

ALJABAR LINIER

Notasi Matrix Pada Sistem Persamaan Linier

Muhammad Afif Hendrawan, S.Kom., M.T.



Outlines

- Notasi Matrix
- Penyelesaian Sistem Linier dengan Matrix



Notasi Matriks

Bagaimana cara mengubah sistem linier dalam bentuk matriks? (1)

- Terdapat sebuah sistem linier,

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$

$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$$

$$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$$

- Jika setiap koefisien disusun menjadi kolom, maka matriksnya,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

- Matriks ini disebut sebagai **coefficient matrix** (atau matrix of coefficients) dari sistem linier

Bagaimana cara mengubah sistem linier dalam bentuk matriks? (2)

- Terdapat sebuah sistem linier,

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$

$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$$

$$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$$

- Jika konstanta ditambahkan ke matriks, maka,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriks ini disebut sebagai **augmented matrix** (matriks perluasan) dari sistem

Latihan!

- Buatlah matriks koefisien dan matriks perluasan dari sistem,

$$-5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2$$

$$7x_1 - 2x_3 + 5x_4 = 8$$

$$2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -5$$

$$x_1 - 3x_2 + 7x_4 = 0$$

$$x_2 + x_3 = 1$$

Latihan!

- Tentukan sistem linier dari matriks perluasan berikut,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -4 & 0 \\ -5 & 7 & 12 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian Sistem Linier (1)

Strategi dasar

Ganti satu sistem dengan sistem lain yang ekivalen yang mudah diselesaikan

Contoh,

- Gunakan variabel x_1 pada persamaan pertama dari sistem untuk menghilangkan variabel x_1 pada persamaan lain didalam sistem.
- Gunakan variabel x_2 pada persamaan kedua untuk menghilangkan variabel x_2 pada persamaan lain.
- Begitu seterusnya hingga didapatkan sebuah sistem sederhana yang ekivalen

Penyelesaian Sistem Linier (2) – 3 Operasi Dasar

Untuk menyederhanakan sistem



Ganti satu persamaan dengan menjumlahkan dengan dirinya sendiri dan kalikan dengan persamaan lain



Tukar posisi antara dua persamaan



Kalikan semua variabel dengan nilai konstanta $\neq 0$

Penyelesaian Persamaan Linier – Contoh 1(1)

With and without matrix notation → side by side comparison

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\2x_2 - 8x_3 &= 8 \\5x_1 - 5x_3 &= 10\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

1. Pertahankan x_1 pada persamaan pertama dan hilangkan pada persamaan lain.
2. Maka → tambakan -5 kali persamaan 1 pada persamaan 3

$$\begin{array}{l} -5 \cdot [\text{Equation 1}] \\ + [\text{Equation 3}] \\ \hline [\text{New Equation 3}] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -5x_1 + 10x_2 - 5x_3 = 0 \\ 5x_1 - 5x_3 = 10 \\ \hline 10x_2 - 10x_3 = 10 \end{array}$$

Penyelesaian Persamaan Linier – Contoh 1(2)

With and without matrix notation → side by side comparison

Gunakan persamaan 3 yang baru pada sistem

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_2 - 8x_3 & = & 8 \\ 10x_2 - 10x_3 & = & 10 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

Kalikan persamaan 2 dengan $\frac{1}{2}$ untuk mendapatkan x_2

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 - 4x_3 & = & 4 \\ 10x_2 - 10x_3 & = & 10 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian Persamaan Linier – Contoh 1(3)

With and without matrix notation → side by side comparison

Gunakan x_2 pada persamaan 2 untuk menghilangkan $10x_2$ pada persamaan 3

$$\begin{array}{r} -10 \cdot [\text{Equation 2}] \\ + [\text{Equation 3}] \\ \hline [\text{New Equation 3}] \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -10x_2 + 40x_2 = -40 \\ 10x_2 - 10x_3 = 10 \\ \hline 30x_3 = -30 \end{array}$$

Gunakan persamaan 3 yang baru (lagi) pada sistem

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 - 4x_3 & = & 4 \\ 30x_3 & = & -30 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 30 & -30 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian Persamaan Linier – Contoh 1(4)

With and without matrix notation → side by side comparison

Kalikan persamaan 3 dengan $\frac{1}{30}$, untuk mendapatkan nilai 1 sebagai koefisien x_3

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 - 4x_3 & = & 4 \\ x_3 & = & -1 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Sistem akan membentuk pola segitiga bawah (we called as is right know 😊)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian Persamaan Linier – Contoh 1(5)

With and without matrix notation → side by side comparison

Gunakan x_3 dari persamaan 3 untuk mendapatkan $-4x_3$ pada pers 2. Maka didapatkan x_2

$$\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_3 = -1 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} x_2 - 4(-1) = 4 \\ x_2 + 4 = 4 \\ x_2 = 0 \end{array}$$

Gunakan x_3 dari pers. 2 untuk mendapatkan x_3 pada pers 1. Didapatkan,

$$\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + (-1) = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 1 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 1 \end{array}$$

Sekarang lebih mudah untuk menyelesaikan pers 1 pada sistem! 😊



Penyelesaian Persamaan Linier – Contoh 1(6)

With and without matrix notation → side by side comparison

Akhirnya didapatkan,

$$\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Cek himpunan penyelesaian → Simply masukkan nilai x_1, x_2, x_3 pada sistem

$$\begin{aligned} (1) - 2(0) + (-1) &= 0 \\ 2(0) - 8(-1) &= 8 \\ 5(1) - 5(-1) &= 10 \end{aligned}$$

Penyelesaian Sistem Linier – Kesimpulan

- Contoh 1 mengilustrasikan bagaimana operasi pada sistem linier yang berhubungan dengan operasi pada baris di setiap matriks perluasan
- 3 langkah dasar sebelumnya berkaitan dengan operasi pada matriks perluasan
- Operasi tersebut disebut → **Operasi Baris Elementer (OBE) → Elementary Row Operations**

Operasi Baris Elementer (OBE)

Elementary Row Operations



(**Replacement**) Replace one equation by the sum of itself and a multiple of another equation



(**Interchange**) Interchange two equation



(**Scaling**) Multiply all the terms in an equation by a nonzero constant

Latihan!

- Selesaikan sistem linier berikut dengan OBE!

$$x_1 + x_2 - x_3 = -3$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 7$$

Homework

- Selesaikan sistem linier berikut dengan OBE!

$$2x + 3y - z = 5$$

$$3x + y + 2z = 11$$

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$x + 2y + z = 6$$

$$x + 3y + 2z = 9$$

$$2x + y + 2z = 12$$

$$x + 2y + 3z = 3$$

$$2x + 3y + 2z = 3$$

$$2x + y + 2z = 5$$





Referensi

- Lay, D.C., Lay, S.R. and McDonald, J. (2021) *Linear algebra and its applications*. Boston: Pearson.
- Kariadinata, R. (2013) *Aljabar Matriks Elementer*. Bandung: Pustaka Setia.