Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

Niveau : 2ème CPGE

Pré-requis :

- Description Eulérienne et Lagrangienne
- Equations de conservation de la masse et quantité de mouvement
- Ou Cinématique des fluides

Bibliographie :

-
-

Introduction

loi de Torricelli : 1643 (Torricelli est contemporain de Galilée)
Tube de Pitot : 1732
Relation de Bernoulli : 1738
Equation Euler : milieu 18ème (1757)
Equation de Navier-Stokes : milieu 19ème (1822-1845)

I. Fluides parfaits

A. Description

Pour un fluide réelle, les particules fluides "frottent" les unes contre les autres et contre les parois : c'est la viscosité du fluide. Cela entraine deux effets : un transfert de quantité de mouvement des particules rapides vers les lentes (diffusion de la quantité de mouvement) et un effet de dissipation de l'énergie mécanique du fluide en énergie thermique.

L'approximation des fluides parfaits consiste en négliger la viscosité du fluide, considérée comme strictement nulle.

Les effets de la viscosité seront étudié dans une prochaine leçon

B. Equation d'Euler

Écrivons la conservation de la quantité de mouvement selon ces hypothèses. Les forces s'exerçant sur la particule fluide sont les forces volumiques (comme la gravitation) et les forces surfaciques. Comme nous négligeons la viscosité, ces dernières se limite à la pression. On a donc la somme des forces d'exerçant sur une particule fluide :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \iiint \rho \vec{g} d^3\tau + \oiint (-p) d^2\vec{S} = \iiint (\rho\vec{g} - \vec{\nabla} p)\, d^3\tau$$

On a ramené la somme des forces a une intégrale volumique, on peut donc exprimer la conservation de la quantité de mouvement par une équation locale :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\,.\,\overrightarrow{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\nabla}p + \vec{g}$$

Cette équation est l'équation d'Euler.
Le système contient 5 inconnues (ux, uy , uz ,p et ρ) pour quatre équation (3 pour l'équation d'Euler et 1 pour la conservation de la masse). Il nous faut une 5ème équation pour résoudre le système. Celle-ci est donnée par la compressibilité isentropique du fluide :

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S = \chi_S$$

Remarque : On prend la compressibilité isentropique car l'écoulement est réversible (changer le signe du temps et de la vitesse ne change pas l'équation d'Euler ni la conservation de la masse). Cela est directement du au fait que nous avons négligé les effets dissipatifs.

II. Théorème de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli décrit la conservation de l'énergie mécanique le long des lignes de courant. Il s'applique pour des écoulement parfait, stationnaire et incompressible.

A. Démonstration

Moyennant les hypothèse susnommées, l'équation d'Euler se ré-écrit :

$$(\vec{u}\,.\,\overrightarrow{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\nabla}p + \vec{g}$$

On peut ré-écrire : $(\vec{u}\,.\,\overrightarrow{\nabla})\vec{u} = \overrightarrow{\nabla}\left(\frac{1}{2}\vec{u}^2\right) + (\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u}$

L'équation d'Euler devient alors : $\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{1}{2}\rho\vec{u}^2 + p + \rho g z\right) = (\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u}$

La quantité entre parenthèse est la charge C. Considérons une ligne de courant avec une portion $\overrightarrow{dl} = \vec{u}dt$. Le produit scalaire avec ce $\overrightarrow{dl}$ donne : $dC = 0$
La charge C est donc conservé le long des lignes de courant.
Si l'écoulement est irrotationnel alors cette charge est la même dans tout l'écoulement (et pas juste sur une ligne de courant spécifique).

B. Applications

Tube pitot / Effet Coanda / Effet Magnus

Conclusion

Durant cette leçon, nous avons vu un modèle simple de fluide, qui néglige la viscosité (dissipation), mais nous permet déjà de décrire un certains nombres d'écoulement.
Dans une prochaine leçon, nous verrons les limites de ce modèle en ajoutant un terme de viscosité à l'équation d'Euler (équation de Navier-Stokes). Nous pourrons alors voir plus en détail dans quels circonstances l'hypothèse du fluide parfait s'applique, et dans quels cas non.

Titre : Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

Présentée par : Thibaut Perdereau **CR rédigée par :** Basile Wurmser

Correcteur : Philippe Gondret **Date :** 10/01/23

Compte-rendu leçon de physique élève

Bibliographie de la leçon :			
Titre	Auteurs	Editeur (année)	ISBN
Tout en un PC/PC*			
Physique expérimentale	Fruchard		
Hydrodynamique physique	Guyon Hulin Petit		
Mécanique des Fluides	Candel		
Ce que disent les fluides	Guyon Hulin Petit		

Plan détaillé

Niveau choisi pour la leçon : CPGE
Prérequis : PFD ; Hydrostatique (loi, dérivée particulaire) ; Cinématique des fluides ; Thermodynamique ; Théorème de transport

Déroulé détaillé de la leçon :

Introduction

→ slide illustrative : eau, miel, poix
Dans le modèle du fluide parfait, on néglige la viscosité.

1min30

I– Modèle de l'écoulement parfait

1– Cadre du modèle

Définition : Un écoulement est dit parfait si on peut négliger les effets dissipatifs, en particulier visqueux.
Conséquence : adiabatique ; isentropique

3min45

2– Equation d'Euler

Hypothèses :

- Ecoulement parfait
- masse de l'écoulement conservée

Le référentiel est galiléen, on considère une particule de fluide de volume $d\tau$ de masse volumique ρ, de quantité de mouvement $\rho\mathbf{v}$:

$$\mathbf{F} = \sum_j \mathbf{F}_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\mathbf{v}\mathrm{d}\tau$$

avec V le volume de contrôle.
Calcul complet fait au tableau (voir références)

$$\boxed{\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v} = \mathbf{f}_{vol} - \mathbf{grad}P}$$

C'est l'équation d'Euler.

14min

3– Équation de Bernoulli

Hypothèses :

- Écoulement parfait, stationnaire, incompressible ;
- Fluide avec ρ uniforme ;
- $\rho\mathbf{g}$ et $-\mathbf{grad}$P

$$\rho \underbrace{(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v}}_{\mathbf{grad}(\frac{v^2}{2})+\mathbf{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v}} = \underbrace{-\rho\mathbf{g}}_{-\mathbf{grad}(\rho g z)} - \mathbf{grad}P$$

$$\Rightarrow \mathbf{grad}(\rho\frac{v^2}{2} + P + \rho g z) = \mathbf{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v}$$

En intégrant le long d'une ligne de champ :

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = \mathrm{cste}}$$

C'est l'équation de Bernoulli.

21min

II– Applications

1– Les sondes Pitot

$\rightarrow$ Schéma sonde Pitot (voir Dunod PC)

Selon les lignes de champ :

$$A_\infty A : \frac{v_0^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} = \frac{P_A}{\rho}$$
$$S_\infty S' : \frac{v_0^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} = \frac{P_{S'}}{\rho}$$
$$\Rightarrow \frac{v_0^2}{2} + \frac{P_S}{\rho} = \frac{P_A}{\rho}$$
$$\Rightarrow P_A - P_S = \rho \frac{v_0^2}{2}$$

26min

Expérience docteur : Sonde Pitot
Mesure de la vitesse d'une soufflerie avec un anémomètre à fil chaud.
Mesure de la différence de potentiel pour la sonde Pitot, puis conversion en Pa. (ΔP)
Tracé de ΔP en fonction de $v^2/2$ et régression linéaire.
On trouve $\rho = (1,35 \pm 0,02) kg.m^{-3}$, masse volumique de l'air.
Est-ce la valeur attendue ?
Mesure de la température de la pièce. T = 21,6 ° C.
$\rho_{tab} = 1,204 kg.m^{-3}$. Ne rentre pas dans les barres d'erreur.
Score z = $\frac{\rho_{exp} - \rho_{tab}}{\delta}$. Problème sur l'incertitude, qui est surestimée.
35min

2– Effet Venturi

$\rightarrow$ Schéma conduite avec étranglement

Conservation du débit :

$$v_A S_A = v_B S_B$$
$$S_A > S_B \Rightarrow \boxed{v_B > v_A}$$
$$\Rightarrow \frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\rho} = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\rho}$$
$$\Rightarrow P_B - P_A = \rho v_A \left(1 - \left(\frac{S_A}{S_B}\right)^2\right)$$

→ Animation de l'accélération dans l'étranglement
Application : trompe à eau

Discussion de la perte de charge par effet visqueux. Couche limite : prise en compte
41min30

Questions posées par l'enseignant (avec réponses)

Q : Sur les figures introductives : miel, eau, poix. Qu'est-ce que la poix ?
R : Une espèce de goudron de grande viscosité. Expérience de la goutte de poix. Attendre qu'une goutte tombe, ordre de grandeur : centaine de mois !

Q : Il ne peut pas exister de vortex dans un fluide parfait ?
R :
La présence de vortex n'est pas incompatible avec un écoulement de fluide parfait car la vorticité (partie rotationelle du champ de vitesse) ne dissipe pas d'énergie.
Q : Pour établir l'équation d'Euler, vous avez parlé de particule fluide. Qu'est-ce que c'est ?
R : C'est une particule d'échelle mésoscopique qui représente une partie infinitésimale du fluide.

Q : Qu'est-ce que l'échelle mésoscopique, ODG ?
R : Située entre l'échelle micro et macro.
Suffisamment petite devant l'échelle macro mais suffisament grande devant l'échelle micro pour que les caractéristiques du fluide (température, masse volumique, pression) et de son mouvement (vitesse) puissent être représentatifs à cette échelle, avec une valeur moyenne suffisamment bien définie du point de vue de la physique statistique

Q : L'échelle microscopique est-elle la même pour un solide ou un gaz ?
R :
L'échelle microscopique est la taille des molécules dans le cas des liquides ou le libre parcours moyen dans le cas des gaz, qui est en général significativement supérieur, par exemple une dizaine de fois supérieur dans le cas de l'air dans les conditions standard. Si le libre parcours moyen est plus grand que le diamètre de la conduite dans laquelle a lieu l'écoulement du gaz (régime dit de Knudsen), l'approche milieux continus n'est plus valable.

Q : Après avoir établi l'équation d'Euler et avoir dit qu'elle était non-linéaire, vous avez dit que les solutions étaient complexes. On ne peut pas résoudre cette équation ?
R : Si on considère un écoulement rectiligne, on retrouve les lois de l'hydrostatique.

Q : Donc en prenant v $\neq$ 0 et hors de l'hydrostatique, que faut-il considérer pour pouvoir la résoudre ? Que manque-t-il ?
R : Il manque les conditions aux limites.

Q : Quelles sont-elles pour un fluide parfait ?
R : v=0 sur les parois fixes (non glissement) et continuité de la composante tangentielle de la vitesse à une interface.
Pour un fluide parfait, il y peut y avoir glissement du fluide à la paroi ou à l'interface avec un autre fluide et donc discontinuité de la vitesse à la paroi ou l'interface considérée. Pour un fluide parfait, les conditions limites cinématiques (sur la vitesses) portent uniquement sur la composante normale de la vitesse à la paroi ou l'interface qui doit être égale à celle de la paroi ou de l'interface. Les conditions aux limites dynamiques (sur les contraintes) portent uniquement sur les contraintes normales (il n'y a pas de contraintes tangentielles).

Q : Vous avez transformé **g** en **grad**z ? Schématisez.
R : $\mathbf{g}$ = -g.e$_z$=-g $\mathbf{grad}$z.

Q : Pourquoi avoir divisé l'équation de Bernoulli par ρ ?
R : Pour simplifier l'équation.

Q : Qu'est-ce qu'une ligne de champ ?
R : C'est une ligne de courant du fluide.

Q : Des lignes de courant sont dessinées sur votre schéma de sonde Pitot. À quoi correspondent-elles ?

Q : Vous avez $P_S = P_{S'}$, c'est strictement égal ?
R : C'est une approximation, hors de la couche limite.

Q : Que veut dire Pitot, date de quand ?
R : Henri Pitot 1732, il voulait mesurer le débit de la Seine.

Q : De quand date l'équation d'Euler ?
R : Milieu du 18e siècle par Leonhard Euler.

Q : Dans les conditions limites de l'équation d'Euler, sont-elles seulement sur la vitesse ?
R : Aussi sur la position ?
Cf précisions des conditions limites dynamiques plus haut

Q : Peut-on établir l'équation de Bernoulli pour un fluide compressible ?
R : Non, d'où les écarts dans l'expérience.
Pour un gaz parfait oui car c'est un fluide barotrope, où la masse volumique est proportionnelle à la pression

Q : Dans le cas stationnaire ?
R : Oui mais on perd l'aspect non rotationnel et on a $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\phi$

Q : Vous avez parlé de perte de charge, que serait-elle dans l'équation de Bernoulli ?
R : C'est une perte cinétique de l'énergie. On peut établir que $\Delta P = f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2}$, donc le terme de $\frac{v^2}{2}$. Dans Bernoulli, on ne prend pas en compte la couche limite, donc pas de perte de charge.
La charge c'est la constante dans l'équation de Bernouilli qui exprime la conservation de l'énergie dans un fluide parfait. Dans un fluide qui n'est pas parfait, il y a dissipation et la charge n'est plus constante mais diminue. On parle alors de perte de charge qui traduit la perte d'énergie. L'interprétation énergétique de l'équation de Bernoulli est importante à maitriser et discuter.

Q : Dans le cas d'un écoulement dans un tuyau de section constante, a-t-on des pertes de charge ?

R : Il faudrait prendre en compte la viscosité du fluide quantifiée par le nombre de Reynolds.
Dans le cas de l'écoulement dans un tuyau rectiligne, la perte de charge est **régulière**, c'est-à-dire que la pression diminue linéairement le long de l'écoulement. Il existe aussi des pertes de charge **singulières**, c'est-à-dire localisées, par exemple à un étranglement, ou un divergent ou encore un coude du tube.

Q : Qu'est-ce que ce nombre ?
R : $Re = \frac{\rho V L}{\eta} = \frac{||(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v}||}{||\eta\Delta\mathbf{v}||}$. Sans dimension.

Q : Peut-on alors écrire l'équation de Navier-Stokes adimensionnée ?

Q : Dans l'expérience, que vaut le nombre de Reynolds ?
R : Autour de 100000. C'est un peu grand...

Q : Qu'elle est le type d'écoulement ici ?
R : Il est laminaire à basse vitesse et turbulent à haute vitesse.
L'écoulement est turbulent, peu probable que le dispositif descende suffisamment bas en vitesse et soit suffisamment prore pour que l'écoulement puisse être laminaire

Q : De quelle forme est le profil de vitesse axiale en fonction de la distance à la buse de sortie ?
R : Une vitesse décroissante selon x, avec un plateau de vitesse à petit x.
La zone où est observé un plateau de vitesse est appelé le coeur potentiel car les effets de viscosité n'ont pas encore eu le temps ou plutôt l'espace pour faire leur oeuvre de diffusion de la quantité de mouvement

Q : Et à un x donné, en fonction de r ?
R : La vitesse est constante jusqu'à atteindre le rayon de la soufflerie puis chute brusquement.
C'est cette forme là au niveau du coeur potentiel, donc suffisamment proche de la buse, mais au delà la forme est plus douce, avec une décroissance exponentielle de la vitesse lorsqu'on s'éloigne de l'axe. La vitesse du jet sur l'axe diminue et la largeur du jet augmente au fur et à mesure qu'on s'éloigne. Il existe des modèles de jets dans les régimes laminaires et turbulent avec des formes auto-similaires, et des lois de décroissance de la vitesse et de croissance de la largeur qui sont différents selon le régime (laminaire ou turbulent) et la forme du jet (rond comme ici ou plan).

Q : Quel est le principe de l'anémomètre à fil chaud ?
R : Le fil chaud se refroidit selon la vitesse du fluide, on mesure sa résistance.

Q : Quel est le mieux : Pitot ou fil chaud ?
R : Fil chaud plus fragile, plus précis. Pitot plus robuste : aéronavale.
Pitot et anémomètre à fil chaud sont des méthodes intrusives, la grande différence est la réponse temporelle. Pitot : $\approx$ Hz, fil chaud $\approx$ kHz qui a rendu possible l'étude de la turbulence par l'accès aux fluctuations temporelles de vitesse.

Q : Qu'est-ce qu'un capillaire ?
R : Un tube dans lequel les effets de capillarité dominent devant les effets de la gravité fait intervenir le phénomène de tension de surface.
Un tube est dit capillaire lorsque son diamètre est inférieure à la longueur capillaire, qui est d'environ 2 à 3 mm pour l'eau

Remarque postérieure à la séance : pour le tube de Venturi dont la modélisation est basée sur la relation de Bernoulli caractéristique des fluides parfaits, il faut savoir que cet effet n'existerait pas pour un fluide parfait en régime d'écoulement potentiel, c'est-à-dire irrotationnel partout. Cela est expliqué en remarque dans le livre Hydrodynamique Physique de Guyon, Hulin & Petit à la fin du paragraphe consacré au tube de Venturi. Ce serait une erreur de la mentionner lors de la leçon car beaucoup trop subtil mais connaître cette subtilité en cas de question peut être utile...

Commentaires lors de la correction de la leçon

Le plan est bon.
L'illustration montrée en tout début de leçon n'a pas été assez bien exploitée. Exemple, on ne sait pas tous ce qu'est la poix.
Attention à ne pas dire qu'on va considérer tous les fluides non visqueux, mais plutôt dire qu'il y en a des plus ou moins visqueux et qu'on va présenter ici un modèle adapté aux fluides les moins visqueux comme l'eau et l'air notamment.
Attention de bien maîtriser les conditions limites pour les fluides parfaits qui sont en partie différentes de celles des fluides visqueux. On peut par exemple avoir discontinuité des vitesses dans le modèle du fluide parfait. Il faut tenir compte de la viscosité pour avoir continuité des vitesses à une paroi ou une interface. La condition de non-glissement (dite de Navier) n'existe pas pour les fluides parfaits.
Pour estimer l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds caractéristique de

l'écoulement de démonstration (jet d'air à la sortie d'une buse), le plus pertinent est prendre le diamètre de buse comme échelle caractéristique de longueur.
La force de traînée peut être abordée en question. Pour un fluide parfait, la force de traînée sur un objet est nulle en régime stationnaire (résultat connu sous nom de paradoxe de d'Alembert) mais il existe une force de traînée en régime instationnaire (connue sous le nom de force de masse ajoutée)

Exemples de « passages obligés »sur cette leçon

Temps de vidange d'un récipient (Torricelli)

Titre : F2 Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide.
Elément imposé : Le candidat présentera l'énoncé et la résolution d'un exercice sur le calcul du temps de vidange d'un récipient initialement rempli d'un fluide parfait

Présentée par : Hubert COSTE **Rapport écrit par** : Gwilherm JASPARD

Correcteur : Philippe GONDRET **Date** : 10/02/2025

Bibliographie		
Titre	**Auteurs**	**Éditeur**
J'intègre PC/PC* 6ème édition		**DUNOD**
Poly de TP Microcontrôleurs (Série 3)		

Compte-rendu détaillé de la leçon

Niveau choisi pour la leçon **: PC**

Pré-requis **:**
- Cinématique des fluides
- Equation de Navier-Stokes
Ecoulements visqueux (nombre de Reynolds et couche limite)

<u>Introduction :</u>

- En combien de temps vide-t-on un réservoir de récupération d'eau de pluie si on veut le nettoyer ?
- Connaissance en méca flu : Navier Stokes
  → Trop complexe : nécessite des hypothèses simplificatrices
  → écoulement parfait : on va le définir juste après

(2min)

I / Modèle de l'écoulement parfait

A] Définition

Un écoulement est parfait si les phénomènes diffusifs sont négligeables.
→ Transformation adiabatique (Q=0) et réversible (Sc = 0)
→ Effet de viscosité négligeable (eta → 0, Re → infini, et delta (couche limite)→ 0)

Effets :
- si **rot(v)** = **0** à t=0, alors **rot(v)** = **0** pour tout t
- pas de contrainte tangentielle

B] Équation d'Euler

Équation de Navier-Stokes : on peut supprimer le terme de viscosité

ex : $\rho\vec{g}$

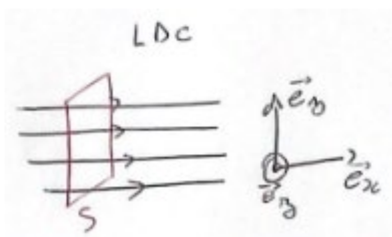
$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \vec{f}_v + \cancel{\eta\Delta\vec{v}}$$

Équation d'Euler : on obtient

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g}$$

→ On retrouve bien l'équation de la statique des fluides si régime stationnaire

Cas particuliers :



Jet rectiligne :

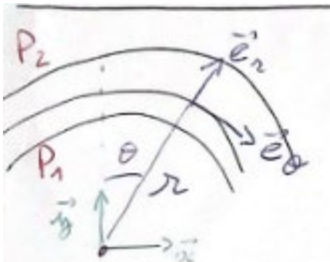
→ simplification du terme convectif :

$$\vec{v} = v(x,t)\,\vec{e}_x$$

$$\text{Donc } (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = v(t)\,\frac{\partial v(t)}{\partial x}\,\vec{e}_x$$

⇒ On a une distribution de la pression hydrostatique sur tous les plans (y,z)

Écoulement courbe :



↳ circulaires : $\vec{v} = v(r,t)\,\vec{e}_\theta$

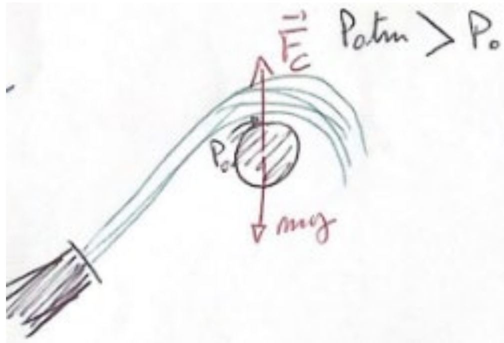
↳ $\vec{f}_v \simeq \vec{0}$: $\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\vec{\nabla}P$

→ simplification du terme convectif :

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \left(v(r,t)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left[v(r,t)\,\vec{e}_\theta\right] = \frac{v^2(r,t)}{r}\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta} = -\frac{v^2}{r}\vec{e}_r$$

⇒ La pression est une fonction croissante de r

→ Application , Effet Coanda : on souffle un jet d'air juste au dessus d'une balle de ping-pong, elle lévite



(16min30)

C] Théorème de Bernouilli

/!\ : il faut absolument connaître les hypothèses d'application du théorème (en exo, on doit vérifier qu'elles sont respectées, au moins à posteriori)

Hypothèses :
- écoulement stationnaire, incompressible et parfait
- masse volumique constante
- fluide soumis seulement aux forces de pression et à la gravité

Euler donne :

$$\rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \rho\left[\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + rot(\vec{v})\wedge\vec{v}\right] = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g}$$

On réécrit les différents termes, on peut rentrer le rho dans le gradient (car incompressible).
On a un grand terme en **grad**, et un terme en **rot v** : *** :

$$\vec{\nabla}\left(\rho\frac{v^2}{2} + P + \rho g z\right) + \vec{rot}(\vec{v})\wedge\vec{v} = \vec{0}$$

On distingue 2 cas :
- Si **rot(v)**=**0**

$$\rho\frac{v^2}{2} + P + \rho g z = cst$$

(Bernouilli fort)

NB : on doit montrer l'irrotationnalité à un instant t seulement car s'il est irrotationnel à un instant, il le reste)

- si **rot(v)<>0**

on intègre la relation sur une ligne de courant

° grad (U) .dl = d(U)

° rot(v) ^ v orthogonal à dl

$$\int_{LDC} \vec{\nabla}\left(\rho\frac{v^2}{2}+P+\rho g z\right)\cdot\vec{dl} + \int_{LDC} \vec{rot}(\vec{v})\wedge\vec{v}\cdot\vec{dl} = 0$$

$\int \vec{\nabla}(X)\,\vec{dl} = \int dX$ (déf de différentielle)

$\vec{v}$ colinéaire à $\vec{dl}$ (car LDC)

$$\int_A^B d\left(\rho\frac{v^2}{2}+P+\rho g z\right) + 0 = 0$$

On retrouve Bernouilli (faible) : constante sur une ligne de courant

Remarque : Bernouilli exprime une conservation de l'énergie mécanique

Remarque 2 : si le fluide est compressible, on peut aussi redonner Bernouilli, avec une expression de la compressibilité (par exemple, gaz parfait)

II / Application : Vidange de Torricelli

→ Slide sur le système et discussion des hypothèses :

- parfait (ok, eau peu visqueuse)
- incompressible (ok)
- stationnaire : à montrer car a priori pas du tout

(28min30)

A] Un écoulement stationnaire ?

Raisonnement en ordre de grandeur :

terme instationnaire :

$$\|(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\| \sim \frac{v_0^2}{h_0}$$

h_0 : h à t=0

terme convectif :

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\| \sim \frac{v_0}{\tau}$$

v_0 : ODG de $\vec{v}$

τ : ODG de tps de variation de $\vec{v}$

Lien entre v0, tho et L : on utilise la conservation du débit volumique (car div v = 0)

$$D_v = S\,v_A = s\,v_B$$

v_B : v_0

$$\frac{v_0}{\tau} \times \frac{h_0}{v_0^2} = \frac{h/\tau}{v_0} = \frac{s}{S} \ll 1$$

donc on peut considérer l'écoulement stationnaire si s < < S
(33min)

B] Formule de Torricelli

On a :

$$\cancel{\tfrac{1}{2}\rho v_A^2} + \cancel{P_A} + \cancel{\rho} g z_A = \tfrac{1}{2}\cancel{\rho} v_B^2 + \cancel{P_B} + \cancel{\rho} g z_B$$

Or S > > s donc vA < < vB
D'où

$$\boxed{v_B = \sqrt{2gh}}$$

(35min)

C*] Temps de vidange*

$$-S\frac{dh}{dt} = s\sqrt{2gh}$$

équation du 2nd ordre, on résoud en séparant les variables.
On intègre entre h=h0 et 0 et entre t=0 et t(vidange), on obtient :

$$\int_{h_0}^{0} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\int_{0}^{t_v} \frac{s}{S}\sqrt{2g}\, dt$$

(38min)

On aurait pu vérifier cette loi expérimentalement (mais manque de temps)
→ On aurait trouvé un temps de vidange plus long
→ Effet de contraction (section efficace < section robinet)

<u>Conclusion :</u>

On est parti de Navier Stokes
On a simplifié pour aboutir à Euler
On a ensuite établi, avec d'autres hypothèses, Bernouilli

Applications : tube de Pitot, effet Venturi (filtration sur Buchner)

Questions posées par l'enseignant (avec réponses)

Question : Faites la mesure en direct

Réponse :
On fait la mesure avec un microcontroleur

Question : Pouvez-vous intuiter la relation donnant h(t) ?

Réponse : On obtient une loi puissance, décroissante (si z vers le haut)

Question : La courbe h(t) tend vers 0 asymptotiquement ? Et vB ?

Réponse : h tend vers 0, (branche décroissante de parabole)
vB décroit linéairement avec t
cf schema

Question : Que se passe-t-il si on place le réservoir sur un plateau tournant ?

Réponse : Si le robinet est au centre, c'est plus lent car il se crée un tourbillon qui creuse la surface libre avec donc une hauteur d'eau plus faible au dessus du trou de vidange. Si le robinet est sur le côté, c'est peut-être plus rapide (effet force centrifuge en r omega^2 ?)

Question : On dit qu'on doit mettre en rotation une bouteille pour la vider plus vite, est-ce la même chose ?

Réponse : Pas la même chose car on a un récipient fermé pour la bouteille (vidange ralentie par absence entrée d'air.
Pour la bouteille, effet vortex permet de garantir une entrée d'air

Question : Que peut-on dire pour Bernouilli, si rot(v) <> 0 ? à part la relation sur une ligne de courant ? Si on intègre sur une ligne tangente en tout point à rot(v) ?

Réponse : On intègre Euler sur une ligne tangente à rot v
On a toujours (rot(v) ^ v) orthogonal à notre dl car dl parallèle à rot(v)
Donc on a aussi conservation de ($v^2/2$ + P/rho + gz) le long d'une ligne de « courant » de rot(v) (ie. Une ligne de vorticité)

Question : On a supposé que l'on avait un écoulement quasi stationnaire pour la vidange. Peut-on le vérifier à posteriori ?

Réponse : On veut vérifier v0 / tho < < v0² / L
On prend L ~ h0 et tho ~ t(vidange), on réinjecte l'expression de vB en fonction de h
On retrouve s/S < < 2 (ce qui revient à la même chose, en ordre de grandeur) => cohérent

Question : On peut utiliser Bernoulli si rot(v) = 0 ou le long d'une ligne de courant/de vorticité. Et si l'écoulement est instationnaire ?

Réponse : On garde l'hypothèse incompressible et irrotationnel
Si irrotationnel, alors v = grad(phi) donc on doit pouvoir transformer le terme instationnaire en gradien
on a conservation de [d(phi)/dt + v²/2 + P/ rho + gz]

Question : Dans quel cas utilise-t-on cette relation de Bernoulli instationnaire ?

Réponse : Dans le cas des ondes à la surface de l'eau. Dans ce cas, comme on considère des petites ondes, on peut négliger le terme en v²/2. La relation de Bernoulli en instationnaire doit aussi utlisé pour calculer la force de traînée d'un fluide sur un objet, dite force de masse ajoutée. Elle peut aussi être utilisée pour rendre compte du phénomène de « coup de bélier » intervenant lors de la fermeture brutale d'une conduite.

Question : Tube de Pitot : commentaire sur les lignes de courant, pourquoi les lignes de courant ne sont plus parallèle proche du tube ?

Réponse : On a une couche limite qui se développe proche du tube

Question : Et cela impacte la prise de pression ?

Réponse : On a une couche limite très petite, et le gradient transverse de pression est donc négligeable car la vitesse transverse est très petite devant la vitesse longitudinale, donc on ne fait pas une grande erreur en négligeant cette couche limite.

Question : De quand datent les équations d'Euler, de Bernoulli et de Navier-Stokes ? Et le tube de Pitot

Réponse : L'équation d'Euler datent d'environ 1750 (1757) puis et cells dite de Navier-Stokes d'environ 1850 (1822-1845). Le tube de Pitot inventé pour mesurer la vitesse des eaux courante (la Seine) et des bateaux date de 1732. La relation de Bernoulli date de 1738.

Question : Pourquoi a-t-il inventé son tube ?

Réponse : Pour mesurer la vitesse de l'eau dans la Seine

Question : Y a-t-il une force de trainée dans les fluides parfaits en régime stationnaire ?

Réponse : Non, c'est le paradoxe de d'Alembert : on a aucune dissipation donc aucune trainée si l'écoulement est stationnaire et irrotationnel, avec un écoulement symétrique amont-aval pour des objets symétriques. Dans la réalité, l'écoulement est disymétrique amont-aval par frottement visqueux et éventuellement décollement des couches limites, ce qui entraine une dépression en aval.

A noter qu'il peut exister une force de traînée dans les fluides parfait en régime stationnaire, lorsque l'écoulement est à même d'évacuer l'énergie à l'infini, comme dans le cas des vagues induites dans le sillage d'un objet se déplaçant à la surface de l'eau : c'est la traînée de vagues.

Question : Peut-on avoir des forces de trainée si l'objet est en train d'accélérer dans l'écoulement parfait ?

Réponse : En accélérant, on doit mettre en mouvement plus de fluide, qui s'oppose au mouvement de la sphère, et dont augmenter l'énergie cinétique du fluide. Le travail nécessaire à cela correspond celui de la force dite de masse ajoutée.

Question : Un gaz parfait est-il un fluide parfait ?

Réponse : Non, car un gaz parfait a une viscosité (cf théorie cinétique).

Question : Qu'est-ce qu'un fluide parfait ?

Réponse : Un fluide parfait est un fluide avec une viscosité nulle, alors qu'un écoulement parfait est un écoulement où on peut négliger les termes de dissipation visqueuse

Question : Que peut-on dire des conditions aux limites en écoulement parfait ?

Réponse : continuité de la contrainte normale (pression) et continuité de la vitesse normale (non pénétration) MAIS pas continuité contrainte tangentielle et vitesse tangentielle
(même chose pour une paroi solide ou une interface entre 2 fluides)

Question : Jet rectiligne : v(x,t) ex ? Est-ce possible avec la conservation de la masse ?

Réponse : Si incompressible, non (car div(v) = 0) donc v(t) seulement
Si compressible, c'est possible (onde longitudinale acoustique)

Commentaires lors de la correction de la leçon

Le binôme prend en note les commentaires de l'enseignant liés au contenu de la leçon : choix des thématiques abordées, plan choisi, notions hors-programme, expériences, respect du format de la leçon. **L'enseignant ajoute ou modifie abondamment des commentaires à posteriori.**

Les commentaires relatifs à la prestation de l'étudiant (rapidité, élocution, enthousiasme, niveau disciplinaire, etc.) sont à remplir sur la fiche « Évaluation » par l'enseignant, qui sera mis à disposition de l'étudiant passé à l'oral uniquement.

C'était très bien.
On peut aller un peu plus vite pour avoir le temps de faire l'expérience.

Remarque : [rho v²/2 + P + rho g z] est appelée la charge : la relation de Bernoulli traduit la conservation de la charge, et c'est pour cela qu'on parle de perte de charge sur un écoulement de Poiseuille (les forces de viscosité dissipent de l'énergie, ie de la charge (= énergie volumique))

Torricelli : v = sqrt(2gh) c'est la même formule que pour la chute libre → les particules fluides sont en chute libre !

Pour le calcul d'ordre de grandeur, prendre clairement h0 comme longueur caractéristique

loi de Torricelli : 1643 (Torricelli est contemporain de Galilée)
Tube de Pitot : 1732
Relation de Bernoulli : 1738
Equation Euler : milieu 18ème (1757)
Equation de Navier-Stokes : milieu 19ème (1822-1845)

Si on met un réservoir en rotation, avec le trou au milieu, on vide moins vite (heff < hrepos)
A. Caquas, L. R. Pastur, A. Genty & P. Gondret, Bathtub vortex effect on Torricelli's law, Physical Review Fluids 8, 044702 (2023).

Exemples de « passages obligés » sur cette leçon