سوال 1) ابتدا برای آزمایش‌های خود، عضویت‌های تمام حالات ممکن در تساوی‌ها را محاسبه می‌کنیم. اگر دو طرف مساوی دارای اعضای با مقادیر عضویت یکسان بودند، تساوی‌ها برقرارند و در غیر این صورت برقرار نخواهند بود. پس داریم:

$$A\ and\ B: \{(1, 0.45), (2, 0.42), (3, 0.25), (4, 0.49), (5, 0.09)\}$$

$$A\ or\ B: \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\}$$

$$not(A): \{(1, 0.5), (2, 0.4), (3, 0.5), (4, 0.3), (5, 0.1)\}$$

$$not(B): \{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.3), (5, 0.9)\}$$

$$not(C): \{(1, 0.2), (2, 0.9), (3, 0.6), (4, 0.8), (5, 0.7)\}$$

$$not(A)\ or\ not(B): \{(1, 0.6), (2, 0.7), (3, 1), (4, 0.6), (5, 1)\}$$

$$not(A)\ and\ not(B): \{(1,0.05), (2, 0.12), (3, 0.25), (4, 0.09), (5, 0.09)\}$$

$$(A\ and\ B)\ or\ C: \{(1, 1), (2, 0.52), (3, 0.65), (4, 0.69), (5, 0.39)\}$$

$$(A\ or\ B)\ and\ C: \{(1, 0.8), (2, 0.1), (3, 0.4), (4, 0.2), (5, 0.3)\}$$

$$\big(not(A)\ and\ not(B)\big)\ or\ not(C): \{(1, 0.25), (2, 1), (3, 0.85), (4, 0.89), (5, 0.79)\}$$

$$\big(not(A)\ or\ not(B)\big)\ and\ not(C): \{(1, 0.12), (2, 0.63), (3, 0.6), (4, 0.48), (5, 0.7)\}$$

$$not((A\ and\ B)\ or\ C): \{(1, 0), (2, 0.48), (3, 0.35), (4, 0.31), (5, 0.61)\}$$

$$not((A\ or\ B)\ and\ C): \{(1, 0.2), (2, 0.9), (3, 0.6), (4, 0.8), (5, 0.7)\}$$

از چهار سطر آخر مجموعه‌های فازی بالا می‌توان برداشت کرد که این تساوی‌ها برقرار نیستند. علت این امر در نحوه‌ی عملیات اشتراک و اجتماع‌گیری است. هامنطور که در اسلایدهای درس نیز ذکر شده است، قوانین دمورگان جایی برای مجموعه‌ی فازی صدق خواهد کرد که ما از عملیات‌های یکسان اشتراک‌گیری و اجتماع‌گیری استفاده کنیم. یعنی اگر برای اشتراک از algebraic product استفاده می‌کنیم، برای اجتماع نیز باید از algebratic sum که برابر است با $S_a(a,b) = a + b - a \times b$ استفاده شود.

سوال 2)

به دلیل آنکه قانون فازی ما به‌صورت زیر بیان شده است:

اگر .... خیلی .... باشد آنگاه .... خیلی .... است

و اینکه ترم‌های ساده‌ی متغیرها داده شده است، برای بدست آوردن اطلاعات درباره‌ی ترم‌های مختلف هر متغیر خواسته شده‌ی سیستم براساس ورودی‌های (premise) مختلف، باید این ترم‌های دارای quantifier را از روی ترم‌های ساده‌ی آن بسازیم تا به درستی به جدول قاعده‌ی implication برسیم و از آن استفاده کنیم. بنابراین داریم:

P	20	30	40	50
$very\ high \rightarrow high^2$	0.04	0.16	0.49	0.81

V	30	50	80	90
$very\ low \rightarrow low^2$	0.01	0.09	0.64	1

حال می‌توان از روی این جداول، جدول implication را بدست آورد. برای این کار نیاز است تا از یک روش implication استفاده شود. از روش‌های مرسوم mamdani و larsen می‌باشد که معمولا روش mamdani بیشتر رایج است. بنابراین با روش mamdani خواهیم داشت:

Mamdani implication rule:

$$\mu_{a,b} = \min(\mu_a, \mu_b)\ |\ a \in A\ and\ b \in B$$

	20	30	40	50
30	Min(0.04, 0.01)=0.01	Min(0.16, 0.01)=0.01	Min(0.49, 0.01)=0.01	Min(0.81, 0.01)=0.01
50	0.04	0.09	0.09	0.09
80	0.04	0.16	0.49	0.64
90	0.04	0.16	0.49	0.81

جدول فوق نشان‌دهنده‌ی قاعده‌ی اگر حجم خیلی کم باشد، فشار خیلی زیاد است.

حال فرض کنید براساس premise زیر، می‌خواهیم اطلاعاتی درباره‌ی ترم زیاد فشار بدست آوریم. در این حالت از compositional rule inference استفاده می‌کنیم. ورودی این سیستم استنتاج برابر است با: اگر حجم تقریبا کم نباشد. این نیز یک ترم دارای quantifier است که باید جدول MBF آن از روی ترم کم بدست آید. ابتدا quantifier مربوط به تقریبا را اعمال می کنیم:

V	30	50	80	90
$fairly\ low \rightarrow \sqrt{low}$	0.31	0.55	0.89	1

اما premise ورودی سیستم تقریبا کم نباشد، می‌باشد. برای این منظور قاعده‌ی not را اعمال می‌کنیم:

V	30	50	80	90
$not\ fairly\ low \rightarrow 1 - fairly\ low$	0.69	0.45	0.11	0

از قاعده‌ی max-min می‌توان برای compositional rule inference استفاده کرد. در این روش، ابتدا میان سطرهای هر ستون از نتیجه‌ی implication و المان‌های جدول not fairly low عملیات min را اعمال می‌کنیم و سپس میان خروجی‌های ایجاد شده، max می‌گیریم.

$$\tilde{R}(p) = \tilde{A} \circ R = \underset{x}{max}\left(\min\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{R}}(x, y)\right)\right)$$

برای مثال برای فشار 20 این عملیات انجام می‌شود:

$$\min\begin{pmatrix} 0.69 & 0.01 \\ 0.45 & 0.04 \\ 0.11, & 0.04 \\ 0 & 0.04 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0.01 \\ 0.04 \\ 0.04 \\ 0 \end{matrix} \rightarrow \max\begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.04 \\ 0.04 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.04$$

نتیجه‌ی نهایی برابر است با:

P	20	30	40	50
	0.04	0.11	0.11	0.11

سوال 3)

الف) در ابتدا سعی می‌شود تا متغیرهای سیستم چه ورودی و چه خروجی به درستی شناسایی شوند. پس ابتدا متغیرهای ورودی و خروجی سیستم را شناسایی کرده و سعی می‌کنیم اجزای مختلف این متغیرها را توضیح دهیم.

اجزای سازنده شامل، نام آن متغیر {مانند: فاصله از ماشین جلویی}، ترم‌های فازی آن {مانند: کم، متوسط، زیاد}، تابع فازی‌سازی که یک نگاشت مابین ترم‌ها و مجموعه‌ی U {مانند تابع مثلثی} است. با مشورت یک متخصص می‌توان برای متغیرهای خود بازه‌های مناسب را تعریف کرده و نیز هنگام تعریف تابع فازی‌سازی، می‌توان برروی U با مشورت یک متخصص بازه‌بندی کرده و برای هر بازه فرمول مناسب نگاشت را یافت.

سپس که هر متغیر تعریف شد، باید inference engine خود را تعریف کنیم که می‌تواند از نوع Mamdani و یا Larsen باشد. ما نوع Mamdani را معمولا انتخاب می کنیم.

در مرحله‌ی آخر، مرحله‌ی defuzzification را داریم. در این مرحله از فضای فازی به فضای عددی و قطعی می‌رویم. یکی از روش‌های مناسب defuzzification استفاده از تابع center average است.

بعد از آنکه این موارد بالا مشخص شدند، می‌توان با مشورت یک متخصص برای سیستم خود قوانینی را وضع کرد. این قوانین بصورت "اگر p آنگاه q" اند. سمت p این قوانین اگر چندین متغیر داشته باشیم که باید همگی در این قانون شرکت کنند، با عملگرد and به یکدیگر وصل خواهند شد.

حال برای هر ورودی، ابتدا مقادیر متغیرها را فازی کرده و عضویت آن به هر ترم را بررسی می‌کنیم. سپس براساس ترم‌هایی که از هر متغیر مقدار عضویت غیر صفر دارند، در میان قوانین موجود در rule base قوانین متناسب را انتخاب می‌کنیم. در این قوانین بعد از and کردن مقادیر عضویت هر ترم، از قواعد implication استفاده می‌کنیم تا خروجی سمت p را برای آن قانون بدهد. سپس میان ترم‌های مختلف متغیرهای خروجی، براساس inference engine، با عدد ایجاد شده، میزان این مقدار خروجی از سمت P را با تابع عضویت متغیر خروجی بدست می‌آوریم و در نهایت، میان مقادیر بدست آمده سمت خروجی، از defuzzification استفاده می‌کنیم.

ب) ابتدا جزئیات هر دو متغیر را رسم می‌نویسیم:

برای x1 داریم:

نام: فاصله از ماشین جلویی

ترم‌های فازی: کم، متوسط و زیاد

بازه‌ی اعتبار: 0 تا 1

تابع فازی‌سازی: مثلثی

متغیر x2:

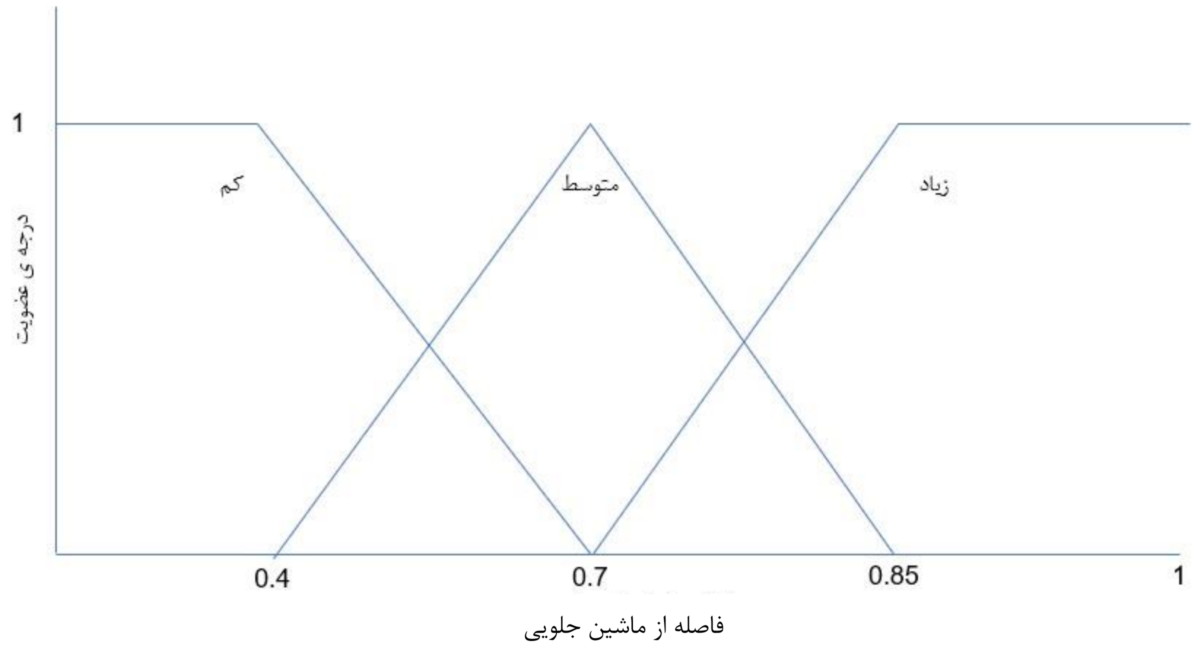
نام: میزان لغزندگی جاده

ترم های فازی: کم، متوسط، زیاد

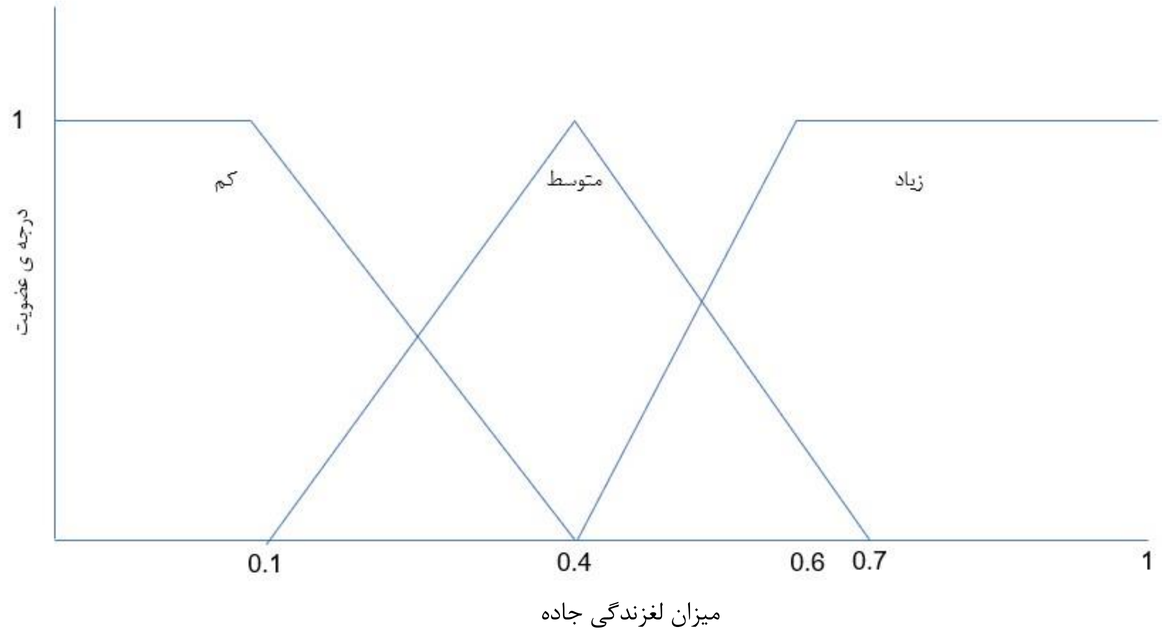
بازه‌ی اعتبار: 0 تا 1

تابع فازی‌سازی: مثلثی

برای این دو متغیر می‌توان توابع فازی‌سازی را بصورت زیر رسم کرد:



و



پ) ابتدا باید این دو مقدار را فازی کرد. برای این کار هر دو مقدار را به توابع فازی‌ساز هر دو متغیر می‌دهیم. برای متغیر فاصله از ماشین جلویی (x1) مقدار داده شده برابر 0.65 است. با توجه به شکل در قسمت ب، این مقدار میان دو ترم کم و متوسط است. برای بدست آوردن میزان عضویت این مقدار به ترم‌های کم و متوسط در ضابطه‌های مربوطه قرار می‌دهیم:

برای ترم متوسط:

$$y = \frac{10}{3}x_1 - \frac{4}{3}$$

که میزان تعلق برای مقدار 0.65 برابر است با: 0.83

برای ترم کم نیز داریم:

$$y = \frac{-10}{3}x_1 + \frac{7}{3}$$

که برای آن نیز خواهیم داشت: 0.16

به همان ترتیب برای متغیر دوم نیز داریم:

میزان 0.5 تنها در دو ترم متوسط و زیاد مقدار بالای 0 دارد پس داریم:

میزان ترم متوسط:

$$y = \frac{-10}{3}x_2 + \frac{7}{3}$$

که میزان تعلق برای مقدار 0.5 برابر است با: 0.66

برای ترم زیاد نیز داریم:

$$y = \frac{10}{2}x_2 - 2$$

که میزان تعلق برابر است با: 0.5

با توجه به rule base موجود داریم:

اگر فاصله از ماشین جلویی و میزان لغزندگی جاده متوسط باشند آنگاه میزان فشار بر پدال گاز متوسط است.

اگر فاصله از ماشین جلویی کم و میزان لغزندگی متوسط باشند آنگاه میزان فشار بر پدال گاز متوسط است.

اگر فاصله از ماشین جلویی کم و میزان لغزندگی جاده زیاد باشند آنگاه میزان فشار بر پدال گاز خیلی بالا است.

اگر فاصله از ماشین جلویی متوسط و میزان لغزندگی جاده زیاد باشند آنگاه میزان فشار بر پدال گاز بالا است.

براساس قانون mamdani، برای قسمت اول این قوانین میزان تعلق را بدست می‌آوریم. یعنی

برای قانون اول min(0.83, 0.66) = 0.66

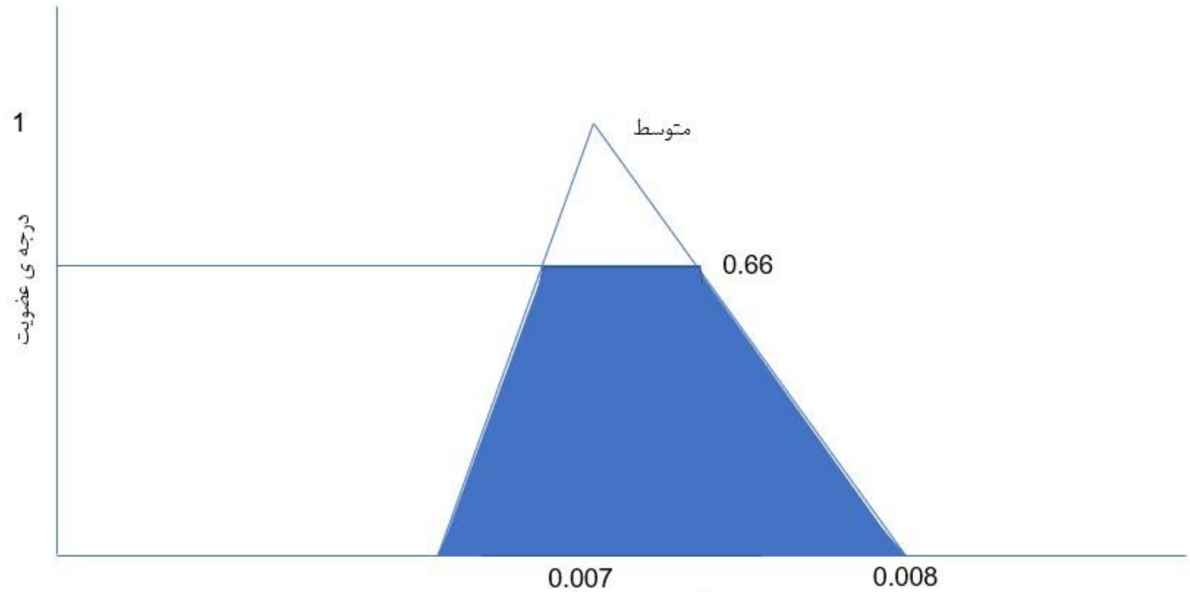
برای قانون دوم min(0.66, 0.16)=0.16

برای قانون سوم min(0.16, 0.5) = 0.16

برای قانون چهارم min(0.5, 0.83) = 0.5

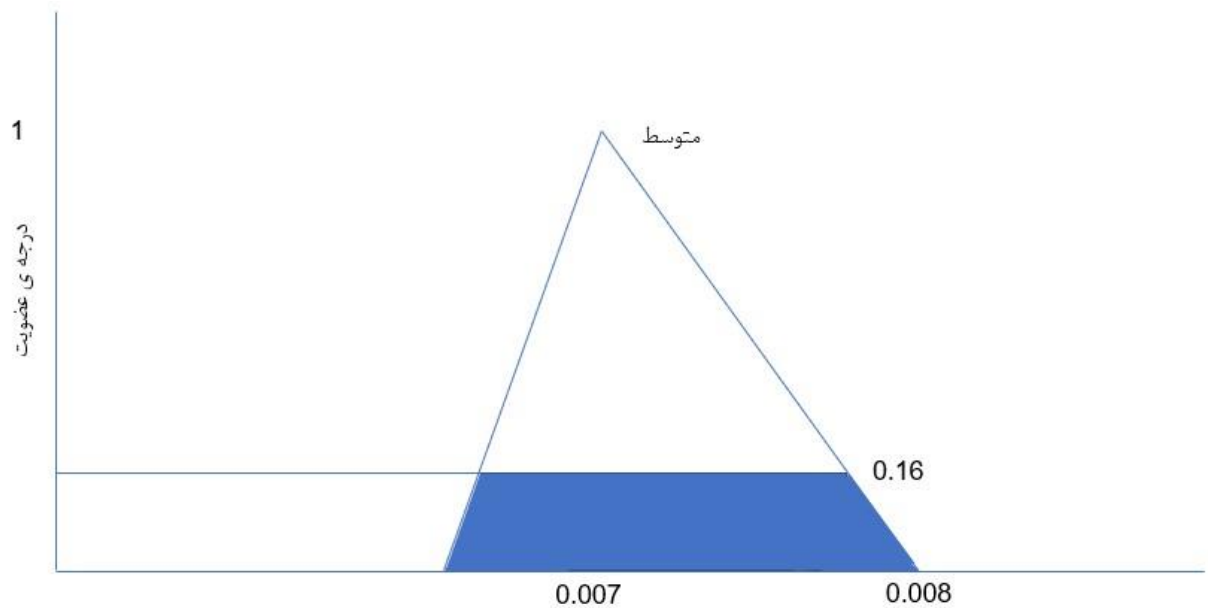
حال برای inference engine خود از قانون mamdani استفاده می‌کنیم. آنگاه خواهیم داشت:

برای قانون اول:



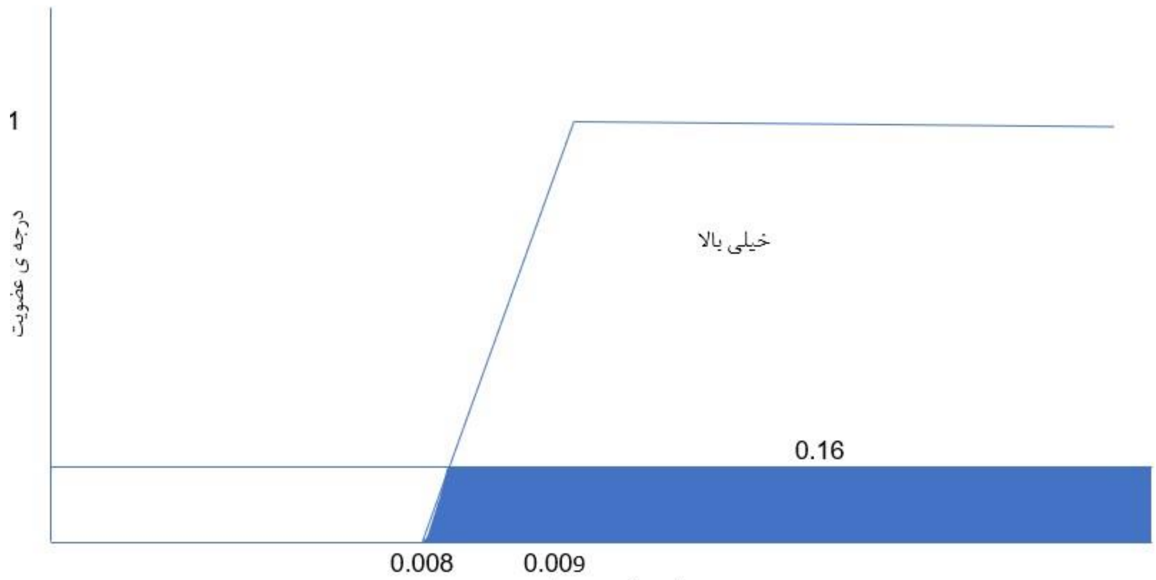
میزان فشار بر پدال گاز

برای قانون دوم



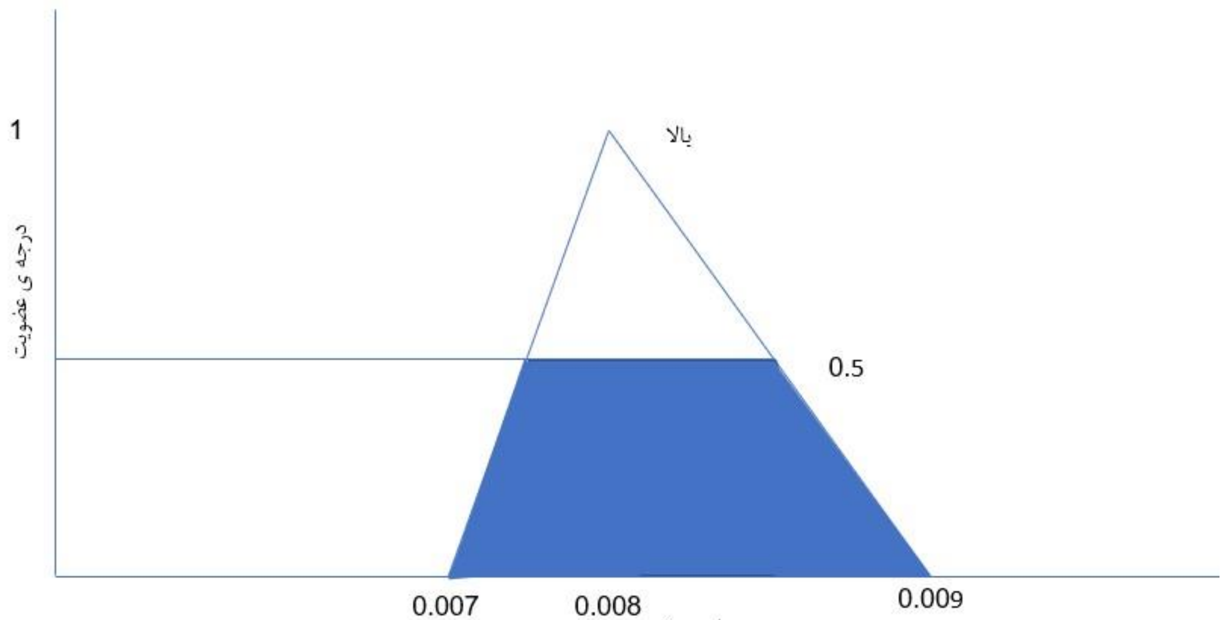
میزان فشار بر پدال گاز

برای قانون سوم:



میزان فشار بر پدال گاز

برای قانون 4ام:



میزان فشار بر پدال گاز

حال باید با استفاده از تابع defuzzification خود به یک عدد برسیم. چون از تابع center average استفاده می‌کنیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$output = \frac{0.66 * 0.007 + 0.16 * 0.007 + 0.5 * 0.008 + 0.16 * 0.009}{0.66 + 0.16 + 0.16 + 0.5} = \frac{0.01118}{1.48} = 0.00755$$