

Induction

niveau ~~PXI~~ 2^e
CPGE

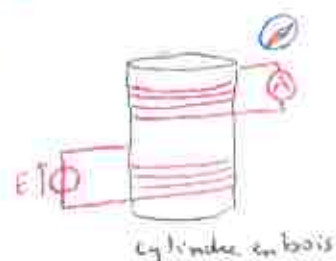
Dunod $\begin{cases} \text{PCSI} \\ \text{PSI} \end{cases}$

Introduction

en 1831 Faraday par son expérience $\begin{cases} \text{bobine liée à } \mathcal{A} + \text{boussole} \\ \text{bobine liée à pile + interrupteur} \\ \text{produit } = \vec{B} \end{cases}$

en allumant interrupteur boussole ds 1 sens
puis en fermant ds autre sens.

il refait en ajoutant piles et cylindre en fer doux
il déduit que variations du courant du 1^{er} circuit
q_i est à l'origine du courant détecté ds le 2^e

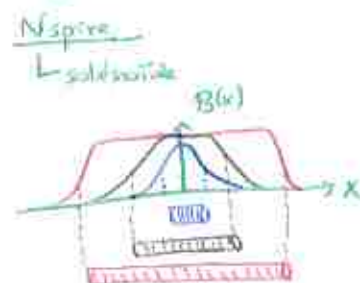


Joseph Henry avait fait m^e expérience 1 an + tôt mais n'avait pas publié ses résultats

à l'intérieur d'un solénoïde, $\vec{B} \sim$ uniforme $= \mu_0 n I \vec{u}_z$
loin des bords

si courant variable $i(t) = \vec{B}(t)$ par stationnaire

+ bobine longue \rightarrow effet de Bord sont négligeable



Circuit fixe + indéformable, \vec{B} variable \Rightarrow Neumann \rightarrow observateur lié au circuit

Circuit mobile ou déformable, \vec{B} station. \Rightarrow Lorentz \rightarrow observateur lié au src \vec{B}

Par éq^s Maxwell on étudie ces 2 cas
et on verra applications

Induction de Neumann

circuit fixe et indéformable, plongé ds \vec{B} ext variable ds t
peut être le siège de courants induits

cadre

ARQS magnétique:

- néglige propage ondes devant variation champ : $L \ll \tau_c$

pour distances d'ordre $L=1m$ on considère des
freq. allant jusqu'à 100 MHz au max

on néglige le retard de propagation des champ EM

$$\text{si } L \ll \lambda \rightarrow \frac{c}{f}$$

$$\Rightarrow \text{à } L=1m \rightarrow f=100\text{ MHz} \rightarrow \lambda=3m$$

- on suppose $|\vec{j}| \gg \rho_c$ c'est la partie magnétique de ARQS magn.

C'est ce qui distingue ARQS magn. de ARQS électrique

\rightarrow courant électrique + important que densité charge
(avec $c = v_{\text{émis}})$

\Rightarrow négliger contributions de charges et se concentrer
sur effets magnétiques inductifs

- on suppose réf galiléen et conductem fixe dans ce réf.

\pm non relativiste

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \phi \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{v} &= \vec{0} \Rightarrow \vec{v} \times \vec{B} = \vec{0} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla} \phi \\ \vec{J} &= \sigma \vec{E} \end{aligned}$$

mais $\vec{E} \cdot \vec{v} = 0$ (car $\vec{v} = \vec{0}$)

conséquences:

- électroneutralité des conducteurs (pas d'accumulation de charges)
 $\rho = 0$

- eq. conserv. charge devient : $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ \rightarrow courant conservé localement

(car $\rho \approx \text{cte} = 0$ ($\frac{\partial \rho}{\partial t}$ varie peu) (pas d'accumulation ni fuite)

\rightarrow cela reflète l'incompressibilité du courant de conductem
électrique

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

\Rightarrow arg: vitesse \vec{v} est cte sans accumulation

(comme fluide incompressible)

on utilise loi d'Ohm local : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ avec $\sigma = 6 \times 10^7 \text{ S/m}$ pour Cu

Modélisation

en ARQS: $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ $\text{div } \vec{B} = 0$

Max-Flux $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A}$ potentiel vecteur tq $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

$\text{div } \vec{B} = 0$

$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

par $\text{div}(\text{rot}) = 0$

Max-Torad $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
 $\text{rot } \vec{E} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$

$\Rightarrow \text{rot}(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
 $\swarrow \searrow$
 terme statique variation \vec{B} et \vec{E}

champ électromoteur de Neumann $\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

c'est lui qui est responsable de l'induction

$\Rightarrow \vec{j} = \sigma_0 \vec{E} = \sigma_0 (-\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$

* le cas général: $\vec{j} = \sigma_0 (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ qd conducteur bouge à vitesse \vec{v} ds champ \vec{B}

~~force électromotrice d'origine mécanique~~ présente ds rail mobile par ex

✓ c'est un terme de Hall qu'on obtient d'un modèle de Drude

on cherche bien entre courant passant à travers conducteur et tension aux bornes

$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{j}$ uniforme ds conducteur filiforme
 \Rightarrow ne dépend pas de t et $i_{A \rightarrow B} = jS$

sur morceau conducteur $\int_A^B \vec{j} \cdot d\vec{l} = -\sigma_0 \int_A^B \vec{\nabla}V \cdot d\vec{l} - \sigma_0 \int_A^B \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}$
 $i_{A \rightarrow B} \frac{L}{S} \quad \sigma_0 (V_A - V_B)$



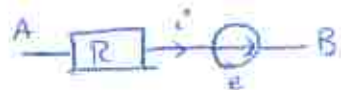
on définit:

$$R_{AB} = \frac{L}{\sigma_0 S}$$

$$e_{AB} = \int_A^B - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{P}$$

force électromotrice de Neumann

$$\Rightarrow V_A - V_B = R_{AB} i_{A \rightarrow B} - e_{AB}$$



* on doit orienter e et ds de m même sens pour que $d\vec{s} \cdot d\vec{t} = \text{élément vol.} > 0$

Si on ferme circuit

$$e = Ri$$

$$\text{car } V_A = V_B$$



en électrostatique classique, \vec{E} provient de charges $\rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}V$
 = champ conservatif

En induction \vec{E} provient de la variation de \vec{B} par $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
 et ce champ n'est pas conservatif

en général force électrostatique = circulation champ électrique total de circuit

$$\mathcal{E} = \oint_D \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\text{en électrostat. } \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

en induction $\neq 0$ = fem agit comme "tension source" mais sans pile

$$\text{car } \mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

* champ conservatif \rightarrow circulation le long chemin fermé = 0 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

\rightarrow derive d'un potentiel scalaire $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$

\rightarrow son rotationnel est nul $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$

tension dépend uniquement du départ et arrive par chemin

Donc on peut avoir tension de circuit fermé sans pile
 uniquement par ce champ non conservatif

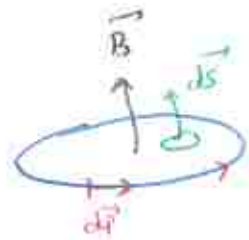
\therefore on a utilisé Maxwell pour réécrire loi d'Ohm à l'échelle conducteur (forme intégrale). Si on ferme conducteur, circulation \vec{E} pas conservative

\vec{E} pas conservatif du à un terme provenant des variations temporelle de \vec{B}

\vec{A} par loi pratique = on se lit la force électromotrice au flux \vec{B}

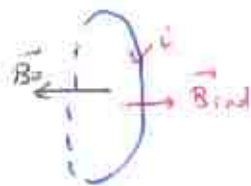
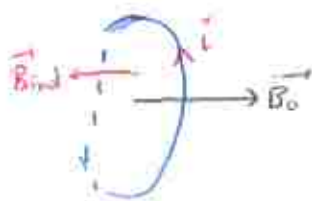
Loi de Lenz soit conduct. filiforme fermé immobile:

par Thm Stokes:
$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \\ &= - \oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \Phi_B \end{aligned}$$
→ Flux du champ \vec{B}



Lenz: les phénomènes d'induction ont tendance, par leurs effets, à s'opposer aux causes qui leur ont donné naissance
 ⇒ une loi de modération

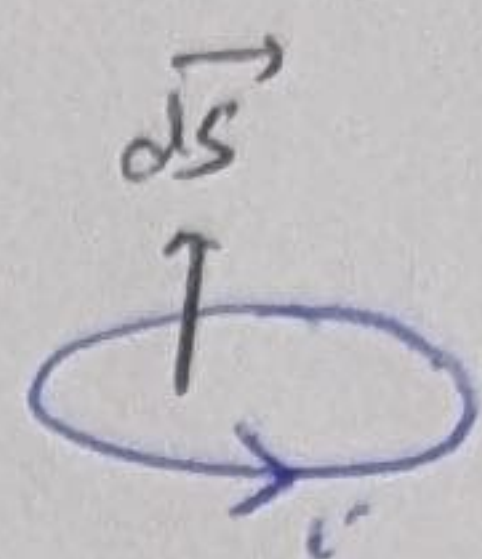
ex de l'expérience de départ, flux \nearrow qd on approche aimant
 ⇒ > 0 alors force électromotrice < 0 ⇒ $i < 0$
 ⇒ ce courant \vec{B}_{ind} qui s'oppose à \vec{B} aimant



Couplage Inductif

1) Auto-inductance

spire



soit circuit indéformable parcouru par $i(t)$.

selon Max-Amp. ce courant induit champ $\vec{B}_p^{(i,t)}$ appelé

champ propre dont flux à travers surf. de la spire :

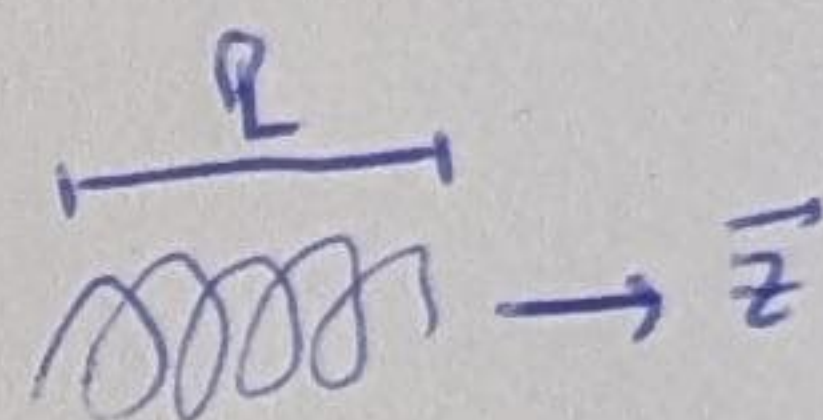
$$\Phi_p = \iint_S \vec{B}_p \cdot d\vec{S} \propto j \propto I$$

en utilisant linéarité Max-Amp (où
courant déplacement n'apparaît pas en ARQS)

on sait que à l'int. bobine :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N}{l} i \vec{u}_z$$

→ longueur bobine



Flux à travers bobine :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \frac{\mu_0 N}{l} i \vec{u}_z \cdot \underbrace{4\pi r^2 N \vec{u}_z}_{\text{surface bobine}}$$

$$\Phi = \frac{4\pi r^2 \mu_0 N^2}{l} i$$

$$\Phi = L i$$

↑ inductance propre $[L] = \text{Henry}$

∴ élément de circuit d'inductance L soumis à $i(t)$ génère fem

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = - L \frac{di(t)}{dt} \quad \text{fem auto-induite}$$

en convention récepteur on retrouve $U = L \frac{di}{dt}$

(en négligeant effets résistifs de bob (pas de r))

démonstration ds bobine : invariant par translation en \vec{u}_z
et par rotation autour de \vec{u}_z

$$\vec{B}_p(r, \theta, z) = \vec{B}_p(r)$$

+ tout plan contenant \vec{u}_z est antisym (i en haut ≠ i en bas)

pour distrib courant (cause) : \vec{B} est \perp à ces plans

$$\vec{B} \in \text{axe } \vec{u}_z \Rightarrow \vec{B} = B(r) \vec{u}_z$$

$$\text{Thm Ampère} = \mu_0 N I = \int_0^l \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

en suppose $l \gg r$:
champ B nul à l'ext. et unif. à l'int.

ne
pas parler
d'éq.
Maxwell

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N i}{l} \vec{u}_z \rightarrow 1 \text{ spire} = \phi_1 = \vec{B} \cdot \vec{S} = \frac{\mu_0 N S i}{l}$$

$$\therefore \text{pour } N \text{ spires} = \phi_N = \frac{\mu_0 N^2 S i}{l}$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$$

Ex : bob. Leybold 250 spires
 $r = 3,5 \text{ cm}$
 $l = 30 \text{ cm}$) voir notice
 $\Rightarrow L = 3 \text{ mH}$

si géométrie circuit change $\Rightarrow L$ change
 $\therefore e \neq -L \frac{di}{dt}$ car L va dépendre de t

$$\left[\begin{aligned} \star \text{ bob soumise à } u, \text{ ressort } P = u i = L i \frac{di}{dt} \\ \therefore \mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i^2 \end{aligned} \right]$$

2) Inductance mutuelle

flux issu de circuit 1 peut traverser circuit 2

\Rightarrow circuit 2 sera soumis à variation flux
 (lié à variation courant i_1)

\Rightarrow apparition fem induite $\phi_{1 \rightarrow 2}$

(cette fem va induire un courant ~~induit~~
 qui va induire champ \vec{B} s'opposant
 aux variations de $\vec{B}_1 \Rightarrow$ Lenz)

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \text{rot } \vec{A}_1 \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma_1} \vec{A}_1 \cdot d\vec{P}_2$$

par Biot-Savart : $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} \wedge \vec{r}'}{r'^3} d\vec{r}' \rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}}{r'} d\vec{r}'$

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \oint_{\Gamma_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\oint_{\Gamma_1} \frac{i_1 d\vec{\ell}_1}{r_{12}} \right] \cdot d\vec{\ell}_2$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{r_{12}} = M_{12} i_1 = \Phi_{1 \rightarrow 2}$$

par symétrie :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{21} i_2 \text{ aussi}$$

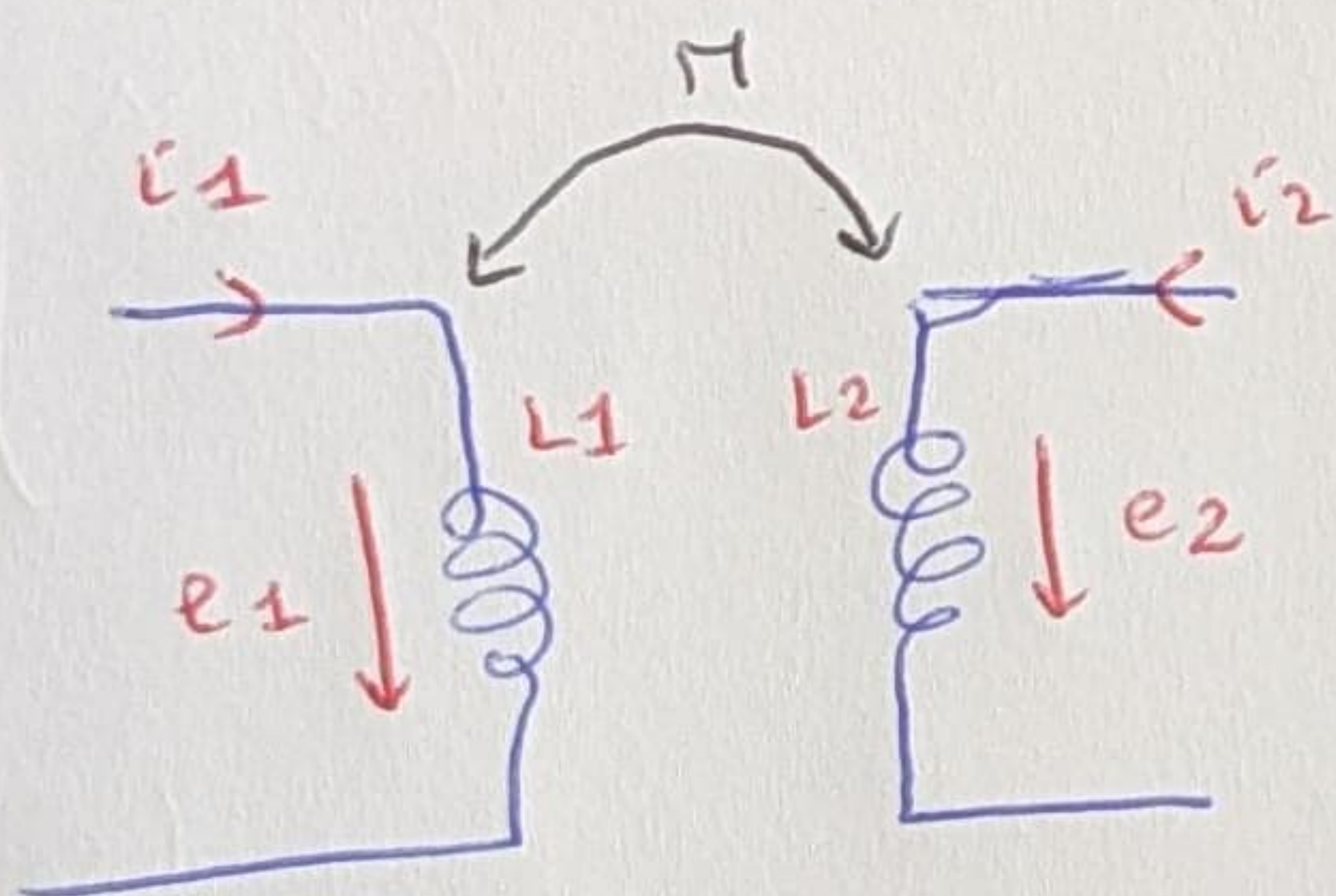
$$\text{et on remarque } M_{21} = M_{12} \doteq M$$

inductance mutuelle

$$[M] = \text{Henry}$$

traduit l'influence mag.
qu'a chaque circuit
sur l'autre

$$\therefore \text{fem de chaque circuit: } \begin{cases} e_1 = -M \frac{di_2}{dt} \\ e_2 = -M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$



les fem ds le
schéma sont
en convention générateur

Expérience

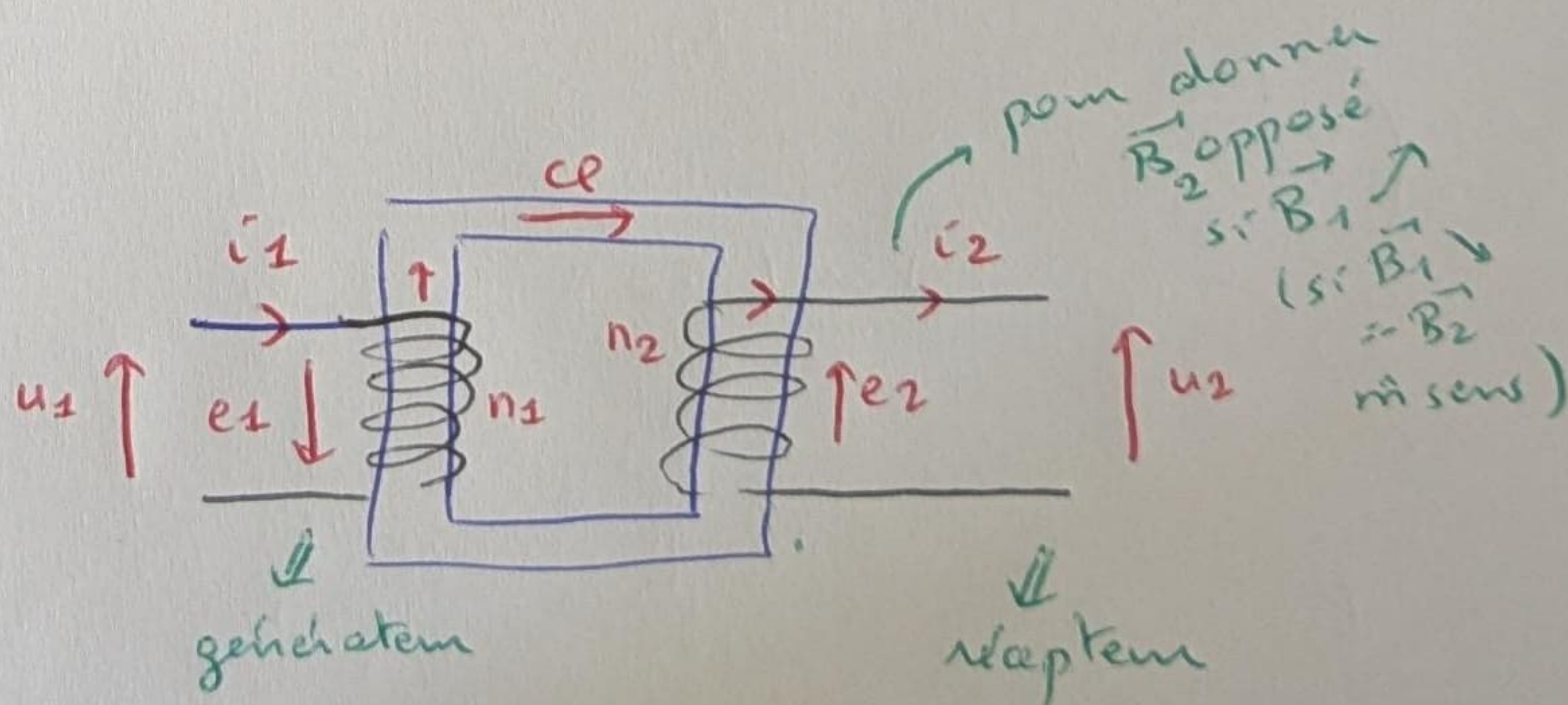
et vérifier $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$

3] Applications

1) Transformateur

supposons inductances
pures sans résistance

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$



transform. parfait \Rightarrow tout Φ
de 1 va ds 2 $\Rightarrow M = \sqrt{L_1 L_2}$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{u_1}{L_1} = \frac{di_1}{dt} + \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{di_2}{dt} \\ \frac{u_2}{\sqrt{L_1 L_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{di_2}{dt} + \frac{di_1}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{u_1}{u_2} &= \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \\ \Rightarrow \frac{u_1}{u_2} &= \frac{N_1}{N_2} \end{aligned}$$

\therefore rapport du transformateur

$$m = \frac{N_2}{N_1}$$

$m > 1$ \therefore tension augmente

$m < 1$ \therefore " diminue

($m = 1$ = isolant = $u_2 = u_1$)

\downarrow
si les 2 circuits n'ont aucun lien

\therefore ont des masses \neq

alors on l'utilise pour séparer les 2 circuits

\Rightarrow transformateur d'isolement

* conservation puissance $\therefore u_1 i_1 = u_2 i_2$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{i_2}{i_1}$$

* en réalité = transfo pas parfait

$$P_{\text{joule}} = R i^2$$

pour réduire \rightarrow fil Cu épais
 \rightarrow refroidissement

pour réduire
utiliser fer doux
ou alliages NiFe

perdes par effet joule
dans les bobines

perdes liées au cycle d'hysteresis
magnétique du fer
 \propto aire cycle

perdes par courants de Foucault

\downarrow
Courants parasites
induits ds Fer
et circulent en boucle
à l'intérieur du noyau
 $=$ effet joule ds Fer

réduction par noyaux en feuilles
minces isolées

Courants de Foucaultsoit conducteur de conductivité σ
soumis à \vec{B}_{ext}

Max-Farad: $\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}_{ext}}{\partial t}$ \Rightarrow on a une fem induite
 \Rightarrow des courants induits (loi Ohm)

ces courants sont ds le vol. du conducteur

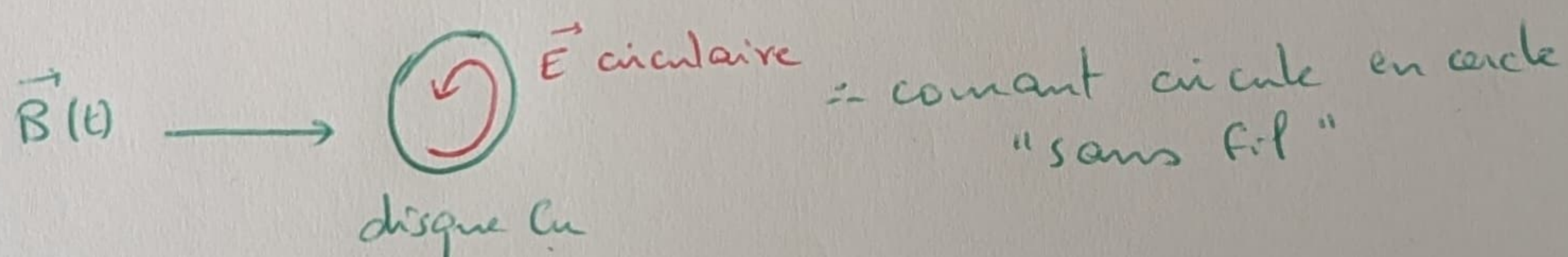
et entraînent pertes par
effet Joule \Rightarrow Ec dissipée en chaleur \Rightarrow courants de Foucault
(1851)

* épaisseur peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma \mu_0 \omega}}$ \Rightarrow dissipation a lieu juste
sur cette échelle

* par $\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ \Rightarrow champ électrique est créé ds la matière

(tombillonnaire) q^- met en mouvement les e^- \Rightarrow les courants formés n'est pas guidés par des fils

(pas de circuit imposé) et forme des boucles

fermées naturelles dans le volume \perp au flux \vec{B} variable

* $P_{Joule} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma E^2$ et en régime sinusoïdal $E \propto \omega B$
 $= \sigma \omega^2 B^2$

\vec{B}_{ext} est la source de $\vec{E} \Rightarrow$ m. inv. et des sym. opposés $\Rightarrow \vec{E} = E(r) \vec{e}_\theta$
 d'où "tombillonnaire" ou "non conservatif" car sa src \neq charges
 \downarrow
 car \vec{E} vect et \vec{B} pseudo vect

~~XXXXXXXXXX~~

$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}_{ext}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ $\Rightarrow \vec{E} = - \frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \vec{e}_\theta$
 $= \frac{r}{2} \omega B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_\theta$
 circulation sur cercle de rayon r $(2\pi r)$ Flux \vec{B} à travers ce cercle (πr^2) prenons $B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z \parallel$ axe conduct.

donc courant Foucault:

$$\vec{j}_F = \sigma \vec{E} = \frac{1}{2} r \omega B_0 \sigma \sin(\omega t) \vec{e}_\theta$$

I6

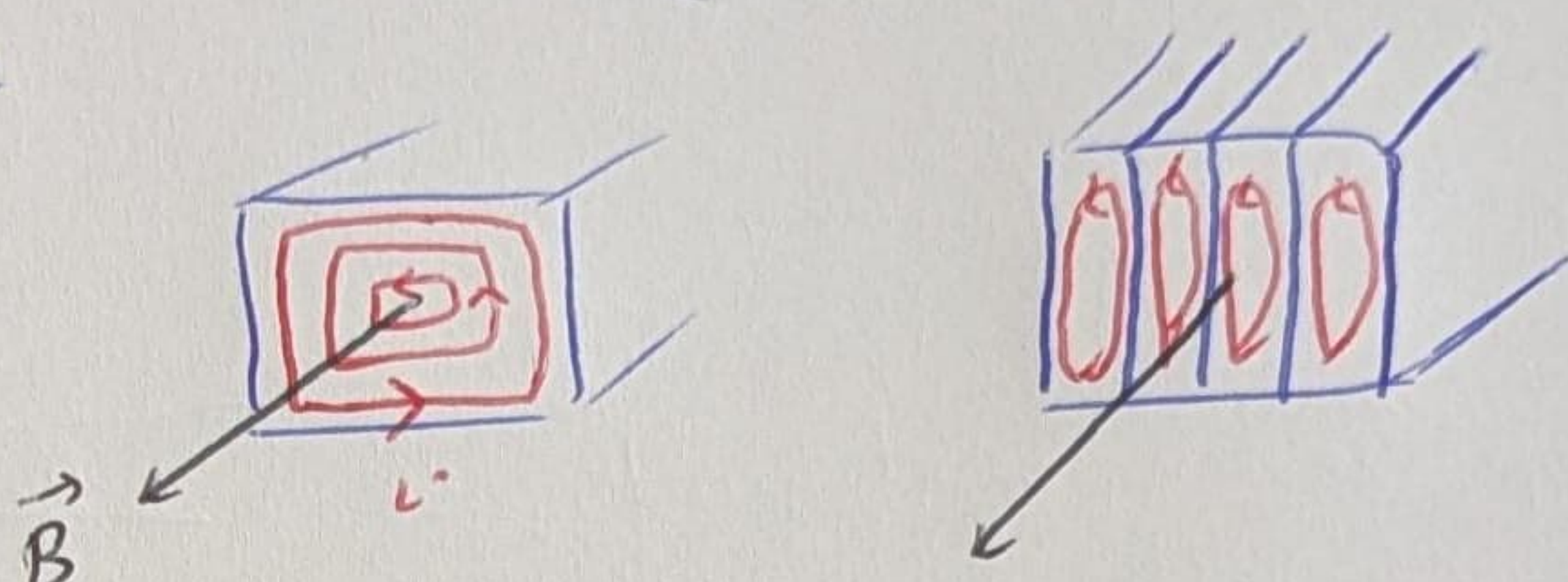
par effet joule: $\langle P_{\text{dissipée}} \rangle = \left\langle \int \vec{j}_F \cdot \vec{E} dV \right\rangle$ $V = 2\pi R h$

$$= \frac{\sigma}{16} \omega^2 B_0^2 V R^2$$

puissance $\propto \omega^2 = \propto \text{freq}^2$ (mais aussi $\delta \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$)

puissance $\propto V$ et $\propto R^2$

\therefore feuilletage \rightarrow



cette énergie dissipée est un désavantage ds transf.

mais peut être avantage \rightarrow chauffage par induct°
 \rightarrow freinage par courant foucault

Freinage

manip chute aimant ds conducteur + vide'o

~~la chute~~ Pour freiner train = la c'est la roue qui tourne ds champ ext. \rightarrow induction Lorentz

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{e} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} + \int_R (\vec{v} \wedge \vec{B}) d\vec{l}$$

- Brevet 1903 et réalisation en 1936

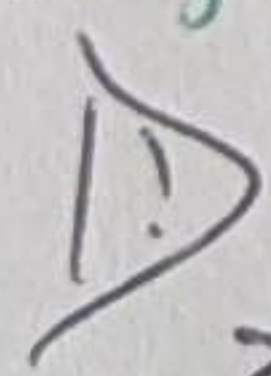
- on n'aura pas freinage total \therefore faut le lien à un syst de freinage

- pas de contact \therefore pas d'usure

- l'énergie est totalement perdue

il faut que métal soit non magnétique comme Cu / Al

car par freinage $\vec{v} \downarrow$
 \therefore induction qui ralentit freinage



* si on met toute la roue ds \vec{B} (m si elle tourne) \rightarrow pas de ralentissement
 il faut que B soit localisé sur 1 partie de la roue

car si B homogène $\therefore \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \rightarrow E_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = r \omega B_0 \vec{e}_r$

\therefore on aura \vec{j} purement radial $\therefore \text{div } \vec{j} = 0 =$ courant nul ds conducteur. Si B localisé \therefore pas de j radial et courant fait ce qu'il veut \rightarrow dissipation

Chauffage

utiliser pertes joule pour chauffer les casseroles

plaque : circuit parcouru par courant variable $\Rightarrow \vec{B}$ variable

\Rightarrow fond casserole est plongé ds ce \vec{B} variable

\Rightarrow courants de Foucault \Rightarrow effet Joule $q =$ chauffe

puissance dissipée $u \propto i^2 \propto \omega^2$

\Rightarrow freq \nearrow chauffe \nearrow

mais fond casserole est conducteur \Rightarrow champ pénètre
juste sur une épaisseur \sim épaisseur de peau

qui \searrow ~~donc~~ $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$ \Rightarrow il faut faire un compromis

Le choix effectue est 25 kHz

$\xrightarrow{\text{Cu}} \delta = 0,4 \text{ mm}$
très bon conducteur
thermique

Bilan énergétique

$$P dt = m C_p dT$$

Soit le volume \equiv cylindre de rayon $R = 10 \text{ cm}$
et hauteur $= \delta$

La plaque donne $B \sim 1 \text{ mT}$
et $\omega = 2\pi \times 25 \times 10^3$

$$\begin{array}{l} \text{Cu} \\ \sigma = 5,96 \times 10^7 \text{ S/m} \\ \rho = 8960 \text{ kg/m}^3 \\ C_p = 385 \text{ J/kg/K} \end{array}$$

$$\Rightarrow P = 11 \text{ kW}$$

$$\text{vitesse d'augmentation } T = \frac{dT}{dt} = 266 \text{ K/s !}$$

puis la chaleur est diffusée vers le reste de la casserole

c'est une surestimation ~~(on prend pas en compte par ex des)~~
bien sûr

pas besoin d'avoir B fort pour avoir chauffage efficace

30% \rightarrow plaque normal 60% en gaz 40% car chaleur ds casserole et pas
sin plaque \rightarrow pas conduct / rayonn.
par air

Intérêt plaque : bon rendement / diminution accidents domestiques
liés au gaz

mais ne fait pas avec tous les plats : il faut être conducteur
et ferromagnétique pour canaliser \vec{B}
~~Cu / céramique~~ \leftarrow acier / inox \checkmark