

Oscillateurs syst phys. qui vont répéter un comportement de manière périodique.

Ex ds vie de Tous jours:  
cycle jour/nuit - battements ☺

En général pas linéaire mais on fait souvent approx pour linéariser ces syst

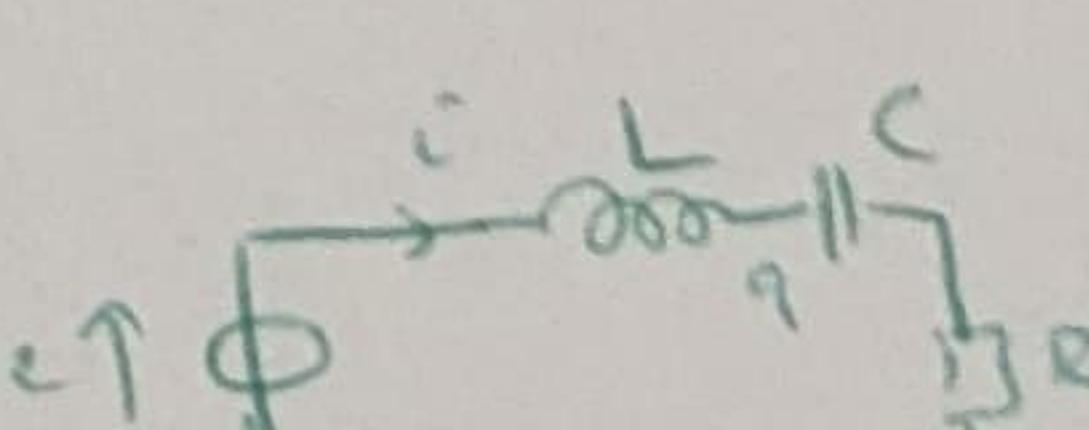
## I] Oscillateurs linéaires et Portraits de Phase

### 1) OH et électrique

Eq. générale  $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = g(t)$

ressort  $\ddot{x} + \frac{\lambda}{m} \dot{x} + \frac{K}{m} x = f(t)$

RLC  $\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = e(t)$



exitation annat: par frott. glide

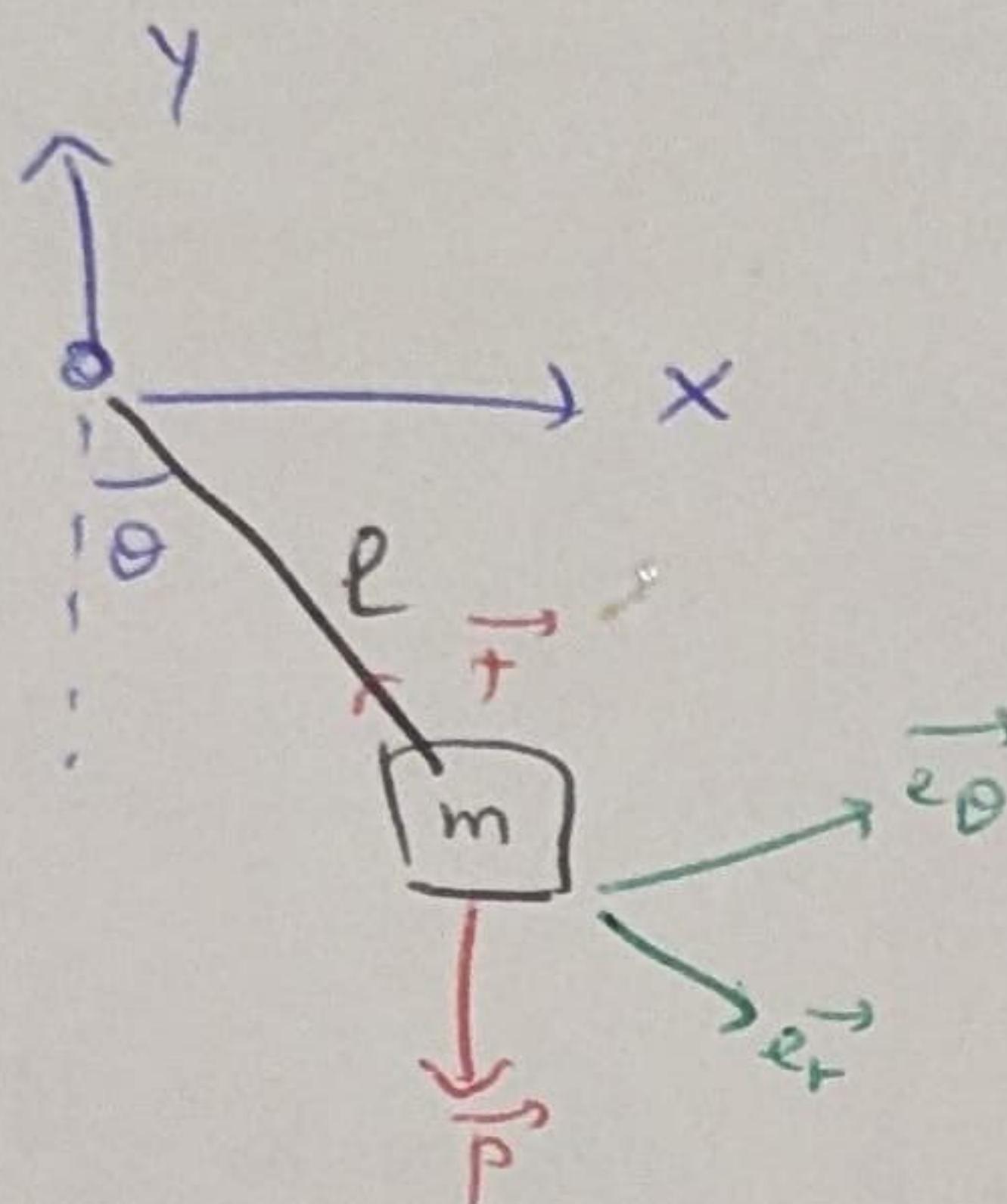
## 2) Pendule simple

(2)

Positiveres dissipatifs  
source

$\therefore$  pendule  $\begin{cases} \text{libre} & g(t)=0 \\ \text{non amorti} & \end{cases}$

$$\frac{\omega_0}{\alpha} \dot{x} = 0$$



$$\vec{OM} = l \vec{e}_r$$

$$\vec{F} = l \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

Approche énergétique :  $E_C = \frac{1}{2} m (l \dot{\theta})^2$

$$E_P = mgl (1 - \cos \theta)$$

en prenant réf.  $E_P (y = -l) = 0$

$$\text{conserv. } E \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\text{si } \theta \text{ petit} \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

isochronisme des oscil.

afin de visualiser le comportement du OH, on reformule l'éq<sup>o</sup>  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$

Portrait phase

$$\text{on multiplie par } \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 \theta^2 \right) = 0$$

et on fait apparaître la conservat° d'E

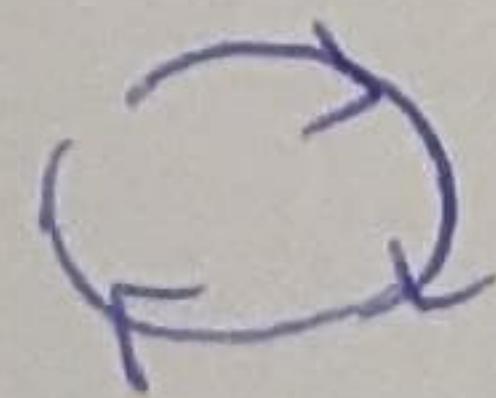
$$\therefore \text{pour toute trajectoire } \theta(t) \text{ on a : } \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 \theta^2 = \text{cste}$$

$$\therefore \exists \text{cste } C \text{ tq } \cancel{\frac{1}{2} \dot{\theta}^2} \quad \left( \frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \right)^2 + \theta^2 = C$$

Ds plan  $(\theta, \frac{\dot{\theta}}{\omega_0}) \rightarrow$  éq° cercle de centre  $(0,0)$  et rayon  $\sqrt{C}$   $C \text{ fact > 0}$

Le tracé des trajectoires ds ce plan est appelé portrait de phase

- par CI  $(\theta(0), \dot{\theta}(t=0))$  on repère 1 pt ds portrait phase  $\Rightarrow$  on fixe la cste C
  - $\therefore$  on fixe la trajectoire
  - $\therefore$  CI fixent intégralement la trajectoire
- pas de croisement entre trajectoires (car sinon ils auraient m CI q-est le pt de croisement)
- par signe de  $\dot{\theta}$  on trouve q'il y a sens parcours ds l'esp-phase ds partie sup,  $\dot{\theta} > 0 \Rightarrow \theta$  dpt augm etu  $\Rightarrow$  parcours de gauche vers droite



~~3) Portée de phase~~

(1)

## II] Oscillateurs NL

### 1) Formule de Borda

$$\therefore E_m \text{ conservé} \therefore \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) = mgl(1 - \cos \theta_0)$$

$$\text{par } \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

$\uparrow$   
au max  
 $\therefore E_c = 0$

$$dt = \frac{d\theta}{\pm \omega_0 \sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}$$

$$\text{on intègre entre} \begin{cases} 0 - \frac{\pi}{4} & \text{pour } dt \\ \theta_0 - 0 & \text{pour } d\theta \end{cases}$$

on choisit (-) car  $\theta$  diminue

$$\frac{T}{T_0} = -\frac{1}{2\omega_0} \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \quad \text{par identité trig}$$

$$\text{chg var. } \sin \frac{\theta}{2} = X \sin \psi$$

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - X^2 \sin^2 \psi}} = \frac{2T_0}{\pi} K(X)$$

$$\text{D.L. à ordre 2: } K(X) \approx \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} X^2$$

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right) \quad \text{Borda}$$

## Port. Phase N.L

6

$$\left(\frac{1}{\omega_0} \dot{\theta}\right)^2 - 2 \cos \theta = C$$

)  $-2 < C < 2 \therefore \exists$  valeurs  $\theta$  tq  $-2 \cos \theta = C$  où  $\dot{\theta} = 0$

trajectoire se boucle sur elle-même  
valable modulo  $2\pi$

)  $C > 2$  pas de valeurs  $\theta$  tq  $\dot{\theta} = 0$   $\therefore$  vitesse s'annule pas et  $\theta$  court ou décourt indéfiniment  
mouvement une révolution



)  $C = 2$  valeur critique

le pendule prend un temps long à atteindre  $\dot{\theta} = 0$   
(qui correspond à  $\theta = p\pi$  tq  $p \in \mathbb{Z}$ )  
 $(2n+1)$

on part de  $E_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta)$

$$\text{et } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\frac{2(E_m - mgl)}{mgl} = \frac{1}{\omega_0^2} \dot{\theta}^2 - 2 \cos \theta \therefore C = 2 \left( \frac{E_m}{mgl} - 1 \right)$$

$$\therefore E_c \geq 0 \therefore E_m \geq E_p \Rightarrow \frac{E_p}{mgl} \geq \frac{C}{2} + 1$$

code Diff- bord [2]

$C < 2$  état lié : ~~donc~~ [ ] angle est borné

$C > 2$  état diffusion : tous les angles atteignables

PP permet de comprendre les comportements d'ONL

$\therefore$  il est pertinent pour un O donné de chercher à tracer son PP afin de connaître son comportement

## Port. Phase N.L

6

$$\left(\frac{1}{\omega_0} \dot{\theta}\right)^2 - 2 \cos \theta = C$$

•)  $-2 < C < 2 \Leftrightarrow \exists$  valeurs  $\theta$  tq  $-2 \cos \theta = C$  où  $\dot{\theta} = 0$

trajectoire se boucle sur elle-même  
valable modulo  $2\pi$

•)  $C > 2$  pas de valeurs  $\theta$  tq  $\dot{\theta} = 0$  : vitesse s'annule pas  
et  $\theta$  croît ou décroît indéfiniment  
mais est une révolution



•)  $C = 2$  valeur critique

le pendule prend un temps long à atteindre  $\dot{\theta} = 0$

(q correspond à  $\theta = p\pi$  tq  $p \in \mathbb{Z}$ )  
 $(2n+1)$

on part de  $E_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta)$

$$\text{et } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\frac{2(E_m - mgl)}{mgl} = \frac{1}{\omega_0^2} \dot{\theta}^2 - 2 \cos \theta \quad \therefore C = 2 \left( \frac{E_m}{mgl} - 1 \right)$$

$$\therefore E_c \geq 0 \quad \therefore E_m \geq E_p \quad \Rightarrow \quad \frac{E_p}{mgl} \geq \frac{C}{2} + 1$$

code Diff - bord [2]

$C < 2$  = état lié : ~~tous~~ [ ] angle est borné

$C > 2$  = état diffusion : tous ~~atteignables~~ atteignables

PP permet de comprendre les comportements d'ONL  
∴ il est pertinent pour un O donné de chercher à tracer son PP afin de connaître son comportement

## Pendule Simple

ici on fera avec l'approx harmonique (cas linéaire).

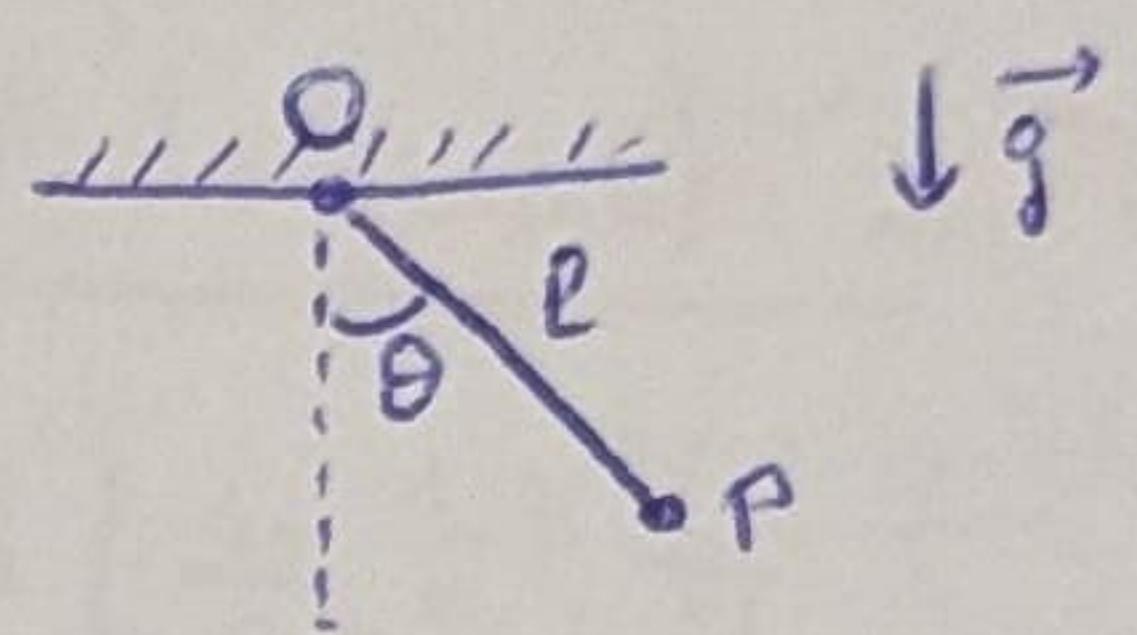
Si on sort de cette approx  $\rightarrow$  Formule de Borda qui donne période en fonction amplitude d'oscillation

(cas à  $\theta$  faible  $< 20^\circ \rightarrow$  isochronisme =  $T$  indép des amplitudes)

Youtube  
E-Learning  
Physique  
"exercice + important  
de méca pt"

On a 3 théorèmes de méca de pt.

- PFD
- Thm énergétique  $\rightarrow$  le + efficace car c'est un problème à 1 seul paramètre ( $\theta$ )
- Thm moment cinétique



Le Thm Em est scalaire = écriture du projeté  $\vec{F}$  du PFD = efficace pour 1 paramètre

Pour les 3, il faut définir syst  $\rightarrow$  P de masse m

référentiel  $\rightarrow$  le sol supposé galiléen

Bilan  $\vec{F}$   $\rightarrow \vec{F}$  et  $\vec{P} = m\vec{g}$

car c'est

for élastique =

pas  $\rightarrow$   $\vec{F}$

orienté vers  
le haut

Pour Thm énergétique = laquelle est  $\vec{F}$  conservative?

Poids oui  $\rightarrow E_p = mgz$

Tension non Mais  $\Delta$  ne travaille pas  
 $\rightarrow$  modifie pas Em

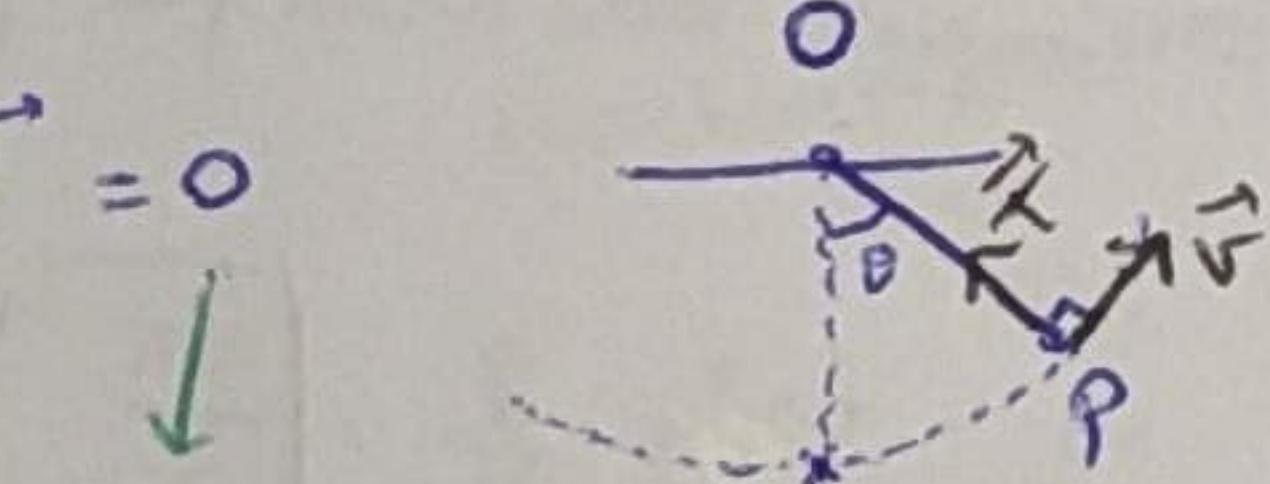
(pas comme Friction) on peut dire qu'elle

$\rightarrow E_p = \text{cste} \Rightarrow W=0$  mais par convention  
on choisit "non conservatif"

### Méthode Energétique:

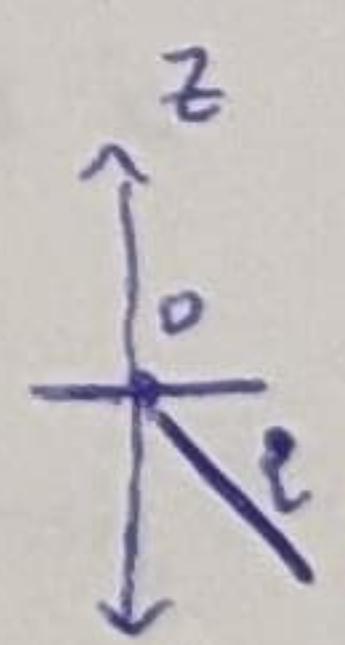
$$\frac{dE_m}{dt} = P_{nc}(\vec{F}) = \vec{T} \cdot \vec{v} = 0$$

puissance  
 $\vec{F}$  non conserv.



$\vec{T}$  ne modifie pas l'Em

$$\begin{aligned} \vec{op} &= \vec{r} \times \vec{v} \\ \vec{F} &= r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\vec{e}_r \\ \vec{a} &= r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r \end{aligned}$$



$$E_m = \text{cste} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p$$

$$= \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2) - mgl\cos\theta$$

où choisir l'origine?  
 $\rightarrow$  si origine à O  $\Rightarrow z = -l\cos\theta$

ou si origine au pt en bas  
 $\Rightarrow z = l - l\cos\theta$

ds tous les cas on va dériver  $\frac{dE_m}{dt}$   
 $\Rightarrow \frac{dl}{dt} = 0$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{dE_m}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \text{ ou } \frac{dE_m}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + \dot{\theta}ml\sin\theta = 0$$

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

non linéaire mais à  $\theta$  petit  
 $\sin\theta \approx \theta \rightarrow$  linéarisée

2<sup>e</sup> loi de Newton       $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$

$$\text{on projète sur } \begin{pmatrix} \vec{er} \\ \vec{e\theta} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -m\ell\ddot{\theta}^2 \\ m\ell\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix}$$

projection sur un nom peut d'aujourd'hui se faire sans intervention par

$$\ddot{\theta} + \sin \theta = 0$$

$$\rho \ddot{\theta} = -g \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\rho} \sin \theta = 0$$

$$\text{Thm Moment cinétique} \quad \frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum M_o(F) = \vec{J}_o(\vec{P}) + \vec{J}_o(\vec{T})$$

$$\vec{L}_0 = \vec{OP} \wedge m\vec{v} = l\vec{er} \wedge m\vec{e\theta} \hat{\epsilon} \vec{e\theta} = ml^2\dot{\theta}\hat{\epsilon}\vec{ez}$$

$$\vec{J}_0(\vec{T}) = \vec{OP} \wedge \vec{T} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_o(\vec{P}) = \vec{OP} \wedge \vec{mg} = \begin{pmatrix} e \\ o \\ o \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = -mgl \sin \theta \vec{e_z}$$

$$\therefore m\ell^2 \ddot{\theta} = -mg\ell \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

## Formule de Borda

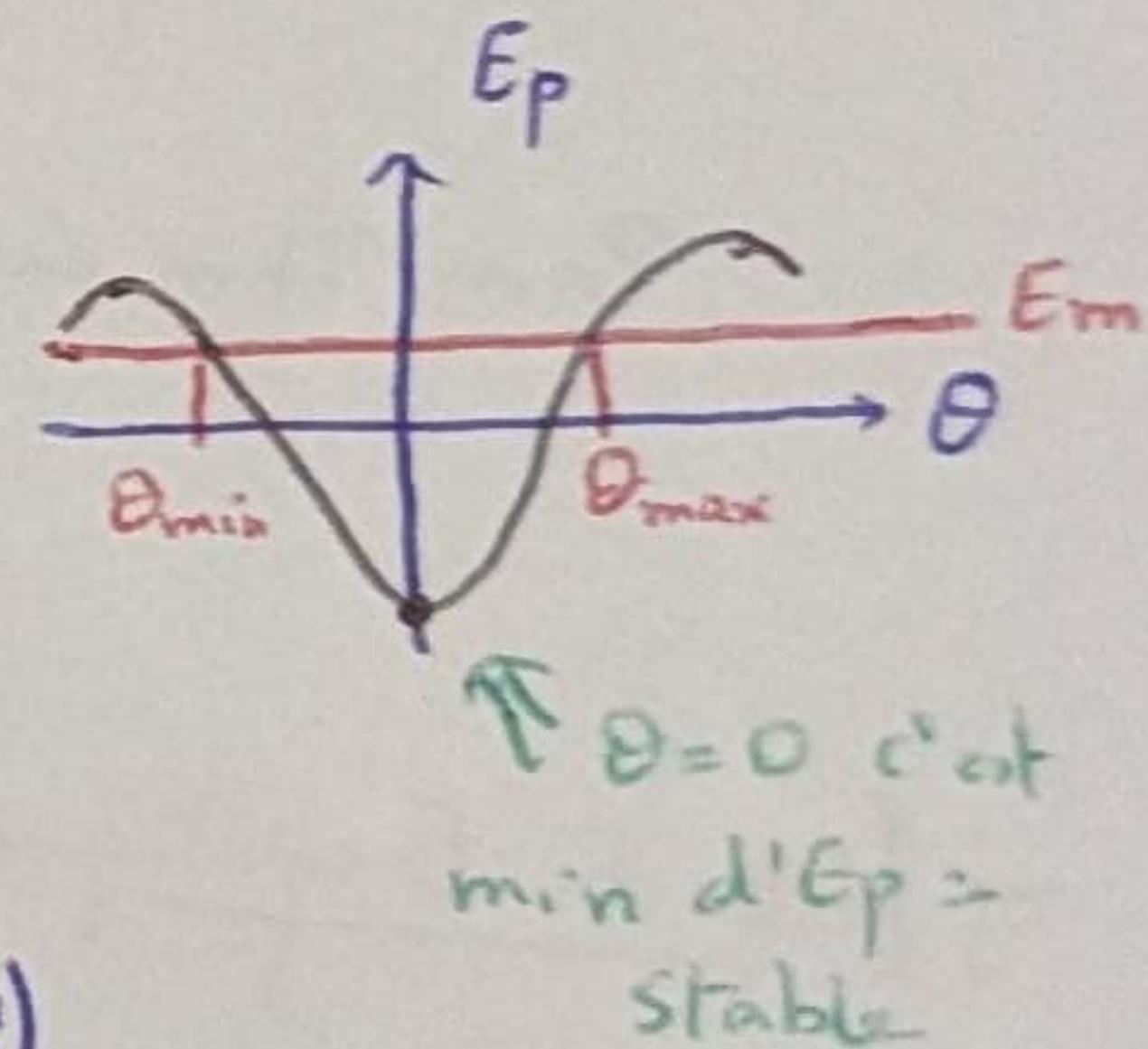
$$\dot{\theta} = \theta_0 \quad | \quad \theta = \theta_0$$

et par origine  $E_p \text{ à } O = E_p = -mgl \cos\theta$

= On se situe en  $E_m < \max E_p$  pour avoir oscillations

$$\therefore \theta_{\min} < \theta < \theta_{\max}$$

Ce mouvement oscillant n'est pas forcément harmonique ( $\equiv \sin\theta \neq 0$ )



$$\text{a) } \theta \text{ period, } \sin \theta \sim \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{g}{l} = \left( \frac{2\pi}{T_0} \right)^2 \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\dot{\theta}^2 \text{ grand } E_m = -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}m l^2 \dot{\theta}^2 = -mgl\cos\theta_0$$

$$\theta^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l} (\cos\theta - \cos\theta_0) \quad \text{et} \quad dt = \frac{-d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l} (\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

• on est au max à  $\theta_0$  et on cherche temps

pour revenir à  $\theta=0$   $\Rightarrow d\theta < 0$  - faut ajouter (-) pour avoir  $t \geq 0$

$$\int_0^T \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{2g}(\cos\theta - \cos\theta_0)}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{-d\theta}{\sqrt{\frac{1}{2g}(\cos\theta - \cos\theta_0)}} = \frac{I}{L} \Rightarrow T = \int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{L}{2g}} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} d\theta$$

$$\text{chglt variable: } \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta/2}{\sin \theta/2} \Rightarrow \cos \frac{\theta}{2} d\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \frac{\cos \theta/2}{\sin \theta/2} d\theta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{\theta} = 0 \quad \sin \theta / \frac{r}{2} = 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{\varphi} = 0 \quad \sin \varphi = 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{\psi} = 0 \quad \sin \psi = 0 \end{array} \right. \rightarrow \sin \varphi = 1$$

$\Rightarrow \varphi = \pi$

$$\text{et } \cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\rightarrow T = L \sqrt{\frac{g}{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{2 \cos(\xi) \sin(\theta_0/2) d\xi}{\cos \theta_0 / 2 \sqrt{2 [\sin^2 \theta_0/2 - \sin^2 \xi]}} = \dots \quad | \quad \boxed{\text{Pendule 2}}$$

$$T = L \sqrt{\frac{g}{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{2 \cos(\xi) d\xi}{\sqrt{2 \cancel{\sqrt{\cos^2 \xi}}} \cos \theta_0 / 2} = L \sqrt{\frac{g}{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{2 d\xi}{\sqrt{2 \cos^2 \xi}}$$

$$\cos \frac{\theta_0}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2}} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \xi} = \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \xi}$$

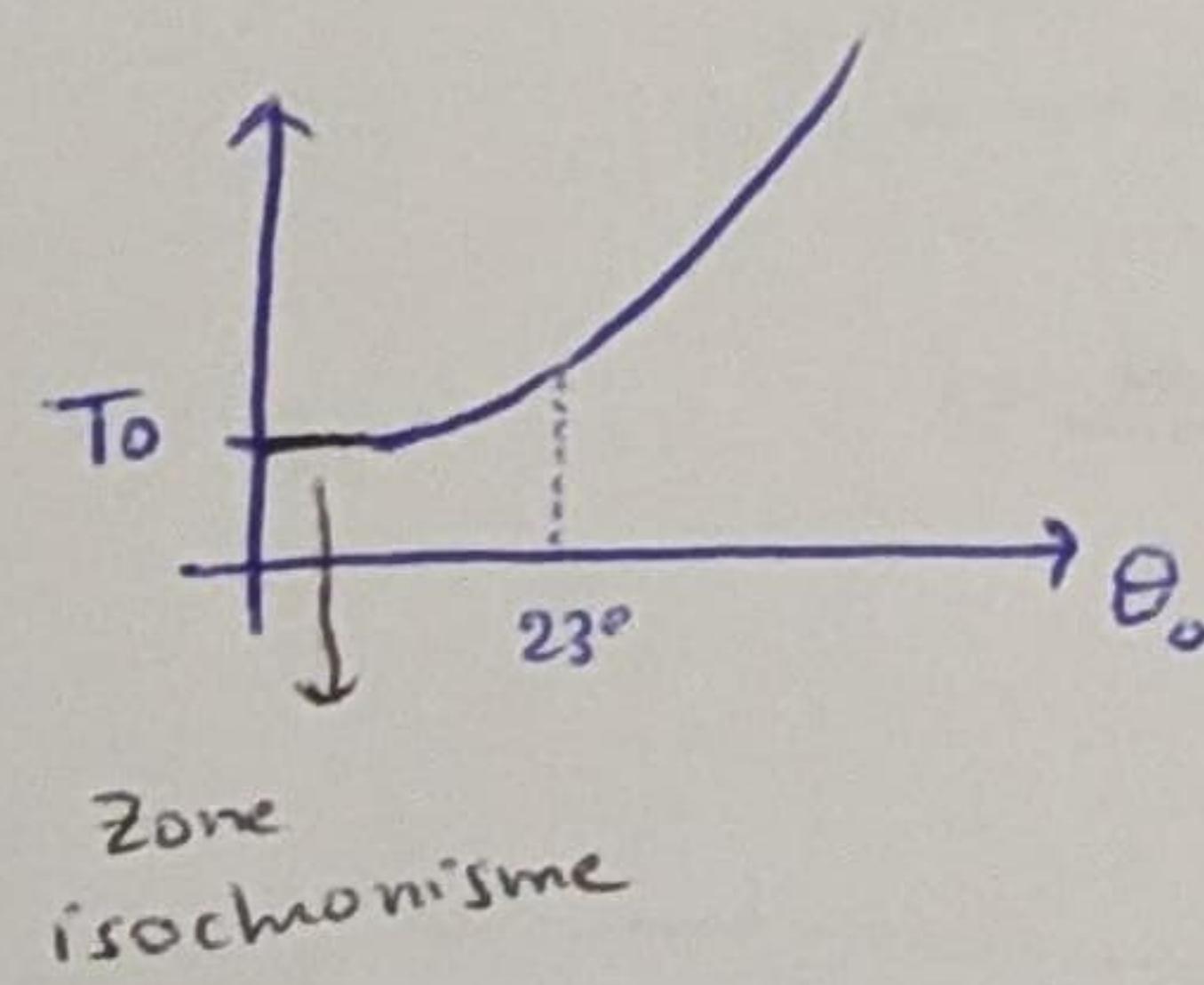
$$T = L \sqrt{\frac{g}{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \xi}} \stackrel{\text{O.L.}}{\approx} L \sqrt{\frac{g}{2}} \int_0^{\pi/2} d\xi \left[ 1 + \frac{1}{2} K^2 \left( \frac{1 - \cos 2\xi}{2} \right) \right]$$

$\downarrow$   
 $\theta_0$  petit

$$T = L \sqrt{\frac{g}{2}} \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{K^2}{4} \frac{\pi}{2} - \frac{K^2}{8} \sin(\pi) + \frac{K^2}{8} \sin(0) \right] \quad K^2 = \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sim \frac{\theta_0^2}{4}$$

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left[ 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right] = T_0 \left[ 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right]}$$

Formule de  
Borda  
valable jusqu'à  $\sim 23^\circ$



Zone  
isochronisme

## Borda

$$\vec{P} = -mg \vec{uy}$$

$$\vec{T} = -T \vec{e_r}$$

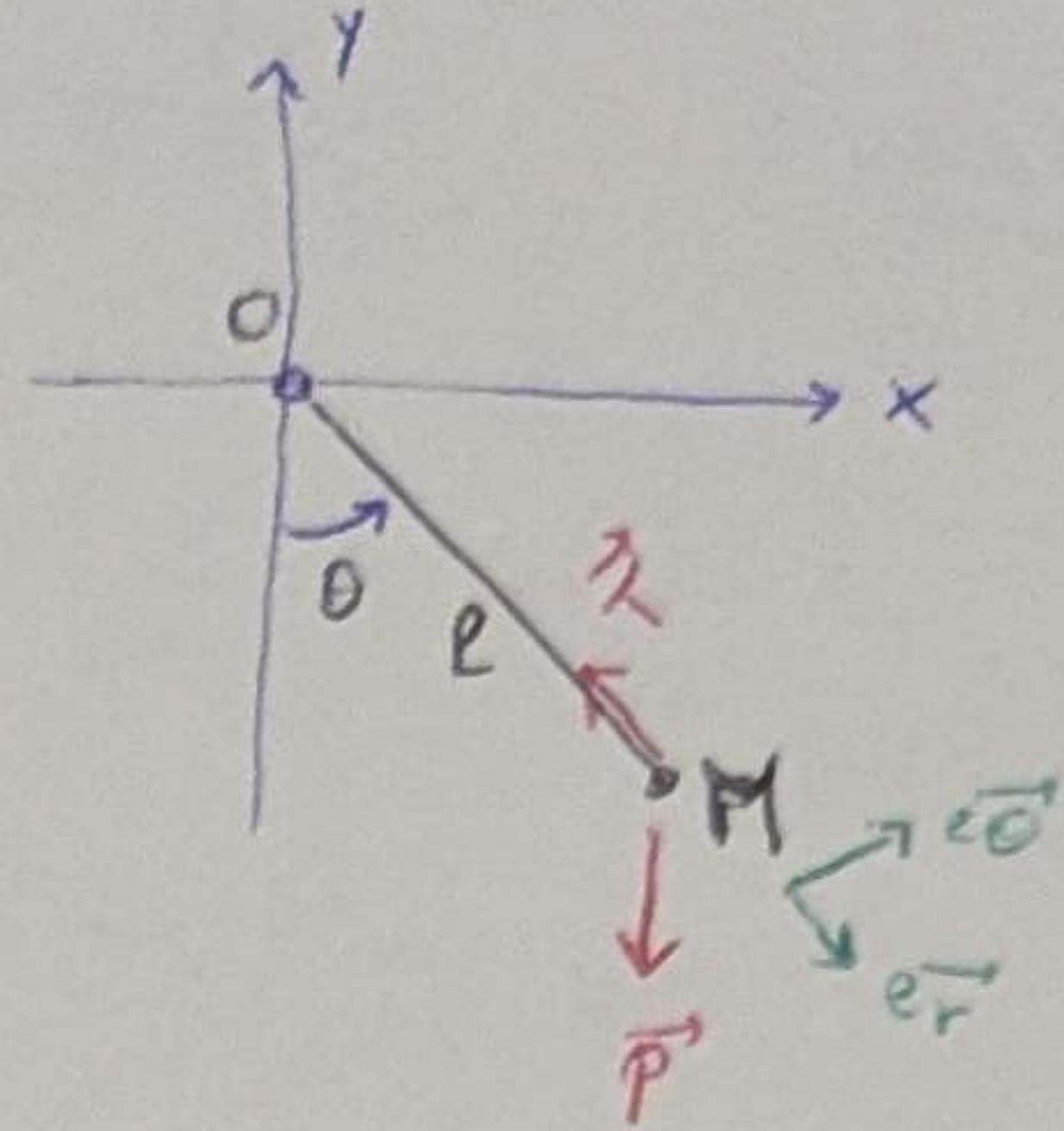
$$\vec{F} = -\vec{g} \vec{e_y}$$

$$E_C = \frac{1}{2} m (\ell \dot{\theta})^2$$

$$E_P = mg y + C \quad \text{et } E_P(-\ell) = 0 \\ = mg(l + \ell)$$

$$\int dE_P = - \int mg \cos \theta \, dr$$

$$E_P = -mg \ell \cos \theta + C \quad E_P(0^\circ) = 0 \\ = mg \ell (1 - \cos \theta)$$



$$E_m = E_C + E_P \quad \text{et } T ne travaille pas car tout le temps il mous de M}$$

$$\therefore E_m \text{ conservée} \quad \therefore E_C + E_P = E_{P\max} = mg \ell (1 - \cos \theta_0)$$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow m \ell^2 \ddot{\theta} \ddot{\theta} + mg \ell \dot{\theta} \sin \theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0} \quad \text{tg} \sqrt{\omega_0^2 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$$

$$\frac{1}{2} \ell \dot{\theta}^2 = g(1 - \cos \theta_0) - g(1 - \cos \theta)$$

$$\dot{\theta}^2 = 2 \frac{g}{\ell} (-\cos \theta_0 + \cos \theta) \Rightarrow \dot{\theta} = \pm \omega_0 \sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

$\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ ,  $\dot{\theta} < 0$  et descend vers la verticale

$$\text{par } \cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -2\omega_0 \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\text{donc } \int_0^{T_0} dt = \frac{T}{4} = \frac{-1}{2\omega_0} \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$T = \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\dots}}$$

chgt variable  $x = \sin \frac{\theta_0}{2}$  et  $\sin \frac{\theta}{2} = x \sin \psi$  tq  $\psi \in [0; \pi]$

$$\frac{d}{d\theta} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} = x \cos \psi \quad \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } & \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \sqrt{x^2 - x^2 \sin^2 \psi} \\ &= x \sqrt{1 - \sin^2 \psi} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \left| \begin{array}{l} d\theta = \frac{2x \cos \psi d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{2x \cos \psi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi}} d\psi \\ \text{si } \theta = \theta_0 \rightarrow \sin \psi = 1 \text{ donc } \psi = \frac{\pi}{2} \\ \text{si } \theta = 0 \rightarrow \sin \psi = 0 \text{ donc } \psi = 0 \end{array} \right.$$

$$T = \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x \cos \psi}{x \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi} \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi}} d\psi \quad \text{par } \cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi}$$

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi}} = \frac{2T_0}{\pi} K(x)$$

$$A^{\text{ 1er ordre}} : \frac{1}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \psi}} = 1 + \frac{x^2}{2} \sin^2 \psi + O(x^2)$$

$$K(x) \approx \frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\psi}{2} \right) d\psi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} x^2$$

$$\text{par } x^2 = \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \approx \left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2 \Rightarrow T \approx \frac{2T_0}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \frac{\theta_0^2}{4} \right) = T_0 \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\theta_0^2}{16}$$

$$\text{pour } \theta_0 = 15^\circ, \quad \frac{\Delta T}{T_0} = 0,43\%$$

$$\theta_0 = 45^\circ \rightarrow 3,86\%$$

$$\theta_0 = 70^\circ \rightarrow 9,3\%$$

## Oscillateur Harmonique

- Signal physique = grandeur dépendant du temps  
qd il se répète (reproduit) identique à lui même au cours de t → signal périodique
- Le plus fondamental des périodiques est signal sinusoïdal (ou harmonique) produit par un modèle physique appelé oscillateur harmonique
- Ici on voit OH mécanique.
- Le syst. méca le + simple est masse accrochée à ressort
- Soit m se déplace sans frott. le long d'une tige selon x, origine coïncide avec centre inertie G de m ds la position d'éq.
- La ressort exerce sur m, la force:  $\vec{F} = -Kx \vec{u}_x$  ↗ vise de l'origine  
= Force de rappel de sens opposé au déplacement  
Il y a aussi poids  $m\vec{g}$  et réaction  $\vec{R}$  mais n'ont pas d'influence sur mouv. horizontal
- Par PFD:  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$  avec  $\vec{p} = m\vec{v}_G = m \frac{dx}{dt} \vec{u}_x$  tel que x est la position de G

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \vec{u}_x = -Kx \vec{u}_x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m} x = 0$$

### ED d'un OH

OH est syst décrit par  $x(t)$  dépendant de t et vérifiant ED de la forme:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

= m accroché au ressort est OM d

pulsation:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$  et période d'oscillation  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

cote nulle > 0  
 $\omega_0$  = pulsation propre de l'OH  
[rad.s<sup>-1</sup>]

- résoudre pour trouver  $x(t)$ : mais on aura pas 1 expression unique. On doit choisir celle q: respecte les CI

ici on doit commettre  $\begin{cases} x(t=0) \\ \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} \end{cases}$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Ici:  $\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = v_0 \end{cases}$

Cas où  $\begin{cases} x_0 \neq 0 \\ v_0 = 0 \end{cases}$  on lâche le mobile à  $x = x_0$  sans v initiale

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

m oscille entre  $-x_0$  et  $+x_0$

Cos où  $\begin{cases} x_0 = 0 \\ v_0 \neq 0 \end{cases}$  sans l'écarter de position d'éq et lancer à  $v_0 \vec{x}$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

oscille entre  $-\frac{v_0}{\omega_0}$  et  $+\frac{v_0}{\omega_0}$

Cos où  $\begin{cases} x_0 \neq 0 \\ v_0 \neq 0 \end{cases}$  = sol. pour CI quelconque

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

oscille entre valeurs  $-C$  et  $+C$

### • Conservation $E_m$

- en mouvement, le mobile possède  $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$  ( $\vec{F} = -\vec{\text{grad}}v$ )

- le ressort a  $m=0$  n'a pas d' $E_c$  mais a  $E_p$  liée à sa déformation  $E_p = \frac{1}{2} Kx^2$

-  $\therefore E_m = \frac{1}{2} Kx^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$  regardons sa variation  
en fonction du temps

- par sol.  $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$

$$E_c = \frac{1}{2} m \left( -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) \right)^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} K \left( x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right)^2 \quad K = m \omega_0^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \left[ \omega_0^2 x_0^2 (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t) \right] + \frac{1}{2} m \left[ v_0^2 (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) \right]$$

$$= \frac{1}{2} m (\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2)$$

$$= \frac{1}{2} K \left( x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \right) \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} K x_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$E_p + E_c \quad \checkmark$$

$\therefore E_m$  est constante du temps  $\checkmark$  car on obtient à la fin l'équation de  $E_m$  initiale

$\therefore$  ce système idéal sans amortissement

Si  $| \begin{array}{l} x_0 \neq 0 \\ v_0 = 0 \end{array} \rightarrow$  on trouve  $E_p$  uniquement

Si  $| \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ v_0 \neq 0 \end{array} \rightarrow E_c$  uniquement

\*  $E_m = \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} Kx^2 = \text{const} \Rightarrow$  si on dérive  $\frac{d}{dt}$   $\Rightarrow$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{1}{2} m 2 \left( \frac{dx}{dt} \right) \left( \frac{d^2x}{dt^2} \right) + \frac{1}{2} K 2x \left( \frac{dx}{dt} \right)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0 !$$

• Amplitude du mouvement est la valeur max atteinte par  $x(t)$ .

Si  $v_0=0 \rightarrow A=x_0$  et si  $x_0=0 \rightarrow A=\frac{v_0}{\omega_0}$ , quelle est la valeur de  $A$  si  $x_0 \neq 0$  et  $v_0 \neq 0$ ?

Par conséq. d' $E$ , à  $x(t)=A$  (max)  $\Rightarrow \frac{dx}{dt}=0 \Rightarrow E_c=0 \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} K A^2 + 0$

$$\therefore \frac{1}{2} K x_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} K A^2 \Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

• Période  $\cos(\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t + 2\pi) = \cos\left(\omega_0 \left[t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right]\right)$  et sin aussi

$$\therefore x(t) = x(t+T_0) \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

\*) Période ne dépend pas de l'amplitude  $A \Rightarrow$  propriété d'isochronisme des oscillations de OH peu importe  $x_0$  de l'étirement ou  $v_0$  c'est  $T_0$  !!

\*  $T_0$  augmente avec  $m$  (mouvement lent) et diminue avec  $K$  (ressort fort = mouvement rapide)

Description qualitative de l'évolution du syst basé sur l'étude du mouvement d'1 pt M (représentant l'état du syst) état défini par la position  $x$  et vitesse  $\dot{x}$

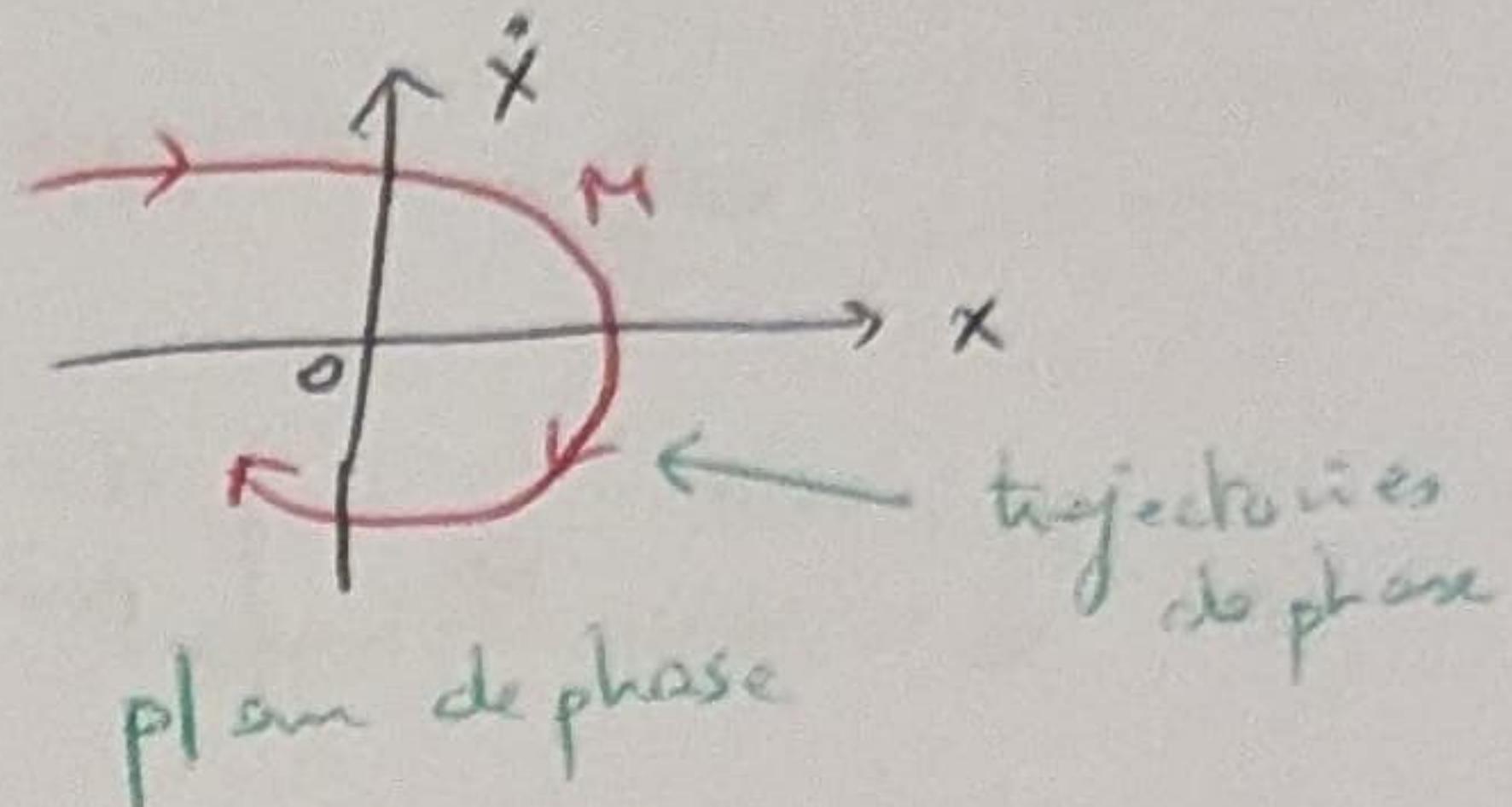
Les oscillateurs électriques / éca  
PhA3a LIE

\* positions éq. sont situées sur axe Ox ( $\ddot{x} = 0$ )

\* en dehors des pos. d'éq., les trajet. de phase coupent  $\perp$  Ox ( $\dot{x} \neq 0$ )

\* trajet. phase sont déviées au cours de t dans sens aiguilles - aiguilles

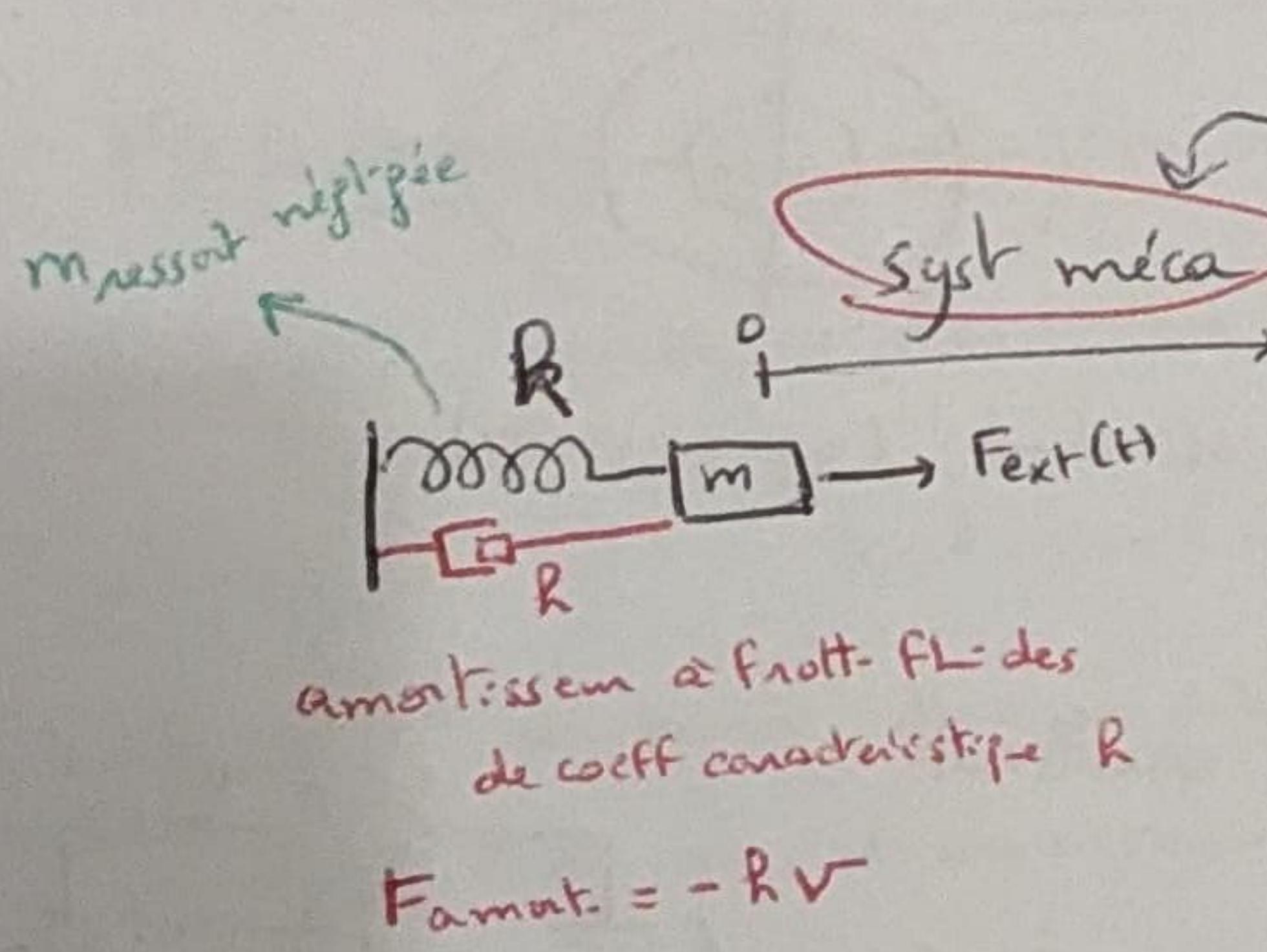
\* trajet. phase Fendue est associé à un mouvement circulaire



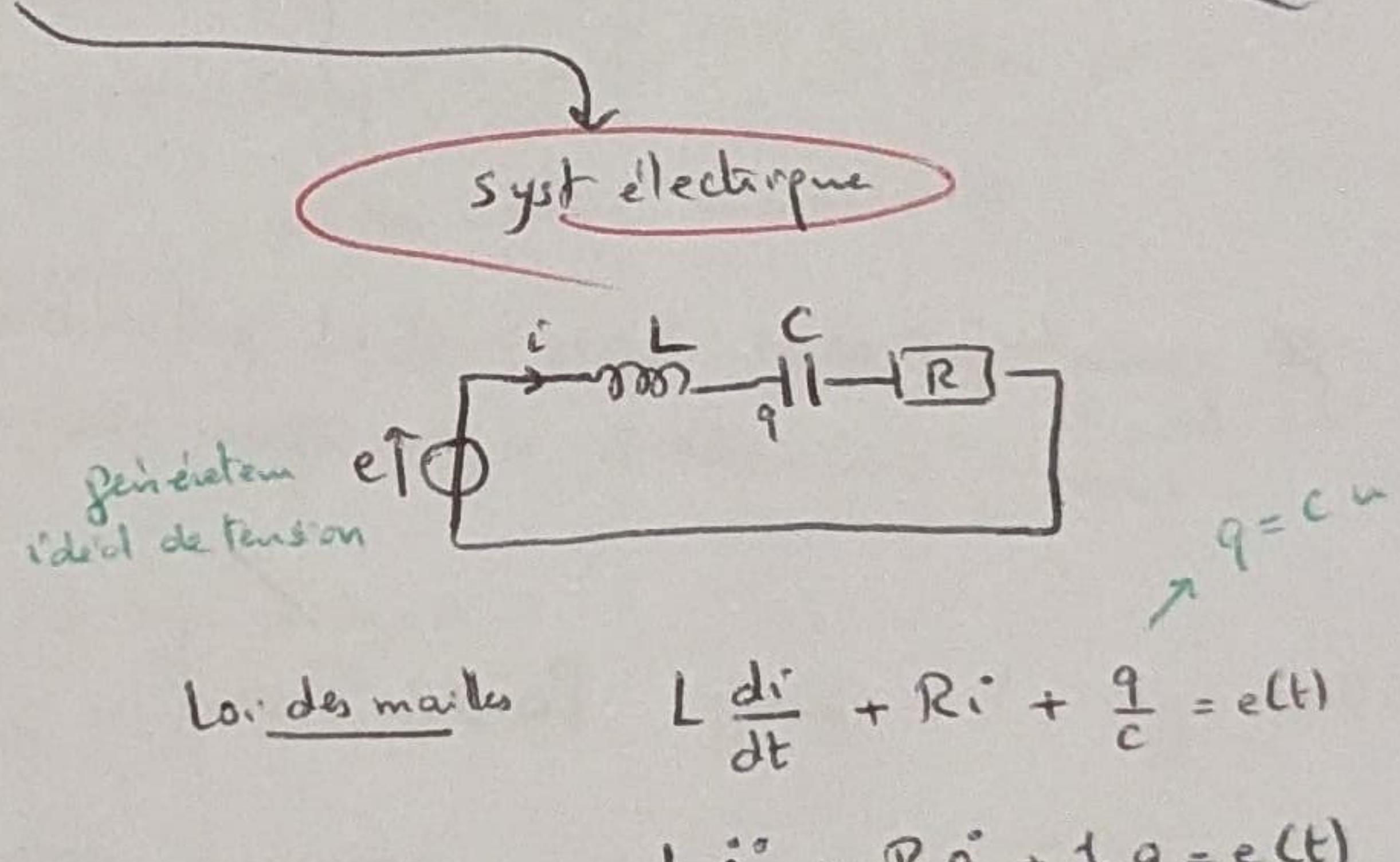
référence à voir :

BUP 74h 719-755

H. Gré et JP Soumant → portrait phase des oscil.



$$\text{PFD} \quad m\ddot{x} + R\dot{x} + kx = F(t)$$



Analogie électro-mécanique

Mécanique

Force F

position x

vitesse  $\dot{x}$

m

R

k

Électricité

Tension e

charge q

intensité i

L

$1/C$

R

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)}$$

conste d'amortissement sans dim

homogène inversetem pulsation propre du syst

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{1}{mK}}$$

= stockent E par Ec & Ep  
Ed & Emag

et dissipent par frottement fluide  
effet Joule de R

$$\text{Energie } \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 / \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

$$-R\dot{x}^2 / -Ri^2 \quad \text{puissance dissipée}$$

$f(t) = 0$  et  $\dot{f} = 0 \Rightarrow$  oscillations libres et non amorties

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

solution

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad \text{ou} \quad A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

les ctes d's  
dépendent  
des CI

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0) \\ v_0 &= \dot{x}(0) \Rightarrow \begin{cases} A = x_0 \\ B = \frac{v_0}{\omega_0} \end{cases} \Rightarrow A = \left( x_0^2 + \left( \frac{v_0}{\omega_0} \right)^2 \right)^{1/2} \\ \varphi &\Rightarrow \tan \varphi = -\frac{v_0}{x_0 \omega_0} \end{aligned}$$

oscill. sinusoïdales

$$\text{période } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \approx \text{indép de l'amplitude} \rightarrow \text{Isochronisme des oscillations}$$

bilan énergétique

$$E = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 \rightarrow \frac{dE}{dt} = \dot{x} \ddot{x} + \omega_0^2 x \dot{x}$$

$$= \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2} x^2 = \text{cste}$$

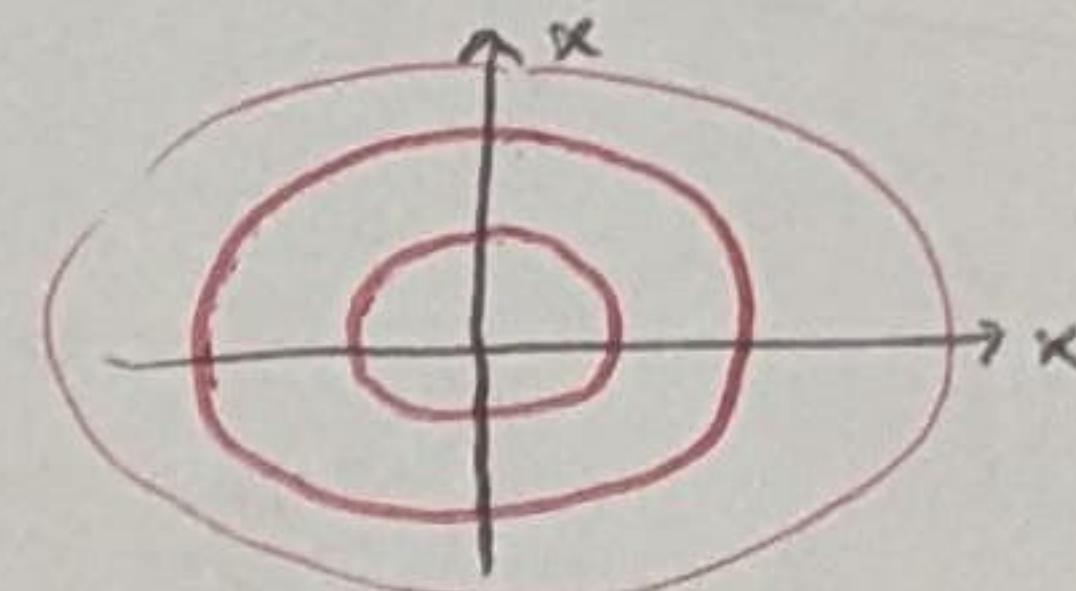
$$= \dot{x} (\dot{x} - 2 \omega_0^2 x) = 0$$

$$= \text{Paction ext} + \text{Pdissipée}$$

E = cste  
syst conservatif

⇒ ellipses homothétiques

dont centres = position d'équilibre (0,0)



★ pour syst' nels (paramétrés) peuvent être considérés

comme conservatifs si on ~~regarde~~ observe évolut° à courtes durées (qq périodes)

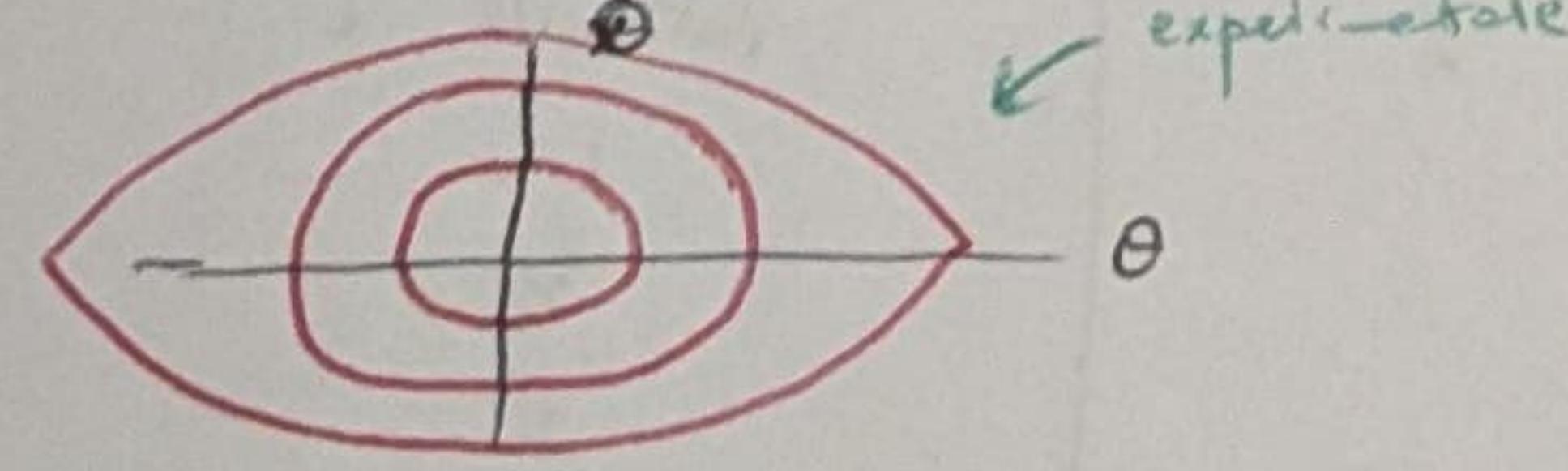
Pendule Pesant

$$m \approx 0,2 \text{ kg}, \ell = 0,25 \text{ m} \rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \approx 1 \text{ s}$$

OH libre et non amortie pour  
faible amplitudes ( $\theta$  faibles)

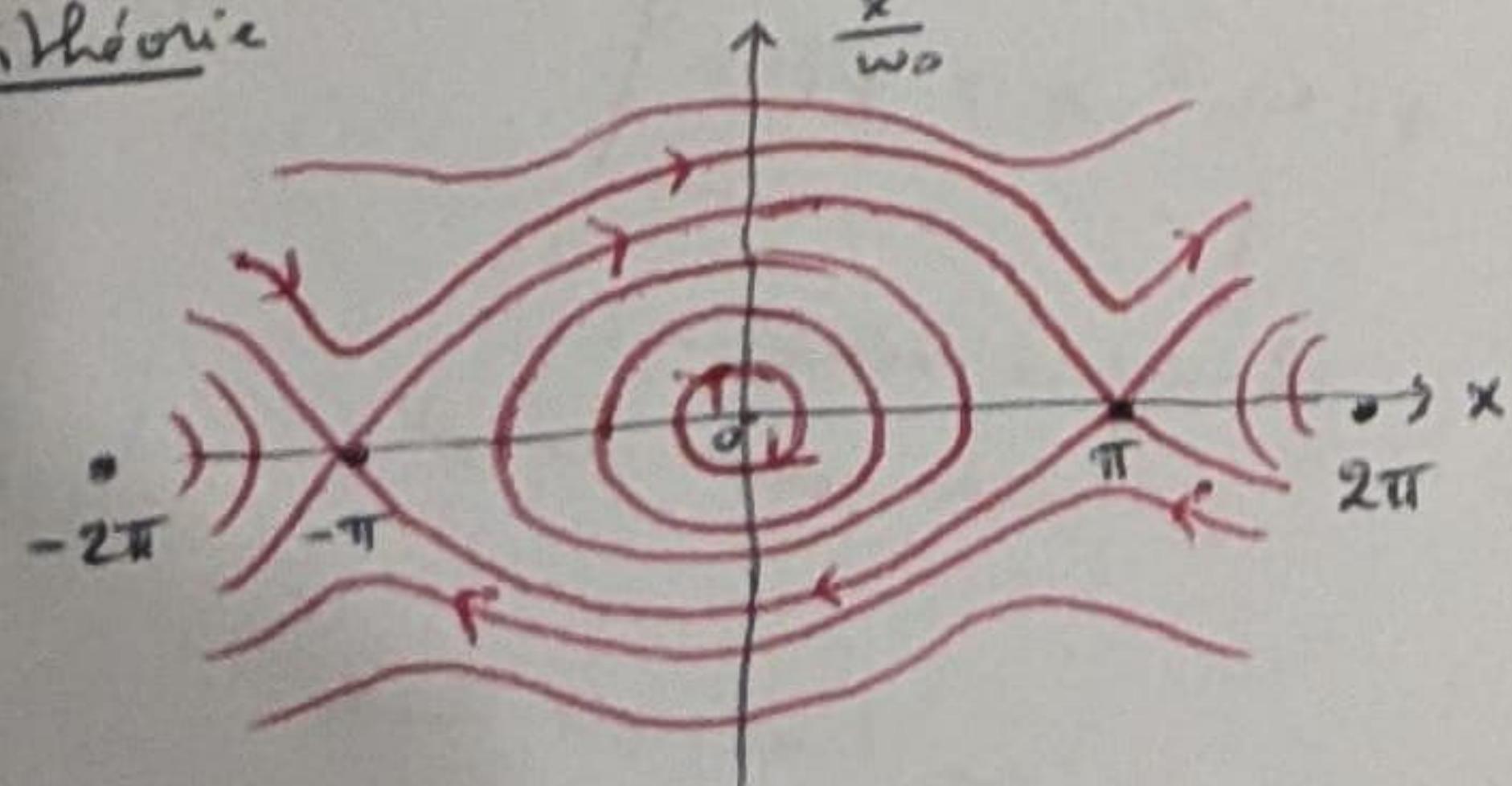
$$\text{Si non} \rightarrow \text{Formule Borda} \quad T = T_0 \left( 1 + \frac{\theta^2}{16} \right)$$

$$\omega = \omega_0 \left( 1 - \frac{\theta^2}{16} \right)$$



$$E = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 (1 - \cos(\theta)) = \text{cste}$$

⇒ en théorie



trajétoires non fermées = correspondent à E

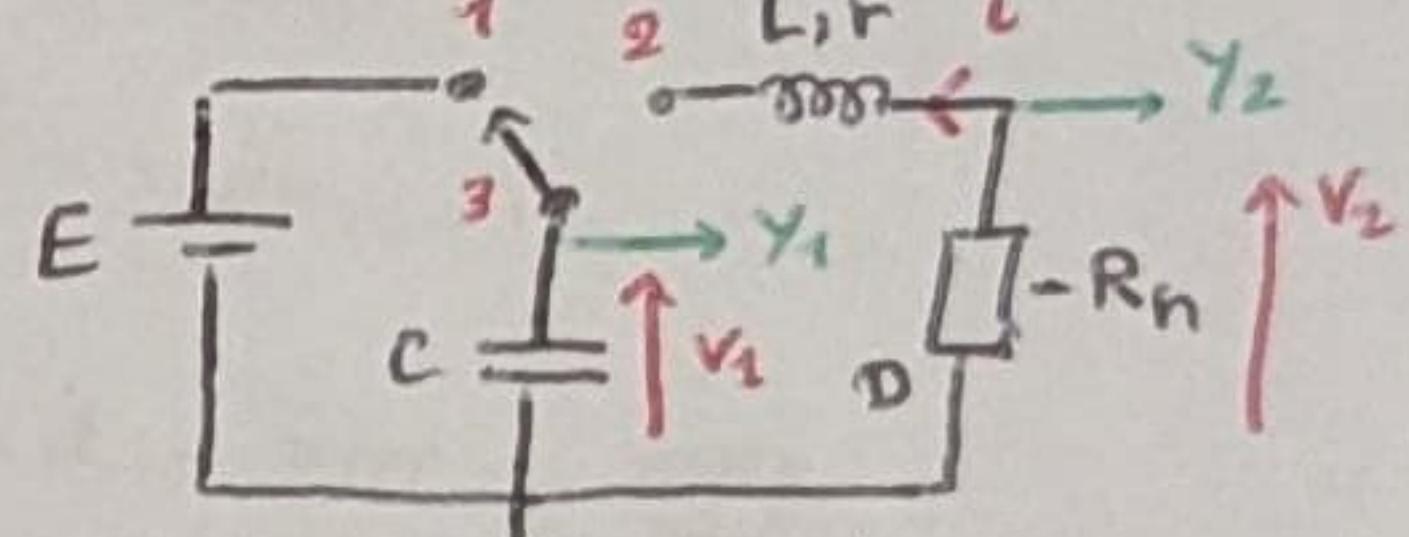
vert. régulière garde m signe et mouvement rotatif  
(comme une fronde)

$$C = 0,82 \mu F$$

$$L = 1,2 H$$

$$+ r = 83 \Omega$$

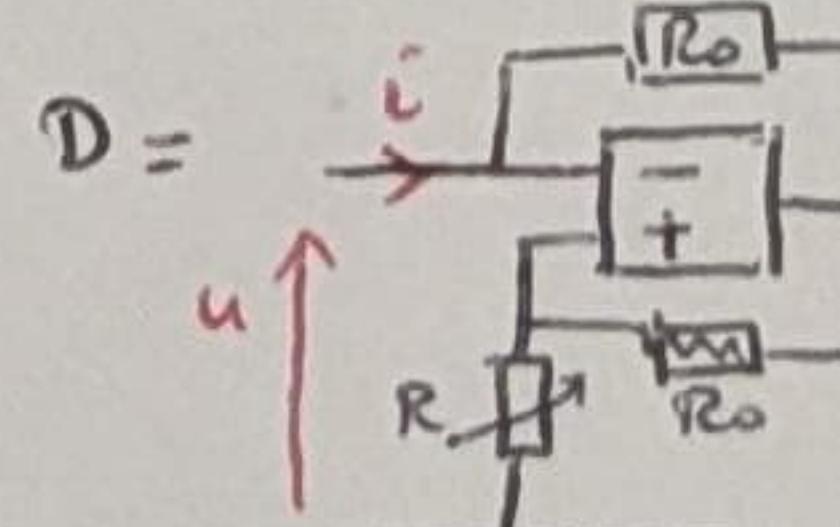
dipôle D simule RCO  
(se r pas très R)



- 1) pour charger C par générateur E
- 2) décharger le circuit

$$t=0 \quad q_0 = CE \quad \text{et} \quad v_0 = 0$$

≡ écouler pendule à Bo et lâcher sans v₀



$$R_0 = 1,5 \text{ k}\Omega$$

$$u = -R_n i \quad \text{où} \quad R_n = R$$

$$v_1 = \frac{q}{C} \quad \text{et} \quad v_2 = R_n i$$

pour avoir oscill non amorti, RCO coupe vBob → R=r

$$R = 85 \Omega \quad \text{et on met } (2) \quad \text{et on observe } v_1, v_2$$

si on varie E on trouve T₀ change pas ✓

$$T_0 = 2\pi \sqrt{LC} \approx 6,6 \text{ ms}$$

à E ≠ 0, D ≠ RCO et OH pas applicable

En variant G → portait phase \*



en conserv. E  $\rightarrow$  éq° ligne du portant phase  $\Rightarrow \left(\frac{\dot{x}}{v_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{x}{x_{\max}}\right)^2 = 1$

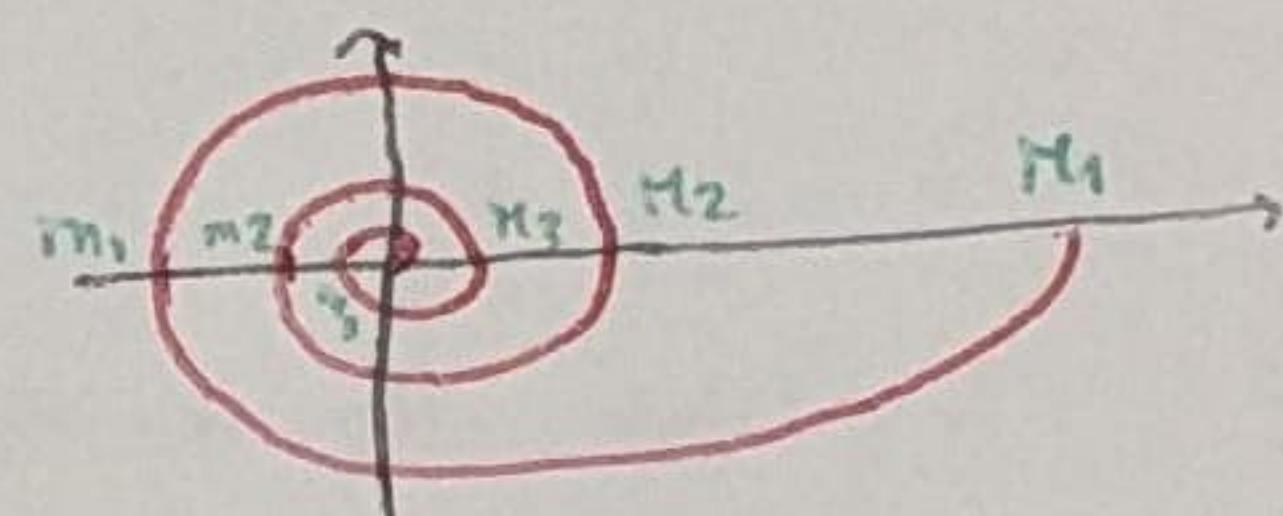
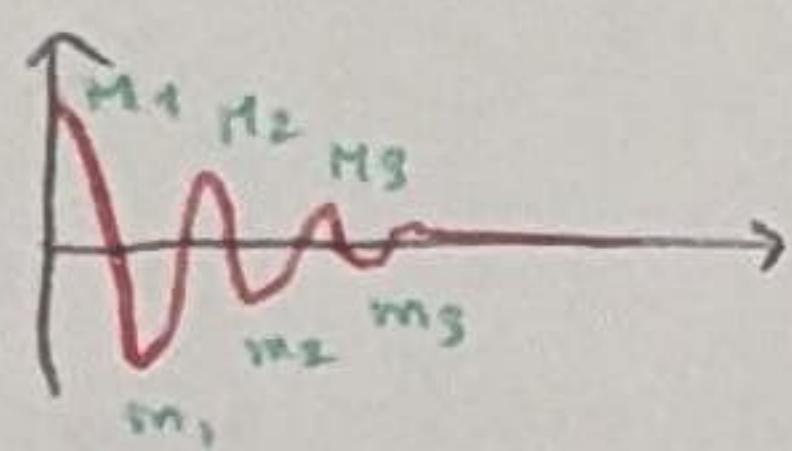
= ds plan  $(0, x, \dot{x}) =$  éq° ellipse centrée sur position d'éq. stable  
(où  $x=0$  et  $\dot{x}=0$ )

- Vsyst dont portant phase est elliptique oscille de manière harmonique car à l'ED d'un OH

- Il y a symétrie de portant phase par rapport axe abscisses car mouvement réversible  
(éq° invariantes si on change t en -t)  $\rightarrow$  ds PFD

-  $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} = \ddot{x} = \frac{m\ddot{x}}{m\dot{x}} = -\frac{Kx}{m\dot{x}}$   $\Rightarrow$  si  $x \rightarrow \frac{d\dot{x}}{dx} < 0 \Rightarrow \dot{x} \downarrow \Rightarrow$  ellipse parcouue en sens horaire  
comme  $\frac{dy}{dt}$   
pour ressort :  $m\ddot{x} = -Kx \rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$   
 $R_N = mg \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

\* pour cas de Frottement  $\rightarrow$  portant phase pas sym par rapport à axe abscisses  $\rightarrow$  irréversibilité



pseudo-périodique

\* ED linéaires : toute comb. lin. de sol. = sol. ( $\text{si } x_1$  sol et  $x_2$  aussi  $\Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2$  sol.)

En réalité, nombreux phénomènes sont non linéaires

par la nature du phénomène

'yénig' non linéaire

Pendule Simple comme oscill. non linéaire

ou non linéarités apparaissent

qd  $\theta \gg$  modélisation au 1<sup>er</sup> ordre est insuffisante

intégrale totale du mouvement d'un pendule de long L côte et tige de  $m \neq 0$

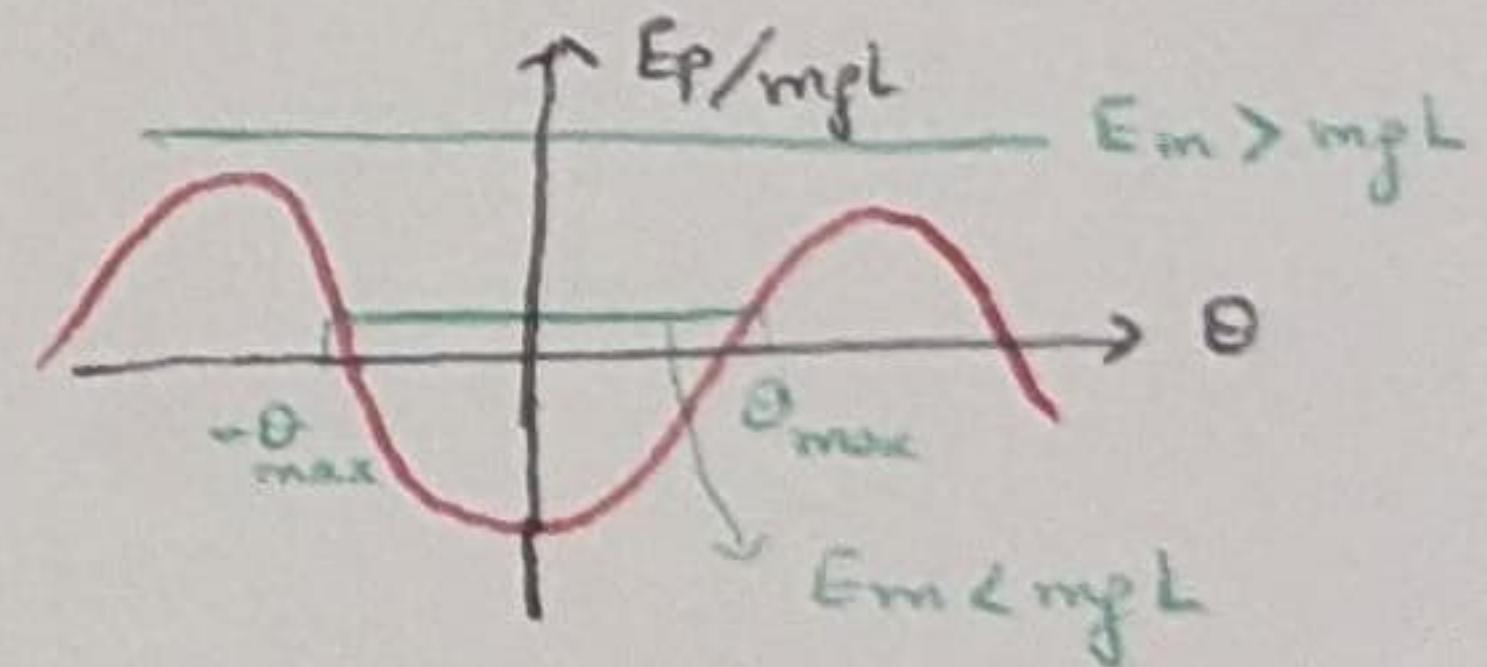
on néglige frott. air et du niveau de la résist. de l'axe de rotation  $\Rightarrow \frac{1}{2} m(L\dot{\theta})^2 - mgL \cos\theta = E_m$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin\theta = 0 \quad \text{éq° non linéaire}$$

si  $E_m > mgL \Rightarrow$  tournancement os du pendule

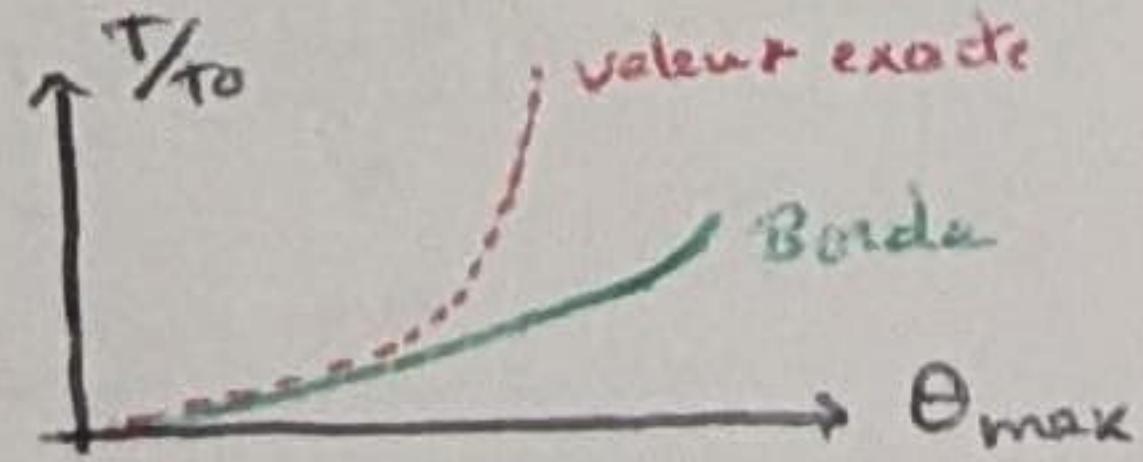
si  $E_m < mgL \Rightarrow$  oscillation entre  $-\theta_{\max}$  et  $\theta_{\max}$

$$\text{éq. } \cos\theta_{\max} = \frac{-E_m}{mgL}$$



$$\frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2 - mgL \cos\theta = -mgL \cos\theta_{\max}$$

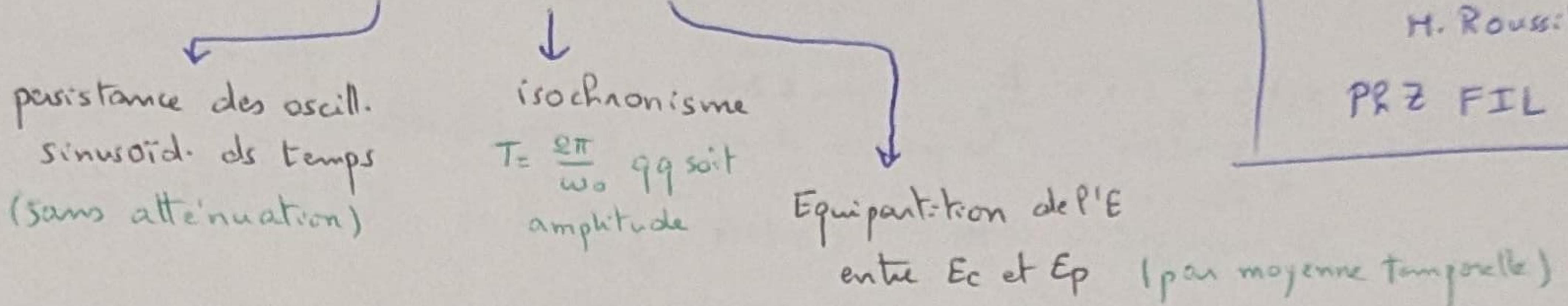
$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$



→ démonstration Borda

## Oscillateurs

Oscillateur harmonique a 3 prop. fondamentales



Phys. pour aggrégation  
de boeck  
J. Fillette - J. Froustey  
H. Roussille  
PRZ FIL 1

Les autres oscill. se distinguent de l'OH par 2 aspects

amortissement  
jamais négligeable sauf si oscill. à t long  
par frott. liquide ou solide

présence de non-linéarités

\* Oscillateur paramétriques (non amorti) est un syst. vérifiant:  $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(t)x = 0$   
où  $\omega^2(t)$  dépend du temps.

\* plusieurs qd d'oscill. influent les uns sur les autres → couplage des oscillateurs  
et il y a 2 phénomènes majeurs
 

- levée de dégénérescence
- multiplication des fréq. propres

 il y a autant de fréq. propre que d'oscill. couplés dans le syst.

couplage initial  
couplage élastique

### OH amorti

mécanique  
dissipation par frott. (avec air, liaison, support...) modélisé par frott. fluide de coeff  $\lambda$

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda \dot{x}$$

par  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $Q = \frac{\sqrt{mK}}{\lambda}$

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

électrique  
dissipation par effet Joule  
qd on ajoute R

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\text{par } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

si  $Q \rightarrow \infty$  on retrouve OH non amorti  
+ amortissement est faible

On ajoute (après =)  $f(t) =$  réponse du syst  
à une excitation

$$\therefore \text{sol. } x(t) = x_{\text{homog.}}(t) + x_{\text{part.}}(t)$$

et on a 2 types de sol.  $x(t)$ 

- réponse indicelle
- réponse spectrale

et chacune correspond à un choix de la f(t) (et des CI)

Réponse Indicielle: Correspond à

$$\left| \begin{array}{l} x(t=0) = 0 \\ \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \\ f(t) = EH(t) \end{array} \right.$$

$$x(t) = x_H(t) + \frac{E}{\omega_0^2} \quad \text{pour } t \geq 0$$

racines  
du polynôme caractéristique

$$\Delta = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 1 \right) \quad \text{signe dépend de } Q$$

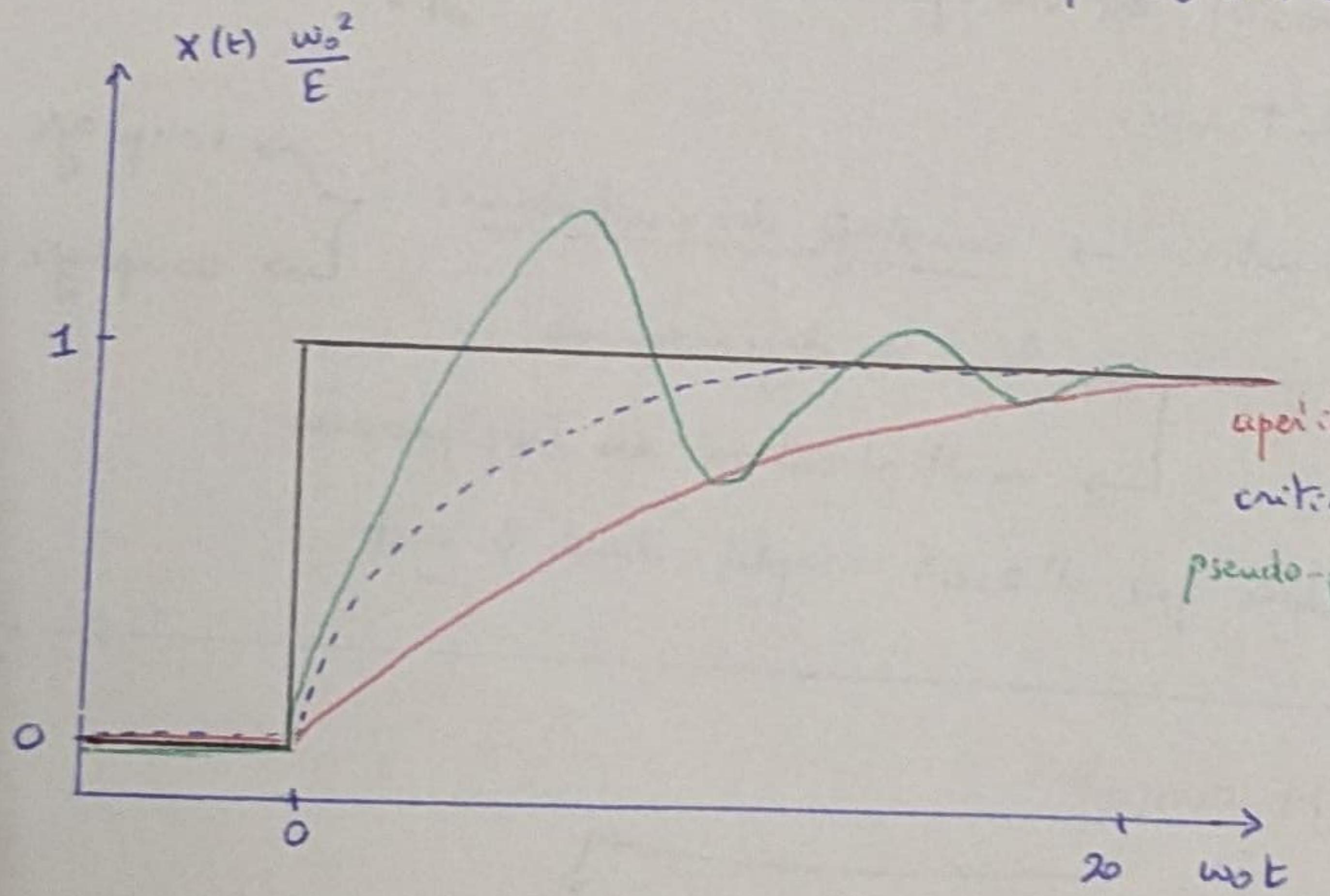
fonct Heaviside (ou échelon)  $\left\{ \begin{array}{l} H(t < 0) = 0 \\ H(t \geq 0) = 1 \end{array} \right.$

∴ syst va alternner

(sans effet d'un forcing constant) une nouvelle valeur d'équilibre appelée **valeur consigne**

$$\left| \begin{array}{l} \Delta > 0 \\ Q < \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \text{2 racines IR -ve} \quad x_{\text{apériod}}(t) = a_+ e^{r_+ t} + a_- e^{r_- t}$$

et CI  $\left| \begin{array}{l} a_+ + a_- + \frac{E}{\omega_0^2} = 0 \\ a_+ s_+ + a_- s_- = 0 \end{array} \right.$



$$\left| \begin{array}{l} \Delta = 0 \\ Q = \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \text{1 racine double -ve } (r = -\omega_0) \quad x_H(t) = (a + bt)e^{-\omega_0 t}$$

$$\left| \begin{array}{l} a + \frac{E}{\omega_0^2} = 0 \\ -\omega_0 a + b = 0 \end{array} \right.$$

aperiodique ( $Q = \frac{1}{2}$ )  
critique ( $Q = \frac{1}{2}$ )  
pseudo-périodique ( $Q = 2$ )

Les 3 tendent vers  $\frac{E}{\omega_0^2}$  mais à des vit. ≠  
le + rapide est pseudo-périodique (il dépasse un peu par ces pseudo-oscill.)  
le aperiode. est + lent (ne dépasse pas la consigne)  
la réponse le + rapide sans dépassement → régime critique

$$\left| \begin{array}{l} \Delta < 0 \\ Q > \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \text{2 racines C conjuguées} \quad [ \text{exp complexes} = \sin / \cos ]$$

on trouve qqch  $\propto \sin(\Omega t + \phi)$

$$\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

↳ pseudo-pulsation

$$\phi = \arctan(\sqrt{4Q^2 - 1})$$

devant sin il y a  $e^{-\frac{E}{\tau}}$   
 $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$  = oscillations amorties exponentiellement

+  $Q \uparrow$  - l'enveloppe exponentielle décroît rapidement logique car  $Q \uparrow$  amortit et oscille + pour quantifier cela:

décroissement logarithmique

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

= rapport rapport des amplitudes de 2 max ≠

$\approx Q \rightarrow \infty ; S \rightarrow 0$  et  $\delta y = 0$   
= rapport = 1 et les max ne diminuent pas

## Réponse Spectrale (Préliminaires)

on utilise analyse de Fourier ds abdécomposition en ondes monodromat.

étude de la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale

physique d'oscillation 2

- Si  $f(t)$  périodique de  $T_0$  ( $f(t+T_0) = f(t)$ )  $\Rightarrow$  on la décompose en  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$   
tq coeff complexes  $c_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$  tq  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

pour ces 2 dim

- Si  $f(x)$  périodique de période spatiale  $\lambda_0$   $\Rightarrow f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$   
et  $c_n = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^{\lambda_0} f(x) e^{-inx} dx$  tq  $K_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$

- Si  $f$  est  $\mathbb{R}$   $\Rightarrow c_n = \overline{c_{-n}}$   $\Rightarrow f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \dots + \sum_{-\infty}^{-1} \dots$ 
 $= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^+ + \overline{c_{-n}} e^-)$ 
 $= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^+ + \overline{c_n} e^-)$ 
 $= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(c_n e^{in\omega_0 t})$ 

modèle      phase  
↓            ↓

par  $c_n = \frac{1}{2} X_n e^{i\phi_n}$  et  $c_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) dt = \langle f \rangle$

 $\Rightarrow f(t) = \langle f \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$

$\therefore$  toute fonction périodique est décomposable en somme de fact cos de période multiples de  $T_0$

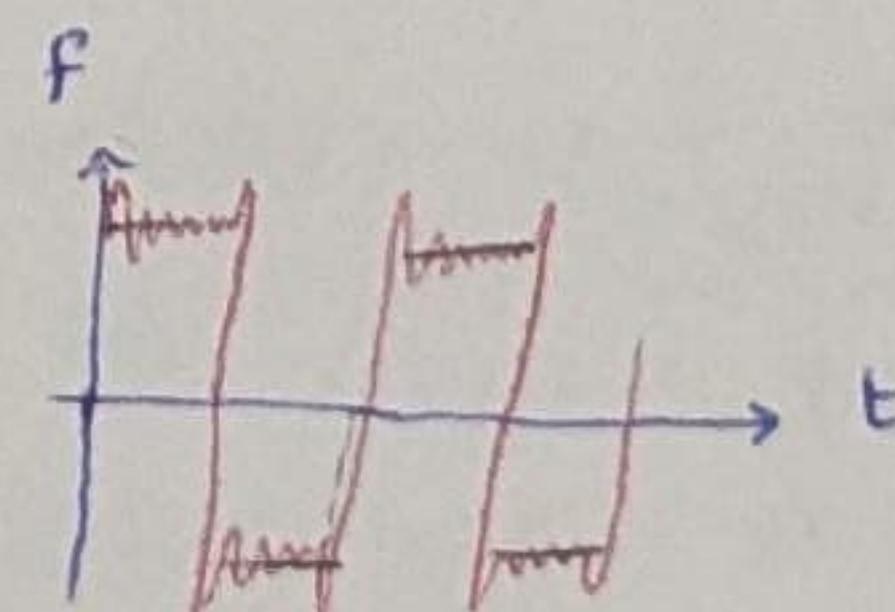
- \* pour  $n=1 \Rightarrow$  fondamental
- \* pour  $n > 1 \Rightarrow$  harmoniques

si on connaît la réponse du système pour chaque harmonique  $\Rightarrow$  la réponse totale est somme des réponses

parfois on utilise:  $f(t) = \langle f \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$

\* pour  $f$  est paire  $\Rightarrow b_n$  s'annulent

\* pour  $f$  est impaire  $\Rightarrow a_n$  s'annulent



- pour l'exemple de  $f(t)$  un cricneau (périodique)  
on a dépassement au niveau des discontinuités du signal

et même si on a nb harmonique on a un niveau cricneau mais ces dépassements sont réduits!  
ce niveau est environ de 18% de la valeur de la discontinuité du déphasage

$\therefore$  incapacité de la série de Fourier d'épouser les discontinuités du signal

→ phénomène de Gibbs

ex  $f_{\text{cricneau}}(t) = \frac{4E}{\pi} (\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots)$

Dérivée:  $f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n i n \omega_0 e^{in\omega_0 t}$  si  $c_n^{(1)} = c_n (in\omega_0)$   $\Rightarrow c_n^{(k)} = (in\omega_0)^k c_n$

Primitive de marche inverse et on divise coeff par  $(in\omega_0)^k$

soit par ex  $F(t)$  signal triangle  $\Rightarrow$  relié par  $f_{\text{cricneau}}$  par:  $F_{\text{tri}}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T f_{\text{cricneau}}(t + \frac{i}{n}) dt'$

$\therefore$  on intègre  $f_{\text{cricneau}}(t + T_{\text{tri}})$   $\rightarrow F_{\text{tri}}(t) = \frac{8E}{\pi^2} (\sin(\omega t) - \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) - \dots)$

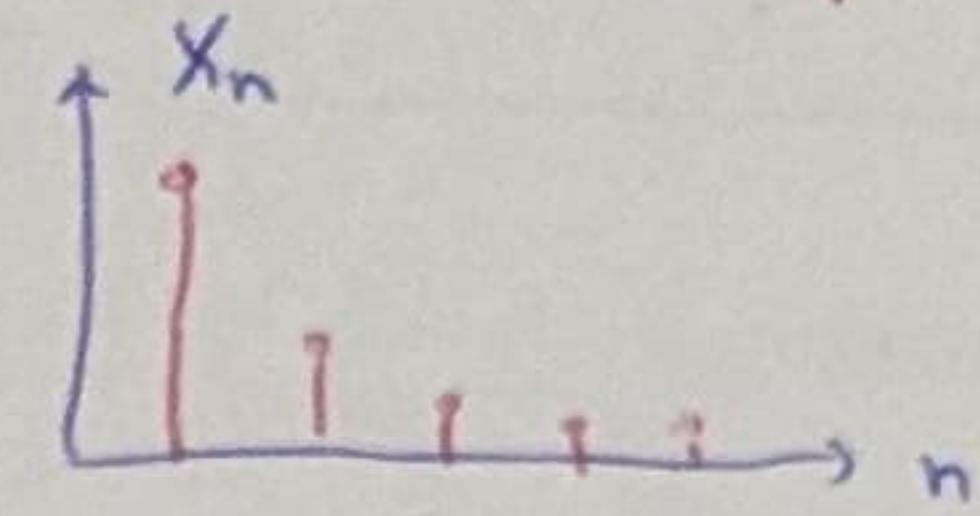
coeff de rang  $n$  aura amplitude  $n$  fois inférieure à celle de signal cricneau

- Si on trace l'amplitude des coeff de Fourier  $X_n$  et  $C_n$  en fonction de  $n \rightarrow$  spectre du sig.
- Spectre en amplitude et spectre en phase

\* décroissance en  $\sqrt{n}$  de l'amplitude des harmoniques

(pour signal triangle  $\rightarrow \frac{1}{n^2}$ )

ici par ex que harmoniques impaires  $\rightarrow$  cela entraîne le trémolo du son



- généraliser concept de série Fourier aux fonctions périodiques  $\rightarrow$  Transf. Fourier

- pas un ens. discret de coeff.

et on associe à fonction une fonction de pulsation  $\tilde{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$

- nouvelle façon de représenter  $f(t)$  et contient m infos sur  $f(t) \rightarrow$  une généralisation

on retrouve  $f(t)$  par  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$  TF inverse

• TF de la dérivée  $f'(t)$  est  $i\omega \tilde{F}(\omega)$

• TF de la primitive  $\int f(t) dt$  est  $\frac{\tilde{F}(\omega)}{i\omega}$

• pour variables d'espace (en 3D)  $\tilde{F}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{R^3} f(\vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{x}$

• pour fréq  $\omega$  =  $\tilde{F}(-\omega) = \overline{\tilde{F}(\omega)}$  et par  $\tilde{F}(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega) e^{i\phi(\omega)}$

$$\rightarrow f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty X(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega)) d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty [a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t)] d\omega$$

généralisation des formules des fonctions périodiques réelles

## Réponse Spectrale

Si  $F(t)$  dépend de  $t$ , - du de trouver sol. spécifique mais = problème linéaire - on résoud pour 1 seule composante de Fourier de  $f$  qui on note  $f e^{i\omega t}$  (phase nulle à l'origine)

(avant on faisait  $f(t) = f \cos(\omega t) = \operatorname{Re}(\tilde{F}(t)) \rightarrow f(t) = f e^{i\omega t}$  alors que c'est TF !)

tout signal réel peut se mettre sous la forme  $f(t) = f \cos(\omega t)$  par Fourier et là tous -embres de panache de ED sont réel ✓

étude de la sol. homo est m à l'étude de réponse indicelle - on s'intéresse à sol. part.

cette sol est réponse spectrale : correspond au comportement du système soumis à une excitation à 1 fréq (excitation harmonique) une fois que le sol. homogène est devenue négligeable

$\rightarrow$  le syst oscille sinusoïd. à la fréq d'excitation  $\Rightarrow$  régime sinusoïdal forcé

on cherche sol. de la forme  $x(t) = X(\omega) e^{i\omega t}$  (pour linéarité) et  $\frac{d^n x}{dt^n} = (i\omega)^n x(t)$

en remplaçant

$$\text{ds ED} \Rightarrow X(\omega) = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega \frac{\omega_0}{Q}}$$

par pulsation réduite  $u = \frac{\omega}{\omega_0}$

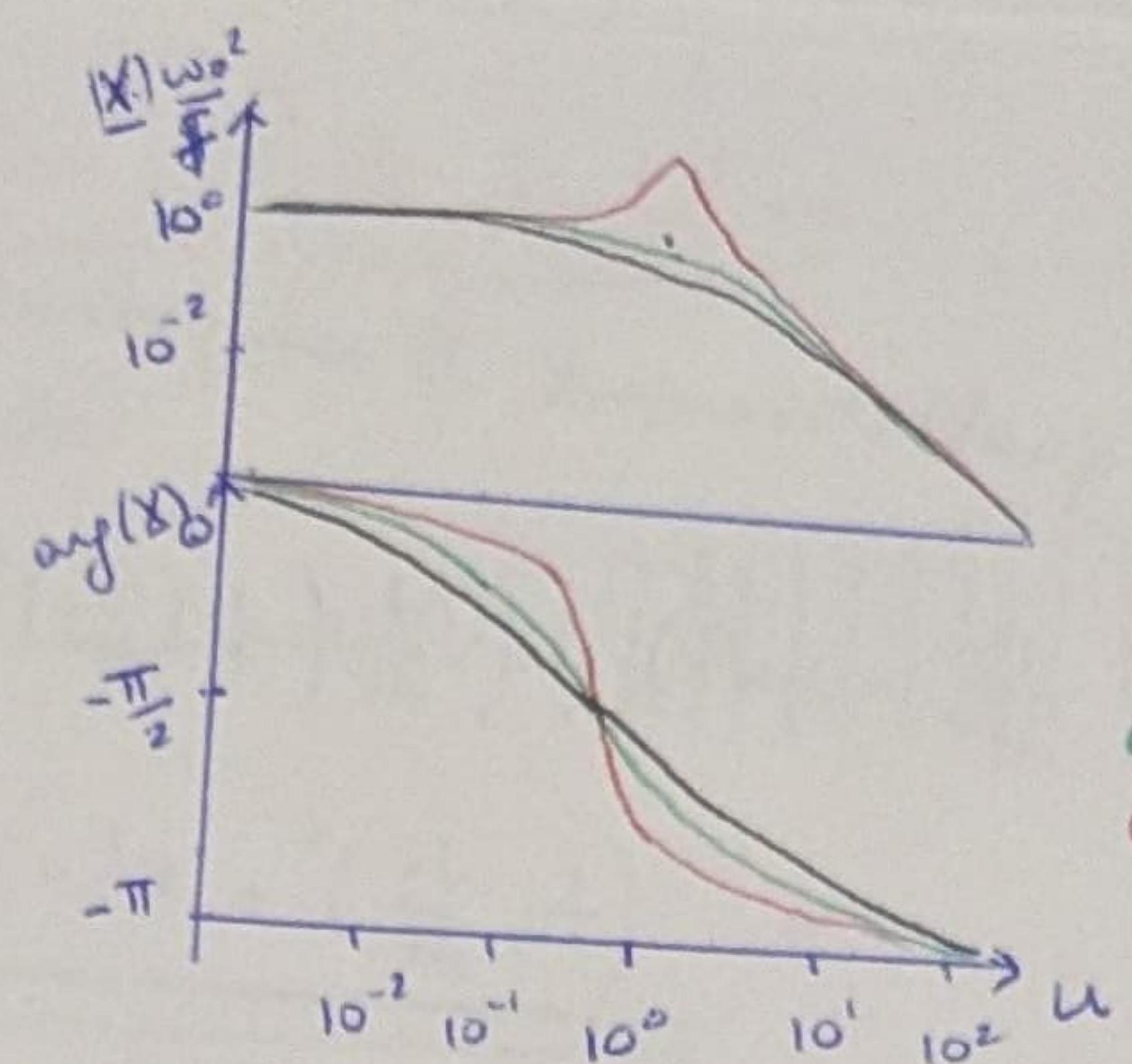
$$X(u) = \frac{F}{\omega_0^2} \frac{1}{1 - u^2 + i\frac{u}{Q}}$$

= à fréq nulle =  $u \rightarrow 0$  on retrouve sol. part. de la réponse indicelle

= réponse spectrale est de forme  $X e^{i(\omega t + \phi)}$  = étudier  $|X(u)|$  et  $\arg(X(u)) = \phi$  en fonction de  $u$  en échelle log  $\rightarrow$  Diagramme de Bode

## Résonance en position

- Fct  $X$  est strictement décroissante si:  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$  ( $= 0,7$ )
- et si:  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , a un max
  - $\alpha$   $u = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$  de valeur
  - $|X| \frac{\omega_0^2}{f} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$  pic de la réponse spectrale



phys pour gen  
oscillations  
3

Pulsation de résonance:  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

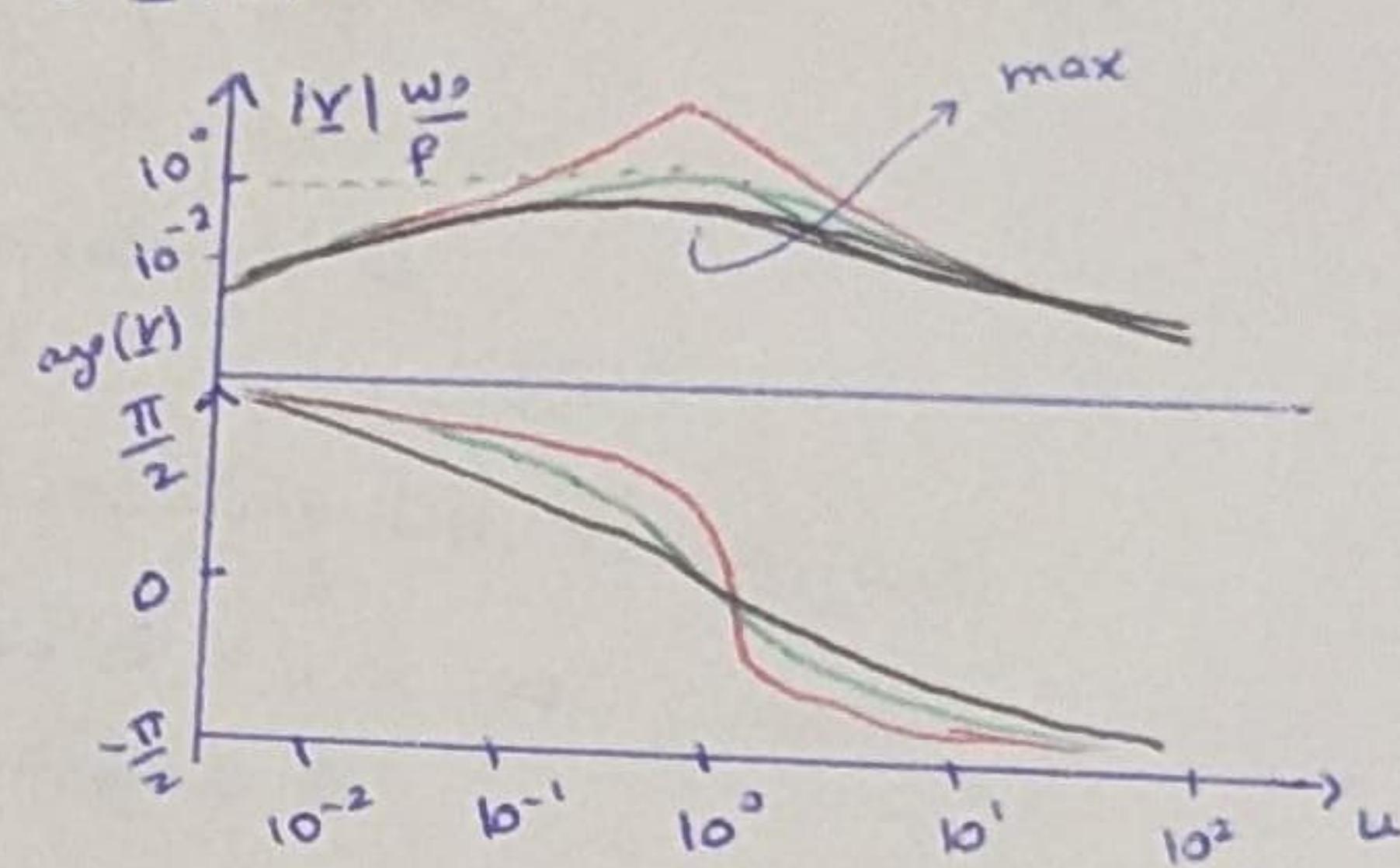
## Résonance en vitence (utile si on étudie comment un circuit RLC qui est $\frac{d^2}{dt^2}$ )

si  $X(t) = X(\omega) e^{i\omega t} \Rightarrow (\underline{V}(\omega) = i\omega \underline{X}(\omega)) \rightarrow \frac{d\underline{X}}{dt} = i\omega \underline{X}(\omega) e^{i\omega t} = \underline{V}(\omega) e^{i\omega t}$

$$\underline{V}(\omega) = \frac{F}{\omega_0} \frac{i\omega}{1 - \omega^2 + i\frac{\omega}{Q}} = \frac{F}{\omega_0} \frac{Q}{1 + iQ(\omega - \frac{1}{\omega})}$$

et pas  $\omega^2$

\*  $|V|$  possède un max  $V_{max} = \frac{FQ}{\omega_0}$  à  $\omega = 1$   
que soit  $Q \Rightarrow$  résonance



Donc • résonance en vitence  $\exists$  que soit  $Q$ , contrairement à résonance en position

- fréq. résonance est indép de  $Q \Rightarrow$  elle est = fréq. propre du syst (contrairement à position)
- Lors de résonance,  $\arg(V) = 0 \Rightarrow$  excitation et réponse sont en phase
- mais si pic réson. ne dépend pas de  $Q$ , sa hauteur et sa largeur en dépendent

bande passante (où  $V > \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$ ) =  $\Delta\omega = \frac{1}{Q}$

\* Facteur Qualité' influence la réponse

ds cas indiciel, caractérise durée réponse et charge valeur pseudo-péiodisation  $\rightarrow$  valeur critique est  $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

• syst à réponse longue ds t  
avec bande passante réduite

ds cas spectral, caract. hauteur et largeur pic de résonance  
ainsi que position de la résonance en position  
 $\rightarrow$  valeur critique est  $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\rightarrow$  Ex diapason

$\hookrightarrow Q \approx 10^3$ !  $\rightarrow$  le son dure longtemps (lent amortissement)  
de son homog.

## Portrait de Phase

Pour visualiser qualitativement le comportement de OH

$$\frac{dx}{dt} \times \left( \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 = \text{cste}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left( \frac{1}{\omega_0} \frac{dx}{dt} \right)^2 + x^2 = a}_{\text{éq° cercle ds plan } (x, \frac{x}{\omega_0}) \text{ de centre (0,0)} \text{ et de rayon } \sqrt{a}}$$

On dispose d'autant de trajectoires qu'il y a de constantes a

### Propriétés des trajectoires:

conditions initiales:  $\begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix}$  permettent de repérer un pt du portrait de phase. Ce pt permet de fixer la constante a ce q'z permet de fixer la trajectoire.

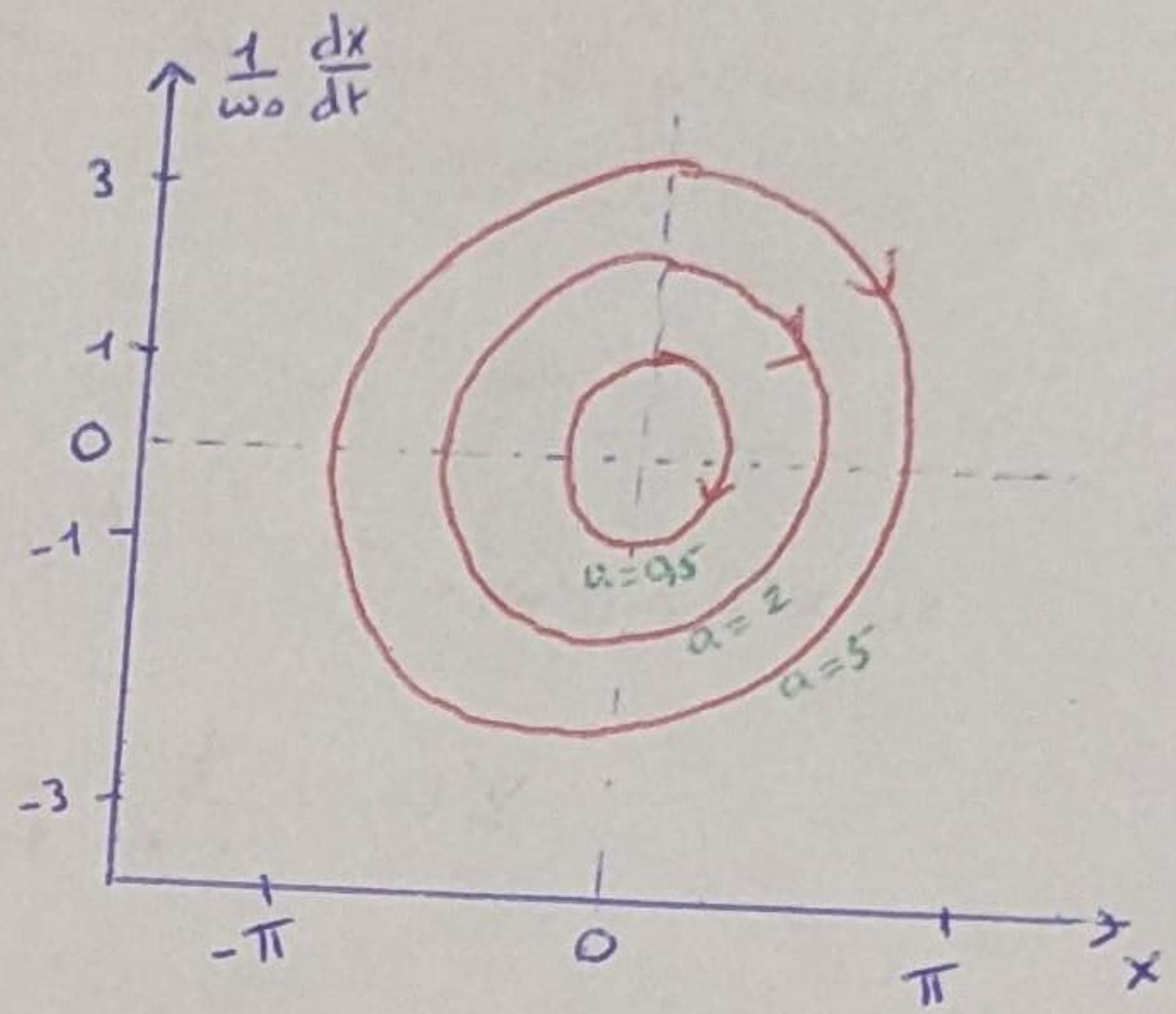
Croisement de trajectoires: pas possible --

car si c t le cas = ont m valom x et  $\dot{x}$  en 1 pt  
et en prenant ce pt comme CI  $\rightarrow$  2 trajectoires identiques

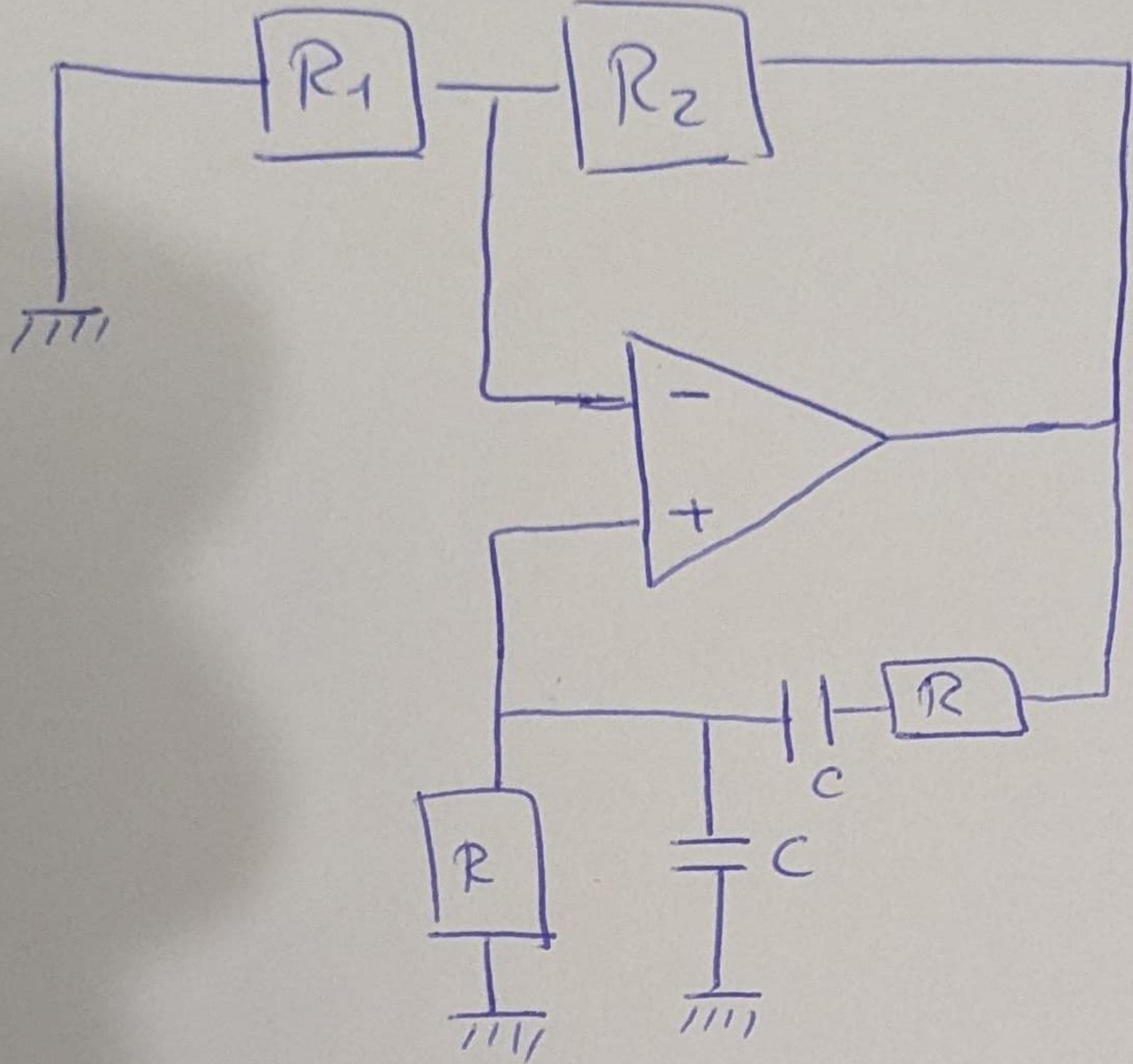
Sens de parcours: dans partie supérieure,  $\dot{x} > 0 \Rightarrow x$  augmente  $\Rightarrow$  gauche à droite

En bas c'est le contraire

$\Rightarrow$  sens aiguille d'une montre

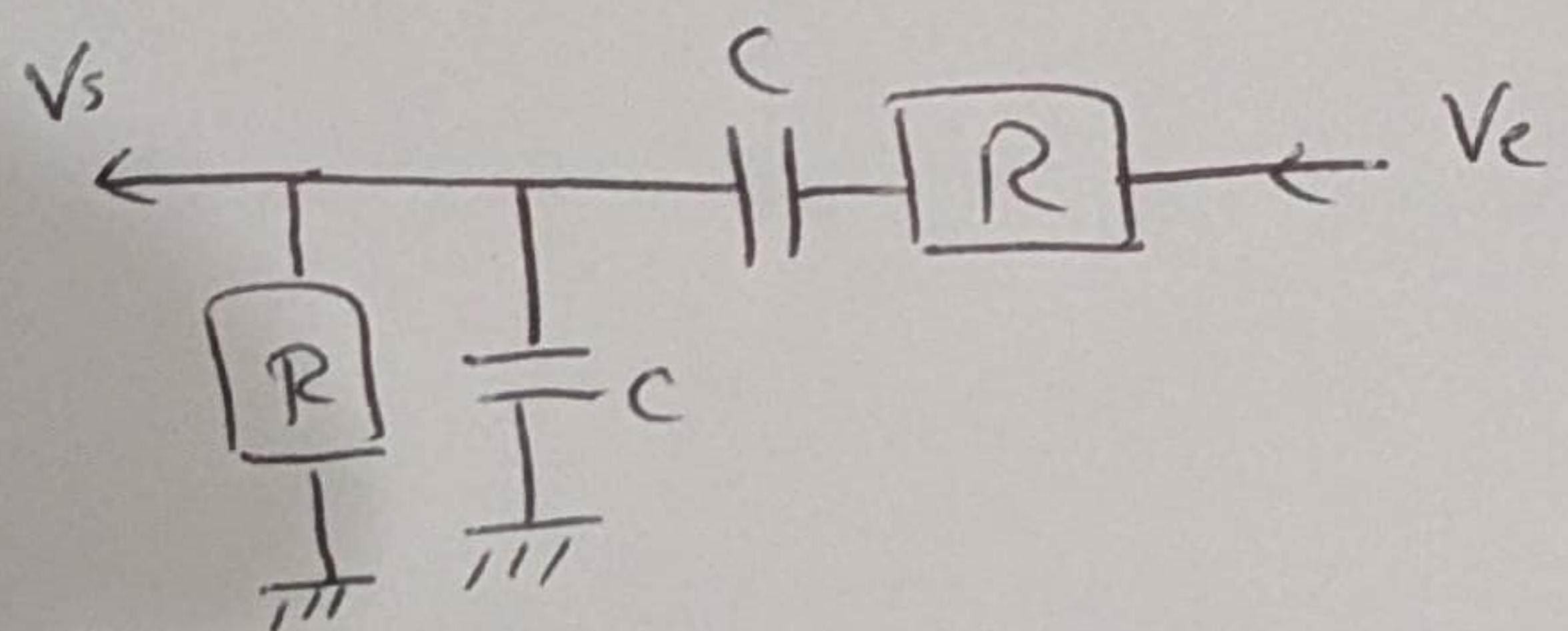


# Pont de Wien



$$\frac{R_2}{R_1} \approx 2$$

oscill. quasi-sinusoid.  
 $\omega_0 = \frac{1}{RC}$



Filtre Pampe-bande  
d'ordre 2

$$H(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

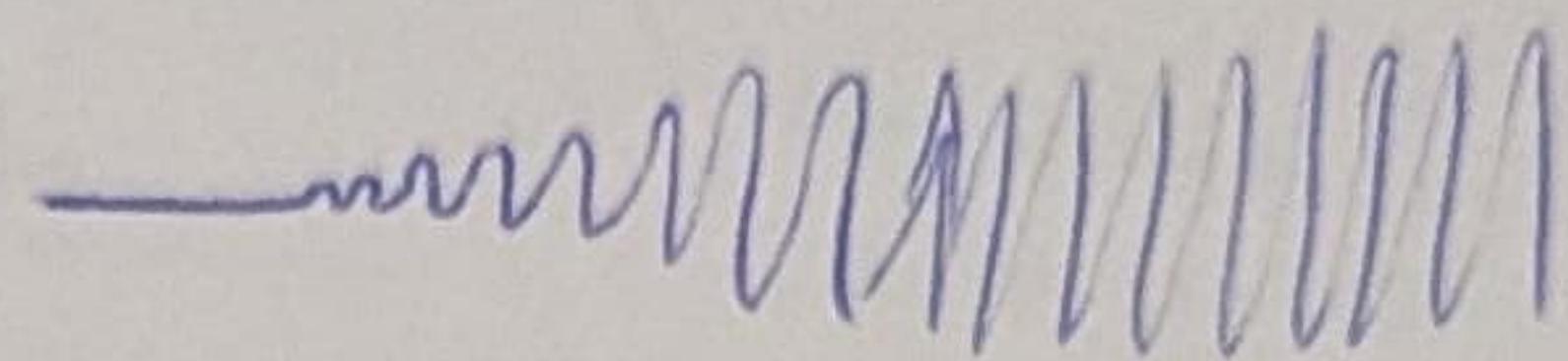
$$\begin{cases} H_0 = \frac{1}{3} \\ Q = \frac{1}{3} \\ \omega_0 = \frac{1}{RC} \end{cases} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

$\sim 10^4 \text{ rad/s}$

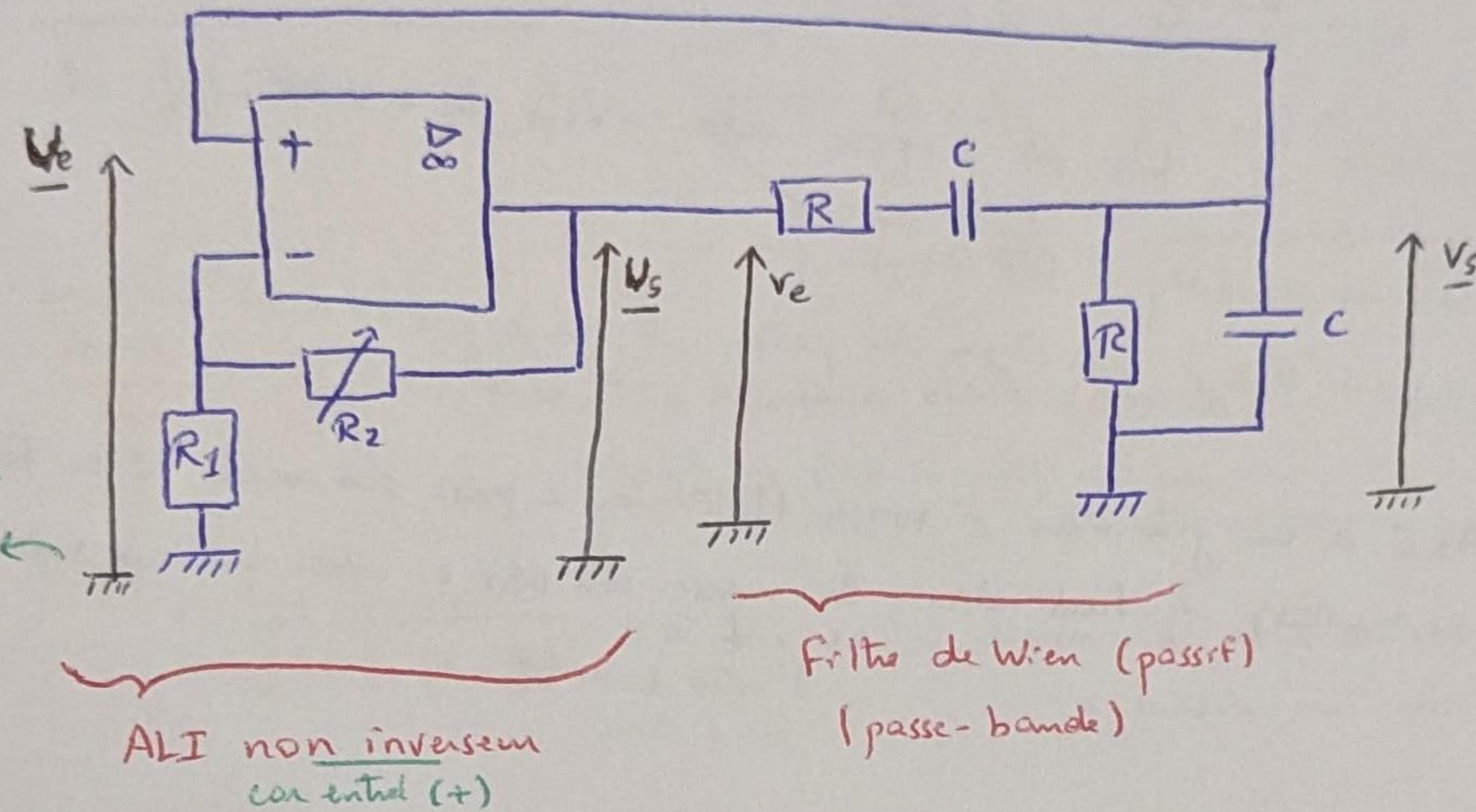
$\approx -3 \text{ dB}$

## Oscillateur Pont de Wien

c'est un oscillateur quasi-sinusoidal



Youtube  
E-Learning Physique  
"Électroacoustique :  
oscill. Pont Wien"



▷ Sons GBF  
= Fournit tension quasi sinusoidal sans GBF

filtre de Wien (passif)  
(passe-bande)

on traitera chacun tout seul puis les 2 ensemble car sortie filtre  $\rightarrow$  entrée ALI !

ALI idéal et en régime linéaire

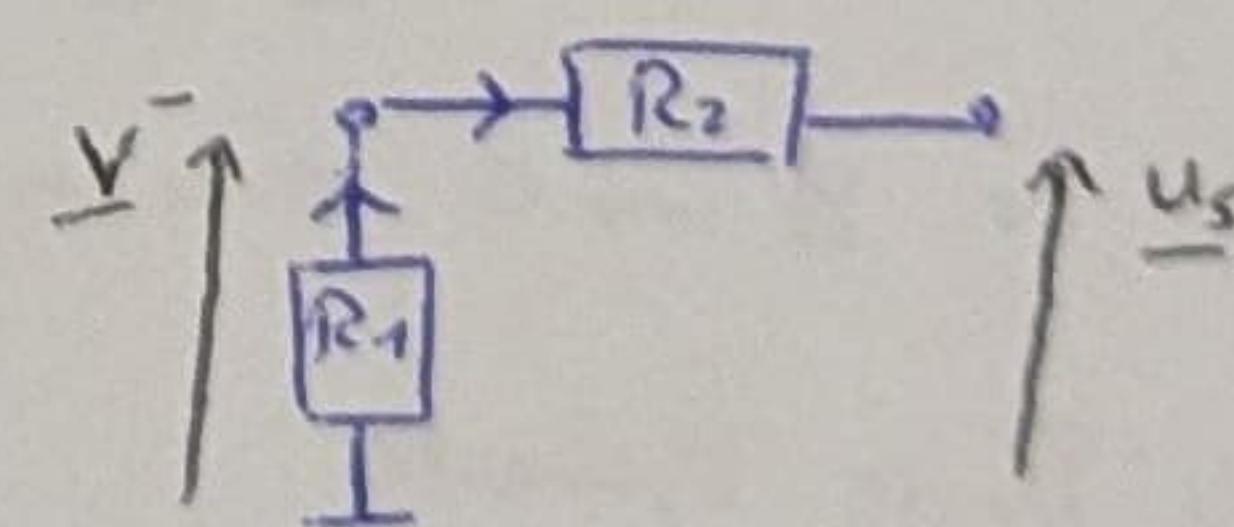
impédance d'entrée  $\gg$  devant impéd. montage = courants d'entrée sont négligeables

$$\left| \begin{array}{l} i_{e^-} \approx i_{e^+} \approx 0 \text{ car idéal} \\ E = V^+ - V^- \approx 0 \text{ car linéaire} \end{array} \right.$$

- $V^+ = u_e$

- $V^-$ 
  - point diviseur de tension
  - Loi des noeuds en terme de potentiels
  - Millmann

Pont diviseur de tension on a  $V^-$  et  $u_s$  et les 2 R sont en série car  $i_- = 0$



$$V^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_s$$

Loi des Noeuds en terme des potentiels

$$\text{le 1er courant passant par } R_1 = \frac{\Delta V}{R_1} = 2\text{e courant par } R_2 = \frac{\Delta V}{R_2}$$

$$\frac{0 - V^-}{R_1} = \frac{V^- - u_s}{R_2} \rightarrow V^- \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{u_s}{R_2}$$

$$\Rightarrow V^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_s$$

$V^-$  est barycentre des noeuds A, B

Millmann : conséquence de ça et on a ça

$$V^- = \frac{V_A + V_B}{R_1 + R_2}$$

$$H = \frac{U_s}{U_e} = G_0$$

c'est justement gain

↓  
fct transfert      on sait ici  
qu'on aura résultat nul =

$$\text{par } V^+ - V^- = 0 \Rightarrow \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_s = U_e \Rightarrow H = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad G_0 > 0$$

Limitation régime linéaire       $U_s$  est comprise entre  $-V_{sat}$  et  $+V_{sat}$

ALI est alimenté en  $\pm 15V = U_s$  dépasse pas ce

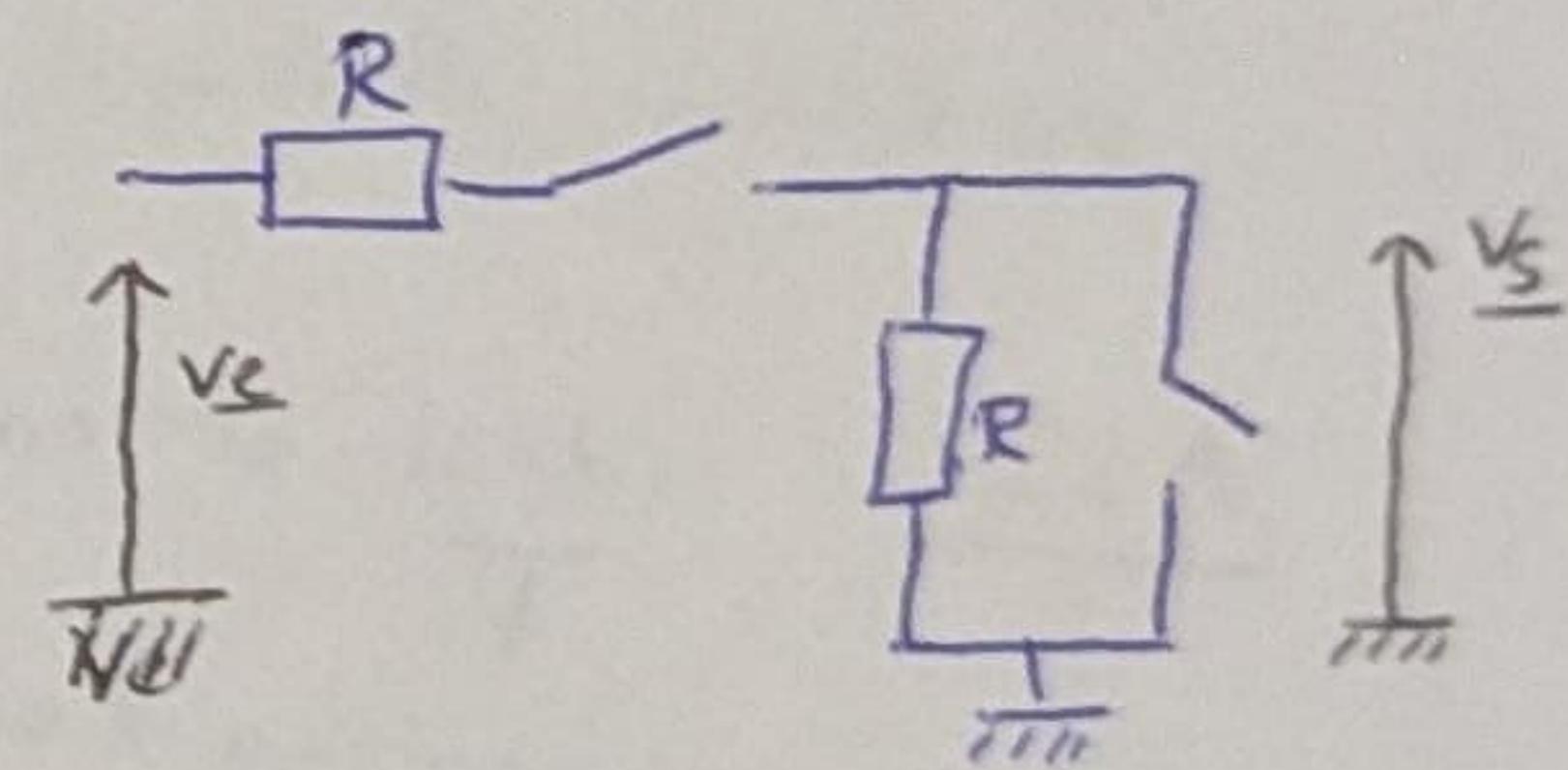
En réalité  $V_{sat} \neq V_{lim}$  car il ya des pertes et  $+V_{sat}$  pas forcément  $= -V_{sat}$

▷ En pratique: ALI a un générateur à masse flottante = prise par reliée à la Tensc (sans bout d'étai) = fait relire la masse du GBF ou autre qu'eux sont reliés à Tensc  
 ↓  
 3<sup>e</sup> entrée (noire)  
 de l'alim

## Filtre

Basse Fréq:  $C \equiv$  interrupteur ouvert      car  $\frac{1}{jC\omega} \rightarrow 0$   
 à  $\omega \rightarrow 0$

- On peut pas utiliser pont diviseur  
 de tension car circuit coupé par l'interrupteur

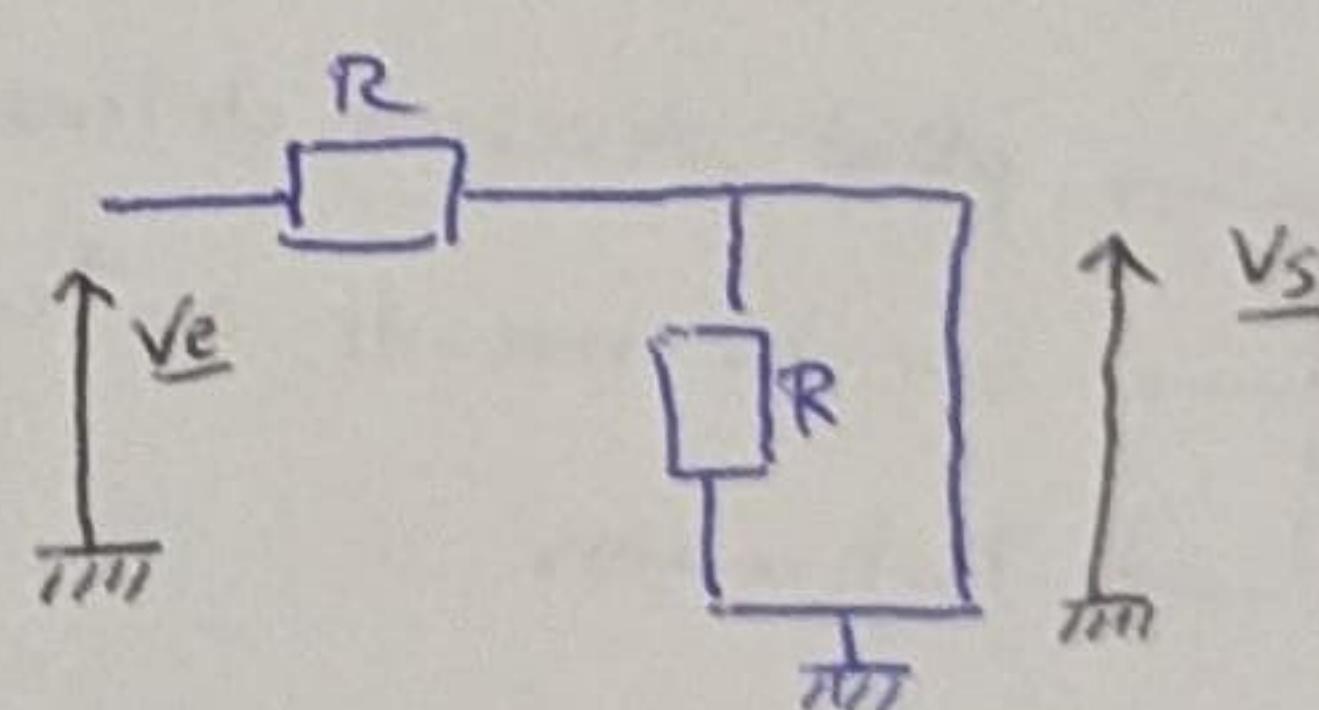


- tension aux bornes interrupteur ( $\parallel R$ ) est inconnue = on regarde celle aux bornes de R  
 car doit être la m  
 = cette R n'est parcourue par aucun i =  $U_s = 0$

=  $H \rightarrow 0$  à  $\omega \rightarrow 0$  = coupe petites fréq.

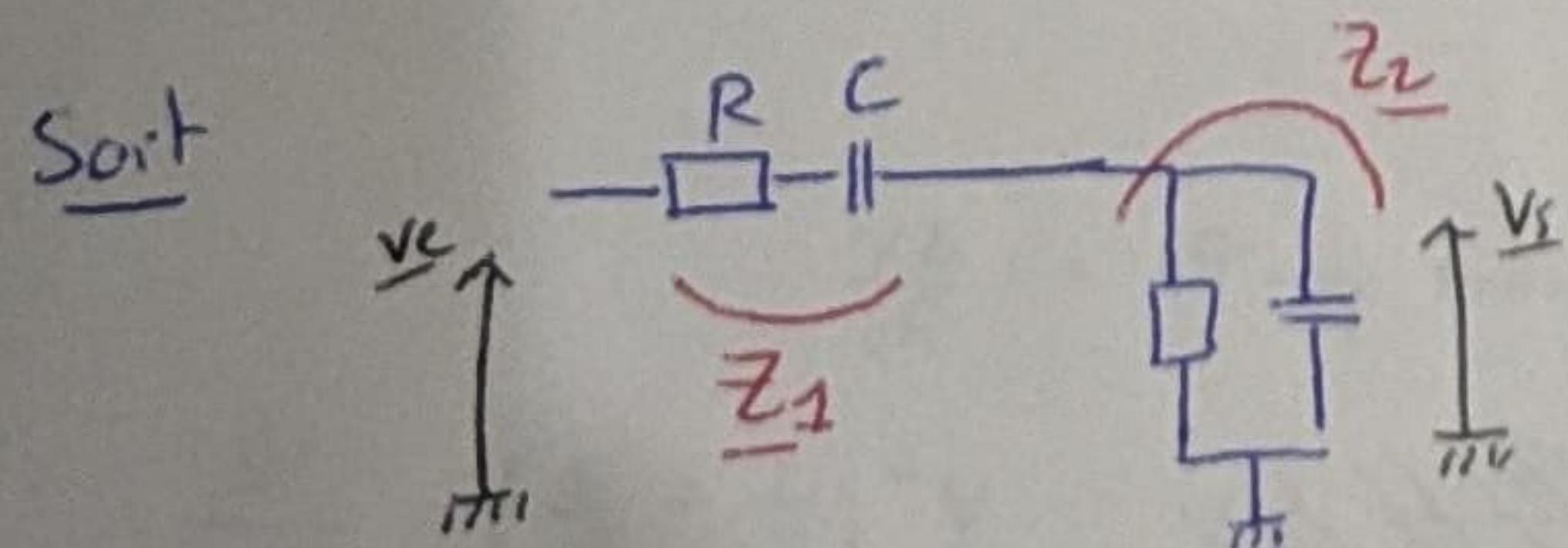
Haute fréq:  $C \equiv$  fil      car  $\frac{1}{jC\omega} \rightarrow 0$

- tension aux bornes du fil = 0  
 =  $U_s = 0$



=  $H \rightarrow 0$  à  $\omega \rightarrow \infty$  = coupe hautes fréq

⇒ Passe Bande



$$H = \frac{U_s}{U_e} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{par pont diviseur de tension car } Z_1 \text{ et } Z_2 \text{ en série}$$

$$= \frac{1}{Y_2 Z_1 + 1} \quad \text{en divisant par } Z_2$$

↳ admittance  $(\frac{1}{Z_2})$

✓ car R.C en // = + facile Y que Z

$$H = \frac{1}{\left(\frac{1}{R} + j\omega\right)\left(R + \frac{1}{j\omega}\right) + 1} = \frac{1}{3 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega}}$$

Pont de Wien  
2

Forme canonique de Passe Bande :

$$H = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

$$\frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

$$H_0 = \frac{1}{3} \quad \text{gain au max}$$

$$Q = \frac{1}{3} \quad \text{facteur de qualité'}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad \begin{array}{l} \text{inverse de temps } (T=RC) \\ (\text{Freq. de résonance}) \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \end{array}$$

\*  $\frac{\Delta\omega_c}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$   $\Rightarrow +Q \nearrow +\text{résonance étroite } (\Delta\omega_c \searrow)$   $\Rightarrow$  ici  $\frac{1}{3}$  c'est tenable

on dit pas freq couplée  $\omega_c$  car il y a 2  $\Rightarrow$  on dit résonance

\*  $|H| = \frac{H_0}{\sqrt{1+Q^2(x-\frac{1}{x})^2}}$   $\text{à } \omega = \omega_0 = \text{dénom} = 1 \text{ et à cette résonance } |H| = H_0$   
 $\Rightarrow$  module au max

Diagramme de Bode

$$H = \frac{1}{3 + j\left(RC\omega + \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

$$H = \frac{1}{3 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \frac{1}{x} \text{ domine} \end{array} \quad H \approx \frac{1}{\frac{j}{x}} = jx$$

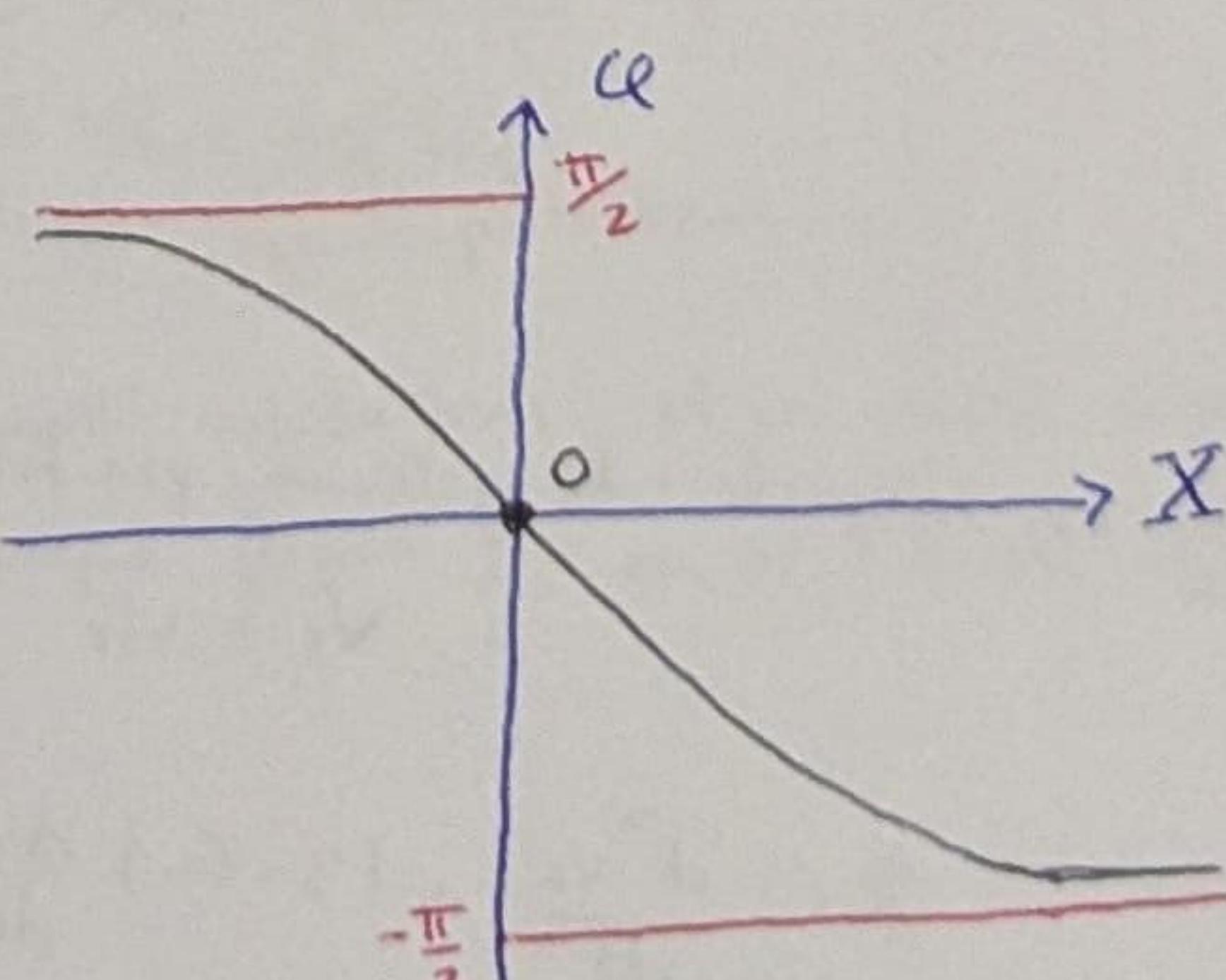
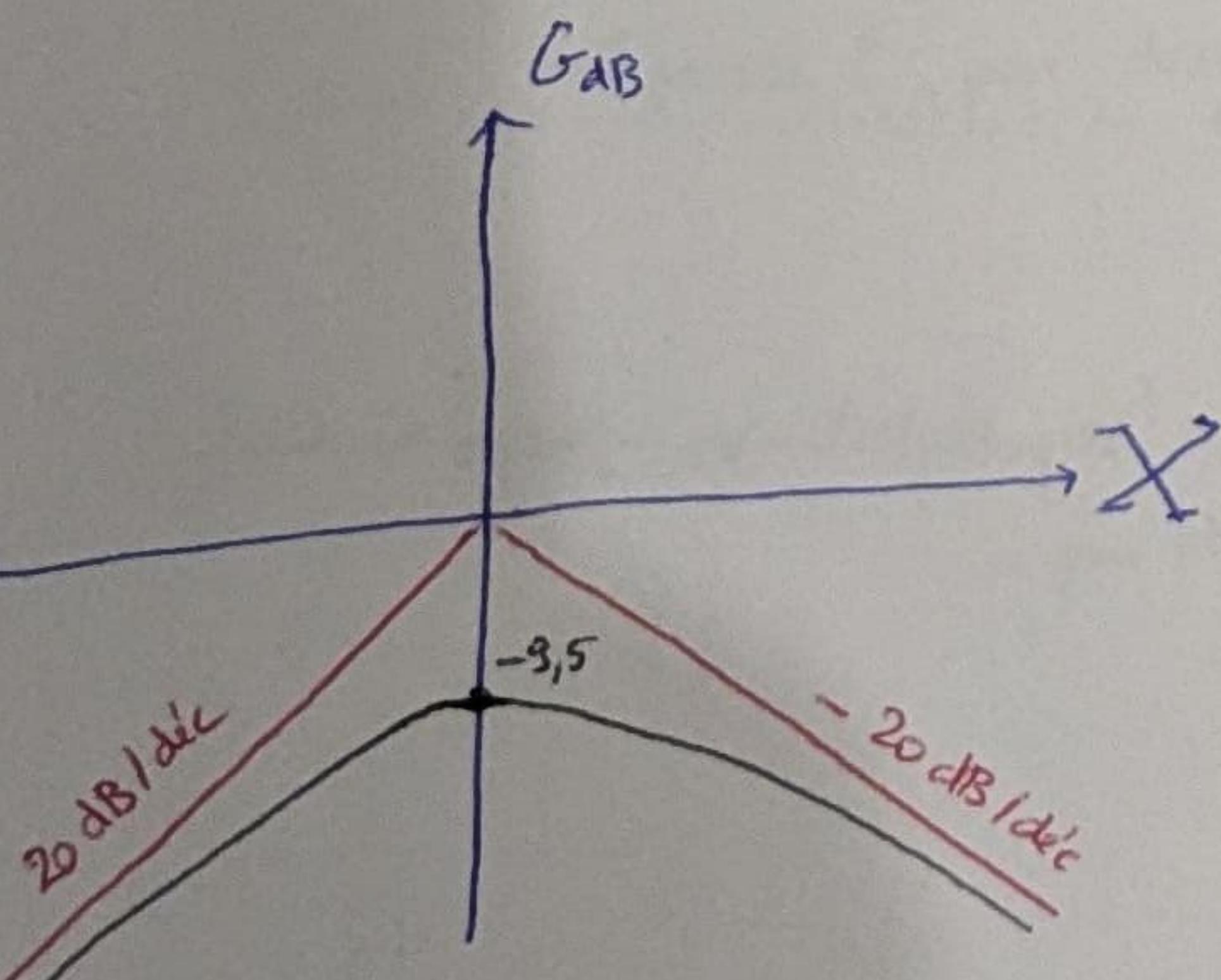
$$\left| \begin{array}{l} |H| = x \quad G_{dB} = 20 \log(x) = 20X \rightarrow 1^{re} \text{ asymptote} \\ \varphi = \arg(H) = \arg(jx) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$H \quad \begin{array}{l} x \rightarrow \infty \\ \frac{1}{jx} = -\frac{j}{x} \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{l} |H| = \frac{1}{x} \quad G_{dB} = 20 \log\left(\frac{1}{x}\right) = -20X \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{à } (\omega = \omega_0) \Rightarrow x = 1 \Rightarrow H = \frac{1}{3}$$

$$\left| \begin{array}{l} |H| = \frac{1}{3} \quad G_{dB} = 20 \log\left(\frac{1}{3}\right) \approx -9,5 \text{ dB} \\ \varphi = 0 \end{array} \right.$$



Comment chercher la résonance expérimentalement ?

- soit par gain max = on balaye en fréq. et on cherche le  $\frac{1}{3}$  mais on a facteur qualité Q faible = résonance est floue = pas très précis
- = cherche le  $\phi=0$ 
  - par oscillo laisser les 2 signaux en mode temporel normal et regarder qd est-ce qu'elles se superposent (pour faire chgt phase)
  - ou
  - par oscillo mode XY sa donne  $\bigcirc$   
et + on se rapproche de  $\omega_0 \Rightarrow \bigcirc \bigcirc \bigcirc$   
et à  $\omega_0 \Rightarrow \times$  droite dépende +ve

### Combiner ALI et Filtre

Au début, ouvrant le circuit entre filtre et ALI (pas de câble reliant sortie filtre à entrée ALI) et en entrée ALI imaginons un GBF et = toute la chaîne représente 2 filtres en cascade (1<sup>er</sup> actif et 2<sup>e</sup> passif)

$$\text{Fct Transfert Global: } \frac{\underline{V_s}}{\underline{U_e}} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{U_e}} \times \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{1}{3+j(RC\omega - \frac{1}{RC\omega})} \times G_0 \quad \left[ G_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1} \right]$$

c'est comme produit grandissement en optique

But? chercher ED entre  $V_s(t)$  et  $U_e(t)$  par H on obtient ED en par ED on obtient H

La technique est faire produit en aéri

$$G_0 \underline{U_e} = \left[ 3 + j(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}) \right] \underline{V_s}$$

$$\begin{aligned} \cancel{*} \left| \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \leftrightarrow j\omega \\ \int dt \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \end{array} \right. & \Rightarrow G_0 \underline{U_e(t)} = 3 \underline{V_s(t)} + RC \frac{d\underline{V_s}}{dt} + \frac{1}{RC} \int \underline{V_s(t)} dt \\ & \text{on enlève complexe car on est en réel} \\ \cancel{*} & \Rightarrow G_0 \frac{d\underline{U_e}}{dt} = RC \frac{d^2 \underline{V_s}}{dt^2} + 3 \frac{d \underline{V_s}}{dt} + \frac{1}{RC} \underline{V_s(t)} \\ & = \text{Filtre d'ordre 2} \end{aligned}$$

on multiplie par  $\frac{j\omega}{j\omega}$

on peut aussi le trouver si on met H en forme  $\frac{j\omega}{...}$  donc on aura  $\underline{\omega^2}$  en bas

Maintenant on reboucle le système par fil et = fil donc n° potentiel  $V_s$  jusqu'à  $U_e$

$$= \underline{V_s} = \underline{U_e}$$

$$\Rightarrow RC \frac{d^2 \underline{V_s}}{dt^2} + (3 - G_0) \frac{d \underline{V_s}}{dt} + \frac{1}{RC} \underline{V_s} = 0$$

Pour osciller, il faut qu'il y ait un relatif oscillateur harmonique  
(terme  $\frac{dV_s}{dt}$  est terme d'amortissement)

Pont de Wien  
3

Il faut avoir  $G_0 = 3$  = terme d'amortissement s'annule = ALI non inversé  
doit donner  $G_{AV} = 3$

\* C'est pour cela qu'on a  $R_2$  variable pour essayer d'obtenir ce  $G_0$  par  $1 + \frac{R_2}{R_1}$

$$\frac{d^2 V_s}{dt^2} + \frac{1}{R^2 C^2} V_s = 0 \quad \text{de pulsation propre } \omega_0^2 = \frac{1}{(RC)^2}$$

et donc  $V_s(t) = V_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$

fréq. d'oscillation

C'est quoi ce  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  ? Du filtre de Wien c'est celle de la fréq. de résonance

$$q = \text{annule } (RC\omega - \frac{1}{RC\omega})$$

= syst. va osciller naturellement à cette fréq.

\* Analogie avec laser: cavité optique dans laquelle il y a onde EM qui fait des allers-retours

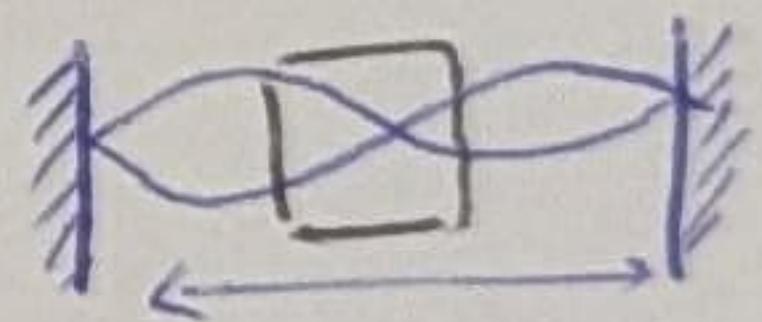
On voit que cette cavité a des modes propres (comme onde de HeIde)

$$L = n \frac{\lambda}{2}$$

$$= \gamma_n = \frac{n\lambda}{2L} = \text{cavité de fréq. propres}$$

et on trouvera que le laser va osciller à 1 ou plusieurs des fréq. propres de la cavité (ici, il oscille à  $\omega_0$ )

Oscillation quasi-sinusoidale de résonance



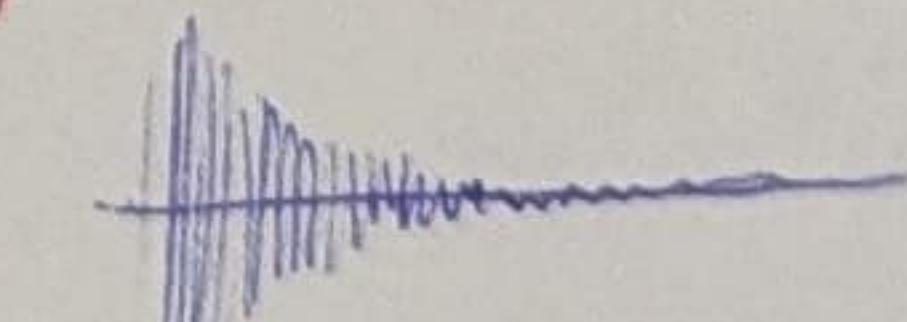
Et ce qui va jouer le rôle de l'amplificateur est le "milieu amplificateur" □

\* Le problème ici c'est qu'on peut régler  $G_0$  à 3 exactement = soit  $(3-G_0)$  sera >0 soit <0

si  $(3-G_0) > 0$  (comme dans la plupart des problèmes en physique)  $\Rightarrow$  syst. stable

syst. stable est pour lequel sol. de l'éq.  $\rightarrow 0$  qd  $t \rightarrow +\infty$

et pour être stable, il faut que tous les termes de ED soit de un signe



car coeff  $\frac{dV_s}{dt} \rightarrow +\infty$   
 $\therefore V_s \rightarrow 0$   
et coeff est bien >0

Les sol ? par discriminant  $\Delta$

$> 0$	réfère apéroscopique
$= 0$	critique
$< 0$	pseudo-périodique

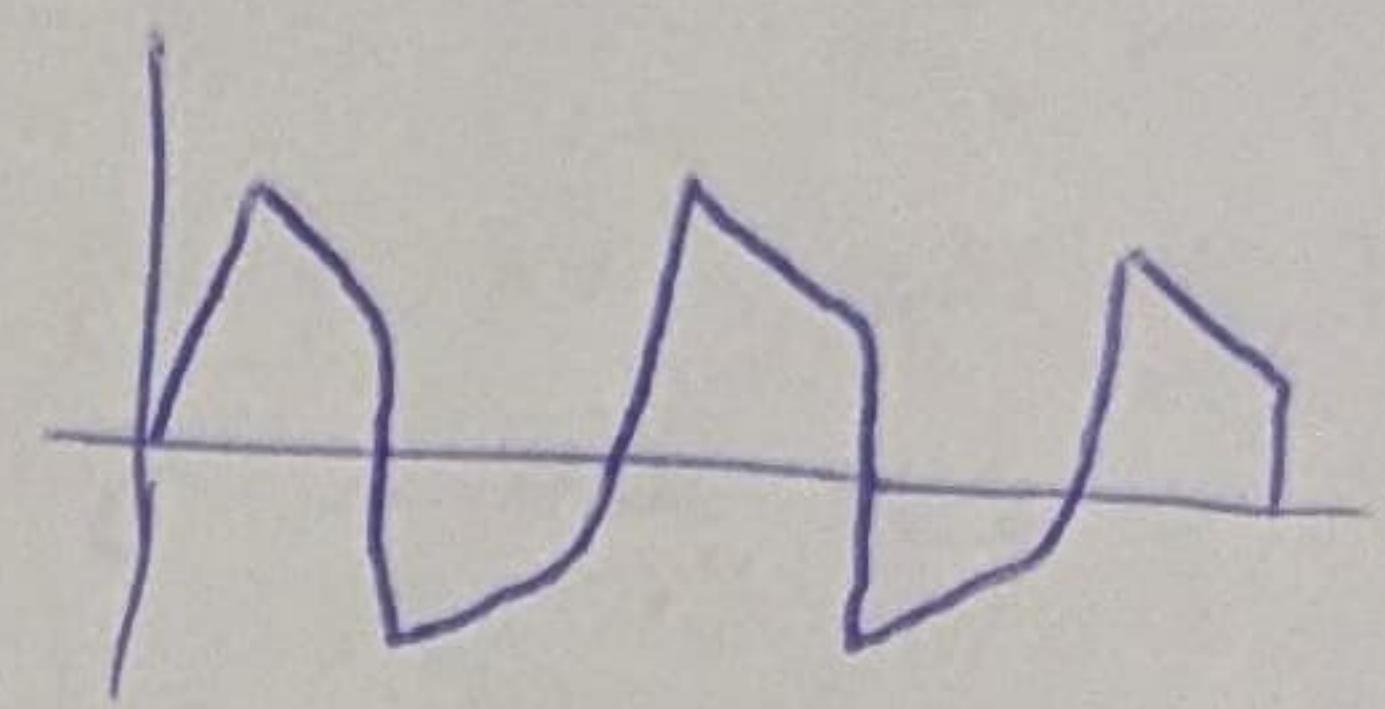
Ici on cherche un syst. instable (pour faire naître oscillations) et pas avoir amortissement par exp = pas être en pseudo-périodique

Donc si  $R_2$  petite  $\approx (3 - G_0) > 0 \Rightarrow$  pas d'oscillations

Si  $R_2$  très grand  $\approx (3 - G_0)$  très  $< 0 \Rightarrow$  oscillations ✓ mais pas sinusoidales

car  $U_S$  est limité (par dépasse  $U_{sat}$  ALI)

- Les non linéarités de ALI vont limiter l'amplitude des oscillations  
(sinon tension serait amplifiée jusqu'à  $\infty$ )



Donc faut être proche de la naissance des oscillations ( $R_2$  pas très  $> 2R_1$ )

$\Rightarrow$  oscillations à la période  $T_0$  prévue

\* PK et d'où naissent les oscillations alors qu'il n'y a pas de GBF?

C'est du bruit -- ALI active à  $\pm 15V$  et il y a du bruit électrique

= dès qu'il y a bruit à la bonne fréq. = sera amplifié exponentiellement 