LINEAR ALGEBRA

Partisi Matriks

Muhammad Afif Hendrawan, S.Kom., M.T.

Outlines

- Dasar Partisi Matriks
- Penjumlahan dan Perkalian Skalar Pada Partisi Matriks
- Perkalian Partisi Matriks
- Inverse dari Partisi Matriks

Dasar Partisi Matriks

Konsep Dasar (1)

- Fitur utama matriks → Dapat dilihat sebagai daftar vektor kolom
- Kita dapat membayangkan partisi matriks A diindikasikan dengan pembagian bedasarkan garis horizontal dan vertial!

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 3 & 0 & -1 & 5 & 9 & -2 \\ -5 & 2 & 4 & 0 & -3 & 1 \\ \hline -8 & -6 & 3 & 1 & 7 & -4 \end{array}\right]$$

Konsep Dasar (2)

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 3 & 0 & -1 & 5 & 9 & -2 \\ -5 & 2 & 4 & 0 & -3 & 1 \\ \hline -8 & -6 & 3 & 1 & 7 & -4 \end{array}\right]$$

Kita notasikan sebagai,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

Dimana,

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, A_{13} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -8 & -6 & 3 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \end{bmatrix}, A_{23} = \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix}$$

Penjumalahan dan Perkalian Skalar

Penjumlahan Partisi Matriks

- Jika matriks A dan B berukuran sama dan dipartisi dengan cara yang sama → Setiap blok $A + B$ adalah (matriks) penjumlahan untuk setiap blok yang sesuai dari A dan B

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix}$$

Perkalian Skalar Partisi Matriks

- Perkalian skalar pada partisi matriks → Kalian setiap blok (partisi) dengan nilai skalar

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow 3A = \begin{bmatrix} 3A_{11} & 3A_{12} \\ 3A_{21} & 3A_{22} \end{bmatrix}$$

Perkalian Partisi Matriks

Perkalian Partisi Matriks

- Perkalian partisi matriks menggunakan konsep yang sama dengan perkalian matriks biasa
- Kolom partisi matriks A sesuai dengan barisi partisi B

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & -1 \\ \hline 0 & -4 & -2 & 7 & -1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \left[\begin{array}{cc} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ -3 & 7 \\ \hline -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Perkalian Partisi Matriks (2)

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -6 & 2 \\ \hline 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Darimana hasil tersebut?

$$A_{11}B_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 12 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A_{12}B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -8 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}B_1 + A_{12} + B_2 = \begin{bmatrix} 15 & 12 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 & -8 \\ -8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

Perkalian Partisi Matriks – Teorema #1

Jika A adalah $m \times n$ dan B adalah $n \times p$, maka

$$AB = \begin{bmatrix} col_1(A) & col_2(A) & \cdots & col_n(A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} row_1(B) \\ row_2(B) \\ \vdots \\ row_n(B) \end{bmatrix}$$

$$AB = col_1(A)row_1(B) + col_2(A)row_2(B) + \cdots + col_n(A)row_n(B)$$

Inverse dari Partisi Matriks

Inverse dari Partisi Matriks (1)

Jika, $A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$, dimana P, Q, R, S adalah submatriks dari A

dan $A^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$, dimana E, F, G, H adalah submatriks dari A^{-1}

Maka $AA^{-1} = I$,

sehingga,

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

Inverse dari Partisi Matriks (2)

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

Dengan demikian,

1. $PE + QG = I_s$
2. $PF + QH = 0$
3. $RE + SG = 0$
4. $RF + SH = I_m$

Dengan subtitusi kita dapat mendapatkan elemen dari E, F, G, H → Submatriks dari A^{-1}

Inverse dari Partisi Matriks (3)

Berdasarkan subtitusi, didapatkan,

1. $E = (P - QS^{-1}R)^{-1}$
2. $F = -EQS^{-1}$
3. $G = -S^{-1}RE$
4. $H = S^{-1} - S^{-1}RF$

Dengan demikian,

Jika A $= \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$ dan $A^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (P - QS^{-1}R)^{-1} & -EQS^{-1} \\ -S^{-1}RE & S^{-1} - S^{-1}RF \end{bmatrix}$

Inverse dari Partisi Matriks – Contoh (1)

Misalkan,

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$$

Maka,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (P - QS^{-1}R)^{-1} & -EQS^{-1} \\ -S^{-1}RE & S^{-1} - S^{-1}RF \end{bmatrix}$$

Inverse dari Partisi Matriks – Contoh (2)

Cari S^{-1} terlebih dahulu,

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \frac{1}{12.3 - 5.5}\begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{11} & -\frac{5}{11} \\ -\frac{5}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

Cari QS^{-1}

$$QS^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{12}{11} & -\frac{5}{11} \\ -\frac{5}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

Inverse dari Partisi Matriks – Contoh (3)

Cari $QS^{-1}R$

$$QS^{-1}R = \begin{bmatrix} \frac{9}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{11} \end{bmatrix}$$

Cari $P - QS^{-1}R$

$$P - QS^{-1}R = [1] - \begin{bmatrix} \frac{8}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

Tentukan $\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E = \left(P - QS^{-1}R\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} \end{bmatrix}}$$

Inverse dari Partisi Matriks – Contoh (4)

Tentukan F

$$\boldsymbol{F = -EQS^{-1} = -\begin{bmatrix}11\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{9}{11} & -\frac{1}{11}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}}$$

Selanjutnya, tentukan $G = -S^{-1}RE$

Cari $S^{-1}R$ dahulu,

$$S^{-1}R = \begin{bmatrix}\frac{12}{11} & -\frac{5}{11}\\ -\frac{5}{11} & \frac{3}{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{7}{11}\\ -\frac{2}{11}\end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{-S^{-1}R = \begin{bmatrix}-\frac{7}{11}\\ \frac{2}{11}\end{bmatrix}}$$

Inverse dari Partisi Matriks – Contoh (5)

Tentukan $G = -S^{-1}RE$,

$$G = \begin{bmatrix} -\frac{7}{11} \\ \frac{2}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{11}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, tentukan $H = S^{-1} - S^{-1}RF$ → Cari $S^{-1}RF$, dahulu

$$S^{-1}R = \begin{bmatrix} \frac{7}{11} \\ -\frac{2}{11} \end{bmatrix} \Rightarrow S^{-1}RF = \begin{bmatrix} \frac{7}{11} \\ -\frac{2}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{21}{11} & \frac{7}{33} \\ \frac{6}{11} & -\frac{2}{33} \end{bmatrix}$$

Inverse dari Partisi Matriks – Contoh (6)

Sehingga didapatkan, $\boldsymbol{H = S^{-1} - S^{-1}RF}$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{12}{11} & -\frac{5}{11} \\ -\frac{5}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{21}{11} & \frac{7}{33} \\ \frac{6}{11} & -\frac{2}{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{33}{11} & -\frac{22}{33} \\ -\frac{11}{11} & \frac{11}{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Inverse dari Partisi Matriks – Contoh (7)

Sehingga, A^{-1} adalah,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} \frac{11}{3} & -3 & \frac{1}{3} \\ \hline -\frac{7}{3} & 3 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Latihan!

Tentukan inverse (jika ada) dari matriks berikut dengan menggunakan partisi matriks!

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$


рахмат
danke
謝謝
ngiyabonga
شكراً جزيلاً
spas
teşekkür ederim
Баярлалаа
mersi
kia ora
barka
welalin
tack
mahalo
спасибо
faafetai lava
vinaka
спасибі
blagodaram
dank je
misaotra
paldies
grazzi
matondo
tapadh leat
kiitos
dankie
nanni
nandri
dhanyavad
thank you
gracias
хвала
asante
manana
maururu
köszönöm
dankon
aciū
obrigada
tenki
bedankt
gràcie
hvala
bayarlalaa
enkosi
djiere dieuf
tau
mochchakkeram
murakoze
akun
дякую
mamnun
dziękuję
chnorakaloutioun
gratias ago
gràcies
sulpáy
go raibh maith agat
chokrane
sobodi
dėkuji
sagolun
sukriya
kop khun krap
taiku
arigatô
trugarez
obrigado
mèsi
ありがとう
tanemirt
grazie
takk
dakujem
didi madloba
najis tuke
terima kasih
rahmet
diolch
dhanyavadagalu
shukriya
mercé
мерси
kam sah hamnida
rahmat
তোমাকে ধন্যবাদ
감사합니다
xièxie
ευχαριστώ
merci

Referensi

- Lay, D.C., Lay, S.R. and McDonald, J. (2021) *Linear algebra and its applications*. Boston: Pearson.
- Kariadinata, R. (2013) *Aljabar Matriks Elementer*. Bandung: Pustaka Setia.