ALJABAR LINIER

Operasi Matriks

Muhammad Afif Hendrawan, S.Kom., M.T.

Outlines

- Anatomy Matriks
- Penjumlahan dan Perkalian Skalar Pada Matriks
- Perkalian Matriks
- Pangkat dari Matriks
- Transpos dari Matriks

Anatomi Matriks

Matriks (1)

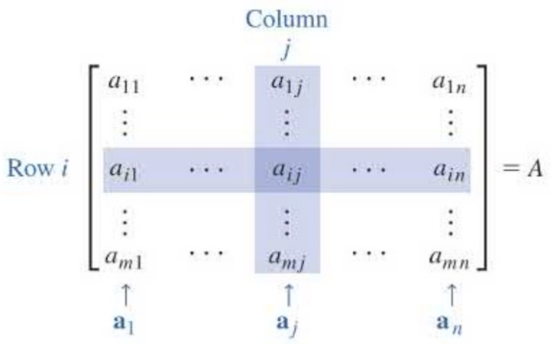
- Jika A adalah matriks $m \times n$, A memiliki m baris dan n kolom
- Nilai skalar pada baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A di notasikan sebagai a_{ij}
- Sebagai contoh nilai pada (3,2) → a_{32} → baris ke-3 kolom ke-2
- Setiap kolom dari A adalah daftar (*list*) dari bilangan riil m yang berupakan sebuah vektor pada $\mathbb{R}^m$ → biasa ditulis,

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & \text{Column } j & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\
\text{Row } i & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A \\
 & \begin{array}{ccccc} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & & \mathbf{a}_j & & \mathbf{a}_n \end{array}
\end{array}$$

Matriks (2)

- **Nilai-nilai diagonal** pada matriks $A, m \times n$ adalah $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ dan membentuk diagonal utama pada matriks A
- **Matriks diagonal** adalah matriks dengan ukuran $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ dimana **nilai selain diagonalnya adalah nol**. Contoh → Matriks identitas, I_n
- Matriks $m \times n$ dengan seluruh nilainya adalah 0 disebut sebagai **matriks nol** (***zero matrix***)



Penjumlahan dan Perkalian Skalar

Penjumlahan Pada Matriks

- Dua matriks dikatakan sama (**equal**) jika memiliki ukuran yang sama (jml. baris dan jml kolom) → Ordo sama
- Jumlah dari $A + B$ dapat didefinisikan jika $A + B$ memiliki ukuran yang sama.
- Contoh,

Diberikan, $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, and $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Maka, $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$A + C$ tidak valid / tidak terdefinisi karena A dan C tidak memiliki ukuran yang sama / tidak equal

Perkalian Skalar Pada Matriks

- Jika r adalah nilai skalar dan A adalah matriks → Perkalian skalar rA adalah matriks dengan nilai "**kolom**" r kali dari setiap kolom pada A
- Pada vektor, $-A = (-1)A$, $A - B = A + (-1)B$
- Contoh,

Dengan matriks A dan B pada contoh sebelumnya,

$$2B = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 10 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A - 2B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 10 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -7 & -7 & -12 \end{bmatrix}$$

Sifat-Sifat Penjumlahan dan Perkalian Skalar

Jika matriks A, B, C, ekual satu sama lain, r dan s adalah nilai skalar,

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + 0 = A$
- $r(A + B) = rA + rB$
- $(r + s)A = rA + sA$
- $r(sA) = (rs)A$

Bagaimana dengan pengurangan?

- **Aturan sama! Ukuran sama / Ordo Sama / Ekual**
- $A - B \neq B - A$
- $(A - B) - C = A - (B - C)$

Latihan!

Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 & 4 \\ -5 & -1 & -3 & 5 \\ 6 & -8 & 11 & 3 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 6 & 3 & -5 \\ -2 & 7 & -8 \end{bmatrix}$

Tentukan (jika mungkin),

- $A + B$
- $A - B$
- $A + C$
- $B - C$

Perkalian Matriks

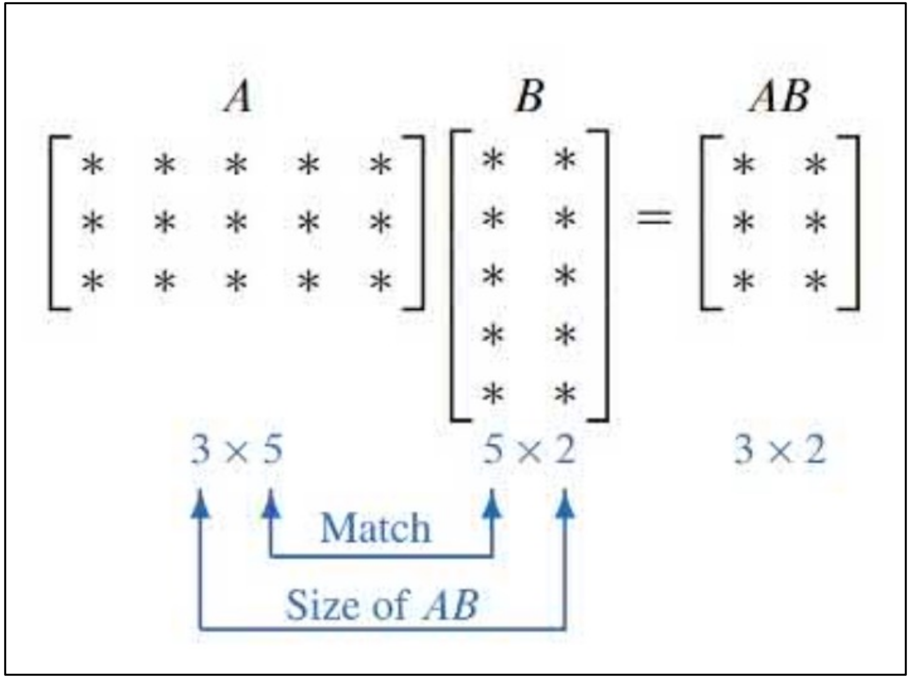
Perkalian Matriks (1)

- Jika A adalah matriks $m \times n$ dan B adalah matriks $n \times p$ → Hasil dari AB adalah matriks $m \times p$
- Contoh,

Jika, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix}$, maka AB,

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap + bq & ar + bs & at + bu \\ cp + dq & cr + ds & ct + du \end{bmatrix}$$

Perkalian Matriks (2)



Sifa—sifat Perkalian Matriks

Jika A adalah matriks $m \times n$ dan jika B dan C memiliki ukuran untuk proses penjumlahan dan perkalian yang valid, maka,

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$
- $r(AB) = (rA)B = A(rB)$
- $I_m A = A = AI_n$

Perkalian Matriks – Perhatian!!!

- $AB \neq BA$
- **The cancelation law** (“***coret-coret***”) tidak berlaku pada perkalian matriks!
  - Jika $AB = AC$ bukan berarti $B = C$
- Jika hasil dari AB adalah matriks nol, bukan berarti $A = 0$ atau $B = 0$

Pangkat dari Matriks

Pangkat dari Matriks

- Jika A adalah matriks $m \times n$, dan k adalah nilai positif integer, maka A^k dinotasikan sebagai hasil dari perkalian A sebanyak k kali

$$A^k = \underbrace{A \dots A}_{k}$$

- Jika A bernilai selain nol (nonzero) dan jika x anggota $\mathbb{R}^n$ → $A^k x$ adalah hasil dari *left multiplying* (perkalian baris) x dengan A sebanyak k kali
- Jika $k = 0$ → $A^0 x = x$

Transpos Matriks

Transpos Matriks

- Diberikan matriks $m \times n$, A, transpos dari A adalah matriks $n \times m$, di notasikan dengan A^T
- Contoh,

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka $A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ maka $B^T = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

Sifat-sifat Transpos Matriks

Jika A dan B merupakan matriks dengan ukuran yang dapat digunakan untuk proses penjumlahan dan perkalian, maka,

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- Untuk semua nilai skalar r, $(rA)^T = rA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Latihan!

- Jika $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$
    - Tentukan AB
    - Tentukan BA

Latihan (Lagi)! ☺

Perhatikan matriks-matriks berikut,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tentukan (jika memungkinkan)!

- $D + E$
- $D - E$
- $5A$
- $2B - C$
- $A - A$

Tugas

Jika,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Tentukan (jika memungkinkan),

- $-2A$
- AC
- AD
- $3C - E$
- CB
- EB

Jika tidak valid, jelaskan alasannya!


thank you
danke
рахмат
謝謝
ngiyabonga
شكراً جزيلاً
teşekkür ederim
gracias
merci
obrigado
bedankt
dziękuję
спасибо
Баярлалаа
sukriya
kop khun krap
go raibh maith agat
mochchakkeram
arigatô
dakujem
grazie
terima kasih
감사합니다
ありがとう
tapadh leat
dank je
mersi
barka
welalin
tack
spas
kia ora
vinaka
спасибі
blagodaram
misaotra
matondo
paldies
grazzi
mahalo
faafetai lava
kiitos
dankie
dhanyavad
nanni
nandri
mauruuru
köszönöm
hvala
gràcie
bayarlalaa
enkosi
sobodi
dėkuji
mèsi
didi madloba
sagolun
najis tuke
kam sah hamnida
rahmat
chnorakaloutioun
gratias ago
gràcies
sulpáy
akun
dankon
aciu
djiere dieuf
tau
дякую
хвала
asante
manana
obrigada
tenki
murakoze
mamnun
chokrane
trugarez
takk
taiku
tanemirt
rahmet
diolch
dhanyavadagalu
shukriya
mercé
мерси
xièxie
ευχαριστώ
তোমাকে ধন্যবাদ

References

- Lay, D.C., Lay, S.R. and McDonald, J. (2021) *Linear algebra and its applications*. Boston: Pearson.
- Kariadinata, R. (2013) *Aljabar Matriks Elementer*. Bandung: Pustaka Setia.