Oscillateur Harmonique

- signal physique = grandeur dépendant du temps
  qd il se répète (reproduit) identique à lui m̂ au cours de t → signal périodique
- Le plus fondamental des périodiques est signal sinusoïdal (ou harmonique) produit par un modèle physique appelé oscillateur harmonique
- Ici on verra OH mécanique.
  Le syst. méca le + simple est masse accrochée à ressort
- Soit m se déplace sans frott. le long d'une tige selon x, origine coïncide avec centre inertie G de m ds la position d'éq.

- La ressort exerce sur m, la force : $\vec{F} = -\underbrace{K}_{\text{cste de raideur}} x\,\vec{u_x}$
  = Force de rappel de sens opposé au déplacement
  Il y a aussi poids $m\vec{g}$ et réaction $\vec{R}$ mais n'ont pas d'influence sur mouv. horizontal
- Par PFD : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ avec $\vec{p} = m\vec{v_G} = m\frac{dx}{dt}\vec{u_x}$ tel que x est la position de G

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\vec{u_x} = -Kx\,\vec{u_x} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$$

ED d'un OH

OH est syst décrit par x(t) dépendant de t et vérifiant ED de la forme : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0$

↑ cste réelle > 0
ω_0 = pulsation propre de l'OH [rad.s⁻¹]

∴ m accroché au ressort est OH de

pulsation : $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ et période d'oscillation $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

- résoudre pour trouver x(t) : mais on aura pas 1 $\xleftrightarrow{\text{expression}}$ unique. On doit choisir celle qui respecte les CI
  ici on doit connaître $\left\langle \begin{array}{l} x(t=0) \\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} \end{array}\right.$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Ici $\left| \begin{array}{l} x(t=0) = x_0 \\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0 \end{array}\right.$

Cas où $\left| \begin{array}{l} x_0 \neq 0 \\ v_0 = 0 \end{array}\right.$ on lâche le mobile à $x = x_0$ sans v initiale — $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)$ — m oscille entre $-x_0$ et $+x_0$

partie cos

cas où $\left| \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ v_0 \neq 0 \end{array}\right.$ sans l'écarter de position d'éq et lancer à $v_0\vec{u_x}$ — $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$ — oscille entre $-\frac{v_0}{\omega_0}$ et $+\frac{v_0}{\omega_0}$

partie sin

cas où $\left| \begin{array}{l} x_0 \neq 0 \\ v_0 \neq 0 \end{array}\right.$ ∴ sol. pour CI quelconque — $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$ — oscille entre valeur $-C$ et $+C$

- <u>Conservation Em</u>
  - en mouvement, le mobile possède $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ $(\vec{F} = -\vec{grad}\,V)$
  - Le ressort a $m=0$ → pas d'Ec mais a Ep liée à sa déformation $E_p = \frac{1}{2}Kx^2$
  - ∴ Em : $E_m = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ regardons sa variation en fct du temps
  - par sol. $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

$$E_c = \frac{1}{2}m\left(-\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t) + v_0\cos(\omega_0 t)\right)^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}K\left(x_0\cos(\omega_0 t)^2 + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right)^2 \qquad K = m\omega_0^2$$

$$E_m = \frac{1}{2}m\left[\omega_0^2 x_0^2(\sin^2\omega_0 t + \cos^2\omega_0 t)\right] + \frac{1}{2}m\left[v_0^2(\cos^2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}K\left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}\right) \Rightarrow E_m = \underbrace{\frac{1}{2}Kx_0^2}_{E_p} + \underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2}_{E_c}$$

∴ Em est cste ds le temps ✓ car on obtient à la fin expression de Em initiale
∴ c syst idéal sans amortissement

Si $\begin{cases} x_0 \neq 0 \\ v_0 = 0 \end{cases}$ → on fournit au syst Ep uniquement

Si $\begin{cases} x_0 = 0 \\ v_0 \neq 0 \end{cases}$ → Ec uniquement

★ $E_m = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}Kx^2 = cste$ → si on dérive $\frac{d}{dt}$ ⇒

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{1}{2}m\,2\cancel{\left(\frac{dx}{dt}\right)}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{1}{2}K\,2x\cancel{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0 \quad !$$

- <u>Amplitude du mouv</u> est la valeur max atteinte par $x(t)$.

Si $v_0 = 0 \rightarrow A = x_0$ et si $x_0 = 0 \rightarrow A = \frac{v_0}{\omega_0}$, quelle est la valeur de A si $x_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$?

Par conserv. d'E, à $x(t) = A$ (max) ∴ $\frac{dx}{dt} = 0$ ∴ $E_c = 0$ ⇒ $E_m = \frac{1}{2}KA^2 + 0$

∴ $\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}Kx_0^2 + \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}mv_0^2 = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}KA^2$ (÷ K) ⇒ $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$

- <u>Période</u> $\cos(\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t + 2\pi) = \cos\left(\omega_0\left[t + \underbrace{\frac{2\pi}{\omega_0}}_{T}\right]\right)$ et sin aussi

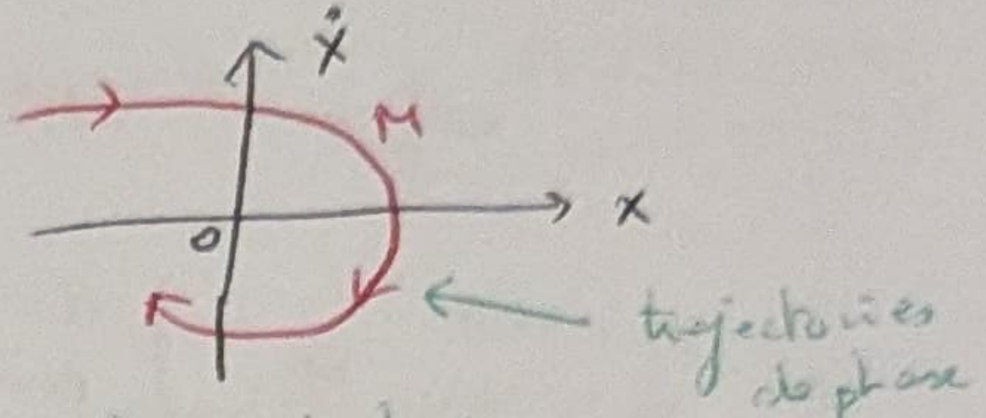
∴ $x(t) = x(t+T_0)$ ⇒ $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

(!) ★ période ne dépend pas de l'amplitude A ⇒ propriété d'isochronisme des oscillateurs de OH
peu importe x_0 de l'étirement ou v_0 c mm T_0 !!

★ T_0 augmente avec m (mouv. + lent) et diminue avec K (ressort + fort ∴ mouv + rapide)

Les oscillateurs électrique / méca
PhA3a LIE

Description qualitative de l'évoluto du syst basée sur l'étude du mouv plan d'1 pt M (représentant l'état du syst)
état défini par la position x et vitesse $\dot{x}$

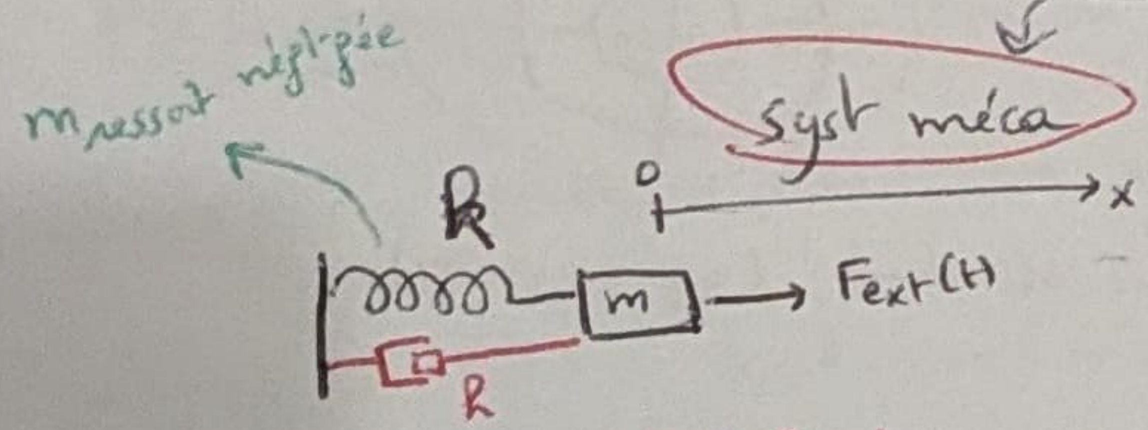


plan de phase

* positions éq. sont situées sur axe Ox ($\vec{v} = \vec{0}$)
* en dehors des pos. d'éq, les traject de phase coupent ⊥ Ox ($\dot{x} = 0$)
* traject. phase sont décrites au cours de t ds sens aiguilles montre
* traject. phase fermée est associée à un mouv périodique

référence à voir : BUP 744 719-755
H. Gié et JP Sarmant → portrait phase des oscill.

Syst méca

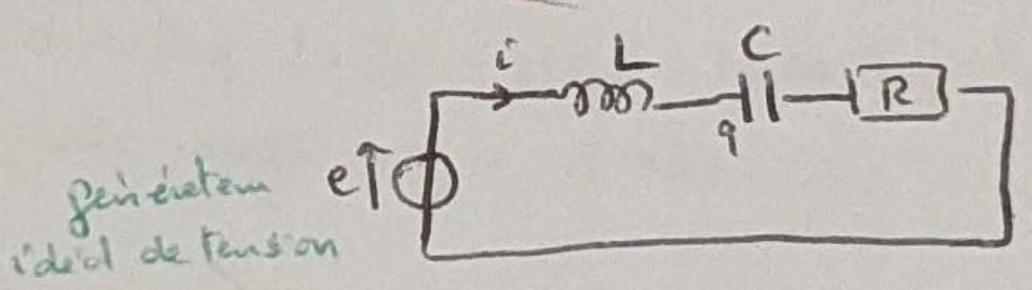


amortissem à frott. fl. des de coeff caractéristique h

$F_{amort.} = -h v$

PFD $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F(t)$

Syst électrique



Loi des mailles $L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = e(t)$ ($q = Cu$)

$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e(t)$

Analogie électromécanique

Mécanique		Electricité	
Force	F	Tension	e
position	x	charge	q
vitesse	$\dot{x}$	intensité	i
m		L	
k		1/C	
h		R	

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)}$$

ξ : cste d'amortissement sans dim

ω_0 : homogène inverse temps, pulsation propre du syst

ici $\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \xi = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \end{cases}$

$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \xi = \frac{h}{2}\sqrt{\frac{1}{mk}} \end{cases}$

= stockent E par { Ec & Ep / Eél & Emag } et dissipent par { frottement fluide / effet Joule ds R }

Energie $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ & $\frac{1}{2}kx^2$ / $\frac{1}{2}Li^2$ & $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$

$-h\dot{x}^2$ / $-Ri^2$ puissance dissipée

$f(t) = 0$ et $\xi = 0$ $\Rightarrow$ Oscillations libres et non amorties

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Solution $x(t) = \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t)$ ou $A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ — les ctes d'I dépendent des CI

$x_0 = x(0)$
$v_0 = \dot{x}(0)$ $\Rightarrow$ $\alpha = x_0$, $\beta = \dfrac{v_0}{\omega_0}$ $\Rightarrow$ $A = \left(x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega_0}\right)^2\right)^{1/2}$

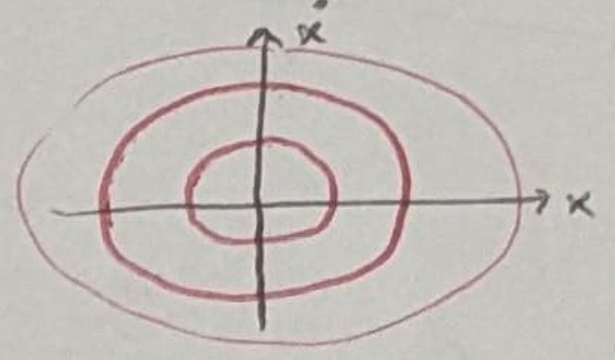
$\varphi \Rightarrow \tan\varphi = -\dfrac{v_0}{x_0 \omega_0}$ $\therefore$ oscill. sinusoïdales

période $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ $\therefore$ indép de l'amplitude $\longrightarrow$ Isochronisme des oscillations

bilan énergétique $E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2$ $\longrightarrow$ $\dfrac{dE}{dt} = \dot{x}\ddot{x} + \omega_0^2 x\dot{x}$
$= \dot{x}(f(t) - 2\xi\omega_0\dot{x})$
$= f(t)\dot{x} - 2\xi\omega_0\dot{x}^2 = 0$ $\therefore$ $E = $ cste, syst conservatif
$=$ P action ext + P dissipée

$\therefore \dfrac{\dot{x}^2}{2} + \dfrac{\omega_0^2}{2}x^2 = $ cste

$\Rightarrow$ ellipses homothétiques dont centres = position équilibre $(0,0)$



★ pour syst réels (pas amortis) peuvent être considérés comme conservatifs si on ~~[illegible]~~ observe évolut° à courtes durée (qq périodes)

Pendule Pesant — Circuit oscillant

$m \simeq 0{,}2$ kg, $\ell = 0{,}25$ m $\rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}} \simeq 1$ s

OH libre et non amorti que pour faible amplitudes (θ faibles)

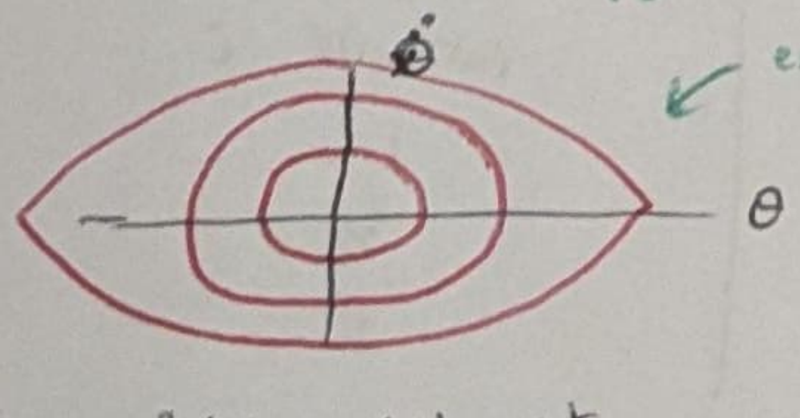
Influence de l'amplitude sur la période

Sinon $\rightarrow$ Formule Borda $T = T_0\left(1 + \dfrac{\theta^2}{16}\right)$

$\omega = \omega_0\left(1 - \dfrac{\theta^2}{16}\right)$

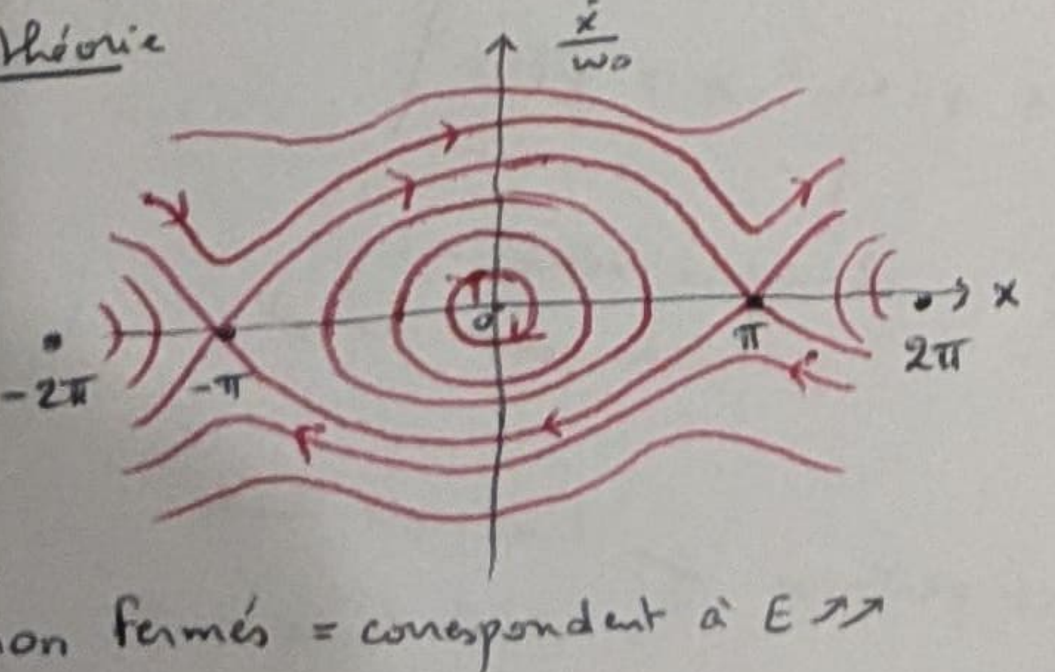
expérimentale

+ amplitude ↗
+ trajectoire pas elliptique

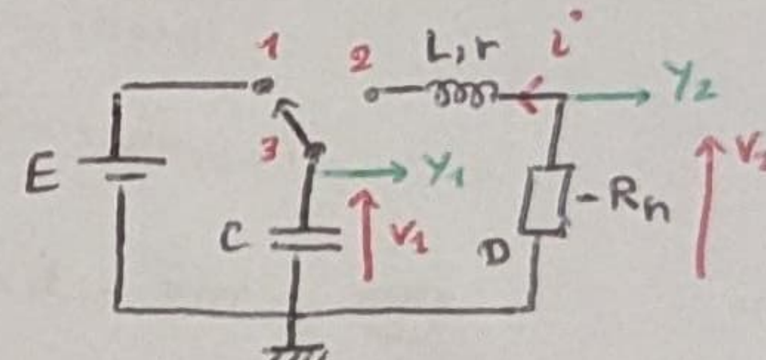


$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \omega_0^2(1 - \cos(x)) = $ cste

$\therefore$ en théorie



trajectoires non fermés = correspondent à E ↗↗
vit. ~~angulaire~~ angulaire garde m̂ signe et mouv est révolutif (comme une fronde)

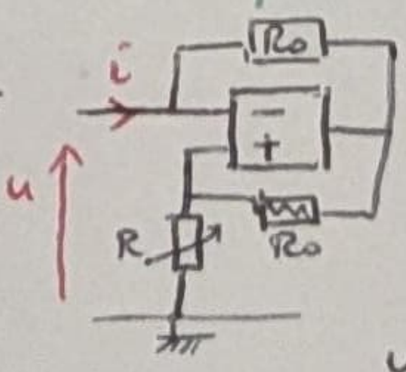


$C = 0{,}32\,\mu$F
$L = 1{,}2$ H
$+ r = 83\,\Omega$
dipôle D simule RCO (si i pas très ↗)

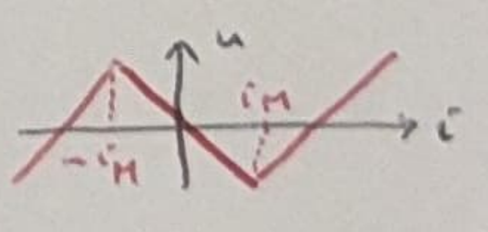
1) pour charger C par générateur E
2) décharger ds circuit

$t = 0$ $q_0 = CE$ et $i_0 = 0$
$\equiv$ écarter pendule à θ_0 et lâcher sans $\vec{v_0}$

D =



$R_0 = 1{,}5$ kΩ



$u = -R_n i$ où $R_n = R$
si ~~[illegible]~~ $|i| < i_M = \dfrac{V_{sat}}{R_0 + R}$

$v_1 = \dfrac{q}{C}$ et $v_2 = R_n i$

pour avoir oscill non amorti, RCO compense r_{bob} $\therefore R = r$

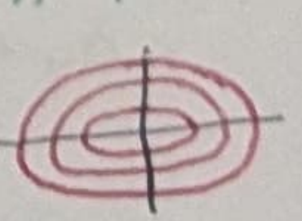
$R = 85\,\Omega$ et on met (2) et on observe v_1, v_2

si on varie E on trouve T_0 change pas ✓

$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \simeq 6{,}6$ ms

à E ↗, D ≠ RCO et OH pas appliquable

En variant E → portrait phase ≠



par conserv. E → éq° ligne du portrait phase ⇒ $\left(\frac{\dot{x}}{v_{max}}\right)^2 + \left(\frac{x}{x_{max}}\right)^2 = 1$

∴ ds plan $(O, x, \dot{x})$ = éq° ellipse centrée sur position d'éq. stable
(où $x=0$ et $\dot{x}=0$)

Méca & ondes élastiques
prépa - agrégation
Thierry Meyer
Ellipses 2015
Ph A3a - MEY

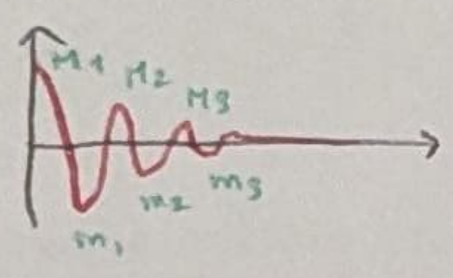
- ∀ syst dont portrait phase est elliptique oscille de manière harmonique car a l'ED d'1 OH
- Il y a symétrie de portrait phase par rapport axe abscisses car mouv est réversible
  (éq° invariantes si on change t en −t) → ds PFD

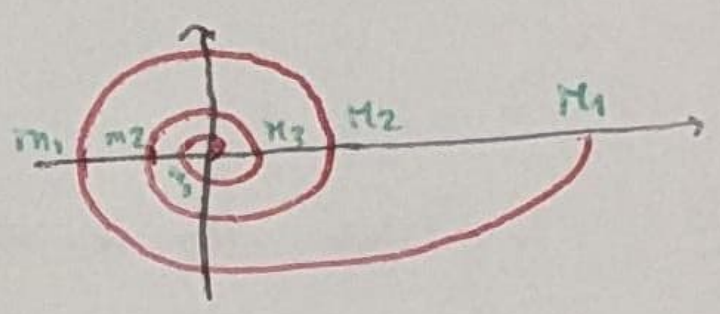
- $\frac{\cancel{d\dot{x}/dt}}{\cancel{dx/dt}} = \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = \frac{m\ddot{x}}{m\dot{x}} = \frac{-Kx}{m\dot{x}}$ ∴ si $x \nearrow$ $\frac{d\dot{x}}{dx} < 0$ ∴ $\dot{x} \searrow$ ∴ ellipse parcourue en sens horaire

  car $\frac{dy}{dt}$

  pour ressort : $\begin{cases} m\ddot{x} = -Kx \\ R_N = mg \end{cases}$ → $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

★★ pour cas de Frottement → portrait phase pas sym par rapport à axe abscisses → irréversibilité





pseudo-périodique

☆ ED linéaires : toute comb. lin. de sol. = sol. (si x_1 sol et x_2 aussi ∴ $\alpha x_1 + \beta x_2$ sol.)

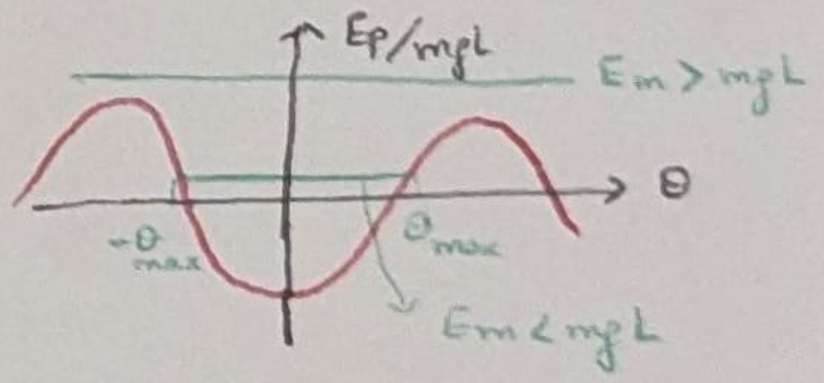
En réalité, nombreux phénomènes sont non linéaires
- par la nature du phénomène [illegible] non linéaire
- ou non linéarités apparaissent qd θ↗ ∴ modélisation au 1er ordre est insuffisante

Pendule Simple comme oscill. non linéaire

intégrale 1ère du mouv d'un pendule de long L cste et tige de $\frac{m}{T} \sim 0$

on néglige frott. air et au niveau de la réact° de l'axe de rotation : $\frac{1}{2} m (L\dot{\theta})^2 - mgL\cos\theta = E_m$

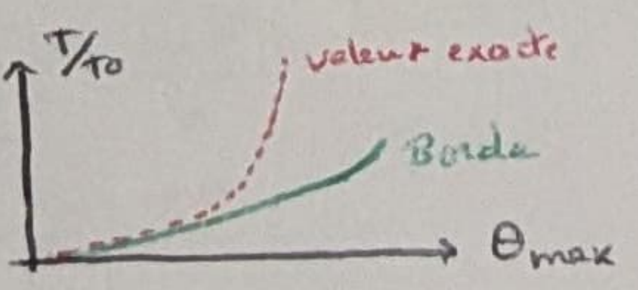
→ $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$ éq° non linéaire



si $E_m > mgL$ ⇒ tournoiement ∞ du pendule
si $E_m < mgL$ ⇒ oscillation entre $-\theta_{max}$ et θ_{max}
tq $\cos\theta_{max} = \frac{-E_m}{mgL}$

$\frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 - mgL\cos\theta = -mgL\cos\theta_{max}$ $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

→ démonstration Borda



Oscillateurs

Phys. pour agrégation
de boeck
J. Fillette - J. Froustey
H. Roussille
PRZ FIL 1

Oscillateur harmonique a 3 prop. fondamentales

- persistance des oscill. sinusoïd. ds temps (sans atténuation)
- isochronisme $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ qq soit amplitude
- Equipartition de l'E entre Ec et Ep (par moyenne temporelle)

Les autres oscill. se distinguent de l'OH par 2 aspects

- amortissement
  jamais négligeable surtout si oscill. à t long
  par frott. liquide ou solide
- présence de non-linéarités

* oscillateurs paramétriques (non amort.) est un syst. vérifiant : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(t)\,x = 0$
  où $\omega^2(t)$ dépend du temps.

* qd plusieurs oscill. influent les uns sur les autres → couplage des oscillateurs
  - couplage inertiel
  - couplage élastique

et il y a 2 phénomènes majeurs
  - levée de dégénérescence
  - multiplication des fréq. propres

il y a autant de fréq. propre que d'oscill. couplés dans le syst.

OH amort.

mécanique

dissipation par frott. (avec air, liaison, support...) modélisé par frott. fluide de coeff λ

$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x}$

par $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\sqrt{mk}}{\lambda}$ → facteur de qualité (positif et sans dim)

$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

électronique

dissipation par effet Joule qd on ajoute R

$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$

par $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

$\ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$

Si $Q \to \infty$ on retrouve OH non amort.
↳ + amortissement est faible

On ajoute (après =) $f(t)$ = réponse du syst à une excitation

∴ sol. $x(t) = x_{homog.}(t) + x_{part.}(t)$

et on a 2 types de sol. $x(t)$
  - réponse indicielle
  - réponse spectrale

et chacune correspond à un choix de la fct f (et des CI)

Réponse Indicielle :

correspond à
$$\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0 \\ f(t) = E\,H(t) \end{cases}$$

fct Heaviside (ou échelon) $\begin{cases} H(t<0) = 0 \\ H(t \geq 0) = 1 \end{cases}$

∴ syst va atteindre (sous effet d'un forçage constant) une nouvelle valeur d'équilibre appelée valeur consigne

$$x(t) = \underbrace{x_H(t)}_{\text{racines du polynôme caractéristique}} + \frac{E}{\omega_0^2} \quad \text{pour } t \geq 0$$

$\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$ ∴ signe dépend de Q

régime apériodique

2 racines $\mathbb{R}$ $\underline{-ve}$

$\begin{cases} \Delta > 0 \\ Q < \frac{1}{2} \end{cases}$

$x_{H}(t) = a_+ e^{r_+ t} + a_- e^{r_- t}$

et CI $\begin{cases} a_+ + a_- + \frac{E}{\omega_0^2} = 0 \\ a_+ r_+ + a_- r_- = 0 \end{cases}$

critique

1 racine double $\underline{-ve}$ $(r = -\omega_0)$

$\begin{cases} \Delta = 0 \\ Q = \frac{1}{2} \end{cases}$

$x_H(t) = (a + bt)e^{-\omega_0 t}$

$\begin{cases} a + \frac{E}{\omega_0^2} = 0 \\ -\omega_0 a + b = 0 \end{cases}$

Pseudo-périodique

2 racines $\mathbb{C}$ conjuguées [exp complexes = sin/cos]

$\begin{cases} \Delta < 0 \\ Q > \frac{1}{2} \end{cases}$

on trouve qqch $\propto \underline{\sin(\Omega t + \varphi)}$

$\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$
↳ pseudo-pulsation

$\varphi = \arctan\left(\sqrt{4Q^2 - 1}\right)$

devant sin il y a $\underbrace{e^{-\frac{t}{\tau}}}$ = oscillations amorties exponentiellement

$\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$

+ Q ↗ – l'enveloppe exponentielle décroît rapidement

logique car Q ↗ = amortissement ↘ et oscille +

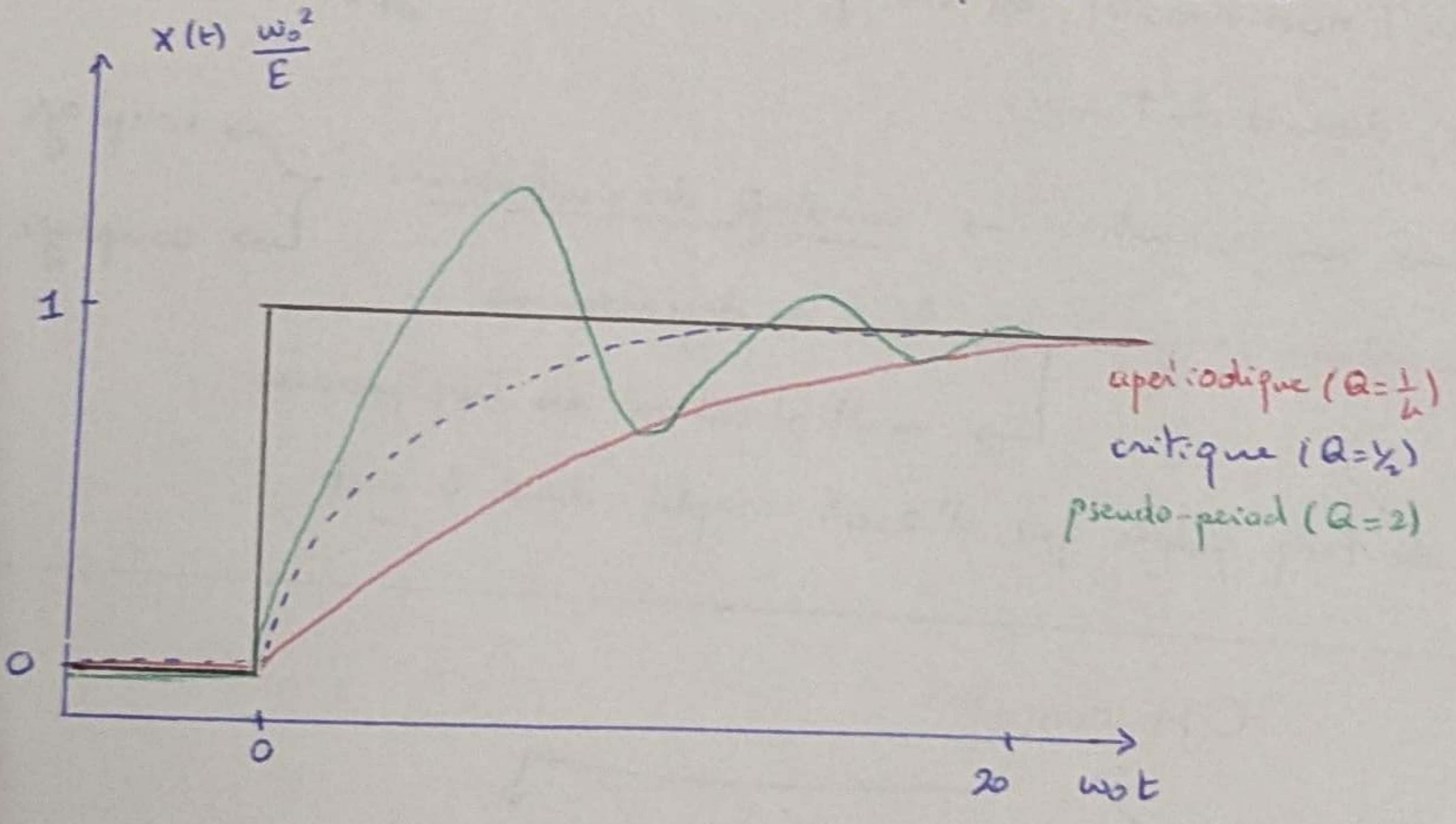
pour quantifier cela :

décrément logarithmique

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

= log(rapport des amplitudes de 2 max ≠)

∴ $Q \to \infty$; $\delta \to 0$ et $\varphi = 0$
∴ rapport = 1 et les max ne diminuent pas



Les 3 tendent vers $\frac{E}{\omega_0^2}$ mais à des $\vec{v}$ ≠

le + rapide est pseudo-périod mais dépasse un peu par ces pseudo-oscill.

le apériod. est + lent mais ne dépasse pas la consigne

la réponse la + rapide sans dépassement → régime critique

Réponse Spectrale (Préliminaires)

phys. pour ag
Oscillations
2

on utilise analyse de Fourier ds
- décomposition en ondes monochromat.
- étude de la réponse d'1 syst linéaire à une excitation sinusoïdale

- si $f(t)$ périodique de T_0 ($f(t+T_0) = f(t)$) ∴ on la décompose en $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_n e^{in\omega_0 t}$
  tq coeff complexes $\underline{c}_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\, e^{-in\omega_0 t}\, dt$ tq $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

pour cas à 1 dim

- si $f(x)$ périodique de période spatiale λ_0 : $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \underline{c}_n e^{in k_0 x}$ tq $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$
  et $\underline{c}_n = \frac{1}{\lambda_0}\int_0^{\lambda_0} f(x)\, e^{-in k_0 x}\, dx$

- si f est $\mathbb{R}$ ∴ $\underline{c}_n = \overline{\underline{c}_{-n}}$ ⇒

$$f(t) = c_0 + \sum_1^{\infty} \cdots + \sum_{-\infty}^{-1} \cdots$$
$$= c_0 + \sum_1^{\infty} \left(\underline{c}_n e^{+} + \underline{c}_{-n} e^{-} \right)$$
$$= c_0 + \sum_1^{\infty} \left(\underline{c}_n e^{+} + \overline{\underline{c}_n e^{+}} \right)$$
$$= c_0 + \sum_1^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left(\underline{c}_n e^{in\omega_0 t} \right)$$

par $\underline{c}_n = \frac{1}{2} \underbrace{X_n}_{\text{module}} e^{i\overbrace{\varphi_n}^{\text{phase}}}$ et $c_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\, dt$ ∴ $= \langle f \rangle$

$$\Rightarrow f(t) = \langle f \rangle + \sum_1^{\infty} X_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

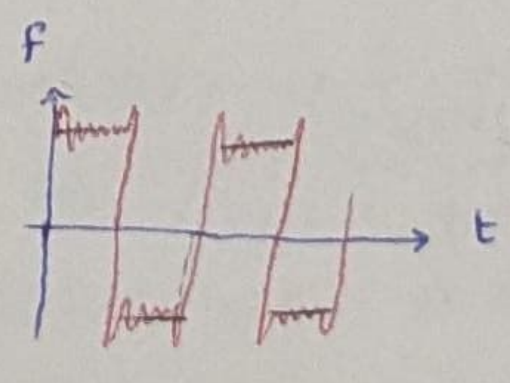
∴ toute fct réelle périodique est décomposable en $\Sigma\ \infty$ de fct cos de période multiples de T_0

* pour $n = 1$ ⇒ fondamental
* pour $n > 1$ ⇒ harmoniques

si on connait la réponse du syst pour chaque harmonique ∴ la réponse totale est Σ des réponses

parfois on utilise : $f(t) = \langle f \rangle + \sum_1^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right)$

* pour fct paire ⇒ b_n s'annulent
* pour fct impaire ⇒ a_n s'annulent



- pour l'exemple de $f(t)$ un créneau (périodique)
  on a dépassement au niveau des discontinuités du signal
  et m̂ si on ↗ nb harmonique on a un mieux créneau mais ces dépassement sont cste !
  cette valeur cste du dépassement est autour de 18% de la valeur de la discontinuité
  ∴ incapacité de la série de Fourier à épouser les discontinuités du signal
  → phénomène de Gibbs

ex $f_{cren}(t) = \frac{4E}{\pi}\left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \cdots \right)$

- Dérivée : $f'(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \underline{c}_n\, in\omega_0\, e^{in\omega_0 t}$ si $\underline{c}_n^{(1)} = \underline{c}_n (in\omega_0)$ ∴ $\underline{c}_n^{(k)} = (in\omega_0)^k \underline{c}_n$

Primitive démarche inverse et on divise coeff par $(in\omega_0)^k$

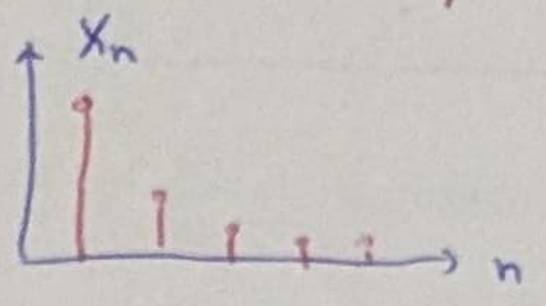
soit par ex $f(t)$ signal triangle ∴ relié par f_{cren} par : $f_{tri}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T 4 f_{cren}(t' + \frac{T}{4})\, dt'$

∴ on intègre $f_{cren}(t + T/4)$ → $f_{tri}(t) = \frac{8E}{\pi^2}\left(\sin(\omega t) - \frac{1}{9}\sin(3\omega t) + \frac{1}{25}\sin(5\omega t) - \cdots \right)$

coeff de rang n aura amplitude n fois inférieur à celle de signal créneau

- Si on trace l'amplitude des coeff de Fourier X_n et φ_n en fct de n → spectre du signal

∴ spectre en amplitude et spectre en phase



★ décroissance en $1/n$ de l'amplitude des harmoniques

(pour signal triangle → $\frac{1}{n^2}$)

ici par ex que harmoniques impaires → cela essentiel pour le timbre du son

- généraliser concept de série Fourier aux fct pas périodique → Transf. Fourier

∴ pas un ens. discret de coeff.

et on associe à fct de temps une fct de pulsation $\tilde{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$

∴ nouvelle façon de représenter f(t) et contient mm info que f(t) → une périodisation

on retrouve f(t) par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ TF inverse

- TF de la dérivée $f'(t)$ est $i\omega \tilde{F}(\omega)$
- TF de la primitive $\int f(t) dt$ est $\frac{\tilde{F}(\omega)}{i\omega}$
- pour variables d'espace (en 3D) $\tilde{F}(\vec{K}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{x}) e^{-i\vec{K}\cdot\vec{x}} d\vec{x}$
- pour f réelle : $\tilde{F}(-\omega) = \overline{\tilde{F}(\omega)}$ et par $\tilde{F}(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega) e^{i\varphi(\omega)}$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} X(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t)] d\omega$$

généralisation des Fourier des fct périodique réelles

Réponse Spectrale

Si F(t) dépend de t, ∴ dur de trouver sol. spécifique mais ∵ problème linéaire ∴ on résoud pour 1 seule composante de Fourier de F qu'on note $Fe^{i\omega t}$ (phase nulle à l'origine)

(avant on faisait $F(t) = F\cos(\omega t) = Re(\underline{F}(t)) \rightarrow \underline{F}(t) = Fe^{i\omega t}$ alors que c'est TF !)

tout signal réel peut se mettre sous la forme $F(t) = F\cos(\omega t)$ par Fourier

et là tous membres de gauche de ED sont réel ✓

étude de la sol. homo est mm à l'étude de réponse indicielle ∴ on s'intéresse à sol. part.

cette sol est réponse spectrale : correspond au comportement du syst soumis à une excitation à 1 fréq (excitation harmonique) une fois que la sol. homogène est devenue négligeable

→ le syst oscille sinusoïd. à la fréq d'excitation ⇒ régime sinusoïdal forcé

on cherche sol. de la forme : $\underline{x}(t) = \underline{X}(\omega) e^{i\omega t}$ (pour linéarité) et ∴ $\frac{d^n \underline{x}}{dt^n} = (i\omega)^n \underline{x}(t)$

en remplaçant ds ED on obtient ⇒ $\underline{X}(\omega) = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\frac{\omega_0}{Q}}$ par pulsation réduite $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ $\underline{X}(\omega) = \frac{F}{\omega_0^2} \frac{1}{1 - u^2 + i\frac{u}{Q}}$

∴ à fréq nulle ∴ $u \to 0$ on retrouve sol. part. de la réponse indicielle

∵ réponse spectrale est de forme $Xe^{i(\omega t + \varphi)}$ ∴ étudier $\begin{cases} X(u) \\ \arg(X)(u) = \varphi \end{cases}$ en fct de u en échelle log → Diagramme de Bode

phys pour geeks
oscillations
3

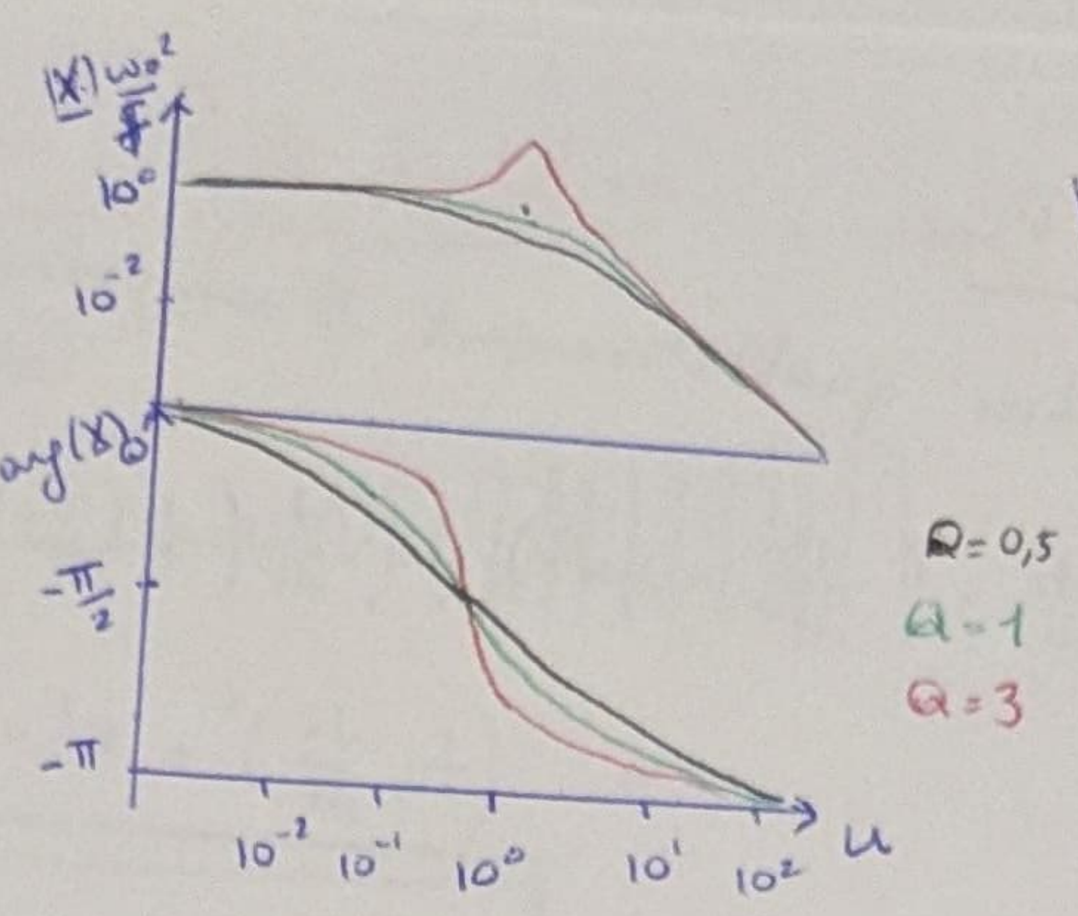
Résonance en position

- Fct $\underline{X}$ est strictement décroissante si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ $(\simeq 0,7)$

et si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, a un max

à $u = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ de valeur

$|\underline{X}| \frac{\omega_0^2}{f} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ pic de la réponse spectrale



Pulsation de résonance en position : $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

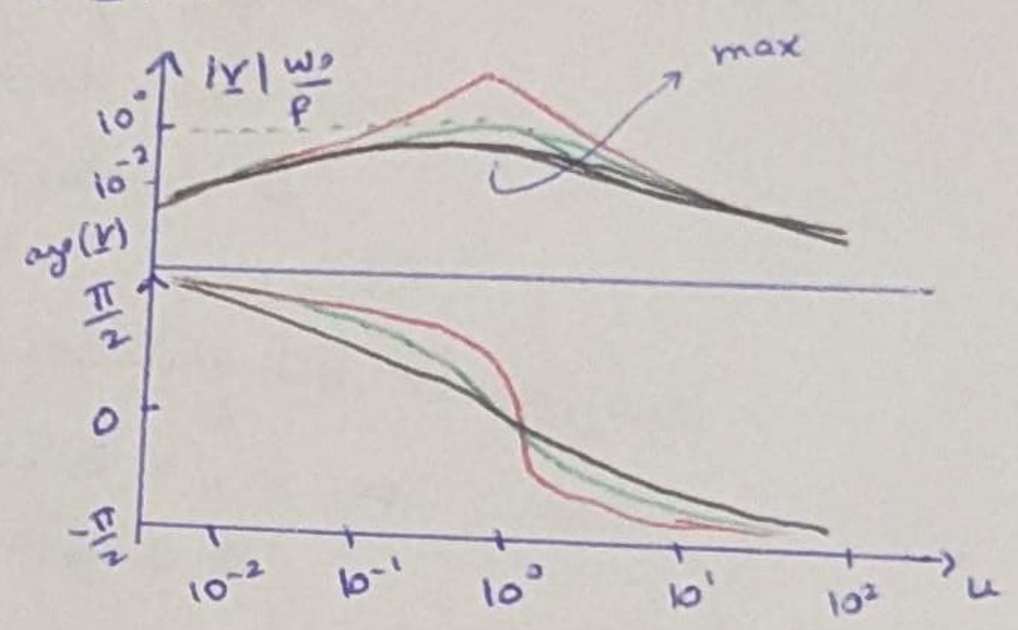
Résonance en vitesse

(utile si on étudie courant ds circuit RLC qui est $\frac{dq}{dt}$)

si $\underline{x}(t) = \underline{X}(\omega) e^{i\omega t}$ $\therefore$ $(\underline{V}(\omega) = i\omega \underline{X}(\omega)) \rightarrow \frac{d\underline{x}}{dt} = i\omega \underline{X}(\omega) e^{i\omega t} = \underline{V}(\omega) e^{i\omega t}$

$$\underline{V}(u) = \frac{f}{\omega_0} \frac{iu}{1 - u^2 + i\frac{u}{Q}} = \frac{f}{\omega_0} \frac{Q}{1 + iQ(u - \frac{1}{u})}$$

et pas ω_0^2



★ $|\underline{V}|$ possède un max $V_{max} = \frac{fQ}{\omega_0}$ à $u = 1$

qq soit Q ⟹ résonance

Donc
- résonance en vitesse ∃ qq soit Q, contrairement à résonance en position
- fréq. résonance est indép de Q ∴ elle est = fréq. propre du syst (contrairement à position)
- Lors de résonance, arg$(\underline{V}) = 0$ ∴ excitation et réponse sont en phase
- m̂ si pic réson. ne dépend pas de Q, sa hauteur et sa largeur en dépendent

bande passante (où $\underline{V} > \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$) : $\Delta u = \frac{1}{Q}$

★ Facteur Qualité influence la réponse

- ds cas indiciel, caractérise durée réponse et change valeur pseudo-pulsation → valeur critique est $Q = \frac{1}{2}$
- ds cas spectral, caract. hauteur et largeur pic de résonance ainsi que position de la résonance en position → valeur critique est $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ syst à réponse longue ds t aura bande passante réduite

→ Ex diapason

↳ $Q \sim 10^3$! ∴ le son dure longtemps (lent amortissement de sol. homog.)

Portrait de Phase

pour visualiser qualitativement le comportement de OH

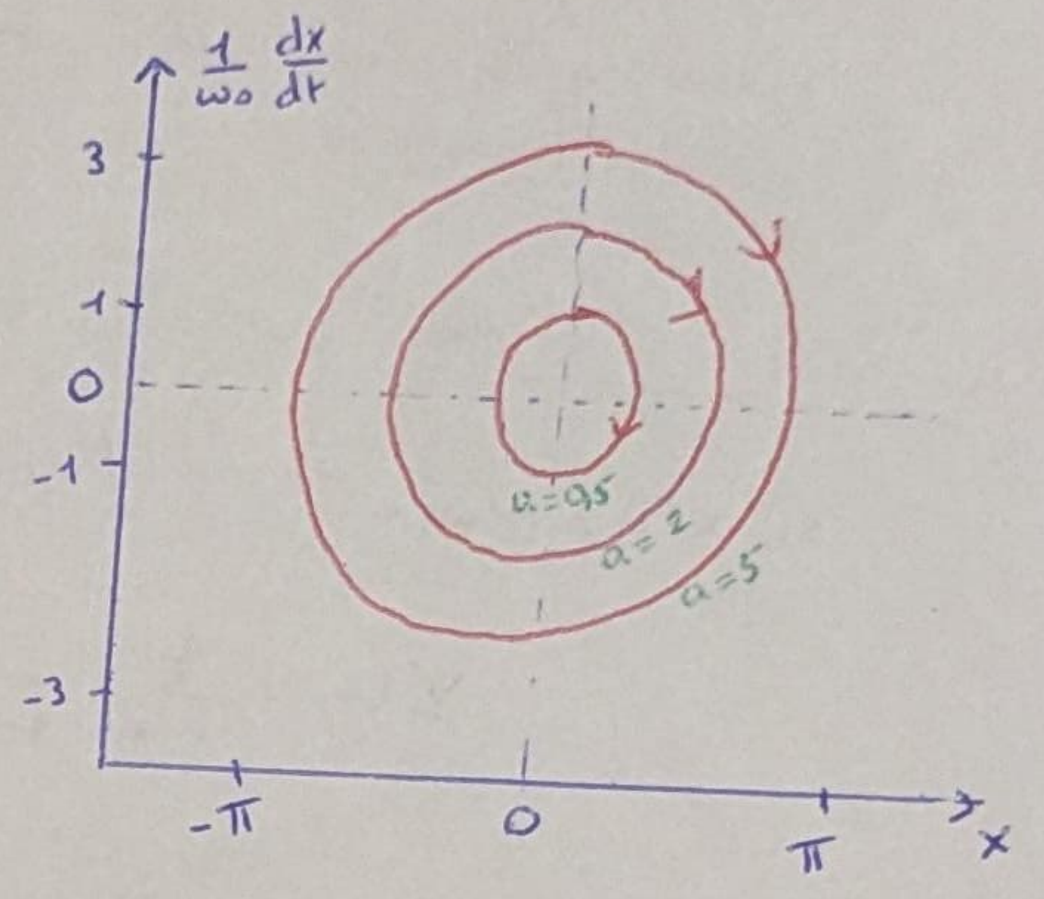
$$\frac{dx}{dt} \times \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 = \text{cste}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\omega_0}\frac{dx}{dt} \right)^2 + x^2 = a$$

éq° cercle ds plan $(x, \frac{\dot{x}}{\omega_0})$ de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{a}$

On dispose d'autant de trajectoires qu'il y a de constantes a

Propriétés des trajectoires:



conditions initiales : CI $\left\langle \begin{matrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{matrix} \right.$ permettent de repérer un pt ds portrait de phase. Ce pt permet de fixer la cste a ce qui permet de fixer la trajectoire.

croisement de trajectoires : pas possible ..
car si c'est le cas $\therefore$ ont m̃ valeur x et $\dot{x}$ en 1 pt
et en prenant ce pt comme CI $\rightarrow$ 2 trajectoires identiques

Sens de parcours : dans partie supérieure, $\dot{x} > 0$ $\therefore$ x augmente $\therefore$ gauche à droite
En bas c'est le contraire
$\Rightarrow$ sens aiguille d'une montre