

# ALJABAR LINIER

## Eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan

Muhammad Afif Hendrawan, S.Kom., M.T.



# Outlines

- Bentuk Eselon (Echelon Form) vs. Bentuk Eselon Tereduksi (Reduced Echelon Form)
- Eliminasi Gauss vs. Eliminasi Gauss-Jordan

# Bentuk Eselon dan Eselon Tereduksi

# Bentuk Eselon (Echelon Form)

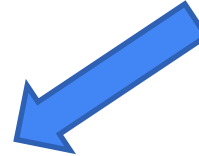
*Don't you remember . . . .*

Diberikan sebuah sistem,

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 5x_1 - 5x_3 &= 10\end{aligned}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

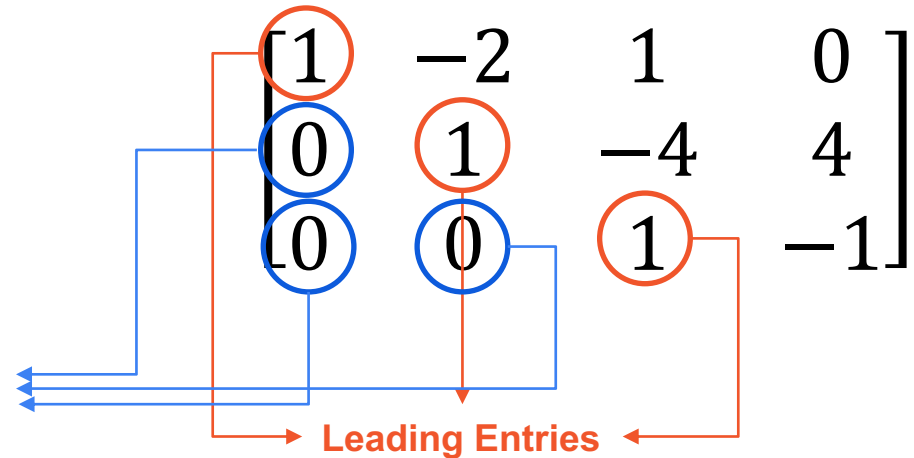


$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

# Ciri-ciri Bentuk Eselon

Sebuah matriks memiliki bentuk eselon jika,

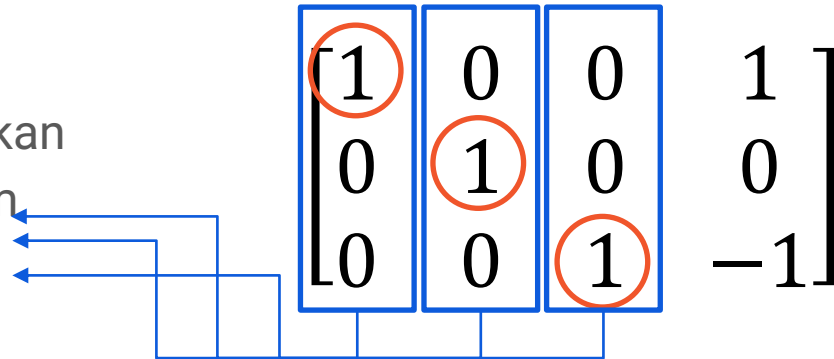
- Baris yang memiliki nilai tidak nol diatas baris yang memiliki semua nilai 0
- Setiap "**leading entry**" dari sebuah baris, berada pada sebelah kanan "**leading entry**" diatasnya.
- Semua nilai dibawah leading entry dalam satu kolom bernilai 0



# Bentuk Eselon Tereduksi

Jika matriks bentuk eselon memenuhi syarat tambahan,

- "Leading entry" bernilai 1
- Nilai "learning entry" merupakan satu-satunya nilai pada kolom tersebut


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

# Bentuk Eselon dan Eselon Tereduksi

*Another examples (and analogy)*

*Echelon Form*

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{bmatrix}$$

*Reduced  
Echelon Form*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$



Bagaimana dengan eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan?



# Eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

*Bentuk Eselon*

**ELIMINASI GAUSS**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

*Bentuk Eselon Tereduksi*

**ELIMINASI GAUSS-JORDAN**

# Latihan!

Diberikan sebuah sistem,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Cari bentuk eselonnya!
2. Cari bentuk eselon tereduksinya!
3. Selesaikan sistem tersebut! Apakah konsisten? Buktikan!

# Latihan (lagi)!

Selesaikan sistem berikut dengan eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan

$$\begin{array}{l} \text{1} \quad \begin{array}{l} x_2 + 4x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 6 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{3} \quad \begin{array}{l} x_1 - 3x_3 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 7 \\ x_2 + 5x_3 = -2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{2} \quad \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -8 \\ -4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{4} \quad \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \end{array}$$

# Latihan Rumah

Selesaikan sistem berikut dengan eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$$

$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$$

$$3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10$$

$$x_1 - 8x_2 = 12$$

$$3x_1 - 6x_2 = 9$$

$$-2x_1 + 4x_2 = -6$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-7x_1 + 7x_2 + x_3 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = -15$$

$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 11$$

$$11x_1 + 7x_2 = -30$$

# Latihan Rumah

Selesaikan sistem berikut dengan eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -6 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





# Referensi

- Lay, D.C., Lay, S.R. and McDonald, J. (2021) *Linear algebra and its applications*. Boston: Pearson.
- Kariadinata, R. (2013) *Aljabar Matriks Elementer*. Bandung: Pustaka Setia.