LINEAR ALGEBRA

Determinan

Muhammad Afif Hendrawan, S.Kom., M.T.

Outlines

- Pengantar Determinan
- Determinan (Definisi Formal)
- Determinan dengan Ekspansi Kofaktor
- Determinan Matriks Segitiga

Pengantar Determinan

Pengantar Determinan (1)

- Tinjau kembali matriks 2×2 memiliki inverse jika dan hanya jika determinantnya tidak nol → $ad - bc \neq 0$
- Untuk memanfaatkan konsep ini pada matriks yang lebih besar → Diperlukan definisi determinan untuk matriks $n \times n$
- Kita dapat mendefinisikan determinan matriks 3×3 dengan **memperhatikan apa yang terjadi jika inverse matriks A, 3×3 adalah hasil OBE (row reduced)**

Pengantar Determinan (2)

- Jika $A = [a_{ij}]$ dengan $a_{11} \neq 0$
- Jika kita kalikan baris 2 dan dari tiga dari A dengan a_{11} dan kurangi dengan perkalian tertentu dari baris 1 dengan baris lainnya (OBE), maka matriks yang ekivalen dengan A

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} \\ a_{11}a_{31} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{bmatrix}$$

- Karena A mempunya inverse, elemen $(2{,}2)$ atau elemen $(3{,}2)$ pada matriks sebelah kanan tidak bernilai 0

Pengantar Determinan (3)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} \\ a_{11}a_{31} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{bmatrix}$$

- Misal elemen (2,2) tidak 0 → Kali baris 3 dengan $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, pada baris 3 baru tambahkan – $(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$ kalikan baris 2 → Didapatkan

$$A \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & 0 & a_{11}\Delta \end{bmatrix}$$

- Dimana $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

Pengantar Determinan (4)

$$A \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & 0 & a_{11}\Delta \end{bmatrix}$$

Dimana $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

- Karena A memiliki inverse, Δ bernilai tidak nol (nonzero)
- Δ → Determinan dari matriks A, 3×3

Pengantar Determinan (5)

- Tinjau kembali matriks 2×2, matriks $A = [a_{ij}]$ dengan $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- Untuk matriks 1×1 → $A = [a_{11}]$ → $\det A = a_{11}$
- Untuk mengeneralisi konsep tersebut pada matriks yang lebih besar →Gunakan determinan matriks 2×2 untuk menentukan determinan matriks 3×3 → Δ

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

- Δ dapat dikelompokan dan ditulis ulang dengan,

$$(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) - (a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31})$$

$$\Delta = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$$

Pengantar Determinan (6)

- Untuk setiap matriks persegi A, Dimana A_{ij} merupakan submatriks yang terbentuk dari menghapus baris ke-i dan kolom ke-j dari A, maka,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{hapus baris-3, kol-2} \rightarrow A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Sehingga, kita dapat mendefinisikan determinan secara rekursif
  - Jika $n = 3$, $\det A$ didefinisikan dengan matriks 2×2 dengan submatriks A_{1j}
  - Jika $n = 4$, $\det A$ didefinisikan dengan matriks 3×3 dengan submatriks A_{1j}
  - Secara umum → Determinan $n \times n$ didefinisikan dengan determinan dari submatriks $(n-1) \times (n-1)$

Definisi Formal dari Determinan

Untuk $n \geq 2$ determinan dari matriks $n \times n$, $A = [a_{ij}]$ adalah jumlah dari bentuk $\pm\, a_{ij} \det A_{1j}$ dengan tanda plus dan minus saling berselang, dimana elemen-elemen $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{1n}$ adalah baris pertama dari A. Persamaannya,

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j} \det A_{1j}$$

Determinan – Contoh

Hitung determinan dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

→ Tentukan $\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$

$$\det A = 1 \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - 5 \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 1(0-2) - 5(0-0) + 0(-4-0) = -2$$

→ Dapat juga ditulis dengan,

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

Determinan – Ekspansi Kofaktor

- Untuk lebih mudahnya → tulis $\det A$ dengan bentuk lain
- Diberikan $A = [a_{ij}]$, kofaktor $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ dari A adalah nilai C_{ij} dengan,

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Sehingga,

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C1_n$$

Persamaan ini disebut sebagai ekspansi kofaktor baris pertama (***cofactor expansion across the first row***) dari A

Determinan – Ekspansi Kofaktor / Teorema #1

Determinan dari matriks $A\ n \times n$ dapat dihitung dengan ekpasinsi kofaktor baris maupun kolom. Ekspansi baris ke-i menggunakan persamaan berikut,

$$\mathbf{\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C1_{in}}$$

Ekspansi dengan kolom ke-j menggunakan,

$$\mathbf{\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C1_{nj}}$$

Tanda plus dan minus dari kofaktor (i, j) tergantung posisi a_{ij} dalam matriks.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Determinan – Ekspansi Kofaktor / Teorema #1 - Contoh

Gunakan ekpansi kofaktor dengan baris-3 untuk menghitung $\det A$, dimana,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Jawab,

$$\det A = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}$$

$$\det A = (-1)^{3+1}a_{31}\det A_{31} + (-1)^{3+2}a_{32}\det A_{32} + (-1)^{3+3}a_{33}\det A_{33}$$

$$\det A = 0\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 2(-1) + 0 = -2$$

Determinan – Matriks Segitiga

Jika A adalah matriks segitiga, maka $\det A$ adalah hasil kali dari diagonal utama dari A

Contoh → Jika $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, maka $\det A = (4)(5)(-4)(2) = -160$

Latihan!

Hitung determinan dari matriks berikut dengan ekspansi kofaktor baris-1!

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Hitung determinan dari matriks berikut dengan konsep determinan matriks segitiga

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Tugas!

Hitung,

$$\begin{vmatrix} 5 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$


thank you
danke
謝謝
ngiyabonga
شكراً جزيلاً
teşekkür ederim
gracias
спасибо
dziękuję
obrigado
bedankt
sukriya
kop khun krap
terima kasih
go raibh maith agat
arigatô
dakujem
merci
mochchakkeram
tapadh leat
dank je
감사합니다
ありがとう
мерси
grazie

References

- Lay, D.C., Lay, S.R. and McDonald, J. (2021) *Linear algebra and its applications*. Boston: Pearson.
- Kariadinata, R. (2013) *Aljabar Matriks Elementer*. Bandung: Pustaka Setia.