

TD d'Optique 1

Optique Géométrique

05/09/2024

SSS

Préambule : compositions de physique récentes portant sur l'optique :

Année	Sujet	Parties d'optique
2023	Propagation en milieu inhomogène interféromètre, effet de mirage gravitationnel	Partie A
2020	Diffraction, optique adaptative	Partie 4
2019	Interférences	Partie E
2016	Polarisation, Interféromètres Propagation d'ondes	Totalité du sujet
2015	Optique géométrique Diffraction	1 : Etude géométrique du microscope, 2 : Pouvoir séparateur du microscope
2007	Propagation d'une onde électromagnétique dans le domaine optique	I : Rayons lumineux, fibre optique III : Biréfringence IV : Milieux non linéaires
2005	Ondes en mécanique classique et quantique	1.A. : Cohérence des ondes lumineuses
2000	Interféromètre de Michelson : développements et applications	Totalité du sujet

Bibliographie de base :

— Sextant, *Optique expérimentale* (indispensable pour les montages)

— S. Houard, *Optique - Une approche expérimentale et pratique* (intéressant également pour les montages)

— E. Hecht, *Optics*

— M. Bertin, J.P. Faroux & J. Renault, *Optique et physique ondulatoire* (Dunod, 3^{ème} édition, 1986)

— M. Françon, *Vibration lumineuse – Optique cohérente*

— J.C. Hild, *Éléments de cours et expériences d'optique*

— J-Ph. Pérez, *Optique*

— B. Balland, *Optique géométrique*

— R. Taillet, *Optique physique*

Pour des précisions supplémentaires, quelques ouvrages plus difficiles d'accès :

— Born and Wolf, *Principles of Optics*

— G. Bruhat, *Optique*

Dernière modification : 29 août 2024

1/5

EXERCICE I RAPPELS

1. Définitions

- 1.1 Rappeler les lois de Snell-Descartes qui gouvernent la réflexion/réfraction d'un rayon lumineux à la surface d'un dioptré.
- 1.2 Définir les notions de *stigmatisme rigoureux* et de *stigmatisme approché*. Donner des exemples de dispositifs optiques qui présentent un stigmatisme rigoureux.
- 1.3 Qu'appelle-t-on *grandissement*, *grossissement* et *grossissement commercial* d'un système optique ?
- 1.4 Qu'appelle-t-on *conditions de Gauss* pour un système optique ?

2. Lentille mince

- 2.1 Donner, dans les conditions de Gauss, les relations de conjugaison d'une lentille mince.
- 2.2 En déduire les relations de conjugaison aux foyers, dites relations de Newton, qui relient la distance de l'objet au foyer objet à la distance de l'image au foyer image.
- 2.3 Calculer le grandissement de la lentille en fonction de la distance objet – foyer objet.
- 2.4 À focale fixée, dans quelle configuration minimise-t-on la distance objet – image ? Quel est le grandissement de la lentille dans cette configuration ? Comment faut-il déplacer la lentille pour augmenter/diminuer le grandissement ?
- 2.5 Si l'on fixe la position de l'objet et de l'écran sur lequel on souhaite en faire l'image, combien y a-t-il de positions possibles où l'on peut placer la lentille ? Quelle est la focale maximale que l'on peut choisir ?

3. Principe du microscope

Un microscope est constitué d'un objectif (représenté par une lentille convergente L_1 de focale f_1) et d'un oculaire (lentille convergente L_2 de focale f_2). Pour que l'œil n'ait pas à accommoder, il forme l'image à l'infini d'un objet AB à observer. L'objectif en forme une image intermédiaire A_1B_1 . On appelle intervalle optique Δ la distance entre le foyer image de l'objectif et cette image intermédiaire.

- 3.1 Quelle est la condition sur l'image intermédiaire pour que l'œil n'ait pas à accommoder ?
- 3.2 Quel coefficient utiliser pour caractériser l'efficacité du microscope ? Le calculer et l'exprimer en fonction des propriétés de l'objectif et de l'oculaire.
- 3.3 On appelle *plans principaux* les plans conjugués pour lesquels le grandissement est unité. Donner la position de ces plans pour le microscope.
- 3.4 On appelle *points nodaux* les points conjugués de l'axe optique pour lesquels le grossissement est unité. Montrer que, dans le cas présent, les points nodaux sont situés dans les plans principaux.
- 3.5 Quels sont les plans principaux et les points nodaux d'une lentille simple ?

4. Profondeur de champ

On modélise l'objectif d'un appareil photo par une lentille de focale f et de diamètre D .

- 4.1 Qu'appelle-t-on nombre d'ouverture ? Profondeur de champ ?
- 4.2 En considérant que l'image d'un point est nette lorsque son diamètre est inférieur à une valeur a , déterminer la profondeur de champ d'un objectif photographique, en fonction de p , distance lentille – objet, et de l'ouverture numérique n .

EXERCICE II STIGMATISME ET APLANÉTISME

1. Lois de Snell-Descartes

- 1.1 Énoncer le principe de Fermat.
- 1.2 On considère le dioptré de la figure 2.1 et les deux points A_1 et A_2 , reliés par un rayon lumineux qui intercepte le dioptré au point I . On considère un second rayon, reliant A_1 et A_2 , mais interceptant le dioptré au point I' , infiniment proche de I . Que peut-on dire de la différence de marche entre les chemins A_1IA_2 et $A_1I'A_2$?
- 1.3 Calculer cette différence en fonction des vecteurs unitaires \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 et en déduire la forme vectorielle des lois de Snell-Descartes. On introduira le vecteur unitaire \mathbf{N} normal au dioptré au point I , orienté vers A_2 .

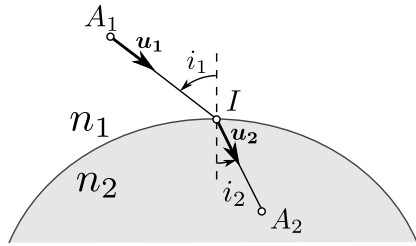


FIGURE 2.1 – Réfraction sur un dioptré.

1.4 Montrer que $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

2. Stigmatisme et aplanétisme

2.1 Soit un dispositif optique Σ quelconque qui fait du point A_o l'image A_i (voir figure 2.2). Que peut-on dire des chemins $A_o I J A_i$ et $A_o I' J' A_i$ si Σ est rigoureusement stigmatique ?

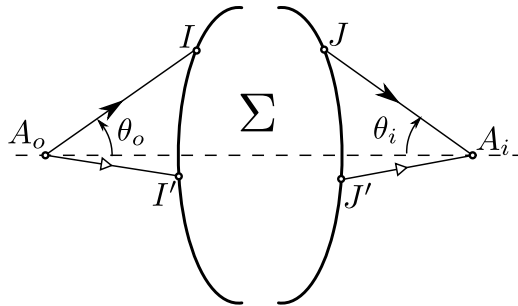


FIGURE 2.2 – Dispositif optique stigmatique.

2.2 *Condition des sinus d'Abbe* Le système Σ est dit aplanétique s'il est stigmatique pour tout couple de points B_o et B_i , infiniment proches de A_o et A_i , contenus, respectivement, dans les plans normaux à l'axe optique en A_o et A_i . Montrer que, dans cette condition,

$$n_o \overline{A_o B_o} \sin \theta_o = n_i \overline{A_i B_i} \sin \theta_i. \quad (\text{II.1})$$

3. Applications : points de Weierstrass

3.1 On considère à nouveau le dioptré de la figure 2.1. Montrer qu'il est stigmatique pour les points A_1 et A_2 s'il est le lieu des points I vérifiant $n_1 \overline{A_1 I} + n_2 \overline{I A_2} = a$, où a est une constante.

3.2 Montrer que, si $a = 0$, ce lieu est un cercle dont on précisera le rayon et le centre.

3.3 Identifier les points, appelés points de Weierstrass, pour lesquels un dioptré sphérique est rigoureusement stigmatique.

3.4 Montrer qu'en ces points le dioptré sphérique est aussi aplanétique.

EXERCICE III ABERRATIONS DES LENTILLES

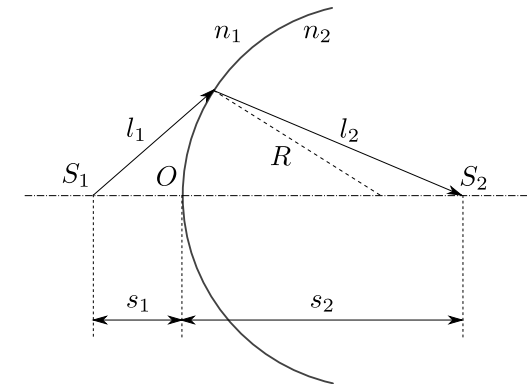


FIGURE 3.1 – Dioptré sphérique de rayon R .

1. On considère un dioptré sphérique, de rayon R , qui sépare un milieu d'indice n_1 d'un milieu d'indice n_2 . On note S_2 l'image du point S_1 par le dioptré (voir FIG. 3.1).

1.1 Montrer, sans approximation, que

$$\frac{n_1}{l_1} + \frac{n_2}{l_2} = \frac{1}{R} \left(\frac{n_2 s_2}{l_2} - \frac{n_1 s_1}{l_1} \right). \quad (\text{III.1})$$

1.2 Que devient l'équation (III.1) si l'on ne considère que des rayons proches de l'axe ?

- 1.3 On associe deux dioptries sphériques, de rayons R et R' , pour former une lentille. En supposant que la lentille est mince, qu'elle est utilisée dans l'air et dans les conditions de Gauss, retrouver la relation de conjugaison donnée au premier exercice. On montrera en particulier que sa focale, f , vérifie, en notant n l'indice du verre,

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right). \quad (\text{III.2})$$

2. *Aberrations chromatiques* Les indices optiques des matériaux dépendent de la longueur d'onde. C'est notamment le cas des verres, typiquement la silice, utilisés pour former les lentilles.

- 2.1 On utilise un verre borosilicate crown (BK7) d'indice $n = 1,52867$ à $\lambda = 400$ nm, $n = 1,51571$ à $\lambda = 590$ nm et $n = 1,51166$ à $\lambda = 800$ nm. On réalise une lentille biconvexe dont les faces ont pour rayon de courbure $R_1 = \overline{O_1C_1} = 73,2$ cm et $R'_1 = \overline{O'_1C'_1} = -40$ cm. Calculer la focale aux trois longueurs d'onde considérées. Que constate-t-on ?

- 2.2 On envoie un faisceau de lumière blanche, parallèle à l'axe optique, et qui recouvre toute la lentille, de diamètre $D = 8$ cm. Qu'observe-t-on au voisinage du foyer image «moyen» de la lentille ? Evaluer le diamètre minimum de la tache observée à l'écran.

- 2.3 Pour corriger ces aberrations, on réalise un *doublet achromatique*. Pour cela, on accole à la lentille précédente une autre lentille faite d'un matériau différent, choisie telle que les foyers du doublet aux longueurs d'onde extrêmes soient confondus. On utilise un verre flint (SF2) d'indice $n = 1,68222$ à $\lambda = 400$ nm, $n = 1,64615$ à $\lambda = 590$ nm et $n = 1,63505$ à $\lambda = 800$ nm. Comment doit-on choisir cette seconde lentille ? Calculer la focale du doublet achromatique.

3. *Aberrations géométriques* On considère une lentille plan-convexe, d'indice n , supposée achromatique, dont la face plane est éclairée par un faisceau collimaté parallèle à l'axe optique et centré. La face convexe est une surface sphérique de rayon R . On note C le centre du dioptré sphérique et, comme précédemment, O son sommet.

- 3.1 On considère un rayon lumineux d'angle d'incidence i sur le dioptré sphérique. Ce rayon intercepte l'axe optique en sortie de la lentille au point noté $F(i)$. Calculer $CF(i)$ en fonction de R et de n .

- 3.2 Ce dispositif est-il stigmatique ? Où se concentrent les rayons lumineux ? Sur quelle longueur ?

- 3.3 Montrer que, dans les conditions de Gauss, $CF(i)$ est indépendant de i et retrouver l'équation (III.2).

EXERCICE IV PROPAGATION DANS UN MILIEU D'INDICE CONTINUËMENT VARIABLE

1. Énoncer le principe de Fermat et faire une analogie avec le principe de moindre action qui gouverne les lois de la mécanique. Énoncer les équations de Lagrange qui découlent de ce principe de moindre action.
2. Quel est l'équivalent du lagrangien dans le cas de l'optique ? En déduire l'équation dite des rayons lumineux qui gouverne la propagation de la lumière dans un milieu d'indice continûment variable

$$\frac{d(n\vec{u})}{ds} = \vec{\nabla}n,$$

où \vec{u} est le vecteur tangent au rayon.

EXERCICE V FIBRES OPTIQUES (AGREG A 2007)

1. Une fibre optique est fabriquée à base de verres ou de plastiques supposés transparents et isotropes. La fibre à saut d'indice est constituée d'un cœur cylindrique homogène de rayon r_1 , d'indice n_1 , d'axe Oz et d'une gaine cylindrique d'indice n_2 entourant le cœur et de même axe. On introduit

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}.$$

Dans la pratique, n_1 et n_2 ont des valeurs très voisines, et $|\Delta| \approx 10^{-2}$.

On considère, dans l'air d'indice 1, un rayon incident dont le plan d'incidence contient l'axe Oz , et qui arrive sur l'entrée de la fibre avec une incidence θ . Les calculs suivants, et les conclusions qui s'en suivent, ne s'appliquent qu'au cas des fibres dont le cœur est suffisamment grand, et donc nécessairement *multimodes*. La propagation dans les fibres de plus petit diamètre, en particulier les fibres *monomodes*, n'est correctement prédite qu'en optique ondulatoire.

- 1.1 Comment faut-il choisir n_1 et n_2 pour que la lumière soit guidée, c'est-à-dire pour que la réflexion totale puisse se produire ?
- 1.2 Montrer alors que, si θ reste inférieur à un angle θ_{\max} , un rayon peut être guidé dans le cœur. On appelle ouverture numérique O.N. la quantité $\sin \theta_{\max}$. Exprimer l'O.N. en fonction de n_1 et Δ . Faire l'application numérique avec $\Delta = 10^{-2}$ et $n_1 = 1,50$.
- 1.3 Que se passe-t-il si l'on courbe fortement la fibre ?
- 1.4 Une impulsion lumineuse arrive à $t = 0$, au point O d'entrée de la fibre précédente, sous la forme d'un faisceau conique convergent d'axe Oz , de demi-angle au sommet $\theta_i < \theta_{\max}$. Pour une fibre de longueur L , calculer l'élargissement temporel Δt de cette impulsion à la sortie de la fibre. On donne $L = 10$ m, $\theta_i = 8^\circ$. Faire l'application numérique.

2. Extension à un milieu non homogène : loi fondamentale de l'optique géométrique

En utilisant les lois de Snell-Descartes relatives à la réfraction dans un milieu isotrope non homogène, on peut aboutir à la loi fondamentale de l'optique géométrique

$$\frac{d(n\vec{u})}{ds} = \vec{\nabla}n,$$

où \vec{u} est le vecteur unitaire tangent au rayon lumineux, n l'indice du milieu et s l'abscisse curviligne le long de ce rayon, en un point donné de ce dernier.

En introduisant \vec{v} , vecteur unitaire porté par la normale principale au rayon et orienté dans sa concavité, et $R > 0$, rayon de courbure de ce rayon au point considéré, on peut montrer que la loi fondamentale de l'optique géométrique permet d'aboutir à l'expression plus simple suivante

$$\frac{n}{R} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla}n.$$

- 2.1 En s'appuyant sur un exemple concret bien choisi, discuter du sens physique de cette dernière formule. Décrire une expérience de laboratoire permettant une illustration simple de ce phénomène.

2.2 Application : fibre optique à gradient d'indice

On reprend le cadre de l'application précédente, mais, afin de remédier en particulier à l'élargissement des impulsions, on remplace le cœur par un milieu inhomogène d'indice $n(\vec{r})$ vérifiant l'équation suivante

$$n^2(r) = n_1^2 \left(1 - 2\Delta \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \right),$$

pour $r < r_1$, où r désigne la distance du point considéré à l'axe Oz . La gaine reste homogène d'indice n_2 , et on a encore $n_1 = n(r = 0) = 1,50$ et $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} = 10^{-2}$.

On considère un rayon lumineux pénétrant dans la fibre en O avec l'incidence θ et se propageant dans un plan axial (le plan d'incidence contient l'axe Oz) et dans le cœur.

- a. On introduit α , angle formé en un point par le rayon lumineux et l'axe Oz . Que peut-on dire de la quantité $n \cos \alpha$? Etablir alors l'équation de la trajectoire de ce rayon lumineux en fonction de r_1 , $\theta_0 = \arcsin\left(\frac{\sin \theta}{n_1}\right)$ et Δ . Quelle est la nature de cette trajectoire ? Montrer que le rayon coupe l'axe (Oz) en des points régulièrement espacés d'une longueur d qu'on exprimera en fonction de r_1 , Δ et θ_0 .
- b. Dans les conditions précédentes, quelle est la condition sur θ pour que le rayon se propage effectivement dans le cœur de la fibre ? En déduire l'ouverture numérique en fonction de Δ et n_1 . Faire l'application numérique et commenter.
- c. En considérant une impulsion lumineuse identique à celle de l'application précédente, l'élargissement $\Delta t'$ de cette impulsion à la sortie d'une fibre à gradient d'indice de longueur L est donnée par

$$\Delta t' = \frac{n_1 L}{c} \left(\frac{1}{2 \cos \theta_0} - 1 + \frac{\cos \theta_0}{2} \right).$$

Faire l'application numérique pour $L = 10$ m et $\theta_i = 8^\circ$ et conclure.

- d. Donner des exemples pratiques d'utilisation des fibres optiques.

Corrigé

Optique géométrique



Notes : plusieurs outils pédagogiques de simulations sont à votre disposition en ligne. Comme par exemple, les simulations des aberrations des lentilles ici :
https://uel.unisciel.fr/physique/optigeo/optigeo_ch16/co/simuler_ch16.html

Ou bien, les différentes simulations d'optique géométriques et ondulatoires (entre autres) de Femto-physique par J. Roussel :
<https://femto-physique.fr/simulations/>

EXERCICE I RAPPELS

1. Définitions

1.1 À la surface de séparation de deux milieux transparents et homogènes d'indices n_1 et n_2 , appelée **dioptre**, une partie de la lumière est réfléchi et une autre est transmise (on parle de réfraction). On note i , i_r et i_t les angles entre la normale à la surface de séparation et les angles incident, réfléchi et transmis, respectivement (voir FIG. 1.1). Ces phénomènes sont régis par les lois de *Snell-Descartes* :

- Les rayons réfléchi et réfracté appartiennent au *plan d'incidence*, le plan défini par le rayon incident et la normale au dioptre au point d'incidence ;
- $i = -i_r$;
- $n_1 \sin i = n_2 \sin i_t$.

1.2 **Stigmatisme rigoureux** On considère un dispositif optique Σ et un couple de points A et A' (voir FIG. 1.2). Le dispositif Σ est dit *rigoureusement* (ou parfaitement) *stigmatique* pour le couple de points A , A' si tous les rayons issus de A , interceptés par Σ et émergents de Σ , s'intersectent au point A' en sortie du dispositif.

Les systèmes parfaitement stigmatiques sont rares (miroirs plans pour tout point de l'espace, miroir parabolique pour son foyer et l'infini...).

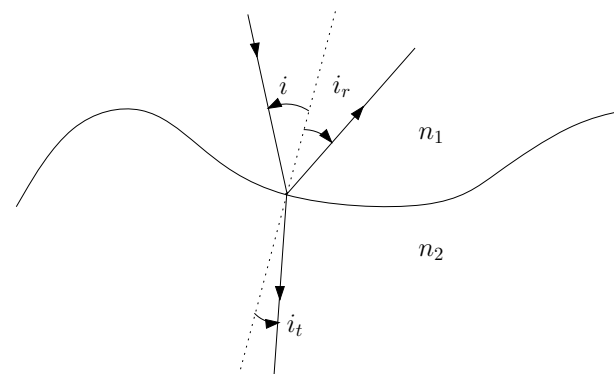


FIGURE 1.1 – Lois de Snell-Descartes

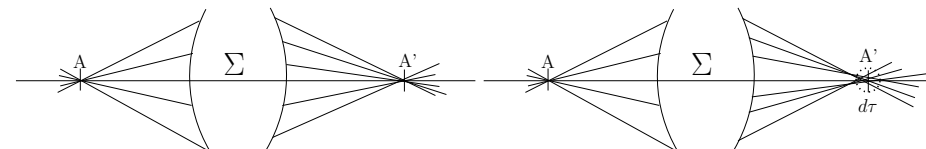


FIGURE 1.2 – Système optique rigoureusement stigmatique. Système optique approximativement stigmatique.

Stigmatisme approché Dans la plupart des cas, les rayons ne se recoupent pas exactement en un point, mais définissent un petit élément de volume autour de A' . Si cet élément de volume reste suffisamment petit, on parle de stigmatisme approché : si la tache qui en résulte est plus petite que la taille du détecteur élémentaire (grain photographique, bâtonnet de l'œil...), l'image paraît nette.

1.3 Un dispositif optique fait d'un objet AB à distance finie ou infinie une image à distance finie ou infinie. L'«efficacité» du dispositif optique peut alors être caractérisée par le rapport entre la «taille» de l'image et la «taille» de l'objet. Pour un objet à distance finie, la taille de l'objet est simplement donnée par... sa taille !, i.e. une *longueur* d . Pour un objet à l'infini, en revanche, on utilise l'*angle* α sous lequel on voit l'objet depuis le centre du dispositif optique.

Un dispositif optique faisant d'un objet à l'infini une image à l'infini est carac-

térisé par son *grossissement* G , défini comme le rapport des angles

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

C'est le cas, par exemple, d'une lunette astronomique.

Un dispositif optique faisant d'un objet à distance finie une image à distance finie est caractérisé par son *grandissement* γ , défini comme le rapport des tailles

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{y'}{y}.$$

C'est le cas, par exemple, d'un appareil photo.

Remarque On distingue parfois le grandissement transverse (rapport des tailles perpendiculaires à l'axe optique) du grandissement longitudinal (rapport des tailles parallèles à l'axe optique) ou encore du grandissement pupillaire (rapport du diamètre de la pupille de sortie sur le diamètre de la pupille d'entrée). Sans précision, on appelle grandissement le grandissement transverse.

Pour pousser le vice, on parle parfois de grandissement angulaire au lieu de grossissement.

Pour un dispositif optique faisant d'un objet à distance finie une image à l'infini, on ne peut pas utiliser simplement un rapport du type α/y : on ne compare pas des angles à des longueurs ! On utilise dans ce cas le *grossissement commercial* G_c , défini comme le rapport

$$G_c = \frac{\alpha'}{\alpha_c},$$

où α_c est l'angle sous lequel est vu l'objet de taille d au *punctum proximum*, i.e. au point le plus proche de l'œil sur lequel il peut encore accommoder. Pour un œil « normal » le *punctum proximum* est à environ $d_m = 25$ cm et

$$\alpha_c = \frac{y}{d_m}.$$

Autrement dit, α_c est l'angle le plus grand sous lequel on peut voir l'objet à l'œil nu.

1.4 Conditions de Gauss On ne considère ici que des systèmes optiques dits *centrés*, i.e. présentant une symétrie de révolution autour d'un axe. Tous les éléments du montage optique doivent posséder le même axe de symétrie, appelé *axe optique*.

Les conditions de Gauss sont vérifiées lorsque les rayons sont peu inclinés sur l'axe optique et que l'écart à l'axe optique est faible par rapport aux distances longitudinales caractéristiques (distances focales ou autres).

Utilisés dans ces conditions, tous les dispositifs optiques usuels (lentilles minces, miroirs ou dioptries sphériques...) réalisent le stigmatisme approché. Une lentille utilisée dans les conditions de Gauss est un système stigmatique (stigmatisme approché). Cette propriété est essentielle pour la formation des images.

2. Lentille mince

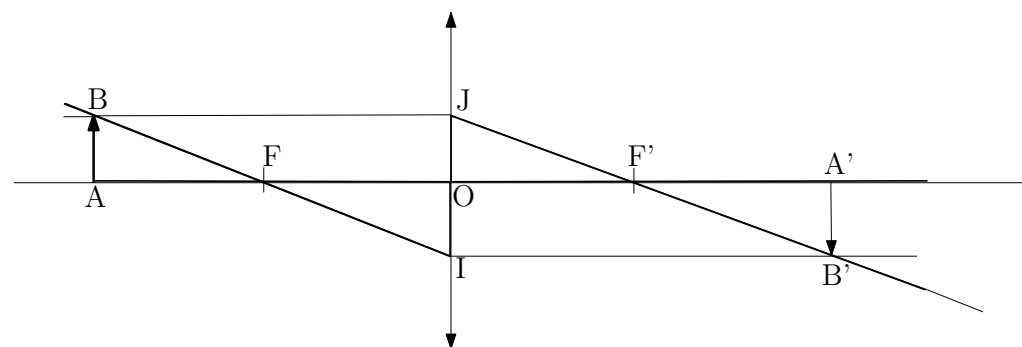


FIGURE 1.3 – Lentille mince.

2.1 Relations de conjugaison Soit une lentille **mince** \mathcal{L} de centre optique O , de foyer image F' et de foyer objet F . On note f et f' les distances focales objet et image, respectivement : $f' = \overline{OF'}$ et $f = -\overline{OF}$. On a $f' > 0$ pour une lentille convergente, et $f' < 0$ pour une lentille divergente. Pour A' , image de A par \mathcal{L} , la relation de conjugaison s'écrit

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}}. \quad (\text{I.1})$$

2.2 *Relations de Newton* On applique le théorème de Thalès dans les triangles ABF et FOI ,

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FO}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}},$$

ainsi que dans les triangles $A'B'F'$ et $F'OJ$

$$\frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OJ}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.$$

En combinant les deux expressions précédentes, on obtient

$$\frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} \longrightarrow \overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = \underbrace{\overline{F'O}}_{-f'} \cdot \underbrace{\overline{FO}}_{-f=f'}.$$

D'où les relations de Newton :

$$\boxed{\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = f f' = -f'^2}. \quad (I.2)$$

2.3 Le grandissement transverse de la lentille est donné par $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$. Donc

$$\boxed{\gamma = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}}.$$

On constate ici directement la règle simple : le grandissement de la lentille est d'autant plus grand, en valeur absolue, que l'objet est proche de la lentille. Évidemment, il ne faut pas pour autant que l'objet soit plus proche de la lentille que le plan focal objet, *i.e.* que A dépasse F . Quand $A = F$, le grandissement diverge (en effet, si A est compris entre F et O , A' est une image virtuelle).

2.4 La distance objet-image $\overline{AA'}$ s'écrit

$$\overline{AA'} = \overline{AF} + \overline{FF'} + \overline{F'A'} = \overline{AF} + 2f' + \frac{f'^2}{\overline{AF}}.$$

Les positions de A qui extrêment $\overline{AA'}$, à f' fixé, vérifient donc (en dérivant par rapport à \overline{AF})

$$1 - \frac{f'^2}{\overline{AF}^2} = 0, \quad \text{soit} \quad \overline{AF} = \pm f'.$$

Ces deux positions correspondent à des minima de $\overline{AA'}$:

- $\overline{AF} = -f'$ correspond à $A = A' = O$: la distance objet-image est nulle, mais cette configuration a peu d'intérêt...
- $\overline{AF} = f'$ correspond à la configuration dite « 4 f » : $\overline{AA'} = 4f'$. C'est la distance minimum entre A et A' , quand A et A' sont tous deux réels.

Dans la configuration « 4 f », en utilisant le résultat de la partie précédente, le grandissement est $\gamma = -1$. Pour augmenter (diminuer) $|\gamma|$, il faut diminuer (augmenter) FA , *i.e.* rapprocher (éloigner) la lentille de l'objet.

2.5 On fixe maintenant la position de l'objet et de l'écran et l'on cherche où placer une lentille de focale f pour que l'image de l'objet par la lentille soit nette sur l'écran. On note D la distance objet – écran.

Si on note $x = \overline{AO}$ la position de la lentille par rapport à l'objet, on a donc avec la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$$

Ce qui donne en développant

$$x^2 - xD + f'D = 0$$

Pour avoir une image réelle, il faut donc un déterminant Δ positif.

$$\Delta = D^2 - 4f'D \geq 0$$

On retrouve bien le résultat de la question précédente, il n'y aura de positions possibles pour la lentille que si

$$\boxed{f' \leq D/4}.$$

Nous posons donc que cette propriété est respectée et cherchons les positions de la lentille pour avoir une image nette sur l'écran.

On a alors

$$x = \overline{AO} = \frac{D \pm \sqrt{D(D-4f')}}{2}.$$

Les deux positions possibles sont symétriques l'une de l'autre par rapport au milieu du segment objet-écran, et sont confondues si $D = 4f$. Elles correspondent, en outre, à des grandissements inverses.

3. Principe du microscope

3.1 L'œil n'accomode pas si l'image est à l'infini. Il faut donc que l'image intermédiaire soit dans le plan focal de l'oculaire. L'idée du microscope est d'obtenir une image agrandie que l'on observe ensuite à la loupe (oculaire).

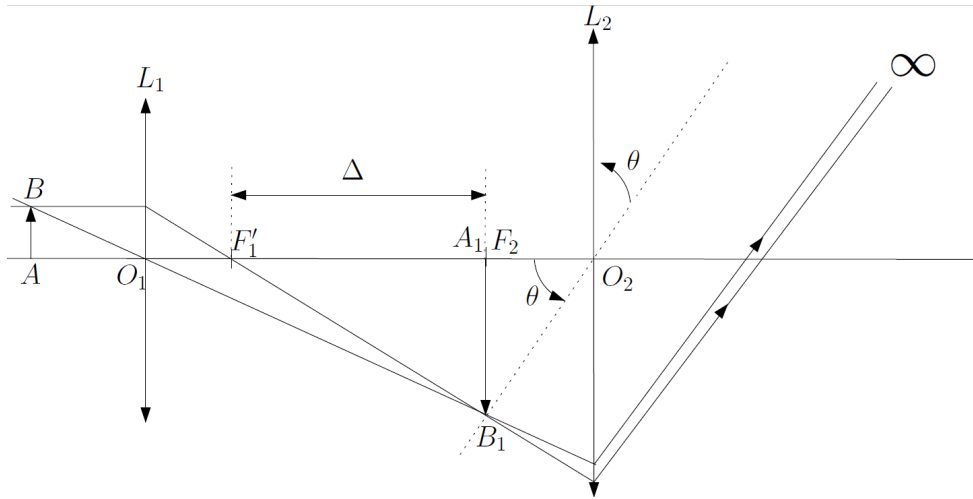


FIGURE 1.4 – Modélisation d'un microscope par deux lentilles minces.

3.2 Puisque le microscope forme d'un objet à distance finie une image à l'infini, on cherche à calculer le grossissement commercial G_c de ce dispositif optique. On note Δ l'intervalle optique, défini comme la distance entre F'_1 et $A_1 \equiv F_2$ (voire figure 1.4). Le grandissement γ_{ob} de la lentille L_1 est défini par

$$\gamma_{ob} = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}}.$$

D'après nos résultats précédents, on peut par ailleurs écrire

$$\gamma_{ob} = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'_1 A_1}}{\overline{F'_1 O_1}} = -\frac{\Delta}{f'_1}.$$

L'angle θ sous lequel est vue l'image dans l'oculaire du microscope est alors

$$\theta = \frac{\overline{A_1 B_1}}{f_2} = \frac{\Delta}{f'_1 f_2} \overline{AB}.$$

Soit α_c l'angle sous lequel l'œil voit AB à $d_m = 25$ cm (*punctum proximum*). Par définition

$$G_c = \frac{\theta}{\alpha_c}.$$

Comme $\alpha_c = \frac{\overline{AB}}{d_m}$, on obtient finalement

$$G_c = \frac{\Delta d_m}{f'_1 f_2}.$$

Enfin, puisque le grossissement commercial $G_{c,oc}$ de l'oculaire est donné par

$$G_{c,oc} = \frac{\theta}{\alpha_{c,oc}} = \frac{d_m}{f_2},$$

avec :

$$\alpha_{c,oc} = \frac{\overline{A'_1 B'_1}}{d_m}$$

on peut écrire

$$G_c = \gamma_{ob} \times G_{c,oc}.$$

Le grossissement commercial du microscope est le produit du grandissement de l'objectif et du grossissement commercial de l'oculaire.

3.3 Si l'on place un objet de taille \overline{AB} dans le plan principal objet du microscope, son image $\overline{A'B'}$ est dans le plan principal image et le grandissement est $\gamma = +1$.

$$1 = \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1 B_1}} \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}},$$

où $A_1 B_1$ est l'image intermédiaire de AB . Ces deux fractions correspondent aux grandissements des deux lentilles. En utilisant les résultats précédents, on a donc

$$1 = -\frac{\overline{F'_1 A_1}}{f'_1} \frac{f'_2}{\overline{F_2 A_1}}, \quad \text{soit}$$

$$\overline{F_2 A_1} = -\Delta + \overline{F'_1 A_1} = -\frac{f'_2}{f'_1} \overline{F'_1 A_1} \quad \text{et}$$

$$\overline{F'_1 A_1} = \frac{\Delta}{1 + \frac{f'_2}{f'_1}}.$$

En utilisant les relations de Newton, on obtient finalement

$$\overline{AF_1} = \frac{f_1 f_2 + f_1^2}{\Delta}.$$

Par symétrie, on peut écrire directement

$$\overline{F_2 A'} = \frac{f_1 f_2 + f_2^2}{\Delta}.$$

Géométriquement (voir figure 1.5), on trouve la position du plan principal image en traçant la trajectoire d'un rayon lumineux parallèle à l'axe optique en entrée du dispositif. L'intersection du rayon émergent avec le prolongement virtuel du rayon incident repère le lieu du plan principal image. On procède de façon symétrique pour trouver le plan principal objet.

Les points d'intersection des plans principaux objet et image avec l'axe optique sont en général notés H et H' , respectivement. La distance HH' entre les plans principaux est appelée *interstice*. Ici, on peut calculer la valeur de l'interstice :

$$\begin{aligned} \overline{HH'} &= \overline{AF_1} + \overline{F_1 F'_1} + \overline{F'_1 F_2} + \overline{F_2 F'_2} + \overline{F'_2 A'} \\ &= \frac{f_1 f_2 + f_1^2}{\Delta} + 2f'_1 + \Delta + 2f'_2 + \frac{f_1 f_2 + f_2^2}{\Delta} \\ &= \frac{(f'_1 + f'_2)^2}{\Delta} + 2(f'_1 + f'_2) + \Delta. \end{aligned}$$

3.4 On souhaite ici montrer que les points A_1 et A_2 , intersections de l'axe optique avec les plans principaux objet et image, respectivement, sont aussi les points nodaux du système. Cela revient à montrer que les angles α_1 et α_2 (voir figure 1.6) sont égaux.

Le théorème de Thalès dans le triangle $F'_1 CI$ et $F'_1 O_1 B_1$ nous permet d'écrire

$$\frac{\overline{F'_1 C}}{-f'_1} = \frac{\overline{CI}}{\overline{O_1 B_1}}.$$

De même

$$\frac{\overline{F_2 C}}{f'_2} = \frac{\overline{CI}}{\overline{O_2 B_2}}.$$

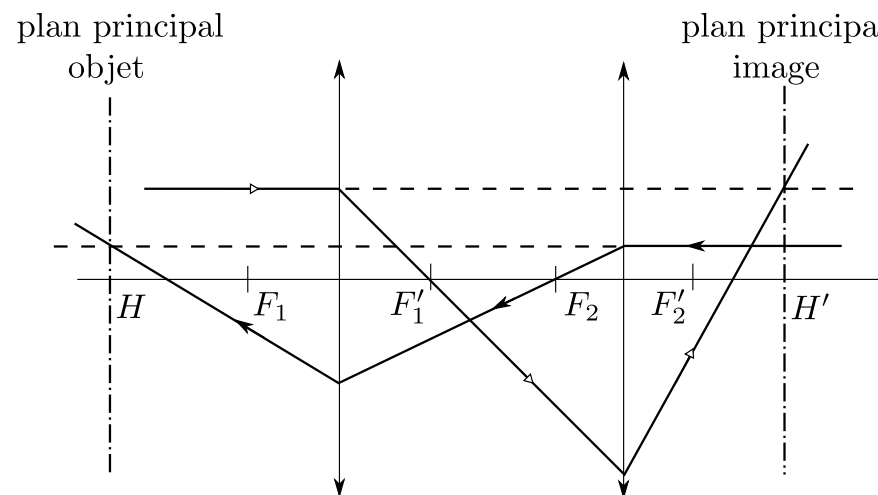


FIGURE 1.5 – Construction des plans principaux du microscope

Puisque A_1 et A_2 sont dans les plans principaux, on a en outre $\overline{O_2 B_2} = \overline{O_1 B_1}$. On en déduit que

$$\frac{\overline{CF_2}}{\overline{F'_1 C}} = \frac{f_2}{f'_1}, \quad \text{et donc} \quad \frac{\overline{CO_2}}{\overline{O_1 C}} = \frac{\overline{CF_2} + f'_2}{f'_1 + \overline{F'_1 C}} = \frac{f_2}{f'_1}.$$

Le théorème de Thalès dans les triangles $CO_1 B_1$ et $CO_2 B_3$ permet enfin d'écrire

$$\frac{\overline{O_2 B_3}}{\overline{O_1 B_1}} = \frac{\overline{CO_2}}{\overline{CO_1}} = -\frac{f_2}{f'_1}.$$

En utilisant les résultats de la question précédente, on a par ailleurs

$$\begin{aligned} \overline{A_1 O_1} &= \overline{A_1 F_1} + f'_1 = f'_1 \frac{f'_1 + f'_2 + \Delta}{\Delta}, \\ \overline{O_2 A_2} &= \overline{F'_2 A_2} + f'_2 = f'_2 \frac{f'_1 + f'_2 + \Delta}{\Delta}, \end{aligned}$$

dont on déduit que

$$\frac{\overline{O_2 B_3}}{\overline{O_1 B_1}} = \frac{\overline{O_2 A_2}}{\overline{O_1 A_1}} = -\frac{f_2}{f'_1}.$$

On a donc finalement $\tan \alpha_2 = \tan \alpha_1$ soit $\alpha_2 = \alpha_1$, ce qu'il fallait démontrer.

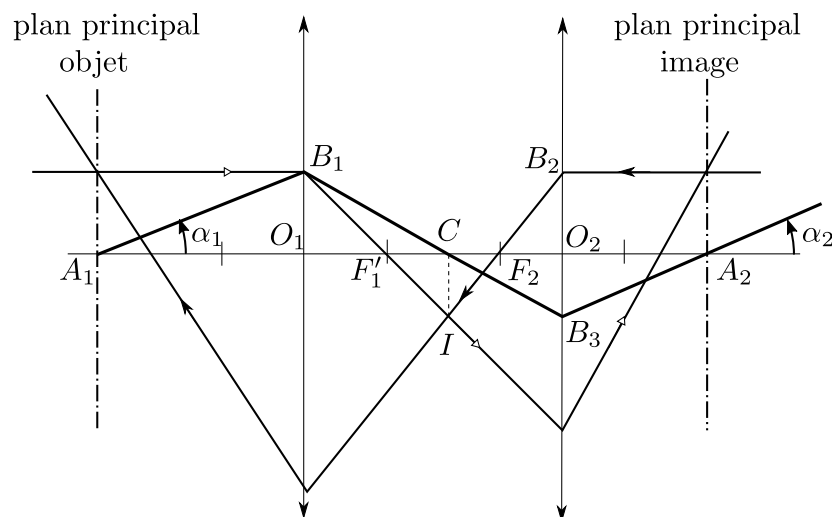


FIGURE 1.6 – Points nodaux du microscope

Remarque On note en général N et N' les points nodaux objet et image, respectivement. Ici, les points nodaux et les plans principaux sont confondus : $H = N$ et $H' = N'$. C'est en fait toujours le cas quand les milieux en entrée et en sortie du dispositif optique ont *le même indice optique*. On verra par la suite, l'application à la lentille mince, où on prend alors l'approximation $N = N' = H = H' = O$, le centre de la lentille.

De façon générale, on montrera page 8 qu'on a toujours $\overline{HN} = \overline{H'N'} = f + f'$ et que $f' = -f$ quand les indices optiques des milieux en entrée et en sortie sont égaux.

Éléments cardinaux Pour un instrument d'optique centré, on définit :

- le foyer image F' comme l'image d'un objet à l'infini sur l'axe optique,
- le foyer objet F comme l'objet dont l'image est située à l'infini sur l'axe optique,
- les points H et H' comme les points d'intersection des plans principaux objet et image, respectivement,
- les points nodaux N et N' définis plus haut.

On définit également les plans anti-principaux comme les plans conjugués pour lesquels le grandissement vaut -1 . Le plan anti-principal objet (image) est le symétrique du plan principal objet (image) par rapport au foyer objet (image).

De façon similaire, on définit les points anti-nodaux comme les points pour lesquels le grossissement vaut -1 . Le point anti-nodal objet (image) est le symétrique du point nodal objet (image) par rapport au foyer objet (image).

Les foyers, plans (anti-)principaux et points (anti-)nodaux sont appelés *éléments cardinaux* du dispositif optique. La donnée de deux paires d'éléments cardinaux *distincts* suffit à construire la trajectoire de tout rayon lumineux à travers le dispositif optique. Il peut s'agir par exemple

- des points focaux F et F' et des plans principaux (cf FIG. 1.7),
- des points focaux F et F' et des points nodaux (cf FIG. 1.8),
- des plans principaux, des points nodaux et d'un des deux points focaux, par exemple le point focal objet (cf FIG. 1.9).

Dans ce dernier cas, puisque $\overline{HN} = \overline{H'N'}$, une fois H, H' et N fixés, la donnée du point nodal image N' n'apporte pas d'information nouvelle. Il faut donc un élément cardinal supplémentaire pour pouvoir tracer la trajectoire des rayons.

On définit également les distances focales objet $f = \overline{HF}$ et image $f' = \overline{H'F'}$. De même que pour la lentille mince, le dispositif est convergent (divergent) si $f' > 0$ ($f' < 0$). En notant n et n' les indices optiques des milieux objet et image, respectivement, on a par ailleurs

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}, \quad (\text{I.3})$$

qu'on démontrera plus tard (voir page 12).

Relations de conjugaison La donnée des plans principaux permet en général de récrire les relations de conjugaison obtenues pour la lentille mince de façon beaucoup plus générale. Il est par exemple assez simple de reprendre la démonstration des formules de Newton.

On considère, figure 1.7 un objet AB dont on fait l'image par un instrument d'optique pour lesquels les foyers F et F' ainsi que les plans principaux sont connus. Si l'on trace par exemple le rayon issu de B parallèle à l'axe optique, on sait que ce rayon doit passer en sortie du dispositif par le foyer image F' . Par

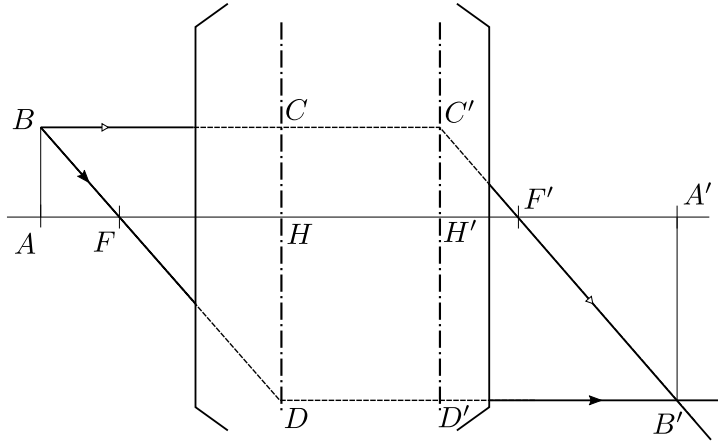


FIGURE 1.7 – Construction des trajectoires de rayons lumineux à l'aide des foyers et des plans principaux.

ailleurs, ce rayon est aussi issu de C , point contenu dans le plan principal objet. Son image, C' , est donc contenue dans le plan principal image, à égale distance de l'axe optique. Le rayon émergent est ainsi le rayon passant par C' et F' . On construit de la même façon le rayon issu de B passant par F .

On peut alors suivre la même démonstration des relations de Newton que précédemment. Le théorème de Thalès dans les triangles ABF et FHD puis dans les triangles $A'B'F'$ et $F'HC'$ permet d'écrire

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HD}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{FH}} = -\frac{\overline{FA}}{f} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{H'C'}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'H'}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}.$$

Comme, par ailleurs, $\overline{H'C'} = \overline{AB}$ et $\overline{HD} = \overline{A'B'}$, on peut écrire

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = -\frac{f}{\overline{FA}} \quad \text{et} \quad \overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = ff'. \quad (\text{I.4})$$

On retrouve exactement les mêmes expressions que pour la lentille mince. On peut de la même façon retrouver la relation de conjugaison aux plans principaux

$$\frac{f}{\overline{HA}} + \frac{f'}{\overline{H'A'}} = 1. \quad (\text{I.5})$$

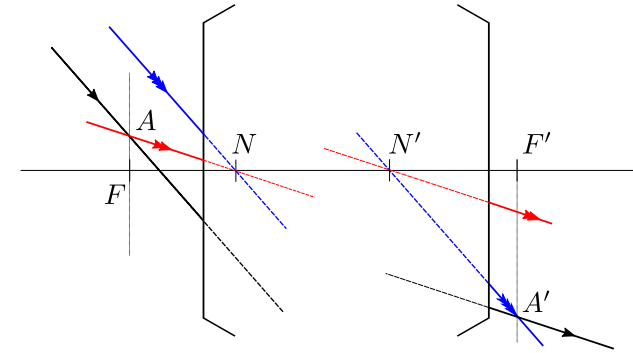


FIGURE 1.8 – Construction de la trajectoire d'un rayon lumineux à l'aide des foyers F , F' et des points nodaux N , N' . On note A le point d'intersection du rayon considéré (simple flèche, noir) et du plan focal. Son image est à l'infini, donc tous les rayons passant par A sont parallèles entre eux en sortie de l'instrument. Le rayon rouge (double flèche) qui passe par A et N passe nécessairement par N' , image de N , avec la même inclinaison qu'en entrée, par propriété des points nodaux. On en déduit l'inclinaison du rayon émergent noir. Inversement, tous les rayons parallèles au rayon incident se croisent en un point A' du plan focal image. Pour trouver A' , on trace le rayon parallèle au rayon incident qui passe par N (triple flèche, bleu). La donnée de A' et de l'inclinaison permet de tracer le rayon noir en sortie du dispositif.

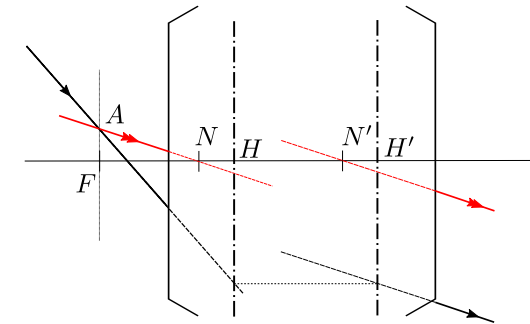


FIGURE 1.9 – Construction de la trajectoire d'un rayon lumineux à l'aide des plans principaux, des points nodaux N , N' et du foyer objet F . La construction du rayon rouge (double flèche, voir FIG. 1.8) donne l'inclinaison du rayon émergent. Par propriété des plans principaux, on sait par ailleurs en quel point ce rayon intercepte le plan principal image. On peut donc le tracer.

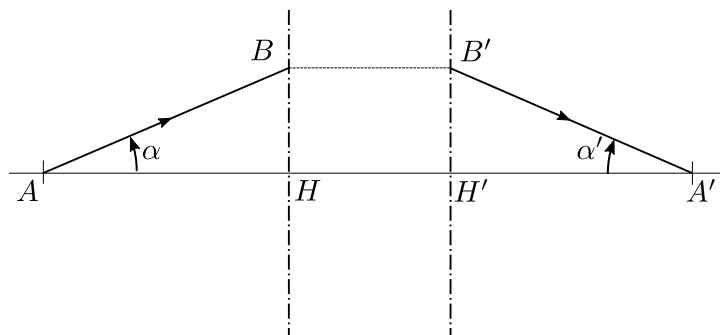


FIGURE 1.10 – Relation entre grossissement et écart aux plans principaux

Relations entre éléments cardinaux Il existe des relations simples entre les différents éléments cardinaux. Sur la figure 1.10, on trace la trajectoire d'un rayon issu d'un point A et faisant un angle α avec l'axe optique. Ce rayon intercepte le plan principal objet en B , son image par le dispositif optique intercepte donc le plan principal image en B' et l'axe optique en A' , image de A par le dispositif. On montre alors facilement que le grossissement au point A est

$$G_A = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\overline{HA}}{\overline{H'A'}}.$$

Pour les points nodaux N et N' , on sait par ailleurs que $G_N = 1$. Il en découle que

$$\overline{HN} = \overline{H'N'} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\overline{HH'} = \overline{NN'}}. \quad (\text{I.6})$$

L'*interstice* du dispositif est donc défini indifféremment comme la distance entre les plans principaux ou entre les points nodaux.

Par ailleurs, par le même type de construction géométrique (voir figure 1.11), il est assez aisé de montrer que

$$\boxed{\overline{HN} = \overline{H'N'} = f + f'}.$$

Il suffit en effet de constater que $\overline{FN} = \overline{H'F'} = f'$ d'après le dessin et que $\overline{FN} = \overline{FH} + \overline{HN} = \overline{HN} - f$.

On retrouve alors le fait que, si les indices des milieux objet et image sont égaux ($n = n'$), alors $f = -f'$ et $\overline{HN} = \overline{H'N'} = 0$. Les points nodaux sont confondus avec les plans principaux.

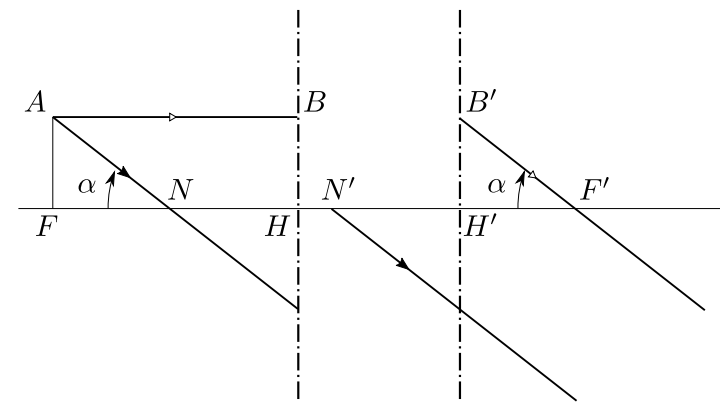


FIGURE 1.11 – Relation entre les éléments cardinaux du dispositif

3.5 Dans le cas de la lentille mince, les plans principaux et les points nodaux sont tous confondus avec la lentille : $H = H' = N = N' = O$. Puisque les plans anti-principaux ($\gamma = -1$) sont les symétriques des plans principaux par rapport aux foyers, situés à distance focale de la lentille, on retrouve bien le fait que le grandissement vaut -1 pour un objet situé à $2f'$ de la lentille : il s'agit du montage « $4f$ » rencontré plus tôt. On trouve par la même occasion que, dans le montage « $4f$ », le grossissement sur l'axe optique est -1 .

4. Profondeur de champ

4.1 Par définition, le nombre d'ouverture n est défini par

$$\boxed{n = \frac{f'}{D}}.$$

Où D est la taille du diaphragme, égale à la distance BC dans la fig. 1.12.

La profondeur de champ est la distance qui sépare deux points extrêmes de l'axe optique dont les images sont vues avec une netteté suffisante sur le détecteur (pellicule, œil, CCD...). Avec les notations de la figure 1.12, la profondeur de champ $\delta = p_2 - p_1$, que l'on cherche à calculer dans la suite.

4.2 On considère le point A dont on veut faire l'image, ainsi que A_1 et A_2 les deux points objets extrêmes, situés sur l'axe optique, dont les images s'étalent sur une

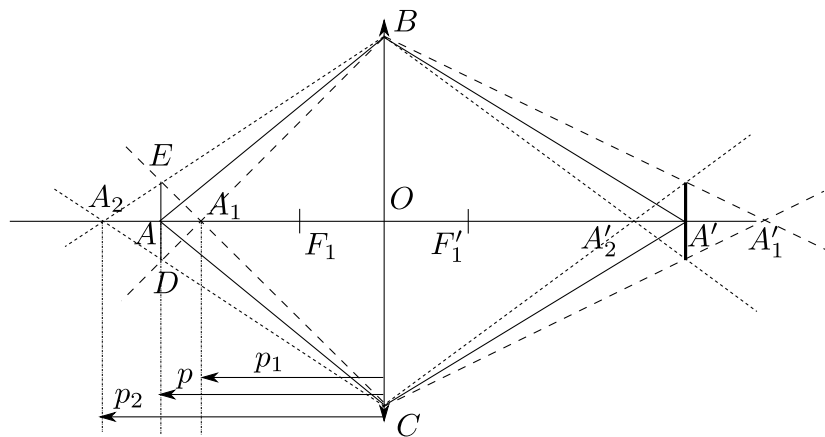


FIGURE 1.12 – Profondeur de champ.

tache de taille inférieur à a dans le plan de A' . Soit γ le grandissement de l'appareil photo. On note p , p_1 et p_2 les distances \overline{OA} , $\overline{OA_1}$ et $\overline{OA_2}$, respectivement. On a

$$\gamma = \frac{f'}{F_1A} = \frac{f'}{p - f'} \approx \frac{f'}{p} \text{ si } p \gg f',$$

approximation vérifiée en général pour un appareil photo : contrairement au microscope, il fait l'image d'un objet *éloigné*. On applique le théorème de Thalès dans les triangles A_2AE et A_2OB puis dans les triangles A_1AE et A_1OC . On obtient alors les relations suivantes

$$\frac{p_2 - p}{EA} = \frac{p_2}{D/2} \quad \text{et} \quad \frac{p - p_1}{EA} = \frac{p_1}{D/2},$$

d'où

$$\frac{p_2 - p}{p_2} = \frac{p - p_1}{p_1} = \frac{2EA}{D}.$$

Or $a = \gamma \cdot ED = 2\gamma EA$, donc

$$\frac{p_2 - p}{p_2} = \frac{p - p_1}{p_1} = \frac{a}{\gamma D} = \frac{an}{\gamma f'},$$

où n est le nombre d'ouverture.

On pose $u = \frac{a}{\gamma f'}$, et on obtient

$$\frac{p_2 - p}{p_2} = \frac{p - p_1}{p_1} = nu, \quad \text{soit} \quad \begin{cases} p_1 = \frac{p}{1+nu}, \\ p_2 = \frac{p}{1-nu}. \end{cases}$$

La profondeur de champ $\delta = p_2 - p_1$ est alors donnée par

$$\delta = \frac{2pun}{1 - u^2n^2} = \frac{2p}{\frac{1}{nu} - nu}.$$

Remarques On constate que la profondeur de champ diverge quand $nu \rightarrow 1$. En fait, quand $nu = 1$, le point A'_2 est confondu avec le point focal image F'_1 , le point A_2 est donc à l'infini. Si l'on continue de faire croître nu , alors le point A_2 devient virtuel et donc δ , tel que calculé, est négatif. Toutefois, tous les points de l'axe optique, situés au-delà du point A_1 , apparaissent nets sur l'écran.

On peut noter que, dans cette situation, l'objectif (de taille D) est plus petit que l'objet dont l'image par la lentille est un pixel (de taille a/γ). Seuls les objets significativement plus grands que l'objectif ont une image qui occupe plusieurs pixels. C'est une situation qui peut se rapprocher de l'appareil photo d'un téléphone portable, pour lequel aucune mise au point n'est pour ainsi dire nécessaire.

On voit par ailleurs que la relation entre profondeur de champ et nombre d'ouverture n n'est pas «simple» en général, en particulier δ n'est pas proportionnel à n . En revanche, comme $1/(nu) - nu = \gamma D/a - a/\gamma D$ est une fonction croissante de D , la profondeur de champ δ décroît bien quand l'ouverture de l'objectif D augmente, ou encore quand le nombre d'ouverture n diminue.

Dans la limite des grandes ouvertures, $\delta \approx 2ap/\gamma D \propto 1/D \propto n$.

EXERCICE II STIGMATISME ET APLANÉTISME

1. Lois de Snell-Descarts

1.1 **Principe de Fermat** Entre deux points A et B atteints par la lumière, le chemin optique le long du trajet suivi par la lumière est *stationnaire*.

1.2 On considère le dioptré sphérique dessiné FIG. 2.1 et le rayon lumineux qui relie les points A_1 et A_2 . D'après le principe de Fermat, puisque le trajet suivi par la lumière est le chemin A_1IA_2 , son chemin optique est stationnaire. Si on le modifie

en déplacement de façon infinitésimale le point I du dioptre vers le point I' du dioptre, infiniment proche de I , alors le chemin optique ne varie pas, au premier ordre en $dI = II'$. En notant $L_I(A_1A_2)$ le chemin optique correspondant au trajet qui relie A_1 et A_2 en passant par le point I , on peut écrire

$$dL_I(A_1A_2) = L_{I'}(A_1A_2) - L_I(A_1A_2) = 0.$$

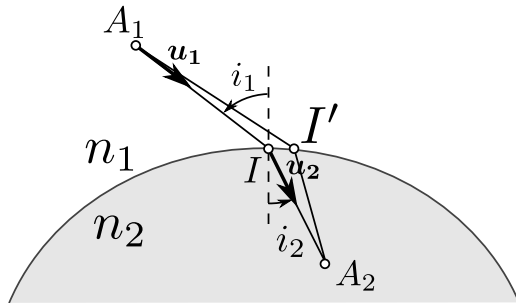


FIGURE 2.1 – Lois de Snell-Descartes par le principe de Fermat

- 1.3 De façon générale, si l'on considère un segment $[AB]$, de vecteur directeur unitaire \mathbf{u} , sa variation de longueur engendrée par un déplacement du point B du vecteur $d\mathbf{B}$ et un déplacement du point A du vecteur $d\mathbf{A}$ est donnée par

$$dAB = d(\mathbf{AB} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{AB} + \mathbf{AB} \cdot d\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot (d\mathbf{B} - d\mathbf{A}) + AB \mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}.$$

Or, $\mathbf{u}^2 = 1$, donc $d\mathbf{u}^2 = 0$. Comme $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} = d\mathbf{u}^2/2$, on en déduit que

$$dAB = \mathbf{u} \cdot (d\mathbf{B} - d\mathbf{A}). \quad (\text{II.1})$$

Dans le cas présent, on utilise la relation précédente pour calculer $dL_I(A_1A_2)$:

$$\begin{aligned} dL_I(A_1A_2) &= L_{I'}(A_1A_2) - L_I(A_1A_2) = L(A_1, I') + L(I', A_2) - (L(A_1, I) + L(I, A_2)) \\ dL_{dI}(A_1, I) + dL_{dI}(I, A_2) &= n_1 \mathbf{u}_1 \cdot d\mathbf{I} - n_2 \mathbf{u}_2 \cdot d\mathbf{I}, \end{aligned}$$

dont on déduit que

$$(n_1 \mathbf{u}_1 - n_2 \mathbf{u}_2) \cdot d\mathbf{I} = 0.$$

Comme $d\mathbf{I}$ est tangent au dioptre au point I , en notant \mathbf{N} le vecteur normal au dioptre en I , on déduit de la relation précédente que

$$n_1 \mathbf{u}_1 - n_2 \mathbf{u}_2 = a \mathbf{N}, \quad (\text{II.2})$$

où a est un scalaire.

- 1.4 L'équation (II.2) est l'expression vectorielle des lois de Snell-Descartes. En effet, elle permet de constater immédiatement que le rayon réfracté de direction \mathbf{u}_2 est dans le plan formé par les vecteur \mathbf{u}_1 et \mathbf{N} , i.e. le plan d'incidence.

Par ailleurs, en prenant le produit vectoriel de cette équation par le vecteur \mathbf{N} , on trouve immédiatement que

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

2. Stigmatisme et aplanétisme - application du principe de Fermat

- 2.1 On suppose que le dispositif Σ est rigoureusement stigmatique pour les points A_o et A_i . Ainsi, tous les rayons émergents de A_o sortent du dispositif en se croisant au point A_i . D'après le principe de Fermat, tous les chemins $A_o I J A_i$ sont donc stationnaires, puisqu'ils correspondent à un trajet que suit effectivement la lumière.

Considérons le point \tilde{I} de la face d'entrée de Σ , infiniment proche de I . Le rayon émergent correspondant au rayon incident $A\tilde{I}$ sort de Σ au point \tilde{J} infiniment proche de J et passe par A_i , exactement, car Σ est rigoureusement stigmatique. Puisque le chemin $A_o \tilde{I} \tilde{J} A_i$ est obtenu par un déplacement infinitésimal de I et J , et que le chemin $A_o I J A_i$ est stationnaire, les chemins $A_o I J A_i$ et $A_o \tilde{I} \tilde{J} A_i$ sont égaux. Or, le chemin $A_o \tilde{I} \tilde{J} A_i$ est, par construction, lui aussi un chemin stationnaire. On peut donc opérer de la même façon en considérant un point \tilde{I}_2 infiniment proche de \tilde{I} . On comprend alors que l'on peut transformer le chemin $A_o I J A_i$ en le chemin $A_o I' J' A_i$ par une succession de déplacement infinitésimaux des points d'entrée et sortie sans jamais changer la valeur du chemin optique et ayant, à toute étape, un chemin stationnaire. Dans le cas présent, on en déduit que les trajets $A_o I J A_i$ et $A_o I' J' A_i$ ont même chemin optique. Autrement dit, le chemin optique $L_I(A_o A_i)$ ne dépend pas du choix de I .

Il faut noter que si Σ n'avait pas été rigoureusement stigmatique, le chemin $A_o \tilde{I} \tilde{J} A_i$ n'aurait pas été lui-même stationnaire et nous n'aurions pas pu prolonger le raisonnement au point \tilde{I}_2 et donc jusqu'au point I' .

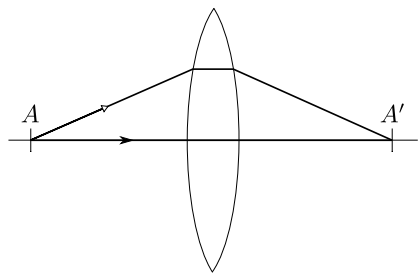


FIGURE 2.2 – Conjugaison de deux points par un dispositif optique

On aurait aussi pu raisonner par l'absurde, tel que cela est fait dans [R. Feynman, *Leçons de Physique*, vol. I, Chap. 26]. Puisqu'on a un système rigoureusement stigmatique, tous les chemins issus de A_o et passant par un point I quelconque de Σ finissent au point A_i , et tous ces chemins sont des chemins effectivement suivis par la lumière. Mais comment est-ce possible si la lumière ne suit *que* le chemin extrémal¹? La seule façon de s'assurer que tous les chemins sont effectivement suivis c'est que les « temps de parcours » de tous ces chemins soient rigoureusement égaux. Autrement, la lumière ne suivrait que le chemin de temps extrémal. Un système optique stigmatique doit donc être construit de telle façon que les temps de parcours de tous les chemins qui relient A_o à A_i soient égaux.

On peut ainsi simplement expliquer la forme d'une lentille convergente. On considère les deux chemins tracés sur la figure 2.2 et qui relient le point A au point A' . Sans la lentille, le chemin horizontal est plus court que le chemin qui s'éloigne de l'axe optique. Pour conjuguer les points A et A' , la lentille doit donc compenser l'avance du chemin horizontal et ainsi rendre le « temps de parcours » des deux chemins égaux. Ainsi, il faut faire en sorte que plus le chemin considéré s'éloigne de l'axe optique, moins il a à traverser d'épaisseur de verre, d'indice $n > 1$.

Remarque Si on le souhaite, on peut rendre l'argument ci-dessus plus formel en notant par exemple $L(s)$ la valeur du chemin optique du trajet, effectivement suivi par la lumière, qui relie A_o à A_i via le point d'entrée d'abscisse curviligne s . L'abscisse s repère donc la position du point I sur la face d'entrée.

1. R. Feynman dit « le plus court » dans son raisonnement à ce stade, ce qui simplifie un peu la compréhension. Tout en expliquant bien sûr plus loin que ce n'est pas tout à fait exact.

La différence de chemin optique entre les trajets passant par I et I' s'écrit :

$$L(s_{I'}) - L(s_I) = \int_{s_I}^{s_{I'}} \frac{dL}{ds}(s) ds.$$

Comme le système est rigoureusement stigmatique, pour tout point d'entrée, donc pour toute valeur de s , le chemin est stationnaire, c'est-à-dire

$$\forall s \quad \frac{dL}{ds}(s) = 0.$$

On trouve alors directement $L(s_I) = L(s_{I'})$. Si le dispositif n'avait pas été rigoureusement stigmatique, la dérivée de $L(s)$ n'aurait pas été nulle sur tout le chemin liant I à I' .

2.2 Condition des sinus d'Abbe On considère maintenant deux points B_o et B_i , infiniment proches de A_o et A_i , et tels que $\mathbf{A}_o\mathbf{B}_o$ et $\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i$ soient orthogonaux à l'axe optique. On garde ici la condition que A_o et A_i est rigoureusement stigmatique par Σ . On cherche la condition à laquelle Σ est rigoureusement stigmatique pour les points B_o et B_i , auquel cas il est dit aplanétique. On trace figure 2.3 la trajectoire du rayon lumineux issu de B_o qui intercepte Σ en I . Puisque Σ est stigmatique pour B_o et B_i , en sortie de Σ , ce rayon passe nécessairement par B_i . Puisque B_o et B_i sont infiniment proches de A_o et A_i , le rayon émergent sort de Σ au point J' infiniment proche de J . D'après la question précédente, on peut par ailleurs écrire

$$\begin{aligned} L_I(B_o B_i) &= n_o \overline{B_o I} + L(IJ') + n_i \overline{J' B_i} = b, \\ L_I(A_o A_i) &= n_o \overline{A_o I} + L(IJ) + n_i \overline{J A_i} = a, \end{aligned}$$

où a et b sont deux constantes, a priori distinctes, indépendantes du choix de I . La différence de ces deux équations permet d'écrire

$$\begin{aligned} L_I(B_o B_i) - L_I(A_o A_i) &= n_o (\overline{B_o I} - \overline{A_o I}) + L(IJ') - L(IJ) + n_i (\overline{J' B_i} - \overline{J A_i}) = b - a, \\ &= -n_o \mathbf{u}_o \cdot \mathbf{A}_o \mathbf{B}_o + L(IJ') - L(IJ) - n_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{J} \mathbf{J}' + n_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i. \end{aligned}$$

Or, la longueur $L(IJ') - L(IJ) - n_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{J} \mathbf{J}'$ correspond en fait exactement à la variation de chemin optique obtenue en déformant le trajet IJA_i par la transformation infinitésimale qui amène J en J' . Puisque le trajet IJA_i est un trajet qui est effectivement suivi par la lumière, d'après le principe de Fermat, le chemin optique le

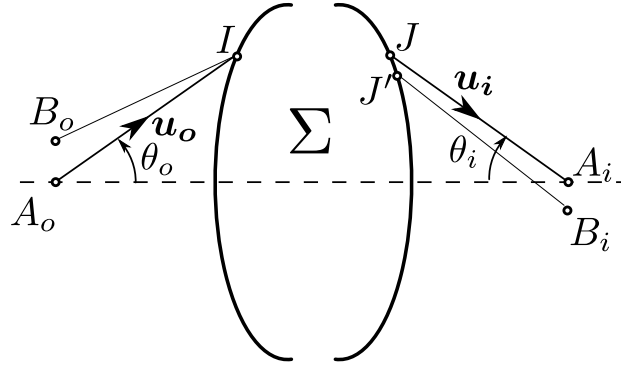


FIGURE 2.3 – Condition des sinus d'Abbe

long de ce trajet est stationnaire, il ne varie donc pas lorsqu'on applique au trajet cette transformation infinitésimale. Cela permet d'écrire

$$L(IJ') - L(IJ) - n_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{J}\mathbf{J}' = 0 \quad \text{et donc} \quad n_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i - n_o \mathbf{u}_o \cdot \mathbf{A}_o \mathbf{B}_o = \text{cte.}$$

En utilisant les angles θ_o et θ_i , cette dernière équation se récrit

$$n_i \overline{A_i B_i} \sin \theta_i - n_o \overline{A_o B_o} \sin \theta_o = \text{cte.}$$

On calcule la constante dans l'équation précédente en constatant que si $\theta_o = 0$ alors $\theta_i = 0$. La constante est donc nulle et

$$\boxed{n_i \overline{A_i B_i} \sin \theta_i - n_o \overline{A_o B_o} \sin \theta_o = 0}, \quad (\text{II.3})$$

ou

$$\boxed{\frac{\sin \theta_o}{\sin \theta_i} = \frac{n_i}{n_o} \gamma}, \quad (\text{II.4})$$

où $\gamma = \overline{A_i B_i} / \overline{A_o B_o}$ est le grandissement de Σ . Cette équation, sous la forme (II.3) ou (II.4), est appelée *condition des sinus d'Abbe*.

Stigmatisme transversal et longitudinal La condition des sinus d'Abbe est une condition à vérifier pour assurer la conservation du stigmatisme perpendiculairement à l'axe optique. La conservation du stigmatisme *le long* de l'axe optique, en

revanche, n'est assurée que si la *relation de Herschel* est vérifiée, à savoir

$$\frac{\sin^2(\theta_o/2)}{\sin^2(\theta_i/2)} = \frac{n_i}{n_o} \gamma_l, \quad (\text{II.5})$$

où γ_l est le grandissement longitudinal. De façon générale, cette condition est incompatible avec la condition des sinus d'Abbe. En fait, pour que les deux relations soient vérifiées, il faut

$$\theta_o = \theta_i \quad \text{et} \quad \gamma = \gamma_l = \frac{n_o}{n_i}.$$

Seuls les instruments de grossissement unité et de grandissement fixé à $n_o/n_i \approx 1$ peuvent vérifier les deux conditions. Ces systèmes optiques qui ne grandissent ni ne grossissent ont relativement peu d'intérêt. Dans le cas général, il faut donc choisir entre la conservation du stigmatisme le long de l'axe optique et perpendiculairement à ce dernier.

Invariant de Lagrange-Helmholtz Dans les conditions de Gauss, pour lesquelles les rayons sont peu inclinés sur l'axe, $\theta_o, \theta_i \ll 1$. La relation (II.3) peut alors se récrire

$$n_i \overline{A_i B_i} \theta_i = n_o \overline{A_o B_o} \theta_o.$$

Autrement dit, la quantité $n \overline{AB} \theta$ est inchangée par le passage par n'importe quel instrument d'optique (stigmatique et aplanétique, mais c'est pour ainsi dire toujours le cas dans les conditions de Gauss). Cette quantité est appelée *invariant de Lagrange-Helmholtz*.

On peut s'en servir pour montrer alors la relation entre les distances focales objet et image d'un instrument, déjà énoncée à l'équation (I.3). On reprend pour cela la situation de la figure 1.7 légèrement modifiée, voir figure 2.4 : on considère maintenant la trajectoire de deux rayons issus de A, situé dans le plan focal objet de l'instrument. Les deux rayons sont donc parallèles en sortie de l'instrument, l'un passant par le foyer image F' . On note n et n' , respectivement, les indices optiques des milieux dans les espaces objet et image de l'instrument.

En considérant l'invariant de Lagrange-Helmholtz entre les points H et H' , on peut écrire

$$\begin{aligned} n \overline{HB} \alpha &= n' \overline{H'B'} \alpha', \\ n \alpha &= n' \alpha', \end{aligned}$$

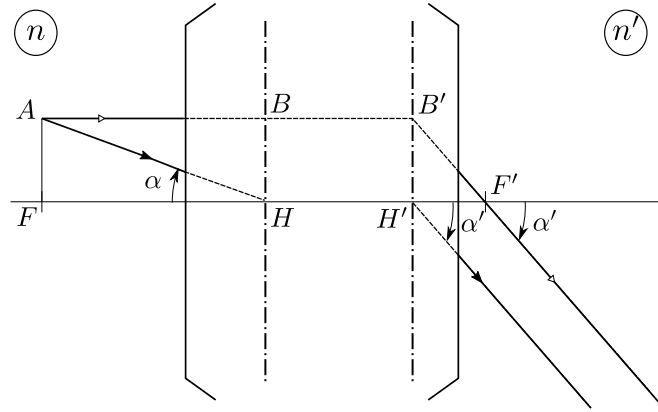


FIGURE 2.4 – Trajectoires de rayons issus d'un point A du plan focal objet.

la seconde ligne se déduisant par propriété des plans principaux. En écrivant enfin que $\alpha = \overline{FA}/\overline{HF} = -\overline{FA}/f$ et $\alpha' = \overline{H'B'}/\overline{F'H'} = \overline{FA}/f'$, on retrouve la relation (II.3) :

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}.$$

3. Applications : points de Weierstrass

3.1 D'après les résultats des questions précédentes, le dioptré n'est stigmatique que si le chemin optique $L_I(A_1A_2)$ est indépendant du choix de I , point du dioptré. Cela revient à dire qu'il existe une constante a telle que pour tout point du dioptré,

$$n_1\overline{A_1I} + n_2\overline{IA_2} = a. \quad (\text{II.6})$$

La surface des points I vérifiant cette équation est un *ovoïde de Descartes*.

3.2 On suppose maintenant que $a = 0$. On constate alors immédiatement que $\overline{A_1I}$ et $\overline{IA_2}$ sont de signes opposés. Les segments $[A_1I]$ et $[IA_2]$ sont donc parcourus par la lumière de A_1 vers I et de A_2 vers I , ou de I vers A_1 et de I vers A_2 . Cela n'est possible que si A_1 est réel et A_2 virtuel ou si A_1 est virtuel et A_2 réel.

On cherche maintenant tous les points de l'espace qui vérifient la condition

$$n_1\overline{A_1I} + n_2\overline{IA_2} = 0. \quad (\text{II.7})$$

Prenons l'exemple où l'objet A_1 est virtuel et A_2 est l'image réelle, comme dans fig. 2.5 avec $n_1 < n_2$. Il est alors pratique de prendre l'origine des axes au point O , point du segment $[A_1A_2]$ qui vérifie cette condition, et la droite (A_1A_2) comme axe des abscisses. Les points A_i ont donc pour coordonnées $(x = x_i, y = 0)$. On a, en notant $d = A_1A_2$ et $K = n_1/n_2$, on a alors $x_2 = -Kx_1$ et $d = x_2 - x_1 > 0$, se qui mène à :

$$x_2 = \frac{dK}{K+1} > 0 \quad \text{et} \quad x_1 = -\frac{d}{K+1} < 0.$$

On remarque en particulier qu'on a bien $n_1x_1 + n_2x_2 = 0$.

Les points I , de coordonnées (x, y) , qui vérifient la condition (II.7) vérifient également $n_1^2(A_1I)^2 = n_2^2(A_2I)^2$, qui se réécrit

$$n_1^2[(x - x_1)^2 + y^2] = n_2^2[(x - x_2)^2 + y^2].$$

En développant l'équation ci-dessus, et en utilisant $n_1^2x_1^2 = n_2^2x_2^2$, on obtient finalement

$$\left(x + \frac{dK}{K^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{dK}{K^2 - 1}\right)^2, \\ (x - x_C)^2 + y^2 = R^2$$

qui est l'équation d'un cercle de rayon $R = \frac{dK}{|K^2 - 1|}$, centré au point C de coordonnées $\left(x_C = \frac{dK}{1 - K^2}, y_C = 0\right)$. On peut alors récrire $x_2 = R|K - 1|$ et $x_1 = -R|1 - 1/K|$. On constate par ailleurs que le cercle entoure toujours le milieu d'indice le plus élevé.

3.3 Un dioptré sphérique de rayon R , de centre C , séparant deux milieux d'indices n_1 et $n_1 > n_2$, est donc rigoureusement stigmatique pour les points situés sur l'axe (OC) , où O est un point quelconque du dioptré, à distance $x_2 = R\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)$ et $x_1 = -R\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)$ de O . Ces points sont appelés points de Weierstrass.

Une application des points de Weierstrass est la microscopie et le design de l'objectif. Dans ce cas là, on prend un objet réel à l'interface du milieu n_2 (position A_2 précédemment), et une image virtuelle (A_1 précédemment) dans le milieu $n_1 < n_2$, comme illustré en Fig 2.6), cela permet d'avoir un grand angle solide de collection de photons, en gardant un stigmatisme rigoureux.

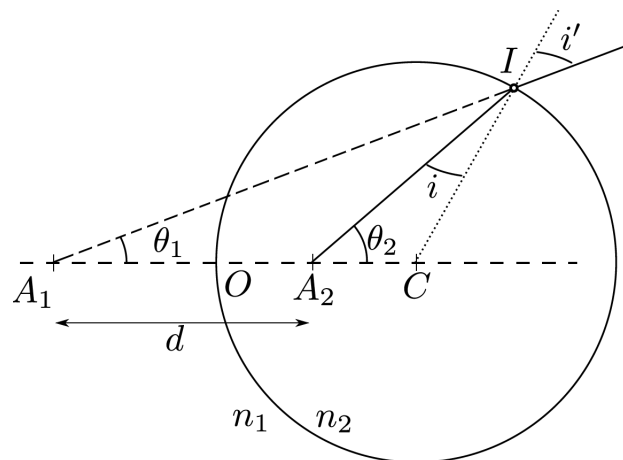


FIGURE 2.5 – Dioptre sphérique

Remarque : miroirs On peut remarquer dans le cas précédent que, si $n_1 = n_2$, le rayon de courbure du dioptre diverge. On se retrouve en fait dans la situation du miroir plan : si $n_1 = n_2$, il faut une surface réfléchissante pour que les rayons soient déviés au niveau du «dioptre». On retrouve alors le fait que le miroir plan est rigoureusement stigmatique. Il l'est pour tout point de l'espace.

De façon plus générale, dans le cas $n_1 = n_2$, donc dans le cas de surfaces réfléchissantes, l'équation (III.6) est l'équation de :

- un ellipsoïde de révolution de foyer A_1 et A_2 , si A_1 et A_2 sont de même nature (tous deux réels ou tous deux virtuels) ;
- un hyperboloïde de révolution de foyers A_1 et A_2 , si A_1 et A_2 sont de nature différente. On retrouve le cas du miroir plan dans le cas où $a = 0$;
- un paraboloïde de révolution si l'un des points est situé à l'infini, l'autre point étant au foyer du paraboloïde.

3.4 On souhaite maintenant montrer que le dioptre sphérique est également aplanétique au niveau des points de Weierstrass. Cela revient à montrer que les angles θ_1 et θ_2 , figure 2.5, vérifient la condition des sinus d'Abbe. Pour cela, on utilise la

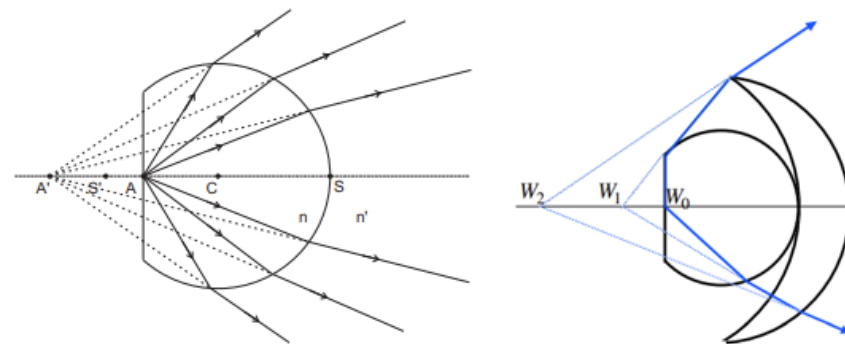


FIGURE 2.6 – Dioptre sphérique et points de Weierstrass. Application à la microscopie pour collecter les photons sur un grand angle solide en gardant un astigmatisme rigoureux. Sources images : <http://www.joelsornette.fr/ressources/textes/cours405-3b.pdf> et <http://fresnel.fr/spip/IMG/pdf/PH612-Cours>

relation des sinus dans le triangle A_2CI , qui nous permet d'écrire

$$\frac{\sin \theta_2}{CI} = \frac{\sin i}{A_2C}.$$

De même, dans le triangle A_1CI , on a

$$\frac{\sin \theta_1}{CI} = \frac{\sin i'}{A_1C}.$$

On déduit des deux équations précédentes que

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{\sin i}{\sin i'} \frac{A_1C}{A_2C} = \frac{n_1}{n_2} \frac{A_1C}{A_2C},$$

où la dernière égalité a été obtenue en utilisant les lois de Snell-Descartes. Grâce aux résultats des questions précédentes, on sait par ailleurs que

$$A_1C = A_1O + OC = -x_1 + x_C = \frac{d}{1 - K^2},$$

$$A_2C = A_2O + OC = -x_2 + x_C = \frac{dK^2}{1 - K^2}.$$

On en déduit finalement que

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{n_1}{n_2} \frac{1}{K^2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (\text{II.8})$$

Le rapport des sinus est donc bien une constante. Il reste à montrer que cette constante est donnée par la condition des sinus d'Abbe.

On considère maintenant un point B_1 au voisinage de A_1 , avec (A_1B_1) orthogonal à l'axe (A_1C) . On construit, comme indiqué sur la figure 2.7, le point B_2 comme l'intersection de (B_1C) et de la droite orthogonale à l'axe optique passant par A_2 . On veut montrer que, pour tous les couples de points $\{B_1, B_2\}$ ainsi construits, la condition des sinus d'Abbe est vérifiée, et donc que le dioptré est aplanétique.

On utilise pour cela le théorème de Thalès dans les triangles CA_1B_1 et CA_2B_2 :

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{CA_2}} = \frac{1}{K^2} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2.$$

Avec le résultat (II.8), il vient alors directement

$$n_1 \overline{A_1B_1} \sin \theta_1 = n_2 \overline{A_2B_2} \sin \theta_2,$$

i.e. la condition des sinus d'Abbe. Le dioptré est donc aussi rigoureusement stigmatique pour les points B_1 et B_2 . Il est aplanétique au niveau de ses points de Weierstrass.

Remarque De façon plus complexe, on peut montrer, sans chercher à vérifier la condition des sinus d'Abbe, que le dioptré est bien stigmatique pour B_1 et B_2 . Cela revient à montrer que les angles d'incidence des rayons (B_1I) et (B_2I) vérifient les lois de Snell-Descartes, quel que soit le point I . La relation des sinus dans les triangles CB_1I et CB_2I nous permet d'écrire

$$\frac{\sin \gamma}{B_1I} = \frac{\sin i'_1}{CB_1} \quad \text{et} \quad \frac{\sin \gamma}{B_2I} = \frac{\sin i'_2}{CB_2},$$

où l'on note $i'_1 = \widehat{CIB_1}$ et $i'_2 = \widehat{CIB_2}$. Par ailleurs, le théorème de Thalès dans les

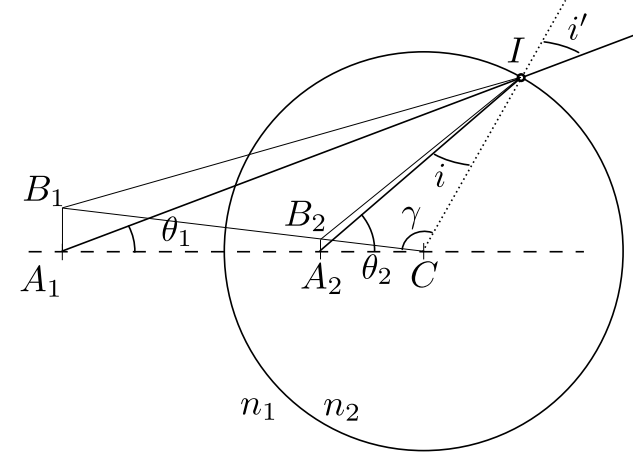


FIGURE 2.7 – Condition des sinus d'Abbe pour le dioptré sphérique

triangles CA_1B_1 et CA_2B_2 permet d'écrire

$$\frac{CB_2}{CB_1} = \frac{CA_2}{CA_1} = K^2.$$

On a donc

$$\sin i'_1 = \frac{B_2I}{B_1I} \frac{CB_1}{CB_2} \sin i'_2 \sim \frac{A_2I}{A_1I} K^{-2} \sin i'_2.$$

Enfin, comme I est sur le dioptré sphérique pour lesquels A_1 et A_2 sont des points de Weierstrass, $n_1 A_1I = n_2 A_2I$. L'équation précédente devient donc finalement

$$\sin i'_1 = \frac{n_1}{n_2} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin i'_2 \quad \text{soit} \quad n_1 \sin i'_1 = n_2 \sin i'_2.$$

Les deux points B_1 et B_2 ainsi construits sont donc bien conjugués par le dioptré sphérique.

EXERCICE III ABERRATION DES LENTILLES

1. On introduit les angles $\varphi, \alpha, \gamma, i_1$ et i_2 tels qu'indiqués sur la figure 3.1.

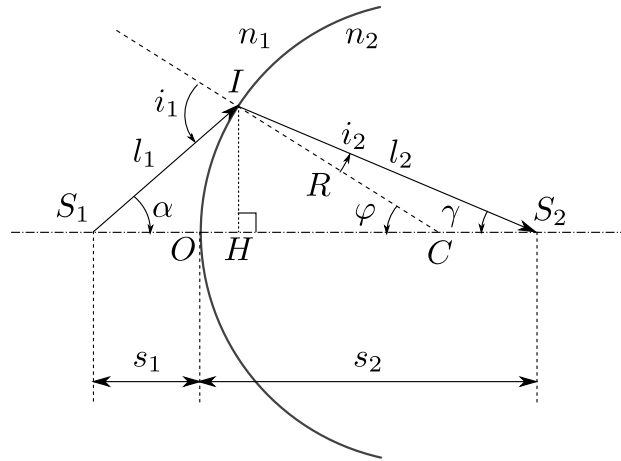


FIGURE 3.1 – Dioptre sphérique de rayon R

- 1.1 On utilise dans un premier temps la relation des sinus dans les triangles S_1IC et S_2IC . Cela nous permet d'écrire les égalités

$$\frac{\sin i_2}{CS_2} = \frac{\sin \gamma}{IC} \quad \text{et} \quad \frac{\sin(\pi - i_1)}{S_1C} = \frac{\sin \varphi}{IS_1}.$$

En notant alors que $CS_2 = s_2 - R$, $S_1C = s_1 + R$ et que $\sin \gamma = IH/l_2 = \sin \varphi R/l_2$, on obtient

$$\frac{\sin i_2}{s_2 - R} = \frac{\sin \varphi}{l_2} \quad \text{et} \quad \frac{\sin i_1}{R + s_1} = \frac{\sin \varphi}{l_1}.$$

Enfin, les lois de Snell-Descartes nous permettent d'écrire $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$, soit finalement

$$n_2(s_2 - R) \frac{\sin \varphi}{l_2} = n_1(s_1 + R) \frac{\sin \varphi}{l_1},$$

et donc

$$\frac{n_1}{l_1} + \frac{n_2}{l_2} = \frac{1}{R} \left(\frac{n_2 s_2}{l_2} - \frac{n_1 s_1}{l_1} \right). \quad (\text{III.1})$$

Ici, la position du point S_2 dépend de l'angle d'incidence i_1 via la grandeur l_1 : le dioptre sphérique n'est en général pas stigmatique.

- 1.2 Si l'on ne considère que des rayons proches de l'axe, on a alors $s_1 \approx l_1$ et $s_2 \approx l_2$. L'équation précédente se réécrit alors sous la forme plus simple

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{1}{R}(n_2 - n_1),$$

que l'on peut aussi écrire

$$\frac{n_2}{OS_2} - \frac{n_1}{OS_1} = \frac{1}{OC}(n_2 - n_1).$$

Dans ce cas, la position du point S_2 ne dépend plus de l'angle d'incidence mais seulement de la distance du point objet au sommet du dioptre : le dioptre sphérique, dans les conditions de Gauss, est stigmatique.

- 1.3 On associe maintenant deux dioptres sphériques de rayons R et R' , de centres O et O' (voir figure 3.2). On note A_i l'image intermédiaire que fait de A le premier dioptre sphérique, et A' l'image que fait de A_i le second dioptre. D'après le résultat de la question précédente, on a

$$\begin{aligned} \frac{n}{OA_i} - \frac{1}{OA} &= \frac{1}{OC}(n - 1), \\ \frac{1}{O'A'} - \frac{n}{O'A_i} &= \frac{1}{O'C'}(1 - n), \end{aligned}$$

Ce qui nous permet finalement d'écrire la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{O'A'} - \frac{1}{OA} = (n - 1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right) + n \frac{\overline{OO'}}{O'A_i \cdot OA_i}.$$

On retrouve ici les relations de conjugaison rappelées au premier exercice, pour une lentille mince, *i.e.* dans la situation où $O \sim O'$, en introduisant la focale f de la lentille :

$$\frac{1}{O'A'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right). \quad (\text{III.2})$$

2. *Aberrations chromatiques* On voit, dans l'expression de la focale de la lentille ainsi créée, que f dépend de l'indice du matériau, et donc de la longueur d'onde de la lumière utilisée. La position de l'image d'un objet dépend donc a priori de la longueur d'onde : la lentille souffre d'aberrations dites chromatiques.

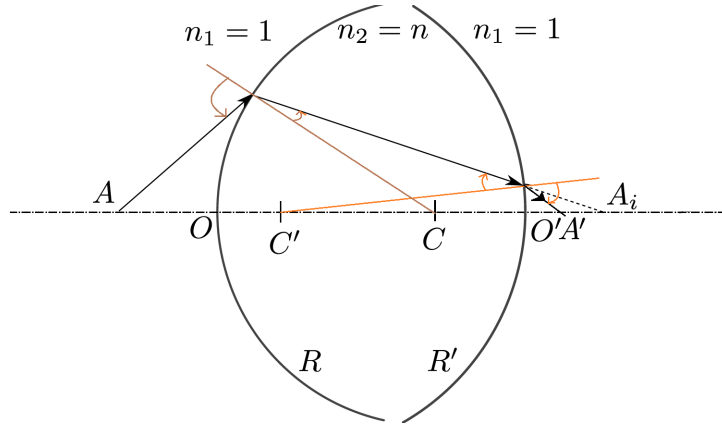


FIGURE 3.2 – Association de deux dioptries sphériques. Sur le dessin, $R = \overline{OC} > 0$ et $R' = \overline{O'C'} < 0$.

2.1 Etant donné les indices et les rayons de courbures donnés, on trouve pour la lentille en BK7 considérée :

$$\lambda = 400 \text{ nm} \rightarrow f = 48,9 \text{ cm},$$

$$\lambda = 590 \text{ nm} \rightarrow f = 50,2 \text{ cm},$$

$$\lambda = 800 \text{ nm} \rightarrow f = 50,6 \text{ cm}.$$

On constate donc que la lentille fait converger les rayons bleus plus vite que les rayons rouges, avec une grande différence de distance focale, clairement visible à l'œil nu ! Les aberrations chromatiques d'une telle lentille sont très fortes.

2.2 On éclaire la lentille avec un faisceau, centré, de diamètre D (voir figure 3.3). En notant δ la taille de la tache moyenne, et $\Delta = f_r - f_b$ la distance entre les points focaux images bleu et rouge, on a

$$\alpha_b = \frac{\delta}{\varepsilon} \quad \alpha_r = \frac{\delta}{\Delta - \varepsilon}$$

dont on déduit

$$\delta = \Delta \frac{\alpha_r \alpha_b}{\alpha_r + \alpha_b}.$$

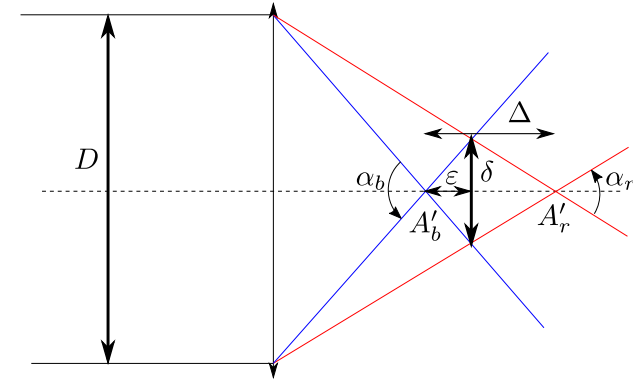


FIGURE 3.3 – Aberrations chromatiques

En notant enfin que $\alpha_{r,b} = D/f_{r,b}$, la tache de la taille moyenne due aux aberrations chromatiques est finalement

$$\delta = D \frac{f_r - f_b}{f_r + f_b} \approx 1,3 \text{ mm}.$$

Classification de verres Pour distinguer les verres en fonction de leur pouvoir dispersif, on introduit en général le coefficient appelé *nombre d'Abbe* ou *constricte*, et défini comme

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}, \quad (\text{III.3})$$

où n_D est l'indice du verre à $\lambda = 589,3 \text{ nm}$ (raie jaune du sodium) ou parfois $\lambda = 587,56 \text{ nm}$ (raie jaune de l'hélium), n_C est l'indice du verre à $\lambda = 656,3 \text{ nm}$ (raie rouge de l'hydrogène), et n_F est l'indice du verre à $\lambda = 486,1 \text{ nm}$ (raie bleue de l'hydrogène). Ce nombre est défini pour être d'autant plus grand que le verre est peu dispersif.

On distingue alors

- les verres *crown*, peu dispersifs ($\nu > 50$) et d'indice optique limité ($n_D < 1,6$). Ce sont typiquement des silicates de potassium et de calcium, et notamment le verre très répandu appelé BK7;

— les verres *flint*, très dispersifs ($\nu < 50$) et d'indice optique élevé ($n_D > 1,6$). Ils contiennent souvent du plomb ou de l'arsenic, quoique les versions les plus récentes de ces verres en soient dépourvues.

D'autres longueurs d'onde sont parfois utilisées dans la définition de ce nombre, en particulier si l'on s'intéresse à une autre gamme du spectre optique que le spectre visible. On utilise aussi parfois l'indice n_E correspondant à la « raie e » à $\lambda = 546,07$ nm plutôt que n_D . On retrouve ainsi souvent les notations ν_d et ν_e dans les données des constructeurs pour distinguer ces deux choix. Ces données, en libre accès, sont extrêmement riches. On pourra par exemple consulter

- le site web de Schott [www.schott.com/advanced_optics/english/knowledge-center/technical-articles-and-tools], pour des fiches techniques ou des données détaillées sur leurs très nombreux verres (diagramme d'Abbe),
- le site web de Ohara [www.oharacorp.com/catalog.html] pour des informations générales plus succinctes ou des données sur leurs verres.

2.3 On a vu, à la question précédente, qu'une lentille convergente envoie le rouge plus loin sur l'axe optique que le bleu. La situation serait en fait inversée si la lentille était divergente. Dans ce cas en effet, le point focal image (virtuel) est toujours plus proche de la lentille pour le bleu que pour le rouge. Ils sont toutefois situés du même côté de la lentille que l'objet, et le point focal bleu est donc plus loin sur l'axe optique que le point focal rouge.

On conçoit alors bien qu'il doit être possible de corriger les aberrations chromatiques des lentilles en associant une lentille convergente et une lentille divergente d'un verre différent, pour ramener les points focaux rouge et bleu au même endroit.

On accole donc une seconde lentille de focale f_2 à la première de focale f_1 déjà considérée. La focale du doublet ainsi créé est donnée par

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}, \text{ où } \frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)K_1 \text{ et } \frac{1}{f_2} = (n_2 - 1)K_2.$$

On a introduit ici les deux facteurs qui ne dépendent que de la géométrie des lentilles, et en particulier indépendants de l'indice,

$$K_i = \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R'_i}.$$

On cherche à ce que, pour le doublet, $f_r = f_b$. On a alors l'égalité

$$(n_1^b - 1)K_1 + (n_2^b - 1)K_2 = (n_1^r - 1)K_1 + (n_2^r - 1)K_2,$$

dont on déduit simplement

$$K_2 = K_1 \frac{n_1^b - n_1^r}{n_2^r - n_2^b}.$$

Sachant qu'ici, puisqu'on accole la seconde lentille à la première, on a nécessairement $R'_1 = R_2$, on peut calculer le rayon de courbure de la face de sortie de la seconde lentille :

$$\frac{1}{R'_2} = \frac{1}{R_2} - K_2 = \frac{1}{R'_1} - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) \frac{n_1^b - n_1^r}{n_2^r - n_2^b}.$$

On trouve finalement $R'_2 = -90,4$ cm. La seconde lentille est donc bien une lentille divergente ($K_2 < 0$), et la focale du doublet est finalement $f_r = f_b = 91,5$ cm. Pour corriger les aberrations géométriques, il a donc fallu perdre en convergence : la focale du doublet est plus grande que celle de la lentille non corrigée.

3. Aberrations géométriques

3.1 On utilise une nouvelle fois la relation des sinus, dans le triangle $CIF(i)$ (voir figure 3.4), qui nous permet d'écrire

$$\frac{\sin(i' - i)}{R} = \frac{\sin(\pi - i')}{CF(i)} = \frac{\sin i'}{CF(i)} = \frac{n \sin i}{CF(i)}.$$

En outre,

$$\sin(i' - i) = \sin i' \cos i - \sin i \cos i' = \sin i \left(n \cos i - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i} \right).$$

On a donc

$$CF(i) = \frac{nR}{n \cos i - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}}.$$

3.2 D'après l'équation précédente, la position du point F sur l'axe dépend de l'angle d'incidence i . Le dioptré sphérique n'est pas stigmatique.

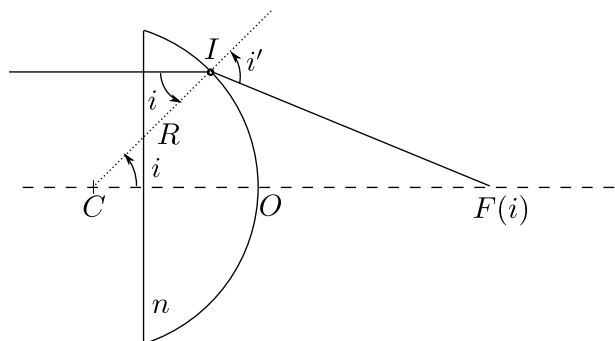


FIGURE 3.4 – Aberrations géométriques

Pour être plus précis, en notant $g(i) = n \cos i - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}$, on calcule

$$g'(i) = n \sin i \left(\underbrace{\frac{n \cos i}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}}}_u - 1 \right).$$

On remarque alors que

$$u^2 = \frac{n^2 \cos^2 i}{1 - n^2 \sin^2 i} = \frac{n^2 \cos^2 i}{n^2 \cos^2 i + \underbrace{1 - n^2}_{<0}} > 1,$$

car $n > 1$. On trouve donc $g'(i) > 0$: $g(i)$ est une fonction croissante de i . La longueur $CF(i)$ est donc une fonction décroissante de i . Autrement dit, plus le rayon lumineux est hors de l'axe, *i.e.* plus i est grand, plus il intercepte l'axe optique près de la lentille en sortie de celle-ci.

Les rayons lumineux se concentrent sur l'axe entre les points $F(i = 0)$ et $F(i = i_{\max})$, où i_{\max} est défini par $n \sin i_{\max} = 1$. Les rayons se concentrent ainsi sur la longueur $\delta = CF(0) - CF(i_{\max})$ donnée par

$$\delta = \frac{nR}{n-1} \left(1 - \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \right).$$

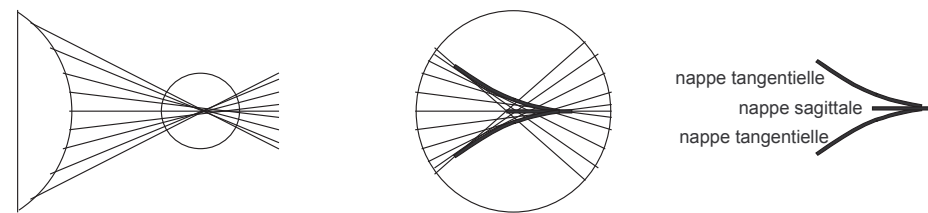


FIGURE 3.5 – Nappes tangentielle et sagittale

Si l'on trace enfin la trajectoire des rayons lumineux en sortie de la lentille (figure 3.5), on constate qu'ils se concentrent non seulement sur l'axe optique, pour former la *nappe sagittale*, mais également en une surface hors de l'axe optique, qui pointe en $F(i_{\max})$, appelée *nappe tangentielle*.

3.3 Si l'on ne considère que des rayons proches de l'axe optique, *i.e.* qu'on se place dans les conditions de Gauss, on se place dans la situation où $i \ll 1$. En faisant le développement limité de $CF(i)$, on trouve alors que

$$CF(i) \underset{i \rightarrow 0}{\sim} \frac{nR}{n-1} \left(1 - \frac{n i^2}{2} \right) + O(i^4).$$

Au premier ordre en i , $CF(i)$ ne dépend donc plus de i : le dispositif est à nouveau stigmatique. En particulier, on constate alors que

$$\frac{1}{OF(i)} = \frac{1}{CF(i) - R} = \frac{n-1}{R} = (n-1) \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-R} \right).$$

On retrouve bien l'expression obtenue précédemment pour la focale de la lentille dans les conditions de Gauss.

Ressources utiles Ici aussi, les sites webs des constructeurs peuvent se révéler très riches en informations sur la façon dont les aberrations chromatiques ou géométriques sont corrigées, sur [l'effet des aberrations](#) ou sur beaucoup d'autres domaines (optiques). On pourra ainsi consulter (entre autres !) le site [edmundoptics.fr](#) et son « Centre de Connaissance » ou [newport.fr](#) et sa section « Ressources ».

EXERCICE IV PROPAGATION DANS UN MILIEU D'INDICE CONTINUËMENT VARIABLE

1. Le principe de Fermat stipule que le trajet suivi par la lumière est celui pour lequel le chemin optique \mathcal{D} est extrémal (le plus souvent minimal), avec

$$\mathcal{D} = \int n(s) ds,$$

où $n = \frac{c}{v_\varphi}$ (rapport de la vitesse de la lumière dans le vide et de la vitesse de phase dans le milieu) est l'indice optique local, et $ds = v_\varphi dt$ l'abscisse curviligne élémentaire (la lumière «suit» le chemin le plus rapide).

En mécanique, le principe de Maupertuis, ou principe de moindre action, précise qu'un système mécanique évolue dans le temps de sorte que l'action S soit extrémale, avec

$$S = \int \mathcal{L}(t) dt,$$

où \mathcal{L} est le lagrangien du système. Si l'on note q_i ($i = 1, \dots, n$) les degrés de liberté du système, et \dot{q}_i leurs dérivées temporelles, les équations de Lagrange qui déterminent son évolution sont

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right)}.$$

2. Pour retrouver l'analogie entre le principe de Maupertuis et le principe de Fermat, on écrit

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dz \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

où l'on a posé $\dot{x} = dx/dz$ et $\dot{y} = dy/dz$. Le chemin suivi par la lumière est donc celui qui minimise

$$\mathcal{D} = \int n(x, y; z) \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2} dz,$$

où l'on a artificiellement distingué la dépendance en z de n . En considérant la position z comme une variable effective de temps, le principe de Maupertuis se rapporte au principe de Lagrange en écrivant le lagrangien optique

$$\mathcal{L}_{\text{opt}} = n(x, y; z) \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

La trajectoire des rayons lumineux est alors donnée par

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{opt}}}{\partial q_i} = \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{opt}}}{\partial \dot{q}_i} \right),$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \frac{d}{dz} \left(n(x, y, z) \frac{dx}{dz} \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right), \\ \frac{\partial n}{\partial y} &= \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right). \end{aligned}$$

On trouve de même, puisque z ne joue aucun rôle particulier,

$$\frac{\partial n}{\partial z} = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right).$$

Ces trois équations peuvent finalement se mettre sous la forme

$$\boxed{\frac{d(n\vec{u})}{ds} = \vec{\nabla} n},$$

où $\vec{u} = d\vec{r}/ds$ est le vecteur tangent aux rayons lumineux.

EXERCICE V FIBRES OPTIQUES (AGREG A 2007)

e- Application : la fibre optique à saut d'indice.

α) Il faut pouvoir observer un phénomène de réflexion totale sur la gaine, donc $n_1 > n_2$

β) $i_1 - \alpha = \pi/2$: pour qu'il y ait réflexion totale, il faut que

$$\sin i_1 > \frac{n_2}{n_1}, \text{ donc } \cos \alpha > \frac{n_2}{n_1}. \text{ Or } \sin \theta$$

$$= n_1 \sin \alpha. \text{ Il vient donc : } \theta < \theta_{\max},$$

$$\text{avec } \sin \theta_{\max} = n_1 \sin(\arccos \frac{n_2}{n_1}) = n_1$$

$$\sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2}} = n_1 \sqrt{2\Delta}.$$

$$\text{D'où O.N.} = n_1 \sqrt{2\Delta} = 0,21$$

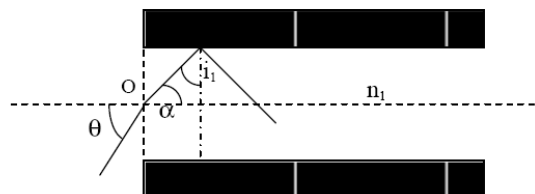
γ) Si on courbe la fibre, l'angle d'incidence est modifié, et par suite i_1 qui peut devenir inférieur à $\arcsin \frac{n_2}{n_1}$. Il y aura alors réfraction, et donc perte énergétique.

δ) Le trajet le plus rapide est celui correspondant à l'incidence nulle : $t_{\min} = n_1 L/c$. Le trajet le plus long est celui correspondant à l'angle d'incidence θ_i . Ce rayon fera

$\frac{L \tan \alpha_i}{r_1}$ trajets de type OA (cf figure ci-dessus) qui prennent chacun le temps

$$n_1 \frac{r_1}{c \sin \alpha_i}. \text{ D'où } t_{\max} = \frac{L \tan \alpha_i}{r_1} n_1 \frac{r_1}{c \sin \alpha_i} = \frac{n_1 L}{c \cos \alpha_i} = \frac{n_1 L}{c \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{n_1^2}}}$$

$$\text{D'où } \Delta t = \frac{n_1 L}{c} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{n_1^2}}} - 1 \right) = 0,22 \text{ ns.}$$



I-5- Extension à un milieu non homogène : loi fondamentale de l'optique géométrique.

a- la concavité du rayon est toujours tournée dans le sens de $\overrightarrow{\text{grad} n}$.

Exemple 1 : Dans une cuve, avec un mélange d'eau et de sel qu'on a laissé reposer, la concentration, donc l'indice, croissent de la surface au fond. $\overrightarrow{\text{grad} n}$ est donc dirigé verticalement vers le fond de la cuve. Un rayon arrivant normalement dans la cuve s'incurvera alors vers le bas.

Exemple 2 : Phénomène de mirage : lorsque le sol est très chaud, l'indice croît avec l'altitude z . Les rayons provenant d'un objet s'incurvent en semblant provenir du sol comme s'ils avaient subi une réflexion sur une surface réfléchissante comme de l'eau.

b- Application : la fibre optique à gradient d'indice.

$$\alpha) \frac{d(n\vec{u})}{ds} = \overrightarrow{\text{grad} n} = \frac{dn}{dr} \vec{u}_r. \text{ Il vient donc } \frac{d}{ds} (n(r) \cos \alpha(r) \vec{u}_z + n(r) \sin \alpha(r) \vec{u}_r) = \frac{dn}{dr} \vec{u}_r$$

$$\text{Par identification, on obtient } n \cos \alpha = \text{cste} = n_1 \cos \theta_0, \text{ soit } \cos^2 \alpha = \left(\frac{n_1}{n} \right)^2 \cos^2 \theta_0.$$

$$\text{Or } \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 = \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{n^2}{n_1^2 \cos^2 \theta_0} - 1 = \frac{1 - 2\Delta \left(\frac{r}{r_1} \right)^2}{\cos^2 \theta_0} - 1. \text{ Si on dérive cette}$$

$$\text{expression, on obtient : } \frac{d^2 r}{dz^2} = - \frac{2\Delta}{r_1^2 \cos^2 \theta_0} r$$

$$\text{Soit } r = A \cos \left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{r_1 \cos \theta_0} z \right) + B \sin \left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{r_1 \cos \theta_0} z \right). \text{ Compte tenu des conditions en } z=0$$

$$\text{qui s'écrivent } r(z=0) = 0 \text{ et } \left(\frac{dr}{dz} \right)_{z=0} = \tan \theta_0, \text{ on obtient finalement :}$$

$$r = \frac{r_1 \sin \theta_0}{\sqrt{2\Delta}} \sin \left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{r_1 \cos \theta_0} z \right). \text{ La trajectoire est donc sinusoïdale, de période spatiale}$$

$$2d = 2 \frac{\pi r_1 \cos \theta_0}{\sqrt{2\Delta}}, \text{ d'où } d = \frac{\pi r_1 \cos \theta_0}{\sqrt{2\Delta}}.$$

β) Il faut que $r_{\max} < r_1$, soit $\sin \alpha_0 < \sqrt{2\Delta}$, soit finalement $\sin \alpha < n_1 \sqrt{2\Delta} = \text{O.N.}$ On retrouve donc la même valeur que dans la fibre à saut d'indice : l'intérêt d'une fibre à gradient d'indice ne réside donc pas dans l'ON.

γ) $\Delta t' = 0,46 \cdot 10^{-12} \text{ s} \ll \Delta t$: l'élargissement est beaucoup plus faible que dans une fibre à saut d'indice, d'où l'intérêt des fibres à gradient d'indice (qui ne réside pas dans l'O.N) pour le transport d'information avec des hauts débits.

δ) Fibroscopie, endoscopie, communication, réseau câblé...

TD d'Optique 2

Interférences – Notion de cohérence

11/09/2024



EXERCICE I NOTION DE COHÉRENCE TEMPORELLE

On considère un dispositif à trous d'Young (FIG. 1.1). Une source S , considérée comme ponctuelle, illumine deux trous, S_1 et S_2 , situés à une distance l de la source. Les trous S_1 et S_2 sont infiniment petits et séparés d'une distance a .

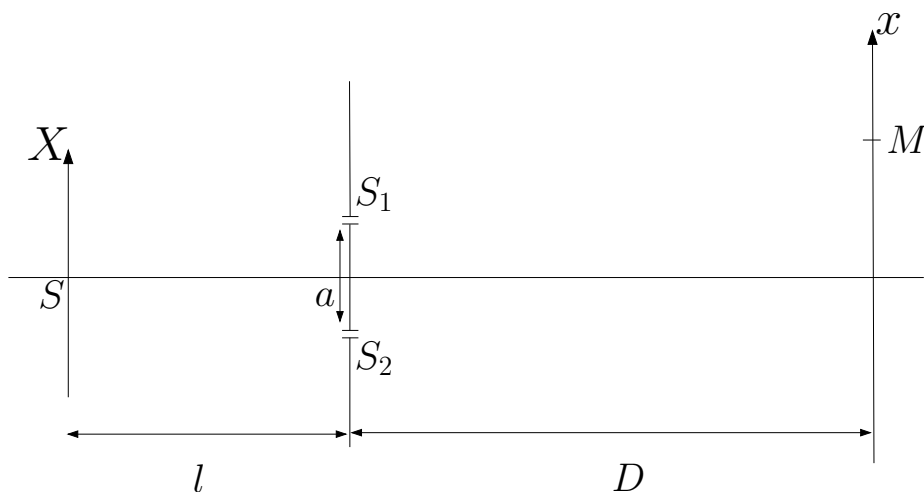


FIGURE 1.1 – Dispositif à trous d'Young, source ponctuelle.

1. On suppose que la source est purement monochromatique à la fréquence ν . Décrire ce que l'on observe sur l'écran situé à la distance D des bi-trous. On précisera bien toutes les approximations faites.
2. Que se passe-t-il si la source est composée de deux raies spectrales monochromatiques de fréquences ν_1 et ν_2 ?
3. On considère une source de profil spectral $I(\nu)$, centré sur une fréquence ν_0 , de largeur

Γ supposée petite devant ν_0 : $\Gamma \ll \nu_0$. Par définition, l'intensité lumineuse émise dans une bande spectrale centrée sur ν , de largeur $d\nu$, est $I(\nu) d\nu$.

3.1 Calculer la figure d'interférence et montrer qu'elle est similaire à celle obtenue pour une source monochromatique à ν_0 , à une variation spatiale du contraste C près qu'on exprimera en fonction de $I(\nu)$. On introduira la notation $I_0 = \int I(\nu) d\nu$.

3.2 Application au cas d'un fonction porte : $I(\nu) = \frac{I_0}{\Gamma}$ si $\nu \in [\nu_0 - \Gamma/2, \nu_0 + \Gamma/2]$, $I(\nu) = 0$ sinon.

3.3 Application au cas d'une raie lorentzienne, de profil spectral

$$I(\nu) = I_0 \frac{2}{\pi\Gamma} \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\nu - \nu_0}{\Gamma} \right)^2}.$$

On donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi\Gamma} \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\nu}{\Gamma} \right)^2} e^{-2i\pi\nu t} d\nu = e^{-\pi\Gamma|t|}.$$

EXERCICE II MODÈLE DES TRAINS D'ONDE ET COHÉRENCE TEMPORELLE

On modélise une source thermique comme une assemblée d'atomes excités qui émettent une succession de trains d'ondes, *i.e.* des vibrations lumineuses sinusoïdales de durée finie. Considérons un de ces trains d'onde, $U(t)$, centré en $t = 0$ et de durée τ :

$$\begin{cases} U(t) = e^{i\varphi} e^{2i\pi\nu_0 t}, & |t| < \tau/2, \\ U(t) = 0, & |t| > \tau/2. \end{cases}$$

La phase φ est constante sur la durée du train d'onde mais varie aléatoirement d'un train d'onde à un autre.

1. Quel est le spectre, en fréquences temporelles, d'un seul train d'onde de durée τ ?
2. La source émet une succession de trains d'onde identiques mais de phases relatives aléatoires. Quel est le spectre de la lumière émise par cette source ?
3. Soit $\delta\nu$ la largeur du spectre (intervalle entre les deux premières annulations). Quelle relation y a-t-il entre $\delta\nu$ et τ ?

4. Que vaut l'intervalle de longueur d'onde $\delta\lambda$ correspondant ? Définir la longueur de cohérence et le temps de cohérence, et les calculer pour
- la lumière blanche,
 - une raie de lampe spectrale (par exemple, pour une lampe à vapeur de mercure basse pression, l'élargissement Doppler de la raie verte à $\lambda_0 = 546 \text{ nm}$ est de l'ordre de $\delta\lambda \approx 0,03 \text{ nm}$),
 - un laser He-Ne, de largeur spectrale $\delta\nu \approx 1 \text{ GHz}$ typiquement.

EXERCICE III NOTION DE COHÉRENCE SPATIALE

On considère le même dispositif à trous d'Young que précédemment, mais la source S est maintenant constituée d'une fente source de largeur b (Fig. 3.1). Les deux trous S_1 et S_2 sont maintenant des fentes, parallèles à la fente source, mais infiniment fines. On note S' un point courant de la fente source. On suppose, dans tous les cas, que la source est parfaitement monochromatique, de longueur d'onde λ : elle est parfaitement cohérente temporellement.

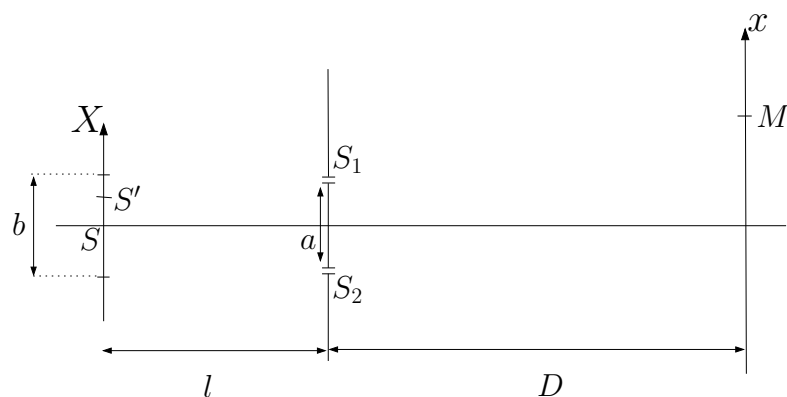


FIGURE 3.1 – Dispositif à trous d'Young, source étendue.

1. Décrire quantitativement la figure d'interférence en fonction des différents paramètres du problème. Faire apparaître une fonction de contraste des interférences, C . De quels paramètres dépend-elle ?
2. Les résultats de la question précédente sont-ils toujours valides si l'on éclaire maintenant la bifente avec un faisceau laser ?

3. On considère une source spatialement incohérente et dont la répartition spatiale d'intensité est définie par une densité $I(X)$: l'intensité lumineuse émise par un élément de longueur de la source, centré en X et de longueur dX , est $I(X) dX$. Décrire la figure d'interférence observée sur l'écran. En déduire le théorème de Van Cittert – Zernike qui relie le contraste des interférences au profil $I(X)$ de la source.

EXERCICE IV INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON

1. *Question préliminaire : lame à faces parallèles*

Une source S_0 illumine un système de deux lames de verre, parallèles entre elles, distantes de h , et d'épaisseur négligeable devant h . On cherche à calculer l'intensité lumineuse sur un écran situé du même côté de la première lame que S_0 (Fig. 4.1) et parallèle à cette lame. On néglige ici les réflexions multiples sur les lames de verre.

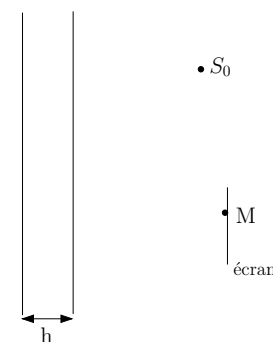


FIGURE 4.1 – Lame à faces parallèles

- 1.1 La source au point S_0 est supposée ponctuelle. En faisant une analogie avec l'exercice précédent, établissez, sans calculs, la forme de la figure d'interférence observée sur l'écran.
- 1.2 Que se passe-t-il dans le cas d'une source étendue ?
- 1.3 On remplace maintenant la bi-lame par une lame épaisse d'épaisseur e et d'indice n . On néglige toujours les réflexions multiples dans la lame. Calculer la différence de marche entre les deux rayons réfléchis par la lame, issus d'un rayon incident qui fait un angle i avec la normale à la lame.

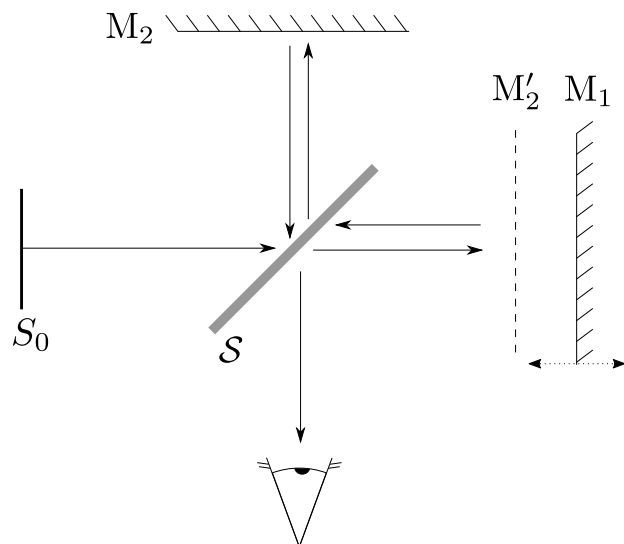


FIGURE 4.2 – Interféromètre de Michelson en lame d'air.

2. Anneaux d'égale inclinaison

Un interféromètre de Michelson (Fig. 4.2) est constitué de deux bras, 1 et 2, perpendiculaires, portant chacun un miroir plan M_i ($i = 1, 2$) parfaitement réfléchissant. L'amplitude lumineuse, issue d'une source étendue S_0 , est divisée équitablement entre les deux bras par une lame séparatrice S , semi-réfléchissante, qui les recompose aussi en sortie. Le miroir M_1 est placé sur un support mobile qui permet de le déplacer selon la normale au miroir.

On note M'_2 le symétrique de M_2 par rapport à S . On suppose ici que M_1 et M'_2 sont parallèles. L'ensemble $\{M_1, M'_2\}$ forme alors l'équivalent d'une lame d'air.

2.1 Lumière monochromatique

La source S_0 est monochromatique, de longueur d'onde λ_0 .

- Quelle est la différence de marche entre deux rayons en sortie de l'interféromètre, issus d'un même rayon provenant de S_0 , en fonction de l'angle d'incidence θ de ces rayons sur les miroirs et de l'épaisseur e de l'interféromètre de Michelson, *i.e.* la distance séparant M_1 et M'_2 ?
- Pourquoi peut-on dire que les franges sont localisées ? Où le sont-elles ? Comment les observer ?

- Décrire la figure d'interférence. Comment faut-il éclairer l'interféromètre pour observer la figure d'interférence ?
- Calculer le rayon des anneaux brillants, en supposant que le centre de la figure est brillant.
- Qu'observe-t-on si $e = 0$? Qu'observe-t-on si l'on «chariotte», *i.e.* que l'on déplace le miroir M_1 le long de sa normale ?
- Pourquoi préférer un interféromètre de Michelson à un dispositif à trous d'Young ?

2.2 Lumière polychromatique

- La source S_0 est maintenant polychromatique. Expliquer qualitativement ce qui se passe.
- On suppose que la source émet seulement à deux longueurs d'ondes λ_1 et $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$. Il peut s'agir, par exemple, du doublet jaune du mercure, avec $\lambda_1 = 576,9 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 579,1 \text{ nm}$, ou du doublet jaune du sodium, avec $\lambda_1 = 589,00 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 589,59 \text{ nm}$.

Calculer, en fonction de e , l'éclairement au centre de la figure d'interférence, en supposant que les deux composantes spectrales sont égales en intensité.

- En déduire une manière de résoudre le doublet.

3. Franges d'égale épaisseur

On introduit un petit angle α entre les deux miroirs. Comment est modifiée la figure d'interférence ? Où les interférences sont-elles localisées ? Comment doit-on procéder pour les observer. On discutera en particulier la cas de la lumière blanche.

EXERCICE V INTERFÉROMÈTRE DE FABRY-PÉROT

L'interféromètre de Fabry-Pérot est constitué de deux lames planes parallèles, argentées sur les faces en regard, et distantes de e . On note r et t leurs coefficients de réflexion et transmission en amplitude, a priori complexes, et $R = |r|^2 \sim 1$ et $T = |t|^2 \ll 1$ leurs coefficients de réflexion et transmission en intensité.

1. Lumière monochromatique

On éclaire l'interféromètre selon une incidence variable, en lumière monochromatique (longueur d'onde λ_0).

- 1.1 Calculer l'intensité I transmise dans la direction i , en fonction de l'intensité incidente I_0 , de R , et du déphasage φ accumulé entre deux réflexions sur une même lame, que l'on calculera.

Représenter la fonction $I(\varphi)$. Comparer au cas d'un interféromètre à deux ondes.

- 1.2 Déterminer la finesse \mathcal{F} du Fabry-Pérot, définie comme le rapport de l'écart $\Delta\varphi$ entre deux résonances et de la largeur à mi-hauteur $\delta\varphi$ d'un pic de résonance :

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\varphi}{\delta\varphi}.$$

- 1.3 Calculer le rayon i_k du $k^{\text{ième}}$ anneau brillant, en supposant le centre brillant.

A.N. : $R = 0,985$, $e = 6 \text{ mm}$, $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$.

2. Lumière polychromatique

On cherche maintenant à utiliser le Fabry-Pérot comme spectromètre, *i.e.* comme outil permettant de séparer différentes longueurs d'ondes.

- 2.1 On mesure l'éclairement dans une direction i donnée. Calculer l'intervalle spectral libre $\Delta\nu_{\text{ISL}}$, *i.e.* l'intervalle entre deux fréquences successives pour lesquelles on a une frange brillante dans la direction i .

Une variation $\delta\nu$ de la fréquence de la source induit dans la direction i une variation de l'éclairement. Exprimer la plus petite variation $\delta\nu$ distinguable avec le Fabry-Pérot, en fonction de $\Delta\nu_{\text{ISL}}$ et de la finesse \mathcal{F} .

- 2.2 Calculer, dans les mêmes conditions, la variation relative minimale de longueur d'onde que l'on peut distinguer avec le Fabry-Pérot.

- 2.3 On suppose maintenant que la source est polychromatique et émet deux longueurs d'onde, λ et $\lambda + \Delta\lambda$. Qu'observe-t-on ? Pour quel intervalle $\Delta\lambda$ distingue-t-on les anneaux ?

EXERCICE VI AGREGATION 2005, ÉPREUVE A (PREMIÈRE PARTIE)

Cf. BUP et <http://www.agregation-physique.org>.

Corrigé

Interférences – Notion de cohérence



EXERCICE I NOTION DE COHÉRENCE TEMPORELLE

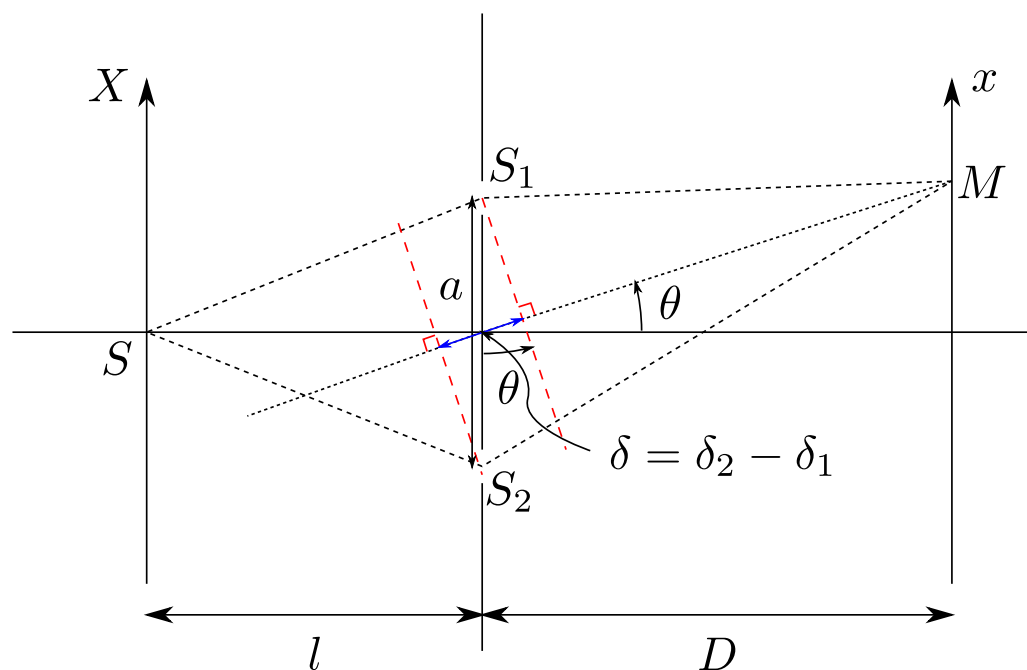


FIGURE 1.1 – Dispositif des trous d'Young. La différence de marches, à l'infini, est lue comme l'écart entre les plans de phase (pointillés rouges) contenant S_2 et S_1 .

1. Les deux fentes S_1 et S_2 sont des sources secondaires, issues de la source S , et ont donc une relation de phase parfaitement déterminée. De plus, S_1 et S_2 sont à égale distance de S , donc le déphasage entre S_1 et S_2 est nul. On note s_i la vibration issue de la source S_i .

Rappel Approximations usuelles

- Approximation scalaire : on néglige le caractère vectoriel de l'onde lumineuse (cf. TP polarisation),
- Interférences à grande distance : $l, D \gg a, \lambda, x, X$.

Les deux fentes sont identiques, donc $s_1(S_1) = s_0 = s_2(S_2)$, avec $s_i(M) = s_0 e^{ik\delta_i(M)}$. On a introduit $\delta_i(m) = S_i M$. En M , les deux ondes se superposent selon

$$s(M) = s_1(M) + s_2(M) = s_0 (e^{ik\delta_1} + e^{ik\delta_2}) = s_0 e^{ik_0\delta_1} (1 + e^{ik_0(\delta_2 - \delta_1)}).$$

Première méthode $\delta_1 = S_1 M$, $\delta_2 = S_2 M$ et $k = 2\pi/\lambda$. On a

$$\begin{aligned} S_1 M &= \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2 + y^2}, \\ S_2 M &= \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + D^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Ensuite, en faisant un développement limité au second ordre en x/D , y/D et a/D , on obtient

$$\delta \equiv S_1 M - S_2 M = -\frac{a}{D} x.$$

L'intensité est donnée par $I = |s|^2$. En notant $I_0 = 2|s_0|^2$, l'intensité sur l'écran en l'absence d'interférence s'écrit

$$I = I_0 \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{ax}{\lambda D}\right) \right] = I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) \right]. \quad (\text{I.1})$$

La figure d'interférence présente un interfrange $i = \lambda D/a$.

Deuxième méthode Avec O le point de l'axe optique situé entre S_1 et S_2 , on a

$$\delta_i^2 = \overrightarrow{S_i M}^2 = (\overrightarrow{S_i O} + \overrightarrow{OM})^2 = \frac{a^2}{4} + OM^2 + 2\overrightarrow{S_i O} \cdot \overrightarrow{OM}.$$

Puisque $OM \sim D \gg a$,

$$\delta_i \sim D \left(1 + \frac{\overrightarrow{S_i O} \cdot \overrightarrow{OM} + a^2/8 + x^2/2}{D^2} \right) \quad \text{et} \quad \delta_2 - \delta_1 = \frac{\overrightarrow{S_2 S_1} \cdot \overrightarrow{OM}}{D}.$$

La différence de marche entre les deux rayons parvenant au point M correspond donc au segment $\delta(S_1S_2)$ sur la figure 1.1. On pourrait retrouver ce résultat par un raisonnement qualitatif. Puisqu'on place l'écran à grande distance, les ondes émises par les sources secondaires S_1 et S_2 sont, au niveau de l'écran, des ondes planes. Les surfaces de phase à considérer étant alors des plans, le chemin entre le point S_1 et le point M est égal à celui qui relie le point M au projeté de S_1 sur S_2M . La différence de chemin optique entre les deux chemins correspond bien seulement au segment $\delta(S_1S_2)$, soit

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 = a \sin \theta \sim a \tan \theta = \frac{ax}{D}.$$

Pour avoir des interférences constructives, il faut avoir

$$\boxed{\delta = p\lambda, p \in \mathbb{Z}} \rightarrow x = \underbrace{\frac{\lambda D}{a}}_{=i} p.$$

Remarque Dans le cas de deux trous sources, le lieu des interférences constructives est donné par l'équation

$$S_1M - S_2M = p\lambda, p \in \mathbb{Z}.$$

C'est l'équation d'*hyperboloïdes de révolution* de foyers S_1 et S_2 , tels que représentés figure 1.2.

Remarque On a ici fait comme si les deux fentes sources étaient en fait ponctuelles. Il faut, en toute rigueur, aussi considérer les interférences avec toutes les autres sources secondaires alignées le long des fentes secondaires. Cela revient en fait à calculer la figure de diffraction par les fentes qui vient moduler la figure d'interférences. On laisse ce calcul pour le TD suivant.

- Si l'on a deux composantes spectrales de fréquences $\nu_1 = c/\lambda_1$ et $\nu_2 = c/\lambda_2 \neq \nu_1$, les ondes correspondant à ces deux composantes n'interfèrent pas entre elles. On dit qu'elles sont **incohérentes entre elles**. Dans ce cas, on additionne les figures d'interférence obtenues pour chaque longueur d'onde, et non pas les amplitudes.

démonstration : En effet, si on note s la superposition en un point \vec{x} de deux vibrations de pulsation ω_1 et ω_2 ,

$$s = s_0 \exp(-i\omega_1 t + i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}) + s'_0 \exp(-i\omega_2 t + i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}),$$

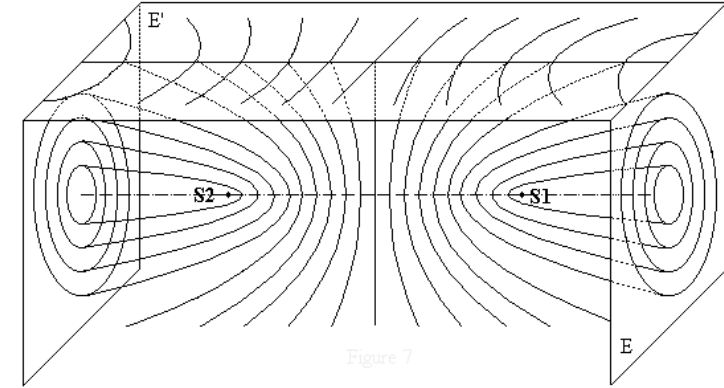


FIGURE 1.2 – Hyperboloïdes de révolution, lieux des interférences constructives de deux points sources. Observés sur l'écran E' , ils correspondent aux franges d'Young. Source : www.sciences.univ-nantes.fr/sites/jacques_charrier/tp/michelson/hyperbo.html

alors

$$I(\vec{x}) \propto |s|^2 = |s_0|^2 + |s'_0|^2 + 2\text{Re}\left(s_0 s'_0^* \exp\left[-i(\omega_1 - \omega_2)t + i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{x}\right]\right).$$

On suppose, pour simplifier, mais sans perte de généralité que $s_0, s'_0 \in \mathbb{R}^2$. On peut alors écrire

$$|s|^2 = |s_0|^2 + |s'_0|^2 + 2s_0 s'_0 \underbrace{\cos\left[(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{x} - (\omega_1 - \omega_2)t\right]}_{\text{Si } \omega_1 \neq \omega_2 \rightarrow \text{oscillations de période } 1/(\omega_1 - \omega_2)}.$$

Le terme oscillant est nul en valeur moyenne quand $T_{\text{battements}} = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2}$, période temporelle des battements, et $T_{\text{détecteur}}$, temps de réponse du détecteur, vérifient :

$$\boxed{T_{\text{battements}} \ll T_{\text{détecteur}}}.$$

En effet, dans le cas de deux raies "proches" d'une source spectrale, ν_1, ν_2 , typiquement séparées de quelques 100 GHz ($100 \text{ GHz} \Leftrightarrow \Delta\lambda = 0.12 \text{ nm}$), on a alors

$T_{\text{battements}} = \frac{1}{100 \text{ GHz}} = 10^{-11} \text{ s}$. Les photodiodes les plus rapides ont typiquement un temps de montée de quelques ns, elles sont incapables de suivre ces oscillations et moyennent donc le signal oscillant reçu qui en sort est continu. L'éclairement

observé est donc simplement la somme des deux éclaircements $|s_0|^2$ et $|s'_0|^2$, le signal d'interférence est moyenné à zéro sur le temps d'intégration du détecteur. **Ainsi, les deux vibrations lumineuses, de fréquences différentes, n'interfèrent pas entre elles de manière générale.**

En revenant au cas des bifentes, avec deux fréquences ν_1 et ν_2 (de valeurs suffisamment distinctes l'une de l'autre, telle que $\nu_2 - \nu_1 \gg \frac{1}{T_{\text{détecteur}}}$), l'intensité de la figure d'interférences au point M s'écrit donc comme la somme des deux figures d'interférence, une à ν_1 et l'autre à ν_2 :

$$I = I(\nu_1) + I(\nu_2) = \frac{I_0}{2} \left(2 + \underbrace{\cos\left(2\pi \frac{ax}{cD} \nu_1\right) + \cos\left(2\pi \frac{ax}{cD} \nu_2\right)}_{2 \cos\left(2\pi \frac{ax}{cD} \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right) \cos\left(2\pi \frac{ax}{cD} \frac{\nu_2 - \nu_1}{2}\right)} \right).$$

On a ici supposé que la même intensité $I_0/2$ est contenue dans chaque composante spectrale. On pose $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ et $\bar{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$, alors

$$I = I_0 \left(\underbrace{1 + \cos\left(\pi \frac{ax}{cD} \Delta\nu\right)}_{\text{contraste } C} \underbrace{\cos\left(2\pi \frac{ax}{cD} \bar{\nu}\right)}_{\text{interférences à } \bar{\nu}} \right).$$

On retrouve la figure d'interférence pour une onde de fréquence $\bar{\nu}$, dont le contraste est modulé périodiquement par la fonction contraste

$$C(x) = \cos\left(\pi \frac{ax}{cD} \Delta\nu\right) = \cos(\pi \Delta\nu \tau),$$

où l'on a introduit le temps $\tau = \frac{\delta}{c}$, la différence de temps de parcours des chemins S_1M et S_2M par la lumière.

Remarque Le contraste est de façon usuelle définie par $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$. C'est cette même définition que l'on utilise ici, la valeur $C(x)$ étant la valeur *locale* du contraste, correspondant aux oscillations d'intensité autour du point x . Il n'est en fait bien défini que si $C(x)$ oscille lentement par rapport aux oscillations rapides de l'interférogramme à la fréquence moyenne, ici de période $cD/a\bar{\nu}$.

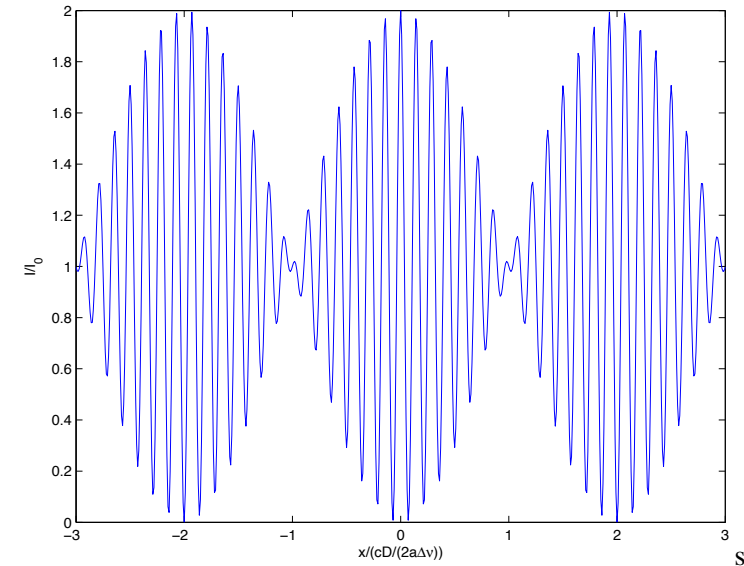


FIGURE 1.3 – Figure d'interférence observée pour deux composantes spectrales.

3.3.1 On décompose la source en composantes spectrales élémentaires. L'intensité émise dans un intervalle de fréquence $\delta\nu$ autour de ν est donné par $I(\nu)\delta\nu$. Les composantes spectrales élémentaires étant incohérentes entre elles, pour obtenir la figure d'interférence I , on somme les éclaircements élémentaires, *i.e.* les figures d'interférence $dI(\nu)$ correspondant à chaque intervalle de fréquence $\nu \pm \delta\nu$:

$$dI(\nu) = I(\nu) \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{ax}{cD} \nu\right) \right] d\nu,$$

soit
$$I = \int dI = \underbrace{\int I(\nu) d\nu}_{=I_0} + \underbrace{\int I(\nu) \cos\left(2\pi \frac{ax}{cD} \nu\right) d\nu}_{\text{Re}\left(\int I(\nu) e^{2\pi i \frac{ax}{cD} \nu} d\nu\right)}.$$

On suppose ici que $I(\nu)$ ne prend des valeurs notables que pour $\nu \sim \nu_0$ à la largeur

de raie près, supposée petite devant ν_0 , donc

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} I(\nu) e^{2i\pi \frac{ax}{cD} \nu x} d\nu &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu) e^{2i\pi \frac{ax}{cD} \nu} d\nu, \\ &= e^{2i\pi \frac{ax}{cD} \nu_0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu + \nu_0) e^{2i\pi \frac{ax}{cD} \nu} d\nu \right). \end{aligned}$$

On introduit finalement $\mathcal{J}(\nu) = I(\nu + \nu_0)/I_0$ la densité spectrale normalisée centrée en $\nu_0 = 0$, qui ne contient donc plus d'information sur la fréquence centrale ν_0 , mais qui conserve l'information sur le profil de raie. On obtient alors

$$I = I_0 \left[1 + \operatorname{Re} \left(\underbrace{e^{2i\pi \frac{ax}{cD} \nu_0}}_{\text{interférences à } \nu_0} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}(\nu) e^{2i\pi \frac{ax}{cD} \nu} d\nu \right)}_{\text{contraste } C} \right) \right]. \quad (\text{I.2})$$

Pour simplifier, on suppose que la raie est symétrique autour de ν_0 , *i.e.* que le profil de raie $\mathcal{J}(\nu)$ est symétrique / est une fonction paire. Dans ce cas, l'intégrale dans l'équation précédente est réelle, et l'on obtient finalement

$$I = I_0 \left[1 + C(x) \cos \left(2\pi \frac{ax}{cD} \nu_0 \right) \right],$$

où le contraste C s'écrit

$$C(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}(\nu) e^{2i\pi \frac{ax}{cD} \nu} d\nu.$$

On peut récrire le contraste $C(x)$ de façon plus générale sous la forme d'une fonction, non plus de l'abscisse x , mais plutôt du temps caractéristique $\tau = \delta/c$, différence de « temps de parcours » entre les deux chemins S_1M et S_2M :

$$C(\tau = \delta/c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}(\nu) e^{2i\pi \nu \tau} d\nu. \quad (\text{I.3})$$

La fonction de contraste s'écrit alors simplement comme la **transformée de Fourier du profil de raie**. C'est le théorème de Wiener-Khintchine.

3.2 Cas d'une fonction porte : Le profil de raie s'écrit dans ce cas :

$$I(\nu) = I_0 \frac{1}{\Gamma} \Pi(\nu; \nu_0, \Gamma),$$

où $\Pi(\nu; \nu_0; \Gamma)$ est non nulle, égale à 1, sur l'intervalle $[\nu_0 - \Gamma/2, \nu_0 + \Gamma/2]$ seulement.

On a alors

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} I(\nu) d\nu + \int_0^{+\infty} I(\nu) \cos \left(2\pi \frac{ax}{cD} \nu \right) d\nu, \\ &= I_0 + \frac{I_0}{\Gamma} \int_{\nu_0 - \frac{\Gamma}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Gamma}{2}} \cos \left(2\pi \frac{ax}{cD} \nu \right) d\nu, \\ &= I_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\Gamma} \frac{cD}{2\pi ax} \underbrace{\left[\sin \left(2\pi \frac{ax}{cD} \left(\nu_0 + \frac{\Gamma}{2} \right) \right) - \sin \left(2\pi \frac{ax}{cD} \left(\nu_0 - \frac{\Gamma}{2} \right) \right) \right]}_{2 \sin \left(\pi \frac{ax}{cD} \Gamma \right) \cos \left(2\pi \frac{ax}{cD} \nu_0 \right)} \right\}. \end{aligned}$$

Soit

$$I = I_0 \left[1 + \operatorname{sinc} \left(\pi \frac{ax}{cD} \Gamma \right) \cos \left(2\pi \frac{ax}{cD} \nu_0 \right) \right].$$

On retrouve bien le fait que le contraste $C(x)$ est la transformé du profil de raie :

$$C(x) = \operatorname{sinc} \left(\pi \frac{ax}{cD} \Gamma \right) = \int_{-\frac{\Gamma}{2}}^{\frac{\Gamma}{2}} \frac{1}{\Gamma} e^{2i\pi \frac{ax}{cD} \nu} d\nu.$$

3.3 Cas d'une lorentzienne On a cette fois

$$\mathcal{J}(\nu) = \frac{2\pi}{\Gamma} \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\nu}{\Gamma} \right)^2},$$

et donc

$$C(x) = \frac{2\pi}{\Gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\nu}{\Gamma} \right)^2} e^{2i\pi \frac{ax}{cD} \nu} d\nu$$

soit, d'après le formulaire,

$$C(x) = e^{-\pi \Gamma \frac{ax}{cD}}.$$

Le contraste est maintenant exponentiellement décroissant, comme il se doit : la transformée de Fourier d'une lorentzienne est une exponentielle décroissante.

Notion de cohérence temporelle, longueur de cohérence On a vu que l'on pouvait toujours exprimer le contraste des interférences qui s'exprime simplement en fonction de la différence de marche $\delta = ax/D$ entre les deux rayons issus des deux trous d'Young ou du « temps de parcours » associé $\tau = \delta/c$. Dans les trois cas précédents, par exemple, on peut écrire indifféremment

$$\begin{aligned} C_{\text{deux raies}}(x) &= \cos\left(\pi \frac{\delta}{c/\Gamma}\right) = \cos(\pi\Gamma\tau) \\ C_{\text{porte}}(x) &= \text{sinc}\left(\pi \frac{\delta}{c/\Gamma}\right) = \text{sinc}(\pi\Gamma\tau) \\ C_{\text{lorentzienne}}(x) &= \exp\left(-\pi \frac{|\delta|}{c/\Gamma}\right) = \exp(-\pi\Gamma|\tau|). \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

Dans l'écriture de droite, on voit naturellement apparaître un temps caractéristique, appelé *temps de cohérence*,

$$\tau_c = \frac{1}{\Gamma}. \quad (\text{I.5})$$

C'est le temps caractéristique sur lequel la source garde ses propriétés de cohérence. Quand la différence de « temps de parcours » entre les deux chemins, τ , devient grande devant le temps de cohérence, le contraste des interférences devient faible. C'est ce qui donne son nom à cette propriété de cohérence d'une source lumineuse, *i.e.* la *cohérence temporelle*. À noter que, dans le modèle des trains d'onde (voir exercice Exercice II), τ_c correspond à la durée d'une impulsion lumineuse.

Dans l'écriture de gauche des équations (I.4), on voit également apparaître la grandeur appelée *longueur de cohérence*

$$l_c = \frac{c}{\Gamma}. \quad (\text{I.6})$$

Le contraste des interférences décroît maintenant quand la différence de marche entre les deux ondes émises par les deux trous d'Young devient grande par rapport à cette longueur.

On peut comprendre qualitativement pourquoi il y a brouillage des franges à grande différence de marche (ou à grande différence de « temps de parcours »). En effet, la différence de phase entre les deux rayons, émis par les deux trous d'Young,

dépend de ν selon $\delta\varphi = 2\pi\nu\delta/c$. Ainsi, si δ est faible, une faible variation de ν induit une faible variation de $\delta\varphi$ et la figure d'interférence n'est pour ainsi dire pas affectée par une largeur de raie non nulle. À grande différence de marche, au contraire, une variation faible de ν peut induire une forte variation de $\delta\varphi$ et une frange qui était brillante peut alors devenir sombre. Ce cas extrême se produit pour la première fois quand

$$\delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{c}(\nu + \delta\nu) - \frac{2\pi\delta}{c}\nu = \pi \quad \text{soit} \quad \delta \sim \frac{c}{\delta\nu}.$$

Pour une raie de largeur spectrale $\delta\nu = \Gamma$, il y a donc bien brouillage des franges d'interférence quand δ devient de l'ordre de l_c .

La longueur de cohérence de la source est d'autant plus faible que sa largeur de raie grande. En particulier, une source monochromatique ($\Gamma = 0$) a une longueur de cohérence infinie : il n'y a pas de brouillages des interférences. La mesure de cette longueur de cohérence est donc une indication directe sur la largeur du profil de raie. Plus généralement, la mesure de la variation du contraste C avec δ permet de reconstruire le profil de raie, comme avec la spectroscopie IR par transformée de Fourier. Cette relation de transformée de Fourier entre C et \mathcal{J} aura un direct analogue dans l'étude de la cohérence spatiale de la source.

Ordres de grandeurs

- *Lumière blanche* : $\Gamma \sim 10^{15} \text{ Hz}$ ($\delta\lambda \sim 400 \text{ nm}$), soit $l_c \sim 1 \mu\text{m}$ et $\tau_c \sim 10^{-15} \text{ s}$,
- *Lampe spectrale* : $\Gamma \sim 1 \text{ GHz}$ à 100 GHz (lampe basse ou haute pression) soit $l_c \sim \text{qq mm}$ à $\text{qq } 100 \text{ mm}$ et $\tau_c \sim 10^{-9} \text{ s}$ à 10^{-11} s ,
- *Laser* : les valeurs sont très variables, d'un type de laser à l'autre, avec une longueur de cohérence variant typiquement de $l_c \sim 1 \text{ m}$ à plusieurs km. Les lasers les plus stables, actuellement, sont des horloges optiques présentant une stabilité impressionnante de $\delta\nu/\nu_0 \sim 10^{-18}$. La longueur de cohérence de ces lasers est de plusieurs 10^8 km , soit plusieurs unités astronomiques !

Résumé : La figure 1.4 compile les différentes situations vues dans cet exercice. Le TP Interférences de la série II reprendra toutes ces notions également.

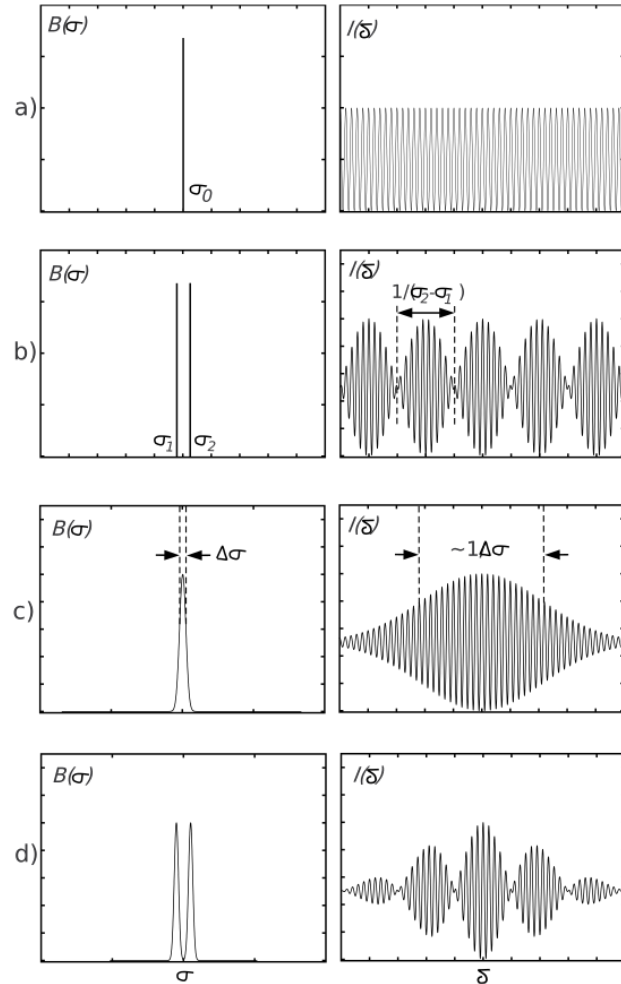


FIGURE 1.4 – Figures d'interférence correspondant à différentes situations. a) une raie monochromatique ν_0 , idéale (pas de largeur spectrale considérée). b) deux raies distinctes, ν_1 et ν_2 , sans largeur spectrale considérée. Effet de battements comme vu dans Q.2. c) une seule raie, centrée en ν_0 , de largeur spectrale $\Delta\sigma$. Enveloppe de contraste sur la figure d'interférence. d) deux raies distinctes, ν_1 et ν_2 , de largeur spectrale $\Delta\sigma$ chacune. Effet de battements (dû aux deux raies distinctes) et enveloppe de contraste (due à la largeur spectrale non nulle des raies). Voir TP interférences, série II.

EXERCICE II MODÈLE DES TRAINS D'ONDE ET COHÉRENCE TEMPORELLE

- On peut modéliser une source de lumière comme une assemblée d'atomes qui se désexcitent en émettant un train d'onde. Cela correspond au processus de désexcitation d'un niveau d'énergie E_1 vers un niveau E_0 , accompagné de l'émission d'une onde lumineuse de fréquence ν_0 tel que $h\nu_0 = E_1 - E_0$. En pratique, cette émission se fait avec une certaine largeur spectrale, liée notamment à la durée de vie finie des niveaux d'énergie. On considère donc des trains d'onde $U_0(t)$ de durée finie τ . Soit $\hat{U}_0(\nu)$ le spectre en fréquences d'un train d'onde.

$$\begin{aligned}\hat{U}_0(\nu) &= \text{TF}(U_0(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t) e^{-2i\pi\nu t} dt, \\ &= \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{2i\pi(\nu_0 - \nu)t} dt, \\ &= \frac{1}{2i\pi(\nu_0 - \nu)} 2i \sin\left(2\pi(\nu_0 - \nu)\frac{\tau}{2}\right).\end{aligned}$$

D'où,

$$\hat{U}_0(\nu) = \tau \text{sinc}[\pi(\nu_0 - \nu)\tau].$$

Ce modèle simple permet donc qualitativement de reproduire une largeur de raie, ici une raie en forme de sinus cardinal. La première annulation du sinus cardinal a lieu en $\nu_0 \pm \delta\nu/2$, avec $\delta\nu = 2/\tau$, largeur du spectre d'un train d'onde.

- La source émet une succession de N trains d'onde $U_k(t)$, tous identiques, mais de phases relatives aléatoires, *i.e.* une onde

$$U(t) = \sum_k U_k(t), \quad \text{avec} \quad \begin{cases} U_k(t) = e^{i\varphi_k} e^{2i\pi\nu_0 t}, & |t - t_k| < \tau/2, \\ U_k(t) = 0, & |t - t_k| > \tau/2, \end{cases}$$

où $t_k = k\tau$, $k \in \mathbb{Z}$ et où φ_k est une phase aléatoire. On choisit le train d'onde $k = 0$ comme référence de phase, *i.e.* on pose $\varphi_0 = 0$. Le spectre de cet ensemble de trains d'onde est alors

$$\begin{aligned}\hat{U}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k U_k(t) e^{-2i\pi\nu t} dt = \sum_k e^{i\varphi_k} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(t - t_k) e^{-2i\pi\nu t} dt, \\ &= \sum_k e^{i\varphi_k} e^{-2i\pi\nu t_k} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(t) e^{-2i\pi\nu t} dt, \\ &= \hat{U}_0(\nu) \sum_k e^{i\varphi_k} e^{-2i\pi\nu t_k}.\end{aligned}$$

On a finalement

$$I(\nu) = |\hat{U}(\nu)|^2 = \left| \underbrace{\sum_k e^{i\varphi_k} e^{-2i\pi k\nu\tau}}_{=N \text{ car } \varphi_k \text{ est aléatoire}} \right|^2 |\hat{U}_0(\nu)|^2,$$

soit

$$I(\nu) = I_0 \operatorname{sinc}^2 [\pi(\nu - \nu_0)\tau].$$

Le spectre de l'assemblée de trains d'onde est le même que celui d'un train d'onde unique.

3. On trouve une raie avec un largeur $\delta\nu$ telle que

$$\delta\nu \cdot \tau \sim 1.$$

Le temps de cohérence, tel qu'on l'avait introduit à l'exercice précédent, est donc ici τ , et l'expression *temps de cohérence* prend tout son sens : c'est la durée sur laquelle l'onde émise garde sa cohérence. Tous les temps τ , la phase du train d'onde change de façon aléatoire et l'information de phase, *i.e.* la cohérence, est perdue.

De même, la longueur de cohérence $l_c = c\tau$ correspond ici simplement à l'extension spatiale d'un train d'ondes. Dans un interféromètre, si la différence de marche δ entre deux chemins est inférieure à l_c , alors on assiste à l'interférence entre deux ondes issues du même train d'onde initial, qui interfèrent donc avec une relation de phase parfaitement déterminée. Si $\delta > l_c$ en revanche, alors les deux ondes sont issues de deux trains d'onde différents, sans relation de phase bien déterminée. La phase de la figure d'interférence est alors aléatoire, et on a un brouillage.

4. On a $\delta\nu = 1/\tau$, $\nu = c/\lambda$ donc $\delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c} \Delta\nu$.

- Lumière blanche : $\delta\lambda \sim 400 \text{ nm}$, $\tau \sim 10^{-15} \text{ s}$ et donc $l_c \sim 1 \mu\text{m}$.
- Raie spectrale : $\delta\lambda \sim 0,03 \text{ nm}$, $\tau \sim 10^{-11} \text{ s}$ et donc $l_c \sim 10 \text{ mm}$.
- Laser : $\delta\lambda$ est très variable suivant le laser, on retiendra que l_c est supérieur en général à plusieurs mètres.

EXERCICE III NOTION DE COHÉRENCE SPATIALE

1. Considérons un point P de côte X, appartenant à la fente source. On note $\delta_P(M^1, M^2)$ la différence de marche entre les chemins 1 et 2 : PM^1 et PM^2 . La différence de marche

entre les vibrations lumineuses issues de P en S_1 et S_2 s'écrit

$$\delta_P(S_2, S_1) = PS_2 - PS_1 \approx a \frac{X}{l}.$$

De même, la différence de marche entre les vibrations lumineuses issues de S_1 et S_2 au point M s'écrit

$$\delta_M(S_2, S_1) \approx a \frac{x}{D}.$$

Finalement, on obtient en M l'addition de deux ondes (l'une passant par S_1 et l'autre par S_2) déphasées de

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} [\delta_P(S_2, S_1) + \delta_M(S_2, S_1)] = \frac{2\pi}{\lambda} a \left(\frac{X}{l} + \frac{x}{D} \right).$$

La vibration lumineuse ds au point M, provenant du point source élémentaire P et passant par les chemins 1 et 2 (les deux fentes S_1 et S_2), s'écrit donc :

$$ds(x) = ds_0 + ds_0 e^{i\delta\varphi},$$

avec une intensité $dI(x, X) = |ds|^2$ égale à, en notant $dI_0 = 2|ds_0|^2$,

$$dI(x) = dI_0 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{X}{l} + \frac{x}{D} \right) \right] \right\}. \quad (\text{III.1})$$

On remarque en particulier que déplacer le point source P d'une distance X revient à déplacer la figure d'interférence sur l'écran d'une longueur $-X \frac{D}{l}$. On comprend alors intuitivement que chaque point source élémentaire P va contribuer à une figure d'interférence de même interfrange que le point source voisin P', mais décalée spatialement sur l'écran. Ce qui va entraîner un brouillage de la figure d'interférence totale si le décalage des franges est suffisamment grand.

Considérons maintenant la source étendue dans son ensemble. Soit $I(X)$ la densité spatiale d'intensité de la source. La source est une fente homogène, on a donc

$$I(X) = \frac{I_0}{b} \Pi(X; b),$$

où $\Pi(X; b)$ est la fonction porte centrée en 0, de largeur b . Un élément de longueur dX centré en X émet alors une intensité $dI_0(X) = I(X) dX$.

La source étant spatialement incohérente par hypothèse, cela veut dire que l'éclairement total reçu en M est donc obtenu en sommant les contributions en intensité $dI(x)$ de chaque élément dS source de la fente selon :

$$I(x) = \frac{I_0}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} \left(1 + \cos \left[\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x}{D} + \frac{X}{l} \right) \right] \right) dX, \quad (\text{III.2})$$

qui se calcule de façon élémentaire, comme dans l'exercice I.3.2, pour donner

$$I(x) = I_0 \left[1 + \text{sinc} \left(\pi \frac{ab}{\lambda l} \right) \cos \left(2\pi \frac{ax}{\lambda D} \right) \right]. \quad (\text{III.3})$$

(In)cohérence spatiale On a ici sommé en intensité les figures d'interférences correspondant à plusieurs points de la source. Cela correspond à l'hypothèse d'incohérence spatiale de la source. Pour une source monochromatique, donc parfaitement cohérente temporellement, chaque point de la source a une relation de phase parfaitement stable avec le centre de la source. Notons par exemple $\varphi(\vec{r})$ le déphasage du point source situé au point \vec{r} par rapport au centre de la source. La source peut être considérée comme parfaitement incohérente si $\varphi(\vec{r})$ est une fonction aléatoire, ou un bruit blanc. En particulier, la valeur de $\varphi(\vec{r})$ doit être indépendante de la valeur de $\varphi(\vec{r}')$ prise en tout autre point \vec{r}' de la source (la fonction de corrélation $\langle \varphi(\vec{r})\varphi(\vec{r}') \rangle$ est un delta de Dirac), et sa moyenne est nulle sur n'importe quel élément de surface $d\Sigma$ de la source ($\langle \varphi(\vec{r}) \rangle_{d\Sigma} = 0$).

Pour tout point S de la source, il se trouve donc nécessairement un autre point source S' , infiniment proche de S , déphasé de π . La figure obtenue par interférences entre un troisième point source S_0 et S est alors la complémentaire de la figure obtenue par interférences entre S_0 et S' : les franges brillantes de l'une sont les franges sombres de l'autre. Les interférences entre points sources distincts sont donc complètement brouillées. Tout revient ainsi à sommer en intensité plutôt qu'en amplitude les figures correspondants à chaque point source.

Cône de cohérence Le contraste des franges d'interférence est ici donné par

$$C(a/l) = \text{sinc} \left(\pi \frac{ab}{\lambda l} \right).$$

En particulier, on voit que **le contraste ne dépend pas de la position de l'écran d'observation** : on dit que *les interférences ne sont pas localisées*. Le contraste dépend

en fait **uniquement de la distance entre la fente source et la bifente**. Il caractérise le degré de cohérence de la source elle-même vue depuis la bifente.

La première annulation du contraste a lieu pour une fente source de largeur

$$b_0 = \frac{\lambda l}{a}.$$

On peut interpréter cela en considérant deux sources ponctuelles S et S' situées dans le plan de la fente source. Il y a brouillage des interférences quand les deux sources sont telles que leurs figures d'interférence sont décalées de $\frac{i}{2}$, où $i = \lambda D/a$ est l'interfrange. On obtient alors sur l'écran un éclairement uniforme. Puisque déplacer la source de X déplace la figure d'interférence sur l'écran de $-XD/l$, ce brouillage a lieu quand S et S' sont distantes de $b_0/2$, avec

$$\frac{b_0}{2} \frac{D}{l} = \frac{i}{2} = \frac{\lambda D}{2a} \quad \text{soit} \quad b_0 = \frac{\lambda l}{a}.$$

La largeur b_0 de la fente source est la largeur la plus petite pour laquelle, pour tout point de la source, il y a un autre point distant de $b_0/2$. Il y alors brouillage total des interférences.

Étant donné maintenant une fente source de largeur b , comment faut-il choisir la bifente pour observer une figure d'interférence, *i.e.* pour que les deux sources secondaires soient cohérentes ? Il faut remarquer que le contraste C ne dépend de a et l que via le rapport a/l , *i.e.* l'angle α sous lequel est vue la bifente depuis la fente source. Les franges sur l'écran sont alors bien contrastées tant que

$$\alpha \leq \theta_c = \frac{\lambda}{b}. \quad (\text{III.4})$$

On voit ici apparaître l'angle caractéristique θ_c , et avec lui la notion de **cône de cohérence**. Tant que la bifente est située à l'intérieur du cône d'angle θ_c partant de la fente source, les deux sources secondaires sont cohérentes et la figure d'interférence bien contrastée. Ce cône correspond ainsi à une zone de rayonnement cohérent, d'où l'appellation *cône de cohérence*. Si les deux fentes sortent de ce cône de cohérence en revanche, les deux sources secondaires ne peuvent plus être considérées comme cohérentes entre elles et on ne voit plus de figure d'interférence sur l'écran.

Comme la longueur ou le temps de cohérence étaient d'autant plus petits que la largeur spectrale de la source était grande, le cône de cohérence est d'autant plus étroit que la fente source est large¹.

1. On voit ici poindre une nouvelle relation de transformée de Fourier, démontrée dans les prochaines questions.

On comprend alors pourquoi les étoiles peuvent, malgré leurs grandes tailles, être considérées comme des sources ponctuelles cohérentes spatialement : nous sommes tellement loin d'elles que la Terre est entièrement contenue dans leurs cônes de cohérence (ex : mesure interférométrique de la distance angulaire d'une étoile double).

Remarque L'équation (III.4) pourrait se récrire $\beta \leq \lambda/a$, où $\beta = b/l$ est l'angle sous lequel est vue la source depuis la bi-fente. La même notion de cône de cohérence, mais vu depuis la bi-fente cette fois, peut donc être utilisée : la source doit être contenue dans ce cône pour pouvoir la considérer comme une source cohérente.

2. Avec un laser, la relation de phase entre deux points de la source est parfaitement déterminée par la forme du mode électromagnétique considérée, typiquement un mode gaussien. Le raisonnement précédent n'est plus valable et il faut considérer les interférences entre tous les points de la source : un faisceau laser est cohérent spatialement.
3. On reprend simplement le résultat équation (III.2), en conservant une densité spatiale d'intensité $I(X)$ a priori quelconque. On a alors

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(X) \left(1 + \cos \left[\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x}{D} + \frac{X}{l} \right) \right] \right) dX.$$

On note, comme précédemment, $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} I(X) dX$ et $\mathcal{J}(X) = I(X)/I_0$, la densité spatiale d'intensité normalisée. On peut alors écrire, de façon similaire au résultat de l'équation (I.2),

$$I(X) = I_0 \left[1 + \text{Re} \left(\underbrace{e^{2i\pi \frac{ax}{\lambda D}}}_{\text{Interférences}} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}(X) e^{2i\pi \frac{aX}{\lambda l}} dX \right)}_{\text{Contraste } C} \right) \right]. \quad (\text{III.5})$$

Pour un profil de raie symétrique autour de $X = 0$, *i.e.* si $\mathcal{J}(X)$ est une fonction paire, l'intégrale dans l'équation précédente est réelle, et l'on obtient finalement,

$$I = I_0 \left[1 + C \left(\frac{a}{l} \right) \cos \left(2\pi \frac{ax}{\lambda D} \right) \right],$$

où le contraste C s'écrit

$$C \left(\frac{a}{l} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}(X) e^{2i\pi X \frac{a}{\lambda l}} dX.$$

Le contraste de la figure d'interférence est donc donné par la **transformée de Fourier du profil spatial de la source**, calculé ici à la fréquence spatiale $a/l \times \lambda^{-1}$. Ce résultat constitue le théorème de VAN CITTERT – ZERNIKE. Il établit que le degré de cohérence spatial entre les deux points S_1 et S_2 et relié à la transformée de Fourier de la densité spatiale d'intensité.

Remarque 1 : On peut retrouver formellement la notion d'angle de cohérence *via* le théorème de Van Cittert – Zernike. L'angle θ_c correspond en fait à une largeur «spectrale» de la source, en considérant ici des fréquences spatiales.

Remarque 2 : Le théorème de Van Cittert – Zernike est en réalité plus complexe et plus puissant que la forme présentée ici, quantifiant le degré de cohérence entre deux points quelconques d'un système de sources secondaires. Néanmoins, cette forme est la plus courante et permet de nombreuses applications (mesure de la taille d'une étoile par exemple).

EXERCICE IV INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON (IMPORTANT)

1. 1.1 Dans le cas d'une source ponctuelle, les deux lames font office de miroir (voir FIG. 4.1). On obtient alors deux sources images S_1 et S_2 , ponctuelles, séparées de $2h$, cohérentes entre elles. Il s'agit donc d'un système équivalent à deux trous de Young. La figure d'interférence est donc connue : on retrouve les hyperboloïdes d'interférence obtenus à l'Exercice I. Contrairement au cas précédent, toutefois, l'écran est placé dans un plan perpendiculaire à la bifente. Au point M considéré sur la figure, on observe maintenant des anneaux, de rayons d'autant plus grands que l'écran est éloigné de la lame, et centrés sur l'axe de la bifente, comme montré dans la figure FIG. 1.2.

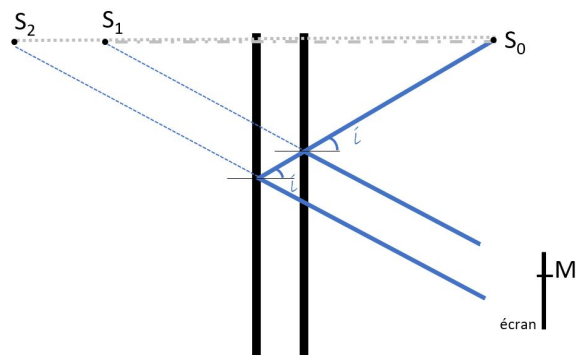


FIGURE 4.1 – Le système source ponctuelle et deux lames de verres forme un système de trous de Young équivalent, avec les deux sources secondaires virtuelles. L'écran est celle fois-ci perpendiculaire à l'axe S_1S_2 .

- 1.2 *Cas d'une source étendue* Si l'on ouvre maintenant la source, par exemple dans un plan parallèle à l'écran, la source étant incohérente spatialement, on additionne les figures d'interférence générées par chaque point de la source. On observe donc la somme d'anneaux d'interférence dont le centre est à une position sur l'écran qui dépend du point source considéré. A priori, il y a donc brouillage des interférences : les anneaux ne se superposent pas.

Il existe toutefois **une** position de l'écran pour laquelle il n'y a pas de brouillage : l'infini. Dans ce cas, en effet, seule l'inclinaison des rayons lumineux importe ; un déplacement spatial de la source parallèlement à l'écran ne modifie

pas la figure observée. Les anneaux d'interférence correspondant aux différents points de la fente source sont alors tous centrés au même point de l'écran, les anneaux se superposent et il n'y a plus de brouillage.

Parce qu'il existe une position particulière de l'écran pour laquelle le contraste des interférences dépend de façon minimale de la taille de la source (ici, il n'en dépend même plus du tout), on dit que les interférences sont **localisées** en ce point, en l'occurrence à l'infini.

- 1.3 On considère une lame d'épaisseur e , d'indice n . On ne considère que les deux premiers rayons réfléchis, en négligeant les multiples réflexions, ce qui se justifie par les coefficients de réflexions (air-verre) à incidence normale (ou quasi normale) de 4% à chaque réflexion, comme illustré en FIG. 4.2

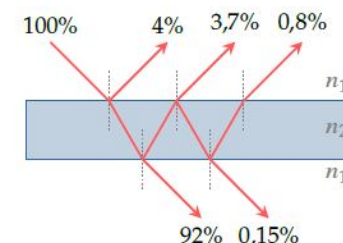


FIGURE 4.2 – Différentes intensités pour chaque rayon réfléchi ou transmis. On a considéré ici $n_{\text{air}} = 1$, $n_{\text{verre}} = 1.5$, et $r_{1 \rightarrow 2} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ coefficient de réflexion en amplitude pour l'incidence (quasi) normale. Figure extraite de *Optique Ondulatoire*, Jimmy Roussel, femto-physique.fr/optique.

En considérant donc les notations de la FIG. 4.3, la différence de marche s'écrit alors :

$$\delta = n(AB + BC) - AD = 2n AB - AD.$$

D'après les lois de Descartes, $\sin i = n \sin \theta$, d'où

$$AD = AC \sin i = AC n \sin \theta.$$

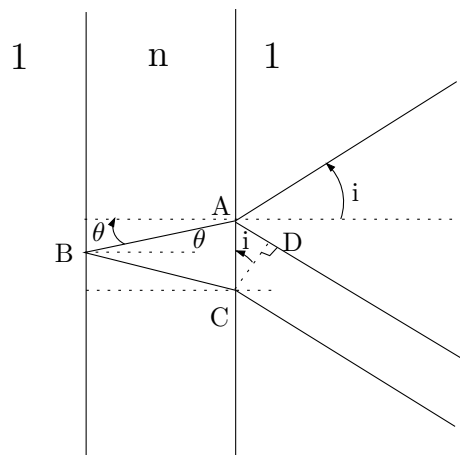


FIGURE 4.3 – Différence de marche introduite par une lame d'épaisseur e .

Or

$$AC = 2AB \sin \theta \quad \text{et} \quad AB = \frac{e}{\cos \theta}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2en}{\cos \theta} - 2n \sin^2 \theta \left(\frac{e}{\cos \theta} \right), \\ &= \frac{2en}{\cos \theta} (1 - \sin^2 \theta). \end{aligned}$$

D'où le résultat

$$\boxed{\delta = 2ne \cos \theta}.$$

Dans le cas de l'air, $n = 1$ (et $\theta = i$) donc $\delta = 2e \cos \theta$.

2. En considérant le miroir M_1 et le miroir M'_2 image de M_2 par rapport à S , l'interféromètre de Michelson est l'exact équivalent de la lame d'air étudiée à la question précédente.

2.1 a. On reprend alors les résultats précédents : la différence de marche entre deux rayons d'angle d'incidence θ sur les miroirs s'écrit $\delta = 2e \cos \theta$, où $e = M'_2 M_1$.

b. Comme pour la lame d'air, les franges d'interférences sont localisées à l'infini. Pour les observer, on place en sortie de l'interféromètre une lentille de focale

f . L'écran d'observation est placé dans le plan focal image de la lentille. Un rayon d'incidence θ sur les miroirs arrive alors sur l'écran à une distance $r(\theta) = f \tan \theta \sim f\theta$ du centre de l'écran.

c. En un point M de l'écran, situé à une distance r du centre de la figure, la différence de marche $\delta(r)$ entre les deux rayons incidents ne dépend que de $\theta = r/f$, i.e. l'inclinaison de ces faisceaux sur l'axe (au niveau de l'interféromètre). La figure d'interférence observée est donc bien une figure en anneaux. On dit qu'on observe des **anneaux d'égalé inclinaison**.

Pour observer l'ensemble de la figure d'interférence, ou encore pour observer plusieurs anneaux, il faut que de nombreuses inclinaisons soient mises en jeu. On veillera donc à éclairer l'interféromètre avec un faisceau bien divergent.

d. *Rayon des anneaux brillants* Un anneau de rayon r correspond à une frange brillante si la différence de marche $\delta(r)$ peut s'écrire $\delta(r) = p\lambda_0$, où $p \in \mathbb{Z}$. En utilisant l'expression de δ trouvée précédemment, on obtient

$$\cos \theta(r) = \frac{p\lambda_0}{2e}. \quad (\text{IV.1})$$

On suppose que le centre de la figure est brillant. Cela signifie que

$$\cos(\theta = 0) = 1 = \frac{p_0\lambda_0}{2e}, \quad p_0 \in \mathbb{Z};$$

l'intervalle e est un multiple de λ_0 .

On note alors $k = p_0 - p$. L'anneau d'ordre p est le $k^{\text{ième}}$ anneau de la figure d'interférence. On note $r_k = f\theta_k$ son rayon. En se plaçant dans l'approximation de Gauss, i.e. à la limite des petits angles, $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ et

$$1 - \frac{\theta_k^2}{2} = \frac{p\lambda_0}{2e} = \frac{(p_0 - k)\lambda_0}{2e}.$$

D'où

$$\boxed{\theta_k = \sqrt{k \frac{\lambda_0}{e}}},$$

et

$$\boxed{r_k = f \sqrt{k \frac{\lambda_0}{e}}}.$$

Attention ! Ces relations sont trompeuses : elles donnent la valeur du rayon du $k^{\text{ème}}$ anneau sur l'écran quand le centre est brillant. Elles ne permettent donc pas de suivre l'évolution du rayon d'un anneau donné quand on varie e . Par exemple, elles permettent de comparer le rayon du premier anneau brillant quand $e = e_1 = p_0 \lambda_0$ et du premier anneau brillant quand $e = e_2 = (p_0 + 1) \lambda_0$. Si l'on passe continûment de e_1 à e_2 , le premier anneau brillant quand $e = e_1$ devient... le *deuxième* anneau brillant, quand $e = e_2$ (en supposant $p_0 > 0$). Il faudrait donc comparer $r_{k=1}(e_1)$ à $r_{k=2}(e_2)$ pour déterminer comment le rayon des anneaux varie quand on modifie e .

En pratique, il faut toujours revenir à la relation $\cos i = \frac{p \lambda_0}{2e}$.

- e. Si $e = 0$, alors pour toute inclinaison θ , ou encore pour tout point r sur l'écran, $\delta(r) = 0$: les interférences sont constructives. L'éclairement est uniforme, on dit qu'on obtient une **teinte plate**. Ce point particulier, qui correspond au point où M'_2 et M_1 sont confondus, *i.e.* que M_1 et M_2 sont symétriques l'un de l'autre par rapport à S , ou encore que les deux bras du Michelson ont la même longueur est appelé **contact optique**.

En pratique, on cherche toujours le contact optique quand on règle le Michelson. Cela permet de lire directement sur le vernier la différence de longueur entre les deux bras du Michelson.

Imaginons maintenant que l'on augmente $|e|$, à partir de n'importe quel point. Dans ce cas, d'après l'équation (IV.1), $\cos \theta$ diminue, donc θ et r augmentent : les anneaux semblent sortir du centre de la figure.

On retient donc que si $|e|$ augmente, *i.e.* si l'on s'éloigne du contact optique, les anneaux semblent sortir, alors qu'ils rentrent si l'on se rapproche du contact optique.

- f. L'interféromètre de Michelson, comme l'interféromètre à trous d'Young, est un interféromètre à deux ondes. Contrairement au dispositif à trous d'Young toutefois, il est possible, avec un interféromètre de Michelson d'utiliser des sources étendues sans perte de contraste, et donc d'avoir des figures d'interférence beaucoup plus lumineuses, mais à la contrainte d'avoir les franges localisées (ici, à l'infini).

Théorème de localisation des franges : En effet, si on considère un interféromètre quelconque, éclairé par une source étendue, comme dans la figure FIG. 4.4.

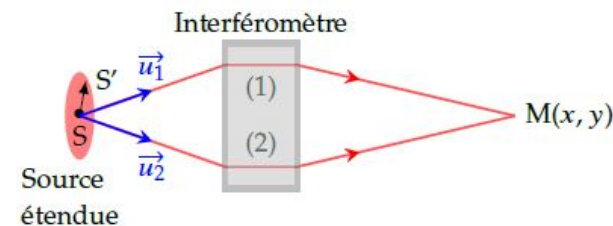


FIGURE 4.4 – Source étendue éclairant un interféromètre. Figure extraite de *Optique Ondulatoire*, Jimmy Roussel, femto-physique.fr/optique.

On cherche une condition sur l'interféromètre, pour garder un bon contraste, malgré le fait que la source soit étendue. Si on prend un point source élémentaire S , le signal d'interférence en $M(x, y)$ dépend de la différence de marche $\delta = L_1 - L_2$, entre les deux chemins optiques 1 et 2. Et donc, pour garder un bon contraste, on veut que cette différence de marche soit invariante si on considère un point S ou un point S' de la source. Autrement dit, on cherche $d\delta = dL_1 - dL_2 = 0 \approx \overrightarrow{SS'}(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$.

Ainsi, il y a deux possibilités pour maintenir cette condition :

- soit $\overrightarrow{SS'}$ est perpendiculaire à $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$. C'est le cas des fentes de Young par rapport aux trous de Young : on ouvre la source dans la direction perpendiculaire au système d'interférence, sans perte de contraste mais avec des franges plus lumineuses par rapport aux points sources.
- soit $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$. C'est le cas des interféromètres à division d'amplitude, comme le Michelson. Toutefois, cela amène à un phénomène de localisation des franges, comme illustré en FIG. 4.7 et développé plus bas à la Q3.

Démo de $dL \approx \overrightarrow{SS'}(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$ (similaire aux exercices du TD1 optique géométrique) : Si on considère un rayon lumineux se propageant dans un milieu homogène, de A à B . Le chemin optique s'écrit $L = n \overline{AB} = n \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB}$, où \vec{u} est le vecteur unitaire du segment AB . On s'intéresse à la variation du chemin

optique, lorsque l'on déplace de façon infinitésimale le point A en A'.

$$\begin{aligned} dL &= n d(\vec{u} \cdot \vec{AB}) \\ dL &= n \vec{u} d\vec{AB} + n \vec{AB} d\vec{u} \end{aligned}$$

Or, $\|\vec{u}\|^2 = 1$, donc $d\vec{u}^2 = 0 = 2\vec{u} \cdot d\vec{u}$, d'où $\vec{AB} \cdot d\vec{u} = 0$

On a donc $dL = n \vec{u} \cdot d\vec{AB} = n \vec{u} \cdot d\vec{AA'} = n \vec{u} \cdot \vec{AA'}$.

- 2.2 a. Les diverses composantes spectrales sont incohérentes entre elles. On somme donc les figures d'interférences et on obtient sur l'écran la superposition des plusieurs systèmes d'anneaux, associés à chaque longueur d'onde, dont le rayon dépend de λ . On observe ainsi des anneaux de couleurs différentes, voire un brouillage des interférences.
- b. On suppose maintenant que la source n'émet qu'à deux longueurs d'onde, notées λ_1 et λ_2 . On additionne donc les figures d'interférences obtenues pour chaque longueur d'onde. Au centre de l'écran, la différence de marche est $\delta = 2e$, et l'intensité s'écrit alors

$$\begin{aligned} I(e) &= \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_1}\right) \right] + \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_2}\right) \right] \\ &= I_0 \left[1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{4\pi e}{\lambda_1}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{4\pi e}{\lambda_2}\right) \right] \\ &= I_0 \left[1 + \cos\left(2\pi e \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)\right) \cos\left(2\pi e \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\right) \right]. \end{aligned}$$

En introduisant $\bar{\lambda} = \left(\frac{\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1}}{2}\right)^{-1}$, on a alors

$$I(e) = I_0 \left[\underbrace{1 + \cos\left(\frac{4\pi e}{\bar{\lambda}}\right)}_{\text{interférences}} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi e}{\lambda_1 \lambda_2} \Delta\lambda\right)}_{\text{contraste}} \right]. \quad (\text{IV.2})$$

Remarque L'équation (IV.2) prend une forme plus simple en utilisant la fréquence moyenne $\bar{\nu} = (\nu_1 + \nu_2)/2$ et l'écart en fréquence $\Delta\nu$ du doublet :

$$I(e) = I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi e}{c} \bar{\nu}\right) \cos\left(\frac{2\pi e}{c} \Delta\nu\right) \right].$$

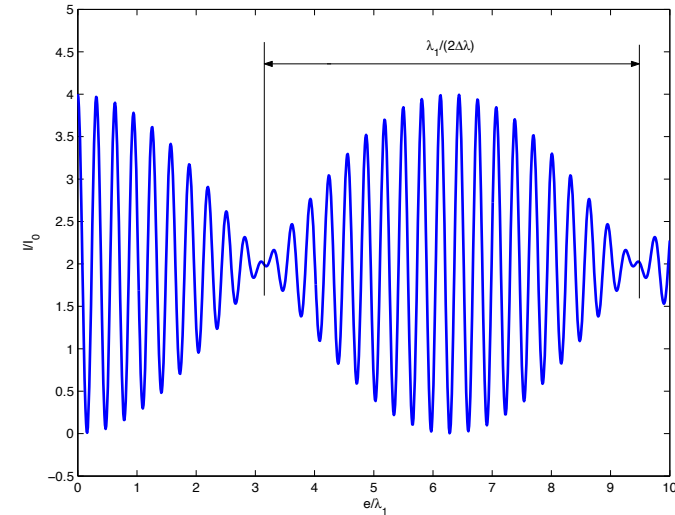


FIGURE 4.5 – Allure de l'interférogramme dans le cas du doublet du Sodium.

En pratique, on a $\Delta\lambda \ll \lambda_1, \lambda_2$, et l'on peut récrire l'équation (IV.2) sous la forme

$$I(e) = I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi e}{\lambda_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi e}{\lambda_1^2} \Delta\lambda\right) \right]. \quad (\text{IV.3})$$

- c. En variant e , on observe la variation d'éclairement tracée FIG. 4.5, figure dite de *battements* entre les deux longueurs d'onde. On peut mesurer la longueur d'onde moyenne $\bar{\lambda} \approx \lambda_1, \lambda_2$ en mesurant la période rapide des battements et $\Delta\lambda$ en mesurant leur période lente (Cf. TP Spectrométrie).

On a ici annulation du contraste pour

$$\frac{2\pi e \Delta\lambda}{\lambda_1^2} = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Entre deux annulations, on a charioté de $\Delta x = \frac{\Delta e}{2}$ (le miroir M1 se déplace de x , cela équivaut à un retard de $2x$ sur le chemin optique parcouru par la lumière dans le bras 1) tel que :

$$\frac{2\pi \Delta e \Delta\lambda}{\lambda_1^2} = \pi, \quad \text{soit} \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda_1^2}{2\Delta e}.$$

Les oscillations rapides de période δe sont telles que $\frac{4\pi\delta e}{\lambda_1} = 2\pi$ soit

$$\lambda_1 = 2\delta e.$$

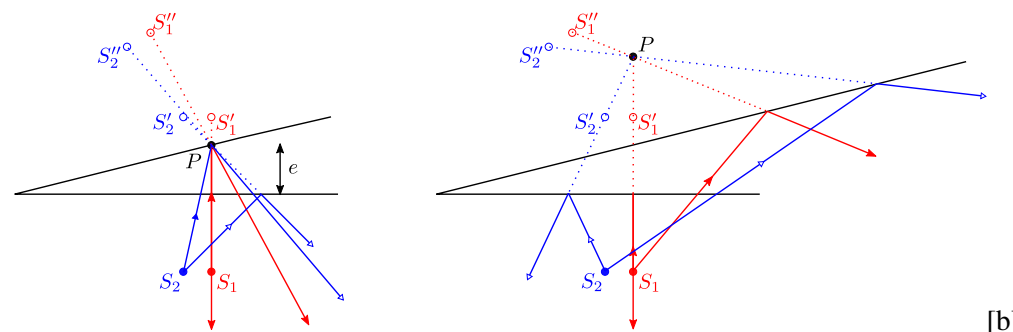
Applications numériques Pour le doublet du mercure, $\delta e = 289,0 \text{ nm}$ et $\Delta e = 151,8 \text{ }\mu\text{m}$. Pour le doublet du sodium, $\delta e = 294,5 \text{ nm}$ et $\Delta e = 588,6 \text{ }\mu\text{m}$.

3. Si on introduit un angle α entre les deux miroirs, on dit qu'on obtient un **coin d'air**, plutôt qu'une lame d'air. La différence de marche entre deux rayons, issus d'un même faisceau en entrée de l'interféromètre, est proportionnelle à l'épaisseur du coin d'air à l'endroit où les rayons interceptent les miroirs. Quand on se déplace le long du coin d'air, l'épaisseur du coin d'air $e(x)$, et donc la différence de marche δ , varie linéairement avec la distance x au sommet du coin d'air. Pour des rayons en incidence normale, on a simplement $\delta = 2e(x) = 2\alpha x$. Si l'on fait l'image du coin d'air sur un écran, on observe alors des franges rectilignes (les franges brillantes correspondent à $\delta = p\lambda$, où $p \in \mathbb{Z}$, soit $x = p\lambda/2$), appelées **franges d'égale épaisseur**.

Pour des angles d'incidence non nuls, la différence de marche au même point x est plus petite que $2e$. Si on éclaire le coin d'air avec un faisceau non collimaté, on superpose alors des figures d'interférence d'interfranges différents, réduisant alors le contraste. **On éclaire donc toujours un coin d'air avec un faisceau parallèle!** Dans ce cas, en ouvrant la source, on augmente la zone éclairée du coin d'air sans pour autant brouiller les franges d'interférence : le contraste des franges ne dépend (quasiment) pas de la largeur de la source quand on les observe au niveau du coin d'air, et au niveau du coin d'air seulement : les interférences sont **localisées sur le coin d'air**.

Pour illustrer la localisation des interférences dans le cas du coin d'air, on considère les deux situations de la figure 4.6. On considère deux points sources S_1 et S_2 proches l'un de l'autre et on trace les rayons issus de ces points, se réfléchissant sur les deux miroirs du Michelson, et passant par un point P dont on fait l'image sur l'écran d'observation. Quand le point P est sur ou proche du coin d'air, la différence de marche δ_1 entre les rayons issus de S_1 est $2e$, tout comme celle entre les rayons issus de S_2 ($\delta_2 \approx 2e$). Les figures d'interférence associées à chaque point source sont donc quasiment identiques et il n'y a pas de brouillage des interférences.

En revanche, dès que l'on éloigne le point P du coin d'air, on constate que les rayons issus de S_1 et les rayons issus de S_2 s'éloignent significativement les uns des autres, autrement dit que δ_1 devient très différent de δ_2 . Dans cette configuration, le



[b]

FIGURE 4.6 – Discussion sur la localisation des franges du coin d'air. On trace les rayons issus de deux sources, S_1 et S_2 , et passant par un point P dont on fait l'image sur l'écran. Il n'y a pas de brouillage des interférences si la différence de marche entre les chemins est sensiblement la même pour les rayons issus de S_1 et les rayons issus de S_2 , ce qui est le cas de la figure de gauche. Par contre, dans le cas de droite, on voit bien que la différence de marche entre les rayons issues de S_1 et ceux issues de S_2 sont très différents : les interfranges se brouillent. Les points sources secondaires S' et S'' sont les images des points sources S par réflexion par les miroirs du Michelson. On remarque que dans ce cas là, la source primaire est étendue spatialement et aussi non parfaitement collimatée (différents angles possibles d'incidence des rayons sur les dioptrés)

contraste varie beaucoup plus rapidement avec l'ouverture de la source (ou, de façon équivalente, avec la distance entre S_1 et S_2) que dans le cas précédent. Le contraste varie finalement à minima quand on fait l'image sur l'écran d'observation de points proches du coin d'air. Encore une fois, les franges du coin d'air sont localisées sur le coin d'air.

On retiendra que pour des petits angles entre les deux miroirs α et pour une source incidente collimatée (un seul angle d'incidence pour éviter le brouillage des figures d'interférences), les franges sont localisées proches de la surface des miroirs, comme illustrées en figure 4.7. En montage, on cherchera donc à faire l'image du miroir sur l'écran avec une lentille.

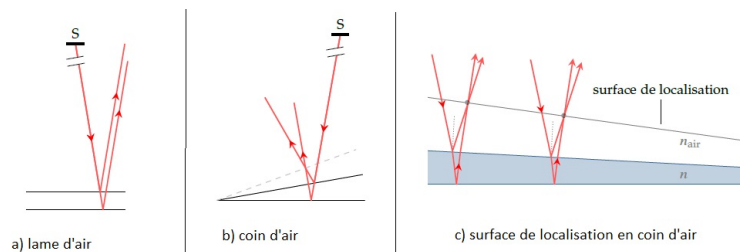


FIGURE 4.7 – Construction des surfaces de localisation, pour a) lame d'air, et b)+c), coin d'air. Figures extraites de *Optique Ondulatoire, Jimmy Roussel, femto-physique.fr/optique*.

Remarque Contrairement à ce qu'on avait obtenu pour la lame d'air du Michelson, le contraste dépend en fait encore de la largeur de la source, mais au deuxième ordre seulement. Cet effet peut être mis en évidence expérimentalement, cf Sextant p.164.

On peut se convaincre relativement aisément que la variation du contraste avec la taille de la source ne varie que quadratiquement lorsqu'on fait l'image du coin d'air, alors qu'elle varie linéairement autrement. On s'intéresse à la variation de la différence de marche $\delta_1 - \delta_2$ quand la source est déplacée de S_1 vers S_2 , i.e. de δ parallèlement au miroir M_1 (voir figure 4.8). Sur les figure 4.8.a et b, on constate que la variation $S_1P - S_2P$ n'est quadratique en δ que si (S_1P) est orthogonale à (S_1S_2) , et est linéaire en δ autrement. Une façon de s'assurer que $\delta_1 - \delta_2 = (S_1'P - S_2') - (S_1''P - S_2'P)$ soit quadratique en δ est donc de faire en sorte que P soit à l'intersection des droites orthogonales à $(S_1'S_2')$ – et donc à (S_1S_2) – et à

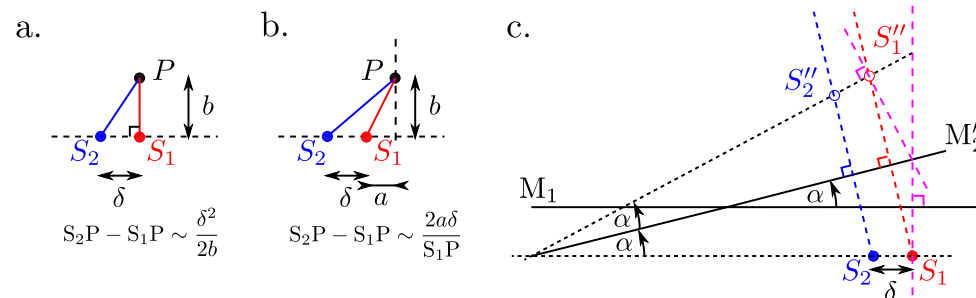


FIGURE 4.8 – Différence entre les distances S_1P et S_2P quand (S_1P) est orthogonal à (S_1S_2) (a.) ou non (b.). (c.) Le point d'intersection des droites orthogonales à (S_1S_2) et $(S_1'S_2')$ est situé sur le miroir M_2' , i.e. sur le coin d'air.

$(S_1'S_2')$. Ce point d'intersection est nécessairement sur le miroir M_2' , (S_1S_2) et $(S_1'S_2')$ étant symétriques par rapport à lui (voir figure 4.8). Autrement dit, la variation de différence de marche dépend quadratiquement de l'étendue de la source quand le point d'observation est sur le miroir M_2' , i.e. sur le coin d'air, linéairement autrement².

Remarque Au centre de la figure, la différence de marche est nulle quelle que soit la longueur d'onde : $\delta = 2e = 0$. On observe en pratique une frange sombre sur l'écran, et non brillante, à cause du déphasage supplémentaire de π entre les deux bras du Michelson³, induit par la séparatrice S . En s'éloignant du centre, en revanche, la différence de marche dépend de la longueur d'onde et l'on observe alors, en éclairant le Michelson avec de la lumière blanche, des irisations, correspondant à la superposition de franges dont l'interfrange dépend de la longueur d'onde. Plus on s'éloigne du centre, plus le déphasage $2\pi\delta/\lambda$ et donc plus l'éclairement varie rapidement avec λ . Loin du centre, on ne distingue alors plus les irisations, mais une teinte blanche appelée **blanc d'ordre supérieur** : en un point de l'écran, le spectre de l'éclairement n'est pas plat, mais *cannelé* (il n'y a par exemple pas de contribution des longueurs d'onde λ pour lesquelles, en ce point, $\delta = p\lambda$).

2. On pourrait aussi imaginer que la variation linéaire en δ de $S_1'P - S_2'P$ vienne exactement compenser celle de $S_1''P - S_2''P$. On laisse au lecteur le soin de déterminer le lieu de ces points.

3. C'est en fait encore un peu plus compliqué que ça, cf. Sextant p.233, note 32

EXERCICE V INTERFÉROMÈTRE DE FABRY-PÉROT (IMPORTANT)

- 1.1.1 Pour calculer la figure d'interférence observée en sortie du Fabry-Pérot, il faut considérer a priori tous les faisceaux en sortie de l'interféromètre, et non plus seulement 2 comme on l'avait fait dans le cas de la lame d'air. Le coefficient de réflexion des miroirs étant très proche de l'unité, tous ces faisceaux ont des intensités similaires (du moins pour les premiers), et on ne peut donc pas, a priori, négliger la contribution de l'un par rapport à l'autre à la figure d'interférence. On parle d'interférences à ondes multiples.

Il faut donc calculer l'amplitude et la phase de chacun des faisceaux en sortie de l'interféromètre. Il faut pour cela calculer la différence de marche correspondant au chemin séparant les deux miroirs. Par un calcul identique à celui de l'exercice précédent, on trouve

$$\delta_0 = e \cos i,$$

où i est l'angle d'incidence des rayons sur les miroirs. On note, pour la suite, $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(2\delta_0) = \frac{4\pi e}{\lambda} \cos i$, le déphasage accumulé par l'onde lors d'un aller-retour entre les parois du Fabry-Pérot.

On note \tilde{s}_0 l'amplitude complexe de l'onde à l'entrée du Fabry-Pérot. L'amplitude du premier rayon transmis, qui a donc été transmis par deux miroirs (coefficient t^2) et a accumulé un déphasage $\varphi/2$ s'écrit

$$s_0 = t e^{i\frac{\varphi}{2}} t \times \tilde{s}_0.$$

Le rayon émergent suivant a subi deux réflexions supplémentaires sur les miroirs (coefficient r^2) et accumulé un déphasage supplémentaire égale à $2 \times \varphi/2$, soit

$$s_1 = t e^{i\frac{\varphi}{2}} r e^{i\frac{\varphi}{2}} r e^{i\frac{\varphi}{2}} t \times \tilde{s}_0 = s_0 r^2 e^{i\varphi}.$$

On étend facilement au calcul des ondes émergentes suivantes. L'amplitude du $n^{\text{ième}}$ rayon s'écrit

$$s_n = s_0 (r^2 e^{i\varphi})^n.$$

La vibration lumineuse en sortie de l'interféromètre est alors la somme des vibrations lumineuses s_n issues de toutes les réflexions :

$$s = \sum_{n \geq 0} s_n = s_0 \sum_{n \geq 0} (r^2 e^{i\varphi})^n = \tilde{s}_0 \frac{t^2 e^{i\varphi/2}}{1 - r^2 e^{i\varphi}}.$$

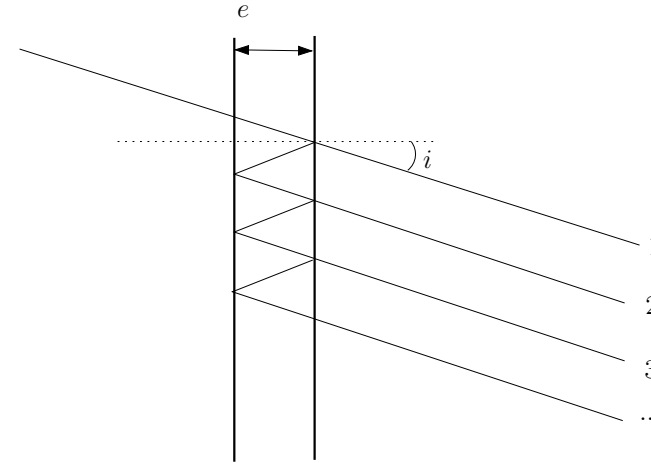


FIGURE 5.1 – Interférences à ondes multiples dans le cas d'un Fabry-Pérot.

Le déphasage φ ne dépend que de l'inclinaison des faisceaux, comme pour la lame d'air (du Michelson). De façon similaire, les interférences sont alors localisées à l'infini, et la figure d'interférence présente des anneaux d'égale inclinaison. L'intensité sur un écran placé à l'infini s'écrit

$$\begin{aligned} I(i) &= |s(i)|^2 = I_0 \frac{T^2}{|1 - r^2 e^{i\varphi}|^2}, \\ &= I_0 \frac{T^2}{(1 - r^2 e^{i\varphi})(1 - r^{*2} e^{-i\varphi})}. \end{aligned}$$

À une redéfinition de φ près, on peut supposer r réel, et l'on a

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi}, \\ &= \frac{T^2}{(1 - R)^2 + 2R(1 - \cos \varphi)}, \\ &= \frac{T^2}{(1 - R)^2} \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}. \end{aligned}$$

Or, dans un bon interféromètre, l'absorption est négligeable, *i.e.* $T + R = 1$, soit

finalemt

$$I = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

On a un maximum d'intensité quand $\frac{\varphi}{2} = m\pi \Leftrightarrow \varphi = 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$. Le maximum vaut alors

$$I_{\max} = I_0.$$

L'écart entre deux maxima d'intensité, ou résonances, est simplement $\Delta\varphi = 2\pi$.

On a un minimum d'intensité quand $\frac{\varphi}{2} = m\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \varphi = (2m+1)\pi, m \in \mathbb{Z}$. Le minimum vaut alors

$$I_{\min} = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}}.$$

1.2 On cherche maintenant à calculer la largeur à mi-hauteur $\delta\varphi$ d'un pic de résonance. Par définition, on a

$$I\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right) = \frac{I_0}{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\delta\varphi}{4} = 2,$$

soit

$$\sin^2 \frac{\delta\varphi}{4} = \frac{(1-R)^2}{4R}.$$

Pour des pics suffisamment fins, $\delta\varphi \ll 2\pi$, et l'on trouve

$$\sin^2 \frac{\delta\varphi}{4} \approx \frac{\delta\varphi^2}{16} \frac{(1-R)^2}{4R},$$

d'où finalement

$$\delta\varphi = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}},$$

qui est bien petit devant 2π .

La finesse \mathcal{F} du Fabry-Pérot s'écrit alors

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\varphi}{\delta\varphi} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}.$$

C'est une fonction croissante de R qui quantifie la *finesse* des pics de résonance : plus la finesse de l'interféromètre est élevée, plus les pics sont fins et donc meilleure est la résolution.

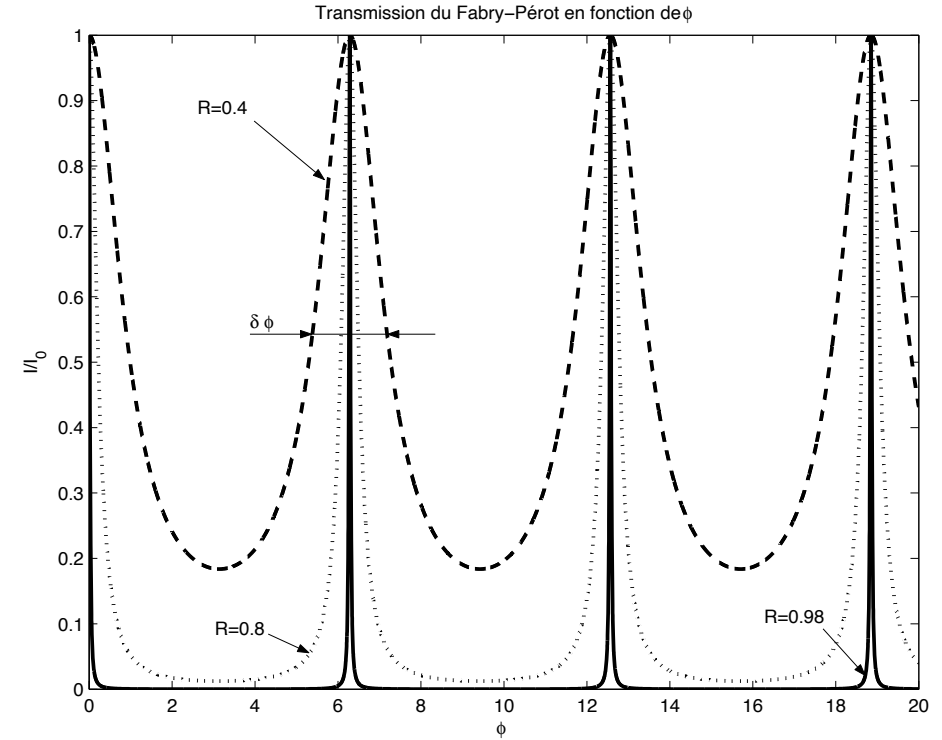


FIGURE 5.2 – Transmission d'un Fabry-Pérot en fonction de φ . Influence du coefficient de réflexion.

Remarque Pour un interféromètre à 2 ondes, comme le Michelson en lame d'air, la figure d'interférence est une sinusoïde pour laquelle on trouverait une finesse $\mathcal{F} = \Delta\varphi/\delta\varphi = 2\pi/\pi = 2$. En fait, un interféromètre de finesse \mathcal{F} est l'équivalent d'un interféromètre à \mathcal{F} ondes. Un Fabry-Pérot de finesse \mathcal{F} est ainsi aussi performant qu'un réseau à $N = \mathcal{F}$ fentes.

1.3 Si le centre des anneaux est brillant, alors

$$\varphi(i=0) = \frac{4\pi e \cos i}{\lambda} = \frac{4\pi e}{\lambda} = 2p_0\pi, p_0 \in \mathbb{Z}.$$

Soit p l'ordre d'interférence d'un anneau brillant, correspondant à l'angle d'inci-

dence i_p :

$$\cos i_p = \frac{\lambda}{2e} p.$$

Un ordre d'interférence p plus élevé correspond à un $\cos i_p$ plus élevé et donc à i_p plus faible. Le $k^{\text{ième}}$ anneau correspond donc à l'ordre $p_0 - k$:

$$\cos i_{k=p_0-p} = \frac{\lambda}{2e} (p_0 - k).$$

Pour des faibles angles d'inclinaison, $\cos i_k \approx 1 - i_k^2/2$ et

$$i_k = \sqrt{\frac{\lambda k}{e}}.$$

2.2.1 On observe l'anneau d'incidence i . Si l'on suppose qu'on a une frange brillante pour une fréquence ν_0 donnée, on aura une nouvelle frange brillante pour $\nu_1 = \nu_0 + \Delta\nu$ tel que

$$\begin{aligned} \varphi(\nu_1) - \varphi(\nu_0) &= \frac{4\pi e \cos i}{c} \Delta\nu = 2\pi \\ \text{soit } \Delta\nu &= \frac{c}{2e \cos i}. \end{aligned}$$

L'intervalle spectral libre (ISL) du Fabry-Pérot s'écrit donc

$$\Delta\nu_{\text{ISL}} = \frac{c}{2e'},$$

où $e' = e \cos i$ est la largeur effective de l'interféromètre. Au centre des anneaux, en particulier, $e' = e$.

La largeur spectrale $\delta\nu$ d'un pic de résonance est l'intervalle de fréquence correspondant à une variation $\delta\varphi$ de la phase φ définie plus haut. Puisque $\varphi = \frac{4\pi e'}{c} \nu$, on a simplement

$$2\pi\delta\nu = \frac{c}{2e'} \delta\varphi = \Delta\nu_{\text{ISL}} \left(\frac{\Delta\varphi}{\mathcal{F}} \right) = 2\pi \frac{\Delta\nu_{\text{ISL}}}{\mathcal{F}}.$$

La finesse \mathcal{F} de l'interféromètre peut donc finalement s'écrire sous la forme

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\nu_{\text{ISL}}}{\delta\nu},$$

i.e. le rapport entre l'intervalle spectral libre et la plus petite variation de fréquence mesurable avec l'interféromètre. Cette relation est valable quel que soit l'anneau considéré : la finesse de l'interféromètre est une grandeur intrinsèque qui ne dépend pas des conditions d'utilisation, ici par exemple de l'angle d'inclinaison observé.

2.2 Toujours pour une inclinaison i donnée, on cherche à déterminer la variation minimale $\delta\lambda$ de longueur d'onde que l'on pourra détecter autour d'une longueur d'onde λ donnée, supposée telle que l'anneau est brillant pour λ (c'est là qu'on a le maximum de sensibilité). Comme précédemment, on a donc

$$\lambda = \frac{2e'}{p} = \frac{c}{p\Delta\nu_{\text{ISL}}},$$

où $p \in \mathbb{N}$ est l'ordre d'interférence. On a par ailleurs $\nu = c/\lambda$ et donc

$$\begin{aligned} \delta\nu &= c \frac{\delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{c}{\lambda} \frac{\delta\lambda}{\lambda} = p\Delta\nu_{\text{ISL}} \frac{\delta\lambda}{\lambda} \\ &= \frac{\Delta\nu_{\text{ISL}}}{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

On en déduit finalement le **facteur de qualité Q**

$$Q = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\nu}{\delta\nu} = p\mathcal{F}.$$

Le facteur de qualité, ou pouvoir de résolution, est défini comme l'inverse de la variation relative minimale de fréquence ou de longueur d'onde détectable par l'interféromètre. Il est d'autant plus grand que la finesse est grande et que l'ordre d'interférence est élevé. Contrairement à la finesse, sa valeur dépend donc de la façon dont on se sert de l'interféromètre !

2.3 On suppose que la source a deux composantes spectrales, λ et $\lambda + \Delta\lambda$. On observe donc la superposition de deux systèmes d'anneaux, de rayons différents. Les anneaux correspondants à ces deux longueurs d'onde sont distinguables si la largeur d'un anneau est plus petite que la distance entre deux anneaux.

Largeur d'un anneau Pour connaître la largeur d'un anneau brillant d'angle i_p tel que $\cos i_p = p\lambda/(2e)$, il suffit de calculer la variation δi qui induit une variation

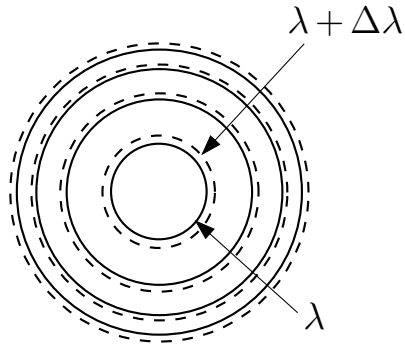


FIGURE 5.3 – Anneaux à la sortie du Fabry-Pérot pour une source polychromatique (λ et $\lambda + \Delta\lambda$).

$\delta\varphi$ de la phase. Puisque $\varphi = 4\pi e \cos i / \lambda$, on a simplement

$$\delta\varphi = \frac{4\pi e}{\lambda} \sin i \delta i, \quad \text{soit} \quad \delta i = \frac{\lambda}{4\pi e \sin i} \delta\varphi = \frac{\lambda}{4\pi e \sin i} \frac{2\pi}{\mathcal{F}} = \frac{\lambda}{2e \sin i} \frac{1}{\mathcal{F}}.$$

Distance entre deux anneaux Il faut cette fois estimer la variation Δi qui correspond, à l'ordre d'interférence p , à la variation $\Delta\lambda$ de longueur d'onde :

$$\sin i \Delta i = p \frac{\Delta\lambda}{2e}, \quad \text{soit} \quad \Delta i = p \frac{\Delta\lambda}{2e \sin i}.$$

L'intervalle spectral $\delta\lambda$ minimal pour lequel les anneaux d'interférence sont encore distinguables vérifie donc

$$\delta i = \Delta i \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = p\mathcal{F} = Q.$$

On retrouve la même relation que précédemment faisant intervenir le facteur de qualité du Fabry-Pérot.

EXERCICE VI AGRÉGATION 2005, ÉPREUVE A (PREMIÈRE PARTIE)

Cf. BUP et <http://www.agregation-physique.org>.

TD d'Optique 3

Diffraction (1)

18/09/2024



EXERCICE I DIFFRACTION DE FRAUNHOFER

On considère une source lumineuse monochromatique ponctuelle S éclairant un objet, dans le plan Oxy , situé à une distance d de la source et de transmittance complexe $t(x, y) = |t(x, y)|e^{i\varphi(x, y)}$. On note s_0 l'onde source et s l'onde transmise à travers l'objet. On observe l'éclairement obtenu dans un plan $(O'XY)$ situé à une distance D de l'objet, comme illustré en Figure 1.1.

1. Énoncer le principe de Huygens-Fresnel.

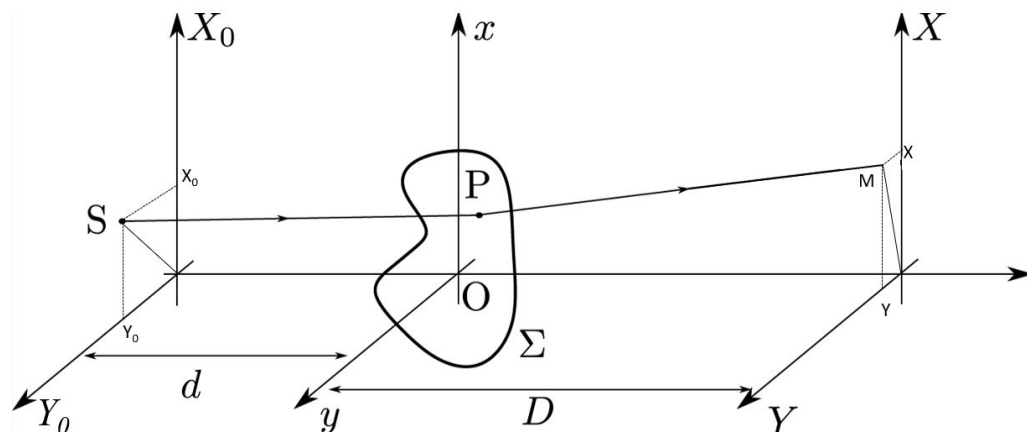


FIGURE 1.1 – Géométrie considérée

2. Calculer l'amplitude diffractée dans la limite où les distances objet-écran et source-objet sont grandes devant toutes les autres dimensions.

3. Qu'est-ce que la diffraction de Fraunhofer ? Quelles sont ses conditions de validité ? Qu'est-ce que la diffraction de Fresnel ?
4. Décrire quantitativement la figure de diffraction de Fraunhofer d'une fente rectangulaire de longueur a et de largeur b éclairée par une onde plane monochromatique de vecteur d'onde \vec{k}_0 , observée dans le plan focal d'une lentille de focale f .
5. À l'aide de la question précédente, estimer la largeur de la tache d'Airy dans le cas où l'objet diffractant est un trou.
6. Énoncer et démontrer le théorème de Babinet.

EXERCICE II DIFFRACTION PAR UN ENSEMBLE DE STRUCTURES

On considère un ensemble de petites structures diffractantes, ou motifs, réparties dans un objet de petite dimension devant la distance D à l'écran sur lequel on observe la figure de diffraction.

On éclaire cet objet par une onde plane monochromatique, de longueur d'onde λ_0 , de direction quelconque, et on étudie la figure de diffraction obtenue sur l'écran, dans l'approximation de Fraunhofer.

1. Cas général

- 1.1 Utiliser le principe de Huygens-Fresnel pour obtenir l'amplitude diffractée en un point $M(X, Y, D)$ de l'écran d'observation.
- 1.2 Montrer que l'on obtient la figure de diffraction d'un motif, modulée par une fonction caractéristique de la répartition de ces motifs dans l'objet.

2. Structures réparties de façon aléatoire

Que nous donne cette formule dans le cas de motifs répartis de façon aléatoire ?

3. Structures périodiques : réseau

On considère maintenant une répartition périodique des structures diffractantes : un réseau de N fentes de largeur e , réparties sur une longueur $L = Na$ où a est la période de ce réseau.

La fonction de transparence de chaque fente est $t_0(x)$, avec $t_0(x) = 1$ pour $-e/2 < x < e/2$ et $t_0(x) = 0$ sinon. On étudie la figure de diffraction obtenue en transmission.

- 3.1 Déterminer les directions privilégiées dans lesquelles se concentre l'intensité lumineuse.
- 3.2 Calculer l'intensité diffractée par l'ensemble du réseau dans une direction donnée en fonction de l'intensité I_0 , intensité mesurée au centre de la figure pour une fente unique.

EXERCICE III DIFFRACTION ET LENTILLES

Placer l'écran d'observation au foyer d'une lentille revient en pratique à observer « à l'infini ». Dans le cas de la diffraction d'une onde plane, on réalise alors les conditions d'obtention de la diffraction de Fraunhofer. Toutefois, la lentille elle-même peut être traitée comme faisant partie intégrante de l'objet diffractant. On se propose ici de retrouver de cette façon dans quelles conditions on retrouve la diffraction de Fraunhofer.

On considère à nouveau la situation de l'exercice I. On accole à l'objet diffractant de transmission t une lentille mince que l'on suppose de dimensions infinies (on omet le fait qu'elle diaphragme le faisceau incident).

1. Lentille de Fresnel

- 1.1 Justifier que la fonction de transmission $t_f(x, y)$ d'une lentille mince convergente de focale $f > 0$ s'écrit $t_f(x, y) = \exp(-ikr^2/2f)$, où $r^2 = x^2 + y^2$ et $k = 2\pi/\lambda$.
- 1.2 En reprenant les calculs de l'exercice I, quelle relation doivent vérifier d, D , et f pour obtenir la figure de diffraction de Fraunhofer de l'objet de transmission t sur l'écran ? Commenter.

2. Doublet de lentilles

On accole maintenant deux lentilles de focales f_1 et f_2 que l'on éclaire par une onde plane. On place l'écran d'observation à f_1 du doublet. Comme toujours, on ne s'intéresse qu'à ce qui se passe proche de l'axe optique.

- 2.1 En utilisant le fait qu'une onde sphérique de rayon de courbure R prend la forme $\exp[ikr^2/(2R)]$, proche de l'axe optique, trouver simplement l'expression de l'amplitude complexe de l'onde sur l'écran.
- 2.2 Utiliser le résultat de la partie I pour retrouver ce résultat. On utilisera l'intégrale

$$\int e^{-i\frac{x^2}{2a}} e^{-ikx} dx = \sqrt{2\pi a} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{ak^2}{2}}.$$

3. Position de l'objet diffractant

Pour observer la diffraction d'un objet à l'infini, on utilise couramment une lentille dans le plan focal image de laquelle on place l'écran d'observation (voir figure 3.1). On ne s'occupe généralement pas de la distance δ qui sépare l'objet diffractant et la lentille. On cherche ici à justifier cet oubli en considérant la dépendance en δ de l'amplitude complexe dans le plan d'observation.

On considère un objet de fonction de transmission $t(x)$ placé à une distance δ d'une lentille de focale f . L'objet est éclairé par une onde plane sur l'axe, et on place l'écran d'observation dans le plan focal image de la lentille. Pour simplifier, on considère un objet 1D. L'extension à 2D est immédiate mais alourdit les calculs.

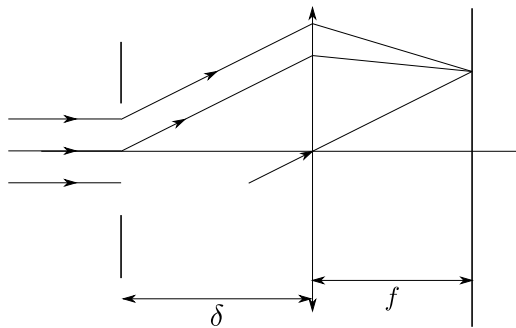


FIGURE 3.1 – Diffraction d'une onde plane à l'infini en utilisant une lentille. L'écran est dans le plan focal de la lentille.

- 3.1 Montrer que l'amplitude de l'onde dans le plan de la lentille s'écrit comme la convolution de $t(x)$ et de $g(x) = \exp\left(\frac{ikx^2}{2\delta}\right)$. On supposera δ grand devant l'étendue de l'onde sur la lentille et sur l'objet diffractant.
- 3.2 Comment l'amplitude de l'onde dans le plan d'observation dépend-elle de δ ? Montrer alors que déplacer l'objet diffractant par rapport à la lentille, c'est-à-dire modifier δ , ne modifie pas la figure de diffraction.

Corrigé

Diffraction (1)



EXERCICE I DIFFRACTION DE FRAUNHOFER

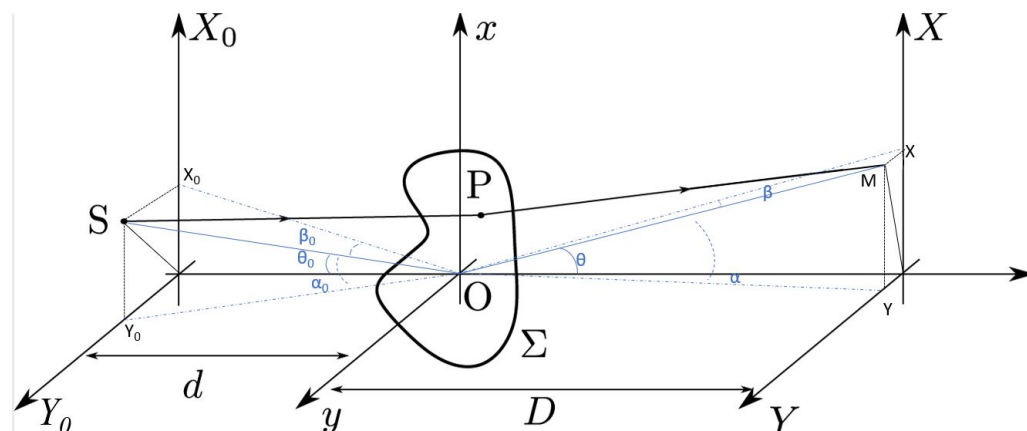


FIGURE 1.1 – Géométrie considérée

1. Principe de Huygens-Fresnel : (Cf. BFR)

Enoncé du principe

Chaque point M d'une surface Σ atteinte par la lumière peut être considérée comme une source secondaire émettant une onde sphérique. L'état vibratoire de cette source secondaire est proportionnel à celui de l'onde incidente en M et à l'élément de surface $d\Sigma$ entourant le point M .

Les vibrations issues des différentes sources secondaires interfèrent entre elles.

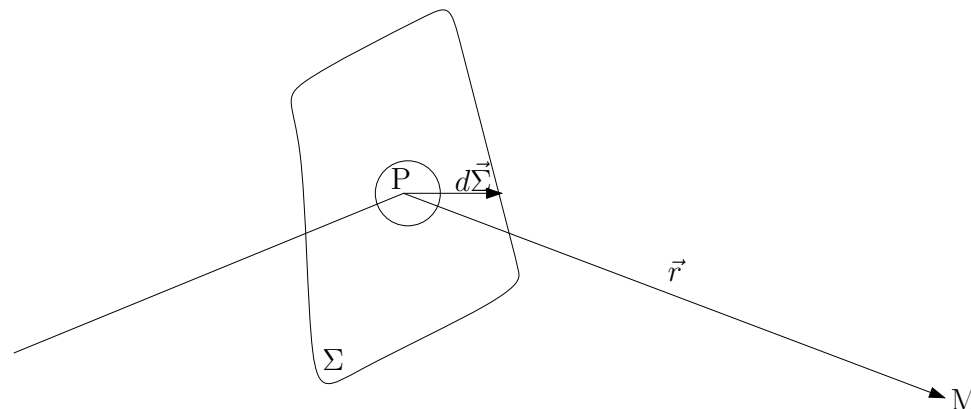


FIGURE 1.2 – Principe de Huygens-Fresnel.

Soit P un point de la surface Σ éclairée et M un point de l'espace (point d'observation), on note θ l'angle entre les directions $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$ et $d\vec{\Sigma}$ le vecteur normal à Σ en P . Alors

$$ds(M) = A(\theta) t(x, y) s_0(P) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma \longrightarrow s(M) = \int_{\Sigma} A(\theta) t(x, y) s_0(P) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma, \quad (\text{I.1})$$

où $k = 2\pi/\lambda$ et λ est la longueur d'onde de la source. On a ici sommé les amplitudes complexes car les différentes sources secondaires interfèrent entre elles.

Le facteur $A(\theta)/A(0)$, appelé *facteur d'obliquité* ou *d'inclinaison*, permet de tenir compte de l'anisotropie du diagramme d'émission des sources secondaires et de l'absence de diffraction vers l'arrière [$A(\pi) = 0$]. On écrit $A(\theta) = A(1 + \cos \theta)/2$. En pratique, on considère des rayons faiblement inclinés sur l'axe optique, auquel cas $A(\theta) \approx A(0) \equiv A$, soit

$$s(M) = A \int_{\Sigma} t(x, y) s_0(P) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma. \quad (\text{I.2})$$

Remarque Pour une ondellette sphérique divergente, en toute rigueur, il faudrait écrire

$$A \frac{e^{-i(\omega t - k \cdot r)}}{r}.$$

On met le terme en $e^{-i\omega t}$ dans le terme A et n'en parlerons plus dans la suite des deux polys diffraction, car nous raisonnons avec des sources monochromatiques uniquement. Il faut évidemment garder en tête les considérations du TD2 cohérence de la semaine dernière, et se souvenir que l'on s'intéresse in fine à l'intensité lumineuse ($I(M) = \langle |s(M)|^2 \rangle$), moyennée sur le temps du détecteur.

Remarque Le principe de Huygens-Fresnel peut en fait (ou évidemment) être dérivé des équations de Maxwell. La théorie de Kirchhoff permet de formuler des équations sur les solutions d'une équation d'onde scalaire, notamment le théorème intégral de Kirchhoff et Helmholtz. En supposant de surcroît toutes les distances caractéristiques grandes devant la longueur d'onde, et en se limitant à la diffraction à grande distance, on obtient la formule dite de Fresnel-Kirchhoff de la diffraction, qui n'est rien d'autre que l'équation (I.1), à ceci prêt que l'expression de $A(\theta)$ y est explicite. [Voir par exemple Born & Wolf ou fr.wikipedia.org/wiki/Théorie_de_Kirchhoff].

2. On applique le principe de Huygens-Fresnel au cas considéré [surface Σ de transmittance $t(x, y)$]. Soit M un point d'observation de coordonnées X, Y , et P un point courant de Σ de coordonnées x, y . Alors

$$s(M) = A \int_{\Sigma} s_0(P) t(x, y) \frac{e^{ikPM}}{PM} dx dy. \quad (I.3)$$

$$\text{Or } \overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} X-x \\ Y-y \\ D \end{pmatrix} \text{ et } PM^2 = D^2 \left[1 + \left(\frac{x-X}{D} \right)^2 + \left(\frac{y-Y}{D} \right)^2 \right], \text{ soit}$$

$$PM = D \sqrt{1 + \left(\frac{x}{D} \right)^2 + \left(\frac{X}{D} \right)^2 + \left(\frac{y}{D} \right)^2 + \left(\frac{Y}{D} \right)^2 - 2 \frac{xX + yY}{D^2}}.$$

On se place maintenant dans la situation où

$$x, y \ll D, d \quad \text{pupille petite,} \quad (I.4)$$

$$X, Y \ll D \quad \text{petits angles.} \quad (I.5)$$

On retrouve ici les conditions de Gauss. La première condition traduit le fait qu'on ne s'intéresse qu'à la diffraction par de petits objets ou, ce qui est équivalent, qu'il n'y a de la lumière que proche de l'axe optique. La seconde condition impose que les rayons

considérés soient tous faiblement inclinés sur l'axe. On introduit pour cela les angles directeurs de \overrightarrow{OM} , notés $\alpha = \frac{X}{D}$ et $\beta = \frac{Y}{D}$, i.e. $\overrightarrow{OM} = D \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$. La condition (I.5) se réécrit alors

$$\alpha, \beta \ll 1. \quad (I.6)$$

Dans ce cas, avec un DL à l'ordre 2 on a alors :

$$\begin{aligned} PM &\approx D \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{D} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{X}{D} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{D} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{D} \right)^2 - \frac{xX + yY}{D^2} \right] \\ &= D \left(1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + \frac{r^2}{2D^2} - \frac{\alpha x + \beta y}{D} \right), \end{aligned} \quad (I.7)$$

avec $r^2 = x^2 + y^2 = OP^2$.

On peut alors faire l'approximation $PM \approx D$ dans la norme $s_0(P)/PM$ dans (I.2) : la norme ne varie significativement que si les variations de PM sont de l'ordre de D . En revanche, **pour évaluer la phase $\Phi = kPM$, il faut tenir compte des variations de PM à l'échelle de la longueur d'onde, λ** . En effet, il suffit que l'on déplace le point P sur la surface de l'objet, tel que $PM \Rightarrow P'M$ varie de $\frac{\lambda}{2}$ pour que le terme de phase $e^{ikPM} = -1$, et donc pour qu'il y ait inversion de signe dans l'intégrale. Ainsi les petites variations de P sont à prendre en compte et on ne peut pas faire l'approximation $PM \approx OM$ pour le terme de phase.

Et donc on garde les ordres plus élevés du développement du terme de phase :

$$\Phi/k = D - (\alpha x + \beta y) + \frac{D}{2} (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{r^2}{2D}. \quad (I.8)$$

Finalement, l'onde émise par le point P est, au point M , $ds_P(M) \approx s(P) e^{i\Phi} / D dx dy$.

Et donc, en appliquant le principe de Huygens Fresnell, les ondelettes secondaires de la pupille interférant ensemble, on a :

$$\begin{aligned} s(M) &= \int_{\Sigma} s(P) \frac{e^{ikPM}}{PM} dx dy \\ &\approx \int_{\Sigma} s_0(P) t(x, y) \frac{e^{i\Phi}}{D} dx dy \end{aligned} \quad (I.9)$$

Reste à exprimer $s_0(P)$. Puisque l'on considère la source initiale S comme ponctuelle, émettant une onde sphérique, on trouve alors $s_0(P) = s_0 e^{i\Phi_0}/SP \approx s_0 e^{i\Phi_0}/d$, où $\Phi_0 = \vec{k} \cdot \vec{SP}$. Par analogie avec le calcul précédant, on trouve donc :

$$\Phi_0/k = d + (\alpha_0 x + \beta_0 y) + \frac{d}{2} (\alpha_0^2 + \beta_0^2) + \frac{r^2}{2d}, \quad (\text{I.10})$$

avec $\alpha_0 = -\frac{X_0}{d}$ et $\beta_0 = -\frac{Y_0}{d}$ les angles directeurs de \vec{SO} , supposés faibles ($\alpha_0, \beta_0 \ll 1$), et (X_0, Y_0) les coordonnées du point source S . Si S est sur l'axe optique, $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.

L'onde diffractée s'écrit alors

$$s(M) = A s_0 \frac{e^{i\varphi_0}}{dD} \int_{\Sigma} t(x, y) e^{-ik[(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y] + ik\frac{r^2}{2}(\frac{1}{d} + \frac{1}{D})} dx dy. \quad (\text{I.11})$$

Remarque 1 On a ici omis le terme phase global $\exp[ik(d + D)]$ qui ne joue aucun rôle et qu'on peut donc toujours oublier.

On a aussi introduit la phase

$$\varphi_0 = \frac{kd}{2}(\alpha_0^2 + \beta_0^2) + \frac{kD}{2}(\alpha^2 + \beta^2) = k \frac{X_0^2 + Y_0^2}{2d} + k \frac{X^2 + Y^2}{2D}, \quad (\text{I.12})$$

qui ne dépend que des positions de la source et du plan d'observation, et donc pas, en particulier, de l'objet diffractant. Comme on ne s'intéresse en général qu'à la figure de diffraction, c'est-à-dire à l'intensité lumineuse en M , $|s(M)|^2$, on «oublie» la plupart du temps cette phase φ_0 et surtout sa dépendance en M . Notons au passage que ces termes de phase correspondent à la phase accumulée par une onde sphérique pour aller de la source S au point O ($\exp[ik(X_0^2 + Y_0^2)/2d]$, onde sphérique de rayon de courbure d) et par une onde sphérique pour aller du point O au point M ($\exp[ik(X^2 + Y^2)/2D]$, onde sphérique de rayon de courbure D).

On écrit donc par la suite $\tilde{s}_0 = \frac{A s_0}{dD} e^{i\varphi_0}$ en omettant le fait que sa phase, stricto sensu, dépend du point d'observation M . On verra plus loin (voir exercice III) qu'il est en fait possible de supprimer cette dépendance en M .

Remarque : Dans la suite des deux TDs de diffraction, on fera le plus souvent abstraction de la dépendance de \tilde{s}_0 en $\frac{1}{SO \times OM}$, ou en $\frac{1}{f'}$, où f' est la focale d'une

lentille qui image l'objet diffractant, et où l'on observe en son plan focale. En effet, cette dépendance traduit le fait que l'intensité de l'onde diffractée reçue en M , décroît avec la distance d'observation, à cause de la dispersion angulaire induite par l'objet diffractant. Pour des distances d'observations habituelles, augmenter la distance d'observation (reculer l'écran !) n'entraîne qu'une dilatation notable de la figure d'interférence, sans trop de pertes sur l'intensité lumineuse de la tâche.

Remarque 2 On n'a jusqu'ici pas précisé à quelle grandeur physique l'ébranlement s correspond. En particulier, on ne précise pas son unité. On pourrait ajouter partout un coefficient γ qui viendrait assurer l'adimensionnalité de s , par exemple en écrivant pour une onde sphérique $s_0(P) = \gamma s_0 e^{ikr}/r$: γ a la dimension d'une longueur. En pratique, on ne calculera les figures qu'à un facteur multiplicatif près, commun à toutes les figures. On «cachera» donc par la suite le problème dans le coefficient s_0 , proportionnel à l'amplitude de l'onde émise par la source.

3. La **diffraction de Fraunhofer** correspond au cas où la phase quadratique dans (I.11),

$$\Phi_Q = \frac{kr^2}{2} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right), \quad (\text{I.13})$$

proportionnelle à r^2 , peut être négligée. L'onde diffractée s'écrit dans ce cas

$$s(M) = \tilde{s}_0 \int_{\Sigma} t(x, y) e^{-ik[(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y]} dx dy. \quad (\text{I.14})$$

La *diffraction de Fresnel* correspond à la situation où les termes quadratiques (en r^2) ne sont plus négligeables, tout en omettant les ordres suivants du développement. (Voir Sextant p 138 et suivantes pour justifier qu'on néglige les ordres supérieurs dans les cas usuels pratiques).

On distingue trois cas important où la condition de Fraunhofer est réalisée :

— Diffraction d'une onde plane ($1/d = 0$) à l'infini ($1/D = 0$). Dans ce cas, l'onde incidente est repérée par son vecteur d'onde \vec{k}_0 et la direction d'observation par le vecteur d'onde \vec{k} , avec

$$\vec{k}_0 = k \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{k} = k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'onde diffractée $s(M)$ prend alors la forme

$$s(M) = \tilde{s}_0 \int_{\Sigma} t(P) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}_0) \cdot \vec{OP}} d\Sigma. \quad (\text{I.15})$$

— Diffraction d'une onde plane ($1/d = 0$) à grande distance ($1/D \approx 0$). On retrouve la formule précédente dans le cas où

$$kr^2 \ll 2D \Leftrightarrow D \gg \frac{r^2}{2\lambda}.$$

Cette condition n'est en pratique pas très restrictive. Par exemple, pour un objet de taille $r = 50 \mu\text{m}$, éclairé par une lumière de longueur d'onde $\lambda = 500 \text{ nm}$, il suffit de placer l'écran à $d \gg 2,5 \text{ mm}$ pour que la condition soit vérifiée.

— Diffraction au voisinage de l'**image géométrique** de la source. Cette situation correspond à la situation où $1/d \neq 0$, $1/D \neq 0$ mais $(1/d + 1/D) = 0$. En fait, on peut reprendre les calculs précédents en écrivant $d = -D$ (la source est donc virtuelle par rapport à l'objet diffractant) : la source effective est située sur l'écran d'observation. Voir *Sextant* p.139 et figure 3.

C'est le fait que la diffraction de Fraunhofer corresponde à cette dernière situation qui la rend si importante en pratique !

Remarque 1 La formule de Fraunhofer peut être retrouvée simplement dans le cas de la diffraction d'une onde plane à l'infini. Dans ce cas en effet, L'onde émise par un point P de Σ au point M présente un déphasage $\delta\varphi$ (voir Fig. 3) par rapport à celle émise par le point O égal à

$$\delta\varphi_P(M) = -\vec{k} \cdot \vec{OP}.$$

De même, l'onde reçue au point P est déphasée par rapport à celle reçue au point O d'une grandeur

$$\delta\varphi_{0,S}(P) = \vec{k}_0 \cdot \vec{OP}.$$

On obtient alors directement

$$s(M) \propto \int_{\Sigma} t(P) e^{i[\delta\varphi(P) + \delta\varphi_0(P)]} d\Sigma = \int_{\Sigma} t(P) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}_0) \cdot \vec{OP}} d\Sigma.$$

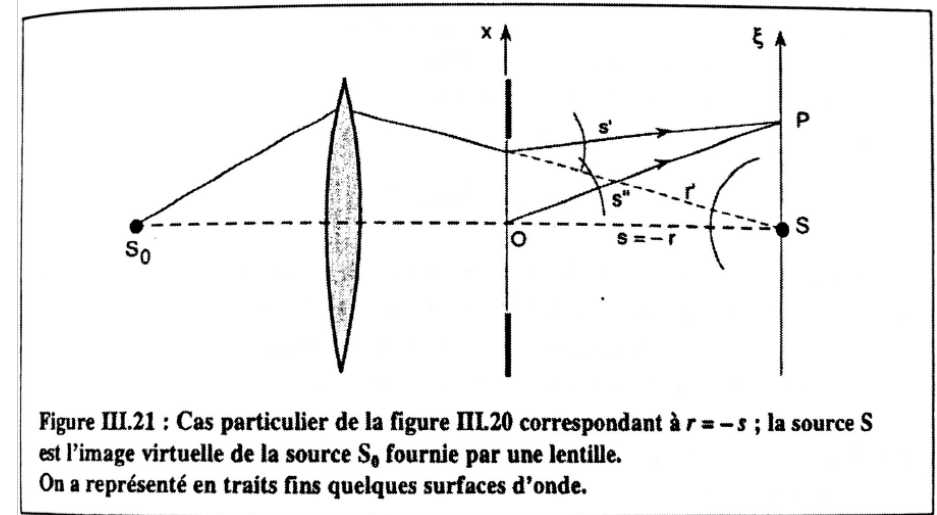


FIGURE 1.3 – Troisième cas pratique d'une diffraction de Fraunhofer : diffraction au voisinage de la l'image géométrique de la source. Figure prise du *Sextant Optique Expérimentale*, p 139. (ici $d=s$ et $D=r$ avec les notations de Sextant)

Remarque 2 Base de l'optique de Fourier [Cf. TD Diffraction (2)].

On a une relation de transformée de Fourier entre $t(x, y)$ et le profil d'intensité diffracté dans le cadre de la diffraction de Fraunhofer. On appelle *plan de Fourier* le plan où l'on observe cette figure de diffraction.

Remarque 3 On peut en fait montrer que l'on est dans le cadre de la diffraction de Fraunhofer quand la taille de la tache de diffraction est grande devant la taille de l'image géométrique (*i.e.* sans diffraction). Si la tâche de diffraction est de l'ordre de la taille de l'image géométrique, elle doit être décrite par la diffraction de Fresnel. Voir *Sextant* p.140.

4. Diffraction par une fente rectangulaire

Dans le plan focal focal de la lentille, éclairée par une onde plane de vecteur d'onde

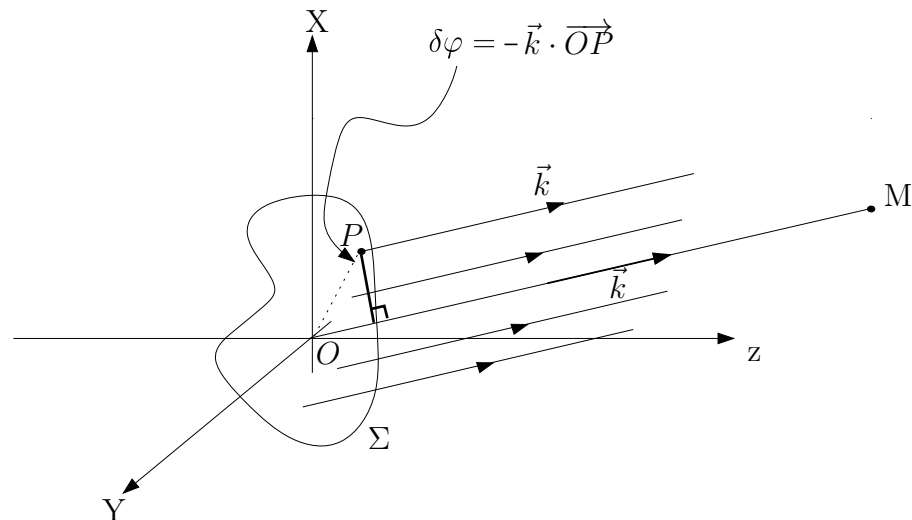


FIGURE 1.4 – Calcul de l'amplitude de la vibration lumineuse dans l'approximation de Fraunhofer. $\delta\varphi$ est le déphasage de l'onde émise en P par rapport à l'onde émise en O.

$$\vec{k}_0 = k \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ en } M = \begin{pmatrix} X = f\alpha \\ Y = f\beta \\ D \end{pmatrix}, \text{ on a}$$

$$\begin{aligned} s(M) &= \tilde{s}_0 \int_{-b/2}^{+b/2} dy \int_{-a/2}^{+a/2} dx \frac{1}{ab} e^{-ik[(\alpha-\alpha_0)x + (\beta-\beta_0)y]} \\ &= \tilde{s}_0 \frac{1}{ab} \left[-\frac{1}{ik(\alpha-\alpha_0)} \left(-2i \sin \frac{ka(\alpha-\alpha_0)}{2} \right) \right] \left[-\frac{1}{ik(\beta-\beta_0)} \left(-2i \sin \frac{kb(\beta-\beta_0)}{2} \right) \right] \\ &= \tilde{s}_0 \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi a(X-X_0)}{\lambda f} \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi b(Y-Y_0)}{\lambda f} \right), \end{aligned}$$

où l'on pose $X_0 = f\alpha_0$ et $Y_0 = f\beta_0$. D'où le profil d'intensité, en notant $I_0 = |\tilde{s}_0|^2$,

$$I(X, Y) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi a(X-X_0)}{\lambda f} \right) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi b(Y-Y_0)}{\lambda f} \right).$$

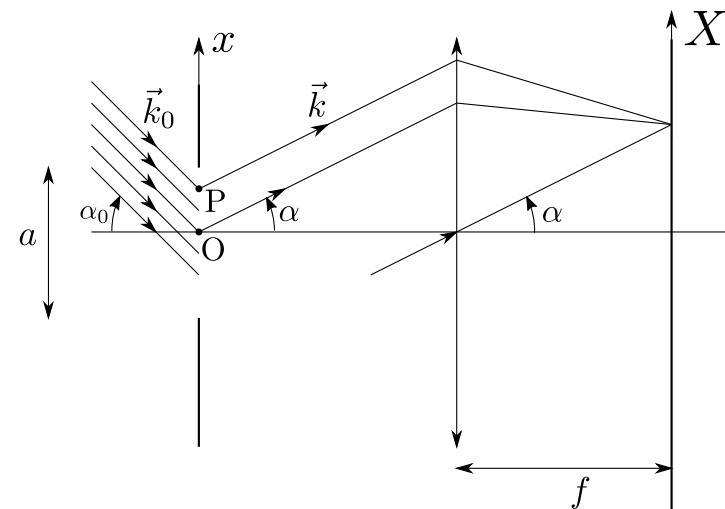


FIGURE 1.5 – Diffraction par une fente rectangulaire.

remarque : En toute rigueur, il faudrait ici écrire $I_{max} = |\tilde{s}_0|^2 = \frac{|s_0|^2}{D^2} * K$, où K est le coefficient d'obliquité. Mais comme noté précédemment, on néglige la dépendance en $1/D$.

Pour une fente infiniment fine $b \rightarrow 0$, $I \rightarrow I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi a X}{\lambda f} \right)$, de largeur $\frac{2\lambda f}{a}$ (première annulation en $\frac{\lambda f}{a}$) : la figure de diffraction est **perpendiculaire** à la fente diffractante.

5. Un trou de rayon a est compris entre une fente carrée de côté $2a$ et une autre de côté $\sqrt{2}a$. Les largeurs des taches de diffraction de ces carrés sont $\frac{\lambda f}{a}$ et $\frac{\sqrt{2}\lambda f}{a}$, respectivement.

La largeur angulaire θ du rayon de la tache de diffraction du trou de rayon a vérifie alors

$$\frac{\lambda}{a} < \theta < \frac{\sqrt{2}\lambda}{a}.$$

Donc $\theta \approx 1,22 \frac{\lambda}{a} \pm 0,22 \frac{\lambda}{a}$. Le calcul complet fait apparaître des fonctions de Bessel et permet de trouver

$$\theta \approx 1,22 \frac{\lambda}{a}.$$

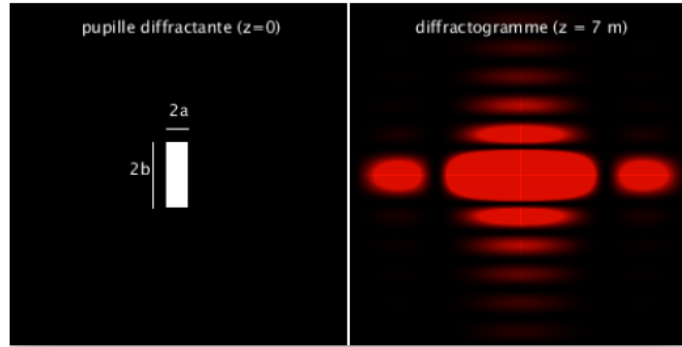


FIGURE 1.6 – Diffraction par une fente rectangulaire $a \times b$. Image prise du cours femto-physique.fr/optique, de Jimmy Roussel, Optique ondulatoire. On pourra jouer avec la simulation : <https://femto-physique.fr/simulations/diffraction-rectangle.php>

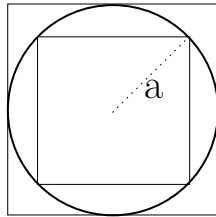


FIGURE 1.7 – Un trou de rayon a est compris entre deux carrés de cotés $2a$ et $\sqrt{2}a$.

6. Théorème de Babinet.

Soit deux écrans Σ_1 et Σ_2 de transmittance $t_1(x, y)$ et $t_2(x, y)$ complémentaires ($\forall x, y \quad t_1(x, y) + t_2(x, y) = 1$).

En dehors de l'image géométrique, les figures de diffraction données par les deux écrans sont identiques.

DÉMONSTRATION : La vibration en M pour l'écran Σ_1 s'écrit

$$s_{\Sigma_1}(M) = A \int_{\Sigma_1} \frac{e^{ikPM}}{PM} t_1(x, y) dx dy,$$

et de même pour l'écran Σ_2

$$s_{\Sigma_2}(M) = A \int_{\Sigma_2} \frac{e^{ikPM}}{PM} t_2(x, y) dx dy.$$

En l'absence d'objet diffractant Σ_i , au point M , on ne voit que l'image géométrique de la source. En dehors de l'image géométrique, il n'y a donc pas d'éclairement en l'absence d'objet diffractant :

$$\text{Hors de l'image géométrique : } I = s \cdot s^* = 0 \longrightarrow s = 0.$$

Or, cette situation correspond à $t(x, y) = 1$ en tout point. Comme $t_1 + t_2 = 1$ en tout point, en dehors de l'image géométrique, on en déduit

$$s = A \int \frac{e^{ikPM}}{PM} t_1(x, y) dx dy + A \int \frac{e^{ikPM}}{PM} t_2(x, y) dx dy = s_{\Sigma_1}(M) + s_{\Sigma_2}(M) = 0.$$

Donc $s_{\Sigma_1}(M) = -s_{\Sigma_2}(M)$, soit

$$I_{\Sigma_1}(M) = I_{\Sigma_2}(M) \quad \text{pour } M \text{ en dehors de l'image géométrique}.$$

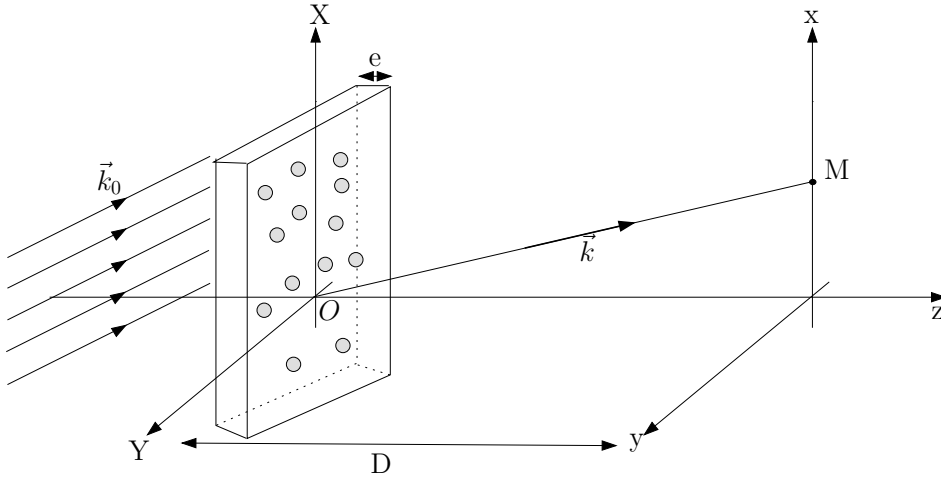


FIGURE 2.1 – Diffraction par un ensemble de structures.

EXERCICE II DIFFRACTION PAR UN ENSEMBLE DE STRUCTURES

1. Cas général

1.1 On applique le principe de Huygens-Fresnel dans l'approximation de Fraunhofer

$$s(M) = A s_0 \int_{\Sigma} t(P) \frac{e^{-i(\vec{k}-\vec{k}_0) \cdot \vec{OP}}}{PM} dX dY.$$

À chaque élément diffractant $\{j\}$, on associe une transmittance $t_j(P)$ et une position O_j . On a alors

$$t(P) = \sum_j t_j(P).$$

1.2 On note $\vec{R}_j = \vec{OO_j}$, et on décompose

$$\vec{OP} = \vec{OO_j} + \vec{O_jP} = \vec{R}_j + \vec{O_jP}.$$

Si l'on note $\Delta\vec{k} = \vec{k} - \vec{k}_0$, on obtient

$$s(M) = \frac{A s_0}{D} \sum_j \left(e^{-i\Delta\vec{k} \cdot \vec{R}_j} \underbrace{\int_{\Sigma} t_j(P) e^{-i\Delta\vec{k} \cdot \vec{O_jP}} d\Sigma}_{\text{indépendant de } j} \right)$$

$$s(M) = s'_0 \underbrace{\left(\sum_j e^{-i\Delta\vec{k} \cdot \vec{R}_j} \right)}_{\text{Facteur de structure}} \underbrace{\int_{\text{1 structure}} t_0(\delta\vec{r}) e^{-i\Delta\vec{k} \cdot \delta\vec{r}} d\Sigma}_{\text{Facteur de forme}}.$$

La figure de diffraction obtenue est le produit d'un facteur de structure, qui ne dépend que de la répartition des structures sur l'écran diffractant, et d'un facteur de forme, qui ne dépend que de la forme d'une structure unique.

2. Structures réparties de façon aléatoire

On a

$$I \propto |s(M)|^2 = |s'_0|^2 \underbrace{\left| \sum_j e^{i(\vec{k}_0-\vec{k}) \cdot \vec{R}_j} \right|^2}_{\text{= terme d'interférences}} \underbrace{\left| \int_{\Sigma} t_0(\delta\vec{r}) e^{i(\vec{k}_0-\vec{k}) \cdot \delta\vec{r}} d\Sigma \right|^2}_{\text{= } \mathcal{F}(M) \text{ diffraction d'un seul motif}}.$$

Soit $S = \left| \sum_j e^{i(\vec{k}_0-\vec{k}) \cdot \vec{R}_j} \right|^2$ le facteur de structure. On a

$$S = \left| \sum_j e^{i(\vec{k}_0-\vec{k}) \cdot \vec{R}_j} \right|^2 = \sum_{j,l} e^{i(\vec{k}_0-\vec{k}) \cdot (\vec{R}_j-\vec{R}_l)}, \quad (\text{II.1})$$

$$= \sum_{j=l} 1 + \sum_{j \neq l} e^{i(\vec{k}_0-\vec{k}) \cdot (\vec{R}_j-\vec{R}_l)},$$

$$= N + \underbrace{\sum_{j \neq l} e^{i\Delta\vec{k} \cdot (\vec{R}_j-\vec{R}_l)}}_{\approx 0 \text{ si } N \text{ grand}}. \quad (\text{II.2})$$

Le deuxième terme dans l'équation précédente s'annule car les structures sont réparties de façon aléatoire sur l'écran diffractant. On a alors

$$I(M) = N \mathcal{F}(M).$$

Si on a N motifs répartis aléatoirement, on obtient la figure de diffraction d'un seul motif mais N fois plus intense qu'avec un motif unique.

Exemple Cette situation est particulièrement utile quand l'on cherche, par exemple, à connaître le rayon moyen des grains d'une poudre. En répartissant de façon aléatoire les grains sur une plaque, la figure de diffraction obtenue pour l'ensemble des grains est la figure de diffraction d'un grain de *diamètre moyen*. En montage, on peut par exemple mesurer le diamètre de spores de lycopode par cette méthode.

Notons que si l'on focalise le faisceau de lumière sur tous les grains, on ne gagne, ni ne perd, en intensité par rapport à la situation où l'on éclairerait un seul grain, à intensité lumineuse totale constante (donc en concentrant toute la lumière incidente sur un grain). En effet, l'intensité éclairant le grain unique est N fois plus grande que l'intensité éclairant un grain parmi les N répartis de façon aléatoire. Mais comme la figure de diffraction dans ce dernier cas est N fois plus intense que dans le premier cas, les deux figures de diffraction obtenues sont également intenses.

Remarque La situation est différente au centre de la figure de diffraction, *i.e.* pour $\vec{k} = \vec{k}_0$. Dans ce cas en effet, tous les termes de la somme dans l'équation (II.1) sont égaux à 1, et $S = N^2$. Autrement dit, au centre de la figure, l'intensité est proportionnelle à N^2 .

3. Structures périodiques : réseau

Si les motifs sont répartis de manière ordonnée, une relation de phase déterminée est établie entre chacun d'eux et le deuxième terme de la somme (II.2) est non nul.

3.1 On envisage le cas simple du réseau plan. Les positions \vec{R}_j sont alors données par $\vec{R}_j = j\vec{a}$ où \vec{a} est le vecteur caractéristique du réseau. Le facteur de structure s'exprime dès lors

$$S = \left| \sum_j e^{i j \vec{a} \cdot (\vec{k}_0 - \vec{k})} \right|^2 = \left| \sum_j e^{i j k a (\sin \theta_0 - \sin \theta)} \right|^2 = \begin{cases} N^2, & \text{si } k a (\sin \theta_0 - \sin \theta) \equiv 0 [2\pi], \\ \approx 0 & \text{sinon (pour } N \text{ grand).} \end{cases}$$

On retrouve alors la formule dite des réseaux qui stipule que les interférences entre les ondes émises par les différentes fentes du réseaux sont constructives dans la direction θ quand θ prend l'une des valeurs θ_n définies par

$$\sin \theta_n = \sin \theta_0 + n \frac{\lambda}{a}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Le nombre n est appelé *ordre de diffraction*.

3.2 L'expression exacte de S se calcule facilement en notant que

$$\sum_{j=1}^N e^{-i(\sin \theta - \sin \theta_0) \frac{2\pi}{\lambda} a j} = \frac{1 - e^{i\varphi N}}{1 - e^{i\varphi}} e^{i\varphi} = e^{i\frac{\varphi(N-1)}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\varphi N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)},$$

où $\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda} (\sin \theta_0 - \sin \theta)$. Ce déphasage correspond au déphasage entre deux rayons issus de deux fentes successives du réseau, *i.e.* à la différence de marche $BC + CD$ sur la figure 2.2

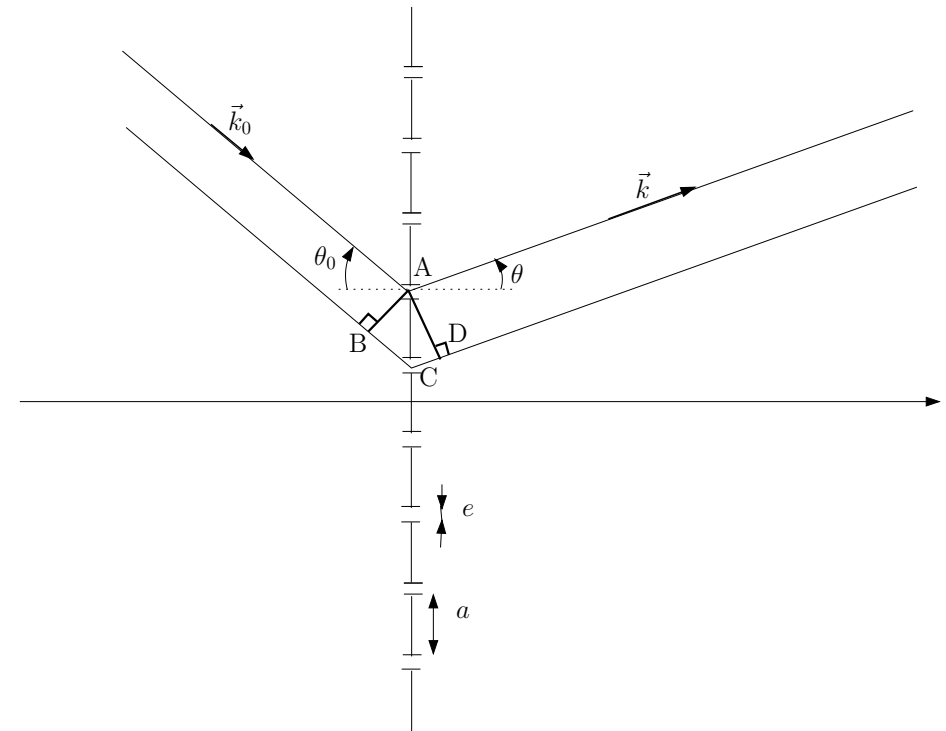


FIGURE 2.2 – Diffraction par un réseau plan.

On a finalement

$$S = N^2 \underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{\varphi N}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right)^2}_{\max=1},$$

et

$$I_{\max} \propto N^2,$$

et non N comme dans le cas d'une répartition aléatoire.

Le motif élémentaire est ici une fente, le facteur de forme est donc

$$\mathcal{F}(\theta) = \mathcal{F}_0 \operatorname{sinc}^2 \left(k (\sin \theta - \sin \theta_0) \frac{e}{2} \right).$$

D'où l'expression complète

$$I = N^2 I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\varphi \frac{e}{2a} \right) \left(\frac{\sin\left(\frac{\varphi N}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right)^2$$

Le facteur de forme s'annule quand $\varphi \frac{e}{2a} = p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$ soit $\varphi = 2p\pi \frac{a}{e}$.

Toutes les longueurs caractéristiques du réseau apparaissent sur la figure :

	Espace réel	Espace réciproque
$L = Na$	dimension la plus grande	dimension de la plus petite petites annulations de la fonction des réseaux BF spatiales
a	dimension intermédiaire distance entre les fentes	directions de sélection ordres du réseau HF spatiales
e	plus petite dimension taille d'une fente	modulation globale THF spatiales

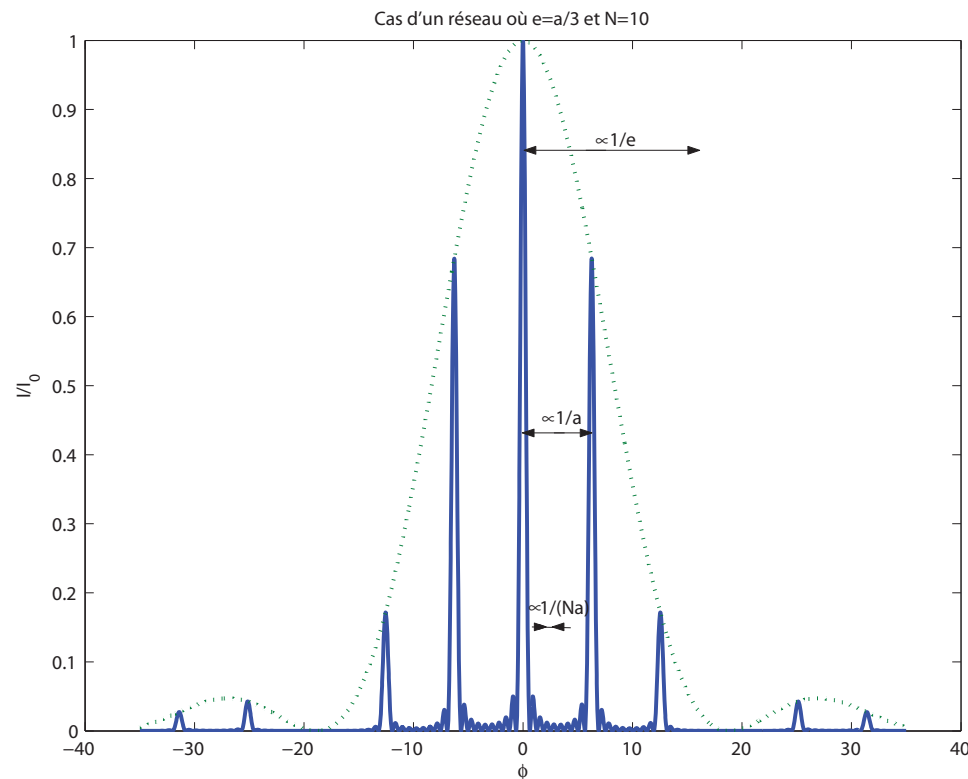


FIGURE 2.3 – Diffraction par un réseau plan, dans le cas où $e = a/3$ et $N = 10$. Les trois dimensions caractéristiques de l'objet diffractant apparaissent sur la figure : e , a et Na . Elles correspondent, respectivement, à des structures sur la figure de diffraction, tracée en fonction de φ , de tailles de l'ordre de a/e , 1 et $1/N$.

Pouvoir dispersif Si l'on note $\theta_m(\lambda)$ la direction du maximum de diffraction d'ordre m , pour la longueur d'onde λ , le pouvoir dispersif du réseau, à l'ordre m , autour de la longueur d'onde λ_0 , est défini comme

$$\gamma_d(\lambda_0, m) = \left. \frac{d\theta_m}{d\lambda} \right|_{\lambda_0}.$$

À partir de la formule des réseaux, on obtient

$$\cos \theta_m \gamma_d(\lambda_0, m) = \frac{m}{a}$$

soit

$$\gamma_d(\lambda_0, m) = \frac{m}{a \cos \theta_m(\lambda_0)}.$$

Si l'on considère des petits angles, on a finalement ($\cos \theta_m \approx 1$)

$$\gamma_d(m) = \frac{m}{a}.$$

On remarque en particulier qu'il n'y a pas de dispersion dans l'ordre 0, et que le pouvoir dispersif est d'autant plus important que l'ordre est important et que a est petit.

On remarque toutefois, d'après l'expression trouvée pour I , que plus l'ordre m est élevé, plus l'intensité du maximum de diffraction est faible, à cause du facteur de forme \mathcal{F} . **En spectroscopie**, il faut donc faire un compromis entre pouvoir de dispersion et intensité. On utilise en pratique des réseaux dit *blazés* qui permettent de déplacer le maximum d'intensité (maximum de \mathcal{F}) sur un ordre de diffraction non nul ($m = 1$ en général). Pensez à les utiliser dans vos montages !

Pouvoir de résolution Le pouvoir de résolution autour d'une longueur d'onde λ est défini comme le rapport de λ sur la plus petite variation $\delta\lambda$ de longueur d'onde que l'on peut résoudre avec le réseau, ou tout autre spectromètre étudié :

$$\gamma_r = \frac{\lambda}{\delta\lambda}.$$

On considère, par exemple, que deux pics de diffraction, correspondant à deux longueurs d'onde distinctes, sont distinguables quand le maximum de l'un coïncide avec la première annulation de l'autre. Autour de $\varphi = 0$, celle-ci a lieu quand

$$\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) = 0 \quad \text{soit} \quad \delta\varphi = \frac{2\pi}{N}.$$

Cette condition est en fait la même pour tous les pics de diffraction : la première annulation autour du maximum $\varphi = \varphi_m$ est en $\varphi = \varphi_m \pm \delta\varphi$.

Pour le pic de diffraction d'ordre m , i.e. autour de $\varphi_m = 2\pi m$, le pouvoir de résolution est donc

$$\gamma_r(m) = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\varphi}{\delta\varphi} = mN.$$

Le pouvoir de résolution d'un réseau est d'autant plus important que l'ordre de diffraction est élevé, ou que le nombre de figures diffractantes éclairées est important.

Réseau et Fabry-Pérot Le réseau et le Fabry-Pérot sont tous deux des interféromètres à ondes multiples. Leurs propriétés sont en fait très similaires. D'après les résultats précédents, pour le réseau, la largeur d'un pic de diffraction correspond à

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{N} = \frac{\Delta\varphi}{N},$$

où $\Delta\varphi = 2\pi$ est l'écart entre deux maxima principaux de diffraction. Or, pour le Fabry-Pérot, le rapport de la distance entre deux pics d'interférence ($\Delta\varphi$) et la largeur d'un pic d'interférence ($\delta\varphi$) est donné par la *finesse* du Fabry-Pérot : $\mathcal{F} = \Delta\varphi/\delta\varphi$. Le réseau à N fentes est donc l'équivalent d'un interféromètre de Fabry-Pérot de finesse $\mathcal{F} = N$.

On constate également cette analogie en notant que le pouvoir de résolution du réseau est donné par

$$\gamma_r = mN,$$

où m est l'ordre du pic de diffraction considéré. Pour le Fabry-Pérot, le pouvoir de résolution est donné par

$$\gamma_d = p\mathcal{F} = Q,$$

où p est l'ordre d'interférence et Q le facteur de qualité de l'interféromètre. On retrouve donc et l'on précise l'analogie précédente :

Un réseau à N fentes, à l'ordre m de diffraction, est l'équivalent d'un Fabry-Pérot de finesse $\mathcal{F} = N$, utilisé dans l'ordre d'interférence $p = m$, i.e. de facteur de qualité $Q = mN$.

Remarque : De façon similaire, on peut appliquer ces résultats au cas des fentes de Young ($N=2$). Voir par exemple Sextant, p115 et suivante (résumé en Fig. 2.4).

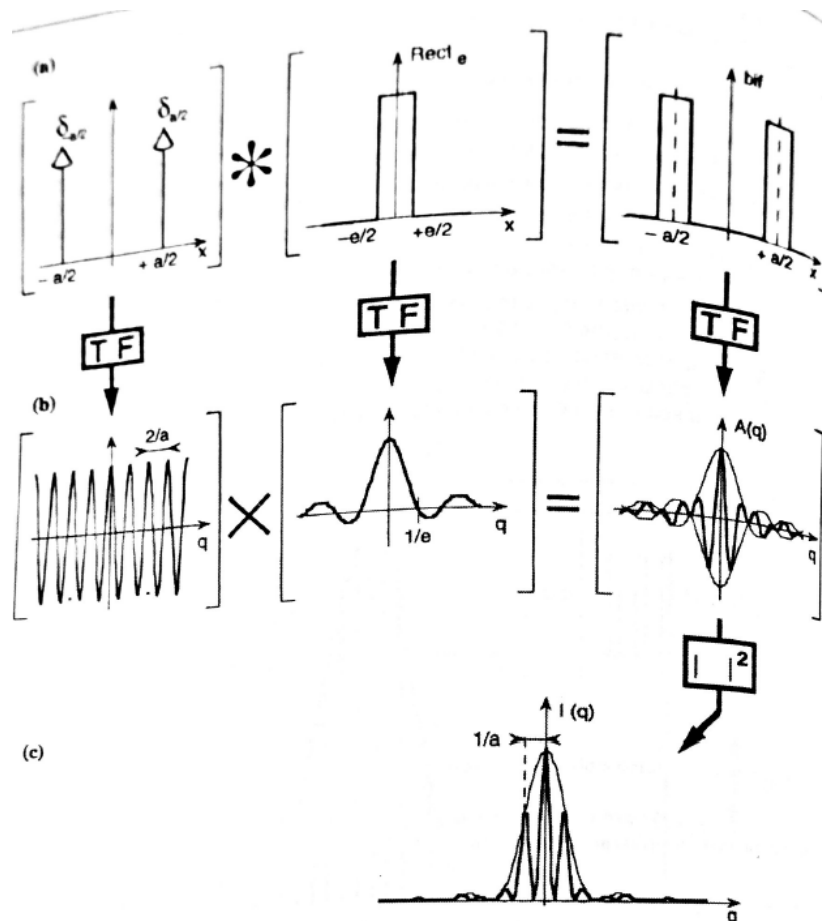


Figure III.9 : Diffraction par une bifente ; du motif élémentaire à la figure de diffraction (cf. texte).

- (a) La fonction de transparence de la bifente est le produit de convolution (.) de la fonction de transparence d'une fente unique par deux diracs.
(b) Transformée de Fourier [TF] de chaque terme ; l'amplitude diffractée $A(q)$ est proportionnelle au produit (\times) du terme d'interférences, $2\cos(\pi qa)$, et du terme de diffraction par une seule fente, $e \operatorname{sinc}(\pi qe)$.
(c) Passage de l'amplitude A à l'intensité $I = |A|^2$.

FIGURE 2.4 – Diffraction par une bifente. Voir Sextant p115.

EXERCICE III DIFFRACTION ET LENTILLES

1. Lentille de Fresnel

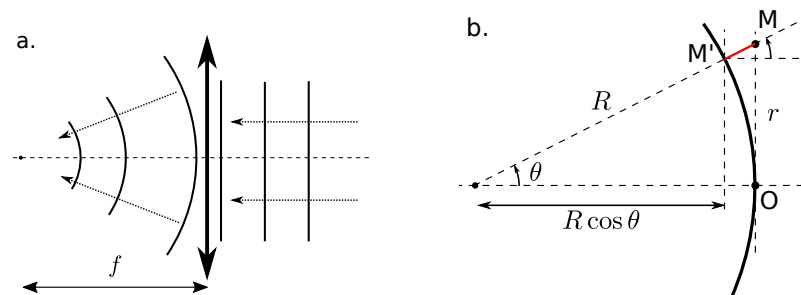


FIGURE 3.1 – a. Transformation d'une onde plane en onde sphérique par une lentille mince de focale f . En amont de la lentille, les surfaces d'onde sont des plans. Après la lentille, les surfaces d'onde sont ces sphères centrées à f de la lentille. b. Estimation du déphasage entre les deux points O et M pour une onde sphérique de rayon de courbure R . Le point M est à une distance r de l'axe optique.

- 1.1 Il y a plusieurs façons de montrer l'expression demandée pour la fonction de transmission t_f d'une lentille mince. Une façon simple est de considérer son action sur une onde plane (voir figure I.a). En sortie de la lentille, l'onde est une onde sphérique qui converge au foyer objet de la lentille, situé à une distance f , la focale, de la lentille. La fonction de transmission de la lentille est donc la fonction qui transforme un plan d'onde en une onde sphérique de rayon de courbure f .

Il suffit alors, pour calculer $t_f(r)$, d'estimer le déphasage entre un point M situé à une distance r de l'axe optique et le point O, intersection de la surface d'onde sphérique de rayon $R = f$ et de l'axe optique (voir figure I.b). Avant la lentille, l'onde est une onde plane et les points O et M sont en phase. Après la lentille, ce sont les points O et M' qui sont en phase, le point M étant en avance sur O et M'. Le déphasage $\delta\varphi(r)$ recherché correspond donc au chemin optique MM'. Il vaut

$$\delta\varphi(r) = -kMM' = -kR \frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta} \approx -kR \frac{\theta^2}{2} \approx -\frac{kr^2}{2R},$$

$$\text{et donc } t_f(r) = \exp[i\delta\varphi(r)] = \exp\left(-i\frac{kr^2}{2f}\right). \quad (\text{III.1})$$

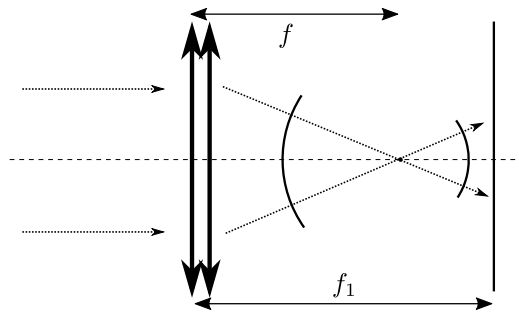


FIGURE 3.2 – Action d'un doublet de lentilles de focales f_1 et f_2 sur une onde plane. L'écran d'observation est à f_1 du doublet.

1.2 On reprend maintenant l'équation (I.11). La fonction de transmission à considérer est le produit de la fonction de transmission t de l'objet diffractant et de celle t_f de la lentille. Autrement dit, à une distance D de l'association objet-lentille, l'onde s'exprime comme

$$s(M) = As_0 \frac{e^{i\varphi_0}}{dD} \int_{\Sigma} t(x, y) e^{-ik \frac{r^2}{2f}} e^{-ik[(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y] + ik \frac{r^2}{2} (\frac{1}{d} + \frac{1}{D})} dx dy.$$

Le résultat est alors immédiat : pour observer la figure de diffraction de Fraunhofer de t sur l'écran, il faut que

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{D} - \frac{1}{f} = 0. \quad (\text{III.2})$$

Cette équation n'est rien d'autre que la relation de conjugaison entre la source, située à d de la lentille, et l'écran, situé à D de la lentille. On retrouve bien le fait que la diffraction de Fraunhofer s'obtient dans le cadre de la formation des images.

On retrouve notamment (évidemment) que si la source est à l'infini, alors l'écran doit être placé dans le plan focal image de la lentille ($D = f$).

2. Doublet de lentilles

2.1 On considère ici un doublet formé de deux lentilles minces, de focales f_1 et f_2 . On sait que ce doublet se comporte comme une lentille mince effective, de focale $f = (1/f_1 + 1/f_2)^{-1}$. En sortie du doublet, on obtient donc une onde sphérique

qui converge au point de l'axe optique situé à f du doublet. Sur l'écran, à f_1 du doublet, on observe une onde sphérique de rayon de courbure $f_1 - f$, soit

$$s(r) = s'_0 \exp \left[i \frac{kr^2}{2(f_1 - f)} \right] = s'_0 \exp \left(i \frac{kr^2}{2} \frac{f_1 + f_2}{f_1^2} \right). \quad (\text{III.3})$$

2.2 D'après les résultats de la partie précédente, puisque l'écran d'observation est dans le plan focal de la lentille de focale f_1 , on sait que l'on y observe la figure de diffraction de Fraunhofer de l'objet diffractant qu'est la lentille de focale f_2 . On peut ainsi écrire

$$s(r) = As_0 \frac{e^{i\varphi_0}}{dD} \int_{\Sigma} e^{-ik \frac{r^2}{2f_2}} e^{-ik(\alpha x + \beta y)} dx dy. \quad (\text{III.4})$$

Les coefficients α_0 et β_0 sont nuls car on considère une onde plane sur l'axe optique.

L'intégrale dans l'équation (III.4) est identique à celle donnée dans l'énoncé. Il s'agit en fait de la transformée de Fourier de la fonction $t_{f_2}(x, y)$. En notant que $\alpha = X/f_1$ et $\beta = Y/f_1$, et $r^2 = X^2 + Y^2$, on obtient alors directement

$$s(r) \propto e^{i\varphi_0} \exp \left(i \frac{kr^2}{2} \frac{f_2}{f_1^2} \right). \quad (\text{III.5})$$

Si les expressions (III.3) et (III.5) semblent différentes, c'est parce qu'on n'a pas écrit explicitement la dépendance en r de φ_0 dans (III.5). En reprenant l'expression donnée en (I.12), avec $D = f_1$, on retrouve alors bien

$$s(r) \propto \exp \left(i \frac{kr^2}{2f_1} \right) \exp \left(i \frac{kr^2}{2} \frac{f_2}{f_1^2} \right),$$

identique au résultat (III.3).

3. Position de l'objet diffractant

3.1 Pour obtenir l'amplitude de l'onde dans le plan de la lentille, on peut utiliser les résultats obtenus au premier exercice. Il faut en fait supposer que la distance δ est grande devant l'étendue de l'objet diffractant ($x \ll \delta$) et grande devant l'étendue de l'onde au niveau de la lentille ($u \ll \delta$), voir figure 3. Cette dernière hypothèse suppose en fait que l'objet diffractant ne « diffracte pas trop », ou autrement dit,

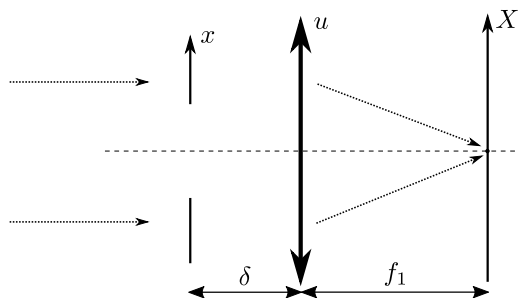


FIGURE 3.3 – L'objet diffractant à une distance δ de la lentille d'observation. L'écran est placé dans le plan focal image.

que l'étendue de la tache de diffraction au niveau de la lentille reste faible devant δ . Cela suppose en fait que la taille a des motifs élémentaires de l'objet diffractant soit grande devant λ . L'étendue de la tache de diffraction au niveau de la lentille est en effet de l'ordre de $\lambda\delta/a \ll \delta$ si $\lambda \ll a$.

L'amplitude de l'onde sur la lentille s'écrit alors

$$s(u) = \tilde{s}_0 e^{i\varphi_0} \int_{\Sigma} t(x) e^{ik \frac{(x-u)^2}{2\delta}} dx.$$

Cette expression est la même que (I.11) à ceci près qu'on n'a pas développé ici la parenthèse $(x - u)^2$, et on a pris $\alpha_0 = 0$. On peut ainsi bien écrire que

$$s(u) = (t \otimes g)(u),$$

c'est-à-dire la convolution de $t(x)$ et de la fonction $g(x)$ donnée dans l'énoncé.

3.2 Puisque l'on place l'écran d'observation dans le plan focal de la lentille d'observation, on est bien dans le cadre de la diffraction de Fraunhofer. On se retrouve dans le contexte de la première question, avec un objet diffractant effectif dont la fonction de transparence est $t_e(u) = s(u)$, obtenu ci-dessus. Puisque, dans ce cas, il y a un lien de transformée de Fourier entre l'onde diffractée et la fonction de transparence, l'onde sur l'écran est

$$s(X) \propto \text{TF}[t \otimes g](X) = \text{TF}[t](X) \times \text{TF}[g](X) \propto \text{TF}[t](X) \exp\left(-i \frac{k\delta X^2}{2f^2}\right).$$

On voit ainsi que le déplacement δ ne se manifeste que par un terme de phase, correspondant à une onde sphérique de rayon de courbure f^2/δ . Si on ne regarde que l'intensité lumineuse, ce terme de phase ne joue aucun rôle : on retrouve le fait que la position de l'objet diffractant par rapport à la lentille ne modifie pas la figure de diffraction.

Il faut toutefois noter que cela n'est vrai *que* dans le plan focal de la lentille d'observation. Si l'on s'intéresse à la distribution d'intensité de part et d'autre de ce plan, la courbure de phase supplémentaire due à δ n'est plus anodine. Elle peut en effet s'interpréter comme une divergence supplémentaire du front d'onde. Selon la valeur de δ , le front d'onde est donc plus ou moins divergent au niveau du plan focal, et la distribution d'intensité plus ou moins étalée juste avant ou juste après ce plan focal.

Le rôle particulier joué par le plan focal de la lentille d'observation peut se comprendre ainsi : *quand on place l'écran dans le plan focal de la lentille* placée derrière l'objet diffractant, la distribution d'intensité sur l'écran ne dépend *que* de la répartition d'énergie entre les vecteurs d'onde de différentes inclinaisons, *i.e.* entre différentes fréquences spatiales. En particulier elle ne dépend pas de l'endroit où les rayons interceptent la lentille. Tous les rayons de même inclinaison sont en effet focalisés au même point du plan focal image, quel que soit leur écart à l'axe optique. Comme la répartition entre les différentes inclinaisons, *i.e.* la façon dont l'objet diffracte la lumière incidente, ne dépend pas de la position de l'objet¹, la figure de diffraction observée sur l'écran ne dépend pas non plus de δ .

Une façon d'illustrer ce phénomène est de considérer la trajectoire, dans le cadre de l'optique géométrique, d'un faisceau collimaté traversant deux lentilles. La première (de focale f_2) joue le rôle de l'objet diffractant, la seconde (de focale f_1) de la lentille d'observation. On constate sur la figure 3b que, quelle que soit la position de la première lentille, l'étendue du faisceau dans le plan focal de la seconde lentille est toujours la même. C'est dû au fait que cette étendue est la traduction directe de l'extension *angulaire*, et non spatiale, des rayons incidents sur la lentille d'observation. Cette extension est toujours la même, quelle que soit la position de la première lentille.

Si l'on observe dans un autre plan que le plan focal, en revanche, non seulement l'inclinaison du rayon mais aussi l'endroit où il intercepte la lentille d'observation déterminent son point d'incidence sur l'écran. Déplacer la première lentille

1. Pour peu que la distance à la source soit maintenue constante ou que, cas plus simple, la source soit à l'infini.

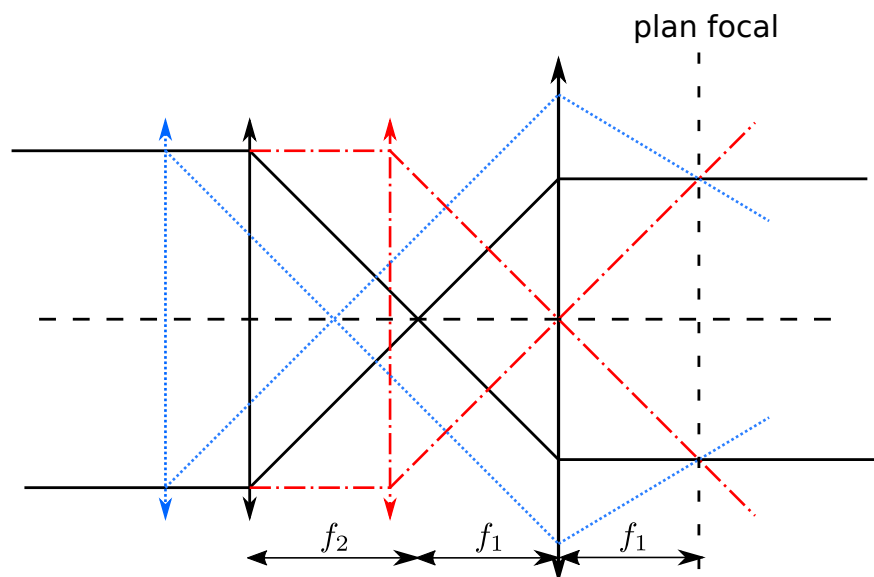


FIGURE 3.4 – Trajectoire d'un faisceau collimaté à travers deux lentilles. Quelle que soit la position de la lentille de focale f_2 , l'étendue du faisceau dans le plan focal de la lentille de focale f_1 est toujours la même.

vient précisément modifier le lieu d'intersection avec la lentille et donc, ici, la taille de la tache lumineuse sur l'écran.

Remarque Si l'on reprend l'expression complète de l'amplitude lumineuse sur l'écran, et en n'omettant pas les phases dépendant du point d'observation, on a finalement

$$s(X, Y) = s_0 e^{ik\left(\frac{x^2+y^2}{2f} - \delta \frac{x^2+y^2}{2f^2}\right)} \int_{\Sigma} t(x, y) e^{-ik[(\alpha-\alpha_0)x + (\beta-\beta_0)y]} dx dy.$$

On constate ainsi qu'il existe une position particulière de l'objet diffractant où $s(X, Y)$ est exactement (à s_0 près), la transformée de Fourier de la fonction de transparence t : $\delta = f$. Autrement dit, quand l'on éclaire l'objet diffractant par une onde plane, il faut placer cet objet dans le plan focal objet de la lentille et l'écran dans le plan focal image pour que l'amplitude lumineuse, sur l'écran, soit la transformée de Fourier complexe de t .

En général, et toujours dans le cadre d'expériences pour l'agrégation, on n'a pas de précautions de ce type à prendre en compte dans l'alignement du dispositif optique, puisque l'on ne s'intéresse qu'à l'intensité lumineuse sur l'écran. Ce n'est plus vrai quand la forme du front d'onde, elle-même, importe pour les résultats de l'expérience.

TD d'Optique 3

Diffraction (2) : Applications

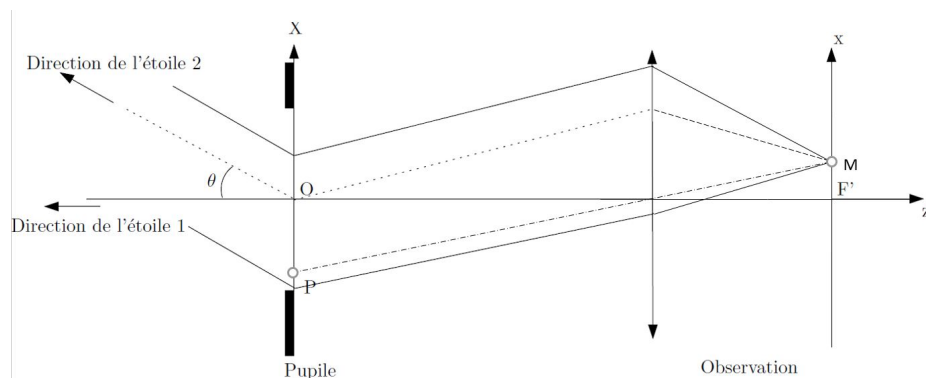
18/09/2024



EXERCICE I RÔLE DE LA DIFFRACTION DANS LA FORMATION DES IMAGES – APODISATION

Le but de cet exercice est de mettre en évidence l'effet de la diffraction dans la formation des images et de voir comment il peut être nécessaire de choisir un diaphragme adapté à chaque cas particulier. Dans un souci de simplification, nous raisonnerons sur des fentes infiniment longues, tout en sachant que le phénomène reste qualitativement le même dans le cas des instruments d'optique réels à symétrie cylindrique.

On schématise un télescope par une lentille mince de distance focale f' précédée d'une pupille diffractante rectangulaire de largeur a , infinie dans la direction Y , dont la transparence complexe est notée $t(X)$. On observe deux étoiles assimilables à deux sources ponctuelles monochromatiques à l'infini. L'une d'elle est sur l'axe optique, l'autre se trouve dans une direction repérée par l'angle θ . Les intensités des étoiles ne sont pas nécessairement identiques.



1. Déterminer l'éclairement dans le plan focal de la lentille dû à chaque étoile, puis en déduire l'éclairement total. Quelle est l'influence de la largeur de la fente ?
2. Dans un premier cas, on considère que les deux étoiles ont la même intensité I_0 . Selon le critère de Rayleigh, la limite à partir de laquelle on peut distinguer deux taches de

diffraction différentes correspond au cas où le maximum de l'une est confondu avec la première annulation de l'autre. En utilisant ce critère, déterminer l'angle θ_l limite que permet de résoudre un tel télescope. Commentaires ?

3. On ajoute désormais à cette fente un filtre de transparence

$$t(X) = \cos\left(\frac{\pi X}{a}\right) \quad \text{pour } |X| \leq a/2.$$

Quels sont les avantages et inconvénients de cette pupille par rapport à la précédente ?

Pour mettre en évidence l'avantage d'un tel filtre, on considère le cas où l'intensité de la seconde étoile est beaucoup moins élevée que la première. Donner l'allure de l'éclairement total avec et sans filtre dans le cas où $\theta = \frac{5\lambda}{2a}$ et commenter les résultats obtenus.

EXERCICE II OPTIQUE DE FOURIER

1. Rappeler la relation qui relie, dans l'approximation de Fraunhofer, la fonction de transparence d'une structure diffractante et l'amplitude diffractée. Faire apparaître une relation de transformée de Fourier.
2. **Expérience d'Abbe**
On propose une expérience pour illustrer ce principe : on considère un réseau \mathcal{R} de période a , éclairé par une onde plane. On fait l'image de ce réseau à l'aide d'une lentille de focale f_1 . On note P_2 le plan image de \mathcal{R} par la lentille, et P_1 le plan focal de la lentille, dans lequel on observe la figure de diffraction «à l'infini» du réseau.
On utilise un objet Σ , placé dans le plan P_1 , dit plan de Fourier, pour modifier l'image du réseau obtenue dans le plan P_2 . Comment doit être constitué Σ pour obtenir un doublement du nombre de traits de l'image du réseau ?
3. Qu'est-ce que la strioscopie ? L'imagerie par contraste de phase ?

EXERCICE III DIFFRACTION DES RAYONS X PAR LES SOLIDES

Les atomes ou molécules d'un cristal sont ordonnés selon un arrangement régulier de motifs en 3 dimensions, formant ainsi un cas particulier de réseau.

1. Déterminer l'ordre de grandeur de la longueur d'onde nécessaire pour sonder un cristal solide, et en déduire les types de rayonnement utilisables pour observer une figure de diffraction de ces cristaux.

On considère par la suite la diffraction de rayons X, diffusés de façon élastique par les atomes du cristal.

2. Loi de Bragg

On suppose que les plans parallèles d'atomes présents dans le cristal agissent comme des miroirs semi-réfléchissants, chaque plan ne réfléchissant qu'une partie du rayonnement incident. Quelle est la condition, appelée Loi de Bragg, sur la distance d entre les plans, la longueur d'onde λ du rayonnement et son angle d'incidence θ sur les plans considérés pour observer une amplitude diffractée non nulle ?

3. Condition de Laue

La loi de Bragg est une condition claire et facile à utiliser, mais elle nécessite de faire l'hypothèse de réflexion de l'onde sur des plans réticulaires (c'est-à-dire de raisonner en terme d'optique géométrique) puis d'utiliser les interférences entre les ondes lumineuses (c'est-à-dire de raisonner en termes d'optique ondulatoire).

Pour réaliser une étude plus complète, on peut partir de l'équation générale donnant l'amplitude diffractée par l'échantillon en un point M , dans l'approximation de Fraunhofer. On note $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ les vecteurs élémentaires d'une maille du cristal, par combinaison desquels on peut générer tout le cristal.

Donner les conditions sur $\Delta\vec{k} = \vec{k} - \vec{k}_0$ pour que \vec{k} corresponde à la direction des pics d'interférence constructive de la figure de diffraction, \vec{k}_0 étant le vecteur d'onde incident.

Déterminer les vecteurs de base du réseau réciproque, c'est-à-dire les vecteurs sur lesquels on peut décomposer $\Delta\vec{k}$.

Retrouver la loi de Bragg.

Corrigé

Diffraction (2) : applications



EXERCICE I RÔLE DE LA DIFFRACTION DANS LA FORMATION DES IMAGES – APODISATION

1. Les étoiles sont à l'infini, elles engendrent donc deux ondes planes au niveau de la pupille. Les deux sources étant **incohérentes** entre elles, on calcule séparément l'éclairement dû à chaque étoile, puis on les somme pour obtenir l'éclairement total.

Calculons l'amplitude diffractée pour une onde plane incidente de vecteur d'onde

$$\vec{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ avec } \theta \text{ faible, dans la direction } \vec{k}_d = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ où } \alpha = \frac{x}{f'}.$$

D'après le TD Diffraction 1, on a trouvé pour une fente rectangulaire (de largeur a selon X , infinie selon Y) :

$$I_i = I_i^0 \operatorname{sinc}^2 \left(\pi \frac{a(\alpha(x) - \theta_i)}{\lambda} \right) \quad (\text{I.1})$$

Pour la première étoile, $\theta = 0$, l'image géométrique est centrée sur l'axe optique ($x_{geo}^1 = 0$), la figure de diffraction l'est donc aussi,

$$I_1 = I_1^0 \operatorname{sinc}^2 \left(\pi \frac{ax}{\lambda f} \right). \quad (\text{I.2})$$

Pour la seconde étoile, l'image géométrique est centrée en $x_{geo}^2 = \theta f'$ (sur le dessin, $\theta < 0$), donc

$$I_2 = I_2^0 \operatorname{sinc}^2 \left[\pi \frac{a}{\lambda} \left(\frac{x}{f} - \theta \right) \right]. \quad (\text{I.3})$$

Les deux sources sont incohérentes. On a donc l'intensité totale $I = I_1 + I_2$.

Chaque étoile apparaît comme une tache de largeur $\delta x = 2 \frac{\lambda f}{a}$. Les deux taches sont séparées de $\Delta x = x_{geo}^2 - x_{geo}^1 = \theta f$. On obtient finalement

$$\frac{\delta x}{\Delta x} = \frac{2\lambda/a}{\theta}.$$

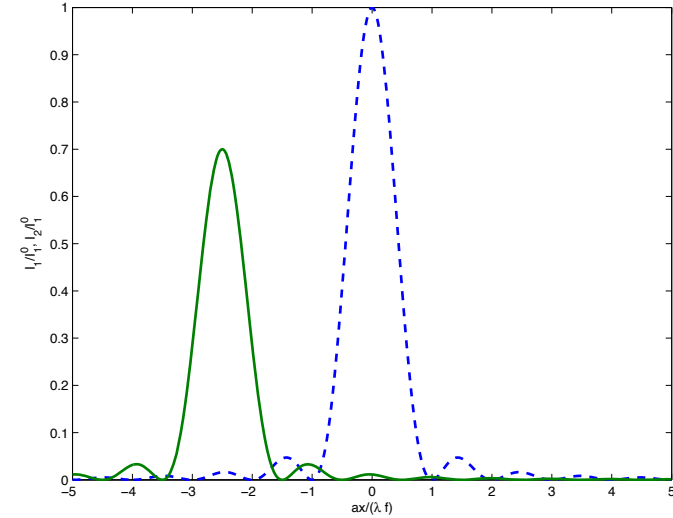


FIGURE 1.1 – Profils d'intensité de chaque étoile, pour $I_2^0 = 0,7 I_1^0$. Le profil observé est la somme des deux profils individuels. La largeur de chaque pic est de $\frac{2\lambda f}{a}$.

Si la fente est trop étroite ($a < 2\lambda/\theta$), les taches s'étalent et se confondent. Il devient alors impossible de distinguer les deux étoiles.

Remarque 1 : nous omettons ici la dépendance en $\frac{1}{OM^2}$ dans le pré-facteur I_1^0 , de l'intensité lumineuse maximum de chaque étoile. En effet, en toute rigueur, il faudrait noter : $I_{1,max}^0$ avec $I_{1,max}^0 = \frac{I_1^0}{(\lambda f')^2}$, pour prendre en compte le fait que l'intensité de la figure de diffraction décroît quand on "recule" l'écran d'observation. Cette diminution d'intensité le long de l'axe optique est directement liée à une dispersion angulaire de l'énergie lumineuse par la diffraction. Dans tout ce TD, nous omettrons cette dépendance, comme dans le TD1 diffraction. Il faut seulement se rappeler que dans le terme \tilde{s}_0 , l'information de décroissance de l'intensité lumineuse de la figure de diffraction avec la distance du point d'observation est contenue dans : $\tilde{s}_0 = \frac{i s_0}{\lambda z}$ pour une onde plane incidente, dans l'approximation paraxiale, avec le coefficient

$K(\theta) = \left(\frac{i}{\lambda} \frac{1 + \cos(\theta)}{2} \right)$, le coefficient d'obliquité, $z = \overline{OM}$ et θ l'angle entre l'axe optique et \overline{OM} .

Remarque 2 : L'étalement dû à la diffraction est un étalement **angulaire** : les étoiles sont distinguables quand elles sont vues sous un angle θ plus grand que l'angle limite $\theta_c = \lambda/a$, angle du cône de cohérence de la fente diffractante (cf. TD 1). Cela veut dire, en particulier, qu'il n'y a rien à gagner sur la résolution en changeant la focale f , i.e. en déplaçant l'écran d'observation. On peut remarquer par exemple que $\delta x / \Delta x$ ne dépend pas de f .

2. Angle limite de résolution du télescope

Limite de résolution : La limite de résolution est atteinte quand le maximum du profil d'intensité de l'étoile 2 est confondu avec la première annulation du profil d'intensité de l'étoile 1. La première annulation du sinus cardinal centré en $x = 0$ a lieu en

$$x = \pm \frac{\lambda}{a} f.$$

L'angle limite θ_l que l'on peut résoudre est donc donné par

$$\frac{\lambda}{a} f = \theta_l f \iff \boxed{\theta_l = \frac{\lambda}{a}}.$$

Le problème est plus subtil si une étoile a une intensité beaucoup plus faible que l'autre. La résolution est alors aussi limitée par les lobes secondaires de l'étoile intense (voir FIG. 1.4).

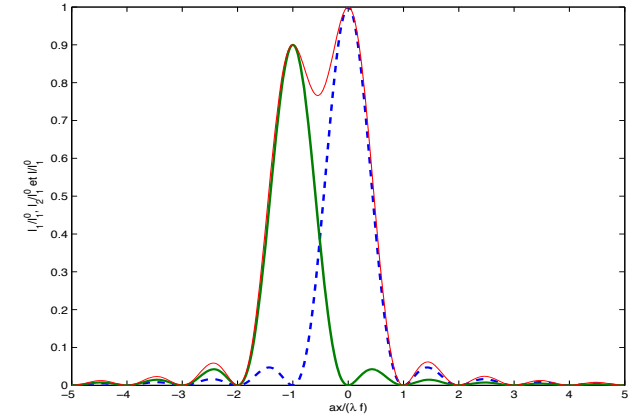


FIGURE 1.2 – Angle limite de résolution du télescope pour des étoiles d'intensités comparables ($I_2^0 = 0,9 I_1^0$). La limite de résolution est atteinte quand le maximum d'un pic correspond à la première annulation de l'autre. La courbe en traits fins représente le profil d'intensité total.

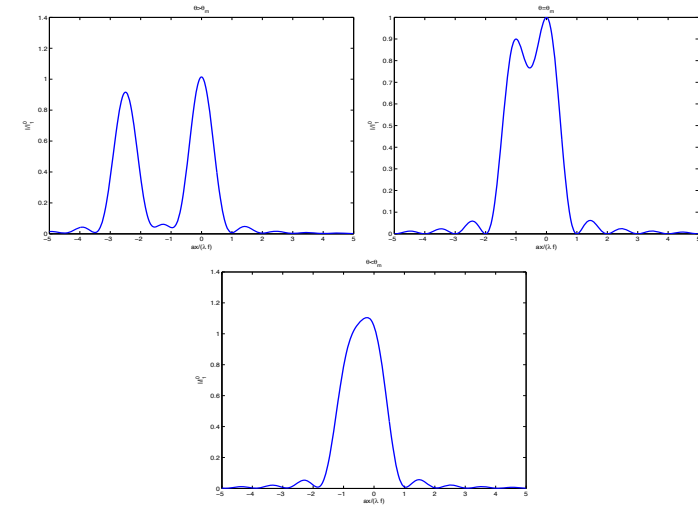


FIGURE 1.3 – Profil d'intensité observé pour des étoiles d'intensités comparables ($I_2^0 = 0,9 I_1^0$) pour $\theta > \theta_l$, $\theta = \theta_l$ et $\theta < \theta_l$.

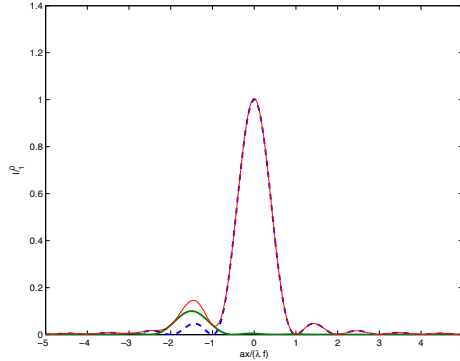


FIGURE 1.4 – Dans le cas où une des deux étoiles est beaucoup moins intense que l'autre ($I_2^0 = 0, 1 I_1^0$), même pour $\theta > \theta_l$, les lobes secondaires de la figure de diffraction gênent pour observer l'étoile de faible intensité.

3. On introduit maintenant un filtre au niveau de la fente.

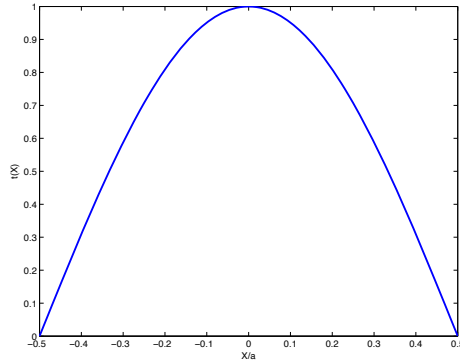


FIGURE 1.5 – Filtre de transparence $t(X) = \cos\left(\frac{\pi X}{a}\right)$.

La nouvelle vibration lumineuse diffractée s'écrit :

$$s_i(x, y) = s_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \cos\left(\frac{\pi X}{a}\right) e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP}} dX,$$

avec $\vec{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = \frac{x}{f}$, $\vec{OP} = \begin{pmatrix} X \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $(\vec{k} - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP} = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha - \theta)X$,
soit

$$\begin{aligned} s_i(x, y) &= \frac{s_0}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \left(e^{i\frac{\pi X}{a}(1 + \frac{2a}{\lambda}(\theta - \alpha))} + e^{i\frac{\pi X}{a}(-1 + \frac{2a}{\lambda}(\theta - \alpha))} \right) dX \\ &= s_0 \left\{ \frac{a}{\pi \left(1 + \frac{2a}{\lambda}(\theta - \alpha)\right)} \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{2a}{\lambda}(\theta - \alpha)\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{\pi \left(-1 + \frac{2a}{\lambda}(\theta - \alpha)\right)} \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(-1 + \frac{2a}{\lambda}(\theta - \alpha)\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Finalement

$$s_i(x) = \frac{1}{2} s_0 a \left\{ \text{sinc} \left[\frac{\pi a}{\lambda f} \left((x - f\theta) - \frac{\lambda f}{2a} \right) \right] + \text{sinc} \left[\frac{\pi a}{\lambda f} \left((x - f\theta) + \frac{\lambda f}{2a} \right) \right] \right\},$$

ou encore

$$s_i(x) = \frac{1}{2} s_0 a \left\{ \text{sinc} \left[\frac{\pi}{\theta_l} \left(\alpha - \left(\theta + \frac{\theta_l}{2} \right) \right) \right] + \text{sinc} \left[\frac{\pi}{\theta_l} \left(\alpha - \left(\theta - \frac{\theta_l}{2} \right) \right) \right] \right\}.$$

On obtient la somme de deux sinus cardinaux, séparés de $f\theta_l = \lambda f/a$, et de largeur $2f\theta_l = 2\lambda f/a$: la première annulation de l'un correspond exactement au maximum de l'autre. En fait, tout maximum de l'un correspond à un minimum de l'autre, les deux systèmes de lobes se compensent donc partiellement. La vibration résultante présente finalement un lobe central plus large, mais les lobes périphériques sont beaucoup plus faibles (voir FIG. 1.6). Quand on diminue ainsi les pieds de la figure de diffraction, on parle d'**apodisation**.

On pose $u = \frac{a(x - f\theta)}{\lambda f} = \frac{\alpha - \theta}{\theta_l}$. On peut alors arranger l'expression de s_i :

$$s_i = \frac{s_0 a}{2} \left(\frac{-\cos(\pi u)}{\pi u - \frac{\pi}{2}} + \frac{\cos(\pi u)}{\pi u + \frac{\pi}{2}} \right) = \frac{s_0 a}{2} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \frac{2 \cos(\pi u)}{\pi^2 u^2 - \frac{\pi^2}{4}} = \frac{2s_0 a \cos(\pi u)}{\pi (1 - 4u^2)},$$

soit

$$I_i = \left(\frac{2s_0 a}{\pi} \right)^2 \frac{\cos^2(\pi u)}{(1 - 4u^2)^2}.$$

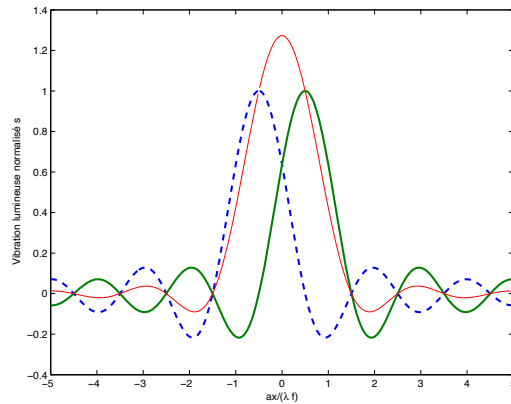


FIGURE 1.6 – Vibration lumineuse issue du filtre d'apodisation. On obtient la somme de deux sinus cardinaux dont les signes des lobes sont opposés (courbes en traits gras) : il en résulte une vibration lumineuse avec des lobes atténués (courbe en trait fin).

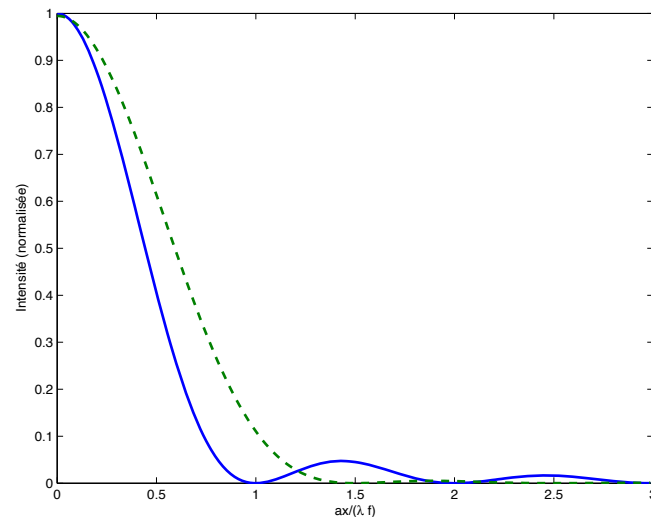


FIGURE 1.7 – Comparaison de la figure de diffraction d'une étoile avec ou sans filtre. Les lobes sont atténués avec le filtre, avec en contre partie une tache centrale plus large.

La figure de diffraction est plus large que celle d'une fente nue. Cependant, si la seconde étoile est beaucoup moins intense, ce type de pupille présente un intérêt. Si $\theta = 5\theta_1/2$ par exemple, la figure de diffraction de l'étoile peu intense est centrée en $\alpha = 5\theta_1/2$, c'est-à-dire juste sur un maximum secondaire de la figure de diffraction de la première étoile, centrée en $\alpha = 0$. Dans le cas où la pupille est la fente nue, le maximum secondaire est suffisamment intense pour masquer complètement la présence de la seconde étoile. Avec le filtre, en revanche, les pieds de la figure de diffraction de l'étoile brillante sont «supprimés», et l'étoile de faible intensité peut ressortir.

Pour conclure :

- Une fente nue a un meilleur pouvoir de résolution car sa figure de diffraction est la plus fine possible. Par ailleurs, c'est ce type d'ouverture qui permet de faire passer le plus de lumière possible, puisqu'elle n'utilise aucun filtre. C'est un bon dispositif pour l'observation de deux étoiles d'intensités comparables ;
- Le filtre apodisant élargit la figure de diffraction mais permet d'aplanir les rebonds présents dus au sinus cardinal. Il permet de faire ressortir les objets de faible intensité, qui auraient été perdus au milieu des lobes latéraux. On perd cependant en résolution et en intensité.

Remarque Les mêmes concepts entrent en jeu dans le calcul de la transformée de Fourier d'un signal électrique sur les oscilloscopes numériques qui offrent la possibilité d'appliquer une fonction «porte» sur le signal (Cf. TP *Télécommunications*).

EXERCICE II OPTIQUE DE FOURIER

Ressource internet : un site intéressant qui permet d'appliquer des filtres simples (masques circulaires) dans le plan Fourier (image de gauche), pour voir le résultat dans le plan image (image de droite). <http://bigwww.epfl.ch/demo/ip/demos/FFT-filtering/>

1. Rappel : Diffraction de Fraunhofer.

La diffraction de Fraunhofer s'obtient par exemple dans le cadre de la diffraction des ondes planes à l'infini, tel que représenté figure 2.1. En notant α_0 et β_0 les angles directeurs de l'onde incidente \vec{k}_0 (ou du vecteur \vec{SO} où S est le point source) et α et β

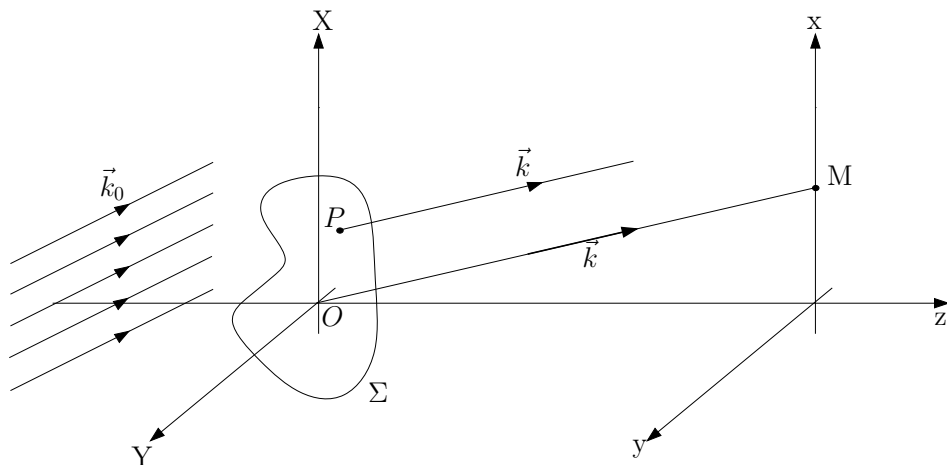


FIGURE 2.1 – Diffraction de Fraunhofer d'un écran Σ quelconque.

ceux de l'onde diffractée \vec{k} (ou du vecteur \overrightarrow{OM} où M est le point d'observation), soit

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} x/D \\ y/D \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{k}_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on a montré au précédent TD que l'amplitude lumineuse au point M est

$$s(M) = s'_0 \int t(X, Y) e^{-2i\pi[(\alpha - \alpha_0)\frac{X}{\lambda} + (\beta - \beta_0)\frac{Y}{\lambda}]} dX dY = \hat{t}\left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\lambda}, \frac{\beta - \beta_0}{\lambda}\right). \quad (\text{II.1})$$

L'amplitude en M est ainsi donnée par la transformée de Fourier 2D, \hat{t} , de la fonction de transparence, $t(X, Y)$, calculée aux fréquences spatiales $(\alpha - \alpha_0)\lambda^{-1}$ et $(\beta - \beta_0)\lambda^{-1}$. Le « centre » de la transformée de Fourier, *i.e.* le point de fréquences spatiales nulles, correspond au centre de l'image géométrique de la source, où $\alpha = \alpha_0$ et $\beta = \beta_0$.

On illustre figure 2.2 le lien de transformée de Fourier entre l'objet et sa tache de diffraction sur l'exemple d'une bifente d'Young. Les fentes ayant une largeur finie b , séparées par une distance a , la fonction de transparence de la bifente peut s'écrire comme la somme de deux fonctions portes normalisées :

$$t(x) = \frac{1}{a} \Pi(x, -a/2) + \frac{1}{a} \Pi(x, a/2) = \frac{1}{a} \Pi(x, 0) \otimes (\delta(x - a/2) + \delta(x + a/2)) \quad (\text{II.2})$$

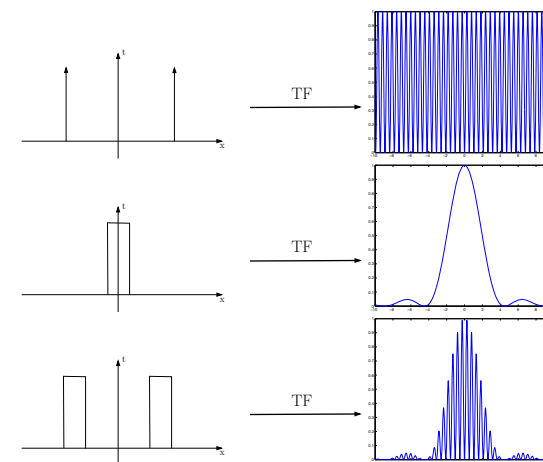


FIGURE 2.2 – Une bifente d'Young de largeur finie est la convolution de deux fentes infiniment fines et d'une fente de largeur finie. La figure d'interférence finale est donc une sinusoïde modulée par un sinus cardinal.

Soit :

$$t(x) = (f \otimes g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(x - u) du \quad (\text{II.3})$$

où $f(x)$ est le profil d'une fente unique, ici pris comme étant une fonction porte pour l'exemple, et $g(x)$ qui donne la répartition des fentes, ici à l'aide d'une somme de Dirac $g(x) = \delta(x - a/2) + \delta(x + a/2)$, avec a la distance entre les des deux fentes. En utilisant alors le fait que :

$$\boxed{\text{TF}(f \otimes g) = \text{TF}(f) \cdot \text{TF}(g)},$$

on trouve aisément que la figure de diffraction d'une bifente est le produit de la figure de diffraction d'une fente unique $[\text{TF}(f)]$, *i.e.* un sinus cardinal, par la figure de diffraction des pics de Dirac distants de a , *i.e.* une sinusoïde de fréquence $\propto a$. On retrouve bien le résultat trouvé au TD *Interférences – Notion de cohérence*. On peut également faire le lien avec l'exercice II du TD 1 de diffraction, avec la diffraction d'un ensemble de N ($=2$) structures périodiques :

$$I(M) = \text{Figure diffractante d'1 pupille} \cdot \text{terme d'interférence entre les N pupilles} \quad (\text{II.4})$$

2. Expérience d'Abbe

Soit un objet éclairé par une onde plane en incidence normale. On fait l'image de cet objet dans un plan noté P_2 avec une lentille. Dans le plan focal de cette lentille, on observe la figure de diffraction à l'infini de l'objet, *i.e.* la transformée de Fourier de sa fonction de transparence. On appelle ce plan *plan de Fourier*, noté Π' . La figure observée dans le plan P_2 est donc elle-même la transformée de Fourier (inverse) de la figure de diffraction observée dans le plan de Fourier (voir FIG. 2.3).

Si l'on introduit dans le plan de Fourier un nouvel objet de transmittance bien choisie, on manipule la transformée de Fourier de l'image observée dans le plan P_2 , et l'on manipule donc l'image elle-même. On peut ainsi, par exemple, **filtrer** certaines fréquences spatiales de l'objet pour n'en conserver que d'autres.

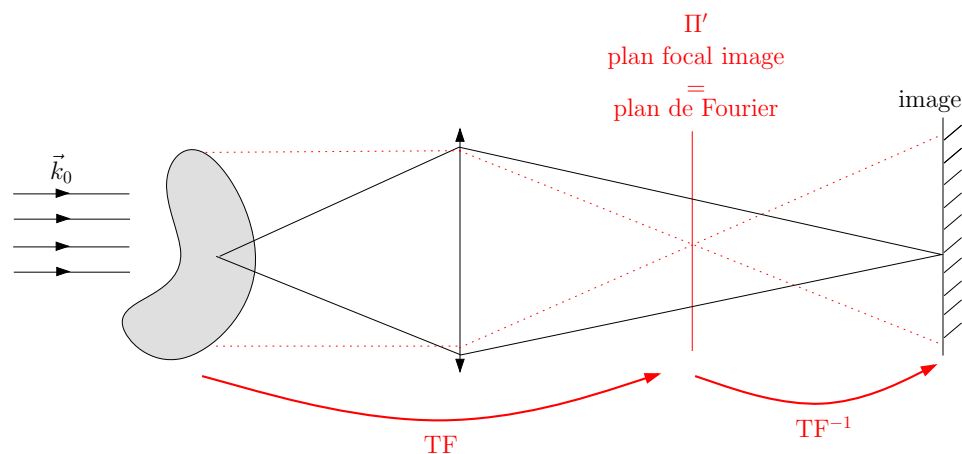


FIGURE 2.3 – Diffraction de Fraunhofer d'un écran Σ quelconque.

Si un objet a des fréquences spatiales faibles (variations de $t(X, Y)$ lentes), sa tache de diffraction est petite, au centre de l'écran. Inversement, la tache de diffraction présente des composantes éloignées du centre de la figure si l'objet présente des variations spatiales rapides. On peut donc «filtrer» les variations lentes de $t(X, Y)$ dans l'écran d'observation en bloquant une zone centrale du plan de Fourier avec un écran opaque.

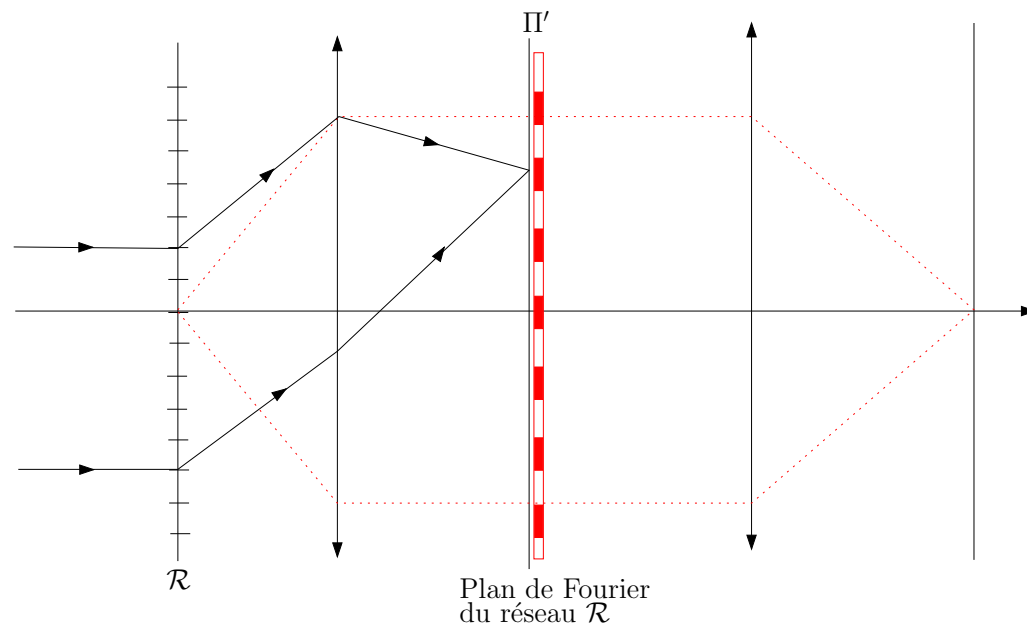


FIGURE 2.4 – Principe de l'expérience d'Abbe.

On considère un réseau \mathcal{R} de pas a . Sa figure de diffraction, dans Π' , est constituée de pics en $x = n \frac{\lambda f'}{a}$, $n \in \mathbb{Z}$. On veut avoir, sur l'écran en P_2 , un réseau de pas deux fois plus petit, soit $a \rightarrow a/2$. Les pics de la figure de diffraction de ce «nouveau» réseau seraient donc situés en $x = n \frac{\lambda f'}{a/2} = 2n \frac{\lambda f'}{a}$: les pics sont deux fois plus espacés que dans la figure de diffraction du réseau initial. On doit se débrouiller pour avoir cette figure de diffraction dans Π' pour reconstruire l'objet (le réseau \mathcal{R}') dans l'écran d'observation. On cache donc un pic sur deux dans l'espace de Fourier : l'objet Σ à placer en Π' est un réseau de pas $2n \frac{\lambda f'}{a}$.

Pour obtenir un réseau \mathcal{R}' sinusoïdal, on garde seulement les fréquences spatiales correspondant aux ordres 0 et ± 1 .

Pour obtenir un réseau «sur fond noir», c'est-à-dire observer seulement les changements d'intensité (les «détails»), il faut cacher le pic central (Cf. Strioscopie).

3. Visualisation d'un objet de phase

Les objets caractérisés par des variations d'indice ou d'épaisseur sont appelés «objets de phase». Ces objets, parfaitement transparents, ne présentent pas de contraste

avec le champ qui les entoure, c'est-à-dire qu'ils sont invisibles par les méthodes d'imagerie ordinaires, car ils sont caractérisés seulement par des variations du chemin optique et non par des variations d'amplitude ($|t(X, Y)| = 1$). Sans rien faire, l'éclairement est donc uniforme sur l'écran d'observation.

Les variations spatiales de phase font toutefois apparaître une figure de diffraction dans le plan Π' . Le principe de la strioscopie consiste à filtrer l'image géométrique dans le plan de Fourier. Si on place un petit écran opaque au centre du plan de Fourier, les fréquences spatiales les plus basses sont filtrées. En fait, on cherche à bloquer toute la lumière qui arriverait à l'écran si l'objet de phase n'était pas présent. En présence de l'objet de phase, la lumière diffractée, correspondant aux fréquences spatiales non nulles, n'est pas bloquée par le petit écran dans le plan de Fourier Π' . Finalement, seule la lumière diffractée parvient à l'écran. Les variations de phase, et donc l'objet de phase, deviennent visibles.

Remarque : détramage On considère une image avec un bruit à haute fréquence, telle qu'une image pixelisée. On peut utiliser le dispositif précédent, mais avec un diaphragme à la place du point opaque, pour filtrer les hautes fréquences spatiales, par exemple celles dues à la pixellisation de l'image. Après filtrage, les pixels (de hautes fréquences) sont alors «gommés» et on obtient une image de meilleure qualité.

Strioscopie et contraste de phase On reprend le raisonnement qualitatif précédent expliquant le principe de la strioscopie, de façon plus quantitative. Sans écran dans le plan de Fourier, la vibration lumineuse sur l'écran d'observation est

$$s = s_0 e^{i\varphi},$$

où φ est la phase introduite par l'objet de phase au point considéré. On peut toujours décomposer la vibration lumineuse selon

$$s = \underbrace{s_0(e^{i\varphi} - 1)}_{\text{ondes diffractées}} + \underbrace{s_0}_{\text{ondes directes}}.$$

S'il n'y a pas d'objet de phase, l'éclairement est uniforme, sans déphasage, soit une vibration lumineuse $s = s_0$. Si on bloque les très basses fréquences spatiales dans le plan de Fourier, alors on retire s_0 de la vibration lumineuse sur l'écran d'observation (les ondes non diffractées), et on obtient finalement une vibration

$$s = s_0(e^{i\varphi} - 1).$$

Si on suppose que la phase φ est faible devant 2π , alors $e^{i\varphi} - 1 \approx i\varphi$, d'où l'expression de l'intensité lumineuse sur l'écran d'observation

$$I = I_0 \varphi^2.$$

On observe donc les variations de phase sur un fond noir ($I = 0$ si $\varphi = 0$) : le contraste est maximal et toujours égal à 1. L'inconvénient de cette méthode est la faible intensité des images obtenues : si φ est petit, φ^2 l'est plus encore ! De plus, on n'a accès qu'à la norme de φ , et son signe reste inconnu.

L'imagerie par *contraste de phase* est une autre technique permettant de remonter au signe de la phase. Au lieu d'avoir un petit écran opaque au foyer de la lentille, on place une petite lame à retard $\lambda/4$ introduisant un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ (Cf. TP Polarisation). On reprend le même raisonnement que précédemment : l'onde sur l'écran d'observation peut s'écrire sous la forme

$$s = \underbrace{s_0(e^{i\varphi} - 1)}_{\text{ondes diffractées}} + \underbrace{s_0}_{\text{ondes directes}}.$$

Si l'on introduit la lame $\lambda/4$, alors les ondes non diffractées accumulent une phase $\pi/2$ supplémentaire et

$$s = s_0(e^{i\varphi} - 1) + s_0 e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Les deux composantes interfèrent. Si l'on suppose une nouvelle fois que la phase φ est petite, alors

$$s = s_0(i\varphi - i) = -is_0(1 - \varphi),$$

d'où une intensité

$$I = I_0(1 - 2\varphi),$$

car φ^2 est négligeable. On peut donc mesurer directement φ avec cette méthode. On a ici une image avec un contraste égal à 2φ (d'où le nom de la technique).

Contrairement à la strioscopie, le contraste est donc faible. On peut toutefois augmenter la sensibilité en rendant la lame de phase absorbante. Supposons qu'elle réduise l'intensité de la lumière directe par un facteur β , on a alors

$$I = I_0 \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} - \varphi \right)^2 = \frac{I_0}{\beta} (1 - 2\varphi \sqrt{\beta}),$$

1. Il faut donc a priori utiliser une source monochromatique, ou une lame à retard à bande large.

et donc un contraste

$$C = \varphi \sqrt{\beta}.$$

Le contraste est multiplié par $\sqrt{\beta}$.

L'imagerie par contraste de phase est employée en microscopie. Les microscopes à contraste de phase sont utilisés dans les laboratoires de biologie car ils permettent d'étudier les objets vivants sans les colorer et donc sans les tuer.

EXERCICE III DIFFRACTION DES RAYONS X PAR LES SOLIDES

1. Pour avoir une figure de diffraction notable, il faut

- $\lambda >$ taille atomique, pour que la diffraction soit traitable dans l'approximation où l'on néglige les effets de bord de l'élément diffractant (mouvement électroniques dans l'atome...),
- $\lambda \sim d_{\text{atome-atome}}$ pour avoir des angles de diffraction notables.

Dans un cristal, $d_{\text{atome-atome}} \sim$ quelques Angströms. Dans le cas du rayonnement électromagnétique, $\lambda \sim 1 \text{ \AA}$ correspond aux rayons X ($\nu \sim 10^{18} \text{ Hz}$). Ils sont produits par ralentissement d'électrons envoyés sur une cible métallique (Brehmstrahlung). Le spectre produit est large.

On peut aussi utiliser des ondes de matière :

- **électrons** : On a $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ et la longueur d'onde associée (longueur d'onde de de Broglie)

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}},$$

où E est l'énergie de la particule. Il faut donc avoir un jet monocinétique pour éviter d'avoir une largeur spectrale importante. Par exemple, on peut accélérer des électrons *via* une différence de potentiel U . Alors $E = eU$ et

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{\sqrt{2me} \sqrt{U}} \sim 10^{-9} \left(\frac{U}{1\text{V}} \right)^{-1/2} \text{ m}.$$

Il faut donc typiquement $U \sim 100 \text{ V}$, ce qui est facile à réaliser.

Les électrons sont des particules chargées, elles interagissent fortement avec la matière, et donnent principalement des informations sur la surface.

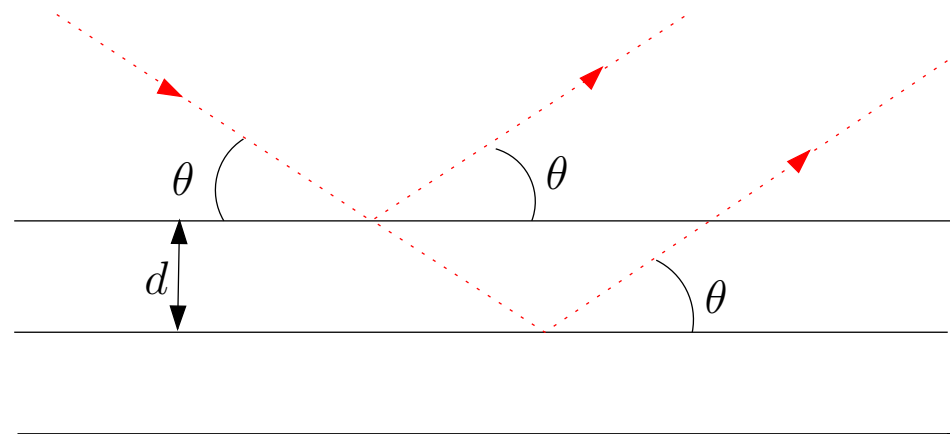


FIGURE 3.1 – Modèle de Bragg.

- **neutrons** : Pour des neutrons thermiques, on a

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2} k_B T,$$

soit

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}} \sim \text{quelques } 10^{-10} \text{ m à } 300\text{K}.$$

L'avantage des neutrons est qu'ils sont neutres et donc pénètrent plus efficacement dans la matière que les électrons. De plus, ils ont un moment magnétique non nul et donnent donc des informations sur les moments magnétiques des noyaux sondés.

- On simplifie le problème en considérant que le cristal est formé de plans équidistants, et que ces plans réfléchissent la lumière. Le modèle de Bragg est un modèle simple qui permet de comprendre ce qu'il se passe. Deux plans successifs forment alors un système équivalent à une lame d'air (Cf. TD *Interférence*). On a donc, pour les rayons lumineux réfléchis entre deux plans successifs, une différence de marche

$$\delta = 2d \sin \theta,$$

pour une onde arrivant avec une incidence θ par rapport aux plans, distants de d . Les

interférences sont constructives dans les directions où

$$2d \sin \theta = n\lambda, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

C'est ce qu'on appelle la *condition de Bragg*.

La répartition des pics de diffraction permet de remonter à d . Pour le mesurer, on peut soit faire varier la longueur d'onde λ , soit l'angle d'incidence θ (méthode du cristal tournant, méthode des poudres).

3. Conditions de Laue.

On note

$$\vec{R}_{l,m,n} = l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}, \quad (l, m, n) \in \mathbb{Z}^3$$

la position d'un élément diffractant, où $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ sont les vecteurs de base de la maille élémentaire.

Pour une onde plane incidente de direction \vec{k}_0 , l'onde diffractée à l'infini, dans la direction \vec{k} , s'écrit (Cf. TD Diffraction (1) : *diffraction par un ensemble de N structures*)

$$s_\infty \propto \underbrace{\left(\int_{\text{1 motif}} t(x, y, z) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{OP}} d\vec{OP} \right)}_{\text{facteur de forme}} \cdot \underbrace{\sum_{l,m,n} e^{-i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{R}_{l,m,n}}}_{=S, \text{ facteur de structure}}.$$

En utilisant l'expression de $\vec{R}_{l,m,n}$, et avec $\Delta\vec{k} = \vec{k} - \vec{k}_0$, le facteur de structure se réécrit

$$\begin{aligned} S &= \sum_{l,m,n} e^{i\Delta\vec{k} \cdot (l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c})}, \\ &= \sum_{l=0}^{L-1} \left(e^{i\Delta\vec{k} \cdot \vec{a}} \right)^l \cdot \sum_{m=0}^{M-1} \left(e^{i\Delta\vec{k} \cdot \vec{b}} \right)^m \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{i\Delta\vec{k} \cdot \vec{c}} \right)^n, \end{aligned}$$

donc, avec S_0 un facteur de phase,

$$S = S_0 \frac{\sin\left(\frac{\Delta\vec{k} \cdot \vec{a}}{2} L\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\vec{k} \cdot \vec{a}}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{\Delta\vec{k} \cdot \vec{b}}{2} M\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\vec{k} \cdot \vec{b}}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{\Delta\vec{k} \cdot \vec{c}}{2} N\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\vec{k} \cdot \vec{c}}{2}\right)}.$$

On obtient un pic de diffraction à chaque fois que *les conditions de Laue*, données ci-dessous, sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \Delta\vec{k} \cdot \vec{a} &= 2n_1\pi \\ \Delta\vec{k} \cdot \vec{b} &= 2n_2\pi, \quad (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3. \\ \Delta\vec{k} \cdot \vec{c} &= 2n_3\pi \end{aligned}$$

On retrouve la condition de Bragg en considérant un plan réticulaire formé par Oxy , avec $\vec{c} \parallel Oz$. On considère l'ordre 0 pour x et y ($\Delta k_x = \Delta k_y = 0$, réflexion dans le plan d'incidence), et alors

$$\Delta k_z = k_0 (\sin \theta - \sin(-\theta)) = 2k_0 \sin \theta = 2\pi \frac{n_3}{\|\vec{c}\|},$$

soit la relation de Bragg

$$2\|\vec{c}\| \sin \theta = n\lambda.$$

Remarque : Notion de réseau réciproque². Le réseau réciproque \mathcal{R}^* du réseau \mathcal{R} est défini par les vecteurs de maille élémentaire $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$, tels que

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{a} &= 2\pi, \quad \vec{B} \cdot \vec{b} = 2\pi, \quad \vec{C} \cdot \vec{c} = 2\pi, \\ \vec{A} \cdot \vec{b} &= \vec{A} \cdot \vec{c} = \vec{B} \cdot \vec{a} = \vec{B} \cdot \vec{c} = \vec{C} \cdot \vec{a} = \vec{C} \cdot \vec{b} = 0 \end{aligned}$$

On peut par exemple écrire

$$\vec{A} = 2\pi \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}, \quad \vec{B} = 2\pi \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})}, \quad \vec{C} = 2\pi \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}.$$

Pour satisfaire les conditions de Laue, on doit avoir $\Delta\vec{k} \in \mathcal{R}^*$: $\Delta\vec{k}$ doit faire partie du réseau réciproque.

Pour plus de précisions sur l'utilisation du réseau réciproque, se reporter au cours de Physique des Solides, ainsi qu'à la bibliographie usuelle (Ashcroft et Mermin, Kittel, Guinier...).

2. Cf. Kittel p55-56.