Manip : La non-linéarité d'un pendule simple

Référence : Polycopié de TP – Série 3 – Physique non linéaire et instabilités

Pour des angles élevés, au-delà de 23°, l'approximation $sin\theta = \theta$ n'est en effet clairement plus valide (le vérifier numériquement), ce qui rend non-linéaire l'équation du mouvement du pendule simple.

Si les frottements sont suffisamment faibles, le mouvement du pendule de longueur L est pseudo-périodique, et la pseudo-période d'oscillation du pendule dépend alors de l'amplitude "instantanée" θ_0 du mouvement :

$$T(\theta_0) = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{11\,\theta_0^4}{3072} + O(\theta_0^6)\right]$$

Pendule est isochrone (période indépendante de l'amplitude) que pour de petits angles. À grande amplitude, la période dépend de l'amplitude, et elle augmente avec celle-ci. Pour observer correctement l'effet de non-isochronisme, il faudrait que l'amplitude reste constante pendant plusieurs oscillations, ou varie très peu.
Ce n'est pas le cas si le pendule est libre (sans masse au bout de la tige) car son moment d'inertie est faible et il subit un amortissement important (par frottements de l'air, du capteur, etc.). Dans ce cas l'amplitude diminue rapidement à chaque oscillation et on ne peut pas mesurer une période bien définie à une amplitude donnée, car elle change à chaque va-et-vient.
On ajoute alors une masse suffisamment grande au bout de la tige ce qui augment le moment d'inertie donc le pendule devient moins sensible aux frottements. Lâché sans vitesse initiale à partir d'un "grand angle", le pendule oscille longtemps avant de s'arrêter. On peut alors mesurer correctement la période et observer l'effet de non-isochronisme.

Le moment d'inertie du pendule avec une tige de longueur L et de masse négligeable :
$J = mL^2$. Pour une rotation : $J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgLsin\theta = 0$
Avec $J\ddot{\theta}$ moment de couple et $\ddot{\theta}$ l'accélération angulaire et $b\dot{\theta}$ est la modélisation du moment des frottements visqueux.
Donc : $\ddot{\theta} + \frac{b}{mL^2}\dot{\theta} + \frac{g}{L}sin\theta = 0$ avec la constante d'amortissement $\gamma = \frac{b}{mL^2}$
Alors plus m est grand, plus γ est petit et l'amortissement est plus lent.
$\theta(t) = \theta_0\, e^{-\gamma t}\, cos(\omega t)$ donc plus m est grand plus l'enveloppe $e^{-\gamma t}$ décroît lentement et l'amplitude reste grande plus longtemps.

Normalement une masse de 200-500g suffit largement.

Protocole :

- On utilise un pendule simple muni d'un capteur de mesure de l'angle $\theta(t)$. On le relie à la carte d'acquisition (par câble VGA) puis à l'ordinateur (par USB).
- On accroche une masse de presque 180g et une tige de presque 10-15g. On fixe le 0 par le bouton du pendule.
- Sur LatisPro je choisis 500-1k points avec total 15s (pour avoir $\sim$10 périodes)
- Par mesures automatique, on a max / min / période. La moyenne doit être proche de 0°
- Exporter les données dans fichier type **"theta56.csv"** dans le même dossier du code
- Sur Qtiplot, je prends u(t)=0.002s / $\theta = 0.5\left(\theta_{max} + \theta_{min}\right)$ / u(θ) = $\theta_{max} - \theta$ / on transforme les θ en radians / j'ajuste les différents points par $T = A * (1 + \dfrac{x^2}{B})$ avec $A = T_0$ et B=16
- On trouve que A = aux T des petits θ. Je trouve B=14.5 si j'ajuste jusqu'à 70° et B=15 si j'ajuste jusqu'à 50° (car Borda est plus efficace)
- Par les données exportées (en csv) je les ajoute au python d'Adrien pour avoir le portrait de phase.

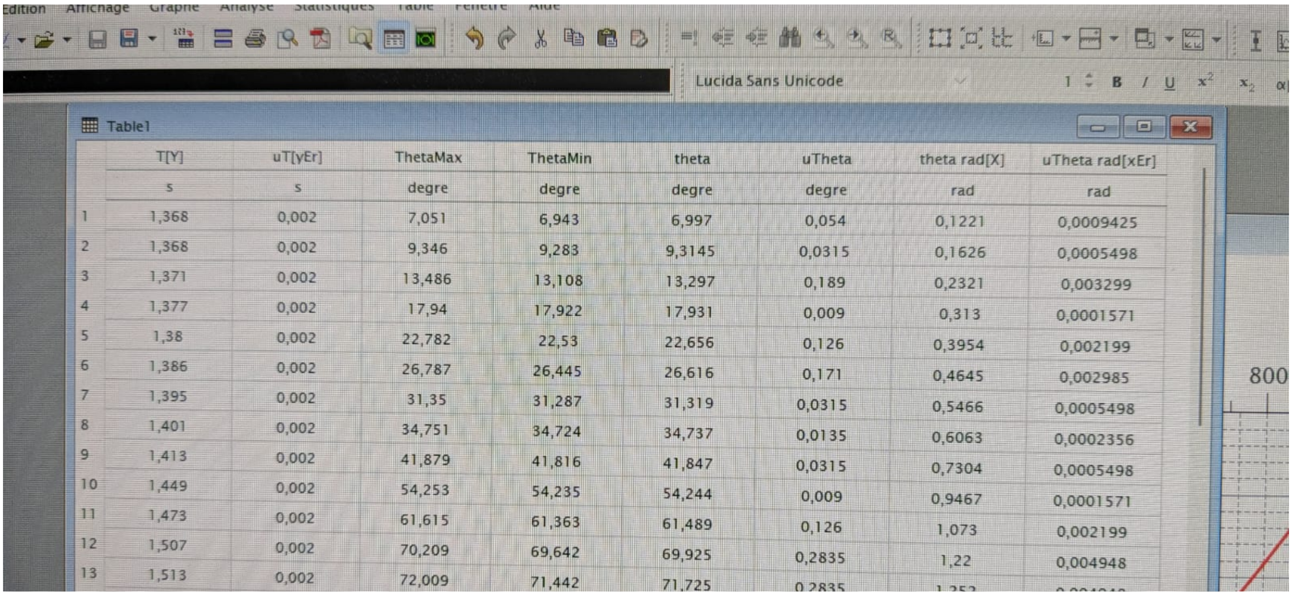
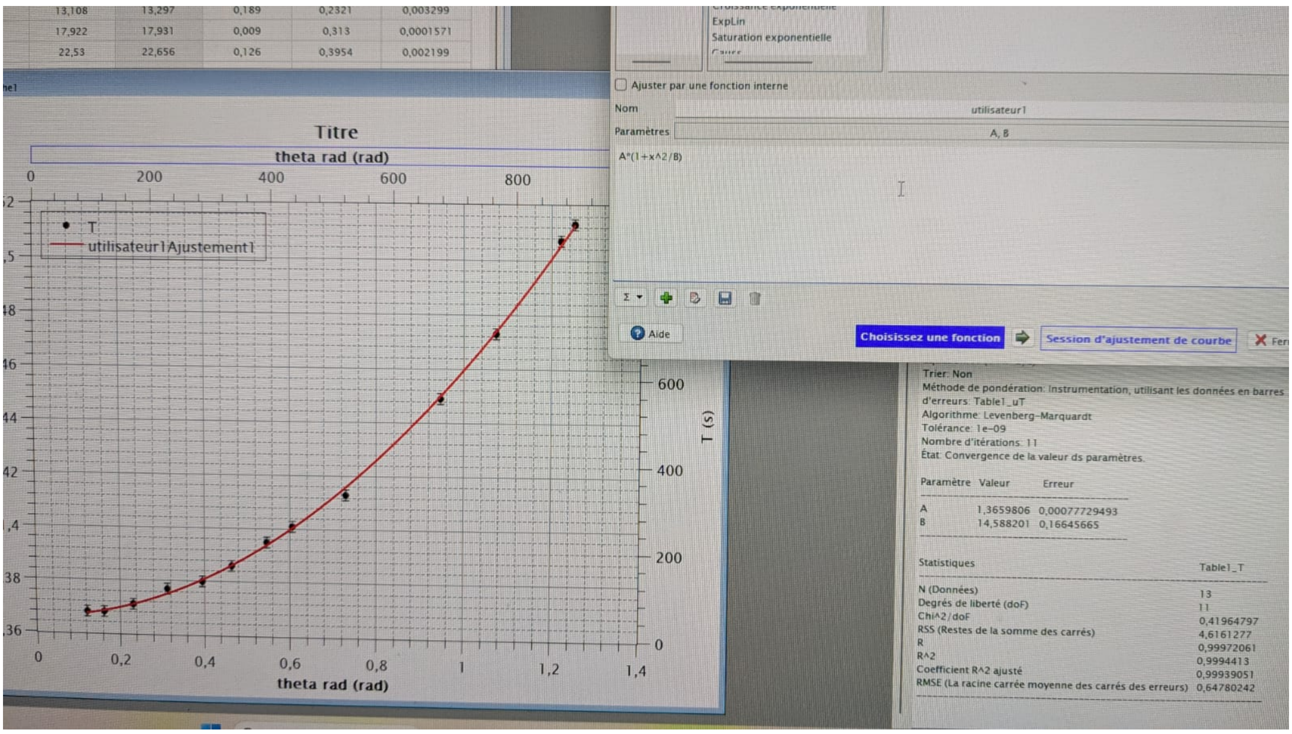
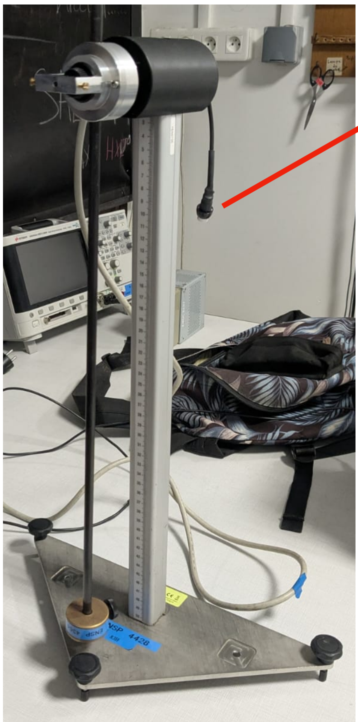


Table1

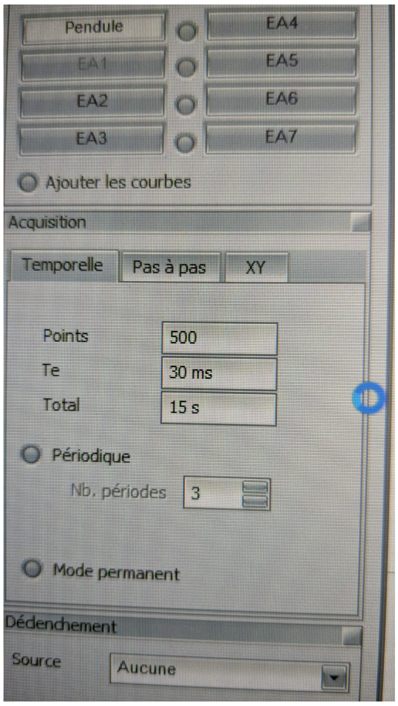
	T[Y]	uT[yEr]	ThetaMax	ThetaMin	theta	uTheta	theta rad[X]	uTheta rad[xEr]
	s	s	degre	degre	degre	degre	rad	rad
1	1,368	0,002	7,051	6,943	6,997	0,054	0,1221	0,0009425
2	1,368	0,002	9,346	9,283	9,3145	0,0315	0,1626	0,0005498
3	1,371	0,002	13,486	13,108	13,297	0,189	0,2321	0,003299
4	1,377	0,002	17,94	17,922	17,931	0,009	0,313	0,0001571
5	1,38	0,002	22,782	22,53	22,656	0,126	0,3954	0,002199
6	1,386	0,002	26,787	26,445	26,616	0,171	0,4645	0,002985
7	1,395	0,002	31,35	31,287	31,319	0,0315	0,5466	0,0005498
8	1,401	0,002	34,751	34,724	34,737	0,0135	0,6063	0,0002356
9	1,413	0,002	41,879	41,816	41,847	0,0315	0,7304	0,0005498
10	1,449	0,002	54,253	54,235	54,244	0,009	0,9467	0,0001571
11	1,473	0,002	61,615	61,363	61,489	0,126	1,073	0,002199
12	1,507	0,002	70,209	69,642	69,925	0,2835	1,22	0,004948
13	1,513	0,002	72,009	71,442	71,725	0,2835	[illegible]	[illegible]



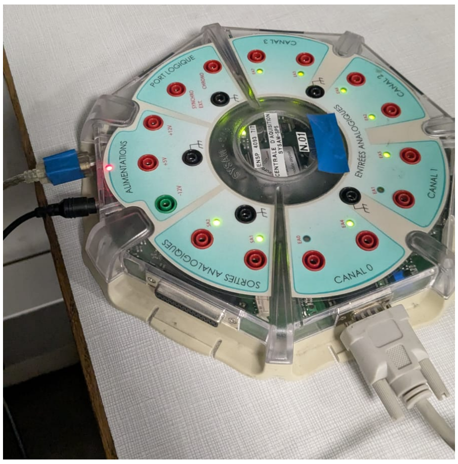


Le bouton derrière est pour le zéro

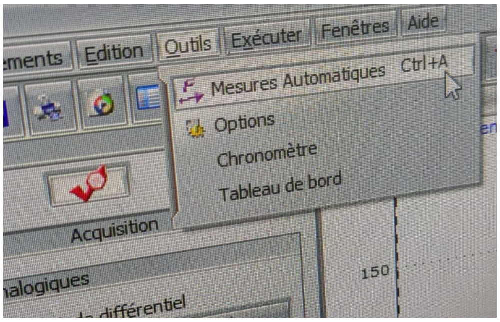
Logiciel “Latis Pro”



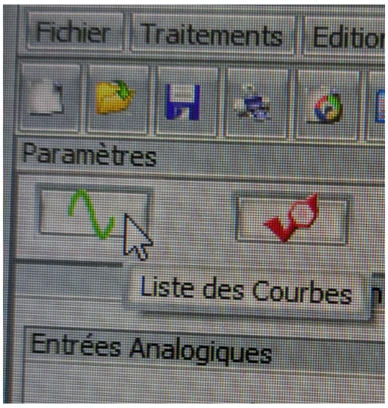
La carte d’acquisition



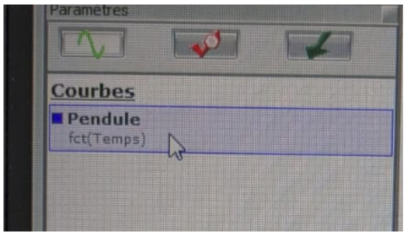
Pour avoir les mesures



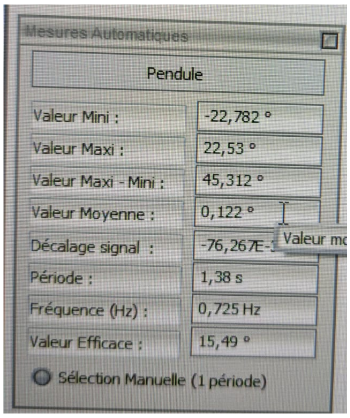
Puis choisir la courbe



Choisir Pendule

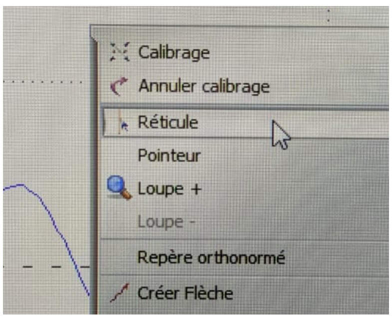


Puis le tirer par la souris et l’ajouter à la fenêtre des mesures

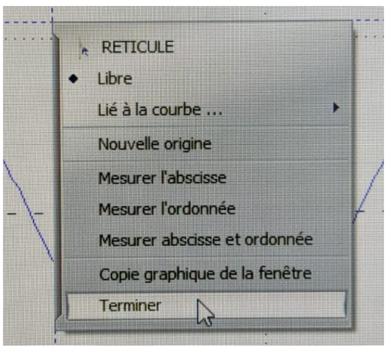


Essayer d’avoir la valeur moyenne le plus proche possible de 0°

Right click sur la courbe



Puis l’arrêter pour avoir des mesures automatiques



Par ce curseur on bouge un peu autour des points de mesure pour identifier l’erreur sur la T