به نام خدا

تمرین اول درس انتقال داده ها

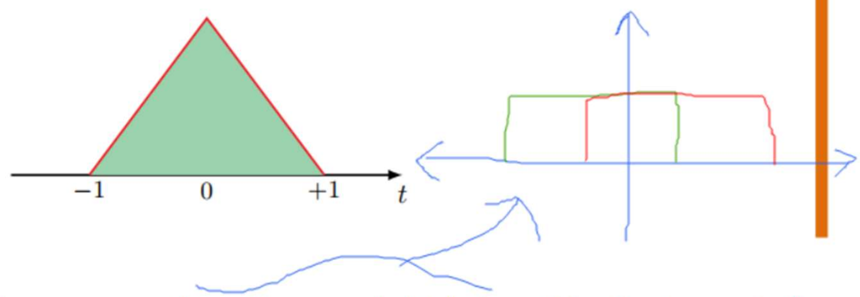
فرزان رحمانی ۹۹۵۲۱۲۷۱

سوال اول:

نخست لازم به ذکر است که تابع $x(t) = \Lambda(t)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$x(t) = \Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| < 2 \\ 0 & ow \end{cases}$$

مثال ۵ تبدیل فوریه تابع مثلثی ($\mathrm{tri}(t) = \Lambda(t) \overset{\text{def}}{=} \max(1 - |t|, 0)$) را بدست آورید؟



پاسخ: می‌دانیم که $\mathrm{tri}(t)$ حاصل کانولوشن دو $\mathrm{rect}(t)$ است، پس در نهایت تبدیل فوریه برابر با $\mathrm{sinc}^2(f)$ خواهد شد. چراکه می‌دانیم که یکی از ویژگی‌های مهم تبدیل فوریه این است که ضرب در حوزه زمان می‌شود کانولوشن در حوزه فرکانس و دوگان آن نیز معتبر است.

$$\Lambda(t) = \mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) = \mathrm{sinc}^2(f)$$

تبدیل فوریه این تابع براحتی با استفاده از ویژگی های تبدیل فوریه قابل حصول است، چراکه می دانیم در حقیقت این تابع از کانولوشن دو تابع $rect(t)$ بدست آمده است.

$$x(t) = \Lambda(t) = rect(t) * rect(t)$$

از سوی دیگربرطبق ویژگی های تبدیل فوریه می دانیم که کانولوشن در حوزه زمان معادل ضرب در حوزه فرکانس است، پس خواهیم داشت:

$$F\,\{\Lambda\,(t)\} \;=\; \{rect(t)\;*\;rect(t)\} \;=\; sinc(f)\;\times\;sinc(f)\;=\;sinc^2(f)$$

با دانستن این نکته به سراغ مثال یاد شده می رویم، برای شکل (a) داریم:

$$x(t)\;=\;2\Pi\,(\frac{t}{4})\;-\;2\Lambda\,(\frac{t}{2})\;=\;2(4sinc(4f)\;-\;2sinc^2\,(2f))$$

برای شکل (b) داریم:

$$x(t)\;=\;2\Pi\,(\frac{t}{4})\;-\;\Lambda\,(t)\;=\;8sinc(4f)\;-\;sinc^2\,(f)$$

*در محاسبات بالا از اسلاید های زیر استفاده کردیم:

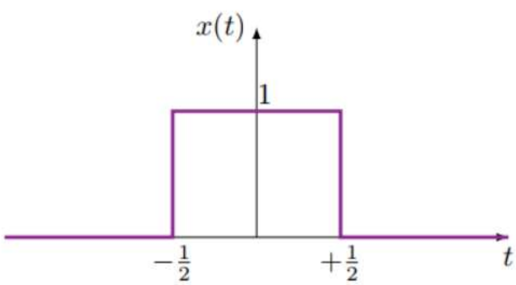
$$\mathcal{F}\{kx(at+b)\} = k\frac{e^{2\pi jf\frac{b}{a}}}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$$

مثال ۱

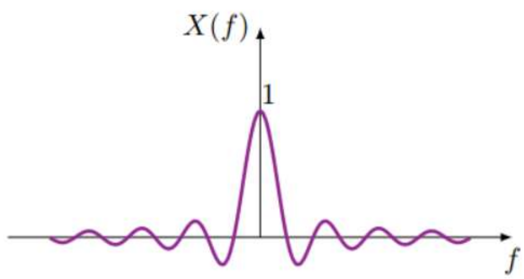
تبدیل فوریه سیگنال $x(t) = \mathrm{rect}(t)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2\pi ftj}\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{-2\pi ftj}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi fj}\left(e^{2\pi fj\frac{1}{2}} - e^{-2\pi fj\frac{1}{2}}\right) = \frac{sin(\pi f)}{\pi f} = \mathrm{sinc}(f)$$



$x(t) = \mathrm{rect}(t) = u(t+\frac{1}{2}) - u(t-\frac{1}{2})$



$X(f) = \frac{sin(\pi f)}{\pi f} = \mathrm{sinc}(f)$

سوال دوم:

برای حل از خواص زیر استفاده می کنیم:

- خاصیت خطی‌بودن در تبدیل فوریه:

$$\text{If}\quad x_1(t), x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(f), X_2(f) \qquad\qquad \text{Then}\quad \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \alpha X_1(f) + \beta X_2(f)$$

- تبدیل فوریه سیگنال‌های حقیقی، همواره نسبت به محور عمودی متقارن است.
- تبدیل فوریه یک سیگنال زوج همواره سیگنالی زوج و تبدیل فوریه یک سیگنال فرد همواره فرد خواهد بود.

$x(t)$	$X(f)$
Even & Real	Even & Real
Odd & Real	Odd & Imaginary
Even & Imaginary	Even & Imaginary
Odd & Imaginary	Odd & Real

- خاصیت دوگانی در تبدیل فوریه:

$$\text{If}\quad x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \qquad\qquad \text{Then}\quad X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(-f)$$

- خاصیت Shift در تبدیل فوریه:

$$\text{If}\quad x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \qquad\qquad \text{Then}\quad x(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-2\pi j f t_0} X(f)$$

- خاصیت Scale در تبدیل فوریه:

$$\text{If}\quad x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \qquad\qquad \text{Then}\quad x(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X(\frac{f}{a})$$

تابع مورد نظر از جمع دو تابع (3 + $2t$-) 4Λ و (3 – $2t$)sinc تشکیل شده است. با توجه به خاصیت خطی بودن تبدیل فوریه ابتدا تبدیل فوریه هر کدام را جدا محاسبه میکنیم و سپس آن ها را جمع می کنیم.
برای محاسبه تبدیل فوریه از ویژگی زیر استفاده میکنیم:

$$\mathcal{F}\{kx(at+b)\} = k\frac{e^{2\pi j f \frac{b}{a}}}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

محاسبه تبدیل فوریه (3 – $2t$)sinc :

$$\mathcal{F}\{rect\ (t)\} = \ sinc(-f) = sinc(f) \qquad \text{(زوج بودن و خاصیت دوگانی)}$$

$$\mathrm{k = 1, a = 2, b = -3, x(t) = sinc(t)}, \mathcal{F}\{sinc\ (t)\} = \ rect(f)$$

$$\rightarrow \ \mathcal{F}\{sinc(2t-3)\} = \ \frac{e^{2\pi j f \frac{-3}{2}}}{2} \mathrm{X}\left(\frac{f}{2}\right) = \frac{e^{-3\pi j f}}{2} \Pi\left(\frac{f}{2}\right)$$

محاسبه تبدیل فوریه (3 + $2t$-) 4Λ :

$$\mathrm{k = 4, a = -2, b = 3, x(t)} = \mathit{\Lambda}(\mathrm{t}), \mathcal{F}\{\mathit{\Lambda}(t)\} = sinc^2\ (f)$$

$$\mathcal{F}\{4\mathit{\Lambda}(-2t+3)\} = 4\ \frac{e^{2\pi j f \frac{-3}{2}}}{2} \mathrm{X}\left(\frac{f}{-2}\right) = 2e^{-3\pi j f} sinc^2\left(\frac{f}{-2}\right)$$

تابع زوج است →

$$\mathcal{F}\{4\mathit{\Lambda}(-2t+3)\} = \ 2e^{-3\pi j f} sinc^2\left(\frac{f}{2}\right)$$

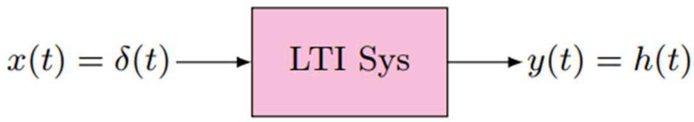
حال با استفاده از ویژگی خطی بودن جواب نهایی رو بازنویسی می کنیم.

$$\mathcal{F}\{4\mathit{\Lambda}(-2t+3) + \ sinc(2t-3)\} = \ \ 2e^{-3\pi j f} sinc^2\left(\frac{f}{2}\right) + \ \frac{e^{-3\pi j f}}{2} \Pi\left(\frac{f}{2}\right)$$

$$= \ e^{-3\pi j f}\ (2sinc^2\left(\frac{f}{2}\right) \ + \ \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f}{2}\right))$$

سوال سوم:

از ویژگی ای که در اسلاید زیر آمده است کمک میگیریم:



تعریف ۲ پاسخ یک سامانه LTI، به ورودی تابع ضربه واحد ($x(t) = \delta(t)$) را پاسخ ضربه کانال (Channel Impulse Response) می‌نامیم، و آن را با $h(t)$ نمایش می‌دهیم.

رابطه زیر را براحتی می‌توان بدست آورد:

$$\delta(t) \longrightarrow h(t)$$

$$x(t) \longrightarrow y(t)$$

$$x(t) = x(t) * \delta(t) \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

$$X(f) \longrightarrow Y(f) = X(f)H(f)$$

تعریف کانولوشن:

$$x(t) \ * \ h(t) \ = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \ \cdot \ h(t \ - \ \tau) \, d\tau$$

همچنین:

$$h(\tau) = rect(2\tau + 4) \rightarrow h(\tau + t) = rect(2\tau + 2t + 4) \rightarrow$$
$$h(t - \tau) = rect(2t + 4 - 2\tau)$$

حال به حل سوال می پردازیم:

$$x(t) * \ h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\tau} u(\tau) rect(2t + 4 - 2\tau) \, d\tau$$

اعمال اثر تابع پله واحد $\rightarrow$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-2\tau} rect(2t + 4 - 2\tau) \, d\tau$$

$rect(2t + 4 - 2\tau)$ اعمال اثر تابع $\rightarrow$

$$= \int_{\max(0,\ \frac{7}{4}+t)}^{\max(0,\ \frac{9}{4}+t)} e^{-2\tau}\, d\tau = \frac{e^{-2\tau}}{-2}\Bigg|_{\max(0,\ \frac{7}{4}+t)}^{\max(0,\ \frac{9}{4}+t)}$$

برای حل انتگرال بالا لازم است سه حالت $\{t < -\frac{9}{4}, -\frac{9}{4} < t < -\frac{7}{4},\ t > -\frac{7}{4}\}$ را در نظر بگیریم و به سه بازه مختلف تقسیم کنیم:

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) & t < -\frac{9}{4} \\ \frac{e^{-2t-\frac{9}{2}}}{-2} - \left(-\frac{1}{2}\right) & -\frac{9}{4} < t < -\frac{7}{4} \\ \frac{e^{-2t-\frac{9}{2}}}{-2} - \frac{e^{-2t-\frac{7}{2}}}{-2} & t > -\frac{7}{4} \end{cases}$$

$\rightarrow$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{9}{4} \\ \frac{e^{-2t}}{2}\left(e^{2t} - e^{-\frac{9}{2}}\right) & -\frac{9}{4} < t < -\frac{7}{4} \\ \frac{e^{-2t}}{2}\left(e^{-\frac{7}{2}} - e^{-\frac{9}{2}}\right) & t > -\frac{7}{4} \end{cases}$$

سوال چهارم:

از اسلاید های زیر برای حل این سوال استفاده می کنیم:

انرژی سیگنال $x(t)$:

$$\mathrm{E}_x^{\mathrm{tot}} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \qquad (۲)$$

توان یک سیگنال $x(t)$:

$$\mathrm{P}_x^{\mathrm{avg}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \qquad (۳)$$

- سیگنال‌های انرژی: سیگنال‌هایی هستند که انرژی محدود دارند (یعنی انتگرال (۲) مقدار محدودی دارد) و توان آن ها برابر صفر می‌باشد (یعنی انتگرال (۳) مقدارش برابر صفر می‌باشد).
- سیگنال توان: سیگنال‌هایی هستند که انرژی آن ها نامحدود می‌باشد (یعنی مقدارانتگرال (۲) برابر با بی نهایت می‌باشد) و توان آن‌ها محدود.
- سیگنال نه توان و نه انرژی: سیگنال‌هایی هستند که هم انرژی و هم توان آن ها نامحدود هستند.

- برای محاسبه میزان انرژی و توان یک سیگنال می‌توان از روابط (۲) و (۳) استفاده کرد. به عنوان مثال سیگنال $x(t) = e^{-2t}u(t)$ را در نظر بگیرید. بدین‌سان برای محاسبه انرژی خواهیم داشت:

$$\mathrm{E}_x^{\mathrm{tot}} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} e^{-4t} \mathrm{d}t = \frac{e^{-4\times 0}}{4} - \frac{e^{-\infty}}{4} = \frac{1}{4} < \infty$$

پس سیگنال مذکور یک سیگنال انرژی است.

- یک سیگنال متناوب (به مانند $x(t) = \sin(5t)$)، حتما یک سیگنال توان می باشد. همچنین، برای محاسبه توان کافی است تنها یک دوره تناوب سیگنال، در نظر گرفته شود.
- یک سیگنال محدود در زمان (به مانند $x(t) = rect(t)$) همواره یک سیگنال انرژی خواهد بود. البته باید دقت داشت که $|x(t)| < \infty$.

الف) $x_1(t) = tan(\pi t + \pi 2)$

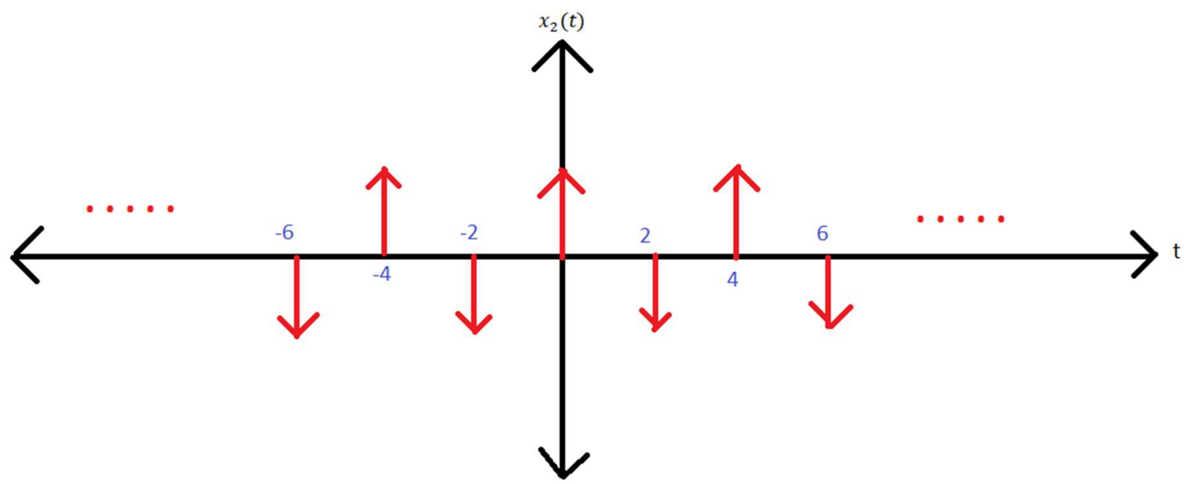
چون تابع متناوب(دوره تناوب = 1 = $\frac{\pi}{\pi} = \frac{\pi}{t\ \text{ضریب}}$) است، برای محاسبه توان کافی است تنها یک دوره تناوب سیگنال را در نظر بگیریم.

$$P_x^{avg} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|x(t)|^2 dt = \frac{1}{1}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|\,tan(\pi t + \pi 2)|^2 dt = \int_0^1 cot^2(\pi t)dt$$
$$= (\frac{-\cot(\pi t)}{\pi} - t)\Big|_0^1 = \infty$$

چون توان سیگنال نامحدود است پس انرژی سیگنال نیز نامحدود است. لذا $x_1(t)$ سیگنال نه توان نه انرژی است چون توان و انرژی نامحدود دارد.

ب) $x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\delta(t - 2k)$

ابتدا تابع را رسم می کنیم:



در $t=4k$ مقدار $+\delta(0)$ را دارد و در $t=4k+2$ دارای مقادیر $-\delta(0)$ است. لذا سیگنال $x_2(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب 4 می باشد. پس سیگنال $x_2(t)$ یک سیگنال توان می باشد.

ج) $x_3(t) = e^{2\pi jt}$

ابتدا انرژی سیگنال را بدست می آوریم:

$$E_x^{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{2\pi jt}\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{(\cos(2\pi t)^2 + \sin(2\pi t)^2}^2 \, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 1^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt = t \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \infty$$

انرژی سیگنال نا محدود است.

سپس توان سیگنال را بدست می آوریم:

$$P_x^{avg} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |e^{2\pi jt}|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} 1 dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{2T}{2T} = \lim_{T\to\infty} 1 = 1$$

توان سیگنال محدود است.

پس نتیجه می گیریم $x_3(t)$ سیگنال توان است.

سوال پنجم:

ابتدا تابع صورت سوال را بوسیله تابع های u(t) و r(t) بازنویسی میکنیم (از سمت چپ شروع میکنیم و به راست می آییم):

$$\mathrm{i(t)} = 2r(t) - 2r(t-1) - u(t-1) + \frac{1}{2}r(t-1) - \frac{1}{2}r(t-3) + u(t-3) - 3r(t-3) + 3r(t-4)$$

$$\rightarrow$$

$$i(t) = 2r(t) - \frac{3}{2}r(t-1) - u(t-1) - \frac{7}{2}r(t-3) + u(t-3) + 3r(t-4)$$

می دانیم که $r'(x) = u(x)$ و $u'(x) = \delta(x)$ لذا:

$$i'(t) = 2u(t) - \frac{3}{2}u(t-1) - \delta(t-1) - \frac{7}{2}u(t-3) + \delta(t-3) + 3u(t-4)$$

اثبات $r'(x) = u(x)$:

$$(fg)'(x) = f'g(x) + fg'(x), r(t) = t.u(t)$$

$$\rightarrow$$

$$r'(t) = 1.u(t) + t.\delta(t) = u(t) + 0.\delta(0) = u(t)$$

پایان