LP P3 - Résonances dans différents domaines de la physique

Bryan GERARD, corrigé par Stephan FAUVE

26 décembre 2024

Bibliographie :
- BERKELEY, *Cours de physique - vol.3 - Ondes* (cote PhZ BER)
- FILLETTE, FROUSTEY, ROUSSILLE, *Physique pour l'agrégation* (cote PhZ FIL)

Niveau : PC
Prérequis :
- Résonances RLC-série
- Oscillateur harmonique amorti
- Modèle de l'électron élastiquement lié
- Cavité Fabry-Pérot

Passage obligé : Discuter du lien entre un pendule simple amorti et un circuit RLC série, ainsi que les manifestations de résonances de ces systèmes.

1 Introduction

Cadre général de la résonance et en pointer les différents aspects.

2 Oscillateur harmonique amorti en régime forcé

schéma RLC série

2.1 Résonance en position

Loi des mailles :

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = e$$

ou sous la forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = \frac{e}{LC} \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Linéarité $\longrightarrow$ Fourier $\longrightarrow \mathbb{C}$:

$$(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}j\omega + \omega_0^2)\,\underline{u}_C = \underline{e}K$$

soit

$$\underline{H}\omega) = \frac{\underline{u}_C}{\underline{e}} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

La résonance se produit pour $\frac{\mathrm{d}|\underline{H}|}{\mathrm{d}\omega} = 0$. On aura donc résonance que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\begin{cases} \omega_R = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \\ Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

2.2 Résonance en vitesse

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \quad \underset{\mathbb{C}}{\longrightarrow} \quad \times j\omega$$

Aux bornes de R, on regarde $R \times i$.

$$\underline{H}'(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j}{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

— résonance en $\omega_r = \omega_0$
— résonance $\forall Q$
— hauteur et largeur dépendant de Q

$$\Delta\omega_{\text{res}} = \frac{\omega_0}{Q}$$

Généralisation à l'oscillateur amorti :

$$M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \lambda\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kc = e \tag{1}$$

avec M la masse, λ l'amortissement et k la raideur.
L'équation est linéaire, on passe en complexe :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{x}}{\underline{e}} = \frac{1}{-M\omega^2 + k + j\omega\lambda}$$

2.3 Aspects énergétiques

(1) $\times\, \dot{x}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\underbrace{\frac{1}{2}M\dot{x}^2}_{\mathscr{E}_{\text{cin}}} + \underbrace{\frac{1}{2}kx^2}_{\mathscr{E}_{\text{pot}}}) = \underbrace{e\dot{x}}_{\mathscr{P}_{\text{fournie}}} - \underbrace{\lambda\dot{x}^2}_{\mathscr{P}_{\text{dissipée}}}$$

Résonance -> accumulation d'énergie dans le système

Définition énergétique des oscillations : phénomène par lequel l'énergie passe d'une forme cinétique à potentielle périodique.

2.4 Universalité des résonances

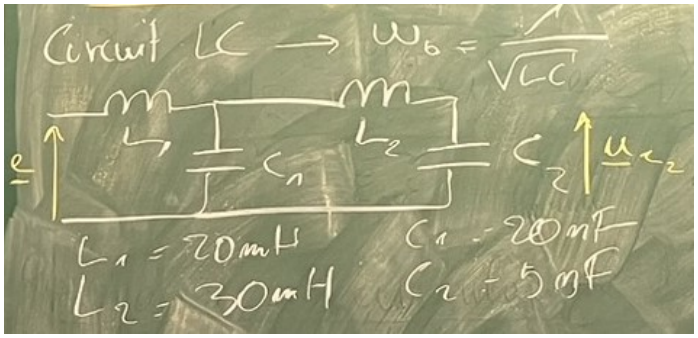
Système	RLC en C	Pendule pesant $\theta \ll 1$	e^- élastiquement lié
Domaine	élec	méca	e-mag
Grandeur étudiée	$u_C(t)$	$\theta(t)$	$r(t)$
ω_0	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\sqrt{g/\ell}$	$\sqrt{k/m}$
Termes dissipatifs	$R_i = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$	$-\lambda\vec{v}$	$-\frac{m}{\tau}\vec{v}$ (émission)
Facteur de qualité Q	$\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$	$\sqrt{\frac{g}{\ell}} \times \frac{m}{\lambda}$	$Q = \omega_0\tau$
$\mathscr{E}_{\text{cin}}$	$\frac{1}{2}Li^2$	$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$	$\frac{1}{2}m\dot{r}^2$
$\mathscr{E}_{\text{pot}}$	$\frac{1}{2}Cu^2$	$\frac{1}{2}mg\ell\theta^2$	$\frac{1}{2}kx^2$
Macro / micro ?	macro	macro	micro

2.5 Lien régime libre / forcé - 24'

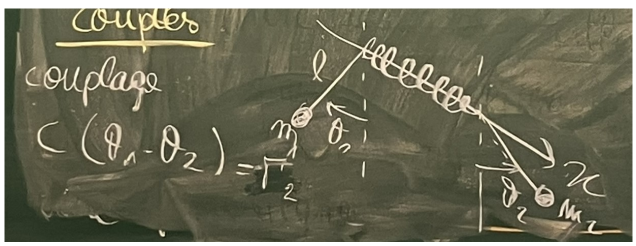
- oscillation libre à une pulsation propre ω_0 en réponse impulsionnelle.
- ω_0 d'autant plus proche de ω_{res} que Q est grand
- τ_{relax} augmente quand Q augmente

$$\underbrace{\Delta\omega_{\text{res}}}_{\alpha\ 1/Q} \times \Delta\tau_{\text{relax}} = 1$$

3 Résonances d'oscillateurs couplés - 28'



3.1 Système de deux oscillateurs couplés



Théorème du moment cinétique à {tige de masse nulle + m_1 + m_2} selon $\vec{e}_x$

$$\begin{cases} m\ell^2 \dfrac{\mathrm{d}^2\theta_1}{\mathrm{d}t^2} + mg\ell\theta_1 + C(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ \\ m\ell^2 \dfrac{\mathrm{d}^2\theta_2}{\mathrm{d}t^2} + mg\ell\theta_2 + C(\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \left(-\omega^2 + \omega_1^2\right)\theta_1 - \lambda\theta_2 = 0 \\ \\ \left(-\omega^2 + \omega_1^2\right)\theta_2 - \lambda\theta_1 = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 + \frac{C}{m\ell^2} \text{ et } \lambda = \frac{C}{m\ell^2}$$

La matrice suivante est réelle symétrique, donc diagonalisable. Ses vecteurs propres sont $\theta_1 + \theta_2$ et $\theta_1 - \theta_2$:

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_1^2 & -\lambda \\ -\lambda & -\omega^2 + \omega_1^2 \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$$

3.2 Système à une infinité de degrés de liberté

$$e = \frac{\lambda_0}{2p}\ ,\ p \in \mathbb{N}$$

sont les modes propres résonants -> infinité de modes propres.

$$Q \longleftrightarrow \mathscr{F}$$

Termes dissipatifs $\longleftrightarrow$ Pertes par transmission

4 Conclusion

- Manifestations temporelles et fréquentielles.
- Régime libre ou forcé
- Nombre de degrés de liberté = nombre de fréquences propres
- Macro / Micro

Questions

— **Quelle était la première définition de résonance que tu as donnée ? Et la définition énergétique ?**
Maximum d'amplitude à une certaine pulsation pour un système excité. Quand la puissance fournie par la source est maximale.

— **Tu peux réécrire le bilan d'énergie ?**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{(\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2)}_{\mathscr{E}_m}=e\dot{x}-\lambda\dot{x}^2$$

— **En moyenne elles sont pas toujours égales les puissance fournie et dissipée ? Quelle est la moyenne de toute cette équation ?**
Si l'énergie $\mathscr{E}_m$ est bornée, alors sa dérivée est nulle en moyenne. On a donc $<e\dot{x}>=<\lambda\dot{x}^2>$.

$$<\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_m}{\mathrm{d}t}>=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_m}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}(\mathscr{E}_m(T)-\mathscr{E}_m(0))=0$$

— **Justification de l'équation de l'électron élastiquement lié. En particulier, pourquoi l'émission de rayonnement est $-\frac{m}{\tau}\vec{v}$?**
On se place toujours autour d'une position d'équilibre et on regarde les oscillations dans le puits, on a toujours un rappel élastique au premier ordre en $-m\omega_0^2(r-r_0)$ et on ajoute une dissipation $-\lambda\vec{v}$

— **Quelle serait l'équation d'une particule qui évoluerait dans le potentiel $\mathscr{E}_p$?**

$$m\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=F=-\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}r}$$

Et si on est autour de la position d'équilibre $r=r_0+x$, développement limité.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega_0^2x$$

— **Qu'est-ce qu'on sait de l'émission de rayonnement électromagnétique par une charge ?**
Il faut que la charge soit accélérée.

— **Il faudrait donc que la force f liée au rayonnement dépende de l'accélération a. Est-ce qu'on peut trouver la puissance rayonnée P à partir de l'accélération, la vitesse de la lumière, la charge de la particule $q^2=e^2/\epsilon_0$?**
Théorème Pi.
$[P]=ET^{-1}$ $[c]=LT^{-1}$; $[q^2]=EL$; $[a]=L/T^{-2}$

$$[P]=c^\alpha\, a^\beta\,(q^2)^\gamma$$

Patati patata on obtient

$$P\propto\frac{q^2\times a^2}{c^3}$$

La force moyenne associée au rayonnement s'obtient par

$$P=-<f\dot{x}>\propto -a^2=-<\ddot{x}^2>=<\dot{x}\dddot{x}>$$

On en déduit que la force résultant du rayonnement est proportionnelle à $\dddot{x}$. Comme on a en première approximation $\ddot{x}=-\omega_0^2x$, la force liée au rayonnement est proportionnelle à $-\dot{x}$.

— **Pourquoi les notations ont-elles changé quand on a fait le lien avec le régime libre ?**
L'oscillation n'est pas vraiment à ω_0 si l'oscillateur est amorti.

$$\omega_{\text{libre}}=\sqrt{\omega_0^2-\frac{1}{2Q^2}}$$

C'est la même notation en fait : $\tau_{\text{relax}}=\tau$

— **Comment est-ce que tu interprètes $\tau\Delta\omega = 1$?**
Plus la résonance est piquée, plus les oscillations libres vont durer longtemps. La mécanique quantique on s'en fout. Je vais observer mon oscillateur amorti un temps τ, donc si τ est grand, la fréquence est très bien définie.

— **Equation du Fabry-Pérot par une analogie espace-temps ?**

$$\underbrace{e}_{2\pi/\omega} = p \underbrace{\frac{\lambda}{2}}_{\pi/\omega_0}$$

$$\omega_p = 2\omega_0$$

Résonance paramétrique.

— **Une équation en physique très connue qui donne la même relation ?**
La relation de Bragg :

$$p\lambda = 2d\sin\theta$$

— **Qu'est-ce qui se passe si on excite un LC non amorti ?**

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = e\cos(\omega t)$$

si $x = A\cos(\omega t + \varphi)$:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A\cos(\omega t + \varphi) = e\cos(\omega t)$$

donc $\varphi = 0$ et $A = \frac{e}{\omega_0^2 - \omega^2}$.
A ω différent de ω_0, on donne et reprend de l'énergie au système sur des parties différentes du cycle. En effet, quelque soit le forçage, l'énergie moyenne de l'oscillateur n'augmente pas.

Si $\omega = \omega_0$, on n'a plus de solution d'amplitude constante. La solution est de la forme $x = (e/2\omega_0)t\sin(\omega_0 t)$. Le forçage transfert continûment de l'énergie à l'oscillateur dont l'amplitude croit linéairement en temps. C'est la résonance.

Débrief

Un peu moins de temps sur tous les systèmes qui obéissent à cette équation. Passer plus de temps sur le Fabry-Pérot. Tous les systèmes du tableau récapitulatif obéissent à la même équation différentielle donc ce n'est pas très étonnant qu'on ait résonance partout.

Titre : Phénomènes de résonance dans divers domaines de la physique

Présentée par : TUGAYE Vincent

Rapport écrit par : LLOMPART Lucas

Correcteur : FAUVE Stéphane

Date : 03/01/2023

Bibliographie		
Titre	**Auteurs**	**Éditeur**
Tout en un PCSI		Dunod
Tout en un PC / PC*		Dunod
Ondes Mécaniques et Diffusion	Garing	Ellipses

Plan détaillé

(indiquer parties, sous-parties, 1 ou 2 phrases d'explications par sous-partie, et références)

Niveau choisi pour la leçon : CPGE

Pré-requis :
- Electrocinétique
- Mécanique du point
- Thermodynamique

0'00

Introduction

Résonance lorsque par exemple on relier une mase un ressort. Déplacement du point relier au ressort : max d'amplitude en se déplaçant à la fréquence de résonance.
Résonance du millenium bridge.
Phénomène utile pour réaliser des oscillateurs, des instruments de musique, …

3 exemples type de « résonateur :
- ⇨ Circuit RLC série. Résonance aux bornes de la capacité
- ⇨ Résonateur de Helmholtz, résonance acoustique
- ⇨ Système masse ressort déjà vu en amont.

2’50

I)Systèmes types

A) Circuit RLC série.

Schéma d’un circuit RLC série
Expérience : générateur en mode balayage de fréquence. On remarque qu’au niveau d’une certaine fréquence, amplitude bien plus élevée aux bornes du condensateur.

Expérience acoustique : phénomène de résonance reçu par un micro.

L’objectif de cette leçon est de faire le lien entre ces différents montages.

$$e - s = Ri + L\frac{di}{dt}$$

$$i = C\frac{ds}{dt}$$

$$C\frac{d^2s}{dt^2} + RC\frac{ds}{dt} + s = e$$

7’30

B) Masse – ressort

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = ky$$

9’10

C) Résonateur de Helmholtz

Hypothèse :

- pression P uniforme dans 2
- débit U uniforme dans 1
- λ la longueur d’onde ; l, L<<λ

Principe fondamentale de la dynamique sur 1 :

$$\frac{\rho l S}{S}\frac{dU}{dt} = S(P_e - P)$$

On définit la compressibilité isentropique par :

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P}\bigg|_S \approx \frac{1}{V_0}\frac{U dt}{dP}$$

$$\frac{\rho l \chi_S V_0}{S}\frac{d^2P}{dt^2} + P = P_e \qquad c^2 = \frac{1}{\rho \chi_S}$$

Nous remarquons que pour chacun des systèmes étudiés, nous obtenons une équation d'ordre 2. Il semble donc possible de pouvoir écrire une équation uniquement permettant de rendre compte des phénomènes de résonance.

18'30

D) Equation canonique

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{Q\omega_0}\frac{ds}{dt} + s = e(t)$$

	ω0	Q
RLC	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
Masse – ressort	$\sqrt{\frac{u}{m}}$	/
Helmholtz	$c\sqrt{\frac{S}{lv_0}}$	/

ω0 : pulsation propre
Q : facteur de qualité

22'45

II) Régime sinusoïdal forcé

$$e(t) = Re(\underline{E}e^{i\omega t})$$

$$s(t) = Re(\underline{S}e^{i\omega t})$$

$$\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \underline{H}$$

Ce que l'on obtient à l'oscilloscope notamment, ce n'est pas directement la fonction de transfert mais son module dont la valeur est la suivante :

$$\|\underline{H}\| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}}$$

Si l'on pose :

$$X = (\frac{\omega}{\omega_0})^2 \geq 0 \qquad f(X) = \frac{1}{\|\underline{H}\|^2} = \frac{X}{Q^2} + (1 - X)^2$$

$$f'(X) = \frac{1}{Q^2} - 2(1-X) = 2X + \frac{1}{Q^2} - 2$$

⇨ Si $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(X) \geq 0$: pas de résonance

⇨ Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $X = 2 - \frac{1}{Q^2}$: maximum de résonance

Résonance :

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{2 - \frac{1}{Q^2}}$$

Nous allons vérifier si avec le RLC série nous obtenons une fréquence de résonance comme prévu ci-dessus.

Expérience : *29'30 ➔38'00*
Utilisation des curseurs pour essayer d'être le plus précis possible.

$$f_{p,exp} = 4.845 \pm 0.085kHz$$

On compare avec la valeur attendue en utilisant les valeurs données pour la capacité, la bobine et la résistance.

$$\omega_0 = 31.6kHz$$

$$Q = 6.3$$

$$\omega_{p,calc} = 41.4kHz$$

L'erreur obtenu peut être du au fait que l'on négligé la résistance de la bobine.

40'00

Conclusion

Panorama non exhaustive de système résonant.
Sur un circuit RLC, on aurait aussi pu étudier ce que l'on obtient aux bornes de la bobine. Nous obtenons alors un phénomène d'antirésonance avec la tension aux bornes de la bobine qui s'annule pour certaines fréquences.
Concept du haut-parleur qui vient mélanger tous les domaines étudiés pour étudier un phénomène de résonance.
Il aurait aussi été possible d'étudier des systèmes avec plusieurs ddl

42'50 : Fin

Questions posées par l'enseignant (avec réponses)

(l'étudiant liste les questions posées, ainsi que les réponses données par l'enseignant. Si certaines réponses manque, l'enseignant pourra compléter le document)

Q : L'équation du ressort écrite durant la leçon est-elle juste ?
C'est plutôt un d2y/dt2.

Q : Comment on la démontre cette équation ?
Référentiel de la masse et on étudie un couplage inertiel.

Q : Pouvez vous reprendre la valeur trouvée de ω0 pour le résonateur de Helmholtz
La formule était effectivement écrite dans le mauvais sens.

Q : Est-ce que l'on a toujours une résonance proche de la fréquence propre du système ?
Pour les résonances paramétriques : la résonance se fait à 2*f0.

Q : Résonance en optique ?
Le Fabry Pérot : ressemble à la résonance dans le tuyau acoustique sans le col.

Q : Que se passe-t-il si l'on force/excite un oscillateur harmonique non amorti.
On obtient une divergence dans la fonction de transfert : oscillations qui vont croitre infiniment. Il n'y a pas de régime permanent, uniquement un régime transitoire d'une durée infini.

Q : Et avec une excitation sinusoïdale ?
Si w est différent de w0, on trouve une solution stationnaire. Et l'amplitude diverge pour ω = ω0.

Q : Quel est donc la solution pour ω = ω0 ?
Il y a un t qui apparait. Il faut donc chercher les solutions en t*cos(ω0*t) et t*sin(ω0*t). Il n'y a

Q : Pourquoi ne pas présenter le phénomène de résonance au départ sans prendre en compte l'amortissement.
Pas de système réel sans amortissement mais on garde la sensation de cacher le phénomène de résonance en prenant l'amortissement en compte. Il vaut donc peut être mieux discuter au départ du phénomène de résonance sans amortissement car il est alors plus simple de l'apprécier.

Q : Pour le système masse-ressort excité, quel sera la valeur du déphasage lorsque w tend vers w0 ?
Lorsqu'ω tend vers 0 : déphasage nul
Lorsqu'ω grand devant ω0 : opposition de phase avec l'entrée
A la résonance : le déphasage sera donc de π/2.
Il est alors possible d'étudier l'argument de H pour déterminer la valeur du déphasage mais on peut également l'apprécier qualitativement.

Q : Quel est la relation entre le temps d'amortissement et la largeur de la résonance ?
τ = 1/Δω. Nous avons donc que plus le temps d'amortissement est grand, plus nous aurons de précision sur la fréquence de résonance.

Commentaires lors de la correction de la leçon

(l'étudiant note les commentaires relatifs au contenu de la leçon : niveau, sujets abordés, enchaînement, réponses aux questions, etc. L'enseignant relit, et rectifie si besoin)

- ⇨ Peu de choses ont été faites car beaucoup de temps a été passé sur les expériences. Il aurait aussi été possible d'étudier les résonances paramétriques, le Fabry Pérot en optique, résonance de Bragg (qui peut tomber dans le programme de CPGE et qui ressemble à la résonance paramétrique), …
- ⇨ Il vaut peut-être mieux discuter au départ du phénomène de résonance sans amortissement car il est alors plus simple de l'apprécier.
- ⇨ Il est également important de discuter du phénomène de déphasage dans cette leçon ce qui n'a pas été fait ici. Saut de phase entre avant et après la résonance.
- ⇨ Il faut discuter le fait que $\tau * \Delta\omega = 1$.
- ⇨ Pour gagner du temps, il peut être utile de mettre les équations électriques et de mécanique en prérequis et ainsi pouvoir discuter plus longuement les phénomènes de résonance bien plus en profondeur. Cela permet aussi d'éviter d'avoir des questions sur comment on obtient ces équations.

Exemples de « passages obligés » sur cette leçon

Pour pouvoir transférer efficacement de l'énergie ou de la quantité de mouvement en forçant un système, il faut que le forçage satisfasse une condition de résonance qui peut être une relation entre deux fréquences ou une relation entre deux longueurs.

Dans le cas temporel, la condition entre les deux fréquences dépend du type de forçage, additif ou paramétrique.

La dissipation masque le phénomène de résonance. Sans dissipation, la réponse du système forcé est qualitativement différente à résonance (transfert moyen d'énergie non nul) ou hors résonance (pas de transfert moyen d'énergie quel que soit l'intensité du forçage).

Il ne faut pas se limiter au circuit RLC ou à son équivalent mécanique. La formule de Bragg se montre en 2 lignes de calcul et permet de discuter de nombreux exemples de résonance. En incidence normale, elle permet de discuter l'effet d'un forçage spatial d'une onde par le potentiel cristallin et d'expliquer l'existence de bandes de conduction. Elle est analogue à la condition de résonance paramétrique dans le cas temporel. On peut aussi discuter le Fabry-Pérot (plus long).