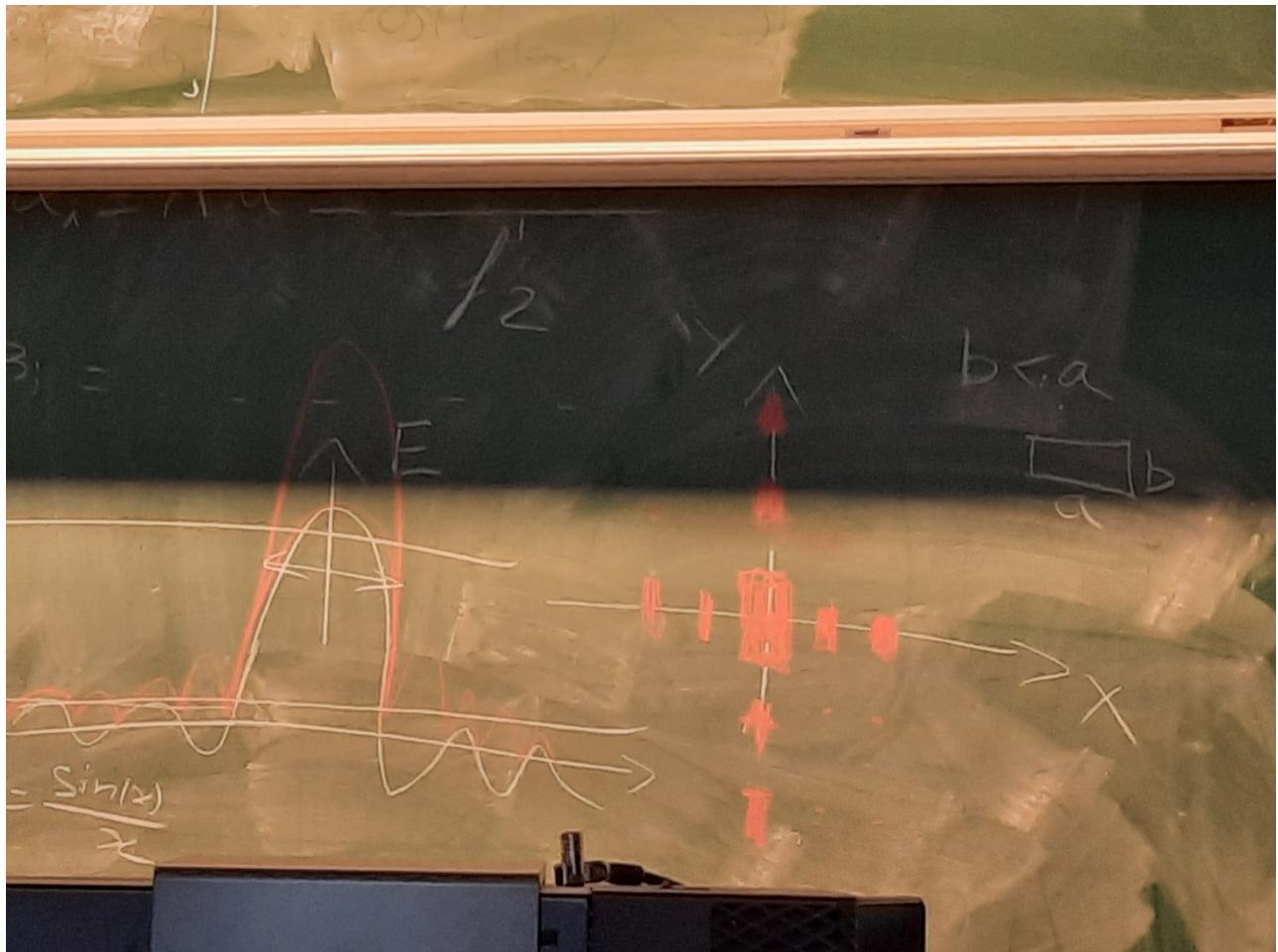
Parlez moi de la tache centrale

Elle donne la limite de résolution. Elle est deux fois plus large que les taches voisines (pour une fente diffractante)

Que se passe-t-il si l'on prend une fente plus petite ?

Les 0 s'écartent

Si on ne prend plus une fente de coté a, mais un rectangle de cotés a et b, que voit-on dans le plan de Fraunhofer ?



On suppose maintenant que vous supprimez la tâche centrale de votre fente (filtrage spatial), que se passe-t-il sur l'écran ?

On va voir les endroits où les rayons sont très diffractés, à savoir les bords qui seront très lumineux et le centre plutôt sombre

Si maintenant on filtre tout sauf le centre, que voit-on sur l'écran ?

Le rectangle, avec les bords clairs. L'intérieur du rectangle et son extérieur sont sombres

Si on prend le complémentaire de la fente à la place de la fente, que va-t-on voir ?

La même chose, théorème de Babinet, la transmittance et son complémentaire donnent les mêmes figures de diffraction.

Si je ne garde que le point en (0,0), je garde la fréquence spatiale nulle

Alors on voit la source ($k=0$) (une tache homogène)

Si je décide de déplacer mon objet diffractant, mettons une fente que je bouge verticalement. Que se passe-t-il dans le plan de Fourier ?

Cela ne va rien changer, le plan de Fourier ne dépend que des angles alpha et beta, pas de la position de l'objet diffractant. On rajoute juste une phase sur le champ et qu'on ne détecte pas en intensité

Si je construis une image avec plein d'objets sur une feuille placés de façon aléatoire, que voit-on ?

La même chose qu'avec un seul mais plus lumineux

Si maintenant on les range, on voit n en intensité ?

Toutes les figures de diffraction sont les mêmes à la phase près. Il va y avoir des interférences entre les différentes figures de diffraction

Est-ce que je peux bouger mon objet entre les lentilles ?

On ne forme plus l'image sur l'écran, mais le plan de Fourier n'est pas modifié, il est toujours dans le plan focal de la deuxième lentille.

Est-ce que la distance entre L1 et L2 a une importance ?

Non

Que se passe-t-il si l'on accolé les deux lentilles et que je place l'objet devant la lentille 1 ?

On obtient une lentille équivalente. On est en train de faire un montage à une lentille ($f' = f'1 * f'2 / (f'1 + f'2)$)

De manière générale, la transformée de Fourier n'est pas en f' . Elle est TOUJOURS dans le plan image de la source ! Il se trouve que dans le montage à deux lentilles, cette image se trouve dans le plan focal image.

Commentaires lors de la correction de la leçon

Le binôme prend en note les commentaires de l'enseignant liés au contenu de la leçon : choix des thématiques abordées, plan choisi, notions hors-programme, expériences, respect du format de la leçon. **L'enseignant ajoute ou modifie abondamment des commentaires à posteriori.**

Les commentaires relatifs à la prestation de l'étudiant (rapidité, élocution, enthousiasme, niveau disciplinaire, etc.) sont à remplir sur la fiche « Évaluation » par l'enseignant, qui sera mis à disposition de l'étudiant passé à l'oral uniquement.

Retour des autres élèves :

Trop bien, l'introduction historique était cool.

Peut-être que tu aurais pu simplifier les calculs en éliminant les angles venant de la source. Et en prenant un objet à deux dimensions, on aurait pu encore simplifier le problème.

Utiliser un objet plus simple qu'une plume, par exemple les ouvertures rectangulaires.

Commenter l'approximation qui a été faite.

Bon équilibre entre les calculs et les explications

Représente les ondelettes dont tu as parlé. Montrer les sources secondaires du principe de Huygens

Retours d'Agnès :

Très bien pour une première leçon. Néanmoins, cela peut valoir le coup d'augmenter un peu la cadence sur cette leçon assez dense.

Il faut s'habituer à avoir des petits tableaux.

Il n'y a pas un seul plan, il faut s'approprier le sujet.

Effectivement un objet plus simple (une ouverture rectangulaire et pas une fente) permet de mieux voir les choses. Il faut utiliser de la lumière monochromatique pour éviter que chaque « longueur d'onde » ne fasse sa propre figure de diffraction. La taille des figures de diffraction de Franhofer varie comme λ

Sur le $\vec{K}i$ (qui complexifiait les calculs ici), on peut en parler, et l'exploiter car cela rajoute une phase correspondant à la position du centre de l'objet diffractant, notamment dans le cas des réseaux. Mais ici on aurait pu raisonner avec $\vec{K}i = 0$ on a un éclairage parallèle à l'axe optique.

Durant la leçon, on est obligé.e.s de faire au moins un calcul in-extenso (et si possible une application numérique) mais la leçon ne doit pas se résumer à des maths.

Aller voir sur le site officiel pour exploiter les animations disponibles (on aura à minima ce qui est déjà sur le site du concours et ce que l'on aura demandé à rajouter suffisamment tôt)

On pourrait expliquer davantage Huygens-Fresnel et ce qu'est dEp

Introduction historique un peu trop longue

Il ne faut pas parler de la diffraction de Fresnel, c'est hors sujet dans le cadre de la diffraction de Fraunhofer.

La figure de diffraction de Fraunhofer se situe toujours dans le plan de l'image géométrique de la source.

On aurait aussi pu filtrer spectralement la lumière incidente pour n'avoir qu'une figure de diffraction (une seule longueur d'onde).

Si l'on fait le calcul, on remarque que le déphasage lors du passage à travers la lentille compense exactement le terme de l'approximation de Fraunhofer. Dans ce montage, on on regarde dans le plan de l'image géométrique de la source on est donc dans le cas exact (et non approché) de la diffraction de Fraunhofer.

Sur la figure de diffraction, si l'on représente la largeur à mi-hauteur, on observe la même figure avec la tâche centrale de taille double par rapport à celle des autres tâches.

Il faut faire preuve d'honnêteté intellectuelle et ne pas s'entêter dans son erreur.

Pour être prêt.e.s le jour de la leçon, il faut savoir en amont dans quels ouvrages chercher le jour j, savoir ce qu'il y aura, ce qu'il n'y aura pas.

Exemples de « passages obligés » sur cette leçon

- Présenter expérimentalement un phénomène de diffraction
- Illustrer avec une animation l'influence de la taille d'un objet sur sa figure de diffraction de Fraunhofer
- Mettre en évidence expérimentalement les limites du régime de diffraction de Fraunhofer