LINEAR ALGEBRA

Inverse Matriks

Muhammad Afif Hendrawan, S.Kom., M.T.

Outlines

- Dasar Inverse Matriks

Dasar Inverse Matriks

Dasar (1)

- Nilai inverse dari sebuah bilangan adalah, e.g. 5 adalah $1/5$ atau 5^{-1}
- Nilai inverse memenuhi persamaan berikut

$$5^{-1}(5) = 1 \text{ and } 5(5^{-1}) = 1$$

- Generalisasi matriks memerlukan persamaan dan menghindari notasi garis miring → Perkalian matriks tidak bersifat komunikatif
- Generalisasi penuh memungkinkan → Jika matriks diopersikan → persegi
- Sebuah matriks $n \times n$, A memiliki inverse jika matriks $n \times n$, C memenuhi,

$$CA = I \text{ and } AC = I$$

- Dimana $\boldsymbol{I}$ **adalah matriks indentitas**, dan $\boldsymbol{C}$ **adalah inverse dari** $\boldsymbol{A}$

Dasar (2)

$$CA = I \text{ dan } AC = I$$

- Jika B merupakan inverse lain dari A, maka,

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

- Inverse dinotasikan dengan A^{-1}, sehingga,

$$A^{-1}A = I \text{ and } AA^{-1} = I$$

- Matriks yang tidak bisa di inverse-kan → **singular matrix**
- Matriks memiliki inverse → **nonsingular matrix**

Dasar (3) - Contoh

Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, maka

$AC = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan

$CA = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sehingga, $C = A^{-1}$

Dasar (4) – Teorema #1

- Diberikan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ → Jka $ad - bc \neq 0$ → $\boldsymbol{A}$ **memiliki inverse**, dan

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- Jika $ad - bc = 0$ → A **tidak memiliki inverse**
- $ad - bc$ → determinan dari A → $\det A = ad - bc$

Dasar (5) – Teorema #2

- Jika A matriks $n \times n$ yang memiliki inverse, maka untuk setiap nilai $\boldsymbol{b}$ in $\mathbb{R}^n$ → $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \ \rightarrow \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$
- Contoh, penyelesaian sistem linier berikut dengan matriks A

$$3x_1 + 4x_2 = 3$$
$$5x_1 + 6x_2 = 7$$

Sistem tersebut ekivalen dengan $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, sehingga,

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Dasar (5) – Teorema #3

- Jika A memiliki inverse, maka A^{-1} juga memiliki inverse → $(A^{-1})^{-1} = A$
- Jika A dan B adalah matrix $n \times n$ yang memiliki inverse, maka begitu juga dengan AB, dan inverse dari AB adalah **perkalian dari inverse B dan A**

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

- Jika A memiliki inverse, maka begitu juga dengan A^T, dan inverse dari A^T adalah transpose dari A^{-1} → $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Dasar (6) – Teorema #4

- Jika $n \times n$ matriks, A, memiliki inverse jika dan hanya jika memiliki baris yang ekivalen dengan I_n
- Pada kasus ini, urutan apapapun dari OBE yang menjadikan A ke I_n juga menjadikan I_n ke A^{-1}
- Sebagai contoh, tentukan inverse dari $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$

Dasar (7) – Teorema #4 (2)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$[A\ I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -9/2 & 7 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Dasar (8) – Teorema #4 (3)

Teorema 4 menunjukkan, dikarenakan $A \sim I$, maka A memiliki inverse, dan inversenya adalah,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Latihan!

- Gunakan determinan untuk menentukan apakah matriks berikut memiliki nilai inverse!

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

- Tentukan inverse dari $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, jika ada!

- Selesaikan sistem linier berikut dengan menggunakan teorema inverse!

$$8x_1 + 3x_2 = 2$$
$$5x_1 + 2x_2 = -1$$

Tugas!

- Tentukan apakah matriks berikut memiliki nilai inverse,
  - $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \\ 8 & 5 & -1 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} -7 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$
- Selesaikan sistem linier berikut dengan menggunakan inverse matriks!

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

Selanjutnya?

- Menentukan inverse dari matrik 3×3 dengan menggunakan determinan
- Matriks Partisi
- Determinan


thank you
danke
謝謝
ngiyabonga
شكراً جزيلاً
рахмат
teşekkür ederim
gracias
спасибо
Баярлалаа
dank je
bedankt
dziękuję
obrigado
sukriya
kop khun krap
go raibh maith agat
mochchakkeram
tapadh leat
arigatô
dakujem
merci
terima kasih
grazie
sagolun
maururu
hvala
감사합니다
ありがとう
мерси
ευχαριστώ
chnorakaloutioun
blagodaram
matondo
paldies
grazzi
misaotra
welalin
tack
barka
mersi
vinaka
faafetai lava
kiitos
dankie
dhanyavad
nanni
nandri
enkosi
sobodi
děkuji
mèsi
najis tuke
kam sah hamnida
rahmat
tanemirt
rahmet
diolch
dhanyavadagalu
shukriya
trugarez
mamnun
хвала
asante
manana
obrigada
djiere dieuf
дякую
sulpáy
gràcies
gratias ago
xièxie
akun
mahalo
spas
tenki

References

- Lay, D.C., Lay, S.R. and McDonald, J. (2021) *Linear algebra and its applications*. Boston: Pearson.
- Kariadinata, R. (2013) *Aljabar Matriks Elementer*. Bandung: Pustaka Setia.