

Préparation à l'agrégation de physique

Hydrodynamique - TD1

Ludivine Oruba (ludivine.oruba@sorbonne-universite.fr), Tom Bienaimé
latmos.ipsl.fr

Une liste de références bibliographiques est donnée à la fin de ce TD. Il est conseillé aux étudiants qui n'ont jamais suivi de cours d'hydrodynamique, ou dont les souvenirs sont lointains, de lire les chapitres d'hydrodynamique d'un livre de niveau PC (voir référence 1 par exemple).
Merci à Tom Bienaimé d'avoir partagé les énoncés des années précédentes.

1 Cinématique des fluides

1.1 Définitions

1. Définir brièvement les notions suivantes : échelle mésoscopique, particule de fluide, ligne de courant, trajectoire, ligne d'émission.
2. Définir brièvement la notion d'écoulement stationnaire. Un écoulement reste-t-il stationnaire lors d'un changement de référentiel ?
3. Dans un écoulement stationnaire, quel est le lien entre les lignes de courant et les trajectoires des particules ? Qu'en est-il pour un écoulement non-stationnaire ?

1.2 Caractérisation d'un écoulement

On considère le champ de vitesse $\mathbf{v} = \alpha x \mathbf{u}_x - \alpha y \mathbf{u}_y$, avec $\alpha > 0$.

1. L'écoulement est-il stationnaire, compressible, irrotationnel ?
2. Tracer les lignes de courant associées à cet écoulement.
3. Calculer à l'instant t la position d'une particule située en $(x_0, y_0, 0)$ à $t = 0$. Tracer la trajectoire des particules.
4. Calculer la vitesse en représentation lagrangienne. En déduire l'accélération en représentation lagrangienne. Retrouver cette expression à partir du champ de vitesse eulérien.

1.3 Ondes de gravité

Un vibreur impose une oscillation sinusoïdale de période T et de très faible amplitude à la surface d'un bassin de grandes dimensions, à fond plat et dont les bords sont transparents. On disperse des traceurs dans le bassin et on prend une photographie avec un temps de pose égal à la période T d'excitation. On constate ainsi que :

- les trajectoires des particules de fluide sont elliptiques ;
- les ellipses sont quasi-circulaires à la surface ($z = h$) et de plus en plus plates lorsqu'on s'enfonce vers le fond ($z = 0$).

Pour interpréter ces observations, on adopte le modèle de l'écoulement incompressible et irrotationnel, associé à un potentiel des vitesses de la forme :

$$\phi = f(z) \cos(\omega t - kx),$$

dont la dépendance en x et t à z fixé décrit une onde plane progressive de vitesse $c = \omega/k$ et de longueur d'onde $\lambda = cT$.

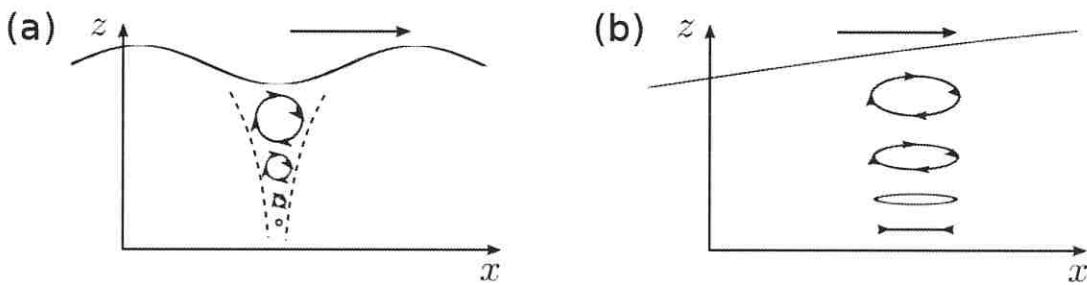


Figure 1 – Trajectoires des particules de fluide au passage d'une onde ; (a) en eau profonde et loin du fond ($kz \gg 1$) ; (b) en eau peu profonde ($kz \ll 1$). La flèche donne le sens de propagation de l'onde.

1. Établir l'équation différentielle dont est solution $f(z)$ en exploitant l'incompressibilité de l'écoulement.

2. Justifier la condition aux limites :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(z = 0) = 0,$$

et en déduire $f(z)$ à une constante multiplicative A près, puis les composantes v_x et v_z du champ eulérien des vitesses.

3. Trouver les équations des lignes de courant associées à cet écoulement.

4. En déduire que les coordonnées $(x^*(t), z^*(t))$ d'une particule de fluide donnée sont solutions du système différentiel :

$$\frac{dx^*}{dt} = kA \cosh(kz^*) \sin(\omega t - kx^*) \quad ; \quad \frac{dz^*}{dt} = kA \sinh(kz^*) \cos(\omega t - kx^*).$$

5. Ce système non-linéaire couplé n'a pas de solution analytique. Pour simplifier le système, on peut mettre à profit une observation supplémentaire : le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipse sont petits par rapport à la longueur d'onde λ . On remplace alors kx^* et kz^* par leurs moyennes temporelles $k\bar{x}^*$ et $k\bar{z}^*$ dans le membre de droite du système différentiel.

(a) Justifier la validité de cette approximation.

(b) Donner les expressions de $x^*(t)$ et $z^*(t)$ en fonction de ω , t , k , \bar{x}^* , \bar{z}^* , A . Pour déterminer les constantes d'intégration, on exploitera le fait que \bar{x}^* et \bar{z}^* sont les valeurs moyennes de $x^*(t)$ et $z^*(t)$.

(c) Interpréter les résultats.

6. Que peut-on en conclure quant à l'identité entre trajectoire et ligne de courant ?

2 Équations du mouvement et régimes d'écoulement

On considère un fluide de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η . On note $dF/d\tau$ la force extérieure par unité de volume subie par le fluide.

1. Écrire l'équation locale de conservation de la masse.

2. Écrire l'équation d'incompressibilité.

3. On considère à partir de maintenant que le fluide est incompressible. Écrire l'équation de Navier-Stokes. Nommer et discuter physiquement les différents termes. À la conservation de quelle quantité cette équation est-elle associée ?

4. Définir le nombre de Reynolds.

5. Classer les images de la figure 2 par nombre de Reynolds croissant.

6. Décrire les écoulements de la figure 2 et donner les termes qui les caractérisent (laminaire, turbulent, stationnaire, etc).

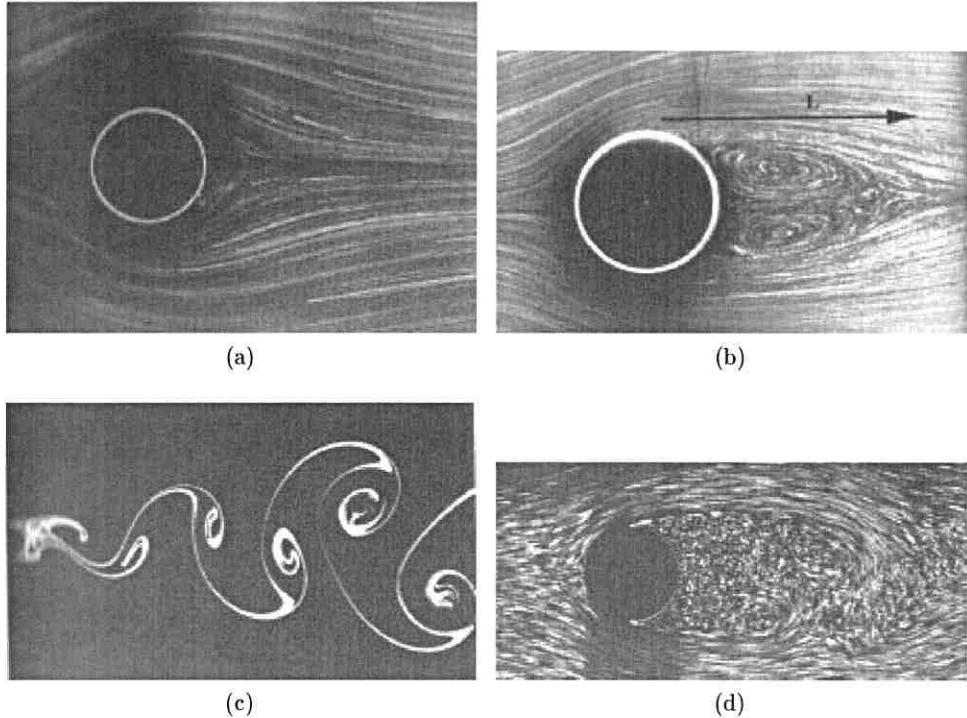


Figure 2 – Visualisation d'un écoulement derrière un cylindre à différents nombres de Reynolds. La vitesse est uniforme en amont du cylindre. Source : Guyon, Hulin, Petit, hydrodynamique physique, éditions CNRS.

7. Comment varie l'écoulement dans un tuyau cylindrique en fonction du nombre de Reynolds ? (l'écoulement dans un tuyau est celui pour lequel Reynolds a défini pour la première fois le nombre qui porte maintenant son nom).

3 Dynamique des fluides visqueux – Écoulements parallèles

3.1 Écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique (stationnaire)

On étudie l'écoulement d'un fluide de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ induit par une différence de pression Δp sur une longueur L d'un tube cylindrique horizontal de rayon R d'axe z . Du fait des symétries du problème, on cherche en coordonnées cylindriques un champ des vitesses et un champ de pression de la forme :

$$\mathbf{v} = v_z(r, z) \mathbf{u}_z \quad ; \quad p = p(r, z).$$

Pour un tel champ, on donne :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad ; \quad \Delta \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \mathbf{u}_z.$$

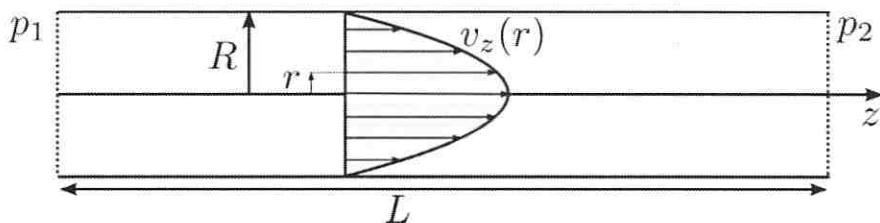


Figure 3 – Écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique de rayon R , induit par une différence de pression $\Delta p = p_1 - p_2$ sur une longueur L .

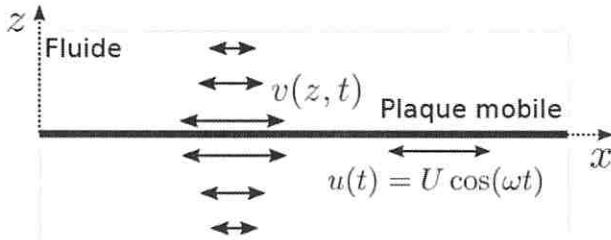
1. On suppose que l'écoulement est incompressible. Montrer que $v_z(r, z)$ ne dépend pas de z .
2. On néglige la pesanteur. Dans ce cas, on rappelle que l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho \mathbf{a} = -\mathbf{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v}.$$

- (a) Montrer que le champ des accélérations \mathbf{a} est nul.
- (b) Montrer que la pression ne dépend pas de r .
- (c) Établir l'équation différentielle dont est solution $v_z(r)$ et montrer que dp/dz est une constante C . En exploitant les conditions aux limites sur la paroi de la conduite, expliciter C et $v_z(r)$ (on admet que dv_z/dr est bornée).
3. Débit volumique et loi d'Ohm.
 - (a) En déduire l'expression du débit volumique D_v en fonction des pressions $p(z=0) = p_1$ à l'entrée et $p(z=L) = p_2$ à la sortie de la conduite.
 - (b) Comparer le résultat à la loi d'Ohm pour un conducteur filiforme en électrocinétique, introduire une résistance hydraulique \mathcal{R} et l'exprimer en fonction de η , R et L .
 - (c) Comparer l'influence du rayon R sur la résistance électrique et sur la résistance hydraulique et commenter.

3.2 Force subie par une plaque en mouvement sinusoïdal forcé (non stationnaire)

Une plaque confondue avec le plan d'équation $z = 0$ est en translation avec une vitesse $u(t) = U \cos(\omega t)$ dans un fluide incompressible de masse volumique ρ , de viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (valeur de l'eau), remplissant tout l'espace. On note $p(z, t)$ le champ de pression et $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = v(z, t) \mathbf{u}_x$ le champ des vitesses dans le fluide.



1. On rappelle l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \mathbf{a} = -\mathbf{grad} p + \rho \mathbf{g} + \eta \Delta \mathbf{v}.$$

Montrer que le champ des vitesses obéit à une équation de diffusion. En déduire sans calcul l'ordre de grandeur de l'épaisseur δ de la couche limite, domaine hors duquel le fluide reste quasiment au repos. Réaliser l'application numérique pour une fréquence de 100 Hz.

2. On cherche en régime sinusoïdal forcé un champ des vitesses de la forme :

$$v(z, t) = \Re \{U \exp(i\omega t - ikz)\}.$$

Déterminer k et en déduire les expressions de $v(z > 0, t)$ et $v(z < 0, t)$.

3. On rappelle l'expression $d\mathbf{F} = \eta (\partial \mathbf{v} / \partial z) dS \mathbf{u}_x$ de la force de viscosité exercée sur un élément de surface dS , de cote z par le fluide situé à une cote supérieure à z . En déduire l'expression de la force subie par unité de surface par la plaque et la puissance de cette force. Commenter.

Références

Les livres 1 et 2 peuvent être utilisés pour une première approche de l'hydrodynamique. Le livre 3 contient de nombreux passages adaptés au niveau demandé à l'agrégation de physique. Le livre 6 est la référence la plus adaptée en capillarité. Les livres de vulgarisation permettent de trouver des exemples pour les leçons.

- niveau prépa*
- Bible de Hydrodynamique*
- Important pour la capillarité et tension superficielle*
1. Physique tout-en-un PC-PC* nouveau programme 2014, M.-N. Sanz, D. Chardon, F. Vandenbrouck, B. Salamito, éditions Dunod. *Livre de prépa bien documenté.*
 2. Physique tout-en-un PSI-PSI* nouveau programme 2014, S. Cardini, E. Ehrhard, A. Guerillot, T. Guillot, B. Morvan, M.-N. Sanz. *Livre de prépa bien documenté.*
 3. Hydrodynamique physique, E. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit, 3e édition, CNRS éditions. *Très bon livre de référence. Le niveau général est un peu plus élevé que celui de ce TD, mais de nombreuses explications qualitatives ou utilisant des techniques mathématiques simples sont accessibles. La 3e édition comprend un cahier couleur de visualisations d'écoulements.*
 4. Ce que disent les fluides, E. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit, éditions Belin. *Très bon livre de vulgarisation au niveau prépa sur les fluides. Contient de nombreux exemples d'écoulements.*
 5. An album of Fluid Motion, M. Van Dyke, éditions Parabolic. *Un très bon livre, qui contient de nombreuses visualisations d'écoulements en noir et blanc.*
 6. Gouttes, bulles, perles et ondes, P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré, éditions Belin. *Un très bon livre à l'approche physique sur la capillarité et le mouillage. La nouvelle édition contient un DVD avec des films explicatifs.*
 7. Multimedia Fluid Mechanics, G.H. Homsy et al., CD éditions Cambridge University Press. *Des explications pertinentes de la mécanique des fluides à l'aide d'images et de films.*
 8. Hydrodynamique physique, M. Fermigier, éditions Dunod. *Livre d'exercices de niveau avancé et de grand intérêt physique. Contient de nombreuses coquilles.*
 9. Toute la Thermodynamique et la mécanique des fluides, J.-P. Faroux, J. Renault, L. Bocquet, éditions Dunod. *Livre de prépa portant sur les anciens programmes. Contient des remarques intéressantes.*
 10. An Introduction to Fluid Dynamics, G. K. Batchelor, éditions Cambridge University Press. *Très bon livre de référence, mais une approche mathématique plus technique que celle qui est utilisée dans ce TD.*
 11. <http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>, films du National Committee for Fluid Mechanics Films. *Films très intéressants, en libre accès.*
 12. Atmosphère, océan et climat, Robert Delmas, Serge Chauzy, Jean-Marc Verstraete, Belin pour la science. *Des exemples d'écoulements atmosphériques.*
 13. Le Kaleidoscope de la Physique, Andrei Varlamov, Jacques Villain, Attilio Rigamonti, Belin pour la science. *Bon livre de vulgarisation. Des exemples intéressants, comme les gouttes de pluie ou la machine à café.*
 14. Sports Physics, Christophe Clanet, éditions de l'École polytechnique. *Des exemples de nombres de Reynolds dans les sports à balle.*
 15. Matière et matériaux : De quoi est fait le monde ?, Etienne Guyon, Alice Pedregosa, Béatrice Salviat, Belin pour la science. *Très bon livre de vulgarisation, avec de nombreux exemples.*
 16. Instabilités hydrodynamiques, François Charru, CNRS éditions. *Bon livre sur les instabilités hydrodynamiques et la physique non-linéaire. Le niveau de ce livre est plus élevé que celui de ces TDs.*
 17. Ondes acoustiques, Antoine Chaigne, éditions de l'École polytechnique. *Livre de niveau avancé mais accessible sur l'acoustique. Contient des discussions sur l'acoustique musicale et l'acoustique des salles.*
 18. Liquides, solutions, dispersions, émulsions, gels, Bernard Cabane et Sylvie Hénon, éditions Belin. *Contient des explications sur les tensioactifs.*

Préparation à l'agrégation de physique

Hydrodynamique - TD1 - Correction

Ludivine Oruba

1 Cinématique des fluides

1.1 Cinématique des fluides

1.1.1 Définitions

1. **Echelle mésoscopique** : l'échelle mésoscopique ℓ est typiquement de l'ordre du μm . Elle est suffisamment grande devant l'échelle microscopique (taille atomes/molécules, libre parcours moyen, de l'ordre du nm) pour que les grandeurs thermodynamiques P et T soient définies, et suffisamment petite devant l'échelle macroscopique (la taille du système, au minimum de l'ordre du mm) pour que les grandeurs soient définies localement ($P(M)$, $T(M)$).

Particule de fluide : c'est un volume élémentaire de fluide, d'échelle mésoscopique.

Lignes de courant : elles correspondent aux lignes de champ du champ eulérien des vitesses $\mathbf{v}(M, t)$. Autrement dit, les lignes de courant sont à chaque instant, tangentes en chaque point au vecteur vitesse $\mathbf{v}(M, t)$. C'est une notion **eulérienne**.

Trajectoire : c'est l'ensemble des positions occupées successivement par une particule de fluide. C'est une notion **lagrangienne**.

Ligne d'émission : elle est constituée de la position à un instant donné de l'ensemble des particules de fluide qui sont passées antérieurement en un même point donné.

2. Dans un écoulement stationnaire, tous les champs eulériens (vitesse, pression, masse volumique, température, ...) sont indépendants du temps. Le caractère stationnaire d'un écoulement dépend du référentiel dans lequel on l'étudie. Prenons le cas d'un canard se déplaçant à la surface d'un lac : dans le référentiel du canard, l'écoulement associé au sillage de Kelvin (en forme de cône) est stationnaire. Par contre, pour un observateur immobile au bord du lac, ce sillage n'est pas stationnaire (il se déplace avec le canard).
3. Dans un écoulement stationnaire, les lignes de courant, les trajectoires et les lignes d'émission sont confondues. Ce n'est pas le cas dans un écoulement non stationnaire (Figure 1).

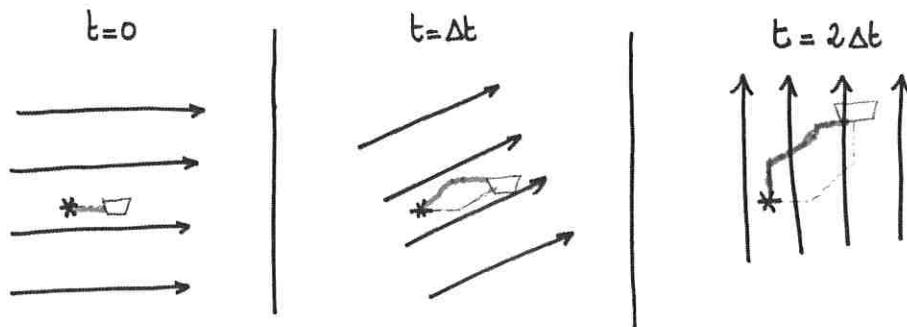
1.2 Caractérisation d'un écoulement

1. On considère un écoulement dont le champ de vitesse eulérien s'écrit $\mathbf{v} = \alpha x \mathbf{e}_x - \alpha y \mathbf{e}_y$, avec $\alpha > 0$. Il ne dépend pas du temps, il est donc stationnaire.
La divergence associée à cet écoulement est nulle :

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z = 0.$$

Il est donc incompressible, c'est-à-dire que $D\rho/Dt = 0$, où D/Dt est la dérivée particulaire.

$$\vec{v} = \cos(\theta t) \vec{e}_x + \sin(\theta t) \vec{e}_y$$



en noir : lignes de courant

* : pétrolier échoué (immobile) : il largue un canot de sauvetage

□ : canot de sauvetage + fuite de pétrole

--- : trajectoire

— : ligne d'émission

Figure 1 – Schéma illustrant les notions de lignes de courant, trajectoires et lignes d'émission.

Calculons le rotationnel du champ de vitesse :

$$\text{rot}(\mathbf{v}) = [\partial_y v_z - \partial_z v_y] \mathbf{e}_x + [\partial_z v_x - \partial_x v_z] \mathbf{e}_y + [\partial_x v_y - \partial_y v_x] \mathbf{e}_z.$$

Chacune des dérivées partielles est nulle. L'écoulement est donc irrotationnel.

2. Pour tracer les lignes de courant, il faut utiliser le fait qu'elles sont tangentes au champ de vitesse éulerien. Soit $d\ell$ un vecteur déplacement le long d'une ligne de courant. Il est parallèle au vecteur \mathbf{v} , on a donc

$$\begin{aligned} d\ell \wedge \mathbf{v} &= 0 \\ [dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y + dz \mathbf{e}_z] \wedge [v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z] &= 0 \\ [dy v_z - dz v_y] \mathbf{e}_x + [dz v_x - dx v_z] \mathbf{e}_y + [dx v_y - dy v_x] \mathbf{e}_z &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \left(\frac{dz}{v_z} \right), \quad (1)$$

ce qui donne

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y},$$

qui se réécrit

$$d \ln x = -d \ln y,$$

$$d(\ln x + \ln y) = 0,$$

$$\ln(xy) \text{ constante},$$

$$xy = C.$$

Les lignes de courant sont des branches d'hyperboles (Figure 2).

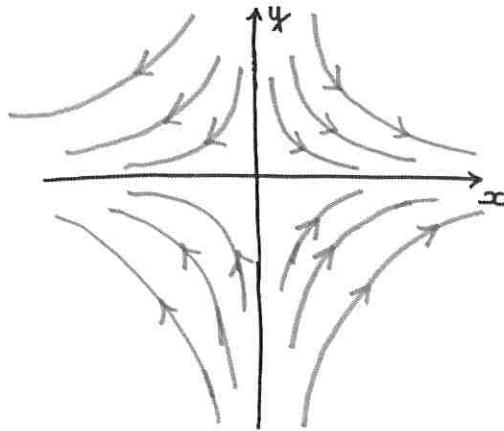


Figure 2 – Lignes de courant associées à l’écoulement $\mathbf{v} = \alpha x \mathbf{e}_x - \alpha y \mathbf{e}_y$, avec $\alpha > 0$.

3. Soit une particule initialement en (x_0, y_0) . On notera $(x^*(t), y^*(t))$ sa position à un instant t quelconque. On cherche ici l’ensemble de ces positions qui constituent la trajectoire de la particule. La vitesse de la particule à l’instant t est égale à la vitesse de l’écoulement à la position où se trouve la particule à l’instant t . Autrement dit, on a

$$\begin{cases} \frac{dx^*}{dt} = v_x(x^*(t), y^*(t), t) \\ \frac{dy^*}{dt} = v_y(x^*(t), y^*(t), t) . \end{cases}$$

En remplaçant v_x et v_y par leur expression, on a

$$\begin{cases} \frac{dx^*}{dt} = \alpha x^*(t) \\ \frac{dy^*}{dt} = -\alpha y^*(t) . \end{cases} \quad (2)$$

En intégrant, on obtient alors

$$\begin{cases} x^*(t) = x_0 \exp(\alpha t) \\ y^*(t) = y_0 \exp(-\alpha t) . \end{cases} \quad (3)$$

On a donc $x^*(t)y^*(t) = x_0 y_0 = C_0$: les trajectoires sont des branches d’hyperboles, exactement comme les lignes de courant. Ce résultat est cohérent avec le fait que l’écoulement est stationnaire : lignes de champ et trajectoires sont confondues !

4. La vitesse en représentation lagrangienne correspond à l’expression de \mathbf{v}^* en fonction de la position initiale (x_0, y_0) et du temps t . En injectant (3) dans (2), on obtient

$$\begin{cases} v_x^* = \alpha x_0 \exp(\alpha t) \\ v_y^* = -\alpha y_0 \exp(-\alpha t) . \end{cases} \quad (4)$$

L’accélération en représentation lagrangienne correspond à la dérivée temporelle de la vitesse \mathbf{v}^* . En dérivant (4), on obtient

$$\begin{cases} a_x^* = \alpha^2 x_0 \exp(\alpha t) = \alpha^2 x^*(t) \\ a_y^* = \alpha^2 y_0 \exp(-\alpha t) = \alpha^2 y^*(t) . \end{cases} \quad (5)$$

On peut retrouver cette expression à partir du champ de vitesse eulérien grâce à la formule

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} .$$

Comme $\partial \mathbf{v}/\partial t = 0$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \\ &= \left[v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \mathbf{e}_x + \left[v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] \mathbf{e}_y \\ &= v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \mathbf{e}_x + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \mathbf{e}_y \\ &= v_x \alpha \mathbf{e}_x - v_y \alpha \mathbf{e}_y \\ &= \alpha^2 x \mathbf{e}_x + \alpha^2 y \mathbf{e}_y.\end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression (5).

1.3 Ondes de gravité

Ce problème est typiquement un problème où la distinction entre lignes de courant et trajectoires est importante...

1. L'écoulement est incompressible, $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$.

L'écoulement est irrotationnel donc il existe ϕ tel que $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\phi$.

On a donc $\text{div}(\mathbf{grad}\phi) = 0$ c'est à dire

$$\Delta\phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{zz}\phi = 0 \quad (6)$$

(équation de Laplace). Dans ce problème, l'expression de ϕ est supposée de la forme

$$\phi(x, z, t) = f(z) \cos(\omega t - kx). \quad (7)$$

L'équation (6) se réécrit donc

$$-k^2\phi + \frac{f''(z)}{f(z)}\phi = 0,$$

ce qui entraîne

$$f''(z) - k^2 f(z) = 0. \quad (8)$$

2. Au fond du bassin, $v_z(z = 0) = 0$. Par conséquent,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(z = 0) = 0. \quad (9)$$

La solution générale de (8) s'écrit :

$$f(z) = A \cosh(kz) + B \sinh(kz). \quad (10)$$

En dérivant (7) et (10) par rapport à z , on obtient

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = f'(z) \cos(\omega t - kx) = [Ak \sinh(kz) + Bk \cosh(kz)] \cos(\omega t - kx).$$

La condition aux limites (9) en $z = 0$ implique donc que $B = 0$. On a donc finalement

$$\phi(x, z, t) = A \cosh(kz) \cos(\omega t - kx).$$

On en déduit

$$\begin{cases} v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = Ak \cosh(kz) \sin(\omega t - kx) \\ v_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} = Ak \sinh(kz) \cos(\omega t - kx). \end{cases} \quad (11)$$

3. Les lignes de courant sont tangentes aux vecteurs vitesses \mathbf{v} . Soit $d\ell$ un vecteur déplacement le long d'une ligne de courant. D'après (1), on a

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dz}{v_z}.$$

En remplaçant v_x et v_z par leurs expressions (11), il vient

$$\begin{aligned} \frac{dx}{Ak \cosh(kz) \sin(\omega t - kx)} &= \frac{dz}{Ak \sinh(kz) \cos(\omega t - kx)}, \\ \frac{dx}{\cosh(kz) \sin(\omega t - kx)} &= \frac{dz}{\sinh(kz) \cos(\omega t - kx)}, \\ \frac{dx}{\tan(\omega t - kx)} &= \frac{dz}{\tanh(kz)}, \\ -d[\ln(\sin(\omega t - kx))] &= d[\ln(\sinh(kz))], \\ d[\ln(\sin(\omega t - kx)) + \ln(\sinh(kz))] &= 0. \end{aligned}$$

Les équations des lignes de courant s'écrivent donc

$$\sin(\omega t - kx) \sinh(kz) = C.$$

Leur allure est représentée en Figure 3.

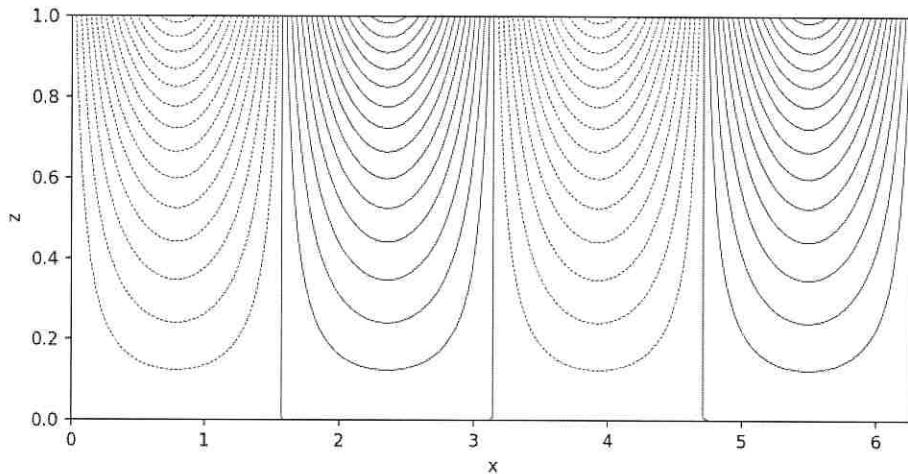


Figure 3 – Allure des lignes de courant associées à l'onde de gravité du problème 1.3.

4. On cherche les équations différentielles auxquelles obéissent les coordonnées $(x^*(t), z^*(t))$ d'une particule de fluide. A chaque instant, la vitesse lagrangienne d'une particule de fluide correspond à la vitesse de l'écoulement à la position où se trouve la particule. Autrement dit,

$$\begin{cases} \frac{dx^*}{dt} = v_x(x^*(t), z^*(t), t) \\ \frac{dz^*}{dt} = v_z(x^*(t), z^*(t), t), \end{cases}$$

c'est à dire, en utilisant (11),

$$\begin{cases} \frac{dx^*}{dt} = Ak \cosh(kz^*) \sin(\omega t - kx^*) \\ \frac{dz^*}{dt} = Ak \sinh(kz^*) \cos(\omega t - kx^*). \end{cases} \quad (12)$$

5. (a) La position d'une particule de fluide peut s'écrire comme

$$\begin{cases} x^*(t) &= \bar{x}^* + \delta x^*(t) \\ z^*(t) &= \bar{z}^* + \delta z^*(t), \end{cases}$$

où (\bar{x}^*, \bar{z}^*) désigne la position moyenne (elle correspond au centre de l'ellipse) et $(\delta x^*(t), \delta z^*(t))$ le déplacement autour de cette position moyenne. Ce déplacement vérifie $|\delta x^*(t)| \leq a$ et $|\delta z^*(t)| \leq b$, où a (resp. b) désigne le demi-grand (resp. petit) axe de l'ellipse parcourue par la particule. Comme a et b sont petits devant λ , c'est aussi le cas du déplacement : $|\delta x^*(t)| \ll \lambda$ et $|\delta z^*(t)| \ll \lambda$. On a donc $|k\delta x^*(t)| \ll 1$ et $|k\delta z^*(t)| \ll 1$. Par conséquent,

$$\cos(\omega t - kx^*) = \cos(\omega t - k\bar{x}^* - k\delta x^*(t)) \simeq \cos(\omega t - k\bar{x}^*).$$

De même,

$$\sin(\omega t - kx^*) \simeq \sin(\omega t - k\bar{x}^*)$$

et

$$\cosh(kz^*) \simeq \cosh(k\bar{z}^*) \quad \sinh(kz^*) \simeq \sinh(k\bar{z}^*).$$

- (b) Le système (12) peut donc être approximé par

$$\begin{cases} \frac{dx^*}{dt} &= Ak \cosh(k\bar{z}^*) \sin(\omega t - k\bar{x}^*) \\ \frac{dz^*}{dt} &= Ak \sinh(k\bar{z}^*) \cos(\omega t - k\bar{x}^*), \end{cases}$$

qui, après intégration, donne

$$\begin{cases} x^*(t) &= C - \frac{Ak}{\omega} \cosh(k\bar{z}^*) \cos(\omega t - k\bar{x}^*) \\ z^*(t) &= C' + \frac{Ak}{\omega} \sinh(k\bar{z}^*) \sin(\omega t - k\bar{x}^*), \end{cases} \quad (13)$$

où C et C' sont des constantes. Pour trouver les valeurs de ces constantes, il faut moyenner en temps le système (13) et remarquer que les termes en $\cos()$ et $\sin()$ sont de moyenne nulle. On en déduit que $C = \bar{x}^*$ et $C' = \bar{z}^*$. On a donc

$$\begin{cases} x^*(t) &= \bar{x}^* - \frac{Ak}{\omega} \cosh(k\bar{z}^*) \cos(\omega t - k\bar{x}^*) \\ z^*(t) &= \bar{z}^* + \frac{Ak}{\omega} \sinh(k\bar{z}^*) \sin(\omega t - k\bar{x}^*). \end{cases} \quad (14)$$

- (c) Il faut remarquer que la relation mathématique

$$\cos^2(\omega t - k\bar{x}^*) + \sin^2(\omega t - k\bar{x}^*) = 1$$

peut se réécrire, en utilisant (14), comme

$$\left[\frac{\omega(x^*(t) - \bar{x}^*)}{Ak \cosh(k\bar{z}^*)} \right]^2 + \left[\frac{\omega(z^*(t) - \bar{z}^*)}{Ak \sinh(k\bar{z}^*)} \right]^2 = 1.$$

Il s'agit de l'équation d'une ellipse, de demi-grand axe

$$a = \frac{Ak \cosh(k\bar{z}^*)}{\omega}$$

et de demi-petit axe

$$b = \frac{Ak \sinh(k\bar{z}^*)}{\omega}.$$

On a donc

$$\frac{b}{a} = \tanh(k\bar{z}^*).$$

Suffisamment près du fond, $k\bar{z}^* \ll 1$: on a donc $b \ll a$, la trajectoire est très aplatie.

En supposant que la profondeur d'eau est suffisamment grande devant λ , plus on s'approche de la surface, plus on tend vers $k\bar{z}^* \gg 1$: $b \simeq a$, la trajectoire est quasi-circulaire.

6. Les trajectoires et les lignes de courant n'ont donc rien à voir dans ce problème : dans un écoulement non-stationnaire, les lignes de courant ne sont en général pas confondues avec les trajectoires.

2 Équations du mouvement et régimes d'écoulement

1. L'équation de conservation de la masse s'écrit comme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

En utilisant la relation

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}\rho,$$

elle peut se réécrire comme

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0.$$

2. Dans un écoulement incompressible, $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$. La masse volumique se conserve le long des trajectoires lagrangiennes, autrement dit, les particules de fluide gardent leur volume initial au cours de leur mouvement.
3. L'équation de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible s'écrit

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} \right) = -\operatorname{grad}p + \rho \mathbf{g} + \eta \Delta \mathbf{v} + \frac{d\mathbf{F}}{d\tau}, \quad (15)$$

où

- $\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ est la variation eulérienne de quantité de mouvement,
- $\rho(\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}$ correspond à l'advection de quantité de mouvement (c'est le terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes),
- $\eta \Delta \mathbf{v}$ est le terme diffusif de quantité de mouvement,
- $-\operatorname{grad}p$ correspond aux forces volumiques de pression,
- $\rho \mathbf{g}$ est le terme de gravité,
- $\frac{d\mathbf{F}}{d\tau}$ désigne d'éventuelles autres forces volumiques.

4. Le nombre de Reynolds correspond à

$$Re = \frac{\|\rho(\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}\|}{\|\eta \Delta \mathbf{v}\|} = \frac{\rho v^2 / L}{\eta v / L^2} = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{vL}{\nu},$$

kg/(m.s) m²/s

où $\nu = \eta / \rho$ est la viscosité cinétique.

5. De (a) à (b) puis (d), le nombre de Reynolds augmente. L'écoulement (c) est plus difficile à classifier. Il s'intercale en fait entre (b) et (d). Par nombre de Reynolds croissant, on a donc (a), (b), (c), (d).

6. (a) Faible nombre de Reynolds ($Re \ll 1$) :

- les lignes de courant sont bien identifiées
- les couches de fluides glissent les unes contre les autres
- les lignes de courant sont symétriques entre l'amont et l'aval. Cette propriété traduit la réversibilité de l'écoulement.

- (b) Re de l'ordre de quelques unités :

- en aval, apparition de deux tourbillons de recirculation
- la longueur de la zone de recirculation augmente quand Re augmente.

- (c) $Re > Re_c = 47$:

- l'écoulement cesse d'être stationnaire : la vitesse du fluide dépend du temps
- des tourbillons sont émis périodiquement en aval
- ils forment une allée de Von Karman.

- (d) $Re \gg 1$:

- apparition de mouvements turbulents incohérents à des échelles spatiales d'autant plus petites que Re est grand (leur taille décroît comme $1/\sqrt{Re}$).

Le nombre de Reynolds gouverne la transition entre un écoulement laminaire ($Re < Re_c$) et un écoulement turbulent ($Re > Re_c$).

7. Le régime est laminaire si $Re < Re_c \simeq 2000$ et turbulent si $Re > Re_c$.

Remarque : les valeurs critiques sont des valeurs empiriques, issues d'observations en laboratoire.

3 Dynamique des fluides visqueux – Écoulements parallèles

3.1 Écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique (stationnaire)

1. L'écoulement étant incompressible,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

l'écoulement est donc indépendant de z et on peut écrire $v_z(r)$.

2. (a) Le terme $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ est nul car l'écoulement est stationnaire. De plus,

$$(\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}) \mathbf{v} = v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \mathbf{e}_z = \mathbf{0},$$

par conséquent l'accélération \mathbf{a} est nulle.

(b) Si on néglige la gravité, l'équation de Navier-Stokes devient

$$-\operatorname{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (16)$$

Sa projection dans la direction radiale entraîne que $\partial p / \partial r = 0$.

(c) La projection de l'équation (16) dans la direction z donne

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right).$$

On remarque que le terme de gauche ne dépend que de z et que le terme de droite ne dépend que de r . Par conséquent,

$$\frac{dp}{dz} = C$$

et $p(z) = p(0) + Cz$. On en déduit

$$C = \frac{p(L) - p(0)}{L}.$$

On a aussi

$$\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = C,$$

$$r \frac{dv_z}{dr} = \frac{Cr^2}{2\eta} + D,$$

$$\frac{dv_z}{dr} = \frac{Cr}{2\eta} + \frac{D}{r}.$$

Or, $\frac{dv_z}{dr}$ reste bornée quand r tend vers zero donc $D = 0$. On en déduit

$$v_z = \frac{Cr^2}{4\eta} + E.$$

On trouve E grâce à la condition aux limites $v_z(r = R) = 0$. On obtient

$$v_z = \frac{C(r^2 - R^2)}{4\eta},$$

$$v_z = \frac{p(0) - p(L)}{4\eta L} (R^2 - r^2).$$

Le profil de vitesse est parabolique. L'écoulement $v_z > 0$ est associé à $p(0) > p(L)$: on parle de perte de charge.

3. Le débit volumique s'écrit

$$\begin{aligned} D_v &= \int_0^R 2\pi r dr v_z(r), \\ D_v &= 2\pi \frac{p(0) - p(L)}{4\eta L} \int_0^R r(R^2 - r^2) dr, \\ D_v &= \pi \frac{p(0) - p(L)}{2\eta L} \left[\frac{r^2 R^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R, \\ D_v &= \pi \frac{p(0) - p(L)}{2\eta L} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right), \\ D_v &= \pi \frac{p(0) - p(L)}{2\eta L} \frac{R^4}{4}, \\ D_v &= \frac{\pi R^4 [p(0) - p(L)]}{8\eta L}. \end{aligned} \quad (17)$$

(b) Dans l'analogie avec l'électrocinétique, D_v est l'équivalent de l'intensité I , $p(0) - p(L)$ est l'analogie de la différence de potentiel ΔV . L'équation (17) peut donc être vue comme l'analogie de la loi d'Ohm, avec une résistance hydraulique \mathcal{R}_{hyd} définie comme

$$\mathcal{R}_{hyd} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}.$$

(c) La résistance électrique \mathcal{R}_{elec} varie comme $1/R^2$ (Rappel : $\mathcal{R}_{elec} = \frac{\rho L}{S}$) alors que la résistance hydraulique \mathcal{R}_{hyd} varie comme $1/R^4$. Cela signifie que quand le rayon R diminue, \mathcal{R}_{hyd} augmente beaucoup plus vite que \mathcal{R}_{elec} . Cela est du à la condition de non-glissement sur la paroi qui n'existe pas dans le cas du transport électrique : à cause de cette condition, les gradients de vitesse, donc les forces visqueuses augmentent fortement quand R diminue.

3.2 Force subie par une plaque en mouvement sinusoïdal forcé (non stationnaire)

[Voir Guyon-Hulin-Petit page 204]

1. On a

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = v \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{e}_x = 0,$$

car v ne dépend pas de x .

En projetant l'équation de Navier-Stokes dans la direction x , on obtient

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \eta \Delta v,$$

qui peut se réécrire

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \Delta v. \quad (18)$$

Il s'agit d'une équation de diffusion. En ordre de grandeur, on a

$$\frac{V}{T} = \nu \frac{V}{\delta^2}$$

où δ est l'épaisseur de la couche limite. On a donc $\delta = \sqrt{\nu T}$. Avec $f = 100$ Hz et $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ on obtient $\delta = 0.1$ mm.

2. On cherche v sous la forme $\Re \{U \exp(i\omega t - ikz)\}$. En injectant cette expression dans (18), on obtient

$$\begin{aligned} i\omega &= -\nu k^2 \\ k^2 &= -\frac{i\omega}{\nu} \\ k^2 &= \frac{\exp(-i\pi/2)\omega}{\nu} \\ k &= \pm \exp(-i\pi/4) \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \\ k &= \pm(1-i) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}. \end{aligned}$$

En posant $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$, on obtient

$$k = \pm \frac{1-i}{\delta}.$$

La partie réelle de k est liée à la propagation de l'oscillation de vitesse dans le fluide. Les deux signes \pm correspondent à la propagation vers le haut (signe +) et vers le bas (signe -). La partie imaginaire de k correspond à l'amortissement ; δ est la profondeur de pénétration de la vitesse dans le fluide. On a donc propagation d'une onde transversale atténuée dans le fluide visqueux. Ce problème est analogue à l'effet de peau en électricité : ce sont des problèmes de propagation diffusive.

On peut donc réécrire v comme

$$\begin{aligned} v(z, t) &= \Re \left\{ U \exp \left(i\omega t - i \left[\pm \frac{1-i}{\delta} \right] z \right) \right\} \\ v(z, t) &= \Re \left\{ U \exp \left(i\omega t \pm \frac{-i-1}{\delta} z \right) \right\} \\ v(z, t) &= \Re \left\{ U \exp \left(i \left(\omega t \mp \frac{z}{\delta} \right) \mp \frac{z}{\delta} \right) \right\} \\ v(z, t) &= U \cos \left(\omega t \mp \frac{z}{\delta} \right) \exp \left(\mp \frac{z}{\delta} \right), \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{cases} v(z > 0, t) &= U \cos \left(\omega t - \frac{z}{\delta} \right) \exp \left(-\frac{z}{\delta} \right) \\ v(z < 0, t) &= U \cos \left(\omega t + \frac{z}{\delta} \right) \exp \left(\frac{z}{\delta} \right). \end{cases}$$

3. La force totale par unité de surface, qui s'exerce sur la plaque, s'écrit

$$\frac{d\mathbf{F}}{dS} = \frac{dF}{dS} \mathbf{e}_x.$$

On a

$$\frac{dF}{dS} = \eta \frac{\partial v}{\partial z} (z = 0^+) - \eta \frac{\partial v}{\partial z} (z = 0^-),$$

qui, par symétrie, se réécrit

$$\frac{dF}{dS} = 2\eta \frac{\partial v}{\partial z} (z = 0^+).$$

Or

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z>0} = \frac{U}{\delta} \exp \left(-\frac{z}{\delta} \right) \left[\sin \left(\omega t - \frac{z}{\delta} \right) - \cos \left(\omega t - \frac{z}{\delta} \right) \right].$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dS} &= \frac{2\eta U}{\delta} [\sin(\omega t) - \cos(\omega t)], \\ \frac{dF}{dS} &= \frac{2\sqrt{2}\eta U}{\delta} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\omega t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\omega t) \right], \\ \frac{dF}{dS} &= \frac{2\sqrt{2}\eta U}{\delta} \cos \left(\omega t - \frac{3\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

4. La puissance de cette force s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{P}}{dS} &= \frac{dF}{dS} v(z = 0^+), \\ \frac{d\mathcal{P}}{dS} &= \frac{2\eta U^2}{\delta} [\sin(\omega t) - \cos(\omega t)] \cos(\omega t).\end{aligned}$$

La puissance moyenne s'écrit

$$\begin{aligned}\langle \frac{d\mathcal{P}}{dS} \rangle &= \frac{2\eta U^2}{\delta} [\langle \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rangle - \langle \cos^2(\omega t) \rangle] \\ \langle \frac{d\mathcal{P}}{dS} \rangle &= \frac{2\eta U^2}{\delta} \left[0 - \frac{1}{2} \right] \\ \langle \frac{d\mathcal{P}}{dS} \rangle &= -\frac{\eta U^2}{\delta}.\end{aligned}$$

Cette puissance est négative : le fluide visqueux résiste au mouvement de la plaque.

Préparation à l'agrégation de physique

Hydrodynamique - TD2

Ludivine Oruba (ludivine.oruba@sorbonne-universite.fr), Tom Bienaimé

1 Analyse dimensionnelle - Explosion nucléaire

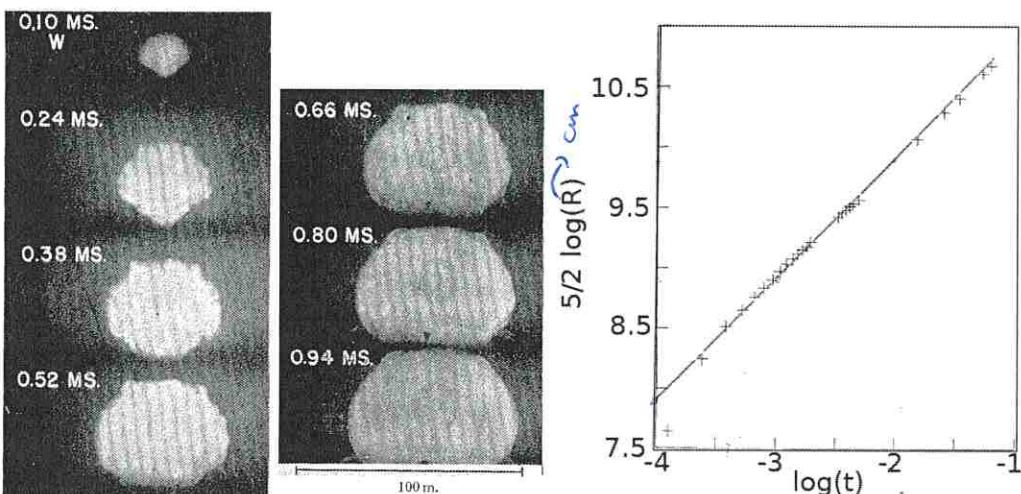


Figure 1 – Gauche : film d'une explosion atomique. La barre horizontale du bas indique 100 m, le temps est en ms. Droite : évolution du rayon R (en cm) de la boule de feu en fonction du temps t (en s) en échelle logarithmique (base 10). Source : *The Formation of a Blast Wave by a Very Intense Explosion. II. The Atomic Explosion of 1945*, G. Taylor, Proc. Roy. Soc. A, Vol. 201, No. 1065. (Mar. 22, 1950), pp. 175-186.

On cherche à reproduire de manière simplifiée le raisonnement effectué par G. Taylor en 1950 pour déterminer l'énergie dégagée par l'explosion d'une bombe atomique (confidentielle à l'époque) à partir d'un film rendu public (voir figure 1). Ce film nous apprend que le rayon R de l'onde de choc suit au cours du temps une loi d'échelle.

1. Au minimum, de quels paramètres doit dépendre le processus d'expansion de la sphère de gaz ?
2. Relier l'évolution du rayon de l'onde de choc à l'énergie de la bombe.
3. En exploitant la courbe originale de Taylor (voir figure 1), calculer numériquement l'énergie de la bombe (masse volumique de l'air $\rho = 1.2 \text{ kg m}^{-3}$). On exprimera le résultat en kilotonnes de TNT (l'explosion de 1 kg de TNT produit $4.2 \cdot 10^6 \text{ J}$). Comparer votre résultat à la puissance de 15 à 20 kilotonnes de TNT annoncée par l'armée américaine.

2 Couche limite *sujet agrég. Blanche*

La notion de couche limite intervient lorsqu'on étudie les écoulements laminaires, à nombres de Reynolds néanmoins importants, autour d'un solide. Cette couche assure le raccordement entre la solution d'écoulement parfait qui prévaut loin du corps et la condition de vitesse nulle sur les parois.

Il s'agit d'une notion très importante en hydrodynamique. Elle sera abordée dans une Agrég Blanche.

3 Équations d'Euler et de Bernoulli

3.1 Phénomène de Venturi

1. Donner les conditions de validité du modèle du fluide parfait.

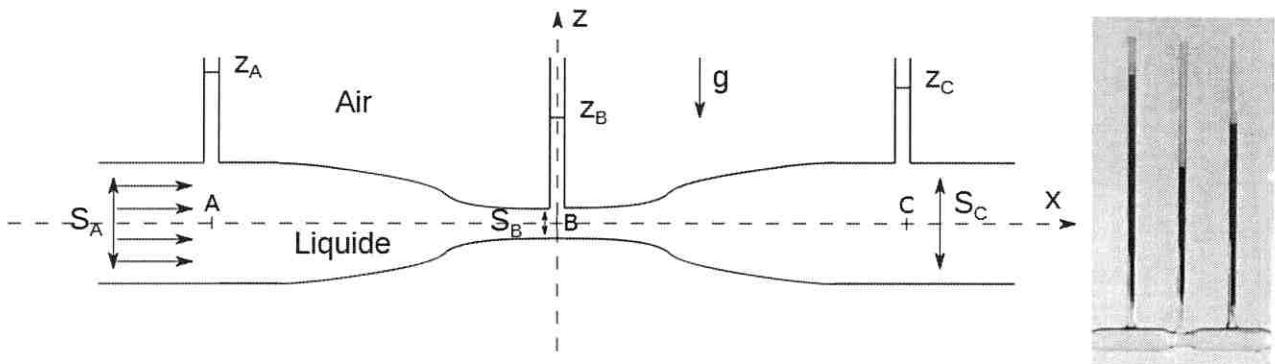


Figure 2 – Gauche : schéma du dispositif expérimental. Droite : mise en évidence expérimentale de l'effet Venturi. L'écoulement dans le tube va de gauche à droite. Source : D. J. Tritton. Physical fluid dynamics, Oxford University Press, 1988.

On considère l'écoulement d'eau (masse volumique ρ) dans une conduite où se trouve une constriction (voir figure 2). On note S_A la section en entrée dans la zone où la conduite est parallèle, S_B la section au milieu et S_C la section en sortie dans la zone où la conduite est parallèle. On prend $S_A = S_C$.

Le but est de déterminer l'écart entre les hauteurs d'eau dans les tuyaux verticaux z_A , z_B et z_C . Le rayon des tuyaux verticaux est supposé faible. On suppose que l'écoulement est parfait, stationnaire, incompressible et homogène.

2. On considère l'écoulement unidimensionnel. En utilisant la conservation du débit volumique, exprimer v_B en fonction de v_A , S_A , S_B .
3. En notant que l'axe de la conduite constitue une ligne de champ particulière, appliquer le théorème de Bernoulli entre A et B et en déduire $p_B - p_A$. Donner l'expression du débit volumique D_V en fonction de p_A , p_B , S_A , S_B , ρ .
4. En déduire les hauteurs z_A , z_B et z_C . Expliquer qualitativement les différences de hauteurs observées expérimentalement (voir figure 2).
5. Que se passe t'il si la pression au point B devient trop faible ?
6. Donner des applications de l'effet Venturi.

3.2 Retour sur les ondes de gravité - Relation de dispersion

Lors de l'étude cinématique des ondes de gravité, nous avons déterminé complètement le champ des vitesses dans le fluide sans avoir écrit en apparence une seule ligne de dynamique : cet écoulement semble indépendant des forces appliquées. Cela semble paradoxal. En réalité il n'en est rien et l'hypothèse selon laquelle les seules forces sont les forces de pression et le poids est "dissimulée" dans l'hypothèse "irrotationnel" que nous avons utilisée. Nous poursuivons ici cette étude. Dans les ondes de gravité, c'est la *gravité* qui s'oppose à la déviation de la surface par rapport à l'horizontale. C'est la *gravité* qui sert de force de rappel lorsque l'onde se propage.

Rappel On considère une couche de liquide limitée inférieurement par le plan $z = 0$ et d'épaisseur moyenne h . L'écoulement est incompressible et irrotationnel, ce qui permet d'introduire le potentiel des vitesses ϕ , qui est solution de l'équation de Poisson $\Delta\phi = 0$. De plus, au fond du récipient en $z = 0$, la composante normale de la vitesse doit s'annuler, ce qui impose $\partial_z\phi(z = 0) = 0$. On rappelle que l'on avait

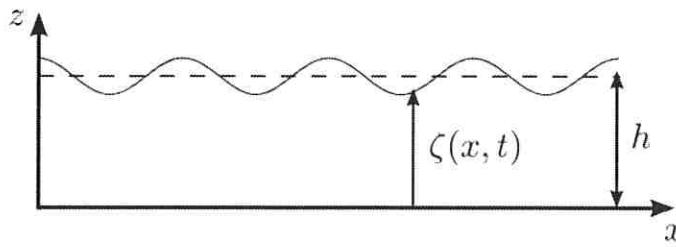


Figure 3 – Géométrie de la couche de fluide pour l'étude de la propagation des ondes de gravité.

trouvé le potentiel des vitesses $\phi = A \cosh(kz) \cos(\omega t - kx)$ au cours du TD1. On néglige les effets de tension superficielle.

- Après avoir identifié les paramètres pertinents du problème, donner, à l'aide d'une analyse dimensionnelle, la forme de l'expression attendue pour la relation de dispersion des ondes de gravité $\omega(k)$. Discuter le résultat.

On considère un écoulement parfait, instationnaire, irrotationnel, incompressible et homogène dans un référentiel galiléen. On suppose que la seule force $d\mathbf{F}/d\tau$ est le poids, avec un champ de pesanteur \mathbf{g} uniforme.

- Écrire l'équation d'Euler.
- En partant de l'équation d'Euler, démontrer que l'on obtient la formule suivante, valable dans tout le fluide et qui généralise le théorème de Bernoulli :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\text{grad } \phi)^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t),$$

où $f(t)$ est une fonction du temps uniquement.

Nous pouvons toujours ajouter une fonction $g(t)$ à ϕ sans changer le sens physique de $\Delta\phi = 0$. Si l'on ajoute $g(t)$ à ϕ de telle sorte que $dg/dt = f(t)$, ceci permet d'éliminer $f(t)$. Nous choisirons donc $f(t) = 0$ par la suite.

- Soit $z = \zeta(x, t)$ l'équation de la surface libre et h la moyenne spatiale ou temporelle de $\zeta(x, t)$. Interpréter sommairement la condition aux limites à la surface :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{pour} \quad z = \zeta(x, t).$$

En déduire $\zeta(x, t)$, en admettant que l'on peut évaluer l'équation ci-dessus en remplaçant $\zeta(x, t)$ par sa valeur moyenne h dans le terme de droite.

On cherche maintenant à calculer la relation de dispersion des vagues.

- En appliquant l'intégrale de Bernoulli en $z = \zeta(x, t)$, où $p = p_0$, montrer que l'on obtient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\text{grad } \phi)^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + g\zeta = 0 \quad \text{pour} \quad z = \zeta(x, t). \quad (1)$$

Le problème complet se réécrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 && \text{pour} && z = \zeta(x, t) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\text{grad } \phi)^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + g\zeta &= 0 && \text{pour} && z = \zeta(x, t) \\ \Delta\phi &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 && \text{pour} && z = 0 \end{aligned}$$

Pour avoir une idée des solutions, nous allons linéariser les équations. Nous négligeons tous les termes non-linéaires. La linéarisation revient à supposer que l'amplitude de l'onde est assez faible pour que les termes $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ soient négligeables.

6. Après avoir linéarisé l'Eq. (1), montrer que l'on peut éliminer ζ pour obtenir l'équation suivante, qui ne dépend que de ϕ :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{pour} \quad z = \zeta(x, t).$$

7. Montrer qu'en reportant le potentiel des vitesses trouvé au cours du TD1 dans l'équation précédente et en remplaçant $\zeta(x, t)$ par sa valeur moyenne h , on obtient la relation de dispersion des ondes de gravité :

$$\omega^2 = gk \tanh(kh).$$

8. Discuter cette relation de dispersion dans les deux cas : i) eau peu profonde $h \ll \lambda$ et ii) eau profonde $h \gg \lambda$ (λ est la longueur d'onde). Les ondes de gravité sont-elles dispersives ?

3.3 Température du nez d'un avion

Un avion se déplace dans un référentiel galiléen à une vitesse constante $U = 300 \text{ m s}^{-1}$. Dans le référentiel de l'avion, l'air possède à l'infini une vitesse uniforme $V_\infty = -U$, une pression uniforme $p_\infty = 1 \text{ bar}$ et une température uniforme $T_\infty = 273 \text{ K}$; une ligne de champ part de l'infini et arrive sur le nez A de l'avion. On assimile l'air à un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g mol}^{-1}$, de constante $R = 8.32 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ et de coefficient $\gamma = c_p/c_V = 1.40$.

Déterminer la température T_A et la pression p_A sur le nez de l'avion, en supposant l'écoulement parfait et stationnaire.

4 Capillarité - Goutte pendante

Nous présentons une technique usuelle pour mesurer la tension de surface γ . Le principe est de laisser une goutte pendre au bout d'un fin tube capillaire de rayon R (voir figure 4) et d'en étudier la forme. Celle-ci est déterminée par un équilibre entre les effets de tension de surface qui favorisent une forme sphérique, et la gravité qui conduit à la déformation de la goutte.

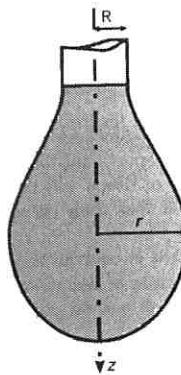


Figure 4 – Goutte pendante au bout d'un tube de rayon intérieur R .

1. Quel est l'ordre de grandeur de la taille d'une goutte pendante ? Introduire la longueur capillaire par analyse dimensionnelle.

La goutte étant symétrique autour de l'axe z , on se place en coordonnées cylindriques. On admettra que la courbure moyenne de l'interface à une hauteur z s'écrit

$$C = -\frac{r''}{(1+r'^2)^{3/2}} + \frac{1}{r\sqrt{1+r'^2}},$$

où $r(z)$ décrit la surface de la goutte.

On rappelle que l'équation de Young-Laplace décrit la différence de pression capillaire à travers une interface entre deux fluides en raison du phénomène de tension de surface. Cette équation relie la différence de pression à la forme de la surface à travers la loi :

$$p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} = \gamma \mathcal{C} = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

où $p_{\text{int}} - p_{\text{ext}}$ est la différence de pression, γ est la tension de surface, \mathcal{C} est la courbure moyenne de l'interface, et R_1, R_2 sont les rayons de courbures principaux.

2. Montrer que le profil $r(z)$ obéit à l'équation non-linéaire suivante :

$$\gamma \left[-\frac{r''}{(1+r'^2)^{3/2}} + \frac{1}{r(1+r'^2)^{1/2}} \right] = \rho g z. \quad (2)$$

3. On se propose à présent d'interpréter l'équation (2) comme une minimisation d'énergie de surface sous contrainte, au sens de l'approche d'Euler-Lagrange.

- (a) Montrer que la surface et le volume de la goutte s'écrivent respectivement :

$$S = \int 2\pi r \sqrt{1+r'^2} dz, \quad V = \int \pi r^2 dz.$$

- (b) Justifier que la forme de la goutte correspond à la minimisation de la fonctionnelle $F = \gamma S - \lambda V$, où λ est un multiplicateur de Lagrange.

La forme de la goutte est donc obtenue en minimisant la fonctionnelle

$$F[r, r'] = \int dz \left[2\pi\gamma r \sqrt{1+r'^2} - \lambda \pi r^2 \right] = \int dz f(r, r').$$

- (c) En utilisant l'équation d'Euler-Lagrange associée

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial f}{\partial r'} \right) = \frac{\partial f}{\partial r},$$

donner l'équation vérifiée par le profil $r(z)$. Comparer l'expression obtenue à l'équation (2).

L'équation non-linéaire (2) peut être résolue numériquement. L'idée est de traiter la tension de surface comme un paramètre ajustable et de modifier sa valeur jusqu'à ce que le profil simulé ajuste le profil expérimental. La précision de cette méthode pour extraire γ est d'environ 1 %. La figure 5 montre les photos de deux gouttes possédant des tensions de surface différentes.

4. Décrire qualitativement l'effet de l'ajout d'un produit tensioactif et son influence sur la forme de la goutte pendante (voir figure 5).

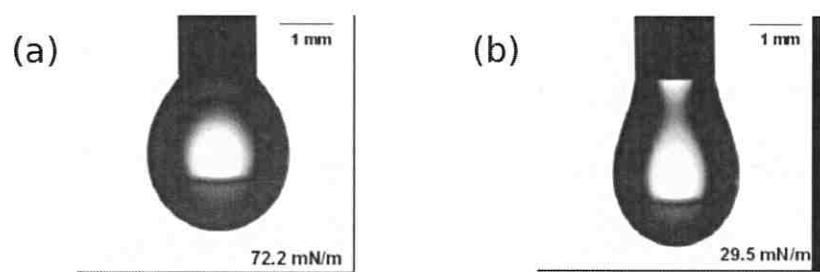


Figure 5 – (a) Goutte pendante d'eau pure dont on extrait $\gamma = 72.2 \cdot 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$. (b) Goutte d'eau à laquelle on a ajouté un tensioactif. Dans ce cas on trouve $\gamma = 29.6 \cdot 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$.

Préparation à l'agrégation de physique

Hydrodynamique - TD2 - Corrections

Ludivine Oruba(ludivine.oruba@sorbonne-universite.fr)

1 Analyse dimensionnelle - Explosion nucléaire

Rappels sur le théorème π , ou théorème de Buckingham

Soit une relation homogène en dimension

$$u_1 = f(u_2, \dots, u_k), \quad (1)$$

reliant k paramètres physiques faisant intervenir r grandeurs dimensionnellement indépendantes (r est la dimension minimum nécessaire pour décrire les paramètres physiques u_i).

Cette relation peut-être réduite à une relation

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{k-r}), \quad (2)$$

où les $k-r$ paramètres sans dimension (adimensionnés) π_i sont formés à partir des paramètres physiques du problème. Remarque : on cherche souvent les termes π sous la forme de lois de puissance : $\pi = u_1^{a_1} \cdot u_2^{a_2} \cdots u_k^{a_k}$, où a_1, a_2, \dots sont des nombres rationnels.

1. Les paramètres pertinents pour décrire le processus d'expansion de la sphère de gaz sont : son rayon R , la densité de l'air environnant ρ , l'énergie libérée lors de l'explosion E , le temps écoulé t .

2. Les dimensions des différents paramètres sont $[R] \sim L$, $[\rho] \sim ML^{-3}$, $[E] \sim ML^2T^{-2}$, $[t] \sim T$.

Ces paramètres sont reliés par la relation $R = f(\rho, E, t)$, où f est inconnue pour l'instant. D'après le théorème π , on peut former un seul nombre sans dimension ($k = 4$ et $r = 3$), π . Comme il n'y a pas d'autres nombres sans dimension, la fonction Φ dans (2) est une constante. On a donc

$$\pi = C = R\rho^\alpha E^\beta t^\gamma.$$

On a

$$[R\rho^\alpha E^\beta t^\gamma] = LM^\alpha L^{-3\alpha} M^\beta L^{2\beta} T^{-2\beta} T^\gamma,$$

ce qui entraîne

$$\begin{cases} 1 - 3\alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -2\beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 3\alpha - 2\alpha = 0 \\ \beta = -\alpha \\ \gamma = 2\beta. \end{cases}$$

On en déduit $\alpha = 1/5$, $\beta = -1/5$, $\gamma = -2/5$, c'est-à-dire

$$C = R\rho^{1/5} E^{-1/5} t^{-2/5},$$

$$R = C\rho^{-1/5} E^{1/5} t^{2/5},$$

(3)

où C est une constante que l'on ne connaît pas mais qui est supposée d'ordre 1.

3. On suppose que $C = 1$. L'équation (3) peut se réécrire comme

$$R^{5/2} = \rho^{-1/2} E^{1/2} t, \quad (4)$$

ce qui entraîne

$$5/2 \log_{10} R = 1/2 \log_{10} (E/\rho) + \log_{10} t. \quad (5)$$

Dans la courbe fournie, le rayon est exprimé en cm. On pose donc $\tilde{R} = 100R$, où \tilde{R} est le rayon en cm. L'équation (5) se réécrit alors

$$\begin{aligned} 5/2 \log_{10} \tilde{R} - 5/2 \log_{10} (100) &= 1/2 \log_{10} (E/\rho) + \log_{10} t, \\ 5/2 \log_{10} \tilde{R} &= 5 + 1/2 \log_{10} (E/\rho) + \log_{10} t. \end{aligned}$$

D'après cette relation, la courbe représentant $5/2 \log_{10} \tilde{R}$ en fonction de $\log_{10} t$ est donc une droite de pente 1 et d'ordonnée à l'origine $5 + 1/2 \log_{10} (E/\rho)$.

Cela coincide avec la courbe de la figure 1 du sujet : c'est une droite de pente environ égale à 1. Son ordonnée à l'origine est égale à 11.9. On a donc

$$11.9 = 5 + 1/2 \log_{10} (E/\rho). \quad (6)$$

En prenant la masse volumique de l'air $\rho = 1.2 \text{ kg m}^{-3}$, on obtient $E = 1.2 \cdot 10^{13.8} \text{ J} = 7.6 \cdot 10^{13} \text{ J}$. L'énergie de la bombe est de 18 kilotonnes de TNT en bon accord avec les données fournies plus tard par l'armée américaine.

Ordre de grandeur : la bombe traditionnelle la plus puissante utilisée pour la première fois en Afghanistan contre ISIS en 2017 (MOAB - Massive Ordnance Air Blast) a une puissance de 11 tonnes de TNT. La bombe "Little Boy" lancée sur Hiroshima eut un rendement d'approximativement 13 kilotonnes de TNT. L'arme nucléaire la plus puissante qui ait explosé était la bombe soviétique baptisée Tsar Bomba, qui a fourni en 1961 un rendement de 50 à 60 mégatonnes de TNT. L'arme nucléaire la plus puissante jamais produite était une version de cette bombe qui aurait fourni un rendement de supérieur à 100 mégatonnes de TNT. Le tremblement de terre dans l'océan Indien en 2004 a dégagé une énergie estimée à 475 mégatonnes de TNT. L'impact d'une météorite d'environ 15 kilomètres de largeur ou d'une comète avec la Terre peut avoir un rendement de 100 tératonnes de TNT. Un impact de ce type est soupçonné d'être à l'origine de l'extinction Crétacé-Paléogène.

2 Couche limite

3 Équations d'Euler et de Bernoulli

3.1 Phénomène de Venturi

1. Un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de viscosité et de conduction thermique. Autrement dit, il n'y a pas d'échange de quantité de mouvement par effets visqueux, ni d'échange de chaleur par conduction thermique. Cette dernière propriété signifie que l'écoulement est adiabatique. Le fluide parfait est décrit par les équations d'Euler.
2. Dans un écoulement incompressible, le débit volumique se conserve (rappel : c'est une conséquence de $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$, la démonstration fait intervenir le théorème de Green-Ostrogradsky). On a donc

$$D_v = v_A S_A = v_B S_B. \quad (7)$$

Comme $S_B \ll S_A$, il en résulte $v_B \gg v_A$. On observe donc une augmentation de la vitesse au niveau de l'étranglement.

***** Rappel sur le théorème de Bernouilli *****

L'équation d'Euler pour la quantité de mouvement s'écrit

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \right) = -\mathbf{grad}p + \rho \mathbf{g}. \quad (8)$$

Pour un écoulement stationnaire, elle devient

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad}p + \mathbf{g},$$

qui peut se réécrire

$$\mathbf{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \text{rot}(\mathbf{v}) \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad}p + \mathbf{g}. \quad (9)$$

— Si l'écoulement est irrotationnel,

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) &= -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad}p + \mathbf{g}, \\ \mathbf{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) &= -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad}p - \mathbf{grad}gz. \end{aligned}$$

Si en plus l'écoulement est incompressible et homogène,

$$\mathbf{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\mathbf{grad} \left(\frac{p}{\rho} \right) - \mathbf{grad}(gz).$$

$$\mathbf{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0.$$

On a donc

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = C \quad (10)$$

quelque soit le point du fluide.

— Si l'écoulement n'est pas irrotationnel, il faut intégrer le long d'une ligne de courant pour se débarrasser du terme en $\text{rot}(\mathbf{v})$. Soit $\mathbf{d}\ell$ un vecteur déplacement le long d'une ligne de courant. L'équation (9) entraîne

$$\int \mathbf{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) \cdot \mathbf{d}\ell + \int (\text{rot}(\mathbf{v}) \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{d}\ell = - \int \frac{1}{\rho} \mathbf{grad}p \cdot \mathbf{d}\ell - \int \mathbf{grad}gz \cdot \mathbf{d}\ell.$$

Le second terme est nul car \mathbf{v} est parallèle à $\mathbf{d}\ell$. On a donc

$$\int \left(\mathbf{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \mathbf{grad}p + \mathbf{grad}gz \right) \cdot \mathbf{d}\ell = 0.$$

Si en plus l'écoulement est incompressible et homogène,

$$\int \mathbf{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) \cdot \mathbf{d}\ell = 0,$$

$$\int d \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0.$$

On en conclut que l'équation (10) n'est alors valable que le long d'une ligne de courant.

***** Fin du rappel *****

3. L'axe de la conduite constitue une ligne de champ particulière, nous appliquons le théorème de Bernoulli entre A et B le long de cette ligne de champ :

$$\frac{p_B}{\rho} + gz_B + \frac{v_B^2}{2} = \frac{p_A}{\rho} + gz_A + \frac{v_A^2}{2}.$$

La conduite est supposée horizontale, donc $z_A = z_B$. En remplaçant v_B par son expression (7), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{p_B}{\rho} + \frac{S_A^2}{S_B^2} \frac{v_A^2}{2} &= \frac{p_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2}, \\ \frac{p_B - p_A}{\rho} &= \frac{v_A^2}{2} \left(1 - \frac{S_A^2}{S_B^2} \right), \\ p_B - p_A &= \rho \frac{v_A^2}{2} \left(1 - \left(\frac{S_A}{S_B} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Comme $S_B \ll S_A$, on en déduit que $p_B - p_A < 0$ c'est-à-dire que $p_B < p_A$: il y a une dépression au niveau de l'étranglement. Pour exprimer le débit volumique D_V , on exprime v_A en utilisant (11)

$$\begin{aligned} v_A^2 &= \frac{2(p_B - p_A)}{\rho \left(1 - \left(\frac{S_A}{S_B} \right)^2 \right)}, \\ v_A &= \sqrt{\frac{2(p_B - p_A)}{\rho \left(1 - \left(\frac{S_A}{S_B} \right)^2 \right)}}, \\ v_A &= \sqrt{\frac{2(p_B - p_A)}{\rho} \frac{S_B^2}{S_B^2 - S_A^2}}, \end{aligned} \quad (12)$$

puis en injectant cette expression dans (7), on obtient

$$D_V = S_A \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho} \frac{S_B^2}{S_B^2 - S_A^2}}.$$

La mesure de $p_A - p_B$, la connaissance de S_A, S_B et de la masse volumique ρ du fluide en écoulement permettent de déterminer le débit.

4. Les lignes de courant sont rectilignes et parallèles au niveau des points A , B et C . Pour cet écoulement parallèle dans la direction x , on a

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \mathbf{e}_x.$$

Or l'écoulement étant incompressible, on a aussi

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0.$$

Par conséquent,

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Attention, cette relation est valable pour un écoulement parallèle et incompressible. De plus, comme l'écoulement est stationnaire, on en déduit finalement que $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. L'équation d'Euler (8) se simplifie donc comme

$$\mathbf{0} = -\mathbf{grad}p + \rho \mathbf{g}. \quad (13)$$

Autrement dit, dans les régions autour des points A , B et C , la pression vérifie l'équilibre hydrostatique. La projection de (13) dans la direction z donne

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g,$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g,$$

$$p(z) = p(z_{ref}) - \rho g(z - z_{ref}).$$

Au niveau des interfaces dans chacun des tubes, $p = p_{atm}$. Si on choisit cet interface comme référence, on obtient

$$p_A = p_{atm} - \rho g(0 - z_A),$$

$$p_A = p_{atm} + \rho g z_A.$$

On a de la même façon

$$p_B = p_{atm} + \rho g z_B,$$

$$p_C = p_{atm} + \rho g z_C.$$

Or dans ce modèle, $p_A = p_C$. En effet, comme $S_A = S_C$, $v_A = v_C$ par conservation du débit volumique et en utilisant la relation de Bernouilli (10) le long d'une ligne de courant, on en déduit que $p_A = p_C$. On a donc $z_A = z_C$. De plus, comme $p_A > p_B$, on a aussi $z_A > z_B$. On a donc $z_A = z_C > z_B$.

En pratique, on observe $z_A > z_C > z_B$.

$z_A > z_C$ signifie que $p_C < p_A$: il y a une perte de charge, à cause des effets visqueux, que l'on a négligés ici.

5. Parfois la pression p_B est tellement faible au niveau de la contraction que l'on y observe des bulles de cavitation (dégagement de vapeur au sein du liquide si p_B devient inférieur à la pression de vapeur saturante du liquide).

6. Le phénomène de Venturi est utilisé dans le débitmètre de Venturi : un baromètre différentiel mesure la différence de pression $p_B - p_A$; connaissant la masse volumique du fluide et la géométrie du débitmètre, on accède alors à la vitesse v_A et au débit $D_V = v_A S_A$.

Le phénomène de Venturi est aussi utilisé dans la trompe à eau. Ce dispositif utilise un écoulement d'eau pour "faire le vide" dans un récipient. Au niveau de l'étranglement l'écoulement d'eau crée une dépression qui aspire l'air contenu dans le récipient. L'usage de la trompe à eau est limité par l'ébullition de l'eau : on ne peut pas obtenir des pressions inférieures à la pression de vapeur saturante de l'eau dans le récipient, soit 2500 Pa à 20 °C. C'est un dispositif rustique permettant d'atteindre un "vide" grossier.

3.2 Retour sur les ondes de gravité - Relation de dispersion

1. Les paramètres pertinents du problème sont ω, k, g, h . $[\omega] \sim T^{-1}$, $[k] \sim L^{-1}$, $[g] \sim LT^{-2}$, $[h] \sim L$. On a 4 paramètres, 2 dimensions. On peut donc former deux nombres sans dimension :

$$\pi_1 = kh \quad \text{et} \quad \pi_2 = \frac{\omega^2}{gk}.$$

On s'attend donc que la relation de dispersion des ondes de gravité prenne la forme

$$\frac{\omega^2}{gk} = F(kh),$$

où F est une fonction inconnue. On voit donc que g intervient dans la relation de dispersion de l'onde, d'où le nom de ces ondes.

2. L'équation d'Euler s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) + \mathbf{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \mathbf{g}.$$

L'écoulement étant irrotationnel, le terme contenant $\mathbf{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ s'annule.

3. Comme $\mathbf{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$, il existe ϕ tel que $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi$. On a donc

$$\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi \quad \text{donc} \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{grad} (\phi).$$

De plus, l'écoulement étant incompressible et homogène, ρ est une constante qu'on peut rentrer dans le gradient. En outre, $\mathbf{g} = -\mathbf{grad} (gz)$. En substituant dans l'équation d'Euler, nous obtenons :

$$\mathbf{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\mathbf{grad} \phi)^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = \mathbf{0}.$$

Un champ scalaire dont le gradient est nul est indépendant de la position ; c'est une fonction $f(t)$ du temps uniquement. Nous obtenons donc la formule suivante, valable dans tout le fluide :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\mathbf{grad} \phi)^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t),$$

qui généralise le théorème de Bernoulli.

Nous pouvons toujours ajouter une fonction $g(t)$ à ϕ sans changer le sens physique de $\Delta\phi = 0$. Si l'on ajoute $g(t)$ à ϕ de telle sorte que $dg/dt = f(t)$, ceci permet d'éliminer $f(t)$. Nous choisirons donc $f(t) = 0$ par la suite.

4. A l'interface, on a

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{n},$$

où \mathbf{n} est la normale à l'interface (si un fluide pénètre dans l'autre, c'est que l'interface à bougé d'autant). Or la surface libre (Σ) du bassin est peu inclinée car les oscillations sont de faible amplitude et de grande longueur d'onde : sa normale est donc $\mathbf{n} \approx \mathbf{e}_z$. On a donc

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_z,$$

$$w = \mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_z,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_z,$$

Le terme $\mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_z$ correspond à la vitesse verticale de l'interface. Il s'agit donc de la dérivée temporelle de sa position, $\zeta(x, t)$, à x fixé : $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$. Ainsi, la condition aux limites à la surface libre s'écrit :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \tag{14}$$

En remplaçant ϕ par son expression

$$\phi(x, z, t) = A \cosh(kz) \cos(\omega t - kx), \tag{15}$$

on a

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = Ak \sinh(kz) \cos(\omega t - kx).$$

On injecte alors cette expression dans (14), en remplaçant z par h (voir approximation donnée dans l'énoncé). On obtient

$$\partial_t \zeta = kA \sinh(kh) \cos(\omega t - kx).$$

Cette expression s'intègre, à x fixé, comme

$$\zeta(x, t) = \frac{kA}{\omega} \sinh(kh) \sin(\omega t - kx) + \beta(x).$$

Or, à x fixé, la valeur moyenne en temps de $\zeta(x, t)$ vaut h , donc $\beta(x) = h$. On a finalement

$$\zeta(x, t) = h + \frac{kA}{\omega} \sinh(kh) \sin(\omega t - kx).$$

5. On applique le théorème de Bernoulli en $z = \zeta(x, t)$, où $p = p_0$, et l'on obtient immédiatement :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\text{grad } \phi)^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + g\zeta = 0 \quad \text{pour } z = \zeta(x, t). \quad (16)$$

6. La linéarisation de (16) revient à négliger le terme $(\text{grad } \phi)^2/2$, pour obtenir :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p_0}{\rho} + g\zeta = 0 \quad \text{pour } z = \zeta(x, t).$$

Il suffit ensuite d'appliquer $\partial/\partial t$ à cette équation pour obtenir :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad \text{pour } z = \zeta(x, t).$$

En exploitant la condition aux limites sur la surface libre on obtient immédiatement l'expression demandée :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{pour } z = \zeta(x, t).$$

7. En reportant le potentiel des vitesses ϕ (15) dans l'équation ci-dessus, après avoir remplacé z par h (comme indiqué dans l'énoncé), on obtient

$$\begin{aligned} -\omega^2 \cosh(kh) + gk \sinh(kh) &= 0, \\ \omega^2 &= gk \tanh(kh). \end{aligned}$$

C'est la relation de dispersion des ondes de gravité.

8. i) Lorsque l'eau est peu profonde $h \ll \lambda$, on a $kh \ll 1$. Nous avons $\tanh(kh) \simeq kh$ et $\omega^2 = ghk^2$. De plus, $c = \omega/k = \sqrt{gh}$, $c_g = \partial_k \omega = \sqrt{gh} = c$. Ces ondes sont non dispersives puisque c est le même quelque soit λ et est égale à la vitesse de groupe.

ii) En eau profonde $h \gg \lambda$, on a $kh \gg 1$. Nous obtenons $\tanh(kh) \simeq 1$ et $\omega^2 = gk$. Les ondes de gravité en eau profonde sont dispersives : $c = \omega/k = \sqrt{g/k}$, $c_g = \partial_k \omega = \sqrt{g/k}/2 = c/2$.

3.3 Température du nez d'un avion

On suppose l'écoulement parfait et stationnaire. On peut intégrer l'équation d'Euler (9) le long d'une ligne de courant. On obtient

$$\int \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) \cdot d\ell = - \int \frac{1}{\rho} \text{grad} p \cdot d\ell - \int \text{grad} gz \cdot d\ell,$$

(on s'est débarrassé du terme en $\text{rot}(\mathbf{v})$ car \mathbf{v} est parallèle à $d\ell$), qui peut se réécrire

$$\begin{aligned} \int \left(\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \text{grad} gz \right) \cdot d\ell &= 0 \\ \int d \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{dp}{\rho} + gdz &= 0. \end{aligned}$$

Soit A et B deux points quelconques le long de la ligne de courant :

$$\int_A^B \left[\frac{1}{\rho} dp \right] + \frac{v_B^2}{2} + gz_B - \frac{v_A^2}{2} - gz_A = 0. \quad (17)$$

C'est l'équation de Bernoulli compressible (du fait de la vitesse de l'avion, on ne peut pas faire l'hypothèse d'écoulement incompressible).

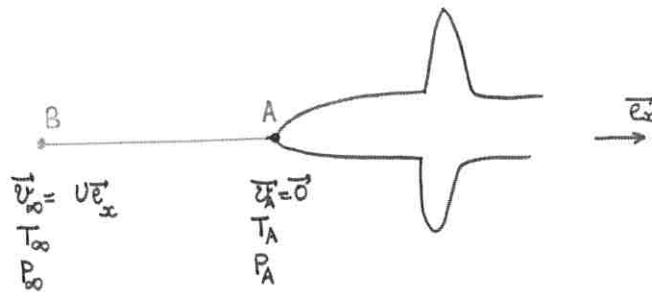


Figure 1 – Schéma pour la résolution du problème sur la température du nez d'avion.

Ici on choisit A au nez de l'avion et B à l'infini à la même altitude que l'avion (Figure 1). On a donc $z_A = z_B$, $v_A = 0$ et $v_B = U$. L'équation de Bernouilli compressible (17) devient

$$\begin{aligned} \int_A^\infty \frac{dp}{\rho} &= -\frac{U^2}{2}, \\ \int_\infty^A \frac{dp}{\rho} &= \frac{U^2}{2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Les variables ρ et p sont liées par l'équation d'état du gaz parfait :

$$pV = nRT. \quad (19)$$

Comme

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} \quad \text{soit} \quad \frac{n}{V} = \frac{\rho}{M},$$

l'équation (19) devient

$$p = \frac{\rho RT}{M} \quad \text{soit} \quad \rho = \frac{pM}{RT}.$$

L'équation (18) se réécrit donc

$$\int_\infty^A \frac{dp}{\rho} = \frac{R}{M} \int_\infty^A T \frac{dp}{p} = \frac{U^2}{2}. \quad (20)$$

De plus, on peut appliquer la loi de Laplace car l'écoulement étant parfait, il est adiabatique. La loi de Laplace

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cste} \quad (21)$$

donne

$$\begin{aligned} \gamma \frac{dT}{T} + (1-\gamma) \frac{dp}{p} &= 0, \\ \frac{dp}{p} &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T}. \end{aligned}$$

L'équation (20) devient

$$\int_\infty^A \frac{dp}{\rho} = \frac{R}{M} \frac{\gamma}{\gamma-1} \int_\infty^A dT = \frac{U^2}{2}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{R}{M} \frac{\gamma}{\gamma-1} (T_A - T_\infty) &= \frac{U^2}{2}, \\ T_A &= T_\infty + \frac{M}{R} \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{U^2}{2} = 318 \text{ K}. \end{aligned}$$

Pour trouver la pression p_A il faut utiliser à nouveau la loi de Laplace. D'après (21),

$$T_A^\gamma p_A^{1-\gamma} = T_\infty^\gamma p_\infty^{1-\gamma},$$

$$p_A^{1-\gamma} = \left(\frac{T_\infty}{T_A}\right)^\gamma p_\infty^{1-\gamma},$$

$$p_A = \left(\frac{T_\infty}{T_A}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} p_\infty,$$

On obtient $p_A = 1.7$ bar.

4 Capillarité - Goutte pendante

- Les paramètres importants du problème sont : la taille de la goutte L , la pesanteur g , la densité du fluide ρ et la tension superficielle γ . On a $[L] \sim L$, $[g] \sim LT^{-2}$, $[\rho] \sim ML^{-3}$, $[\gamma] \sim MT^{-2}$. On a 4 paramètres et 3 dimensions. On peut donc former un unique nombre sans dimension :

$$\pi = L^2 g \rho / \gamma.$$

La taille de la goutte est donc

$$L \sim l_c \quad \text{où} \quad l_c \equiv \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$$

est appelée la longueur capillaire. La taille de la goutte est telle que les effets de capillarité s'équilibrent avec la force de gravité.

À une échelle inférieure à l_c , ce sont les effets de capillarité qui dominent tandis qu'à des échelles supérieures c'est la gravité. Pour l'eau, la longueur capillaire est voisine de 3 mm. Ce sont donc les gouttes de taille submillimétrique qui adopteront une forme sphérique. On remarque que la longueur capillaire diverge lorsque $g \rightarrow 0$. C'est ce qui explique que certaines expériences ayant pour but d'étudier les phénomènes capillaires soient réalisées en microgravité.

- D'après la loi de Laplace-Young, la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur d'une goutte d'eau s'écrit :

$$p_{int} - p_{ext} = \gamma \mathcal{C}.$$

La pression à l'intérieur est plus élevée que la pression à l'extérieur, à cause de la tension de surface. Cette différence de pression s'appelle la pression de Laplace. Cette loi s'obtient en écrivant que le travail total des forces de pression extérieure et intérieure compense celui des forces de tension superficielle.

L'expression de \mathcal{C} en fonction de $r(z)$ donnée dans l'énoncé est une relation purement mathématique. Sa démonstration est faite dans le livre *Gouttes, bulles, perles et ondes* de De Gennes et al.

Outre la loi de Laplace, la pression doit aussi satisfaire les lois de l'hydrostatique : $p_{int} = p_0 + \rho g z$, où p_0 est la pression atmosphérique (l'origine $z = 0$ est prise au sommet de la goutte). Comme $p_{ext} = p_0$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \gamma \mathcal{C} &= \rho g z, \\ \gamma \left[-\frac{r''}{(1+r'^2)^{3/2}} + \frac{1}{r(1+r'^2)^{1/2}} \right] &= \rho g z. \end{aligned} \tag{22}$$

- (a) Dans cette géométrie, l'aire d'une tranche de goutte s'exprime comme $dS = 2\pi r ds$ où s est l'abscisse curviligne le long de la goutte (Figure 2). Le théorème de Pythagore nous donne $ds^2 = dr^2 + dz^2 = dz^2(1+r'^2)$ où $r' = dr/dz$. Dès lors, l'aire de la goutte s'écrit

$$S = \int_z 2\pi r \sqrt{1+r'^2} dz. \tag{23}$$

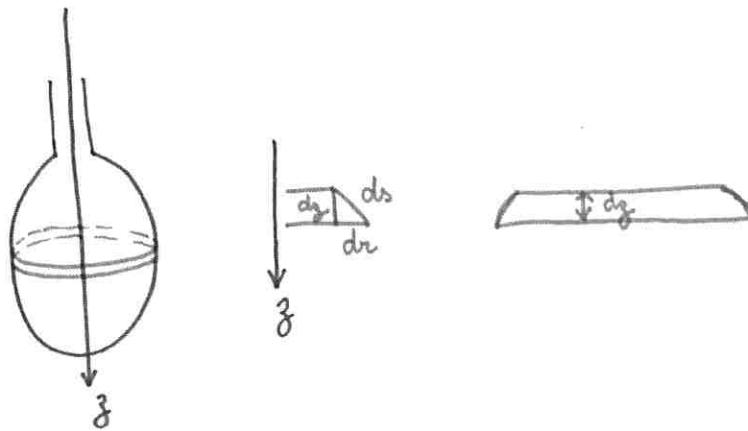


Figure 2 – Schéma de la goutte.

Le volume d'une tranche de goutte s'écrit $dV = \pi r^2 dz$, le volume de la goutte s'écrit

$$V = \int_z \pi r^2 dz. \quad (24)$$

Il est imposé, égal à sa valeur initiale, V_0 .

(b) L'idée est de minimiser l'énergie de la surface, à volume constant en utilisant les équations d'Euler-Lagrange. En effet, à l'équilibre, l'énergie de la surface de la goutte est minimale, mais avec une contrainte de volume fixé. La forme de la goutte peut donc être obtenue en minimisant son énergie de surface sous la contrainte d'un volume constant, soit en minimisant la fonctionnelle $F = \gamma S - \lambda(V - V_0)$, où V_0 est le volume initial de la goutte. Comme V_0 ne dépend pas de z , il disparaîtra ensuite, il est donc ignoré à ce stade et on minimise la fonctionnelle

$$F = \gamma S - \lambda V. \quad (25)$$

En remplaçant S et V dans (25) par leurs expressions (23) et (24), on obtient la formule donnée dans l'énoncé :

$$F[r, r'] = \int dz [2\pi\gamma r \sqrt{1+r'^2} - \lambda\pi r^2] = \int dz f(r, r').$$

(c) On calcule les différents termes qui interviennent dans l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial f}{\partial r'} \right) = \frac{\partial f}{\partial r},$$

à savoir

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 2\pi\gamma \sqrt{1+r'^2} - 2\lambda\pi r$$

$$\frac{\partial f}{\partial r'} = 2\pi\gamma \frac{rr'}{\sqrt{1+r'^2}}$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial f}{\partial r'} \right) = 2\pi\gamma \left[\frac{r'^2 + rr''}{\sqrt{1+r'^2}} - \frac{rr'^2 r''}{(1+r'^2)^{3/2}} \right] = 2\pi\gamma \left[\frac{r'^2 + r'^4 + rr''}{(1+r'^2)^{3/2}} \right] = 2\pi\gamma \left[\frac{r'^2}{\sqrt{1+r'^2}} + \frac{rr''}{(1+r'^2)^{3/2}} \right].$$

L'équation d'Euler-Lagrange donne

$$2\pi\gamma \left[\frac{r'^2}{\sqrt{1+r'^2}} + \frac{rr''}{(1+r'^2)^{3/2}} \right] = 2\pi\gamma \sqrt{1+r'^2} - 2\lambda\pi r,$$

$$\begin{aligned}
 2\pi\gamma \left[\frac{r'^2}{\sqrt{1+r'^2}} + \frac{rr''}{(1+r'^2)^{3/2}} \right] &= 2\pi\gamma \frac{1+r'^2}{\sqrt{1+r'^2}} - 2\lambda\pi r, \\
 2\pi\gamma \left[\frac{r'^2 - 1 - r'^2}{\sqrt{1+r'^2}} + \frac{rr''}{(1+r'^2)^{3/2}} \right] &= -2\lambda\pi r. \\
 \gamma \left[-\frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} - \frac{rr''}{(1+r'^2)^{3/2}} \right] &= \lambda r, \\
 \gamma \left[-\frac{rr''}{(1+r'^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \right] &= \lambda r.
 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient l'équation non-linéaire suivante :

$$\gamma \left[-\frac{r''}{(1+r'^2)^{3/2}} + \frac{1}{r(1+r'^2)^{1/2}} \right] = \lambda. \quad (26)$$

En comparant avec la formule de Laplace, on a $\lambda = \rho g z = \Delta p$.

4. Un tensioactif ou agent de surface (“surfactant” en anglais) est un composé qui modifie la tension superficielle entre deux surfaces. Le rôle du tensioactif est de diminuer la tension de surface. Ainsi, la goutte d'eau ayant le tensioactif a une forme plus allongée. Si la tension de surface était réduite davantage, la goutte pourrait se détacher du tube capillaire.

Préparation à l'agrégation de physique

Hydrodynamique - TD3

Ludivine Oruba (ludivine.oruba@sorbonne-universite.fr), Tom Bienaimé

1 Écoulement parfait autour d'un cylindre – Portance des avions

On considère une aile cylindrique d'axe horizontal z et de rayon R , en mouvement rectiligne uniforme à vitesse $U \mathbf{u}_x$ dans le référentiel terrestre (R_0) (voir figure 1). Loin de l'aile, l'air est au repos et la pression est constante, notée p_∞ . Il est commode, pour exprimer les conditions aux limites périodiques sur l'aile, de traiter le problème dans le référentiel (R) lié à l'aile, où nous noterons \mathbf{v} le champ eulérien des vitesses. Loin de l'aile, la loi de composition des vitesses donne immédiatement $\mathbf{v}_\infty = -U \mathbf{u}_x$.

Nous supposons que i) l'écoulement est *parfait* et *stationnaire* ii) l'écoulement est *incompressible* (valable pour un écoulement subsonique) iii) l'écoulement est *irrotationnel*¹ iv) l'écoulement est plan et invariant par translation le long de l'axe de l'aile. On se place donc en coordonnées cylindriques et on cherche le vecteur vitesse sous la forme $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_r(r, \theta) \mathbf{u}_r + v_\theta(r, \theta) \mathbf{u}_\theta$.

pas de dépendance en z (n°2)

et pas de v_z car écoulement plan

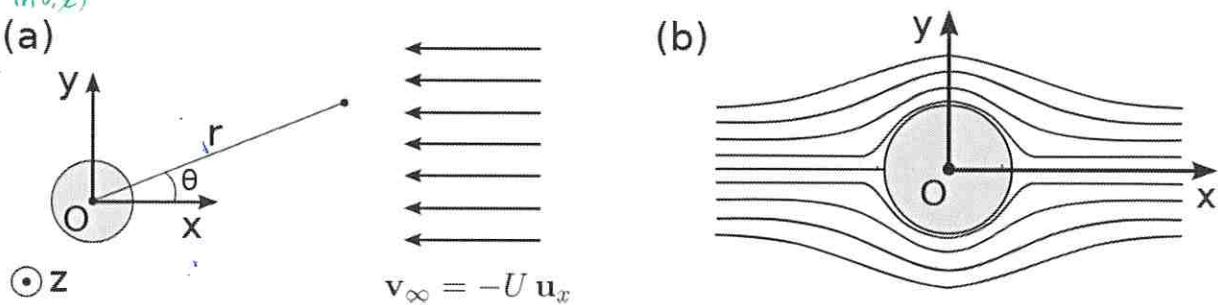


Figure 1 – (a) Écoulement autour d'une aile cylindrique. (b) Lignes de courant de l'écoulement.

1. L'écoulement étant irrotationnel, il existe un potentiel des vitesses ϕ tel que $\mathbf{v} = \text{grad } \phi$. Montrer que le potentiel des vitesses est solution de l'équation de Laplace $\Delta \phi = 0$.
2. On cherche un potentiel des vitesses $\phi(r, \theta)$, et on admet que la solution de l'équation de Laplace est de la forme :

$$\phi(r, \theta) = \alpha_0 \ln r + \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n r^n + \beta_n r^{-n}) \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n r^n + \delta_n r^{-n}) \sin(n\theta),$$

où les $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$ sont des paramètres quelconques. Déterminer ces constantes en exploitant i) la symétrie du problème par rapport au plan $y = 0$, ii) la condition aux limites à l'infini, iii) la condition aux limites sur le bord du cylindre. Montrer que l'on obtient :

$$\phi(r, \theta) = \beta_0 - U \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta,$$

où on remarquera que la constante β_0 peut-être omise car celle-ci n'influence pas le champ des vitesses.

1. Ce choix est guidé par des arguments de dynamique des fluides avancée : Kelvin a montré que partant du repos, l'écoulement autour de l'aile ne peut pas devenir tourbillonnaire si on néglige la viscosité de l'air. Nous reviendrons sur ce point dans la suite.

à poser
de tourbillon
au bout

3. En déduire le champ des vitesses $\mathbf{v}(r, \theta)$ et tracer les lignes de courant de l'écoulement (voir figure 1). Calculer la norme du vecteur vitesse $v = \|\mathbf{v}\|$ sur l'aile i.e. en $r = R$.
4. Utiliser le théorème de Bernoulli pour montrer que la pression autour de l'aile s'écrit :

$$p(r = R, \theta) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta).$$

Démontrer que la résultante des forces de pression sur l'aile est nulle, et donc que l'avion ne subit aucune portance et aucune force de traînée. Commenter.

Remarques sur l'écoulement autour d'une aile réelle L'absence de portance est dû au fait que l'écoulement adopté dans le modèle précédent est symétrique par rapport au plan horizontal $\theta = 0$. Pour une aile réelle, l'écoulement est dissymétrique (voir figure 2) : les lignes de champ s'écartent au voisinage de B et se resserrent au voisinage de A , de telle sorte que :

$$v_B < v_\infty = U \quad ; \quad v_A > v_\infty = U,$$

et le théorème de Bernoulli assure que $p_B > p_A$. C'est donc la dissymétrie de l'écoulement autour de l'aile qui donne naissance à la portance. On peut noter que cette dissymétrie est équivalente au fait que la circulation de \mathbf{v} sur le contour limitant la section de l'aile orienté dans le sens trigonométrique autour de \mathbf{u}_z , est positive :

$$\oint_{(C)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} > 0,$$

car la contribution positive du voisinage de A (où $\mathbf{v} \parallel d\mathbf{l}$) l'emporte sur la contribution négative du voisinage de B (où $\mathbf{v} \parallel -d\mathbf{l}$).

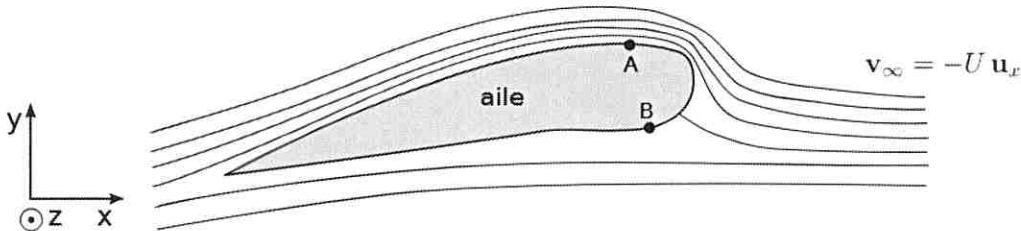


Figure 2 – Illustration des lignes de courant autour d'une aile réelle.

Ceci nous donne l'idée de superposer à l'écoulement précédent un *vortex* d'intensité Γ pour obtenir :

$$v_r = -U \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \quad ; \quad v_\theta = U \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

5. Calculer la valeur de la vitesse sur le cylindre, puis la pression sur le cylindre via le théorème de Bernoulli.
6. Calculer la résultante des forces de pression sur le cylindre et montrer que l'on obtient une force de portance dès que $\Gamma > 0$.

Remarque L'intensité de la vorticité Γ apparaît comme une indéterminée du problème due au caractère excessif du modèle de l'écoulement parfait. En pratique, c'est la viscosité dans la couche limite qui fixe la valeur de Γ .

2 Bilans macroscopiques

2.1 Amincissement d'un jet libre par la viscosité

On considère un fluide visqueux sortant d'un tube cylindrique de diamètre R_0 . Le système est en apesanteur de sorte que les forces de gravité n'interviennent pas dans le problème. L'écoulement est supposé

incompressible et stationnaire. Comme nous l'avons vu dans l'exercice sur l'écoulement de Poiseuille (voir TD1), le profil radial de l'écoulement en sortie du tube est donné par $v(r) : 2U_0 \left[1 - (r/R_0)^2 \right]$. On suppose qu'à l'infini, le profil des vitesses est uniforme et a pour valeur U_∞ (les forces de viscosité ont uniformisé le profil des vitesses). Le rayon du jet est R_∞ . Le but de l'exercice est de calculer U_∞ et R_∞ .

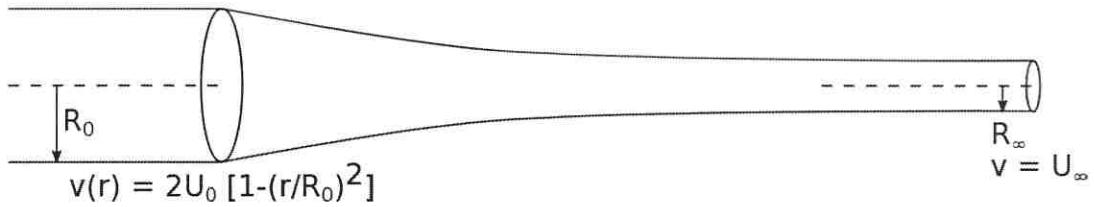


Figure 3 – Amincissement d'un jet libre par la viscosité.

- Montrer que la conservation du débit volumique donne une relation entre U_0 , U_∞ , R_0 et R_∞ .
- En faisant un bilan de quantité de mouvement, en déduire U_∞ et R_∞ en fonction de U_0 et R_0 .
- Estimer l'ordre de grandeur de la distance nécessaire pour passer de R_0 à R_∞ .

2.2 Ressaut hydraulique dans un canal

On considère un écoulement stationnaire dans un canal ouvert rectangulaire et de pente négligeable. On s'intéresse à la formation d'un ressaut immobile (changement brutal de la profondeur de h_1 en amont, à h_2 en aval ; ce changement s'effectue sur une distance comparable à la profondeur, avec $h_1 < h_2$). Pour simplifier l'analyse, on modélise cet écoulement en négligeant la viscosité et la compressibilité du fluide et en supposant les vitesses d'écoulement \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 uniformes et horizontales en amont comme en aval du ressaut. La géométrie de l'écoulement est représentée sur la figure 4. On choisira un volume de contrôle approprié pour effectuer les bilans des différentes grandeurs.

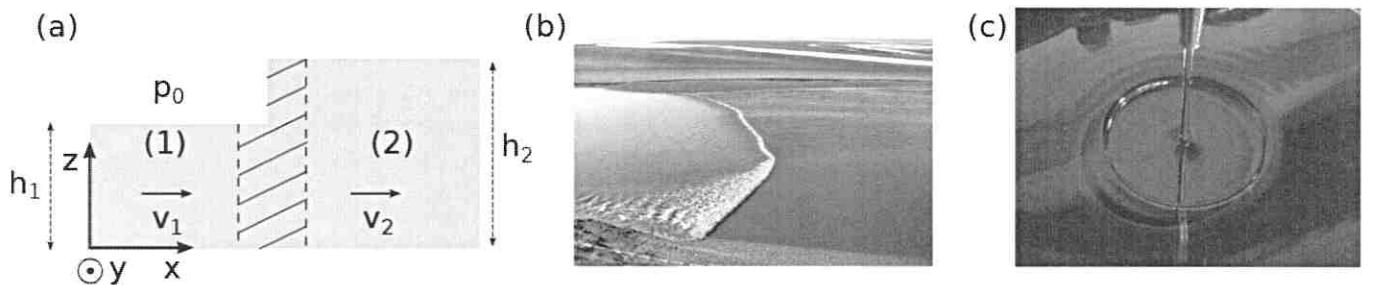


Figure 4 – (a) Schéma du ressaut hydraulique. (b) Le mascaret est un phénomène naturel très spectaculaire qui se produit sur une centaine de fleuves, rivières et baies. Ce phénomène de brusque surélévation de l'eau d'un fleuve ou d'un estuaire est provoqué par l'onde de la marée montante lors des grandes marées. (c) Autre exemple courant de ressaut hydraulique qui se manifeste par une onde circulaire stationnaire autour du jet d'eau au fond d'un évier.

- Montrer que la répartition de la pression dans le fluide est hydrostatique. Exprimer la pression $p(z)$ en amont et en aval du ressaut en fonction de la masse volumique ρ du fluide, de la hauteur z considérée et de la pression atmosphérique p_0 .
- Equation de conservation de la masse.*
Donner l'expression du débit volumique D_v en fonction de (v_1, h_1, L) et (v_2, h_2, L) , L étant la largeur du canal. En déduire la relation liant v_1, h_1, v_2, h_2 .
- Équation de transport de la quantité de mouvement.*
 - Montrer que l'équation-bilan de la densité de quantité de mouvement conduit à la relation :

$$\frac{1}{2}gh_1^2 + v_1^2h_1 = \frac{1}{2}gh_2^2 + v_2^2h_2,$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

- (b) Calculer v_1 et v_2 en fonction de h_1 , h_2 et g .
- (c) On définit les nombres de Froude en amont et en aval par :

$$\text{Fr}_1 = \frac{v_1}{\sqrt{gh_1}}, \quad \text{Fr}_2 = \frac{v_2}{\sqrt{gh_2}} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{h_2}{h_1}.$$

Exprimer Fr_1 et Fr_2 en fonction de α .

- (d) Montrer que pour $\alpha > 1$, on a $\text{Fr}_1 > 1$ (régime super-critique ou torrentiel) et $\text{Fr}_2 < 1$ (régime sous-critique ou fluvial).
- (e) Application numérique : avec un débit par unité de largeur de $1.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ et une profondeur avant ressaut de 0.2 m, calculer Fr_1 puis h_2 .

4. Bilan énergétique.

- (a) On rappelle que pour une particule de fluide de vitesse \mathbf{v} dans un champ de pesanteur, la densité d'énergie est $e = \rho(v^2/2 + gz)$ et que la puissance fournie par les forces de pression p à travers une surface $d\mathbf{S}$ est $-p\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$. En établissant l'équation-bilan de la densité d'énergie, montrer que l'on a la relation :

$$-\dot{Q} = \iint_{\text{SC}} \rho \left(\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S},$$

où \dot{Q} est la puissance dissipée sous forme de chaleur dans le volume de contrôle par la turbulence et SC est la surface de contrôle.

- (b) En déduire l'expression de la puissance dissipée dans le ressaut en fonction du débit volumique D_v , des grandeurs v et h en amont et en aval, ainsi que de ρ et g . Calculer la puissance dissipée pour un canal d'un mètre de largeur contenant de l'eau ($h_1 = 0.2 \text{ m}$, $D_v = 1.5 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$). En déduire l'échauffement de l'eau entre l'entrée et la sortie du ressaut. On donne $C_p = 4.18 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ pour l'eau.

5. Vitesse de propagation d'un mascaret.

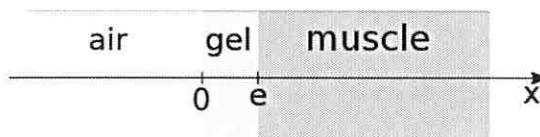
Un mascaret est une surélévation brusque des eaux, qui se produit dans certains estuaires au moment du flux de marée, et qui progresse rapidement à la célérité $-c \mathbf{u}_x$ vers l'amont sous la forme d'une vague déferlante (voir figure 4). En amont du front d'onde, la hauteur d'eau est h_1 et le liquide a une vitesse d'écoulement $\mathbf{v}_1 = v_1 \mathbf{u}_x$. En aval, la hauteur d'eau est h_2 ($h_1 < h_2$) et le liquide est immobile $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$.

- (a) Représenter sur une figure le volume de contrôle dans le référentiel se déplaçant à la vitesse $-c$ par rapport au sol ainsi que les vitesses d'écoulement v'_1 et v'_2 en amont et en aval de la discontinuité.
- (b) En utilisant un changement de référentiel adéquat ainsi que les résultats obtenus pour le ressaut, calculer la vitesse de propagation c en fonction de h_1 , h_2 et g .
- (c) Dans le cas limite où $h_2 \rightarrow h_1$, que devient la vitesse de propagation ?

3 Ondes acoustiques

3.1 Couche anti-reflet en échographie

Les impédances caractéristiques de l'air et des tissus musculaires pour les ultrasons valent $Z_a = 4.0 \cdot 10^2 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ et $Z_m = 1.7 \cdot 10^6 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$.



1. Calculer le coefficient de transmission des puissances sonores à une interface air-muscle et commenter.

Pour supprimer l'onde réfléchie dans l'air, on réalise une couche anti-reflet d'épaisseur e en gel, d'impédance Z_g . On note c_a , c_g et c_m les célérités du son dans chacun des trois milieux, et on pose $k_a = \omega/c_a$, $k_g = \omega/c_g$ et $k_m = \omega/c_m$. On cherche alors en notation complexe des champs de vitesses dans les trois milieux de la forme :

$$\begin{aligned}\underline{v}_1(x < 0, t) &= A_a \exp(i\omega t - ik_a x), \\ \underline{v}_1(0 < x < e, t) &= \underline{A}_g \exp(i\omega t - ik_g x) + \underline{B}_g \exp(i\omega t + ik_g x), \\ \underline{v}_1(x > e, t) &= \underline{A}_m \exp(i\omega t - ik_m x).\end{aligned}$$

2. Donner les expressions des surpressions dans les trois milieux en fonction des impédances Z_a , Z_g et Z_m et des expressions des champs des vitesses.
3. Écrire les conditions aux limites aux interfaces.
4. En déduire la relation suivante entre les impédances et e :

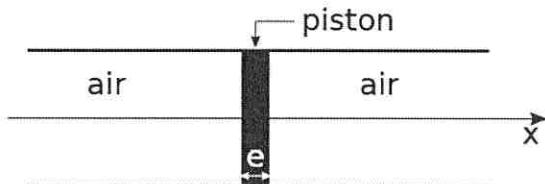
$$\frac{Z_g - Z_a}{Z_g + Z_a} = \frac{Z_g - Z_m}{Z_g + Z_m} \exp(-2ik_g e).$$

5. Vérifier la pertinence de l'expression ci-dessus sur un cas particulier. Déterminer les valeurs de e et Z_g pour avoir la meilleure transmission possible (condition d'adaptation d'impédance).

3.2 Isolation phonique

Pour étudier l'atténuation sonore introduite par un mur, on adopte le modèle sommaire suivant : dans un tuyau de section S , un onde sonore incidente plane progressive harmonique de pulsation ω arrive sur un piston de surface S , d'épaisseur e et de masse volumique ρ , libre de se déplacer au voisinage de $x = 0$. On cherche un champ des vitesses de la forme :

$$\underline{v}_1(x < 0, t) = A_1 \exp(i\omega t - ikx) + \underline{B}_1 \exp(i\omega t + ikx) \quad ; \quad \underline{v}_1(x > e, t) = \underline{A}_2 \exp(i\omega t - ikx + ike).$$



1. Justifier cette forme et écrire les surpressions $\underline{p}_1(x, t)$ correspondantes.
2. Écrire les conditions aux limites sur le piston indéformable et en déduire que :

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(1 + i \frac{\rho e \omega}{2\rho_0 c}\right)^{-1}.$$

3. En déduire le facteur de transmission en puissance \mathcal{T} du mur. On donne $\rho_0 = 1.3 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho = 2 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ et $c = 340 \text{ m s}^{-1}$. Quelle doit être l'épaisseur minimale du mur si on veut une atténuation d'au moins -40 décibels pour $f = 1 \text{ kHz}$? Et pour $f = 100 \text{ Hz}$?

Préparation à l'agrégation de physique

Hydrodynamique - TD3

Ludivine Oruba (ludivine.oruba@sorbonne-universite.fr)

1 Écoulement parfait autour d'un cylindre – Portance des avions

1. Comme l'écoulement est irrotationnel, il existe un potentiel des vitesses ϕ tel que $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi$. L'écoulement est incompressible, donc $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, soit $\operatorname{div}(\mathbf{grad} \phi) = 0$ puis $\Delta \phi = 0$.
2. Dans l'expression fournie dans l'énoncé, on reconnaît un développement en série de Fourier de $\phi(r, \theta)$ à r fixé, naturel puisque $\phi(r, \theta)$ doit être périodique en θ de période 2π : au bout d'un tour autour d'une aile on est revenu au point de départ.
 - i) Le problème étant symétrique par rapport au plan médiateur du cylindre $y = 0$, le développement en série de Fourier est pair en θ et les termes en sinus sont absents :

$$\phi(r, -\theta) = \phi(r, \theta) \quad \text{et donc} \quad \gamma_n = 0 \quad \text{et} \quad \delta_n = 0, \quad \forall n.$$

ii) De plus, à l'infini, on a :

$$\mathbf{v} \approx -U \mathbf{u}_x = \mathbf{grad}(-Ux) = \mathbf{grad}(-Ur \cos \theta) \quad \text{soit} \quad \phi \approx -Ur \cos \theta,$$

de telle sorte qu'en identifiant terme à terme avec le développement en série de Fourier de $\phi(r, \theta)$ où les termes en r^{-n} sont négligeables, il vient :

$$\alpha_1 = -U \quad \text{et} \quad \alpha_n = 0, \quad \forall n > 1.$$

A ce stade, on a

$$\phi(r, \theta) = \alpha_0 \ln r + \beta_0 + \left(\alpha_1 r + \frac{\beta_1}{r} \right) \cos(\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n r^{-n} \cos(n\theta),$$

avec $\alpha_1 = -U$.

iii) Sur le cylindre, la composante normale c'est-à-dire ici radiale de la vitesse doit s'annuler, d'où en dérivant $\phi(r, \theta)$:

$$0 = v_r(r = R, \theta) = \frac{\partial \phi}{\partial r}(r = R, \theta) = \frac{\alpha_0}{R} + \left(\alpha_1 - \frac{\beta_1}{R^2} \right) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} -n\beta_n R^{-n-1} \cos(n\theta),$$

d'où on tire immédiatement en annulant tous les termes du développement en série de Fourier :

$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_1 = R^2 \alpha_1 = -R^2 U \quad \text{et} \quad \beta_n = 0, \quad \forall n \geq 2.$$

En définitive, nous obtenons le potentiel ϕ . En omettant la constante β_0 qui reste indéterminée mais n'influence pas le champ des vitesses, nous avons

$$\phi(r, \theta) = -U \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta.$$

3. Les composantes du champ des vitesses $\mathbf{v}(r, \theta)$ s'obtiennent directement :

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -U \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \theta \quad \text{et} \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = U \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \theta.$$

Remarque : on a bien $\mathbf{v}_\infty = -U \cos \theta \mathbf{u}_r + U \sin \theta \mathbf{u}_\theta = -U \mathbf{u}_x$.

Sur le cylindre, en $r = R$, nous vérifions que $v_r = 0$ et nous obtenons :

$$v_\theta = 2U \sin \theta \quad \text{d'où} \quad \|\mathbf{v}\| = 2U |\sin \theta|.$$

On remarque que la vitesse $\|\mathbf{v}\|$ est inférieure à U si $|\sin \theta| < 1/2$. Ce résultat est cohérent avec l'examen des lignes de courant : la vitesse diminue par rapport à U là où les lignes de courant parties de l'infini s'évasent. Réciproquement $v > U$ là où les lignes de champs se resserrent c'est-à-dire pour $|\sin \theta| > 1/2$.

4. L'écoulement étant irrotationnel, nous pouvons utiliser le théorème de Bernoulli fort.

En négligeant le poids et en exprimant la constante à l'infini, nous obtenons la pression sur l'aile :

$$p(r = R, \theta) + \frac{1}{2} \rho v^2(r = R, \theta) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2,$$

soit

$$p(r = R, \theta) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta).$$

La résultante des forces de pression s'écrit

$$\mathbf{F} = - \int_0^{2\pi} p(r = R, \theta) (LRd\theta) (\cos \theta \mathbf{u}_x + \sin \theta \mathbf{u}_y) = \mathbf{0}.$$

Les termes indépendants de θ et proportionnels à $\sin^2 \theta$ dans la pression donnent une contribution nulle à la résultante des forces de pression. La résultante des forces de pression sur l'aile est donc nulle. L'avion ne subit aucune portance et aucune force de traînée. Ce résultat, non conforme à l'expérience, constitue le paradoxe de d'Alembert. On peut montrer qu'il est valable quelle que soit la forme de la section de l'aile.

5. Remarque : cette expression de la vitesse vérifie toujours $\mathbf{v}_\infty = -U \mathbf{u}_x$.

On en déduit immédiatement la valeur de la vitesse sur le cylindre où $r = R$:

$$\mathbf{v} = 0 \mathbf{u}_r + \left(2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}\right) \mathbf{u}_\theta.$$

En utilisant le théorème de Bernoulli fort, on trouve la pression sur le bord du cylindre :

$$p(r = R, \theta) + \frac{1}{2} \rho \left(2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}\right)^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2,$$

$$p(r = R, \theta) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho \left(U^2 - 4U^2 \sin^2 \theta - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2}\right) - \frac{\rho \Gamma U \sin \theta}{\pi R}.$$

6. En remarquant, comme nous l'avons déjà vu, que les termes indépendants de θ et proportionnels à $\sin^2 \theta$ dans la pression donnent une contribution nulle à la résultante des forces de pression, il reste :

$$\mathbf{F} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho \Gamma U \sin \theta}{\pi R} (LRd\theta) (\cos \theta \mathbf{u}_x + \sin \theta \mathbf{u}_y).$$

En remarquant que

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta = 0,$$

il reste

$$\mathbf{F} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho \Gamma U \sin \theta}{\pi R} (LRd\theta) \sin \theta \mathbf{u}_y = \rho \Gamma U L \mathbf{u}_y,$$

où on a utilisé que

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta = 2\pi \frac{1}{2} = \pi.$$

Nous obtenons donc une portance dès que $\Gamma > 0$. La traînée est nulle (cela s'explique par le fait qu'il n'y a pas de dissipation visqueuse ici). Γ apparaît comme une indéterminée du problème due au caractère excessif du modèle de l'écoulement parfait. En pratique, c'est la viscosité dans la couche limite qui fixe la valeur de Γ . Cette valeur est proportionnelle à la vitesse de l'avion, ce qui conduit à une portance de la forme $F = C_z \rho S V^2$. Le coefficient sans dimension C_z est appelé coefficient de portance ; il dépend crucialement de la forme et de l'inclinaison de l'aile décrite par l'angle d'attaque α : C_z croît avec α jusqu'à un certain angle critique α au-delà duquel la portance s'effondre de telle sorte que l'avion décroche.

2 Bilans macroscopiques

2.1 Amincissement d'un jet libre par la viscosité

Avant de commencer cet exercice, lire l'annexe jointe sur les bilans macroscopiques.

1. L'écoulement étant stationnaire et incompressible, il y a conservation du débit volumique :

$$\int_0^{R_0} v(r) 2\pi r dr = \int_0^{R_\infty} U_\infty 2\pi r dr. \quad (1)$$

On obtient

$$\pi R_0^2 U_0 = \pi R_\infty^2 U_\infty,$$

d'où

$$\frac{R_\infty}{R_0} = \sqrt{\frac{U_0}{U_\infty}}. \quad (2)$$

Ce résultat peut être démontré en effectuant un bilan de masse (figure 1).

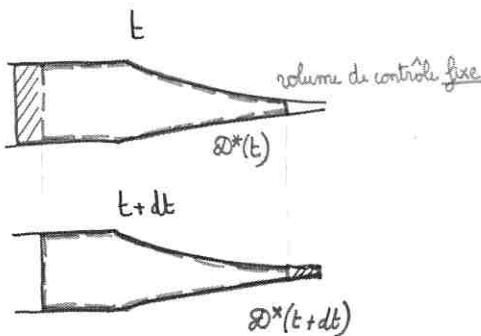


Figure 1 – Schéma identifiant les volumes de contrôle dans le problème du jet libre.

En effet, on a

$$M^*(t) = M(t) + dt \int_0^{R_0} \rho v(r) 2\pi r dr,$$

$$M^*(t + dt) = M(t + dt) + dt \int_0^{R_\infty} \rho v_\infty 2\pi r dr.$$

Dans ces formules, M^* se réfère au système fermé \mathcal{D}^* (en vert et bleu sur la figure 1) tandis que M correspond à la masse contenue dans le volume ouvert et fixe (en rouge sur la figure 1). Le terme

$dt \int_0^{R_0} \rho v(r) 2\pi r dr$ correspond à la masse qui entre dans le volume ouvert entre t et $t + dt$ (masse de la partie hachurée en vert) et $dt \int_0^{R_\infty} \rho v_\infty 2\pi r dr$ à la masse qui sort du volume ouvert entre t et $t + dt$ (masse de la partie hachurée en bleu).

Or $M^*(t + dt) = M^*(t)$, car $*$ est un système fermé donc

$$M(t) + dt \int_0^{R_0} \rho v(r) 2\pi r dr = M(t + dt) + dt \int_0^{R_\infty} \rho v_\infty 2\pi r dr.$$

L'écoulement étant stationnaire, on a aussi $M(t + dt) = M(t)$ d'où

$$\rho \left[\int_0^{R_0} v(r) 2\pi r dr - \int_0^{R_\infty} v_\infty 2\pi r dr \right] = 0.$$

On a bien conservation du débit volumique : on retrouve bien (1).

2. On utilise la même décomposition que pour la question précédente. On a

$$\begin{aligned} P^*(t) &= P(t) + dt \int_0^{R_0} \rho v(r) v(r) 2\pi r dr, \\ P^*(t + dt) &= P(t + dt) + dt \int_0^{R_\infty} \rho v_\infty v_\infty 2\pi r dr. \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0}$, on a $P^*(t + dt) = P^*(t)$. De plus, on est en régime stationnaire donc $P(t + dt) = P(t)$ d'où

$$\begin{aligned} \rho \left[\int_0^{R_0} v^2(r) 2\pi r dr - \int_0^{R_\infty} v_\infty^2 2\pi r dr \right] &= 0, \\ \int_0^{R_0} v^2(r) 2\pi r dr &= \int_0^{R_\infty} v_\infty^2 2\pi r dr. \end{aligned}$$

On obtient

$$\frac{4}{3} U_0^2 R_0^2 = R_\infty^2 U_\infty^2. \quad (3)$$

En combinant les équations (2) et (3), il vient

$$U_\infty = \frac{4}{3} U_0 \quad \text{et} \quad R_\infty = R_0 \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

3. Le problème étant stationnaire, il faut égaler le terme convectif d'ordre U^2/L où L est la longueur cherchée avec la dissipation en $\nu U/R_0^2$ ce qui donne en ordre de grandeur : $L/R_0 = UR_0/\nu = Re$.

2.2 Ressaut hydraulique dans un canal

Remarque importante On ne peut pas appliquer Bernoulli entre les domaines (1) et (2) car il y a forcément de la dissipation dans le ressaut.

1. Dans chacun des domaines (1) et (2), on néglige la viscosité, on utilise donc l'équation d'Euler. Le terme $\partial_t \mathbf{v}$ est nul car l'écoulement est stationnaire et le terme $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$ est nul car l'écoulement est parallèle et incompressible. On a donc, dans chacun des domaines

$$\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \mathbf{g}.$$

En projetant (1) sur la verticale, on a

$$\begin{aligned} p_1(z) &= p_0 + \rho g(h_1 - z) \quad \text{pour } z < h_1 \quad ; \quad p_1(z) = p_0 \quad \text{pour } z > h_1, \\ p_2(z) &= p_0 + \rho g(h_2 - z) \quad \text{pour } z < h_2 \quad ; \quad p_2(z) = p_0 \quad \text{pour } z > h_2. \end{aligned} \quad (4)$$

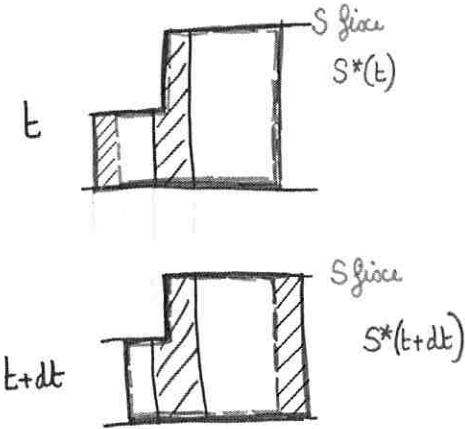


Figure 2 – Schéma identifiant les volumes de contrôle dans le problème du ressaut.

2. *Équation de conservation de la masse.*

Le débit volumique est $D_v = v_1 h_1 L = v_2 h_2 L$. On en déduit

$$v_1 h_1 = v_2 h_2 . \quad (5)$$

3. *Équation de transport de la quantité de mouvement.*

(a) On fait un bilan de quantité de mouvement. La figure 2 identifie le volume fermé et le volume ouvert fixe utilisés dans le calcul qui suit.

On a

$$\begin{aligned} P^*(t) &= P(t) + dt (\rho v_1 v_1 h_1 L) , \\ P^*(t + dt) &= P(t + dt) + dt (\rho v_2 v_2 h_2 L) , \end{aligned}$$

soit

$$\frac{dP^*}{dt} = \frac{dP}{dt} + \rho L (v_2^2 h_2 - v_1^2 h_1) .$$

Comme l'écoulement est stationnaire, $dP/dt = 0$. De plus, $dP^*/dt = F_{ext}$, où F_{ext} est la composante selon \mathbf{e}_x des forces extérieures. On a donc

$$F_{ext} = \rho L (v_2^2 h_2 - v_1^2 h_1) . \quad (6)$$

Il faut maintenant exprimer F_{ext} . Il s'agit des forces de pression. En utilisant (4), il vient

$$\begin{aligned} F_{ext} &= \int_0^{h_1} p_1(z) L dz + \int_{h_1}^{h_2} p_0 L dz - \int_0^{h_2} p_2(z) L dz , \\ &= \rho g L \left(\int_0^{h_1} (h_1 - z) dz - \int_0^{h_2} (h_2 - z) dz \right) , \\ &= \rho g L \left(\left[h_1 z - \frac{z^2}{2} \right]_0^{h_1} - \left[h_2 z - \frac{z^2}{2} \right]_0^{h_2} \right) , \\ &= \frac{1}{2} \rho g L (h_1^2 - h_2^2) . \end{aligned} \quad (7)$$

L'identification de (6) et (7) donne

$$\frac{1}{2} g h_1^2 + v_1^2 h_1 = \frac{1}{2} g h_2^2 + v_2^2 h_2 . \quad (8)$$

(b) En utilisant (5) et (8) il vient

$$v_1 = \sqrt{g \frac{h_2}{h_1} \frac{h_2 + h_1}{2}},$$

$$v_2 = \sqrt{g \frac{h_1}{h_2} \frac{h_2 + h_1}{2}}.$$

(c) En utilisant les définitions on a :

$$\text{Fr}_1 = \sqrt{\frac{\alpha(1+\alpha)}{2}},$$

$$\text{Fr}_2 = \sqrt{\frac{1+\alpha}{2\alpha^2}}.$$

(d) Pour $\alpha > 1$ (c'est-à-dire $h_2 > h_1$) on a $(1+\alpha) > 2$ soit $\alpha(1+\alpha) > 2\alpha > 2$ donc $\text{Fr}_1 > 1$ (régime super-critique ou torrentiel).

On a aussi $(1+\alpha) < 2\alpha$. Comme $1 < \alpha$ entraîne $2\alpha < 2\alpha^2$, on a donc $(1+\alpha) < 2\alpha^2$ c'est-à-dire $\text{Fr}_2 < 1$ (régime sous-critique ou fluvial).

En amont, la vitesse du fluide est plus grande que celle des ondes de surface, tandis qu'en aval, c'est le contraire.

(e) Avec $L = 1$ m, $v_1 L h_1 = 1.5 \text{ m}^3 \text{s}^{-1}$ et $h_1 = 0.2$ m, on a $v_1 = 7.5 \text{ m s}^{-1}$ et $\text{Fr}_1 = 5.4$. Pour trouver α , on résout $\alpha^2 + \alpha - 2\text{Fr}_1^2 = 0$. On trouve $\alpha = 7.1$ et $h_2 = 1.4$ m.

4. Bilan énergétique.

(a) On a

$$E^*(t) = E(t) + dt \int_0^{h_1} e_1(z) v_1 L dz,$$

$$E^*(t+dt) = E(t+dt) + dt \int_0^{h_2} e_2(z) v_2 L dz,$$

soit

$$\frac{dE^*}{dt} = \frac{dE}{dt} + L \left[\int_0^{h_2} e_2(z) v_2 dz - \int_0^{h_1} e_1(z) v_1 dz \right].$$

Pour retrouver la formule demandée dans l'énoncé, il faut ré-écrire cette relation dans sa forme plus générale, en s'appuyant sur le théorème de Reynolds (23). On a

$$\frac{dE^*}{dt} = \frac{dE}{dt} + \oint_{\text{SC}} e \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S},$$

où SC désigne le volume de contrôle fixe (en rouge sur la figure 2). Notons que dans le dernier terme, seuls les débits à travers les faces gauche et droite sont non nuls (ailleurs \mathbf{v} est orthogonal à $d\mathbf{S}$).

Comme l'écoulement est stationnaire, $dE/dt = 0$ d'où

$$\frac{dE^*}{dt} = \oint_{\text{SC}} e \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad (9)$$

De plus, $dE^*/dt = \mathcal{P}_{\text{int}} + \mathcal{P}_{\text{ext}}$, où \mathcal{P}_{int} correspond à la puissance des forces intérieures (forces visqueuses) et \mathcal{P}_{ext} est la puissance des forces de pression.

L'équation (9) se réécrit comme

$$\mathcal{P}_{\text{int}} + \mathcal{P}_{\text{ext}} = \oint_{\text{SC}} e \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad (10)$$

L'expression de \mathcal{P}_{ext} est donnée dans l'énoncé :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \iint_{\text{SC}} -p\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}.$$

où SC est le volume de contrôle fixe dessiné en rouge sur la figure 2.

L'équation (10) donne

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{int}} + \iint_{\text{SC}} -p\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\text{SC}} e\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}, \\ \mathcal{P}_{\text{int}} &= \iint_{\text{SC}} (e + p)\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}, \\ \mathcal{P}_{\text{int}} &= \iint_{\text{SC}} \rho \left(\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}.\end{aligned}$$

(b) On explicite l'équation ci-dessus

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{int}} &= \rho L \left[- \int_0^{h_1} \left(\frac{v_1^2}{2} + gz + \frac{p_1(z)}{\rho} \right) v_1 dz + \int_0^{h_2} \left(\frac{v_2^2}{2} + gz + \frac{p_2(z)}{\rho} \right) v_2 dz \right] \\ \mathcal{P}_{\text{int}} &= \rho L \left[-\frac{v_1^3}{2} h_1 + \frac{v_2^3}{2} h_2 - v_1 \int_0^{h_1} \left(\frac{p_0}{\rho} + gh_1 \right) dz + v_2 \int_0^{h_2} \left(\frac{p_0}{\rho} + gh_2 \right) dz \right] \\ \mathcal{P}_{\text{int}} &= \rho L \left[-\frac{v_1^3}{2} h_1 + \frac{v_2^3}{2} h_2 - v_1 \left(\frac{p_0}{\rho} h_1 + gh_1^2 \right) + v_2 \left(\frac{p_0}{\rho} h_2 + gh_2^2 \right) \right] \\ \mathcal{P}_{\text{int}} &= \rho D_v \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} - \frac{p_0}{\rho} - gh_1 + \frac{p_0}{\rho} + gh_2 \right) \\ &= \rho D_v \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} + gh_2 - gh_1 \right).\end{aligned}$$

En éliminant les vitesses grâce à la question 3(b), on obtient :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = -\rho g D_v \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_2 h_1}.$$

La puissance des forces intérieures se limite ici à celle des forces de viscosité. Le signe négatif de \mathcal{P}_{int} est lié au caractère dissipatif des forces de viscosité.

On reprend les résultats de l'application numérique ci-dessus pour trouver $\mathcal{P}_{\text{int}} = -22.7 \text{ kW}$. On a $\rho D_v C_p \Delta T = \dot{Q} = -\mathcal{P}_{\text{int}}$, d'où $\Delta T = \dot{Q}/(\rho D_v C_p) = 3.6 \text{ mK}$.

5. Vitesse de propagation d'un mascaret.

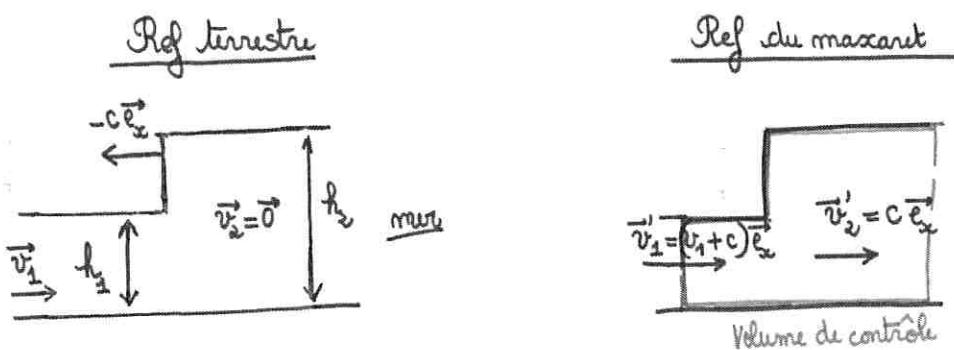


Figure 3 – Schéma du mascaret.

- (a) L'interface entre les deux écoulements se déplace à vitesse constante $-c \mathbf{u}_x$ dans le sens des x décroissants. On se place dans le référentiel lié à l'interface, en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $-c \mathbf{u}_x$, référentiel galiléen dans lequel l'écoulement est stationnaire avec des vitesses $v'_1 = v_1 + c$ et $v'_2 = c$ (voir figure 3).
- (b) En utilisant le résultat de la question 3(b) on a :

$$v'_2 = c = \sqrt{g \frac{h_1}{h_2} \frac{h_2 + h_1}{2}}.$$

- (c) Dans le cas limite où $h_2 \rightarrow h_1$, la vitesse de propagation devient $c = \sqrt{gh}$, où $h \simeq h_a \simeq h_2$. On retrouve la vitesse de propagation des ondes de gravité en eau peu profonde (voir TD2).

3 Ondes acoustiques

3.1 Couche anti-reflet en échographie

1. Le coefficient de transmission des puissances sonores à une interface air-muscle s'écrit :

$$\mathcal{T} = \frac{4Z_m Z_a}{(Z_m + Z_a)^2} = 9.4 \cdot 10^{-4}.$$

Le coefficient de transmission est très faible.

2. Rappel : L'impédance acoustique est définie comme $Z = \pm p/v$ où le signe dépend du sens de propagation de l'onde. Elle est réelle pour une OPP.

Les surpressions dans les trois milieux s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \underline{p}_1(x < 0, t) &= Z_a \underline{A}_a \exp(i\omega t - ik_a x), \\ \underline{p}_1(0 < x < e, t) &= Z_g \underline{A}_g \exp(i\omega t - ik_g x) - Z_g \underline{B}_g \exp(i\omega t + ik_g x), \\ \underline{p}_1(x > e, t) &= Z_m \underline{A}_m \exp(i\omega t - ik_g x). \end{aligned}$$

3. Aux interfaces, il y a continuité des composantes normales des vitesses et des pressions. Les conditions aux limites aux interfaces pour les vitesses et les pressions s'écrivent donc :

$$\underline{A}_a = \underline{A}_g + \underline{B}_g, \quad (11)$$

$$\underline{A}_g \exp(-ik_g e) + \underline{B}_g \exp(ik_g e) = \underline{A}_m \exp(-ik_m e), \quad (12)$$

$$Z_a \underline{A}_a = Z_g \underline{A}_g - Z_g \underline{B}_g, \quad (13)$$

$$Z_g \underline{A}_g \exp(-ik_g e) - Z_g \underline{B}_g \exp(ik_g e) = Z_m \underline{A}_m \exp(-ik_m e). \quad (14)$$

4. En éliminant \underline{A}_a avec les équations (11) et (13), il vient

$$\underline{A}_g (Z_g - Z_a) = \underline{B}_g (Z_g + Z_a), \quad (15)$$

et en éliminant $\underline{A}_m e^{-ik_m e}$ avec les équations (12) et (14), on a

$$\underline{A}_g \exp(-ik_g e) (Z_g - Z_m) = \underline{B}_g \exp(ik_g e) (Z_g + Z_m). \quad (16)$$

Le quotient de (15) et (16) donne

$$\frac{Z_g - Z_a}{Z_g + Z_a} \exp(ik_g e) = \frac{Z_g + Z_a}{Z_g + Z_m} \exp(-ik_g e),$$

qui peut se ré-écrire comme

$$\frac{Z_g - Z_a}{Z_g + Z_a} = \frac{Z_g - Z_m}{Z_g + Z_m} \exp(-2ik_g e). \quad (17)$$

C'est la relation que doivent vérifier les impédances et e pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie dans l'air.

5. Pour vérifier la pertinence de l'expression ci-dessus, on considère le cas particulier $Z_g = Z_m$. Dans ce cas, la condition d'adaptation d'impédance (17) impose bien $Z_a = Z_m$.

On décompose la condition (17) en partie réelle et partie imaginaire. L'égalisation des parties imaginaires implique que $\sin(2k_g e) = 0$ (car les impédances sont réelles). Il y a alors deux cas de figure :

- soit $2k_g e = 2n\pi$: l'égalité des parties réelles implique alors que $Z_a = Z_m$, ce qui est faux.
- soit $2k_g e = (2n+1)\pi$, c'est-à-dire $e = (2n+1)\lambda_g/4$: l'égalité des parties réelles entraîne alors que $Z_g^2 = Z_a Z_m$, soit $Z_g = 2.6 \cdot 10^4 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ ce qui est possible car le gel est un milieu d'impédance intermédiaire entre l'air et le muscle.

3.2 Isolation phonique

1. Rappel : Pour une onde plane progressive (OPP), l'impédance acoustique s'écrit comme $Z = \pm \rho_0 c$ où le signe dépend du sens de propagation de l'onde.

Le piston engendre une onde réfléchie et une onde transmise d'où les expressions proposées du champ des vitesses. Les champs des surpressions sont donnés par :

$$\begin{aligned}\underline{p}_1(x < 0, t) &= \rho_0 c A_1 \exp(i\omega t - ikx) - \rho_0 c \underline{B}_1 \exp(i\omega t + ikx), \\ \underline{p}_1(x > e, t) &= \rho_0 c \underline{A}_2 \exp(i\omega t - ikx + ike).\end{aligned}$$

2. La continuité des vitesses $\underline{v}_1(x = 0^-, t) = \underline{v}_1(x = e, t)$ donne :

$$A_1 + \underline{B}_1 = \underline{A}_2. \quad (18)$$

On applique le théorème de la résultante dynamique au piston, il vient

$$m \frac{dv}{dt} = S(p(x = 0^-) - p(x = e)).$$

Étant donnée la continuité des vitesses, on peut considérer dans cette formule soit $v(x = 0^-)$ ou $v(x = e)$. Le deuxième choix est plus pratique pour les calculs et on obtient :

$$i\omega(\rho S e) \underline{A}_2 = \rho_0 c S (A_1 - \underline{B}_1 - \underline{A}_2),$$

qui se simplifie en

$$i\omega \rho e \underline{A}_2 = \rho_0 c (A_1 - \underline{B}_1 - \underline{A}_2). \quad (19)$$

On utilise la condition aux limites (18) pour écrire $\underline{B}_1 = \underline{A}_2 - A_1$, que l'on substitue dans (19). On obtient alors :

$$\frac{\underline{A}_2}{A_1} = \left(1 + i \frac{\rho e \omega}{2\rho_0 c}\right)^{-1}.$$

3. D'après le cours, l'onde transmise et l'onde réfléchie se propageant dans le même milieu (même impédance), on a simplement :

$$\mathcal{T} = \left| \frac{\underline{A}_2}{A_1} \right|^2 = \left[1 + \left(\frac{\rho e \omega}{2\rho_0 c} \right)^2 \right]^{-1}.$$

Une atténuation d'au moins -40 décibels impose $\mathcal{T} < 10^{-4}$. On a $\mathcal{T} = 1/(1 + \alpha^2) < 10^{-4}$, donc $\alpha = \rho e \omega / 2\rho_0 c > 100$ ou encore $e > 100\rho_0 c / (\rho \pi f)$. On obtient $e > 7 \text{ mm à } 1 \text{ kHz}$ et $e > 7 \text{ cm à } 100 \text{ kHz}$.

4 Annexe : Rappels sur les bilans macroscopiques

Soit G une quantité physique extensive. Elle peut être la masse, la quantité de mouvement, le moment cinétique, l'énergie cinétique... Il y a deux types de bilans possibles.

— Bilan sur un système fermé et déformable (description lagrangienne)

Soit à l'instant $t = 0$ un volume $\mathcal{D}^*(0)$, que l'on suit avec le mouvement des particules fluides qu'il contient. On parle alors de **volume de contrôle matériel**. On a $\mathbf{v}(M, t)$ pour tous les points M du volume $\mathcal{D}^*(t)$ et de la surface $S^*(t)$ qui entoure le volume $\mathcal{D}^*(t)$. Cette dernière se déforme car elle est décrite par les particules de fluides qui bougent.

La variation de G entre t et $t + dt$ pour ce système fermé s'écrit

$$G^*(t + dt) - G^*(t) = \text{"cause de variation"}, \quad (20)$$

où "cause de variation" peut désigner des forces, un moment, un travail, ...

— Bilan sur un système ouvert (description eulérienne)

Adoptons maintenant un autre point de vue en considérant un système ouvert et fixe (voir figure 4). On peut écrire

$$\begin{aligned} G^*(t + dt) - G^*(t) &= (G(t + dt) + \delta G_2) - (G(t) + \delta G_1) \\ &= (G(t + dt) - G(t)) + \delta G_2 - \delta G_1 \\ &= (G(t + dt) - G(t)) - \delta G_e \quad \text{où} \quad \delta G_e = \delta G_1 - \delta G_2 \end{aligned} \quad (21)$$

est la quantité de G entrant algébriquement dans le volume de contrôle fixe entre t et $t + dt$.

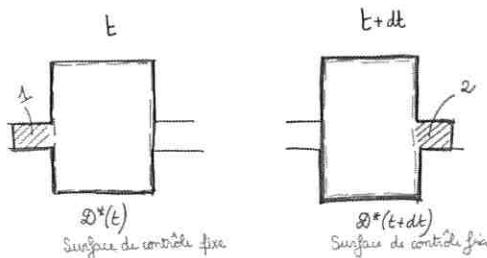


Figure 4 – Schéma illustrant les notions de système fermé et de système ouvert.

La loi (20) écrite pour le système fermé devient la forme (22) pour le système ouvert

$$G(t + dt) - G(t) = \text{"cause de variation"} + \delta G_e. \quad (22)$$

La quantité entrante de G (δG_e) apparaît comme une cause supplémentaire de variation de G pour le système ouvert.

Remarque 1 : Si l'écoulement est stationnaire, on a $G(t + dt) - G(t) = 0$: les bilans sont efficaces dès lors qu'on est capable d'exprimer la quantité entrante δG_e et le terme "cause de variation".

Remarque 2 : La décomposition (21) se réécrit plus formellement comme

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\mathcal{D}(t)} g \, dV \right] = \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial g}{\partial t} \, dV + \oint_{S(t)} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{S}, \quad (23)$$

où g est la quantité G volumique. C'est le théorème de transport (ou théorème de Reynolds).