36min00s

On trace la variation de T en fonction de θ et on fait l'ajustement avec la formule de Borda pour vérifier qu'elle est bien vérifiée.
37min20s

On ne trouve pas la valeur 16 ici : il faut aller plus loin dans le développement de la formule de phase. Dans le portait de phase de cet oscillateur, on obtient plutôt un amortissement ($\rightarrow$ portrait de phase montré sur slide).
38min30s

II– Oscillateurs amortis
Équation différentielle :

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0$$

avec un terme de frottement supplémentaire γ :

— $\gamma > 0$: dissipation ($\rightarrow$ sur slide : illustration du portrait de phase)
— $\gamma < 0$: amplification ($\rightarrow$ sur slide : illustration du portait de phase)

40min00s

Il manque quelque chose ici pour prendre en compte le cas de l'horloge : c'est l'oscillation auto-entretenue. Par exemple oscillateur de Van der Pol. Dans ce cas le coefficient γ change de signe selon la valeur des amplitudes des oscillations.
41min00s
$\rightarrow$ illustration des oscillations et des portraits de phase de l'oscillateur de Van der Pol sur slide.
41min50

Questions posées par l'enseignante (avec réponses)

Q : Quelle est la définition du portrait de phase ? Est-ce que c'est toujours un diagramme $(x,\dot{x})$?
C'est pas toujours $(x,\dot{x})$.

Q : Que se passe-t-il s'il y a deux oscillateurs couplées ?
Si on a deux oscillateurs, il faut prendre une dimension supplémentaire.

→ Ca va être par exemple $(x, \dot{x}, y, \dot{y})$.
Q : Comment on déduit le portrait de phase à partir d'une équation ? Par exemple quelle est l'espace des phases pour une équation du cercle : $\dot{\theta} = \nu + \sin(\theta)$?
Ici c'est juste θ.
→ La recette générale est de mettre les équations gouvernant le système sous la forme d'un système d'équations différentielles couplées du premier ordre. L'espace des phases est alors donné par l'ensemble des fonctions impliquées.

Q : C'est quoi le sens des trajectoire des portraits de phase ? Pourquoi il y a des fois des flèches et des fois pas ?
C'est parce qu'au début on ne pouvais pas discrimer le sens des trajectoires dans l'espace des phases car l'équation différentielle est réversible.

→ Les trajectoires sont toujours parcourues dans un sens déterminé que l'équation soit réversible ou non.
Q : Dessine un portrait de phase à partir des deux équations différentielles suivantes : $\dot{x} = y$ et $\dot{y} = -\omega_0^2 x$. Comment la trajectoire est-elle parourue ?
→ La première équation montre que si y>0, x croit. Cela donne le sens dans lequel la trajectoire est parcourue.

Q : À quoi sert de rajouter le terme en λ dans la non linéarité pour démontrer la formule de Borda ?
Il permet de faire l'identification des termes en $\sin(3\omega t)$ à l'ordre le plus bas.

Q : Dans l'équation du portrait de phase, la constante est déterminée par quoi ?
Ce sont les conditions initiales qui déterminent la valeur de la constante. Il en faut deux : la vitesse et la position dans le cas d'un espace des phases de dimension 2.

Q : Quels exemples d'effets non-linéaires existent-ils dans les oscillateurs ? Avec application et phénomènes nouveaux ?
Les milieux non linéaires en optique par exemple avec le doublage ou triplage de fréquence d'un laser.

Q : Exemples en physique des solides ou physique des matériaux de phénomènes non-linéaires ? En particulier qui dépendent de la température ?
La dilatation des matériaux : exemple de non linéarité d'oscillateur. Cela se voit à partir de l'énergie potentiel cristallin (potentiel de Lennard-Jones). Au fond du puits il y a des oscillations harmoniques, et avec la température, les oscillations sont plus

fortes en amplitude. Or le potentiel est non symétrique donc les excursions vers une distance d plus grande entre les atomes voisins sont favorisées.

Q : C'est quoi un oscillateur de relaxation ? C'est quoi la différence avec un oscillateur sinusoïdal ?
C'est un oscillateur avec deux échelles de temps très différentes. Pendant de longues phases, le système semble à l'équilibre et ensuite il y a une variation brusque sur un temps court. Cela est différent d'un oscillateur sinusoïdale.

Q : Que se passe t'il si on lâche le pendule à la verticale, vers un angle proche de pi. Vers quoi tend la période ?
Elle tend vers l'infini car on part d'un point d'équilibre instable.

Commentaires lors de la correction de la leçon

Dans cette leçon il faut définir précisément l'espace des phases.. Il faut aussi donner des exemples d'application de la génération d'harmoniques, par exemple dans le cas du doublement de fréquence laser.

Il faut accorder une partie de la leçon aux ondes entretenues car c'est ce qui permet la mesure du temps dans la vie quotidienne. Il faut aussi donner l'exemple d'un oscillateur de relaxation. Si on parle de Van der Pol, il faut dire que selon la valeur du paramètre γ, on a un comportement presque sinusoidal (γ voisin de zéro) ou un oscillateur à relaxation (γ grand).

Il n'est pas utile de discuter d'ondes non linéaires ou de solitons.

L'expérience présentée était trop longue. Le plus simple et rapide est de faire un premier enregistrement à faibles oscillations, un second enregistrement à grandes oscillations et de remarquer que la période varie beaucoup. Faire l'ajustement de la formule de Borda pendant la préparation si on a le temps et présenter le résultat sans faire l'expérience devant le jury.

Exemples de « passages obligés »sur cette leçon

Il est indispensable de définir correctement l'espace des phases et de montrer comment il peut être exploité pour décrire qualitativement le comportement de solutions d'une équation différentielle sans avoir à l'intégrer explicitement. Il faut par ailleurs

Titre : Oscillateurs : Portraits de phase et non-linéarité

Présentée par : François Kamal-Youssef

Rapport écrit par : ADDC

Correcteur : Jean-Noël Aqua

Date : 27/01/2025

Bibliographie		
Titre	**Auteurs**	**Éditeur**
Physique pour l'agrégation	Fillette, Froustey, Roussille	Deboeck supérieur
Vibrations, propagation, diffusion	Soutif	Dunod
Les oscillateurs électriques et mécaniques		CRDP de Lyon

Compte-rendu détaillé de la leçon

Pas de photographies de brouillons ! Le compte-rendu doit être rédigé, pour que l'enseignant puisse corriger si nécessaire.

Niveau choisi pour la leçon **: Licence**

Pré-requis **: Oscillateurs harmoniques**
Dynamique newtonienne (PFD, TMC, bilans énergétiques)
Cinématique (coordonnées polaires)
Électronique

Introduction :

Les oscillateurs sont des systèmes physiques qui vont répéter un comportement de manière périodique. Exemple dans la vie de tous les jours : cycle jour/nuit, battements du cœur…

Ces oscillateurs ne sont pas linéaires en général mais on fait souvent des approximations en physique pour linéariser ces systèmes. On va voir aujourd'hui la différence entre les oscillateurs linéaires et non linéaires.

I / Oscillateurs linéaires et portraits de phase

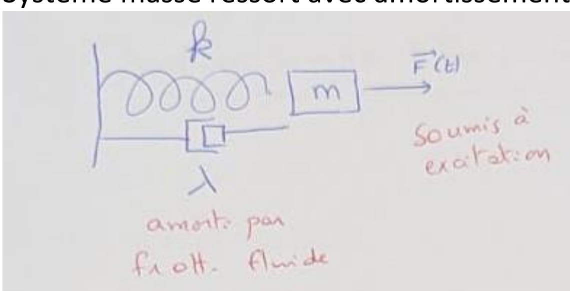
1) Oscillateurs harmoniques et électrique

Equation générale pour un oscillateur :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = g(t)$$

On peut donner deux exemples : un mécanique (système masse+ressort) et un électrique (circuit RLC)

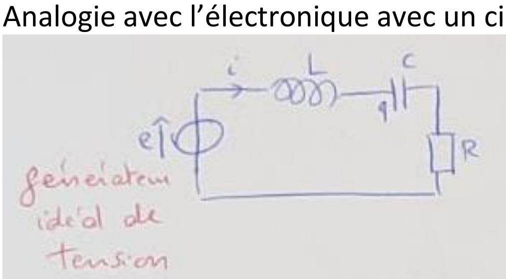
<u>Exemple mécanique :</u>
Système masse ressort avec amortissement



On applique le PFD et on trouve l'équation :

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = f(t)$$

<u>Exemple électrique :</u>
Analogie avec l'électronique avec un circuit RLC :



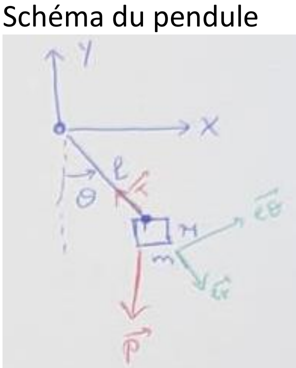
Avec la loi des mailles, on l'équation suivante :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = e(t)$$

On a une analogie entre le système électrique et le système mécanique. On va maintenant se concentrer sur un autre système mécanique : le pendule simple.

2)Pendule simple

Schéma du pendule



Par une approche énergétique, on trouve :

$$E_c = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$E_p = mgl(1 - \cos\theta)$ avec comme origine de potentiel $E_p(y = -l) = 0$

Comme on a conservation de l'énergie, on peut écrire :

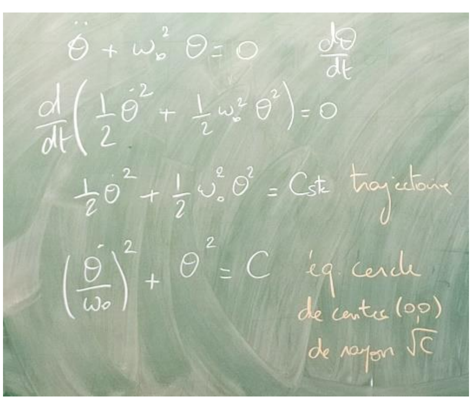
$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Avec $\sin\theta \simeq \theta$, on retrouve bien l'équation d'un oscillateur harmonique non amorti et l'isochronisme des oscillations avec une période propre et de pulsation propre :

$T_0 = 2\pi * \sqrt{\frac{l}{g}}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

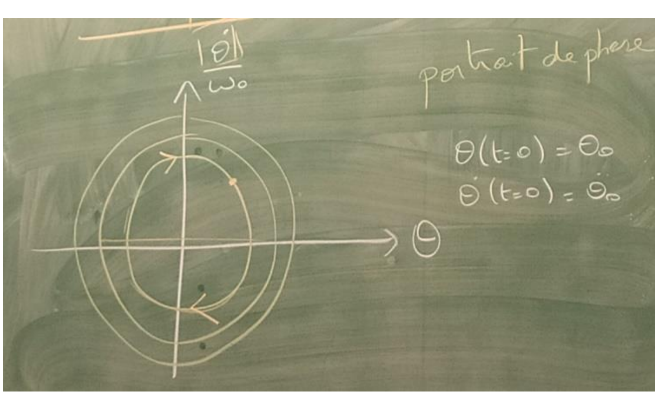
3)Portraits de phase

Équation harmonique
On peut réécrire cette équation sous la forme



On reconnaît l'équation d'un cercle de centre à l'origine et de rayon racine de C

Portrait de phase : évolution de theta point en fonction de theta ⇔ la vitesse en fonction de la position.



Le sens de parcours du portrait de phase est déterminé car pour theta point positif, theta augmente et vice-versa.

On a traité le cas du pendule aux petites oscillations mais on va s'intéresser maintenant à des angles plus grands et donc à l'aspect non-linéaire.

II / Oscillateurs non-linéaires

1) Formule de Borda

En repartant de l'énergie mécanique, on peut écrire :

$$\frac{1}{2}mgl^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta) = mgl(1-cos\theta_0)$$

En exprimant theta point = dtheta/dt , on obtient :

$$\frac{d\theta}{\pm\omega_0\sqrt{2(\cos\theta-\cos\theta_0)}} = dt$$

En intégrant dt sur un quart de période, on obtient avec une identité trigonométrique :

$$\int_0^{\frac{T}{4}} dt = \frac{T}{4} = -\frac{1}{2\omega_0}\int_{\theta_0}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

On fait le changement de variable suivant :

$$\sin\frac{\theta}{2} = X\sin\psi$$

$$T = \frac{2T_0}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-X^2\sin^2\psi}} = \frac{2T_0}{\pi} * K(X)$$

On peut approximer la fonction K(X) au deuxième ordre :

$$K(X) \simeq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}X^2$$

On obtient donc la formule de Borda :

$$T = T_0(1+\frac{\theta_0^2}{16})$$

Exploitation d'un script Python pour comparer la période pour les petites oscillations, la formule de Borda et la période réelle calculée avec la fonction K(X).

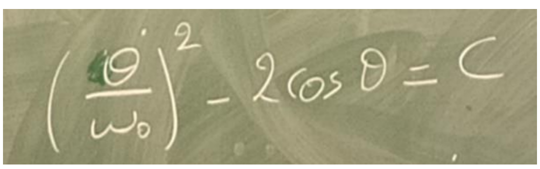
Expérience quantitative :

Acquisition temporelle de plusieurs périodes du pendule avec LatisPro.
Mesure de la période et de l'angle initial sur LatisPro
Exploitation sur QtiPlot : ajustement avec la formule de Borda (Chi carré de 0.38 et une valeur de la constante de Borda de 14.59+-0.1 au lieu de 16) -> calcul d'un z-score de 14.

Expérimentalement, la formule de Borda fonctionne bien jusqu'à 70° environ. Maintenant, on peut s'intéresser au portrait de phase pour le cas non-linéaire.

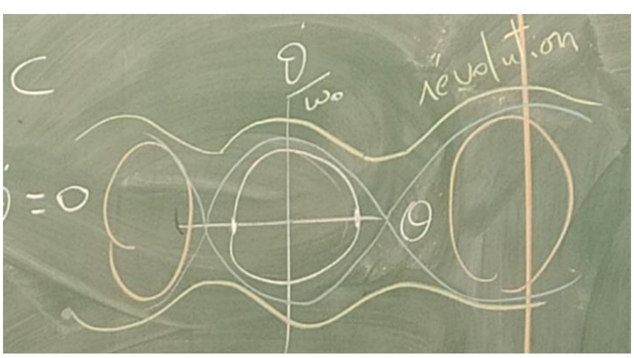
2) Portraits de phase non linéaire

En reprenant l'équation de conservation de l'énergie mécanique, on a :
L'énergie mécanique est conservée, on peut donc écrire :



Plusieurs cas possibles :

Cas 1 : -2<C<2 -> il existe des cas où theta point = 0
Cas 2 : C>2 , il n'existe pas d'annulation de theta point -> trajectoire de révolution
Cas 3 : C=2, régime critique -> il y a des points d'arrêts de la trajectoire.



$$E_m = \frac{1}{2}ml^2\theta^2 + mgl - mgl\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad 2\left(\frac{E_m}{mgl} - 1\right) = C = \frac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2} - 2\cos\theta$$

Comme Ec>= 0, on a que $E_m \geq E_p$ et donc :

$$\frac{E_p}{mgl} \geq \frac{C}{2} + 1$$

Le portrait de phase permet de comprendre l'évolution du système.

On a d'autres exemples d'oscillateurs non-linéaires comme le pont de Wien qu'on verra la prochaine fois.

Expérience(s) réalisée(s) :

- *Manip : Pendule simple*

Acquisition de l'angle en fonction du temps avec LatisPro
Mesure de θ_0 et de T
Ajustement sur QtiPlot de la formule de Borda

Questions posées par l'enseignant (avec réponses)

C'est au binôme de prendre en note les questions posées par l'enseignant. Et autant que possible de prendre en note les **bonnes** réponses (donc pas nécessairement celles données par l'étudiant au tableau)

L'enseignant pourra compléter les questions et bien sûr les réponses.

Merci de respecter le format ci-dessous autant que possible.

Question : Est-ce qu'on peut donner d'autres exemples de système non-linéaires ?

Réponse : L'horloge (oscillateur forcé non linéaire), le tympan (membrane qui vibre, système non linéaire), la dilatation des matériaux (vibration des atomes dans un puits de potentiel non-linéaire pour de grandes amplitudes).

Question : Des choses à dire sur le comportement chaotique d'un oscillateur ? C'est quoi le chaos pour les oscillateurs ?

Réponse : On peut l'avoir avec des systèmes à plus qu'un degré de liberté (pendule double). Le portrait de phase sera alors à plusieurs dimensions et extrêmement sensible aux conditions initiales. Ex : la météo

Question : Qu'est-ce qui est qualitativement important dans les oscillateurs non-linéaires dans le comportement ?

Réponse : Réponse fréquentielle d'un système non-linéaire : on excite un système à une fréquence donnée, d'autres fréquences sont excitées dans le spectre. Qualitativement, la fréquence d'excitation est différente des fréquences de réponse.

Question : Qu'est-ce qui n'a pas marché dans l'expérience ?

Réponse : Il manquait le programme pour tracer un portrait de phase expérimental sur l'ordinateur. Un peu déçu de la valeur de 14.59 mais cela peut venir de l'ajustement qui va jusqu'à 70°. En refaisant l'ajustement jusqu'à 50°, on trouve 14.9. C'est mieux mais pas parfait encore

Question : Vous êtes allé un peu vite sur le changement de variable, d'où ça vient ? Est-ce que vous pouvez développer un peu ?

Réponse : Voir compte-rendu P4

Question : Pourquoi le changement de variable fait intervenir deux variables alors qu'il n'y en avait qu'une variable avant ?

Réponse : Adimensionnement de l'intégrale et theta_0. X est relié à theta_0

Commentaires lors de la correction de la leçon

Le binôme prend en note les commentaires de l'enseignant liés au contenu de la leçon : choix des thématiques abordées, plan choisi, notions hors-programme, expériences, respect du format de la leçon. **L'enseignant ajoute ou modifie abondamment des commentaires à posteriori.**

Les commentaires relatifs à la prestation de l'étudiant (rapidité, élocution, enthousiasme, niveau disciplinaire, etc.) sont à remplir sur la fiche « Évaluation » par l'enseignant, qui sera mis à disposition de l'étudiant passé à l'oral uniquement.

Beaucoup de temps sur les oscillateurs harmoniques

Leçon agréable à écouter, bon rythme dans la leçon, leçon bien construite

Il y a de la physique à interpréter dans la leçon (dire que la période dépend de l'amplitude)

On peut rajouter des exemples dans la leçon (exemple de la vie de tous les jours) à traiter de manière qualitative pour ajouter du contenu physique.

Exemples de « passages obligés » sur cette leçon

Questions posées par l'enseignant (avec réponses)

C'est au binôme de prendre en note les questions posées par l'enseignant. Et autant que possible de prendre en note les **bonnes** réponses (donc pas nécessairement celles données par l'étudiant au tableau)

L'enseignant pourra compléter les questions et bien sûr les réponses.

Merci de respecter le format ci-dessous autant que possible.

Question : Pourquoi on peut négliger les frottements sur un temps court ? Est-ce qu'on peut le comprendre avec l'équation ?

Réponse : sur un temps court par rapport au temps d'amortissement mais long par rapport à la période du pendule, l'amplitude des oscillations ne change presque pas.

Question : Quelles sont les non-linéarités dans le cas du système masse-ressort ? Et dans le circuit RLC ? Pourquoi on va avoir un terme non-linéaire pour l'inductance ? Et pour le condensateur ?

Réponse : On va avoir w02 qui va dépendre de x (sortie du ressort du régime linéaire). Pour la bobine, on peut avoir une saturation d'un milieu magnétique (cœur ferromagnétique) et pour la capacité, c'est une saturation du diélectrique entre les armatures.

Question : Pourquoi il n'y a pas de correction en theta0 pour la formule de Borda ?

Réponse : On peut s'y atteindre à cause de la symétrie par rapport à Oz du pendule.

Question : Est-ce que le fait que la fréquence dépendant de l'amplitude est le seul phénomène caractérisant la non-linéarité ?

Réponse : On retrouve un spectre contenant plusieurs fréquences pour un oscillateur non-linéaire i.e. le fondamental et ses harmoniques. La création d'harmoniques est un phénomène non-linéaire important qu'il faut discuter. Mentionner aussi des applications possibles en optique non-linéaire par exemple.
Phénomènes de bifurcation, de saturation et de transition vers le chaos

Question : C'est quoi la définition du plan de phase ?

Réponse : Il faut écrire le système sous la forme de n équations du premier ordre. Les fonctions du temps impliquées (x_1(t), x_2(t), …, x_n(t)) définissent l'espace des phases.

Question : Est-ce que tu peux écrire le pendule sous la forme d'équations du premier ordre ?

Réponse : On pose dtheta/dt = phi et on obtient d phi/dt = -omega_0^2 sin theta. Dans ce cas, l'espace des phases, c'est theta et phi = dtheta/dt

Question : Si on se place dans le cas le plus général (espace des phases : x et y), comment est la tangente en un point initial choisi ?

Réponse : Les équations sont dx/dt = f(x, y), dy/dy = g(x, y). On a pour la tangente à la trajectoire dy/dx = g (x, y)/f(x, y). Les équations du mouvement permettent donc de tracer la tangente à la trajectoire dans l'espace des phases en tout point.

Question : Faisons cela pour le pendule. On voyait des tangentes orthogonales pour les points sur les axes. Est-ce que tu peux l'expliquer pour l'axe de phi ? Et pour l'axe theta ? Est-ce que c'est toujours vertical ?

*Réponse : on a dphi/dtheta = -w02 * sin theta / phi. Or theta = 0 et phi non nul sur l'axe phi, donc pente bien horizontale.*
Sur l'axe theta (phi = 0), on trouve une pente infinie donc verticale tant que theta est différent de n pi. On trouve une pente finie pour theta = n pi.

Question : Pour theta proche de pi, comment sont les trajectoires ? Est-ce que tu peux le montrer ?

Réponse : Ce sont des branches d'hyperboles. Faire un DL autour de pi – epsilon et écrire l'équation différentielle en multipliant par depsilon/dt.