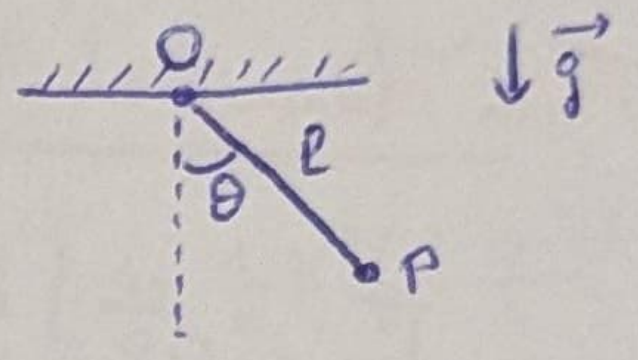
Pendule Simple

Youtube
E-Learning
Physique
"c'est le + important de méca pt"

ici on fera avec l'approx harmonique (cas linéaire).
Si on sort de cette approx → Formule de Borda qui donne période en fct amplitude d'oscillation

(car à θ faible $\sim 20°$ → isochronisme ∴ T indép des amplitudes)

On a 3 théorèmes de méca de pt.



- PFD
- Thm énergétique ⟶ le + efficace car c un problème à 1 seul paramètre (θ)
- Thm moment cinétique

Le Thm Em est scalaire ∴ évite de projeter comme $\vec{F}$ du PFD ∴ efficace pour 1 paramètre

Pour les 3, il faut définir
- syst ⟶ P de masse m
- référentiel → le sol supposé galiléen
- Bilan $\vec{F}$ → $\vec{T}$ et $\vec{P} = m\vec{g}$

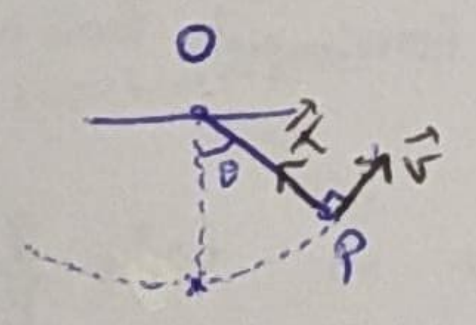
car c pas fil élastique ∴ pas $-kx$

Pour Thm énergétique : Laquelle est $\vec{F}$ conservative ?
- Poids oui → $E_p = mgz$ (orienté vers le haut)
- Tension non Mais /!\ ne travaille pas ∴ modifie pas Em

(pas comme Frottement) on peut dire qu'elle a E_p = cste ∴ $W=0$ mais par convention on choisit "non conservative"

Méthode Energétique :

$$\frac{dE_m}{dt} = P_{nc}(\vec{T}) = \vec{T}\cdot\vec{v} = 0$$



↓ puissance F non conserv.

↓ $\vec{T}$ ne modifie pas l'Em

$\vec{OP}$ $r\vec{e_r}$

$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \cancel{\dot{r}\vec{e_r}}$

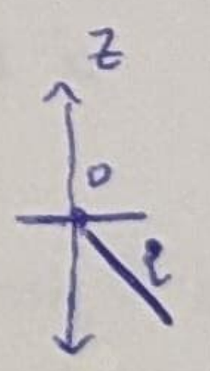
$\vec{a} = r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{e_r}$

$$E_m = \text{cste} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p$$

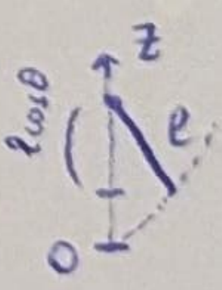
$$= \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\theta}^2) - mg\ell\cos\theta$$

⟶ où choisir l'origine ?

Si origine à O ∴ $z = -\ell\cos\theta$



ou si origine au pt en bas ∴ $z = \ell - \ell\cos\theta$



ds tous les cas on va dériver $\frac{dE_m}{dt}$ ∴ $\frac{d\ell}{dt} = 0$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{dE_m}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{dE_m}{d\dot{\theta}}\frac{d\dot{\theta}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta}mg\ell\sin\theta = 0$$

$$\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

non linéaire mais à θ petit $\sin\theta \sim \theta$ → linéarisée

2e loi de Newton

$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$

on projète sur $\left|\begin{array}{l}\vec{e_r}\\ \vec{e_\theta}\end{array}\right.$ $\quad \begin{pmatrix} -m\ell\dot\theta^2 \\ m\ell\ddot\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix}$

projection sur $\vec{e_r}$ nous permet d'avoir T mais ici ça nous intéresse pas

$\therefore$ sur $\vec{e_\theta}$: $\quad \ell\ddot\theta = -g\sin\theta \Rightarrow \ddot\theta + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$

Thm Moment cinétique

$$\frac{d\vec{L_0}}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{T})$$

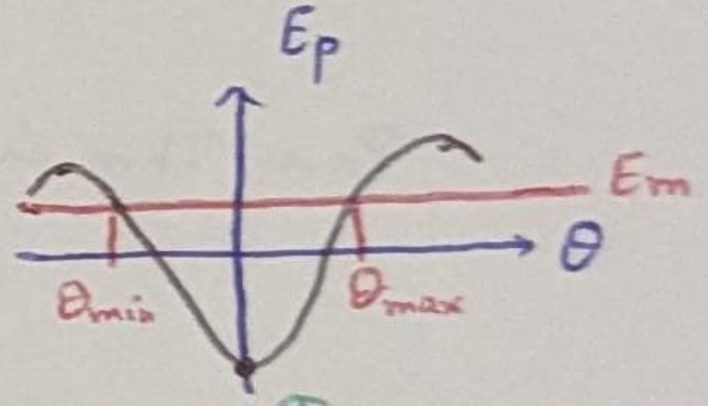
$\vec{L_0} = \vec{OP} \wedge m\vec{v} = \ell\vec{e_r} \wedge m\ell\dot\theta\vec{e_\theta} = m\ell^2\dot\theta\vec{e_z}$

$\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{T}) = \vec{OP} \wedge \vec{T} = \vec{0}$

$\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{P}) = \vec{OP} \wedge m\vec{g} = \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = -mg\ell\sin\theta\,\vec{e_z}$

$\therefore \quad m\ell^2\ddot\theta = -mg\ell\sin\theta \Rightarrow \ddot\theta + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$

Formule de Borda



à $t=0$ $\left|\begin{array}{l}\theta = \theta_0 \\ \dot\theta = 0\end{array}\right.$ et par origine Ep à 0 $\therefore E_p = -mg\ell\cos\theta$ $\therefore$

$\therefore$ on se situe en $E_m < \max E_p$ pour avoir oscillations

$\therefore \quad \theta_{min} < \theta < \theta_{max}$

ce mouv oscillant n'est pas forcément harmonique ($\therefore \sin\theta \neq \theta$)

$\theta = 0$ c'est min d'Ep $\therefore$ stable

à θ petit : $\sin\theta \sim \theta \Rightarrow \ddot\theta + \frac{g}{\ell}\theta = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{g}{\ell} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

à θ grand : $E_m = -mg\ell\cos\theta + \frac{1}{2}m\ell^2\dot\theta^2 = -mg\ell\cos\theta_0$

à θ_0, $\dot\theta = 0$ et Em conservée

$\dot\theta^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_0) \quad \therefore \quad dt = \frac{-d\theta}{\sqrt{2\frac{g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$

$\therefore$ on est au max à θ_0 et on cherche temps pour revenir à $\theta = 0$ $\therefore$ $d\theta$ est < 0 $\therefore$ faut ajouter $(-)$ pour avoir $t > 0$

$$\int_0^{T/4} dt = \int_{\theta_0}^{0} \frac{-d\theta}{\sqrt{\cdots}} = \frac{T}{4} \Rightarrow T = \int_0^{\theta_0} 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\,d\theta$$

chgt variable : $\sin\xi = \frac{\sin\theta/2}{\sin\theta_0/2} \Rightarrow \cos\xi\, d\xi = \frac{1}{2}\frac{\cos\theta/2}{\sin\theta_0/2}\,d\theta$

à $\theta = 0$: $\sin\theta/2 = 0 \therefore \sin\xi = 0 \therefore \xi = 0$

à $\theta = \theta_0$ $\rightarrow \sin\xi = 1 \therefore \xi = \pi/2$

et $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$$\rightarrow \quad T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\pi/2} \frac{\overset{d\theta}{2\cos(\xi)\sin(\theta_0/2)\, d\xi}}{\cos\theta/2 \sqrt{2\left[\sin^2\theta_0/2 - \sin^2\theta/2\right]}} = \cdots \int \frac{\cdots}{\cancel{\sin\frac{\theta_0}{2}} \sqrt{2\underbrace{\left[1-\sin^2\xi\right]}_{\cos^2\xi}} \cos\frac{\theta}{2}}$$

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\pi/2} \frac{2\cancel{\cos(\xi)}\, d\xi}{\sqrt{2}\sqrt{\cancel{\cos^2\xi}}\, \cos\theta/2} = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\pi/2} \frac{2\, d\xi}{\sqrt{2}\cos\theta/2}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1-\sin^2\theta/2} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\xi} = \sqrt{1-K^2\sin^2\xi}$$

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1-K^2\sin^2\xi}} \overset{D.L.}{\simeq} 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} d\xi \left[1 + \frac{1}{2}K^2\left(\frac{1-\cos 2\xi}{2}\right)\right]$$

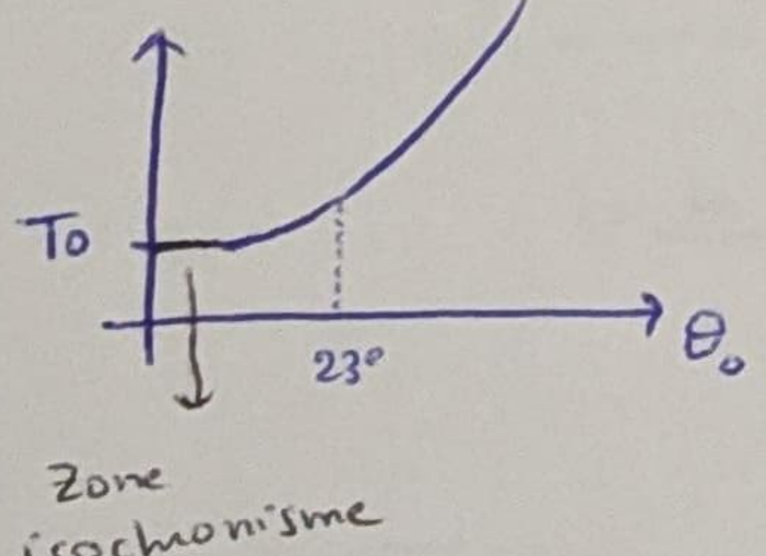
$\downarrow$ θ_0 petit

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{K^2}{4}\frac{\pi}{2} - \cancel{\frac{K^2}{8}\sin(\pi)} + \cancel{\frac{K^2}{8}\sin(0)}\right] \qquad K^2 = \sin^2\frac{\theta_0}{2} \sim \frac{\theta_0^2}{4}$$

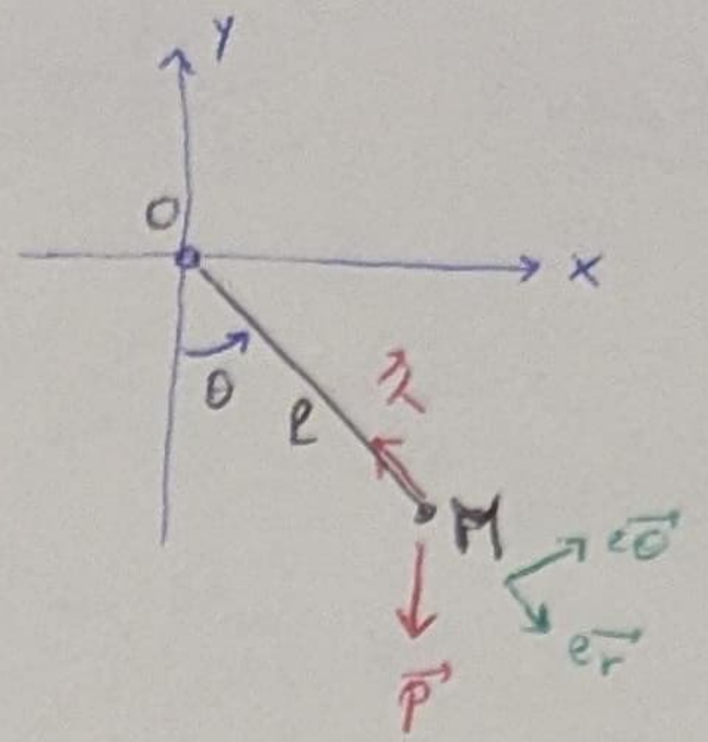
$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left[1+\frac{\theta_0^2}{16}\right] = T_0\left[1+\frac{\theta_0^2}{16}\right]}$$

Formule de Borda

valable jusqu'à ~ 23°



Borda



$\vec{P} = -mg\,\vec{u_y}$

$\vec{T} = -T\,\vec{e_r}$

$\vec{F} = -\vec{\mathrm{grad}}\,E_p$

$E_c = \frac{1}{2} m (\ell \dot\theta)^2$

$E_p = mg\,y + C$ et $E_p(-\ell) = 0$

$= mg(y + \ell)$

$\int dE_p = -\int mg\cos\theta\, dr$

$E_p = -mg\,\ell\cos\theta + C$ $\quad E_p(0°) = 0$

$= \underline{mg\ell(1-\cos\theta)}$

$E_m = E_c + E_p$ et T ne travaille pas car tout le temps $\perp$ mouv de M

$\therefore$ E_m conservée $\therefore$ $E_c + E_p = E_{p\,max} = mg\ell(1-\cos\theta_0)$

$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow m\ell^2 \dot\theta \ddot\theta + mg\ell\,\dot\theta \sin\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot\theta + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$ tq $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$

$\frac{1}{2}\ell\dot\theta^2 = g(1-\cos\theta_0) - g(1-\cos\theta)$

$\dot\theta^2 = 2\frac{g}{\ell}(-\cos\theta_0 + \cos\theta) \Rightarrow \dot\theta = \pm\omega_0\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}$

$t \in [0; \frac{T}{4}]$, $\dot\theta < 0$ et descend vers la verticale

par $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -2\omega_0\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}$

donc $\int_0^{T/4} dt = \frac{T}{4} = \frac{-1}{2\omega_0}\int_{\theta_0}^{0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}$ $\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$T = \frac{T_0}{\pi}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cdots}}$

chgt variable $\quad x = \sin\frac{\theta_0}{2}$ et $\sin\frac{\theta}{2} = x\sin\psi$ tq $\psi \in [0; \pi[$

donc $\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}} = \sqrt{x^2 - x^2\sin^2\psi} = x\sqrt{1-\sin^2\psi}$

$\frac{d}{d\theta}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2} = x\cos\psi\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}$

donc $d\theta = \frac{2x\cos\psi\, d\psi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{2x\cos\psi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\psi}}\,d\psi$

à $\theta = \theta_0 \rightarrow \sin\psi = 1$ donc $\psi = \frac{\pi}{2}$

à $\theta = 0 \rightarrow \sin\psi = 0$ donc $\psi = 0$

$T = \frac{T_0}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{2x\cos\psi}{x\sqrt{\cancel{1-\sin^2\psi}}\sqrt{1-x^2\sin^2\psi}}\,d\psi$ $\quad$ par $\cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi}$

$T = \frac{2T_0}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\psi}} = \frac{2T_0}{\pi}K(x)$

À l'ordre 2 : $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2\psi}} = 1 + \dfrac{x^2}{2}\sin^2\psi + o(x^2)$

$$K(x) \simeq \frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\psi}{2}\right)d\psi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}x^2$$

par $x^2 = \sin^2\frac{\theta_0}{2} \simeq \left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{T \simeq \frac{2T_0}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\frac{\theta_0^2}{4}\right) = T_0\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)}$

$\Rightarrow \dfrac{\Delta T}{T_0} = \dfrac{\theta_0^2}{16}$

pour $\theta_0 = 15°$, $\dfrac{\Delta T}{T_0} = 0,43\ \%$

$\theta_0 = 45°$ $\longrightarrow$ $3,86\%$

$\theta_0 = 70°$ $\longrightarrow$ $9,3\%$