

Chapitre 6

INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Les ordres de grandeur utiles

Les constantes

permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$; $1/4\pi\epsilon_0 \approx 9,0 \cdot 10^9 \text{ F}^{-1} \cdot \text{m}$
perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
célérité de la lumière dans le vide	$c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \approx 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
charge de l'électron	- e avec $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
masse de l'électron	$m_e = 0,9 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$

Le cuivre

masse molaire	$M = 63,5 \text{ g.mol}^{-1}$
masse volumique	$\rho \approx 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
densité volumique de porteurs	$n = \rho N_A / M \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$
conductivité électrique	$\sigma = ne^2\tau/m \approx 5,8 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$
temps entre deux chocs	$\tau \approx 10^{-14} \text{ s}$
constante de Hall	$R_h = -1/ne \approx -10^{-10} \text{ m}^3 \cdot \text{C}^{-1}$
épaisseur de peau $\delta = \sqrt{2/\mu_0\sigma\omega} = 1/\sqrt{\pi\mu_0\sigma f}$	$\delta(50 \text{ Hz}) \approx 1 \text{ cm} ; \delta(50 \text{ MHz}) \approx 10 \text{ } \mu\text{m}$

Le cours d'abord

L'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS)

1. En quoi consiste l'approximation des régimes quasi stationnaires ? En déduire les expressions approchées des potentiels $V(M, t)$ et $\vec{A}(M, t)$ pour une distribution de charge $\rho(P, t)$ et de courant $\vec{j}(P, t)$ d'extension finie.

2. À quelle condition sur $r = PM$ est-on en ARQS si les sources sont périodiques de période T ? Chiffrer cette inégalité dans le cas d'un circuit en TP et en déduire une évaluation de la fréquence maximale de travail.
3. Que perd-on dans les équations de Maxwell lorsqu'elles sont écrites en ARQS? Quelle est, par rapport aux régimes statiques, la nouveauté en ARQS? Quelle est l'équation de Maxwell qui traduit l'induction et quel est son contenu physique? Résumer toutes les propriétés dans un tableau à :
- 3 colonnes pour : Régime variable, ARQS, Régimes statiques
 - 4 lignes pour : les équations de Maxwell, les relations entre champs et potentiels, les équations de Poisson et condition de jauge, l'équation de conservation de la charge.

Loi d'Ohm locale pour un conducteur en mouvement

\vec{E} et \vec{B} sont les champs dans le référentiel (R) du laboratoire. Un élément de conducteur de conductivité σ est en mouvement à la vitesse \vec{v} par rapport à (R). Soit (R') le référentiel lié au conducteur.

4. En raisonnant sur la force de Lorentz qui s'exerce sur un porteur de charge, montrer que dans la limite classique, les champs \vec{E}' et \vec{B}' dans (R') sont donnés par :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{B}' = \vec{B}$$

5. Déduire de la loi d'Ohm locale pour le conducteur dans (R'), l'expression de la loi d'Ohm locale, pour ce même conducteur dans (R). On admet pour cela que toujours dans la limite classique, les densités de courant \vec{j} et \vec{j}' dans (R) et (R') sont égales.

Champ électromoteur et loi d'Ohm généralisée

6. Par quel raisonnement arrive-t-on à l'expression la plus générale du champ électromoteur \vec{E}_m ? Pourquoi parle-t-on de son « caractère hybride »? Donner le nom et le contenu physique de chacun des deux termes qui le composent.
7. Le conducteur est un élément AB de circuit filiforme, parcouru par un courant i et mobile à la vitesse \vec{v} dans le repère du laboratoire dans lequel existe un champ magnétique \vec{B} . Montrer qu'en ARQS la loi d'Ohm généralisée s'écrit $V_A - V_B = R_{AB} i - e_{AB}$, en rappelant l'expression de la force électromotrice e_{AB} en fonction du champ électromoteur \vec{E}_m .
8. Discuter les deux cas, suivant que le circuit AB est fermé ou ouvert.
9. Par quel autre moyen (utilisant le flux) peut-on calculer la force électromotrice? Comment s'appelle cette loi? L'établir dans le cas d'un circuit filiforme fermé, immobile dans un champ magnétique variable. Qu'en est-il pour dans le cas d'un circuit filiforme fermé, mobile dans un champ magnétique permanent?
10. Énoncer la loi de Lenz.

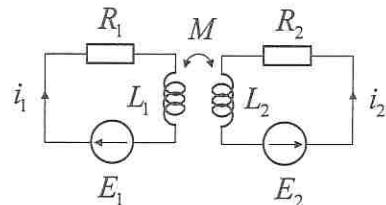
Aspect énergétique

On ne considère ici que le cas particulier important du déplacement d'un circuit dans un champ magnétique permanent.

11. Montrer qualitativement que, quelle que soit la situation de départ (circuit dans un champ magnétique soit mobile sans courant soit immobile avec courant), force électromotrice et force de Laplace interviennent simultanément.
12. Reprendre les notations des questions 4. et 5.. Traduire dans le repère (R) que la puissance des forces magnétiques de Lorentz sur les porteurs de charge est toujours nulle et en déduire un « bilan auxiliaire » de puissance liant la puissance de la force de Laplace et la puissance de la force électromotrice ; application.

Inductances propre et mutuelle. Énergie magnétique de deux circuits filiformes

13. Quelle est la définition de L , inductance propre d'un circuit filiforme ? Quel est son signe ? De quoi dépend-elle ? Quelle est son unité ?
14. Comment est définie l'inductance mutuelle M de deux circuits filiformes (C_1) et (C_2) ? Quel est son signe ? Comment s'écrit alors la fem dans chaque circuit ?
15. Donner la définition du coefficient de couplage α des deux circuits et proposer une interprétation qualitative de l'inégalité $\alpha \leq 1$.
16. Les deux circuits filiformes ci-contre sont couplés par une inductance mutuelle M . Établir l'expression de l'énergie magnétique U_m de l'ensemble.
17. Quel est le signe de l'énergie magnétique ? En déduire une autre manière d'établir l'inégalité à laquelle satisfait le coefficient de couplage α des deux circuits.

**L'effet de peau**

L'effet de peau sur un conducteur réel plan a été vu aux questions 14. à 16. du chapitre 3.

18. Qu'appelle-t-on effet de peau ? Quels matériaux et quelles fréquences sont concernés ? Quel est la cadre commun avec l'induction ? Par quel type d'équation est régi le champ ? Donner des ordres de grandeur de l'épaisseur de peau et commenter.

Le haut-parleur électrodynamique

19. Comment est constitué, schématiquement, un haut-parleur électrodynamique ? Faire un dessin. Expliquer brièvement et sans calculs le fonctionnement du haut-parleur et en particulier par quels mécanismes une tension $u(t)$ délivrée par un amplificateur permet d'engendrer une onde sonore.
Pourquoi parle-t-on de couplage et de transducteur électrodynamiques ?

Avant de poursuivre les questions 20. à 23. (posées sous forme de problème), il est conseillé de voir le schéma et les notations qui y sont utilisées dans la réponse de la question 19.. En particulier, les grandeurs électriques sont définies algébriquement comme l'indique la figure (le sens positif est suivant \vec{u}_θ) et tout vecteur est exprimé sur la base directe \vec{u}_x , \vec{u}_θ , \vec{u}_r .

20. La bobine est parcourue par un courant $i(t)$; écrire l'équation différentielle reliant le déplacement $x(t)$ de l'ensemble membrane et bobine et leur vitesse $v(t) = dx(t)/dt$ à $i(t)$. La bobine est soumise à une tension $u(t)$; écrire l'équation différentielle reliant $u(t)$, $i(t)$ et $v(t)$. Commentaire sur les deux équations.

21. Établir le bilan de puissance global sous la forme : $ui = \frac{d}{dt}(E_r) + P_1(i) + P_2(v)$ en donnant les expressions de E_r , P_1 et P_2 , et interpréter physiquement chacun des termes du bilan. Que devient ce bilan de puissance en valeur moyenne temporelle pour un régime périodique ? Interpréter physiquement le résultat. En déduire une définition du rendement η du haut-parleur. Comment améliorer ce rendement ? Expliquer le rôle du champ magnétique dans le transfert de la puissance électrique à la puissance acoustique. Intervient-il dans η ?

La tension appliquée à la bobine est à présent sinusoïdale de pulsation ω ; seul le régime forcé est étudié et en notation complexe, la tension est écrite $\underline{u} = u_0 e^{j\omega t}$.

22. Montrer que l'on peut écrire $\underline{u} = \underline{Z} i$ avec $\underline{Z} = \underline{Z}_e + \underline{Z}_{am}$, où \underline{Z}_e représente l'impédance électrique de la bobine et \underline{Z}_{am} l'impédance acousto-mécanique (ou motionnelle) du haut-parleur. Donner les expressions de \underline{Z}_e et $1/\underline{Z}_{am}$.

Montrer que dans l'hypothèse simplificatrice où α ne dépend pas de ω , l'impédance acousto-mécanique peut être modélisée par trois composants électriques notés R' , L' et C' à déterminer en fonction des données. Quelle caractéristique mécanique représente chacun de ces composants ?

AN : Calculer la valeur de ces composants pour $B = 0,2 \text{ T}$; $l = 20 \text{ m}$; $m = 120 \text{ g}$; $k = 43.10^3 \text{ N.m}^{-1}$ et $\alpha = 6 \text{ kg.s}^{-1}$, puis proposer le schéma électrique équivalent à l'ensemble du haut-parleur.

23. Donner l'expression du rendement η défini à la question 21. en fonction des données.

Pour quelle valeur ω_0 de la pulsation est-il maximal ?

Calculer numériquement la fréquence f_0 correspondante ainsi que la valeur η_0 du rendement sachant qu'en plus des valeurs numériques précédentes, $R = 2 \Omega$.

Sachant qu'à cette fréquence f_0 , la puissance moyenne reçue par le haut-parleur est $P = 15 \text{ W}$ et que le courant efficace est $i_{eff} = 1,8 \text{ A}$, calculer la vitesse efficace v_{eff} et le déplacement efficace x_{eff} de la membrane.

Donner ensuite la valeur du rendement η pour une fréquence $f = 300 \text{ Hz}$.

, il est conseillé question 19.. En indique la figure , \vec{u}_θ , \vec{u}_r .

le reliant le $dx(t)/dt$ à ielle reliant

+ $P_2(v)$ en chacun des temporelle néliger ce lectrique à

l le régime représente nique (ou

impédance és R' , L' nécanique

= 120 g ; électrique

; données.

sur η_0 du arleur est ice v_{eff} et

Conseils à suivre ; erreurs à éviter

* De manière générale il faut, pour résoudre les exercices d'induction, une grande vigilance pour éviter les erreurs de signe, aussi bien dans les équations électriques que mécaniques ; quelques règles simples énoncées dans les deux points suivants permettent de les réduire.

* Dans le cas d'une induction de type Lorentz (conducteur en mouvement dans un champ magnétique permanent), le champ électromoteur est $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$; il est impératif de représenter les trois vecteurs sur la figure du dispositif afin d'obtenir le sens de \vec{E}_m avant de le calculer. Orienter obligatoirement le contour en indiquant le sens positif par \oplus , prédire le signe avant de calculer la fem par circulation : $e_{AB} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$.

Cette méthode de calcul de la force électromotrice qui s'appuie sur des grandeurs vectorielles (qui ont un sens et se portent facilement sur un dessin) est de loin préférable à celle qui passe par la variation de flux, ce dernier étant une grandeur scalaire algébrique (et non forcément positive comme on a trop tendance à le croire !).

Ne pas hésiter à redessiner le circuit électrique en y incluant un générateur de tension de fem e_{AB} orienté de A vers B (le sens de l'intégration) et ceci quel que soit le signe de e_{AB} , avant d'appliquer la loi d'Ohm généralisée.

De même pour le calcul de la force élémentaire de Laplace $d\vec{f}_L = id\vec{l} \wedge \vec{B}$, il est impératif de représenter les trois vecteurs sur une figure afin d'obtenir le sens de $d\vec{f}_L$ avant de calculer, soit la résultante (pour un mouvement de translation), soit le moment résultant (pour un mouvement de rotation, et dont on rappelle qu'il n'est pas le moment de la résultante !...). Attention au signe de i (autre grandeur algébrique) lié au choix de l'orientation positive.

* Dans le cas d'une induction de type Neumann (conducteur immobile placé dans un champ magnétique variable), le champ électromoteur est $\vec{E}_m = -\partial \vec{A} / \partial t$; il ne peut s'évaluer directement que dans les cas où le potentiel vecteur est connu, essentiellement pour un dipôle magnétique ou dans le cas d'un champ magnétique uniforme (revoir ces cas dans les questions 35. et 38. du chapitre 2). L'évaluation de la circulation sur un contour fermé pour accéder à la fem induite suit les mêmes règles que précédemment, en particulier pour la représentation des vecteurs et le choix de l'orientation positive \oplus .

Dans les autres cas, il faut appliquer la loi de Faraday $e = -d\Phi / dt$; rappelons qu'un flux est une grandeur scalaire algébrique obtenu par produit scalaire de deux grandeurs vectorielles, le champ magnétique et le vecteur surface, et que la normale \vec{n} d'une surface ouverte S quelconque s'appuyant sur le contour C est orientée à partir de \oplus par la « règle du tire-bouchon » (en le tournant dans le sens de \oplus , il avance dans la direction \vec{n}). Il est impératif de représenter les deux vecteurs sur une figure afin d'obtenir le signe du flux avant de le calculer.

- * Le sens de la force de Laplace ne dépend évidemment pas du choix de l'orientation positive \oplus qui fixe à la fois le signe du courant i et le sens de l'élément $d\vec{l}$; il faut simplement prendre garde lorsque $i < 0$ de ne pas orienter $i d\vec{l}$ dans le sens de $d\vec{l}$.
- * Il est utile de prévoir (ou à défaut de confirmer) l'évolution des phénomènes par application de la loi de Lenz.
- * Ne pas hésiter à représenter sur une figure l'évolution temporelle d'un vecteur et la conséquence spatiale sur un autre vecteur lié par une équation de Maxwell (en général M.F.) comme aux questions 28., 67. ou 71..
- * Il est important de ne pas confondre la force magnétique de Lorentz $q\vec{V} \wedge \vec{B}$ qui s'applique sur une particule chargée en mouvement avec la force de Laplace $I\vec{dl} \wedge \vec{B}$ qui s'exerce sur un élément de conducteur parcouru par un courant, même si elles sont liées par un mécanisme de transfert décrit à propos de l'effet Hall à la question 19. du chapitre 6 du livre de 1ère année.
- * On parle souvent et à tort de « la » vitesse \vec{v} du conducteur intervenant dans le champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$; en réalité les trois vecteurs de cette expression peuvent être fonction du point M du conducteur $\vec{E}_m(M) = \vec{v}(M) \wedge \vec{B}(M)$ comme dans la question 66. qui traite d'un disque qui tourne dans un champ non uniforme (le cas du rail de Laplace où \vec{v} et \vec{B} sont uniformes est tout à fait particulier).
- * Rappelons que le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est nul et qu'à travers une surface ouverte, il ne dépend pas de cette surface mais uniquement du contour sur lequel elle s'appuie; pour un contour fixé, il convient donc de choisir astucieusement la surface d'intégration afin de réduire les calculs de flux.
- * Il est conseillé d'écrire les équations de la mécanique avec la vitesse v ou la vitesse angulaire ω faisant ainsi apparaître des dérivées premières (ex: dv/dt au lieu de $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ ou a , $d\omega/dt$ au lieu de $\ddot{\theta}$); cela facilite l'accès au bilan énergétique.
- * Pour établir un bilan de puissance, multiplier l'équation électrique par i et l'équation mécanique par v pour une translation et ω pour une rotation.
- * Dans le déplacement d'un circuit dans un champ magnétique permanent, il est conseillé d'utiliser le « bilan auxiliaire » de puissance $P_{Lapl.} + P_{fém.} = 0$ pour vérifier la cohérence des expressions de la force de Laplace (ou du moment résultant) et de la force électromotrice, obtenues séparément par évaluation directe, plutôt que de l'utiliser pour déterminer une de ces grandeurs à partir de l'autre, et risquer ainsi que les deux soient fausses...
- * Ne faire figurer dans les deux membres de l'équation traduisant le bilan global de puissance lors d'un couplage électromécanique, que des termes intrinsèquement positifs; cela permet plus facilement de voir d'où provient l'énergie et où elle va.

choix de l'orientation de l'élément $d\vec{l}$; il faut prendre le sens de $d\vec{l}$.

des phénomènes par

de d'un vecteur et la Maxwell (en général

Lorentz $q\vec{V} \wedge \vec{B}$ qui de Laplace $I\vec{dl} \wedge \vec{B}$, même si elles sont à la question 19. du

enant dans le champ tension peuvent être posée dans la question e (le cas du rail de

rmée est nul et qu'à l'ais uniquement du tout donc de choisir un flux.

sse v ou la vitesse dv/dt au lieu de l'an énergétique.

par i et l'équation

ent, il est conseillé vérifier la cohérence entre les deux et de la force de l'utiliser pour que les deux soient

le bilan global de s intrinsèquement t où elle va.

* Lorsqu'un énoncé précise par exemple « la vitesse du dispositif est constante », il faut comprendre que l'extérieur (la main d'un opérateur, un moteur,...) impose cette vitesse (qui à défaut évoluerait), et par conséquent il ne faut pas oublier son intervention dans un bilan de forces, de moments ou d'énergie.

* Attention aux notations : disque de résistance R , de rayon a (et non R !).

* L'induction s'oppose à la variation d'un courant (et non au courant lui-même !) ; ainsi, s'il est bien connu qu'une inductance dans un circuit retarde l'établissement d'un courant ($\tau = L/R$), il faut également avoir présent à l'esprit que lorsqu'un courant est établi et qu'on ouvre le circuit, elle s'oppose également à sa diminution, donc favorise son maintien.

* Il y a deux manières équivalentes de tenir compte d'une inductance propre dans la loi d'Ohm généralisée :

- par application du cours sur l'induction car l'auto-induction résulte d'un terme de Neumann où le flux propre d'un circuit $\Phi_p = Li$ est à rajouter au flux Φ_e d'un

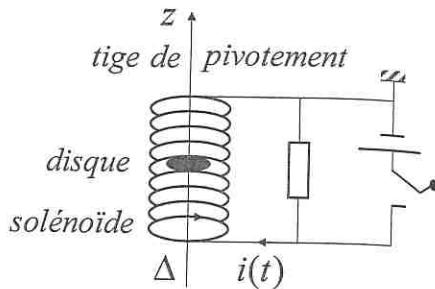
champ extérieur, d'où la fem propre $e_p = -\frac{d\Phi_p}{dt} = -L \frac{di}{dt}$ et une loi d'Ohm généralisée : $u = Ri - (e_e + e_p)$

- mais il est souvent plus simple d'intégrer le phénomène d'auto-induction du circuit de manière électrocinétique habituelle par son inductance, il faut alors rajouter la variation de tension aux bornes de l'inductance $u = \left(Ri + L \frac{di}{dt} \right) - e_e$.

Applications directes du cours

24. Dans les classes de lycée on apprend en électrocinétique que « à tout instant, l'intensité du courant électrique est la même en tout point d'un circuit » (mais elle peut varier dans le temps). Ce résultat est-il vrai pour la fréquence du secteur de 50 Hz ? Que se passe-t-il pour des fréquences plus élevées ?
25. Les champs magnétiques produits par des circuits parcourus par des courants variables se calculent-ils comme en magnétostatique ?
26. Comment peut-on interpréter le signe – dans l'expression de la loi de Faraday ?
27. Deux circuits C_1 et C_2 de rayons a_1 et a_2 sont distants de D avec $D \gg a_1$ et $D \gg a_2$. C_1 est parcouru par un courant $i_1(t)$ créé par un générateur. Estimer simplement le flux envoyé par C_1 à travers C_2 et en déduire e_2 la force électromotrice induite dans C_2 . Vérifier sur le champ \vec{B}_2 induit que la loi de Lenz est satisfaite. Quelle approximation a été faite ?

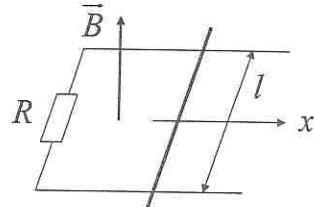
- 28.** Un solénoïde d'axe Δ vertical, est branché en parallèle sur une résistance ; un générateur muni d'un interrupteur alimente l'ensemble. Un disque homogène est attaché perpendiculairement et par son centre à une tige verticale qui peut pivoter sans frottement et qui coïncide avec l'axe Δ . Ce disque, qui est isolant, porte sur sa circonference une charge électrique $q > 0$. Quand on ouvre l'interrupteur, le disque se met à tourner. À quoi doit-on attribuer ce phénomène ? En raisonnant sur le champ magnétique et le champ électrique induit, prévoir qualitativement le sens de rotation du disque. La loi de Lenz est-elle vérifiée ?



- 29.** Pourquoi la force de Laplace travaille-t-elle alors que la force magnétique de Lorentz ne travaille pas ? Rappeler la relation entre la puissance de la force de Laplace et la puissance de la force électromotrice. Ce bilan auxiliaire est-il général dans les couplages électromécaniques ? Comment s'interprète t-il au niveau microscopique ?

30. Les rails de Laplace

Un circuit est constitué de deux rails rectilignes, parallèles, horizontaux, de résistance négligeable et dont l'écartement est l . Le circuit comprend une résistance R et est fermé par une tige, parfaitement conductrice, de masse m , qui peut glisser sans frottement sur les deux rails. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme \vec{B} vertical.



À l'instant $t = 0$, il n'y a pas de courant, $i(0) = 0$, et la tige est lancée avec une vitesse $v_0 \vec{u}_x$ ($v_0 > 0$), puis abandonnée à elle-même.

- Écrire les équations du système. Comment s'applique la loi de Lenz ? Donner la vitesse $v(t)$ de la tige.
- Que devient l'énergie cinétique initiale de la tige ?

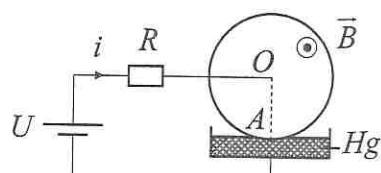
31. Les rails de Laplace (bis)

Dans le même dispositif qu'à la question précédente, le circuit électrique comporte en plus de la résistance R , une capacité C en série. À l'instant $t = 0$, la capacité est chargée ($q = q_0$) et la tige est immobile ($v_0 = 0$).

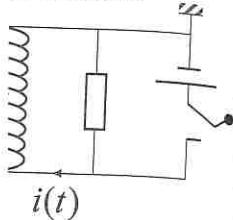
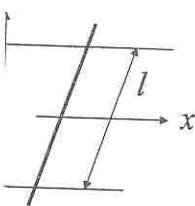
- Écrire les équations du système. Comment s'applique la loi de Lenz ?
- Faire un bilan instantané de puissance.
- On pose $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} + \frac{B^2 l^2}{mR}$. Donner les solutions $q(t)$, $i(t)$ et $v(t)$. Que constate-t-on lorsque $t \rightarrow \infty$? Expliquer.

32. La roue de Barlow

Un disque métallique de rayon $OA = a$ peut tourner sans frottement dans le plan vertical autour de l'axe Oz . Il est alimenté sur son axe, au



pivotement

enant sur le champ
le sens de rotationénetique de Lorentz
ce de Laplace et la
général dans les
microscopique ?

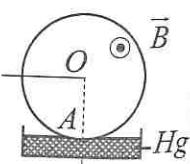
e avec une vitesse

Lenz ? Donner la

ique comporte en
, la capacité est

iz ?

Que constate-t-on



point O , par un générateur de tension U , le circuit étant fermé au point A , où la circonference trempe dans un bain de mercure ; la résistance totale du circuit est R . On considère que le chemin suivi par le courant i entre O et A est la ligne droite.

a) Prévoir le sens de rotation de la roue, initialement immobile, puis choisir les vecteurs unitaires \vec{u}_θ et \vec{u}_z en conséquence, sachant que l'orientation positive du circuit est prise selon \vec{u}_r dirigé de O vers A .

b) Évaluer le moment \vec{M}_L^O en O de la force de Laplace et la force électromotrice e_{OA} .

c) Écrire les équations du système sachant que le moment d'inertie du disque de masse m par rapport à l'axe Oz est $J = ma^2/2$ et en déduire l'équation d'évolution de la vitesse ω sous la forme : $\tau \frac{d\omega}{dt} + \omega = \omega_i$. Donner la solution $\omega(t)$

avec $\omega(t=0)=0$, avec les expressions de τ et ω_i à interpréter.

d) Écrire et commenter le bilan de puissance.

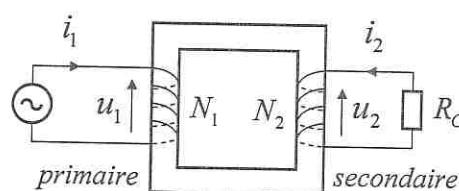
33. Quel est le lien entre l'inductance définie dans le cours sur l'induction et celle vue en électrocinétique ?

34. Un tronçon de solénoïde, de longueur l , de section S , comporte N spires. Déterminer de deux manières différentes son inductance L .

AN : Estimer L pour une bobine de TP à peu près cubique de côté 10 cm et comportant 300 spires.

35. Qu'est ce qui interdit les discontinuités de courant dans un circuit électrique ?

36. Deux bobines non résistives et d'inductance L_1 et L_2 sont couplées par une inductance mutuelle M (de signe quelconque). Quelle est l'inductance équivalente L de l'ensemble sachant que les bobines sont disposées en série. Commenter le résultat et l'expliquer qualitativement en fonction du signe de M . Quelle loi retrouve-t-on lorsqu'on éloigne les bobines l'une de l'autre ?



37. Un transformateur est schématiquement constitué de deux circuits de résistances négligeables et d'inductances propres L_1 et L_2 , de nombre de spires N_1 dans le primaire (tension alternative $u_1(t)$ délivrée par un générateur) et N_2 dans le secondaire (tension $u_2(t)$ utile pour alimenter une résistance de charge R_C). Ces enroulements sont traversés par un carcasse magnétique (constitué en général d'un matériau ferromagnétique) qui canalise les lignes de champ magnétique, ce qui permet entre les deux circuits d'obtenir un couplage parfait : $M^2 = L_1 L_2$. Écrire les lois des tensions et établir, en utilisant le résultat de la question 34., le rapport des tensions $u_2(t)/u_1(t)$; commenter.

38. Un générateur extérieur impose un champ électrique sinusoïdal de pulsation ω parallèle à Oz à un conducteur cylindrique d'axe Oz . Pourquoi l'hypothèse de l'uniformité de \vec{E} sur la section du conducteur n'est-elle pas valable ?

60. Quel est l'intérêt des moteurs électriques sur les moteurs thermiques (à explosion ou Diesel) ?

61. Un fluide conducteur (de conductivité σ) est en écoulement, animé d'un vitesse $\vec{v} = v \vec{u}_x$ par rapport au référentiel du laboratoire. Il est placé dans un champ magnétique qui, à l'extérieur du fluide, est constant et noté $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$. Comment s'écrit la loi d'Ohm locale pour ce conducteur ?

Exercices

62. Chute d'un cadre

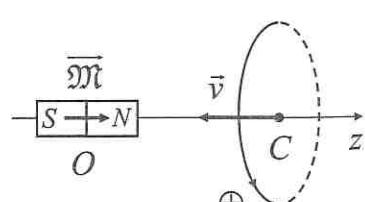
Un cadre carré de côté $a = 10\text{ cm}$, de masse $m = 10,2\text{ g}$ est constitué d'un fil conducteur de résistance $R = 10^{-3}\Omega$; il est placé dans le plan vertical xOz où Oz est la verticale descendante, perpendiculairement à un champ magnétique permanent mais non uniforme $\vec{B} = (B_0 - bz)\vec{u}_y$, où z est la cote du côté supérieur du cadre et $b = 6,4\text{ T.m}^{-1}$. À $t = 0$, le cadre est lâché dans le champ de pesanteur ($g = 9,8\text{ m.s}^{-2}$) avec une vitesse initiale nulle.

- Faire un dessin et prévoir de deux manières différentes le sens du courant induit dans le cadre.
- Calculer de deux manières différentes la force électromotrice induite e dans le cadre et en déduire le courant induit i .
- Quelle est la résultante \vec{f}_L des forces de Laplace s'exerçant sur le cadre ?
Commentaires.
- Que peut-on dire du mouvement de chute du cadre ? Applications numériques.

63. Courant induit dans une spire mobile (*)

Une spire circulaire d'axe Cz , de rayon a et de résistance R (le coefficient d'inductance propre est ici négligeable) est déplacée à vitesse $\vec{v} = -v \vec{u}_z$ constante ($v > 0$) le long de son axe.

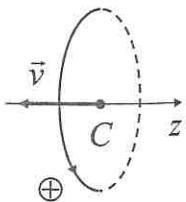
Son abscisse est $z > 0$ par rapport à un petit aimant fixe en O , assimilé à un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} \vec{u}_z$.

- 
- Prévoir par la loi de Lenz le sens du courant i induit dans la spire. Ce sens est-il modifié si :
 - au lieu d'approcher la spire de l'aimant, on l'en éloigne ?
 - on approche la spire de l'aimant en ayant retourné ce dernier ?
 - Déterminer le champ électromoteur \vec{E}_m en chaque point de la spire.
 - Dans quelle position de la spire (vis-à-vis de l'aimant) le courant induit est-il maximal ?
 - Évaluer la force que doit appliquer l'opérateur sur l'aimant pour le maintenir immobile en O .

es (à explosion ou
timé d'un vitesse
dans un champ
 $= B_0 \vec{u}_z$. Comment

onstitué d'un fil
al xOz où Oz est
étique permanent
rieur du cadre et
 $r (g = 9,8 \text{ m.s}^{-2})$

du courant induit
nduite e dans le
t sur le cadre ?
numériques.

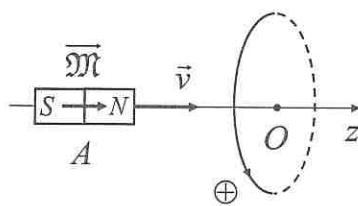


re. Ce sens est-il

rant induit est-il
our le maintenir

64. Courant induit par un aimant mobile (*)

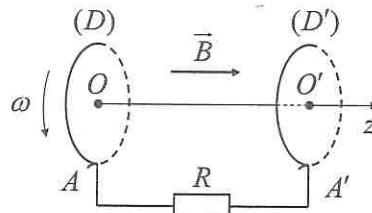
Une spire circulaire d'axe Oz , de rayon a et de résistance R (le coefficient d'inductance propre est ici négligeable) est immobile. Sur son axe, on déplace à vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_z$ constante ($v > 0$) un petit aimant A d'abscisse $z < 0$ assimilé à un dipôle magnétique de moment $\vec{M} = M\vec{u}_z$.



- Prévoir par la loi de Lenz le sens du courant i induit dans la spire. Ce sens est-il modifié si :
 - au lieu d'approcher l'aimant de la spire, on le retire ?
 - on approche l'aimant de la spire après l'avoir retourné ?
- Déterminer le champ électromoteur \vec{E}_m en chaque point de la spire.
- Dans quelle position de l'aimant (vis-à-vis de la spire) le courant induit est-il maximal ?
- Quelle est la force magnétique qu'exerce l'aimant sur la spire ?

65. Deux roues de Barlow couplées

Deux disques identiques à celui de la question 32. (masse m , rayon a) peuvent tourner librement autour d'un axe horizontal commun $OO'z$ (moment d'inertie $J = ma^2/2$), qui est aussi l'axe du champ uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$ qui règne dans l'espace considéré.



Le circuit est fermé sur lui-même sur l'axe conducteur OO' d'une part, à l'extérieur AA' d'autre part et les frottements sont négligés ; la résistance totale du circuit est R . À l'instant initial, le disque (D) tourne avec une vitesse angulaire $\omega(t=0) = \omega_0$, alors que (D') est immobile : $\omega'(t=0) = 0$.

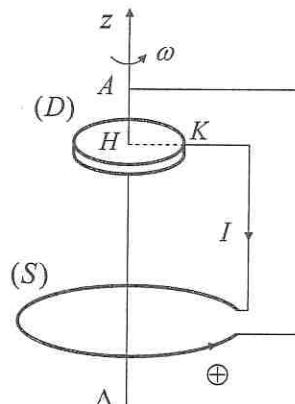
- Prévoir dans quel sens va se mettre à tourner le disque (D').
- Écrire les équations du système.
- Donner les solutions $i(t)$, $\omega(t)$ et $\omega'(t)$.
- Toute l'énergie cinétique perdue par (D) est-elle récupérée par (D') ?

66. La dynamo-disque homopolaire

Une dynamo est constituée :

- d'un disque conducteur (D) de rayon a , de moment d'inertie J par rapport à son axe Δ avec lequel il tourne avec une vitesse angulaire ω ; grâce au contact avec entraînement de sa périphérie, il est soumis à un couple mécanique constant Γ . On suppose que le courant circule dans (D) suivant un rayon unique HK .
- d'un bobinage métallique représenté sur le dessin par une spire circulaire unique (S) d'axe Δ et relié à l'axe (point A) et à la périphérie du disque (point K) par un fil conducteur qui ferme le circuit.

R et L désignent la résistance et l'inductance propre du circuit complet.



On rappelle que si I désigne le courant dans le circuit et $\vec{B} = B_z \vec{u}_z + B_r \vec{u}_r$, le champ magnétique créé par le bobinage au niveau du disque, le coefficient d'inductance mutuelle M entre (S) et la périphérie de (D) est défini à l'aide du flux :

$$\Phi = \iint_{(D)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^a B_z \cdot 2\pi r dr = MI$$

- a) Exprimer en fonction de M , I et ω , la force électromotrice e_{HK} existant entre l'axe et la périphérie de (D) et en déduire l'équation électrique (1) du circuit.
- b) Exprimer en fonction de M et I , le couple $\vec{\Gamma}_L$ des forces de Laplace s'appliquant à (D) et en déduire l'équation mécanique (2) du circuit.
- c) Effectuer le bilan de puissance instantané du système, pris en valeur moyenne en supposant qu'un régime périodique puisse s'établir et dégager l'intérêt de ce dispositif. Application.
- d) Comment peut-on utiliser ce principe de la dynamo pour expliquer l'origine du champ magnétique terrestre ?

67. Chauffage par induction

Un cylindre métallique de rayon a , de longueur L et de conductivité $\sigma = 5.10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$, est placé à l'intérieur d'un solénoïde de grande longueur suivant son axe Oz . Ce dernier est parcouru par un courant harmonique de faible fréquence, $f = 50$ Hz, à l'origine d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}_s = B_0 \cos \omega t \vec{u}_z$.

- a) Par une méthode au choix, déterminer l'expression du champ électromoteur \vec{E}_m , puis celle de la densité volumique \vec{j} des courants induits (dits de Foucault) en tout point du conducteur en négligeant devant \vec{B}_s le champ produit par ces courants.
- b) En déduire la puissance volumique moyenne dissipée à une distance r de l'axe par effet Joule, puis la puissance moyenne totale sur le conducteur. Dans quel but, cette perte est-elle ici provoquée ?
- c) Calculer le champ magnétique \vec{B}_i créé par les courants induits de la question a).
- d) L'hypothèse faite $|\vec{B}_i| \ll |\vec{B}_s|$ est-elle vérifiée lorsque a est typiquement de l'ordre du décimètre ? Commenter les résultats.
- e) Sans faire l'approximation $|\vec{B}_i| \ll |\vec{B}_s|$, déterminer à quelle équation en ARQS satisfait le champ magnétique total \vec{B} . À quel type de solution faut-il s'attendre ?

68. Effet de peau sur un conducteur cylindrique

Un conducteur cylindrique d'axe Oz et de rayon a possède une conductivité σ , réelle aux fréquences envisagées (voir à ce sujet la question 69. du chapitre 3). Un générateur extérieur impose un champ électrique sinusoïdal de pulsation ω , parallèle à Oz et qui dans le conducteur est cherché sous la forme d'un champ non uniforme $\underline{\vec{E}} = \underline{E}(r) e^{i\omega t} \vec{u}_z$ avec $\underline{E}(r=a) = E_0$, valeur en surface.

Le champ \vec{E} dans le conducteur vérifie l'équation de diffusion $\Delta \vec{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$

(elle a été établie en ARQS à la question 15. du chapitre 3, et pour \vec{B} , à la question 67. e) ci-dessus).

+ $B_r \vec{u}_r$ le champ
ent d'inductance
ux :

κ existant entre
du circuit.

ace s'appliquant

eur moyenne en
l'intérêt de ce

uer l'origine du

conductivité
ongueur suivant
able fréquence,
 $\sigma \vec{u}_z$.

ctromoteur \vec{E}_m ,
oucault) en tout
es courants.
 r de l'axe par
Dans quel but,

question a).
yiquement de
tion en ARQS
Il s'attendre ?

conductivité σ ,
(chapitre 3). Un
 ω , parallèle
non uniforme

$\vec{B} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$
, à la question

- a) Montrer qu'une solution du type : $\vec{E} = E_0 \exp[-(1+i)(a-r)/\delta] e^{i\omega t} \vec{u}_z$ convient si $r \gg \delta$, r étant la distance d'un point du conducteur à l'axe et δ une grandeur homogène à une longueur à exprimer en fonction de μ_0 , σ et ω .

On donne en coordonnées cylindriques : $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$

- b) Interpréter physiquement la solution proposée. Quelle signification peut-on donner à δ ? Tracer l'amplitude réelle E en fonction de r en admettant que \vec{E} est négligeable pour r de l'ordre ou inférieur à δ .

AN : Expliquer pourquoi un fil de cuivre ($\sigma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$) de 1 mm de diamètre convient à la transmission de la fréquence domestique ($f = 50 \text{ Hz}$) ainsi qu'à celle des basses fréquences de l'électrocinétique / électronique en TP. Ce moyen convient-il à la transmission des fréquences radio ? Expliquer et justifier le nom d'épaisseur de peau donné à δ dans ce cas.

- c) Évaluer la puissance moyenne $\langle P \rangle$ dissipée par effet Joule dans un tronçon de longueur l de ce conducteur en fonction de σ , E_0 , l , a et δ dans le domaine de fréquence où $\delta \ll a$. Commenter ce résultat. En déduire la résistance R de ce tronçon en fonction de δ , a et R_0 , sa résistance en courant continu ; commentaire.

69. Moteur synchrone

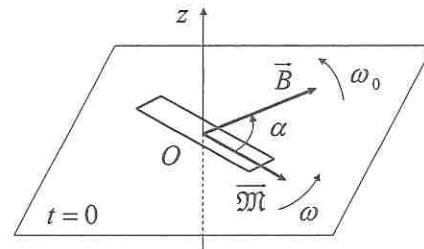
Un montage convenable de bobines parcourues par des courants alternatifs de pulsation ω_0 produit dans un certain volume un champ magnétique \vec{B} , d'amplitude B_0 , qui tourne dans un plan xOy autour d'un axe Oz avec la pulsation ω_0 constante.

D'autre part, une pièce mobile autour de l'axe Oz (le rotor) constituée d'un petit aimant permanent portant un moment magnétique permanent \vec{M} , orthogonal à Oz , tourne dans le plan xOy avec un mouvement de rotation uniforme de pulsation ω .

La valeur de l'angle (\vec{M}, \vec{B}) à l'instant initial est notée α comme indiqué sur la figure.

- a) Calculer la valeur instantanée du couple magnétique $\vec{\Gamma}$ exercé par le champ sur la pièce mobile. En déduire sa valeur moyenne au cours du temps.
b) Pour quelles valeurs de ω et α ce dispositif fonctionne-t-il en moteur ? Quelle est dans ce cas la puissance maximale P_M qu'il peut fournir ?
c) Un régime permanent de fonctionnement du moteur est dit stable si lorsque le moteur prend accidentellement de l'avance (ou du retard) sur son régime permanent, le jeu des forces qu'il subit lui fait perdre cette avance (ou ce retard) ; il est instable dans le cas contraire.

À partir du graphe de $\Gamma(\alpha)$, déterminer le domaine de α correspondant à un régime stable lorsque le moteur fournit un couple utile Γ_u .



70. Moteur alternatif asynchrone (*)

Dans un domaine d'espace autour de O , le champ magnétique \vec{B} produit est un champ tournant dans le plan xOy à la vitesse angulaire ω_0 et de norme B_0 ; c'est l'inducteur, les circuits à la source du champ \vec{B} constituant le stator.

Le rotor ou induit, une petite bobine plate, fermée sur elle-même, de résistance R et d'inductance propre L , est constitué de N spires planes, circulaires, chacune de surface S , leur axe étant dirigé par le vecteur unitaire \vec{n} également dans le plan xOy . Cette bobine peut tourner à la vitesse ω autour d'un de ses diamètres porté par l'axe Oz de vecteur unitaire \vec{u}_z et qui constitue l'arbre du moteur.

L'étude est effectuée en régime permanent de rotation, la bobine tournant à une vitesse angulaire constante ω . À l'origine du temps ($t = 0$), le champ $\vec{B}(0)$ est porté par l'axe Ox et l'angle $(\vec{B}(0), \vec{n}(0))$ est égal à α .

- Montrer qualitativement comment en régime permanent de rotation, ce dispositif peut fonctionner en moteur et justifier son nom de « moteur asynchrone ».
- Déterminer le flux magnétique $\Phi(t)$ envoyé par le champ \vec{B} à travers la bobine plate en notant $\Phi_0 = NB_0S$. En déduire la fem induite, puis déterminer le courant $i(t)$ circulant dans la bobine sous la forme :

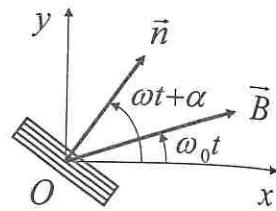
$$i(t) = I_0 \sin[(\omega - \omega_0)t + \alpha - \psi]$$

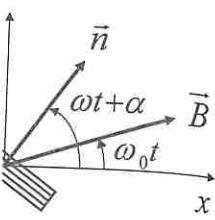
en donnant les expressions de I_0 et $\tan \psi$.

- Après avoir assimilé la bobine à un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}}$, calculer la composante Γ_z suivant l'axe Oz du couple $\vec{\Gamma}$ exercé par le champ sur la bobine. En déduire sa valeur moyenne $\langle \Gamma_z \rangle$. Pour quelles valeurs de α et ω ce système fonctionne-t-il en moteur ?
- Tracer la courbe représentative des variations de $\langle \Gamma_z \rangle$ en fonction de $\omega_0 - \omega$.

AN : Sachant que $B_0 = 10^{-2}$ T ; $N = 100$; $S = 10 \text{ cm}^2$; $\omega_0 = 50 \text{ tours/s}$; $R = 2 \Omega$; $L = 80 \text{ mH}$, calculer la valeur numérique de l'extremum Γ_M (exprimé en fonction de Φ_0 et L) et la valeur correspondante de ω_M en tours par seconde.

- Déterminer la puissance moyenne $\langle P \rangle$ fournie par le moteur en fonction de ω et tracer la courbe représentative de $\langle P \rangle$ en fonction de ω . Expliquer la valeur prise pour $\omega = \omega_0$ et distinguer plusieurs domaines de ω . Quelle est la source d'énergie lorsque le dispositif fonctionne en moteur ?
- À présent, un couple résistant Γ_r est appliqué sur l'arbre du moteur. Discuter suivant les valeurs de Γ_r les possibilités de démarrage spontané du moteur.
- Le fonctionnement du moteur est dit stable si lors d'une augmentation éventuelle de sa vitesse de rotation, la somme des couples qu'il subit tend à s'opposer à cette augmentation. Discuter la stabilité des régimes de fonctionnement à l'aide du graphe de $\langle \Gamma_z \rangle$ de la question d). À quelle plage de pulsations (en tours par seconde) correspond la stabilité ?





eur axe étant dirigé
ne peut tourner à la
côte unitaire \vec{u}_z et
ne tournant à une
mp $\vec{B}(0)$ est porté

ation, ce dispositif
chro ».
travers la bobine
terminer le courant

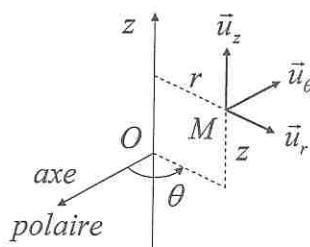
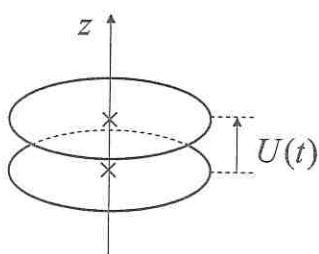
it \vec{M} , calculer la
mp sur la bobine.
et ω ce système
on de $\omega_0 - \omega$.
 $v_0 = 50$ tours/s ;
l'extremum Γ_M
ante de ω_M en

fonction de ω et
liquer la valeur
le est la source
moteur. Discuter
moteur.
ation éventuelle
'opposer à cette
ent à l'aide du
s (en tours par

- h) Quelle est la puissance électromagnétique P_{em} totale apportée en moyenne au moteur ? En déduire le rendement η du moteur en fonction de ω et ω_0 . Commentaire.

71. Effet inductif dans un condensateur en charge (*)

Les armatures circulaires d'un condensateur plan de rayon a , d'épaisseur e , sont placées perpendiculairement à l'axe Oz en $z = \pm e/2$ et soumises à une tension variable $U(t)$. Un point M intérieur au condensateur est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . La condition $2a \gg e$ permet de négliger les effets de bord.



Il s'agit de décrire le comportement électromagnétique du condensateur en régime variable correspondant à l'expérience électrocinétique suivante: le condensateur de capacité C en série avec une résistance R , initialement déchargé, est chargé, à partir de $t = 0$ par un générateur parfait de tension U_0 .

- Donner, sans démonstration, dans l'hypothèse quasi stationnaire, l'expression du champ électrique $\vec{E}(t)$ entre les armatures en fonction de la charge $q(t)$ (en $z = +e/2$), e , C et \vec{u}_z . De même rappeler sans démonstration l'expression de la capacité C de ce condensateur plan.
Une des équations de Maxwell montre qu'il doit alors exister un champ magnétique dans le condensateur. Laquelle et pourquoi ? S'agit-il d'un phénomène d'induction ?
- Comment sont dirigées les « lignes de courant » entre les armatures ? De quel type de courant s'agit-il ?
En déduire la direction du champ magnétique \vec{B} à l'intérieur du condensateur.
Quelle doit être sa valeur sur l'axe Oz ? Déterminer $\vec{B}(r, t)$ en fonction de μ_0 , a , r , $i(t)$ courant arrivant sur l'armature supérieure et \vec{u}_θ .
- Calculer l'énergie magnétique W_m emmagasinée dans le condensateur à un instant quelconque et en déduire le coefficient d'auto-inductance L du condensateur.
AN : Calculer L et C pour $e = 0,5$ cm et $a = 3$ cm ; commentaire.
- Montrer que la structure des champs déterminés dans les questions a) et b) est incompatible avec une équation de Maxwell ; où est l'erreur ?

Réponses aux questions

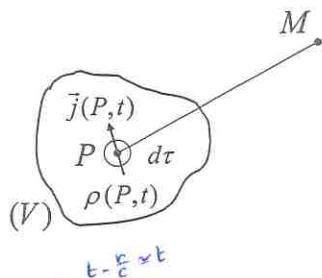
INDUCTION ELECTROMAGNÉTIQUE

Le cours d'abord

L'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS)

1. L'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS) consiste à négliger les effets de propagation, c'est-à-dire le temps de parcours PM/c intervenant dans les potentiels retardés (question 11. du chapitre 2) et donc à calculer au point M ces potentiels, à chaque instant, par les mêmes expressions qu'en régime statique. Ainsi pour une distribution d'extension finie (V) contenant les sources $\rho(P,t)$ et $\vec{j}(P,t)$:

$$V(M,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P,t)}{r} d\tau \quad \text{et} \quad \vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(P,t)}{r} d\tau \quad \text{avec } r = PM$$



Et donc les potentiels perçus au point M à l'instant t sont liés aux densités à l'intérieur du volume de source (V) existant aux points P au même instant t sans retard.

2. Cette approximation est valable dès lors que $\rho(P,t)$ et $\vec{j}(P,t)$ varient peu pendant la durée de propagation PM/c . En particulier si les sources sont périodiques de période T , il faut que :

$$\frac{PM}{c} \ll T \Rightarrow \frac{r}{c} \ll \frac{\lambda}{c} \Rightarrow \forall P, r = PM \ll \lambda$$

Rq : Ceci correspond à l'hypothèse du champ proche dans le cours sur le rayonnement électromagnétique.

Cela signifie qu'aucun des points P du circuit ne doit être éloigné de plus de λ du point d'observation M ; M étant quelconque, on en déduit que le circuit lui-même doit avoir des dimensions inférieures à λ (fixons $\lambda/100$) pour que l'ARQS soit vérifiée.

En TP les circuits ont une taille de l'ordre du mètre ($\lambda = 1 \text{ m} \Rightarrow f = 300 \text{ MHz}$) ; il ne faut donc pas dépasser 3 MHz (soit $f/100$).

3. L'ARQS consiste en réalité à faire un développement limité en $1/c$, ce qui revient à négliger le terme de déplacement $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans l'équation de Maxwell-Ampère, qui est à l'origine de la propagation que justement on néglige ici. Par rapport aux régimes statiques, la nouveauté en ARQS est l'apparition du terme $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ dans l'équation de Maxwell-Faraday, c'est-à-dire qu'une variation de champ magnétique provoque l'apparition d'un champ électrique : ce phénomène nouveau est le phénomène d'induction électromagnétique.

électrostatique / magnétostatique

Régime variable	ARQS	Régimes statiques
$\text{div } \vec{B} = 0$ $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ APPROXIMATION	$\text{div } \vec{B} = 0$ $\text{rot } \vec{E} = -\boxed{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$ $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + []$	<small>NOUVEAUTÉ</small> $\text{div } \vec{B} = 0$ $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
$\text{div } \vec{B} = 0$ et $\text{div}(\text{rot } \vec{E}) = 0$: $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ $\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ $\text{rot}(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$ $\text{div } \text{rot } (\vec{A}) = 0 \Rightarrow \vec{A} = -\text{grad } V$	$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ $\vec{E} = -\text{grad } V - \boxed{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$	$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ $\vec{E} = -\text{grad } V$
$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ $\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$ $\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ <small>jauge de Lorentz</small>	$\Delta V - [] + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ $\Delta \vec{A} - [] + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$ $\text{div } \vec{A} + [] = 0$	$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ $\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$ $\text{div } \vec{A} = 0$ <small>jauge de Coulomb</small>
$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$	$\text{div } \vec{j} + [] = 0$	$\text{div } \vec{j} = 0$

Dans ce tableau, les termes nouveaux par rapport aux régimes statiques sont encadrés ; en particulier, le champ électromoteur lié à un champ \vec{B} variable est créé par l'intermédiaire du potentiel vecteur. Et les termes négligés par rapport au régime variable apparaissent en blanc entre crochets ; en particulier, l'intensité est conservative ($\text{div } \vec{j} = 0$ issu de $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, la loi des noeuds est valable en ARQS) et la jauge est celle de Coulomb : $\text{div } \vec{A} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{jauge} &= \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \phi \\ V' &= V - \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ \therefore \text{Lorentz} &= \nabla \cdot \vec{C} = 0 \quad (\text{d'homogénéité}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Coulomb} & \quad \text{div } \vec{A}' = \text{div } \vec{A} + \text{div grad } \phi \\ &= \Delta \phi = 0 \end{aligned}$$

qui revient à
ampère, qui est
tion du terme
on de champ
à nouveau est

statiques

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} \\ -\operatorname{grad} V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +\frac{\rho}{\epsilon_0} &= 0 \\ +\mu_0 \vec{j} &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\vec{A} = 0$$

$$\vec{j} = 0$$

et encadrés ; en
intermédiaire du
issent en blanc
 $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, la
= 0 .

Loi d'Ohm locale pour un conducteur en mouvement

4. Un porteur de charge q se déplaçant à la vitesse \vec{V} dans (R) subit la force de Lorentz : $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$

La charge est invariante par changement de référentiel, ce porteur subit dans (R') la force : $\vec{f}' = q(\vec{E}' + \vec{V}' \wedge \vec{B}')$

Or dans la limite classique : $\begin{cases} \text{les forces sont des invariants } \vec{f}' = \vec{f} \\ \text{l'addition des vitesses s'écrit } \vec{V}' = \vec{V} + \vec{v} \end{cases}$

où \vec{v} est la vitesse d'entraînement au point considéré décrivant le mouvement de (R') (c'est-à-dire du conducteur) par rapport à (R).

Il vient alors : $\vec{E}' + \vec{V}' \wedge \vec{B}' = \vec{E} + (\vec{V}' + \vec{v}) \wedge \vec{B}$, relation qui doit être vraie quelle que soit la vitesse \vec{V}' des porteurs d'où :

$$\boxed{\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B}' = \vec{B}}$$

5. Le conducteur est ohmique ; la loi d'Ohm sous forme « habituelle » et qui caractérise les propriétés du conducteur doit être écrite dans le repère du conducteur : $\vec{j}' = \sigma \vec{E}'$.

Dans la limite classique, $\vec{j} = \vec{j}'$ (issu de $\vec{B}' = \vec{B}$ en ARQS) ; la loi d'Ohm pour le conducteur en mouvement dans le repère du laboratoire s'écrit alors :

$$\boxed{\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \\ \operatorname{rot} \vec{B}' &= \mu_0 \vec{j}' \end{aligned} \Rightarrow$$

Champ électromoteur et loi d'Ohm généralisée

6. Dans (R) les potentiels sont reliés au champ par : $\vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

et dans (R') : $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B}$

que l'on écrit sous la forme : $\vec{E}' = -\operatorname{grad} V + \vec{E}_m$

où $\boxed{\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B}}$ est le champ électromoteur

de caractère hybride car composé du terme de Neumann $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ spécifique des champs magnétiques variables et du terme de Lorentz $\vec{v} \wedge \vec{B}$ spécifique du mouvement du conducteur dans (R). $\vec{E}' \rightarrow$ entraînement (circuit)

7. D'après ce qui précède, on peut écrire : $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \sigma(-\operatorname{grad} V + \vec{E}_m)$

Calculons la circulation du vecteur $\frac{\vec{j}}{\sigma} = -\operatorname{grad} V + \vec{E}_m$ entre deux points A et B du circuit à l'instant t et dans le sens positif indiqué sur la figure :

$$\int_A^B \frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{\sigma} = - \int_A^B \text{grad } V \cdot d\vec{l} + \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

- * dans le cadre de l'ARQS, à tout instant, le courant i est le même en tout point du circuit ; de plus, ici, le circuit est filiforme et \vec{j} et $d\vec{l}$ sont colinéaires et de même sens, donc

$$I = jS \quad \int_A^B \frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{\sigma} = i \int_A^B \frac{dl}{\sigma S} = R_{AB} i \quad \frac{L}{\sigma S} = \ell \frac{L}{S} = R$$

où R_{AB} est la résistance du tronçon AB

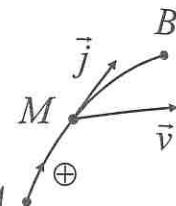
Rq : Lorsque la section du fil est constante, $R_{AB} = \frac{l}{\sigma S} = \frac{\rho l}{S}$ où ρ est la résistivité.

- * $-\int_A^B \text{grad } V \cdot d\vec{l} = -(V_B - V_A) = V_A - V_B$ est la différence de potentiel

$$\frac{\partial V}{\partial r} dr = dV$$

- * par définition, on pose :

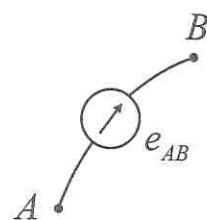
$$e_{AB} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$



La force électromotrice apparaît donc comme la circulation du champ électromoteur. Tout se passe comme s'il existait un « générateur » entre A et B, dont la flèche est orientée dans le sens de l'intégration de A vers B.

La loi d'Ohm généralisée (en convention récepteur) s'écrit donc :

$$V_A - V_B = R_{AB} i - e_{AB}$$



8. * Dans un circuit fermé $V_A = V_B$, et un courant induit prend naissance par $e = Ri$ où $e = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$. Comme \vec{E}_m et e , i peut être lié à deux causes :

- $\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$: le circuit immobile est placé dans un champ magnétique variable,
- $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$: le circuit est mobile dans un champ magnétique permanent.

- * Dans le cas d'un circuit AB ouvert, $i = 0$ et $V_A - V_B = -e_{AB}$; le champ électromoteur déplace les charges jusqu'à ce qu'il soit équilibré par le champ electrostatique que créent ces charges ; aux extrémités du circuit apparaît alors une différence de potentiel égale en valeur absolue à la force électromotrice induite.

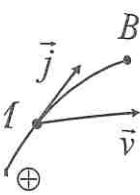
9. Il est également possible de passer par le flux pour calculer la force électromotrice.

- * dans le cas d'un circuit filiforme fermé, immobile dans un champ magnétique variable, il reste $\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ soit

$$e = \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = - \oint_C \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} \stackrel{(1)}{=} - \frac{d}{dt} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \stackrel{(2)}{=} - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

(1) s'obtient car le circuit (C) est fixe (et l'intégrale ne dépend alors plus que du temps, d'où la dérivée droite)

(2) traduit le théorème de Stokes et $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$



Ce résultat est la loi de Faraday (qui ne nécessite pas l'ARQS) ; $\Phi(t)$ est le flux magnétique à l'instant t à travers une surface (S) quelconque s'appuyant sur le circuit filiforme (C).

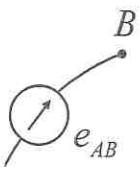
- * Dans le cas d'un circuit filiforme fermé, mobile dans un champ magnétique permanent, il reste $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$. La démonstration est moins commode, mais la loi de Faraday reste vraie : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ où $d\Phi$ est la variation de flux due au déplacement ou à la déformation du circuit (C) pendant dt .

à résistivité.

- La loi de Lenz, qui est une loi de modération, affirme que l'ensemble des phénomènes d'induction ont des conséquences qui s'opposent aux causes qui leur ont donné naissance.

Aspect énergétique

le courant induit
et champ induit



- * Le circuit n'est pas initialement parcouru par un courant, mais il est mobile dans un champ magnétique permanent ; il est donc le siège d'une force électromotrice, responsable d'un courant induit. Parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique, le circuit est alors soumis à la force de Laplace qui perturbe le mouvement initial.

- * Le circuit est initialement immobile, mais il est parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique ; il subit donc la force de Laplace qui le met en mouvement. Mobile dans un champ magnétique (permanent), il est alors le siège d'un force électromotrice qui perturbe le courant initial.

$$P = F \cdot v$$

- La force magnétique de Lorentz sur les porteurs ne travaille pas : $(q\vec{V} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{V} = 0$!

On applique ce résultat aux charges mobiles de densité ρ_m d'un élément de volume $d\tau$ du conducteur.

La puissance nulle est exprimée dans le repère (R) où $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{v}$:

$$dP = \rho_m d\tau [(\vec{V}' + \vec{v}) \wedge \vec{B}] \cdot (\vec{V}' + \vec{v}) = 0$$

Deux des quatre termes du développement sont nuls ; il reste :

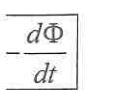
$$\rho_m d\tau [(\vec{V}' \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} + (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{V}'] = 0$$

et puisque $\vec{V}' = \vec{v}$, $(\vec{j} d\tau \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} + (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{j} d\tau = 0$ ou encore $d\vec{F}_{Lapl.} \cdot \vec{v} + \vec{j} \cdot \vec{E}_m d\tau = 0$

Le 1er terme est la puissance mécanique de la force de Laplace sur le conducteur ; le 2nd terme est la puissance électrique du champ électromoteur (ou de la force électromotrice). $P = \vec{j} \cdot \vec{E}$

$$dP_{Lapl.} + dP_{fem} = 0$$

Ce « bilan auxiliaire » sert à « découpler » les équations électromécaniques du système et à faire un bilan de puissance total, traduisant la conversion électromécanique d'énergie.



plus que du

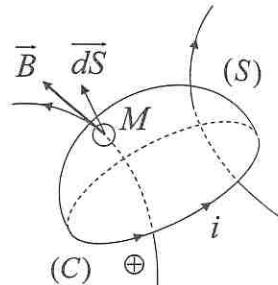
Inductances propre et mutuelle. Énergie magnétique de deux circuits filiformes

13. Le flux propre d'un circuit (C) parcouru par un courant i est le flux du propre champ \vec{B} qu'il crée, envoyé par le circuit à travers lui-même (on parle d'auto-induction).

Le flux du champ magnétique étant conservatif ($\text{div } \vec{B} = 0$), Φ ne dépend pas de la surface (S) choisie, mais uniquement du contour (C) sur lequel elle s'appuie.

D'après la loi de Biot et Savart, $|\vec{B}|$ est proportionnel à i en tout point M de l'espace ; il en est donc de même pour le flux propre $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ et on pose :

$$\Phi = Li$$



où L est appelé le coefficient d'inductance propre du circuit (C).

Sur le dessin où il apparaît que $i > 0$, on a également $\Phi > 0$ car \vec{B} et $d\vec{S}$ sont orientés par la même règle. Si le courant change de sens, donc $i < 0$, alors \vec{B} change de sens alors que $d\vec{S}$ est invariant (puisque lié à l'orientation positive) et donc $\Phi < 0$. Dans les deux cas, on en déduit que $L > 0$.

L ne dépend que de la géométrie propre du circuit (C) considéré ; elle s'exprime en henry (H) ou de manière plus pratique comme le produit $\mu_0 \times \text{longueur}$.

14. Soient deux circuits (C_1) et (C_2) orientés et parcourus par des courants i_1 et i_2 .

(C_1) envoie à travers (C_1) le flux propre $\Phi_{1 \rightarrow 1} = \iint_{(S_1)} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 \equiv L_1 i_1$

(C_2) envoie à travers (C_1) le flux noté $\Phi_{2 \rightarrow 1} = \iint_{(S_1)} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 \equiv M_{2 \rightarrow 1} i_2$

car d'après la loi de Biot et Savart, $|\vec{B}_2|$ en chaque point est proportionnel à i_2 .

(C_1) reçoit donc le flux total : $\Phi_1 = \Phi_{1 \rightarrow 1} + \Phi_{2 \rightarrow 1} = L_1 i_1 + M_{2 \rightarrow 1} i_2$

et de même pour (C_2) : $\Phi_2 = \Phi_{2 \rightarrow 2} + \Phi_{1 \rightarrow 2} = L_2 i_2 + M_{1 \rightarrow 2} i_1$

Le théorème de Neumann assure que :

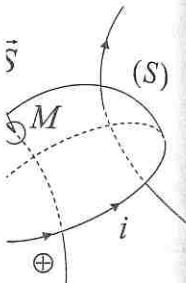
$$M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1} = M$$

M est appelé l'inductance mutuelle des circuits (C_1) et (C_2) ; elle s'exprime en Henry et son signe dépend des orientations arbitraires choisies sur (C_1) et (C_2).

Alors d'après la loi de Faraday pour chaque circuit :

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

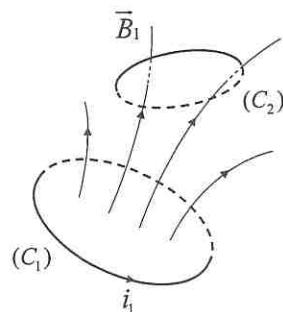
iliformes



15. Le long d'un tube de champ de \vec{B}_1 , le flux est conservé.

Or l'ensemble des lignes de champ de \vec{B}_1 passant par (C_1) ne passent pas forcément par (C_2) ; il est clair que le flux propre de (C_1) soit $\Phi_{1 \rightarrow 1} = L_1 i_1$ est supérieur ou égal à la valeur absolue du flux envoyé par (C_1) à travers (C_2) soit $\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$,
d'où $L_1 \geq |M|$ et de même pour $L_2 \geq |M|$ soit :

$$L_1 L_2 \geq M^2$$



Alors on définit le coefficient de couplage entre les deux circuits par :

$$\alpha = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad \text{ce qui assure les limites} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

16. La loi d'Ohm généralisée pour chaque circuit s'écrit :

$$E_1 = R_1 i_1 - e_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (1)$$

et de même $E_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad (2)$

Il s'agit d'équations différentielles couplées, les circuits n'étant pas indépendants malgré l'inexistence d'un « contact ohmique ».

Le bilan de puissance s'obtient par (1) $\times i_1 + (2) \times i_2$:

$$E_1 i_1 + E_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)$$

L'énergie délivrée par les générateurs est en partie perdue par effet Joule dans les résistances et en partie stockée dans les bobines sous forme d'énergie magnétique récupérable (prise nulle en l'absence de courants, donc de champs) :

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

17. Comme $U_m = \iiint \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} d\tau$, on a nécessairement $U_m > 0$.

Pour un circuit $U_m = \frac{1}{2} L i^2 > 0$ bien connue, permet de retrouver $L > 0$.

Pour deux circuits, écrivons $U_m = i_2^2 \left[\frac{1}{2} L_1 \left(\frac{i_1}{i_2} \right)^2 + M \frac{i_1}{i_2} + \frac{1}{2} L_2 \right]$; $U_m > 0$ signifie que

le trinôme en $\frac{i_1}{i_2}$ n'a pas de racine, d'où $\Delta = M^2 - L_1 L_2 \leq 0$ soit $\alpha = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1$.

\vec{B} et $d\vec{S}$ sont
lors \vec{B} change
et donc $\Phi < 0$.

s'exprime en

i_1 et i_2 .

$L_1 i_1$

i_2

et à i_2 .

i_2

s'exprime en
t (C_2) .

$\frac{di_1}{dt}$

L'effet de peau

18. Les applications numériques permettent d'établir que dans un conducteur métallique et pour des basses fréquences jusqu'aux fréquences hertziennes, le courant de déplacement $|\varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t|$ dans l'équation de Maxwell-Ampère est négligeable devant le courant de conduction $|\sigma \vec{E}|$, ce qui place l'étude dans le cadre de l'ARQS et conduit à trouver pour le champ électromagnétique une équation de type diffusion

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0} \quad (\text{et non de type d'Alembert}).$$

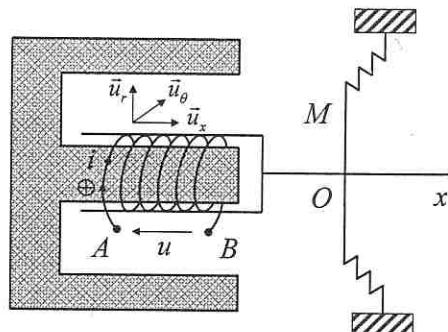
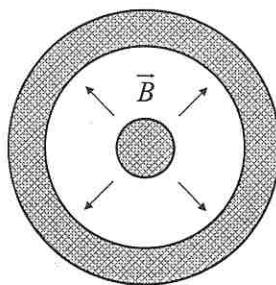
Le signal s'amortit sur une distance $\delta = 1/\sqrt{\pi\mu_0\sigma f}$ d'autant plus faible que la fréquence est élevée. Pour le cuivre :

- * $\delta(50 \text{ Hz}) \approx 1 \text{ cm}$; à faible fréquence ou en régime continu, les courants ont tendance à se répartir uniformément dans la section des conducteurs.
- * $\delta(100 \text{ MHz}) \approx 7 \text{ } \mu\text{m}$, ce qui justifie l'appellation d'épaisseur de peau pour les fréquences hertziennes : en haute fréquence, les courants se localisent au voisinage de la surface des conducteurs.

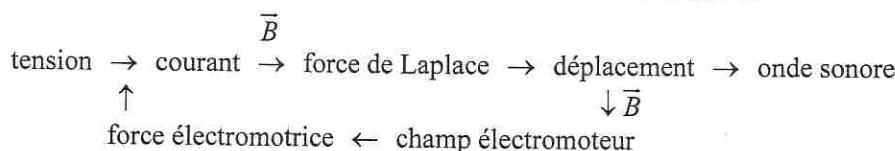
Le haut-parleur électrodynamique

19. Schématiquement, un haut-parleur électrodynamique est composé :

- d'un aimant permanent (parties grisées sur la figure), qui fournit un champ magnétique \vec{B} radial dans l'entrefer en forme de cavité annulaire
- d'une bobine de longueur totale de fil l , de résistance R , d'inductance L , située dans l'entrefer de l'aimant et soumise à la tension $u(t)$ d'un amplificateur entre ses deux extrémités A et B
- d'une membrane M solidaire de la bobine. L'ensemble mobile possède une masse m et peut osciller autour d'une position moyenne ($x=0$) suivant l'axe Ox grâce à un dispositif de rappel schématisé par un ressort de raideur k . La transmission acoustique de la membrane à l'air environnant se traduit par une force de frottement fluide $-\alpha \vec{v}$ ($\alpha > 0$) opposée à la vitesse de la membrane, et dont la puissance correspond à la puissance sonore émise.



Le fonctionnement du haut-parleur est décrit sur le schéma ci-dessous :



Ce mécanisme fait bien apparaître le couplage entre grandeurs électriques et grandeurs mécaniques. Le haut-parleur est un transducteur électrodynamique puisqu'il convertit l'énergie électrique reçue par l'amplificateur en énergie mécanique sous forme d'ondes acoustiques transmises à l'air.

20. Un élément $d\vec{l}$ de bobine parcouru par un courant i et placé dans le champ magnétique \vec{B} subit la force de Laplace :

$$d\vec{f}_{Lapl.} = i d\vec{l} \wedge \vec{B} = i d\vec{l} \vec{u}_\theta \wedge \vec{B} \vec{u}_r = i d\vec{l} B \vec{u}_x \Rightarrow \vec{f}_{Lapl.} = i l B \vec{u}_x$$

La RFD appliquée à l'ensemble membrane et bobine s'écrit en projection sur Ox :

$$m \frac{dv}{dt} = -kx - \alpha v + ilB \quad (1)$$

La bobine mobile dans le champ permanent \vec{B} de l'aimant est le siège d'un phénomène d'induction de type Lorentz. Au champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = v \vec{u}_x \wedge B \vec{u}_r = -vB \vec{u}_\theta$ opposé à i (loi de Lenz) correspondant à la fem :

$$e_{AB} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = -vBl \text{ puisque } d\vec{l} = dl \vec{u}_\theta$$

La bobine est aussi le siège d'un phénomène d'auto-induction (induction de type Neumann) puisque placée dans son propre champ variable.

La loi d'Ohm généralisée s'écrit donc :

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + vBl \quad (2)$$

Comme attendu, les équations (1) et (2) sont couplées puisque l'équation mécanique (1) dépend de la grandeur électrique i et l'équation électrique (2) de la grandeur mécanique v .

21. Il suffit pour obtenir des termes homogènes à une puissance de multiplier l'équation (1) par $v = dx/dt$ et l'équation (2) par i :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} kx^2 \right) - \alpha v^2 + ilBv \quad (1')$$

$$ui = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) + vBl i \quad (2')$$

Le terme de couplage $(Bl)v$ présent dans les deux équations traduit simplement le bilan auxiliaire : $P_{Lapl.} + P_{fem} = 0$, avec $P_{Lapl.} = (ilB)v$ et $P_{fem} = -(vlB)i$

Son élimination entre les équations (1') et (2') conduit au bilan de puissance global :

$$ui = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} Li^2 \right) + Ri^2 + \alpha v^2 \quad (3)$$

ui est la puissance délivrée par le générateur (la sortie de l'amplificateur).

$E_r = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} Li^2$ est la somme des énergies cinétique, potentielle élastique et magnétique de l'ensemble bobine et membrane ; $P_1 = Ri^2$ est la puissance Joule et $P_2 = \alpha v^2$ est la puissance acoustique.

En moyenne temporelle pour un régime périodique $\frac{1}{T} \int_T \frac{dE_r}{dt} dt = 0$.

E_r est une énergie « récupérable » puisqu'en augmentant et en diminuant alternativement, la puissance dE_r/dt correspondante change de signe, alors que P_1 et P_2 sont toujours positives, d'où :

$$\langle ui \rangle = R \langle i^2 \rangle + \alpha \langle v^2 \rangle \quad (3')$$

La puissance moyenne fournie par l'amplificateur au haut-parleur est donc en partie perdue par effet Joule dans la résistance de la bobine et en partie transférée à l'air, c'est-à-dire rayonnée sous forme sonore, d'où le rendement :

$$\eta = \frac{\langle P_2 \rangle}{\langle ui \rangle} = \frac{\alpha \langle v^2 \rangle}{R \langle i^2 \rangle + \alpha \langle v^2 \rangle} \Rightarrow \eta = \frac{1}{1 + \frac{R \langle i^2 \rangle}{\alpha \langle v^2 \rangle}} < 1 \quad (4)$$

Pour un rendement η élevé, il faut évidemment R petit et α grand. L'étude du rapport $\langle i^2 \rangle / \langle v^2 \rangle$ est faite à la question 23.

Le champ \bar{B} n'intervient pas explicitement dans le bilan de puissance global (3) ; pourtant sa valeur n'est pas indifférente puisque c'est lui qui par le bilan auxiliaire $P_{Lapl.} + P_{fém} = 0$ réalise le couplage électromagnétique ($\bar{B} = \bar{0}$, c'est-à-dire un haut-parleur sans aimant, ne donne rien !). En fait il intervient de manière implicite dans le rapport $\langle i^2 \rangle / \langle v^2 \rangle$ dans η , car à i donné, v est d'autant plus important que B est grand.

22. Récrivons les équations (1) et (2) en gardant comme grandeurs complexes en $e^{j\omega t}$, la vitesse v et l'intensité i :

$$(1) \Rightarrow \left(m j \omega + \frac{k}{j \omega} + \alpha \right) v = B l i \quad \text{et} \quad (2) \Rightarrow u = (R + j L \omega) i + B l v$$

L'élimination de v entre ces deux équations conduit à l'impédance :

$$\underline{Z} = \frac{u}{i} = R + j L \omega + \frac{B^2 l^2}{\alpha + j m \omega + k / j \omega} \quad \text{qu'il est possible d'écrire} \quad \underline{Z} = \underline{Z}_e + \underline{Z}_{am}$$

avec $\underline{Z}_e = R + j L \omega$ l'impédance électrique de la bobine

$$\text{et} \quad \frac{1}{\underline{Z}_{am}} = \frac{\alpha}{B^2 l^2} + \frac{j m \omega}{B^2 l^2} + \frac{k}{j \omega B^2 l^2} \equiv \frac{1}{R'} + j C' \omega + \frac{1}{j L' \omega}$$

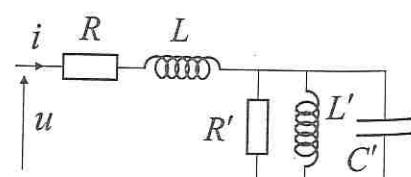
L'écriture précédente montre que l'impédance motionnelle \underline{Z}_{am} est constituée de trois composants électriques en parallèle.

Dans le schéma électrique équivalent :

$R' = \frac{B^2 l^2}{\alpha}$ représente la transmission acoustique à

l'air ; $L' = \frac{B^2 l^2}{k}$ représente le ressort et

$C' = \frac{m}{B^2 l^2}$ représente la masse. AN : $R' = 2,7 \Omega$; $L' = 0,37 \text{ mH}$; $C' = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ F}$



- diminuant
rs que P_i et
ic en partie
irée à l'air,
23. Rappelons que pour une fonction sinusoïdale $f : \langle f^2 \rangle = \frac{1}{2} |f|^2$

Ceci permet d'évaluer simplement dans l'expression (4) du rendement η , le rapport :

$$\frac{\langle i^2 \rangle}{\langle v^2 \rangle} = \frac{|i|^2}{|v|^2} = \left| \frac{i}{v} \right|^2 \text{ sachant que d'après (1) : } \frac{i}{v} = \frac{\alpha + j(m\omega - k/m)}{Bl}$$

d'où

$$\boxed{\eta = \frac{1}{1 + \frac{R}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 + (m\omega - k/m)^2}{B^2 l^2}}}$$

Notons que, comme prévu à la question 21., le rendement augmente lorsque B augmente ; il est maximal pour la pulsation libre d'oscillation du système :

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} ; \text{ alors } \eta_0 = \eta(\omega_0) = \frac{1}{1 + R/R'}$$

AN : $f_0 = 95,3 \text{ Hz}$ et $\eta_0 = 0,57 = 57\%$

Par définition des grandeurs efficaces : $P = Ri_{eff}^2 + rv_{eff}^2$

AN : $v_{eff} = 1,2 \text{ m.s}^{-1}$ et $x_{eff} = v_{eff}/2\pi f_0 = 1,9 \text{ mm}$ ce qui est visible.

AN : à $f = 300 \text{ Hz}$, $\eta = 1,2 \cdot 10^{-3} = 0,12\%$

Il s'agit donc clairement d'un haut-parleur basse fréquence ($f_0 \approx 100 \text{ Hz}$) avec un rendement très mauvais dès que l'on s'éloigne de la fréquence de résonance.

Applications directes du cours

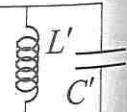
- en $e^{j\omega t}$, la
24. Ce résultat est vrai dans le cadre de l'ARQS, c'est-à-dire tant que la dimension du circuit reste petite devant la longueur d'onde du signal, ce qui dans les conditions habituelles permet de travailler jusqu'à des fréquences de l'ordre du MHz, fréquences non atteintes en TP (et donc en particulier pour la fréquence domestique de 50 Hz, dont la longueur d'onde est de 6 000 km !).

En revanche, si l'on imagine un conducteur de longueur 1 m et un signal de fréquence 300 MHz (onde hertzienne) dont la longueur d'onde est justement de 1 m, alors il est facile de comprendre que, si à un instant donné, le courant est nul en un point sur le conducteur, alors à ce même instant, il est maximal à 25 cm de ce point...

25. Oui, dans le cadre de l'ARQS dont c'est le sens même (rappelé à la question 1.), et donc pour tous les champs rencontrés en induction.

En revanche, le champ lointain ($r \gg \lambda$) rayonné par un dipôle variable en est un contre exemple, puisque obtenu en dehors de l'ARQS.

26. Le signe – dans la loi de Faraday traduit une loi de modération (la loi de Lenz) : la force électromotrice induite tend par ses conséquences à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance, à savoir la variation du flux magnétique à travers le circuit.



27. Le flux envoyé par C_1 à travers C_2 est $\Phi = \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$

$$\text{avec } \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2a_1} \sin^3 \alpha \vec{u}_z \text{ sur l'axe, champ créé par } C_1 \text{ supposé}$$

uniforme sur C_2 , et $\vec{S}_2 = \pi a_2^2 \vec{u}_z$ vu l'orientation choisie sur C_2

$$\text{d'où } \Phi(t) \approx \frac{\mu_0 i_1(t)}{2a_1} \sin^3 \alpha \cdot \pi a_2^2$$

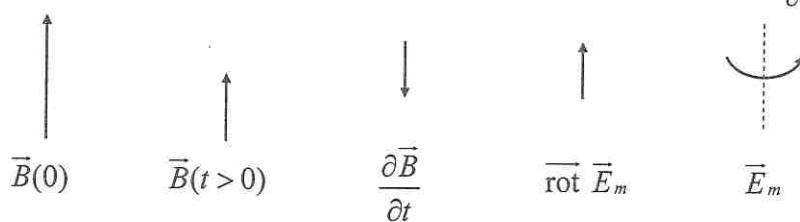
Ce flux est variable, la fem induite qui lui correspond est donnée

$$\text{par la loi de Faraday : } e_2 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\pi \mu_0 a_2^2}{2a_1} \sin^3 \alpha \cdot \frac{di_1}{dt}$$

On constate que lorsque i_1 croît, soit $\frac{di_1}{dt} > 0$ alors $e_2 < 0$ et donc le courant induit dans le circuit fermé est $i_2 < 0$ pour l'orientation choisie. Le champ \vec{B}_2 créé par i_2 en son centre est alors dirigé suivant $-\vec{u}_z$; il s'oppose donc bien à l'*augmentation* de \vec{B}_1 conformément à la loi de Lenz (attention, il est faux de dire que « \vec{B}_2 s'oppose à \vec{B}_1 », car la cause du phénomène d'induction n'est pas le champ \vec{B}_1 lui-même, mais bien sa variation!). On peut aussi évoquer la diminution du flux...

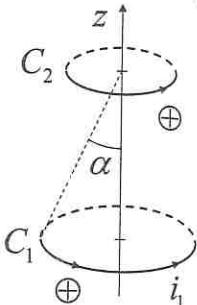
En réalité le flux total à travers C_2 est obtenu en rajoutant au flux précédent le flux propre ; le courant induit i_2 s'obtient alors en tenant compte de l'inductance propre du circuit C_2 , négligeable lorsque celui-ci n'est constitué que d'une seule spire...

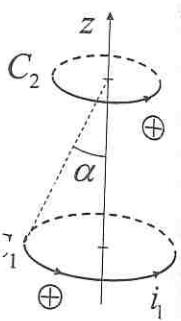
28. Après l'ouverture de l'interrupteur, la diminution progressive du courant $i(t)$ dans le solénoïde plonge le disque dans un champ $\vec{B}(t)$ variable. L'équation de Maxwell-Faraday (celle de l'induction de Neumann) conduit alors à la création d'un champ électromoteur $\vec{E}_m(t)$ donné par la séquence suivante à partir de $\text{rot } \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.



En effet la règle du tire-bouchon conduit à \vec{E}_m suivant \vec{u}_θ lorsque $\text{rot } \vec{E}_m$ est suivant \vec{u}_z . L'action de ce champ sur les charges électriques de la circonférence du disque initialement immobile ne peut entraîner un courant de conduction dans ce disque qui est isolant. Le disque avec les charges se met donc à tourner ; pour des charges positives, le sens de rotation est celui de \vec{E}_m , à savoir $\vec{\omega}$ suivant $+\vec{u}_z$.

Ce courant de convection crée alors un champ magnétique (*la conséquence*) suivant $+\vec{u}_z$ et qui s'oppose à la disparition du champ créé par le solénoïde (*la cause*) : la loi de Lenz est donc vérifiée (ici le champ induit est dans le même sens que $\vec{B}(t)$!).





1 courant induit

2 créé par i_2 en orientation de \vec{B}_2 s'oppose à lui-même, maisécèdent le flux
ance propre du
spire...nt $i(t)$ dans le
de Maxwell-
n d'un champ
 $= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. \vec{E}_m est suivant
ce du disque
ce disque qui
des chargesence) suivant
'ause) : la loi
 $\vec{B}(t)$!).

29. La force magnétique de Lorentz $q\vec{V} \wedge \vec{B}$ s'applique à une particule chargée en mouvement et à ce titre son travail est nul, le déplacement qui y intervient étant celui de la particule : $\delta W_{Lorentz} = (q\vec{V} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0$.

La force de Laplace $I\vec{l} \wedge \vec{B}$ s'exerce sur un élément de conducteur parcouru par un courant ; si la vitesse de l'élément est \vec{v} et son déplacement $\vec{v} dt$, le travail élémentaire est $\delta^2 W_{Laplace} = (I\vec{l} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt$, en général non nul.

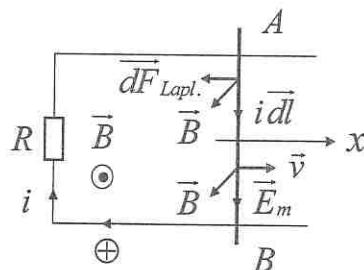
Le bilan auxiliaire de puissance $P_{Lapl.} + P_{fem} = 0$ ne concerne que les circuits mobiles dans un champ magnétique permanent (induction de type Lorentz) ; le second membre traduit la nullité de la puissance des forces magnétiques de Lorentz s'exerçant au niveau microscopique sur les charges en mouvement.

30. Les rails de Laplace

a) À $t = 0$, $i = 0$ et $v = v_0 > 0$.

* La tige mobile dans un champ magnétique est le siège d'une force électromotrice. Ici $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$ donne le sens de i ; on choisit l'orientation positive \oplus dans ce sens d'où la disposition de A et B (conformément aux notations de la question 7.). On calcule :

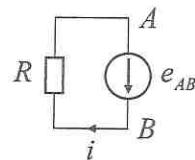
$$e_{AB} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = E_m l = vBl > 0$$



Rq : \vec{B} désigne ici le champ extérieur ; le champ propre, non permanent, est négligé (ce qui revient à ne pas tenir compte de l'inductance L du circuit).

Pour écrire la loi d'Ohm généralisée, on redessine le contour fermé où la fem est représentée par un générateur orienté de A vers B . Il apparaît immédiatement que $e_{AB} = Ri$, d'où l'équation électrique :

$$Ri = Blv \quad (2)$$



Rq : Il est également possible de passer par la loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$, où le flux de \vec{B} à travers le circuit se détermine par $\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$.

Là aussi il faut être attentif aux signes puisque, d'après l'orientation positive choisie, $d\vec{S}$ est vers l'arrière de la figure alors que \vec{B} est vers l'avant : le flux est donc négatif.

$$\Phi = \Phi_0 - Blx \quad \text{où } \Phi_0 = \Phi(t=0) \quad \text{soit } e = +Bl \frac{dx}{dt} = Blv > 0$$

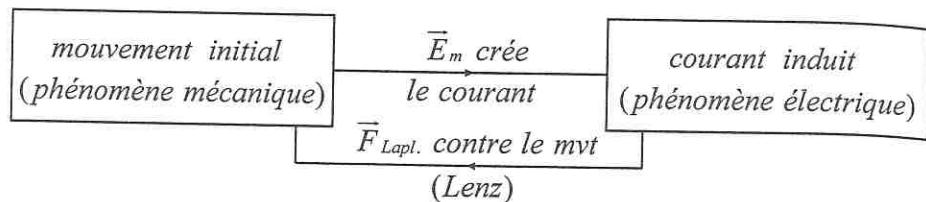
* Parcourue par un courant et placée dans un champ \vec{B} , la tige subit la force de Laplace, ici de freinage par courant induit comme l'indique la figure.

$$\vec{F}_{Lapl.} = \int i \vec{dl} \wedge \vec{B} = -ilB \vec{u}_x$$

car \vec{B} est uniforme et en ARQS, i est le même dans tout le circuit.
L'équation mécanique projetée sur Ox donne :

$$m \frac{dv}{dt} = -ilB \quad (2)$$

On peut illustrer la loi de Lenz sur le schéma suivant :



Les phénomènes électriques et mécaniques sont interdépendants, ce qui se traduit par le fait que les équations (1) et (2) sont couplées.

En y éliminant i , on a :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\tau} \Rightarrow v(t) = v_0 e^{-t/\tau} \quad \text{avec } \tau = \frac{mR}{B^2 l^2}$$

b) On multiplie l'équation électrique (1) par i : $Ri^2 = Blvi \quad (1')$

$$\text{Et l'équation mécanique (2) par } v : \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = -ilBv \quad (2')$$

Les seconds membres, égaux (au signe près) s'interprètent de la manière suivante :

– dans (1') : $Blvi = e_{AB} \cdot i = P_{fem}$ est la puissance de la force électromotrice

– dans (2') : $-ilBv = F_{Lapl.} \cdot v = P_{Lapl.}$ est la puissance de la force de Laplace.

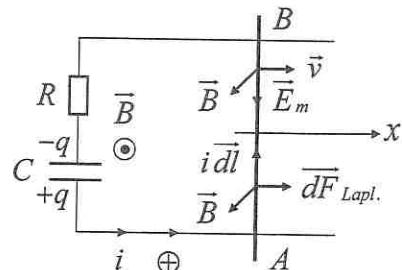
C'est donc bien le bilan auxiliaire : $P_{fem} + P_{Lapl.} = 0$ qui permet d'accéder au bilan global par (1') + (2') :

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = Ri^2 > 0$$

montrant que l'énergie cinétique cédée par la barre est dissipée par effet Joule dans la résistance.

31. Les rails de Laplace (bis)

- a) Choisissons de prendre l'armature positive du condensateur ($+q$) comme indiqué sur la figure ; à partir de $t=0$, ce dernier se décharge avec un courant i orienté de $+q$ vers $-q$; c'est le sens choisi pour l'orientation positive \oplus d'où $i = -\frac{dq}{dt} > 0$; il en résulte la position des points A et B pour le sens de circulation.



* La tige est soumise à une force de Laplace motrice (suivant \vec{u}_x), d'où l'équation mécanique :

$$m \frac{dv}{dt} = ilB \quad (1)$$

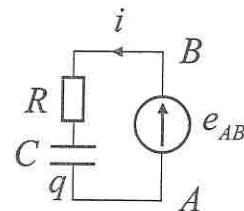
* La tige mobile dans \vec{B} est alors le siège d'une fem. On constate sur la figure que le champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$ s'oppose cette fois au passage du courant puisque orienté de B vers A .

$$e_{AB} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = -E_m l = -vBl < 0$$

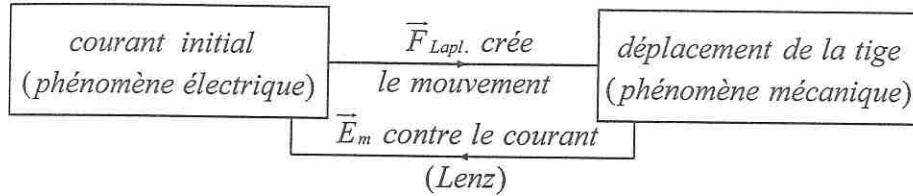
Rq : Ce système fonctionnant en moteur, il est courant de noter $e' = -e_{AB}$ et de parler de force contre-électromotrice.

La loi d'Ohm généralisée se réduit à une loi des mailles sur le circuit où e_{AB} , bien que négatif, est toujours orienté de A vers B :

$$e_{AB} = Ri - \frac{q}{C} \text{ soit } R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = Blv \quad (2)$$



La loi de Lenz s'illustre sur le schéma suivant :



b) Les équations (1) et (2) sont couplées :

$$(1) \times v : \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = ilBv \text{ avec } ilBv = \vec{F}_{Lapl.} \cdot \vec{v} = P_{Lapl.}$$

$$(2) \times i : -Ri^2 - \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2C} \right) = Blvi \text{ avec } Blvi = -e_{AB} \cdot i = -P_{fem}$$

Le bilan auxiliaire $P_{fem} + P_{Lapl.} = 0$ est toujours satisfait ; il permet d'accéder au bilan global :

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2C} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) + Ri^2 > 0$$

qui confirme que le condensateur est la source d'énergie dans le circuit ; son énergie electrostatique est transférée en énergie cinétique de la tige et en chaleur par effet Joule dans la résistance (c'est un exemple élémentaire de transducteur électromécanique).

c) L'équation (1) s'écrit : $m \frac{dv}{dt} = -lB \frac{dq}{dt}$; intégrée entre $t = 0$ et t , on en tire :

$$v = \frac{Bl}{m} (q_0 - q) \quad (1')$$

On reporte ce résultat dans l'équation (2) en posant $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} + \frac{B^2 l^2}{mR}$

its, ce qui se traduit

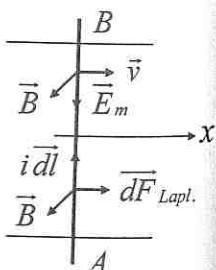
$\frac{R}{l^2}$

manière suivante :
'omotrice

à Laplace.

d'accéder au bilan

par effet Joule dans



), d'où l'équation

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = \frac{B^2 l^2}{mR} q_0 \text{ de solution générale } q(t) = K e^{-t/\tau} + \frac{B^2 l^2 \tau}{mR} q_0$$

La condition initiale $q(t=0) = q_0$ permet la détermination de la constante K :

$$q(t) = q_0 \left(1 - \frac{B^2 l^2 \tau}{mR} \right) e^{-t/\tau} + \frac{B^2 l^2 \tau}{mR} q_0 \quad \text{et donc } i = -\frac{dq}{dt} \text{ donne } i(t) = \frac{q_0}{RC} e^{-t/\tau}$$

Rq : Ce courant est plus faible que dans une décharge habituelle de circuit RC (soit $\frac{q_0}{RC} e^{-t/RC}$) car $\tau < RC$; en effet le champ électromoteur l'empêche d'être aussi important et retarde ainsi la décharge du condensateur.

$$\text{La vitesse s'obtient alors par (1') : } v(t) = \frac{q_0 Bl}{m} \frac{1 - e^{-t/\tau}}{1 + B^2 l^2 C / m}$$

Valeurs limites pour $t \rightarrow \infty$:

$$q_\infty = \frac{q_0}{1 + m/B^2 l^2 C} ; \quad i_\infty = 0 ; \quad v_\infty = \frac{q_0 / Bl}{1 + m/B^2 l^2 C}$$

La tige prend une vitesse constante parce que la force de Laplace tend vers zéro comme le courant. À cause du mouvement, l'induction subsiste, et $i_\infty = 0$ signifie que la fem est exactement opposée à la tension aux bornes du condensateur ; c'est ce qui explique que le condensateur ne se décharge pas complètement (on peut d'ailleurs vérifier que $q_\infty / C - v_\infty Bl = 0$).

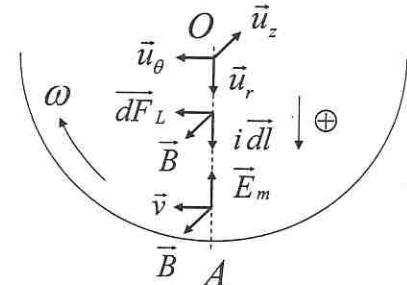
32. La roue de Barlow

a) Le disque est parcouru par un courant i dirigé de O vers A (pour simplifier, on le prend en ligne droite), donc positif d'après le sens d'orientation \oplus choisi.

Placé dans un champ magnétique \vec{B} comme indiqué sur la figure, un élément de conducteur $d\vec{l} = dr \vec{u}_r$ est soumis à la force de Laplace $d\vec{f}_L = id\vec{l} \wedge \vec{B}$ dirigée vers la gauche,

dont le moment par rapport à O entraîne le disque dans le sens des aiguilles d'une montre.

D'où le sens choisi pour \vec{u}_θ afin que la vitesse d'un point M tel que $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$, soit $\vec{v} = r\omega \vec{u}_\theta$; et par conséquent un vecteur \vec{u}_z vers l'arrière, soit $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$ avec $\omega > 0$. À noter qu'alors $\vec{B} = -B \vec{u}_z$ ($B > 0$).



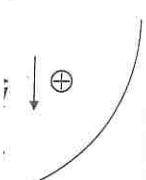
b) La force de Laplace élémentaire est $\overrightarrow{df}_L = id\vec{l} \wedge \vec{B} = idr \vec{u}_r \wedge (-B \vec{u}_z) = iBdr \vec{u}_\theta$, d'où le moment résultant en O :

$$\overrightarrow{M}_L^O = \int_O^A \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{df}_L = \int_0^a r \vec{u}_r \wedge iBdr \vec{u}_\theta = iB \int_0^a r dr \vec{u}_z$$

car en ARQS le courant i est le même en tout point et \vec{B} uniforme, d'où

$\tau = q_0$ ante K :

$$= \frac{q_0}{RC} e^{-t/\tau}$$

e circuit RC ur l'empêche
r.nd vers zéro
 $= 0$ signifie
sateur ; c'est
ent (on peut

uilles d'une

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

$$= \omega \vec{u}_z \text{ avec}$$

 $i dr \vec{u}_\theta$, d'où

$$\overrightarrow{M_L^O} = \frac{1}{2} i a^2 B \vec{u}_z$$

Le disque mobile dans le champ \vec{B} est alors en chacun de ses points le siège d'un champ électromoteur de type Lorentz :

$$\vec{E}_m(M) = \vec{v}(M) \wedge \vec{B} = r\omega \vec{u}_\theta \wedge (-B \vec{u}_z) = -r\omega B \vec{u}_r$$

s'opposant d'après la loi de Lenz, au passage du courant.

Il y correspond une force électromotrice e_{OA} négative :

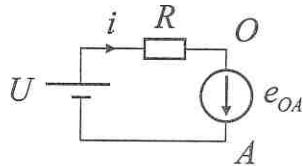
$$e_{OA} = \int_O^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_0^a -r\omega B \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r) \Rightarrow e_{OA} = -\frac{1}{2} \omega a^2 B$$

c) Le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe Oz appliqué au disque s'écrit :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} i a^2 B \quad (1)$$

Et la loi d'Ohm généralisée appliquée au circuit équivalent donne :

$$U = Ri + \frac{1}{2} \omega a^2 B \quad (2)$$



Par élimination de $i(t)$ entre les équations couplées (1) et (2), il vient :

$$\frac{1}{2} m a^2 \frac{d\omega}{dt} = \frac{a^2 B}{2R} \left(U - \frac{1}{2} \omega a^2 B \right) \text{ soit } \frac{2mR}{a^2 B^2} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{2U}{a^2 B}$$

équation du type $\tau \frac{d\omega}{dt} + \omega = \omega_l$ annoncé

$$\text{avec } \tau = \frac{2mR}{a^2 B^2} \text{ et } \omega_l = \frac{2U}{a^2 B}$$

montrant que τ est un temps caractéristique de l'évolution de $\omega(t)$ et ω_l la valeur limite atteinte au bout d'un temps long.

$$\text{La solution est : } \omega(t) = \omega_l \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$

d) Pour obtenir des grandeurs homogènes à une puissance, effectuons :

$$(1) \times \omega : \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \omega^2 \right) = \frac{1}{2} i a^2 B \omega \text{ avec } P_{Lapl.} = M_L^O \cdot \omega = \frac{1}{2} i a^2 B \omega$$

$$(2) \times i : U i = R i^2 + \frac{1}{2} \omega a^2 B i \text{ avec } P_{fem} = e_{OA} \cdot i = -\frac{1}{2} \omega a^2 B i$$

Par différence membre à membre, le bilan auxiliaire $P_{Lapl.} + P_{fem} = 0$ conduit au bilan global :

$$Ui = R i^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \omega^2 \right) > 0$$

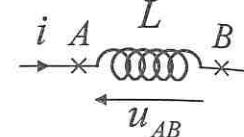
montrant que l'énergie cinétique de rotation du disque est acquise aux dépens de l'énergie fournie par le générateur ôtée de l'énergie dissipée dans la résistance par effet Joule.

33. En régime transitoire (i variable), un circuit immobile est placé dans un champ magnétique variable : son propre champ ; il est donc le siège d'une force électromotrice de type Neumann donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} \text{ puisque } \Phi = Li$$

En convention récepteur pour une bobine parfaite ($r = 0$), la loi d'Ohm généralisée s'écrit pour le dipôle AB :

$$u_{AB} = r_{AB} i - e = L \frac{di}{dt}$$



Résultat montrant que l'inductance L définie en induction est bien la même que celle définie en électrocinétique.

34. Rappelons que pour un solénoïde, $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$ et $\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 \frac{N}{l} I \vec{u}_z$.

$$\text{* par le flux : } \Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \left(\mu_0 \frac{N}{l} I \right) \cdot S = \mu_0 \frac{N^2}{l} S \cdot I \text{ du type } \Phi = LI$$

$$\text{* par l'énergie : } U_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot V = \frac{1}{2\mu_0} \left(\mu_0 \frac{N}{l} I \right)^2 \cdot Sl = \mu_0 \frac{N^2 S}{2l} I^2 \text{ du type } U_m = \frac{1}{2} L I^2$$

dans les deux cas :
$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$$

À noter qu'en doublant le nombre de spires, L n'est pas multipliée par 2, mais par 4.

AN : $L \approx 11 \text{ mH}$ ce qui est tout à fait le bon ordre de grandeur.

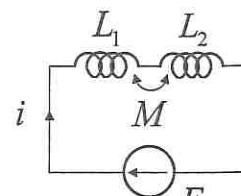
35. Pour un circuit inductif unique, l'expression de l'énergie magnétique est $U_m = Li^2/2$; cette énergie stockée dans la bobine interdit les discontinuités de courant (la discontinuité de i entraînerait celle de U_m conduisant à une puissance infinie, non physique). Remarquons que tout circuit électrique fermé forme une « boucle » et présente donc une inductance, même très faible.

36. Dans le montage en série, la loi des mailles donne :

$$E = -e_1 - e_2 = \left(L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} \right) + \left(L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} \right)$$

$$\text{soit } E = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}$$

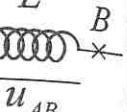
alors que pour une bobine unique, on aurait $E = L \frac{di}{dt}$



d'où l'inductance équivalente :
$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

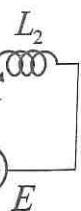
Si le branchement des bobines est tel que leurs champs \vec{B}_1 et \vec{B}_2 sont de même sens, alors les champs se renforcent, $M > 0$, et $L > L_1 + L_2$. Dans le cas contraire, les champs se contrarient, $M < 0$, et $L < L_1 + L_2$.

à un champ
source électro-

L

que celle

$$= \frac{1}{2} L I^2$$

ais par 4.



ême sens,
raire, les

En éloignant les deux bobines l'une de l'autre, le couplage diminue et rapidement l'inductance mutuelle M tend vers zéro ; alors la loi d'association des inductances s'identifie à celle des résistances.

37. Les lois des tensions s'écrivent dans le primaire et le secondaire :

$$u_1 = \gamma L_1 i_1 - e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = \gamma L_2 i_2 - e_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$\text{Par élimination de } \frac{di_1}{dt} : u_2 = \frac{M}{L_1} \left(u_1 - M \frac{di_2}{dt} \right) + L_2 \frac{di_2}{dt} = \frac{M}{L_1} u_1 + \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1} \frac{di_2}{dt}$$

$$\text{et toujours avec } M^2 = L_1 L_2 : u_2 = \pm \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} u_1, \text{ et comme } L_i \text{ proportionnel à } N_i^2,$$

$$\boxed{\frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \pm \frac{N_2}{N_1}}$$

soit $u_{\text{gen}} / u_{R_c} = \pm N_2 / N_1$, alors qu'en branchant directement la charge sur la source $u_{\text{gen}} / u_{R_c} = 1$. Ce résultat important permet de modifier l'amplitude de la tension variable délivrée par le générateur (en revanche sa fréquence est inchangée).

38. Un courant variable crée un champ magnétique variable (MA), qui lui crée un champ électrique non homogène (MF) venant se superposer à celui du générateur. Le phénomène est d'autant plus sensible que la fréquence est plus élevée. Globalement les lignes de courant, et donc de champ, restent parallèles entre elles, mais \vec{j} et \vec{E} ne sont plus uniformes sur une section du conducteur (voir les calculs à la question 67.).

Questions de réflexion ; physique pratique

39. C'est Michael Faraday qui, en 1831 (soit à peine une dizaine d'années après la théorie de la magnétostatique due à Ampère), comprend en approchant un aimant d'une bobine fermée sur elle-même, que ce n'est pas le champ magnétique lui-même qui crée le courant qu'il réussit à engendrer, mais *les variations* de ce champ.

Ces expériences fondamentales ont révolutionné la physique car pour la première fois un champ magnétique variable engendre un champ électrique ce qui entrouvre les portes de l'électromagnétisme. Mais elles sont également à l'origine d'un essor sans précédent des techniques et plus particulièrement du développement des machines électriques (générateurs, moteurs,...) mises au point progressivement au cours du XIX^e siècle après celui des machines à vapeur.

40. Eh bien, le spot lumineux du galvanomètre auquel est relié la bobine dévie de la même manière, prouve que le courant induit n'est fonction que du mouvement relatif des deux parties du système (c'est l'invariance par changement de référentiel galiléen). Si le résultat est le même, la manière de décrire les phénomènes diffère puisque dans le 1er cas il est décrit par une induction de type Neumann (question 64.) et dans le 2e cas par une induction de type Lorentz (question 63.).

60. Les moteurs électriques sont d'une facilité d'emploi surtout dans le cas de démarages fréquents (ils démarrent seuls et facilement) avec possibilité d'inversion du sens de rotation (sans dispositif annexe). Ils ont souvent un fort couple moteur à faible vitesse (et donc ne nécessitent ni embrayage ni boîte de vitesse) et un couple utile régulier. Ils ont un meilleur rendement, sont moins polluants et moins bruyants, mais sont aussi moins autonomes d'où leur moindre emploi dans les automobiles.

61. Le fluide conducteur est en mouvement dans le référentiel du laboratoire ; la loi d'Ohm s'écrit donc (voir la question 5.) : $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \sigma\vec{v} \wedge \vec{B}$ car $\vec{E} = \vec{0}$; cette densité de courant électrique est parallèle à Oy exactement comme pour les rails de Laplace (voir la question 30.) ; il s'agit d'un problème de magnétohydrodynamique.

ant (dit
au champ

i et B et
place qui
s indiqué
arbre un

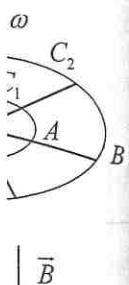
gonaux et
uence ω ,
x courants
t alors la
norme et

un cercle
 $e \pi/2$ et
en deux
me, sont

donc un
siège d'un
on avec le
ceptible de
ns avec ω
ossible car
onstant et
atif.

et
s

et



Exercices

62. Chute d'un cadre

- a) * Le conducteur mobile dans un champ permanent est le siège d'une fem de type Lorentz où le champ électromoteur vaut :

$$\vec{E}_m(z) = \vec{v} \wedge \vec{B}(z) = v \vec{u}_z \wedge \vec{B}(z) \vec{u}_y = -v \vec{B}(z) \vec{u}_x$$

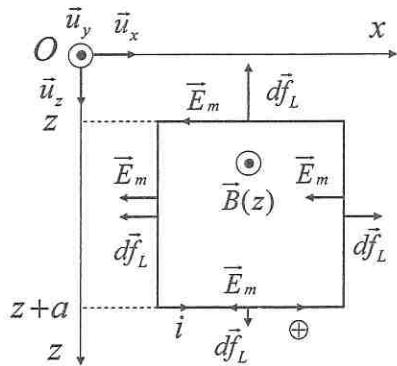
Le cadre étant rigide, tous les points ont même vitesse \vec{v} . En revanche, comme $\vec{B}(z)$, $\vec{E}_m(z)$ est un champ non uniforme, avec $|\vec{E}_m(z)| > |\vec{E}_m(z+a)|$. Il apparaît clairement sur la figure qu'il n'y a pas de fem générée dans les côtés verticaux (la circulation est nulle), et que sur les côtés horizontaux, c'est celui du haut qui impose le sens du courant à celui du bas, d'où globalement un courant induit dans le sens indiqué. Orientons alors le cadre dans le sens \oplus indiqué sur la figure afin que $i > 0$.

* Le cadre au cours de sa chute vers les z croissants, voit le champ $\vec{B}(z)$ diminuer en norme. D'après la loi de Lenz, il réagit donc en créant un champ propre qui, pour s'opposer à cette diminution de $\vec{B}(z)$, est dirigé dans le même sens que $\vec{B}(z)$; ceci est le cas pour un courant induit circulant dans le sens positif indiqué (en tournant le tire-bouchon dans ce sens, il avance de l'arrière vers l'avant). De manière équivalente, on peut dire aussi que le flux positif (car vu l'orientation \oplus , le vecteur surface, comme $\vec{B}(z)$, est dirigé suivant \vec{u}_y) diminue au cours de la chute, et donc d'après la loi de Faraday, $e > 0$ soit $i > 0$.

- b) * Par le champ électromoteur :

$$e = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = |\vec{E}_m(z)| \cdot a - |\vec{E}_m(z+a)| \cdot a = ba^2v \quad \text{puisque } |\vec{E}_m(z)| > v(B_0 - bz)$$

d'où le courant induit $i = \frac{e}{R}$ soit $i = \frac{a^2 b}{R} v$ positif comme prévu.



* Par le flux : $\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_z^{z+a} (B_0 - bz) adz = a^2 (B_0 - b(z + a/2))$

$$\text{d'où } e = -\frac{d\Phi}{dt} = +a^2 b v \text{ où } v = \dot{z}$$

ce qui redonne la même fem (négliger le flux propre du cadre revient à ne pas tenir compte de l'inductance L dans la loi d'Ohm).

- c) Les forces de Laplace sur les quatre côtés tendent globalement à faire éclater le cadre (voir la figure ci-dessus où $i d\vec{l}$ avec $i > 0$ est orienté dans le sens de parcours direct)

Les contributions sur les côtés verticaux s'annulent car \vec{B} ne dépend que de z . En revanche, pour les côtés horizontaux, la contribution du côté supérieur l'emporte sur celle du côté inférieur donnant une résultante vers le haut conformément à la loi de Lenz, le courant étant tel que la résultante de Laplace s'oppose au mouvement de chute du cadre. Globalement sur toute la longueur des côtés horizontaux :

$$\vec{f}_L = -ia(B_0 - bz)\vec{u}_z + -ia(B_0 - b(z + a))\vec{u}_z = -ia^2 b \vec{u}_z$$

Et avec l'expression du courant i :

$$\vec{f}_L = -\frac{a^4 b^2}{R} v \vec{u}_z$$

Sous la forme $\vec{f}_L = -\alpha \vec{v}$, la force de Laplace apparaît dans ce cas comme une force de frottement fluide.

- d) Avec l'hypothèse que le cadre reste dans le plan vertical, le théorème du centre de masse appliqué au cadre et projeté sur \vec{u}_z donne :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{a^4 b^2}{R} v \quad \text{du type} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g \quad \text{en ayant posé} \quad \tau = \frac{mR}{a^4 b^2}$$

ce qui avec la condition initiale $v(t=0) = 0$ conduit à :

$$v(t) = g\tau(1 - e^{-t/\tau})$$

AN : $\tau = 2,5 \text{ ms}$ et $v_i = g\tau = 2,5 \text{ cm.s}^{-1}$

Il résulte de cette application numérique que la vitesse limite v_i est atteinte presque instantanément, conduisant à un mouvement de chute rectiligne uniforme et lent, loin du mouvement uniformément accéléré, traditionnel, de la chute libre.

63. Courant induit dans une spire mobile (*)

- a) Les lignes de champ de l'aimant se referment du pôle Nord au pôle Sud ; au niveau de la spire, la projection du champ sur l'axe est donc suivant Oz^+ . Le sens du vecteur surface de la spire est également suivant Oz^+ par application de la règle du tire-bouchon dans le sens positif indiqué sur la figure. Il en résulte que le flux envoyé par l'aimant à travers la spire est positif, et que dans le mouvement d'approche, ce flux augmente puisque le champ de l'aimant s'intensifie près des pôles. D'après la loi de Lenz, la spire réagit par la création d'un flux propre qui s'oppose à l'augmentation du flux extérieur ; ceci est le cas pour un courant induit

$i < 0$ (de sens opposé à l'orientation choisie) auquel correspond un champ propre dirigé suivant Oz^- , et donc à flux négatif.

* En éloignant la spire, le flux reste positif mais diminue ; pour s'opposer à cette variation, le flux propre doit être positif, d'où $i > 0$.

* En approchant la spire du côté du pôle Sud de l'aimant (après avoir retourné ce dernier), le flux est négatif et diminue (il augmente en valeur absolue) ; pour s'opposer à cette variation, le flux propre doit être positif, d'où $i > 0$.

Dans les deux cas, le sens du courant induit est donc modifié.

b) Le champ électromoteur (de Lorentz ici) en chaque point de la spire est :

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = -v \vec{u}_z \wedge (B_r \vec{u}_r + B_\theta \vec{u}_\theta) = -v(B_r \sin \theta + B_\theta \cos \theta) \vec{u}_\phi$$

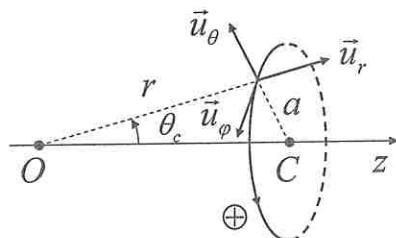
où les produits vectoriels se devinent sur la figure (écrire $\vec{u}_z = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$ à défaut) et où B_r et B_θ sont les composantes en coordonnées sphériques du champ de l'aimant au niveau de la spire :

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathfrak{M} \cos \theta_c}{r^3} \text{ et } B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathfrak{M} \sin \theta_c}{r^3}$$

$$\text{d'où } \vec{E}_m = -\frac{3\mu_0 \mathfrak{M} v}{4\pi r^3} \sin \theta_c \cos \theta_c \vec{u}_\phi$$

$$\text{et avec } \sin \theta_c = \frac{a}{r} \text{ et } \cos \theta_c = \frac{z}{r},$$

$$\boxed{\vec{E}_m = -\frac{3\mu_0 \mathfrak{M} v a z}{4\pi r^5} \vec{u}_\phi}$$



c) La fem s'obtient par circulation de \vec{E}_m , avec $d\vec{l} = dl \vec{u}_\phi$:

$$e = \oint_{(C)} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = E_m \cdot 2\pi a = -\frac{3\mu_0 \mathfrak{M} v a^2 z}{2r^5}$$

$$\text{d'où le courant induit donné par la loi d'Ohm } i = \frac{e}{R} \text{ soit }$$

$$\boxed{i(t) = -\frac{3\mu_0 \mathfrak{M} v a^2 z(t)}{2R(a^2 + z^2(t))^{5/2}}}$$

Ce courant est négatif comme prévu puisque $z = \overline{OC} > 0$; il change bien de signe lorsque v ou \mathfrak{M} changent de signe.

Il est maximal lorsque $\frac{di}{dz} = 0$, soit dans ce cas pour $\boxed{z = a/2}$

d) La spire circulaire créée en un point M d'abscisse z_M à partir duquel elle est vue sous un demi-angle θ_M , un champ induit :

$$\vec{B}_i(M) = \frac{\mu_0 i}{2a} \sin^3 \theta_M \vec{u}_z = \frac{\mu_0 i a^2}{2(a^2 + (z - z_M)^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

soit avec l'expression précédente de i :

$$\vec{B}_i(M) = -\frac{3\mu_0^2 \mathfrak{M} v a^4 z}{4R(a^2 + z^2)^{5/2} (a^2 + (z - z_M)^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{B}_i}{\partial z_M} = -\frac{9\mu_0^2 \mathfrak{M} v a^4 z(z - z_M)}{4R(a^2 + z^2)^{5/2} (a^2 + (z - z_M)^2)^{5/2}} \vec{u}_z$$

Ce champ inhomogène (et qui tend à désaimanter l'aimant) soumet le dipôle en $z_M = z_O = 0$ à la force :

$$\boxed{F_z = \bar{\mathfrak{M}} \cdot \frac{\partial \vec{B}_i}{\partial z_M} \Big|_{z_M=0} = -\frac{9\mu_0^2 \mathfrak{M}^2 v a^4}{4R} \cdot \frac{z^2}{(a^2 + z^2)^5}}$$

Dans ce calcul il importe de bien d'abord dériver par rapport à z_M puis faire $z_M = 0$, et non l'inverse.

Cette projection F_z est négative comme on s'y attendait par la loi de Lenz : la spire par son mouvement d'approche a tendance à repousser l'aimant. L'opérateur doit exercer une force opposée pour maintenir l'aimant immobile en O .

64. Courant induit par un aimant mobile (*)

- a) Il est tout à fait possible de reproduire le raisonnement sur le flux développé à l'exercice précédent. On peut également l'appuyer, pour changer, sur le champ magnétique.

Dans le référentiel d'étude, la spire fixe est placée dans le champ \vec{B} de l'aimant, variable à cause de son mouvement (induction de type Neumann ici). Lorsque l'aimant A se rapproche de O , la norme $|\vec{B}|$ de son champ au niveau de la spire augmente (\vec{B} est dans le sens de \vec{u}_z) ; le circuit réagit conformément à la loi de Lenz contre cette augmentation par un champ induit \vec{B}_i opposé à $d\vec{B}/dt$, donc suivant $-\vec{u}_z$. Ce qui suppose la création d'un courant induit $i < 0$ (de sens opposé à l'orientation choisie).

Ici aussi, le sens du courant induit est modifié si au lieu d'approcher l'aimant de la spire, on le retire, ou si on approche l'aimant de la spire après l'avoir retourné.

- b) Le champ électromoteur de Neumann est $\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Le potentiel vecteur \vec{A} créé par le moment magnétique au niveau de la spire est donné en utilisant les mêmes notations que sur la figure de l'exercice précédent :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\bar{\mathfrak{M}} \wedge \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\bar{\mathfrak{M}} \sin \theta_c}{r^2} \vec{u}_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\bar{\mathfrak{M}} a}{(a^2 + z^2(t))^{3/2}} \vec{u}_\varphi$$

$$\text{soit } \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \cdot v \Rightarrow \boxed{\vec{E}_m = +\frac{3\mu_0}{4\pi} \frac{\bar{\mathfrak{M}} a z v}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \vec{u}_\varphi}$$

où v est la projection de la vitesse de l'aimant sur l'axe Oz .

- c) Ce champ électromoteur est colinéaire à $d\vec{l} = dl \vec{u}_\varphi$ et de norme constante sur la spire ; sa circulation est :

$$e = \oint_{(C)} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = E_m \cdot 2\pi a = \frac{3\mu_0 \bar{\mathfrak{M}} a^2 z v}{2(a^2 + z^2)^{5/2}}$$

d'où le courant induit donné par la loi d'Ohm $i = \frac{e}{R}$ soit

$$i(t) = \frac{3\mu_0 \mathfrak{M} a^2 v z(t)}{2R(a^2 + z^2(t))^{5/2}}$$

À noter que ce courant est bien négatif comme prévu puisque $z = \overline{OA} < 0$; il change bien de signe lorsque v ou \mathfrak{M} changent de signe.

Il est maximal lorsque $\frac{di}{dz} = 0$, soit dans ce cas pour $z = -a/2$

Ces résultats sont identiques à ceux obtenus à l'exercice précédent ; en fait seul compte le mouvement relatif de l'inducteur et de l'induit, identique dans les deux cas.

Rq : Pour établir l'expression de la fem, on pouvait aussi calculer le flux envoyé par l'aimant à travers la spire, puis appliquer la loi de Faraday.

d) L'élément de spire $d\vec{l}$ parcouru par le courant i et placé dans le champ \vec{B} de l'aimant subit la force de Laplace élémentaire :

$$d\vec{f}_L = i d\vec{l} \wedge \vec{B} = idl \vec{u}_\varphi \wedge (B_r \vec{u}_r + B_\theta \vec{u}_\theta) = idl (B_r \vec{u}_\theta - B_\theta \vec{u}_r)$$

et en projection sur l'axe Oz avec $B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathfrak{M} \cos \theta_c}{r^3}$ et $B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathfrak{M} \sin \theta_c}{r^3}$:

$$d\vec{f}_L \cdot \vec{u}_z = idl (-B_r \sin \theta_c - B_\theta \cos \theta_c) = idl \left(\frac{\mu_0 \mathfrak{M}}{4\pi r^3} \right) (-3 \cos \theta_c \sin \theta_c)$$

d'où la résultante, et avec $\sin \theta_c = \frac{z}{r}$ et $\cos \theta_c = -\frac{x}{r} > 0$: $f_{Lz} = i 2\pi a \frac{3\mu_0 \mathfrak{M} z}{4\pi r^5}$

En remplaçant i par son expression précédente, il vient : $\vec{f}_L = \frac{9\mu_0^2 \mathfrak{M}^2 a^4 v z^2}{4R(a^2 + z^2)^5} \vec{u}_z$

Cette force qu'exerce l'aimant sur la spire a une projection positive ; la spire, si elle était libre, aurait tendance à fuir l'aimant (loi de Lenz). Elle est évidemment l'opposée de la spire sur l'aimant calculé à la question d) de l'exercice précédent.

65. Deux roues de Barlow couplées

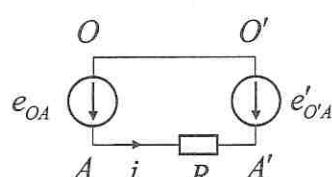
a) Le disque (D) tournant dans le champ \vec{B} est le siège d'un champ électromoteur $\vec{E}_m(M) = \vec{v}(M) \wedge \vec{B} = r\omega \vec{u}_\theta \wedge B \vec{u}_z = r\omega B \vec{u}_r$ dirigé de O vers A , et qui détermine le sens $OAA'O'$ du courant induit $i(t)$. Prenons ce sens comme sens positif \oplus afin que $i(t) > 0$. La circulation du courant $i(t)$ dans le disque (D') de A' vers O' provoque par l'intermédiaire du moment de la force de Laplace, sa rotation $\omega' \vec{u}_z$ dans le même sens que $\omega \vec{u}_z$.

b) Dans le disque (D), la fem est : $e_{OA} = \int_O^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \omega a^2 B$

Avec $\bar{\omega}$ et $\bar{\omega}'$ de même sens, sans refaire de

calcul : $e'_{O'A'} = \frac{1}{2} \omega' a^2 B$

Cette dernière intégration ne s'étant pas faite dans



le sens positif de circulation $A'O'$, le schéma électrique équivalent ci-contre en tient compte par l'orientation des fem, d'où l'équation électrique : $e_{OA}(t) - e'_{O'A'}(t) = Ri(t)$

$$\text{soit } \frac{1}{2}a^2B(\omega(t) - \omega'(t)) = Ri(t) \quad (1)$$

Pour le disque (D), le moment des forces de Laplace est d'après la loi de Lenz un moment de freinage (s'en convaincre par le sens de $\vec{df}_L = i\vec{dl} \wedge \vec{B}$) ; son calcul donne : $\vec{M}_L^o = -\frac{1}{2}ia^2B\vec{u}_z$

Pour le disque (D'), le moment des forces de Laplace est cette fois moteur (s'en convaincre par le sens de $\vec{df}_L = i\vec{dl} \wedge \vec{B}$) ; son expression est : $\vec{M}_L^{o'} = \frac{1}{2}ia^2B\vec{u}_z$

Les théorèmes du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe pour (D) et (D'), en l'absence de frottement et des moments des poids et des réactions d'axe nuls, s'écrivent :

$$J \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{2}a^2Bi(t) \quad (2) \quad \text{et} \quad J \frac{d\omega'}{dt} = \frac{1}{2}a^2Bi(t) \quad (2')$$

c) Dérivons l'équation (1) par rapport au temps pour y substituer $d\omega/dt$ et $d\omega'/dt$ issus de (2) et (2') avec $J = ma^2/2$:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{i}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{mR}{a^2B^2} \quad \text{conduit à} \quad i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$$

où le courant initial i_0 est donné par l'équation (1) en $t = 0$: $i_0 = \frac{a^2\omega_0 B}{2R}$

$$\text{Alors (2)} \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = -\frac{B}{m}i(t) = -\frac{\omega_0}{2\tau}e^{-t/\tau} \Rightarrow \omega(t) = \frac{\omega_0}{2}(1 + e^{-t/\tau}) \quad \text{avec} \quad \omega(0) = \omega_0$$

$$\text{et (2')} \Rightarrow \frac{d\omega'}{dt} = \frac{B}{m}i(t) = \frac{\omega_0}{2\tau}e^{-t/\tau} \Rightarrow \omega'(t) = \frac{\omega_0}{2}(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{pour que} \quad \omega'(0) = 0$$

Notons que $\omega(t) + \omega'(t) = \omega_0$, $\forall t$, traduisant la conservation du moment cinétique du système total $(D) \cup (D')$ comme l'indique la somme membre à membre des équations (2) et (2').

d) Le bilan de puissance s'obtient comme d'habitude :

$$(1) \times i \Rightarrow \frac{1}{2}a^2B\omega i - \frac{1}{2}a^2B\omega'i = Ri^2$$

$$(2) \times \omega \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right) = -\frac{1}{2}a^2Bi\omega \quad \text{et} \quad (2') \times \omega \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\omega'^2\right) = \frac{1}{2}a^2Bi\omega'$$

d'où par élimination des termes de couplage ωi et $\omega'i$ (les bilans auxiliaires) :

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\omega'^2\right) + Ri^2 > 0$$

L'énergie cinétique cédée par le disque (D) n'est pas entièrement récupérée par le disque (D') puisqu'une partie est perdue par effet Joule dans la résistance.

66. La dynamo-disque homopolaire

- a) Bien que le courant I suive toujours dans le disque le rayon HK qui reste fixe dans l'espace, ce disque étant tournant et placé dans le champ magnétique \vec{B} de la spire admet en chacun de ses points un champ électromoteur de type Lorentz $\vec{E}_m(M) = \vec{v}(M) \wedge \vec{B}(M)$; il est donc le siège d'une force électromotrice e_{HK} .

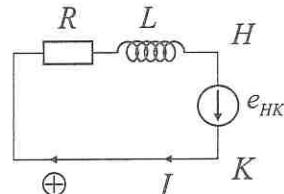
$$\vec{E}_m(M) = r\omega \vec{u}_\theta \wedge (B_z \vec{u}_z + B_r \vec{u}_r) = r\omega B_z \vec{u}_r - r\omega B_r \vec{u}_z$$

Le champ radial B_r , source d'un champ électromoteur axial orthogonal à $d\vec{l} = dr \vec{u}_r$ ne contribue pas à e_{HK} :

$$e_{HK} = \int_H^K \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_0^a r\omega B_z dr = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^a B_z(r) 2\pi r dr = \frac{\omega}{2\pi} MI \quad \text{d'après l'énoncé}$$

Le circuit équivalent permet d'écrire facilement la loi d'Ohm généralisée :

$$e_{HK} = RI + L \frac{dI}{dt} \quad \text{soit} \quad RI + L \frac{dI}{dt} - \frac{\omega}{2\pi} MI = 0 \quad (1)$$



- b) La force de Laplace sur un élément de rayon du disque est :

$$d\vec{f}_L = i d\vec{l} \wedge \vec{B} = Idr \vec{u}_r \wedge (B_z \vec{u}_z + B_r \vec{u}_r) = -IB_z dr \vec{u}_\theta$$

dont le moment par rapport à l'axe s'oppose à la rotation initiale du disque, comme le prévoit la loi de Lenz :

$$\vec{\Gamma}_L = \int_H^K \vec{r} \wedge d\vec{f}_L = \int_0^a r \vec{u}_r \wedge (-IB_z dr \vec{u}_\theta) = -\frac{I}{2\pi} \vec{u}_z \int_0^a B_z(r) 2\pi r dr = -\frac{M}{2\pi} I^2 \vec{u}_z$$

À noter que ce freinage par induction est un phénomène non linéaire puisque le disque est plongé dans un champ \vec{B} proportionnel au courant induit I lui-même, ce qui rend plus difficile la résolution des équations.

Le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe appliqué au disque, par ailleurs soumis à un couple mécanique moteur $\Gamma \vec{u}_z$ donne :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma - \frac{M}{2\pi} I^2 \quad (2)$$

c) (1) $\times I \Rightarrow RI^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 \right) = \frac{\omega}{2\pi} MI^2$ et (2) $\times \omega \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J\omega^2 \right) - \Gamma\omega = -\frac{M}{2\pi} I^2 \omega$

Dans ces équations, les seconds membres représentent respectivement les puissances $e_{HK}I = P_{fém}$ et $\Gamma_L\omega = P_{Lapl}$. Leur somme membre à membre par le bilan auxiliaire $P_{fém} + P_{Lapl} = 0$ conduit au bilan global :

$$\Gamma\omega = RI^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J\omega^2 + \frac{1}{2} LI^2 \right)$$

Pour un régime périodique de période T , la moyenne du terme dérivé est nulle :

$$\frac{1}{T} \int_T \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J\omega^2 + \frac{1}{2} L I^2 \right) dt = 0$$

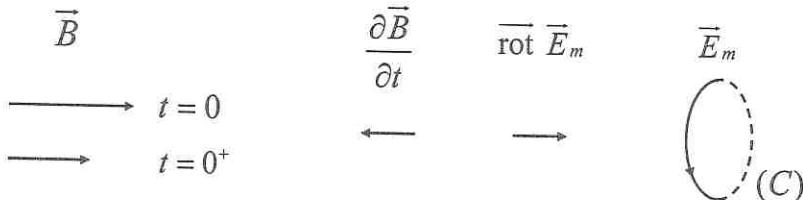
l'énergie prise étant restituée. Il reste alors : $\langle \Gamma \omega \rangle = \langle RI^2 \rangle$

Le dispositif représente par exemple une dynamo de bicyclette. Le travail moteur Γ fourni à l'axe et qui assure le maintien de la rotation de la roue par contact avec frottement contre le pneu est entièrement dissipé par effet Joule dans la résistance du circuit, en l'occurrence pour alimenter le phare de la bicyclette.

- d) Ce modèle simple permet en partie d'interpréter l'origine du champ magnétique terrestre. Le noyau solide de la Terre est le siège d'une radioactivité naturelle dont l'énergie dégagée permet au fer d'une couronne concentrique d'être à l'état liquide. Il est alors possible que le courant électrique et le champ magnétique apparaissent spontanément dans cette couche de fluide conducteur et s'auto-entretiennent par des phénomènes d'induction et d'inertie liée à la rotation de la Terre ; en fait le courant est à l'origine du champ et l'action du champ sur le conducteur en mouvement crée le courant.

67. Chauffage par induction

- a) * Faisons référence directement à l'équation de Maxwell-Faraday : $\operatorname{rot} \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$



Le théorème de Stokes appliqué à $\vec{E}_m = E_m \vec{u}_\theta$ sur un contour circulaire (C) d'axe Oz , de rayon r et orienté suivant $+\vec{u}_\theta$, soit $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$ donne :

$$\oint_{(C)} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = 2\pi r E_m = \iint_{(S)} \operatorname{rot} \vec{E}_m \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = B_0 \omega \sin \omega t \pi r^2$$

d'où $\boxed{\vec{E}_m = \frac{1}{2} B_0 r \omega \sin \omega t \vec{u}_\theta}$

* Autre méthode. Le champ \vec{B}_s créé par le solénoïde est pris uniforme dans le conducteur ; il y correspond donc un potentiel vecteur variable donné par l'expression (voir la question 35. du chapitre 2) en coordonnées cylindriques :

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B}_s \wedge \vec{r} = \frac{1}{2} B_0 r \cos \omega t \vec{u}_\theta$$

Ce potentiel variable dans le temps est source d'un champ électromoteur induit de type Neumann donné par :

é est nulle :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{2} B_0 r \omega \sin \omega t \vec{u}_\theta$$

où r et \vec{u}_θ ne sont évidemment pas concernés par la dérivation.

Ce champ électrique orthoradial crée dans le conducteur un courant induit tournant dont la densité volumique est donnée par la loi d'Ohm :

$$\vec{j}(r, t) = \sigma \vec{E}_m = \frac{1}{2} \sigma B_0 r \omega \sin \omega t \vec{u}_\theta$$

b) La puissance volumique cédée par le champ à la matière conductrice est :

$$\frac{dP}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{E}_m = \sigma \vec{E}_m^2 = \frac{\vec{j}^2}{\sigma} \text{ d'où en moyenne temporelle } \frac{\langle dP \rangle}{d\tau} = \frac{1}{8} \sigma B_0^2 \omega^2 r^2$$

Cette puissance volumique est inhomogène et il apparaît que l'effet Joule est beaucoup plus important près de la surface $r = a$ du conducteur qu'au centre $r = 0$ où il est nul.

Sur l'ensemble du conducteur :

$$\langle dP \rangle = \int_0^a \frac{1}{8} \sigma B_0^2 \omega^2 r^2 \cdot 2\pi r dr L \Rightarrow \langle P \rangle = \frac{\pi}{16} \sigma B_0^2 \omega^2 a^4 L$$

Dans ce dispositif, l'échauffement est recherché puisqu'il s'agit d'obtenir la fusion de barres métalliques d'où son nom de four à induction. À noter que la puissance dissipée est en ω^2 (voir à ce sujet la question 50. sur les plaques à induction).

c) En négligeant les effets de bord (ce qui revient à prendre un cylindre infiniment long), tout plan perpendiculaire à l'axe Oz est plan de symétrie pour les courants induits, et donc \vec{B}_i lui est perpendiculaire. L'invariance par rotation autour de l'axe conduit à chercher \vec{B}_i sous la forme $\vec{B}_i = B_i(r, t) \vec{u}_z$.

Notons qu'à la surface du conducteur $B_i(r = a) = 0$ par continuité de la composante tangentielle en l'absence de courant surfacique ; en effet, à l'extérieur du conducteur (comme à l'extérieur d'un solénoïde), le champ est nul.

L'équation de Maxwell-Ampère en ARQS, $\vec{\text{rot}} \vec{B}_i = \mu_0 \vec{j}$ (car $\vec{\text{rot}} \vec{B}_s = \vec{0}$) conduit à calculer :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B}_i = \vec{\text{rot}} (B_i \vec{u}_z) = B_i \vec{\text{rot}} \vec{u}_z + \vec{\text{grad}} B_i \wedge \vec{u}_z = \vec{0} + \frac{\partial B_i}{\partial r} \vec{u}_r \wedge \vec{u}_z = -\frac{\partial B_i}{\partial r} \vec{u}_\theta$$

d'où par identification et intégration de r à $r = a$:

$$-\frac{\partial B_i}{\partial r} = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma B_0 r \omega \sin \omega t \Rightarrow \vec{B}_i = \frac{1}{4} \mu_0 \sigma B_0 \omega (a^2 - r^2) \sin \omega t \vec{u}_z$$

d) \vec{B}_i est en quadrature avec \vec{B}_s ; l'hypothèse $|\vec{B}_i| \ll |\vec{B}_s|$ conduit pour les amplitudes maximales à :

$$\frac{1}{4} \mu_0 \sigma B_0 \omega a^2 \ll B_0 \text{ soit } a \ll a_i = \frac{2}{\sqrt{\mu_0 \sigma \omega}} = 1,4 \text{ cm}$$

Il apparaît donc que pour a de l'ordre du décimètre les phénomènes d'induction sont prépondérants, mais le champ $\vec{B}_s(t) + \vec{B}_i(r,t)$, inhomogène, n'est pas le champ total ; en effet, $\vec{B}_i(r,t)$, à son tour, puisque variable, engendre par l'intermédiaire d'un nouveau champ électromoteur, un nouveau courant induit, d'où encore un champ magnétique variable supplémentaire et ainsi de suite. Les courants induits, d'après la loi de Lenz, s'opposent à la cause qui leur a donné naissance. Cela a pour conséquence d'empêcher le champ \vec{B}_s du solénoïde de rentrer dans le conducteur, ou du moins de le réduire en son sein en le cantonnant à la surface et ceci de manière d'autant plus efficace que la fréquence est élevée. Nous retrouvons ainsi la description de l'effet de peau à laquelle aboutit la question e).

À noter que déjà $a_i = \sqrt{2/\mu_0 \sigma \omega}$ où $\delta = \sqrt{2/\mu_0 \sigma \omega}$ est l'épaisseur de peau et qu'on n'a pas intérêt à trop augmenter la fréquence car dès que $\delta \ll a$, le chauffage du conducteur se limite à sa surface.

- e) Le calcul de $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{\text{div}} \vec{B} - \Delta \vec{B}$ à partir des équations de Maxwell et de $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ conduit à l'équation de diffusion classique :

$$\boxed{\Delta \vec{B} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}}$$

dont la solution approchée en coordonnées cylindriques est étudiée à la question 68. : $\vec{B} = B_0 e^{-u/\delta} \cos(\omega t - u/\delta) \vec{u}_z$, en ayant posé $u = a - r$ (profondeur mesurée à partir de la surface) et où $\delta = \sqrt{2/\mu_0 \sigma \omega}$ est l'épaisseur de peau. On retrouve bien $\vec{B}(r=a) = B_0 \cos \omega t \vec{u}_z$ le champ du solénoïde.

68. Effet de peau sur un conducteur cylindrique

- a) L'équation du champ $\Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ s'écrit en projection sur l'axe Oz :

$$\frac{d^2 \underline{E}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \underline{E}}{dr} = i \mu_0 \sigma \omega \underline{E}$$

Avec la solution proposée : $\underline{E} = E_0 \exp[-(1+i)(a-r)/\delta]$,

$$\text{on a } \frac{d \underline{E}}{dr} = \frac{1+i}{\delta} \underline{E} \text{ et } \frac{d^2 \underline{E}}{dr^2} = \frac{2i}{\delta^2} \underline{E}, \text{ soit } \frac{2i}{\delta^2} \left(1 + \frac{1-i}{2} \cdot \frac{\delta}{r}\right) \underline{E} = i \mu_0 \sigma \omega \underline{E}$$

qui admet comme solution pour $r \gg \delta$: $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu_0 \sigma f}}}$

b) Le champ électrique s'écrit alors : $\vec{E} = E_0 e^{-(a-r)/\delta} \exp i(\omega t - (a-r)/\delta) \vec{u}_z$, ce qui correspond à un champ polarisé suivant \vec{u}_z et se propageant radialement avec une amplitude qui décroît vers l'intérieur du conducteur (champ non uniforme).

L'amplitude réelle du champ est :

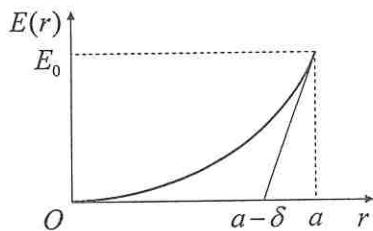
$$E(r) = E_0 e^{-(a-r)/\delta}$$

Courant et champ sont essentiellement localisés dans une épaisseur δ comptée à partir de la surface (entre $a-\delta$ et a) et sont très faibles au centre.

AN : * pour $f = 50 \text{ Hz}$, $\delta = 9,3 \text{ mm} \gg a = 0,5 \text{ mm}$ ce qui ne correspond pas au cas précédemment décrit ($r \gg \delta$) ; la fréquence est trop faible et tout se passe comme pour $f = 0$: champ et courant sont uniformes sur toute la section du fil.

* pour $f = 100 \text{ kHz}$, $\delta = 0,2 \text{ mm}$ du même ordre de grandeur que a , ce qui fixe la limite de l'uniformité.

* pour $f = 100 \text{ MHz}$, $\delta = 6,6 \mu\text{m} \ll a$; le courant circule alors sur une très faible épaisseur du conducteur, « l'épaisseur de peau », ce qui augmente considérablement la résistance du fil et rend la propagation très atténuée le long de l'axe ; les fréquences hertziennes sont transmises dans l'air et pas dans les conducteurs.



c) La puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule est donnée par :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{j} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{2} \sigma |\vec{E}|^2 \text{ puisque } \vec{j} = \sigma \vec{E} \text{ avec } \sigma \text{ réel}$$

Et puisque $\vec{E} = E_0 e^{-(a-r)/\delta} \exp i\varphi \vec{u}_z$ avec $\varphi(t)$ réel, il vient :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2} \sigma E_0^2 e^{-2(a-r)/\delta}$$

grandeur inhomogène essentiellement non nulle près de la surface $r = a$ sur une épaisseur de l'ordre de δ .

Avec un élément de volume $d\tau = 2\pi r dr l$, l'intégrale sur le tronçon de conducteur s'écrit :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \sigma E_0^2 2\pi l e^{-2a/\delta} \int_0^a e^{2r/\delta} r dr$$

L'intégrale se calcule par parties et vaut $\frac{a\delta}{2} e^{2a/\delta} - \frac{\delta^2}{4} (e^{2a/\delta} - 1)$

et en négligeant le second terme devant le premier puisque $\delta \ll a$,

$$\boxed{\langle P \rangle \approx \frac{1}{2} \sigma E_0^2 \pi a \delta l}$$

L'élément de volume écrit sous la forme $2\pi a (\delta/2) l$ indique que tout se passe si le champ et la densité de courant étaient uniformes sur un anneau de rayon a et d'épaisseur $\delta/2$, confirmant la notion d'épaisseur de peau.

Pour accéder à la résistance, évaluons d'abord le courant :

$$I(t) = \iint_{(S)} \vec{j}(r,t) \cdot d\vec{S} = \sigma E_0 e^{-a/\delta} \cos \varphi(t) \cdot 2\pi \int_0^a e^{r/\delta} r dr$$

Comme précédemment, la valeur principale de l'intégrale est $a\delta e^{a/\delta}$, d'où :

$$I(t) = \sigma E_0 2\pi a \delta \cos \varphi(t) \quad \text{et} \quad \langle I^2 \rangle = 2\pi^2 \sigma^2 E_0^2 a^2 \delta^2$$

La résistance est alors donnée par :

$$R = \frac{\langle P \rangle}{\langle I^2 \rangle} = \frac{l}{4\pi\sigma a \delta} = \frac{a}{4\delta} R_0$$

car en régime continu, lorsque le champ électrique et la densité de courant sont uniformes, $R_0 = l/\sigma\pi a^2$.

Bien sûr plus la fréquence augmente, plus le courant diminue puisque cantonné dans une couronne d'épaisseur δ faible, et donc plus la résistance augmente.

Rq : Écrite sous la forme $R = l/\sigma s$ avec $s = 2\pi a(2\delta)$, tout se passe comme si l'épaisseur utile était 2δ . Le cas $f = 0$, à savoir $\delta \rightarrow \infty$, ne redonne pas $R = R_0$ à cause de l'hypothèse $\delta \ll a$ qui n'est plus valable.

69. Moteur synchrone

- a) L'aimant de moment $\bar{\mathfrak{M}}$ placé dans le champ \bar{B} subit le couple $\bar{\Gamma} = \bar{\mathfrak{M}} \wedge \bar{B}$. À l'instant $t = 0$, l'angle $\alpha > 0$ entre $\bar{\mathfrak{M}}$ et \bar{B} comme indiqué sur la figure conduit à un couple dirigé suivant $+\bar{u}_z$. À un instant quelconque, cet angle vaut $(\omega_0 - \omega)t + \alpha$, d'où $\bar{\Gamma} = \mathfrak{M} B_0 \sin((\omega_0 - \omega)t + \alpha) \bar{u}_z$, de valeur moyenne :

$$\langle \bar{\Gamma} \rangle = \bar{0} \quad \text{si } \omega \neq \omega_0 \quad \text{et} \quad \bar{\Gamma} = \mathfrak{M} B_0 \sin \alpha \bar{u}_z \quad \text{si } \omega = \omega_0$$

Et donc si l'aimant est lancé puis lâché à une vitesse ω différente de celle ω_0 du champ, il finit par s'arrêter à cause des moments de frottements puisque le couple électromagnétique, en moyenne, n'a pas d'action sur lui.

- b) Par conséquent le dispositif ne fonctionne correctement que si $\omega = \omega_0$ (d'où le nom de machine synchrone). L'aimant et le champ tournent à la même vitesse, ils gardent entre eux, au cours du mouvement, le même angle α , l'aimant subissant de la part du champ un couple constant par rapport à Oz : $\Gamma = \mathfrak{M} B_0 \sin \alpha$. Ce couple n'est moteur ($\Gamma > 0$) que si $0 < \alpha < \pi$ ($\bar{\mathfrak{M}}$ suit \bar{B} dans le mouvement). Dans le cas contraire, si $-\pi < \alpha < 0$ ($\bar{\mathfrak{M}}$ précède \bar{B} dans le mouvement), le couple est résistant.

La puissance que peut fournir le moteur est celle, en régime permanent, qu'il reçoit soit $P = \Gamma \omega$. Elle est maximale pour $\omega = \omega_0$ et $\alpha = \pi/2$, d'où :

$$P_M = \mathfrak{M} B_0 \omega_0$$

- c) Le rotor reçoit le couple électromagnétique Γ et fournit à l'extérieur un couple mécanique utile Γ_u ; le régime ne peut être stationnaire (soit $\omega = cste$) que si

$\Gamma = \Gamma_u$. Il suffit pour s'en convaincre d'appliquer au rotor le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Oz (ou ce qui revient au même, le théorème de l'énergie cinétique) : $Jd\omega/dt = 0 = \Gamma - \Gamma_u$.

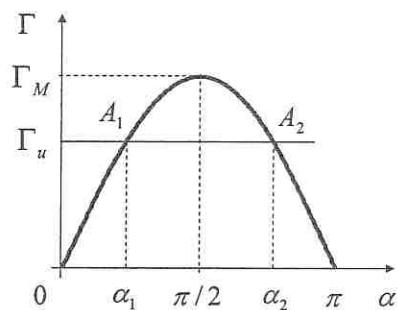
Dans l'hypothèse $\Gamma_u < \Gamma_M = \mathfrak{M} B_0$, l'égalité $\Gamma = \mathfrak{M} B_0 \sin \alpha = \Gamma_u$ conduit à deux valeurs possibles de α , α_1 et α_2 , symétriques par rapport à $\pi/2$.

À partir de A_1 , si α augmente à partir de α_1 (c'est-à-dire lorsque l'aimant prend du retard sur le régime permanent), alors Γ augmente et le champ \vec{B} va donc l'entraîner plus fortement pour lui permettre de combler son retard ; en effet, alors $Jd\omega/dt = \Gamma - \Gamma_u > 0$

De même si à partir de A_1 , α diminue, alors $\Gamma < \Gamma_u$ le champ réagit en faisant perdre l'avance à l'aimant.

Le point A_1 correspond donc à un régime stable ; inversement A_2 est instable.

Ainsi lorsque Γ_u varie de 0 à Γ_M , le domaine de α correspondant à un régime stable est $0 < \alpha < \pi/2$.



70. Moteur alternatif asynchrone (*)

a) Du fait que $\omega \neq \omega_0$, le champ \vec{B} tourne par rapport à la bobine : il envoie donc un flux variable à travers ses spires. Fermée sur elle-même, la petite bobine, siège d'un courant induit, est alors assimilable à un dipôle magnétique. Son interaction avec le champ \vec{B} extérieur l'entraîne autour de l'axe Oz et ce mouvement est susceptible de fournir à l'extérieur un travail moteur. Dans la pratique ω_0 et ω sont voisins avec ω (la conséquence) inférieure à ω_0 (la cause) ; la solution $\omega = \omega_0$ n'est pas possible car si le champ et la bobine tournaient à la même vitesse, le flux serait constant et l'entraînement impossible, d'où le nom de moteur asynchrone pour ce dispositif.

b) Les spires sont orientées de telle manière que leur vecteur surface soit dirigé suivant \vec{n} et l'angle entre \vec{B} et \vec{n} est $\theta = (\omega - \omega_0)t + \alpha$. Le flux de \vec{B} à travers les N spires de la bobine est donc :

$$\Phi = NB_0 S \cos \theta \quad \text{soit} \quad \boxed{\Phi(t) = \Phi_0 \cos((\omega - \omega_0)t + \alpha)}$$

La loi d'Ohm généralisée sur le circuit fermé : $0 = Ri + L \frac{di}{dt} - e$ avec $e = -\frac{d\Phi}{dt}$

$$\text{conduit à : } \boxed{L \frac{di}{dt} + Ri = \Phi_0(\omega - \omega_0) \sin((\omega - \omega_0)t + \alpha)}$$

L'équation précédente montre que le courant induit, une fois le régime permanent atteint, suit des oscillations harmoniques forcées de pulsation $\omega - \omega_0$. En notation complexe :

$$(jL(\omega - \omega_0) + R)i = -\Phi_0 j(\omega - \omega_0) \exp j((\omega - \omega_0)t + \alpha)$$

avec $\frac{1}{R + jL(\omega - \omega_0)} = \frac{e^{-j\psi}}{\sqrt{R^2 + L^2(\omega - \omega_0)^2}}$ où $\tan \psi = \frac{L(\omega - \omega_0)}{R}$

et $I_0 = \frac{\Phi_0(\omega - \omega_0)}{\sqrt{R^2 + L^2(\omega - \omega_0)^2}}$

il vient $i(t) = I_0 \sin[(\omega - \omega_0)t + \alpha - \psi]$

c) La bobine est alors assimilable à un dipôle magnétique de moment variable :

$$\vec{M}(t) = Ni(t)S \vec{n}(t)$$

Le champ extérieur \vec{B} exerce sur ce moment magnétique un couple :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = -M B_0 \sin \theta \vec{u}_z \Rightarrow \Gamma_z = -\Phi_0 i(t) \sin \theta(t)$$

soit $\Gamma_z(t) = \frac{\Phi_0^2(\omega - \omega_0)}{\sqrt{R^2 + L^2(\omega - \omega_0)^2}} \sin[(\omega - \omega_0)t + \alpha - \psi] \sin[(\omega - \omega_0)t + \alpha]$

Le calcul de la valeur moyenne se fait comme suit :

$$\langle \sin(\theta(t) - \psi) \cdot \sin \theta(t) \rangle = \frac{1}{2} \cos \psi \quad \text{avec} \quad \cos \psi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2(\omega - \omega_0)^2}}$$

d'où $\langle \Gamma_z \rangle = \frac{\Phi_0^2}{2} \frac{R(\omega - \omega_0)}{R^2 + L^2(\omega - \omega_0)^2}$

Pour que le système fonctionne en moteur et puisse fournir un couple extérieur, il faut qu'il reçoive un couple électromagnétique $\langle \Gamma_z \rangle$ positif, ce qui suppose $\omega < \omega_0$: la bobine tourne donc moins vite que le champ et ceci quel que soit l'angle initial α .

d) Avec $x = \omega_0 - \omega$ et $a = R/L$, la courbe à représenter est du type $f(x) = \frac{\lambda x}{a^2 + x^2}$;

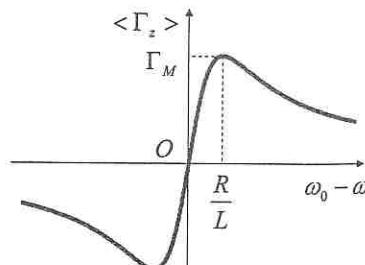
on vérifie facilement que $f'(x) = 0$ pour

$x = \pm a$ et alors $f(\pm a) = \pm \lambda / 2a$.

D'après ce qui précède, l'extremum utile correspond à :

$$\omega_M = \omega_0 - R/L \quad \text{et} \quad \Gamma_M = \frac{\Phi_0^2}{4L}$$

AN : $\omega_M = 46 \text{ tr/s}$ et $\Gamma_M = 3,1 \cdot 10^{-6} \text{ N.m}$



manent
rotation

- e) Si P est la puissance fournie par le moteur tournant à la vitesse ω , le théorème de la puissance cinétique appliqué à la bobine et son arbre de moment d'inertie J par rapport à l'axe Oz s'écrit :

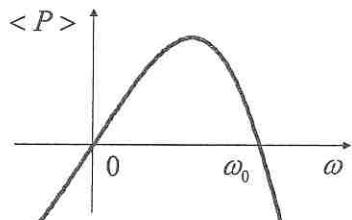
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \omega^2 \right) = \Gamma_z \omega - P = 0 \quad \text{en régime permanent}$$

d'où
$$\langle P \rangle = \langle \Gamma_z \rangle \cdot \omega = \frac{\Phi_0^2}{2} \frac{R(\omega - \omega_0)\omega}{R^2 + L^2(\omega - \omega_0)^2}$$

* Pour $\omega = 0$, la bobine ne tourne pas ; elle ne peut donc pas fournir de puissance.

* Pour $\omega = \omega_0$, la bobine et le champ tournent à la même vitesse et donc le flux du champ à travers la bobine n'est plus variable ; il n'y a plus d'induction et le couple $\Gamma_z = 0$.

* Pour $0 < \omega < \omega_0$, le système peut fournir une puissance mécanique à l'extérieur : c'est un véritable moteur. La source d'énergie se situe dans les générateurs de courants qui alimentent les circuits fournissant le champ \vec{B} variable.



* Pour $\omega < 0$ ou $\omega > \omega_0$, on a $\langle P \rangle < 0$, c'est-à-dire qu'il faut fournir un travail au système pour le faire fonctionner à l'envers ou en surrégime ; la fonction moteur a disparu.

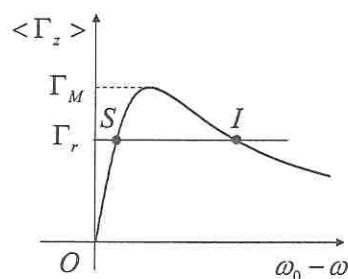
- f) Initialement le moteur est arrêté ; $\omega = 0$, mais le champ \vec{B} tournant à la pulsation ω_0 fait qu'il existe un couple magnétique $\langle \Gamma_z \rangle (\omega = 0) > 0$. Si ce couple est supérieur au couple résistant Γ_r , alors le moteur démarre spontanément, après quoi $\langle \Gamma_z \rangle (\omega)$ évolue jusqu'au régime permanent où $\langle \Gamma_z \rangle (\omega) = \Gamma_r$, équation qui fixe la vitesse de rotation de la bobine. Ceci suppose évidemment que $\Gamma_r < \Gamma_M$.

- g) Reproduisant la partie positive du graphe de $\langle \Gamma_z \rangle$ dans les conditions $\Gamma_r < \Gamma_M$, le régime de fonctionnement permanent $\langle \Gamma_z \rangle = \Gamma_r$ est *a priori* représenté par deux points S et I .

En partant de S , si ω augmente, alors $\omega - \omega_0$ diminue à ω_0 fixée, et par conséquent $\langle \Gamma_z \rangle < \Gamma_r$. Le couple résistant Γ_r l'emporte sur le couple moteur $\langle \Gamma_z \rangle$ et $J \frac{d\omega}{dt} = \langle \Gamma_z \rangle - \Gamma_r < 0$ faisant diminuer ω , c'est-à-dire s'opposant à sa variation initiale et de même si à partir de S , ω diminue : S est donc un point de fonctionnement stable.

En revanche, le régime décrit par le point I est instable.

Avec $0 < \Gamma_r < \Gamma_M$, la stabilité correspond à des pulsations $\omega_M < \omega < \omega_0$, soit numériquement à $46 < \omega < 50 \text{ tr/s}$.



h) En plus de la puissance magnétique liée à $\langle \Gamma_z \rangle$, le moteur reçoit une puissance électrique dissipée par effet Joule dans la résistance :

$$\begin{aligned} P_{em} &= \langle \Gamma_z \rangle \omega + R \langle i^2 \rangle \\ &= \frac{\Phi_0^2}{2} \frac{R(\omega - \omega_0)\omega}{R^2 + L^2(\omega - \omega_0)^2} + R \frac{\Phi_0^2(\omega - \omega_0)^2}{R^2 + L^2(\omega - \omega_0)^2} = \frac{R\Phi_0^2}{2} \frac{\omega_0(\omega_0 - \omega)}{R^2 + L^2(\omega - \omega_0)^2} \end{aligned}$$

Sachant que la puissance mécanique fournie par le moteur en régime permanent est $P_{méc} = \Gamma_r \omega = \langle \Gamma_z \rangle \omega$, le rendement est défini par :

$$\eta = \frac{P_{méc}}{P_{em}} = \frac{\langle \Gamma_z \rangle \omega}{\langle \Gamma_z \rangle \omega + R \langle i^2 \rangle} = \frac{1}{1 + \frac{R \langle i^2 \rangle}{\langle \Gamma_z \rangle \omega}} < 1$$

Pour trouver son expression, il suffit de remplacer $P_{méc}$ et P_{em} par les leurs :

$$\boxed{\eta = \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Pour avoir un bon rendement, il est souhaitable que la vitesse de rotation ω du moteur soit voisine (tout en étant légèrement inférieure) de la vitesse de rotation ω_0 du champ tournant.

AN : Ici, $\omega_0 < 50 \text{ tr/s}$ et $\omega > 46 \text{ tr/s}$ d'où $\underline{\eta > 0,92}$ ce qui est bon.

71. Effet inductif dans un condensateur en charge (*)

a) Dans l'hypothèse quasi stationnaire et en négligeant les effets de bord, le champ électrique est uniforme dans le condensateur (penser à $\vec{E} = -\nabla V$) ; il est dirigé dans le sens des potentiels décroissants :

$$\vec{E}(t) = -\frac{U(t)}{e} \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad q(t) = CU(t) \Rightarrow \boxed{\vec{E}(t) = -\frac{q(t)}{Ce} \vec{u}_z}$$

La capacité de ce condensateur plan est $C = \epsilon_0 S / e = \epsilon_0 \pi a^2 / e$.

L'équation de Maxwell-Ampère, $\text{rot } \vec{B} = \vec{0} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (il n'y a pas de courants

volumiques de conduction dans le vide interarmatures), montre qu'à un champ électrique variable est associé un champ magnétique.

En induction, d'après l'équation de Maxwell-Faraday, c'est, à l'origine, un champ magnétique variable qui produit un champ électromoteur. Et ceci s'étudie dans le cadre de l'ARQS qui consiste justement à négliger dans l'équation de Maxwell-Ampère le « courant de déplacement » $\vec{j}_D = \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ qui est l'objet de cette question..., il ne s'agit donc pas d'induction au sens habituel du terme puisqu'on se place délibérément en dehors de l'ARQS.

b) Il ne s'agit pas ici de courant libre \vec{j} (lié à une circulation de charges), mais du courant de déplacement $\vec{j}_D = \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ (lié à la variation temporelle de \vec{E}).

uissance
 $\frac{v_0}{(v_0)^2}$
ment est
rotation
champ
t dirigé
courants
champ
champ dans le
txwell-
à cette
squ'on
mais du
e \vec{E}).

Comme \vec{E} , \vec{j}_D est parallèle à \vec{u}_z . Et donc d'après l'équation de Maxwell-Ampère, si $\text{rot } \vec{B}$ est axial, alors \vec{B} est orthoradial suivant $-\vec{u}_\theta$ (règle du tire-bouchon). Précisons le sens de \vec{B} sur la séquence suivante (en rappelant que le condensateur se charge) :

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \vec{E}(t) & \vec{E}(t' > t) & \vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{rot } \vec{B} & \vec{B} \end{array}$$

Autre raisonnement : tout plan passant par Oz est plan de symétrie pour la distribution de courant \vec{j}_D ; \vec{B} lui est donc perpendiculaire, c'est-à-dire orthoradial. Sur l'axe Oz , il est perpendiculaire à tous ces plans, donc il est nul : $\vec{B} = \vec{0}$ sur l'axe.

Pour déterminer \vec{B} , il suffit d'adapter le théorème d'Ampère : à la densité de courant $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\epsilon_0 \frac{i(t)}{Ce} \vec{u}_z = -\frac{i(t)}{\pi a^2} \vec{u}_z$ uniforme correspond à travers une surface (S) de rayon $r \leq a$ le courant de déplacement $I_D = \vec{j}_D \cdot \vec{S} = -i(t) \frac{r^2}{a^2}$ avec $\vec{S} = \pi r^2 \vec{u}_z$. Alors, le long de (C), un contour circulaire de rayon r , centré sur Oz , et orienté suivant \vec{u}_θ :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_D \Rightarrow B(r, t) \cdot 2\pi r = -\mu_0 i(t) \frac{r^2}{a^2} \text{ soit : } \boxed{\vec{B}(r, t) = -\frac{\mu_0 i(t)r}{2\pi a^2} \vec{u}_\theta}$$

c) L'énergie magnétique est $W_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{B}^2 d\tau$ où l'intégrale est étendue au volume du condensateur : $W_m = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi a^2} \right)^2 \int_0^a r^2 2\pi dr e \Rightarrow \boxed{W_m = \frac{\mu_0 e i^2(t)}{16\pi}}$

En identifiant à $\frac{1}{2} L i^2(t)$, il vient $\boxed{L = \frac{\mu_0 e}{8\pi}}$, bien homogène à $\mu_0 \times \text{longueur}$.

AN : $L = 0,25 \text{ nH}$ (valeur très faible et qui interdit la discontinuité de courant dans le circuit au moment de la fermeture de l'interrupteur) et $C = 5 \text{ pF}$.

d) L'équation de Maxwell-Faraday $\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ où \vec{B} inhomogène est incompatible avec le champ \vec{E} uniforme (soit $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$). En réalité \vec{B} variable dans le temps crée un faible champ électromoteur non uniforme (c'est cela l'induction) qui s'ajoute au précédent, et qui à son tour crée un champ magnétique plus faible etc...