به نام خدا

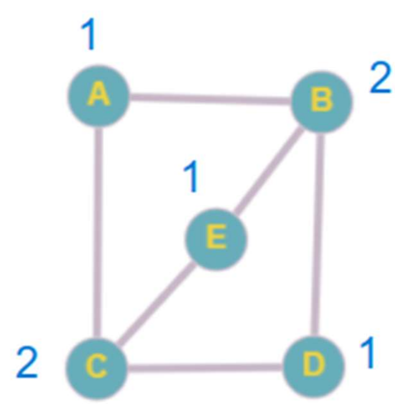
تمرین سری دوم
درس نظریه و الگوریتم های گراف
دکتر فرزانه غیور باغبانی

فرزان رحمانی
۹۹۵۲۱۲۷۱

سوال اول

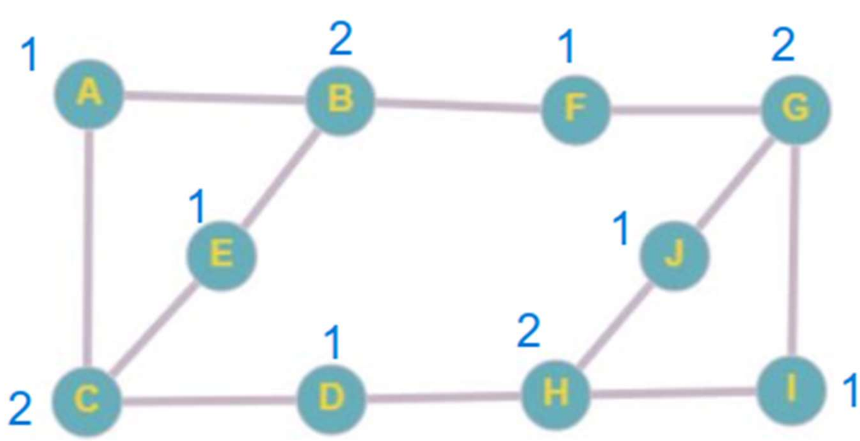
a) بله دو بخشی هست. مجموعه رئوس اول را با X و مجموعه رئوس دوم را با Y نمایش می‌دهیم.

$$X = \{A, E, D\}$$
$$Y = \{B, C\}$$



b) بله دو بخشی هست. مجموعه رئوس اول را با X و مجموعه رئوس دوم را با Y نمایش می‌دهیم.

$$X = \{A, E, D, F, I, J\}$$
$$Y = \{B, C, G, H\}$$



c) خیر دو بخشی نیست. چرا که دارای دور به طول فرد است. دور های ABCA, ACDA, CDEC طول ۳ دارند و همچنین دور ABCEDA طول ۵ دارد.

Theorem 3.3

A graph is bipartite if and only if it has no cycles of odd length.

Proof.

ضرورت
لزوم
بایستگی
شرط لازم

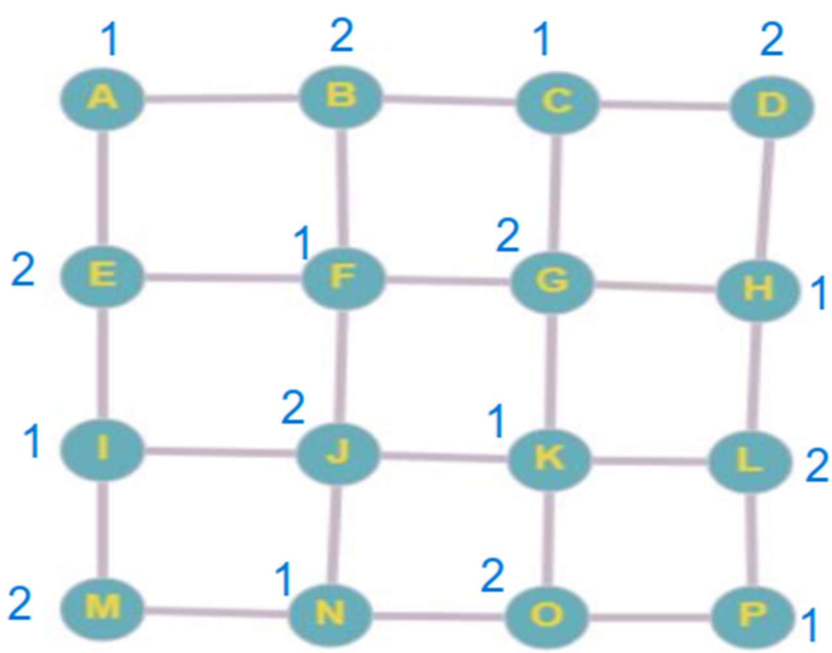
Necessity is clear: every cycle of G must alternate between a vertex in X and a vertex in Y, and so it must be of even length.

کفایت
مقدار کافی
شرط کافی

For sufficiency, we may assume that G is connected. Now, pick a vertex x of G, and let X be the set of vertices whose distance from x is even, and let Y be the set of vertices whose distance from x is odd. Clearly, $\{X, Y\}$ is a partition of $V(G)$. Suppose now that some two vertices of X or some two vertices of Y, say x_1 and x_2, are adjacent. Let P_1 be a shortest path from x to x_1 and let P_2 be a shortest path from x to x_2. Let u be vertex on $P_1 \cap P_2$ that the the farthest from x, and let P_1' and P_2' be the subpaths of, respectively, P_1 and P_2, from u to x_1 and from u to x_2. Then P_1' and P_2' have the same length, and so the cycle $P_1' \cup P_2' \cup x_1x_2$ has odd length. This proves that x_1 and x_2 cannot be adjacent. □

d) بله دو بخشی هست. مجموعه رئوس اول را با X و مجموعه رئوس دوم را با Y نمایش می‌دهیم.

$$X = \{A, C, F, H, I, K, N, P\}$$
$$Y = \{B, D, E, G, J, L, M, O\}$$

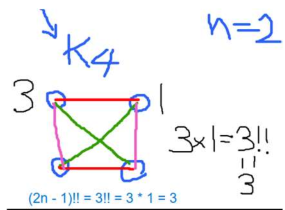


سوال دوم

برای یافتن تعداد تطابق کامل متمایز در K2n (گراف کامل با 2n رأس) و Kn,n (گراف دو بخشی کامل با n رأس در هر بخش)، می‌توانیم از استدلال ترکیبیاتی(combinatorial reasoning) استفاده کنیم. همچنین باید موارد زیر را در نظر بگیریم:

- تطابق کامل مجموعه ای از یال ها در یک گراف است به طوری که هر رأس دقیقاً به یک یال در مجموعه متصل باشد یا برخورد کند(incident to is).
- در یک گراف دو بخشی کامل Kn,n در هر طرف(بخش) n رأس وجود دارد و هر رأس از یک بخش به تمام رأس های بخش دیگر متصل است.
- در یک گراف کامل Kn، هر رأس به تمام رأس های دیگر متصل است.

۱. K2n:



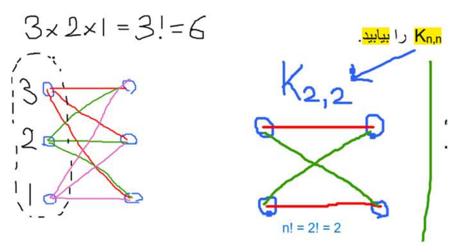
در یک گراف کامل K2n، هر رأس به هر رأس دیگر متصل است. یک تطابق کامل در K2n مجموعه‌ای از n یال متمایز است که همه 2n رأس را پوشش می‌دهد، به طوری که هر رأس دقیقاً به یک یال متصل است.

برای رأس اول، 2n-1 انتخاب برای شریک تطبیق(matching partner) آن وجود دارد. برای رأس دوم، 2n-3 انتخاب وجود دارد (زیرا نمی توان آن را با رأس اول و شریک آن که از قبل در تطابق وجود دارند جفت کرد) و و برای رأس سوم، 2n-5 انتخاب وجود دارد و غیره. بنابراین، تعداد کل تطابق کامل در K2n برابر است با:

$$(2n-1) \times \ (2n-3) \times \ (2n-5) \times \ldots \times \ 3 \ \times \ 1 = \frac{(2n)!}{2^n \ \times n!}$$

این عبارت را می توان به صورت !!(1 – 2n)، که در آن !! نشان دهنده فاکتوریل دوگانه(double factorial) است نوشت.

۲. Kn,n:



در یک گراف دوبخشی کامل Kn,n، هر رأس در یک پارتیشن(partition) به هر رأس در پارتیشن دیگر متصل است که در مجموع n^2 یال ایجاد می‌شود. تطابق کامل در Kn,n مجموعه‌ای از n یال مجزا، یکی از هر ردیف است که تمام n رأس هر پارتیشن را پوشش می‌دهد.

برای اولین رأس در پارتیشن اول، n انتخاب برای شریک تطابق(matching partner) آن وجود دارد. به طور مشابه، برای رأس دوم در پارتیشن اول، n-1 انتخاب وجود دارد (چون نمی توان آن را با شریک رأس اول جفت کرد) و برای رأس سوم در پارتیشن اول، n-2 انتخاب وجود دارد و غیره. بنابراین، تعداد کل تطابق کامل در Kn,n برابر است با:

$$n \ \times \ (n-1) \times \ (n-2) \times \ldots \times \ 1 \ = \ n!$$

بنابراین، !!(1 – 2n) تطابق کامل متمایز در K2n و !n تطابق کامل متمایز در Kn,n وجود دارد.

سوال سوم

ابتدا با مراجعه به اسلاید های درس به بیان قضیه هال می‌پردازیم:

Hall's Marriage Theorem

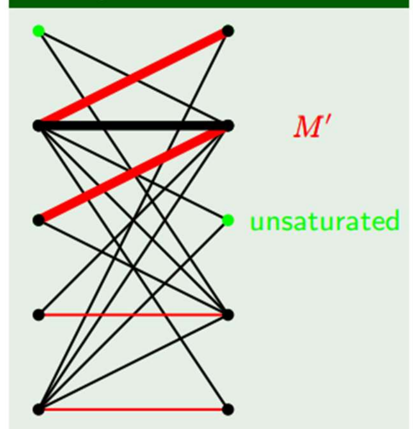
Theorem 3.6 (Hall's Marriage Theorem, 1935)

Suppose G is a bipartite graph with bipartition $\{X, Y\}$. The graph G has a matching saturating X if and only if $|N(S)| \geq |S|$ for every subset S of X.

Definition 3.7

- Given a matching M, an M-alternating path is a path that alternates between edges in M and edges not in M.
- A non-trivial M-alternating path P that begins and ends at M-unsaturated vertices is an M-augmenting path.
- Replacing $M \cap E(P)$ by $E(P) \setminus M$ produces a new matching M' that has one more edge than M.

Example 3.8



همچنین در ادامه اثبات قضیه هال نیز آمده است:

Proof of Hall's Theorem

Recall the Hall's Condition: $|N(S)| \geq |S|$ for every $S \subseteq X$.
Necessity is clear.
To prove sufficiency, suppose the Hall's condition holds, let M be a maximum matching, and suppose $u \in X$ is unsaturated. Let S and T be subsets of X and Y, respectively, that are reachable from u by M-alternating paths. These paths reach Y from u along edges not in M, and reach X along edges in M. Hence every vertex in $S - u$ is reached along an edge in M from a vertex in T. Since there are no augmenting paths, every vertex in T is saturated. Hence the edges of M establish a bijection between T and $S - u$. Note that an edge between S and $y \in Y - T$ would be an edge not in M, and thus create an M-augmenting path to y, which contradicts $y \notin T$. Hence $T = N(S)$, and $|N(S)| = |T| = |S| - 1 < |S|$; a contradiction.

حال به حل سوال می پردازیم:

قضیه هال شرط لازم و کافی برای وجود تطابق کامل در یک گراف دوبخشی را فراهم می کند. می توان به صورت زیر بیان کرد:

قضیه هال: یک گراف دوبخشی $G = (U, V, E)$ تطابق کامل دارد اگر و فقط اگر برای هر زیرمجموعه $S \subseteq U$، تعداد رئوس در همسایگی S (که با N(S) نشان داده می شود) حداقل به اندازه اندازه S است، یعنی $|N(S)| \geq |S|$.

در اینجا N(S) مجموعه رئوس V را نشان می دهد که حداقل با یک راس در S مجاور هستند.

برای اثبات اینکه می‌توان از قضیه هال برای تعیین اینکه آیا یک گراف دوبخشی تطابق کامل دارد استفاده کرد، باید دو چیز را نشان دهیم:

۱. کفایت(**Sufficiency**): اگر شرط $|N(S)| \geq |S|$ برای هر زیرمجموعه $S \subseteq U$ برقرار است، پس گراف دوبخشی G تطابق کامل دارد.

۲. لزوم(**Necessity**): اگر گراف دو بخشی G تطابق کامل داشته باشد، شرط $|N(S)| \geq |S|$ باید برای هر زیر مجموعه $S \subseteq U$ برقرار باشد.

اثبات کفایت:

فرض کنید که شرط $|N(S)| \geq |S|$ برای هر زیرمجموعه $S \subseteq U$ برقرار است. ما از یک برهان سازنده(constructive proof) برای نشان دادن اینکه G تطابق کامل دارد استفاده خواهیم کرد.

ما با یک تطبیق خالی $M = \emptyset$ شروع می کنیم. سپس، ما به طور مکرر M را با اضافه کردن یکی یکی یال‌ها می سازیم و در عین حال این ویژگی را حفظ می کنیم که هیچ دو یالی در M یک راس مشترک ندارند.

در ابتدا، یک راس دلخواه $u \in U$ را انتخاب می کنیم که هنوز تطابق نداشته باشد و یک راس $v \in N(u)$ را پیدا می کنیم که هنوز تطابق ندارد. یال (u,v) را به M اضافه می کنیم. از شرط $|N(S)| \geq |S|$ که برای هر زیرمجموعه $S \subseteq U$ برقرار است، باید چنین راس v وجود داشته باشد.

ما این روند را تا زمانی تکرار می کنیم که تمام رئوس در U تطابق داشته باشند یا امکان تطابق بیشتری وجود نداشته باشد. اگر همه رئوس در U مطابقت داشته باشند، یک تطابق کامل ایجاد کرده ایم. در غیر این صورت، شرط $|N(S)| \geq |S|$ باید برای برخی از زیرمجموعه $S \subseteq U$ نقض شود، که با فرض ما در تضاد است.

اثبات ضرورت:

فرض کنید که G دارای یک تطابق کامل M است. باید نشان دهیم که $|N(S)| \geq |S|$ برای هر زیر مجموعه $S \subseteq U$ برقرار است.

هر زیرمجموعه $S \subseteq U$ را در نظر بگیرید. از آنجایی که M یک تطابق کامل است، هر راس در S باید با یک راس متمایز در V مطابقت داده شود. فرض کنید T مجموعه ای از رئوس در V باشد که با رئوس S مطابقت دارند. سپس، $|S| = |T|$.

با تعریف N(S)، هر راس در T باید حداقل با یک راس در S مجاورت داشته باشد. بنابراین، N(S) حاوی حداقل $|S| = |T|$ رئوس، که به این معنی است که $|N(S)| \geq |S|$.

بنابراین، نشان دادیم که اگر یک گراف دوبخشی G تطابق کامل داشته باشد، آنگاه شرط $|N(S)| \geq |S|$ باید برای هر زیر مجموعه $S \subseteq U$ نگه داشته شود.

به طور خلاصه، قضیه هال شرط لازم و کافی برای وجود تطابق کامل در یک گراف دوبخشی را فراهم می‌کند و می‌توان با بررسی شرط $|N(S)| \geq |S|$ برای هر زیر مجموعه $S \subseteq U$ تعیین کرد که آیا یک گراف دوبخشی تطابق کامل دارد یا خیر.

به علاوه در ادامه اثبات این قضیه به دو روش دیگر که در اینترنت پیدا کردم آمده است که لینک آن ها در مراجع آمده است:

روش دیگر ۱:

Definition 1 (Bipartite Graph). *A graph $G = (V, E)$ is said to be bipartite if the vertex set V can be partitioned into 2 disjoint sets L and R so that any edge has one vertex in L and the other in R.*

Definition 2 (Matching). *Given an undirected graph $G = (V, E)$, a matching is a subset of edges $M \subseteq E$ that have no endpoints in common.*

Definition 3 (Maximum Matching). *Given an undirected graph $G = (V, E)$, a maximum matching M is a matching of maximum size. Thus for any other matching M', we have that $|M| \geq |M'|$.*

Definition 4 (Perfect Matching). *Given an bipartite graph $G = (V, E)$, with the bipartition $V = L \cup R$ where $|L| = |R| = n$, a perfect matching is a maximum matching of size n.*

2.1 Hall's Theorem

Hall's Theorem gives both sufficient and necessary conditions for the existence of a perfect matching in a bipartite graph.

Theorem 5. *(Hall's Theorem) A bipartite graph $G = (V, E)$, with the bipartition $V = L \cup R$ where $|L| = |R| = n$, has a perfect matching if and only if for every subset $S \subseteq L$, $|N(S)| \geq |S|$ where $N(S)$ denotes the neighborhood of S.*

Proof. We first prove the necessary condition. Consider there is one subset $S \subseteq L$ that $|N(S)| < |S|$. Then there remains some vertices in S that won't be connected to distinct vertices of R, which contradicts perfect matching. Hence for all subsets $S \subseteq L$, $|N(S)| \geq |S|$.

We now prove the sufficient condition.
We assume that there is no perfect matching. Hence by the max-flow min-cut theorem an $s - t$ min-cut (S, S^c) of the graph also has a capacity less than n.

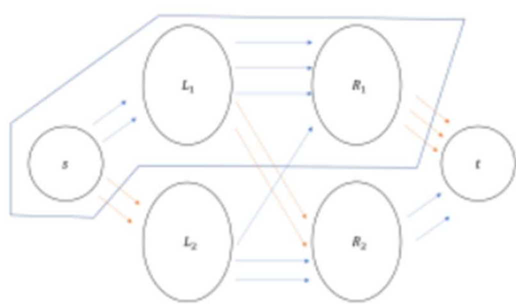


Figure 1: Hall's theorem

Let $L_1 = S \cap L$, $R_1 = S \cap R$, $L_2 = S^c \cap L$ and $R_2 = S^c \cap R$. Since all edges have unit capacity and we are looking at integral flows, the capacity of the cut will simply be the number of edges going from S to S^c. Hence.

$$\begin{aligned}|cut| &= |L_2| + |R_1| + edges(L_1 \to R_2) \\ &\geq n - |L_1| + |R_1| + |N(L_1) \cap R_2|\end{aligned}$$

We can easily see that the quantity $|R_1| + |N(L_1) \cap R_2|$ is an upper bound for $|N(L_1)|$ since we are overcounting by assuming that L_1 has edges to each point in R_1. So we have

$$\begin{aligned}|cut| &\geq n - |L_1| + |R_1| + |N(L_1) \cap R_2| \\ &\geq n + (|(N(L_1)| - |L_1|)\end{aligned}$$

But we know that $|cut| < n$, which implies

$$|N(L_1)| < |L_1|$$

Thus L_1 is a set that contradicts the assumption. This completes the proof of the sufficient condition. □

روش دیگر ۲:

Theorem 2. *For a bipartite graph G on the parts X and Y, the following conditions are equivalent.*

(a) *There is a perfect matching of X into Y.*

(b) *For each $T \subseteq X$, the inequality $|T| \leq |N_G(T)|$ holds.*

Proof. (a) $\Rightarrow$ (b): Let S be a perfect matching of X into Y. As S is a perfect matching, for every $x \in X$ there exists a unique $y_x \in Y$ such that $xy_x \in S$. Define the map $f\colon X \to Y$ by $f(x) = y_x$. Since S is a matching, the function f is injective. Therefore for any $T \subseteq X$, we see that $|T| = |f(T)| \leq |N_G(T)|$ because $f(T) \subseteq N_G(T)$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Conversely, suppose that $|T| \leq |N_G(T)|$ for each $T \subseteq X$. We will prove that there exists a perfect matching of X into Y by induction on $n := |X|$. If $n = 1$, then the only vertex x in X must be adjacent to some vertex y in Y by condition (b) and, therefore, $\{xy\}$ is a perfect matching of X into Y. Now assume that every bipartite graph on the parts X' and Y' with $|X'| < |X|$ and satisfying condition (b) has a perfect matching of X' into Y'. We split the rest of the proof into two cases.

Case 1: For every nonempty proper subset T of X (that is, $T \subsetneq X$), the strict inequality $|T| < |N_G(T)|$ holds. Take $x \in X$ and $y \in N_G(\{x\})$. Let G' be the bipartite graph we obtain by removing x and y (and the edges incident to them) from G. Now for every subset A of $X \setminus \{x\}$, we see that

$$|N_{G'}(A)| \geq |N_G(A)| - 1 \geq |A|,$$

where the last inequality holds because A is a strict subset of X. By induction hypothesis, there exists a perfect matching S' in G' of $X \setminus \{x\}$ into $Y \setminus \{y\}$. It is clear now that $S' \cup \{xy\}$ is a perfect matching in G of X into Y.

Case 2: There exists a nonempty proper subset A of X such that $|A| = |N_G(A)|$. Let G_1 be the subgraph of G induced by the set of vertices $A \cup N_G(A)$, and let G_2 be the subgraph of G we obtain by removing $A \cup N_G(A)$ (and their incident edges) from G. It is clear that $G_1 = (A, N_G(A))$ and $G_2 = (X \setminus A, Y \setminus N_G(A))$ are bipartite graphs. Let us show that both G_1 and G_2 satisfy condition (b).

To show that G_1 satisfies (b), take $T \subseteq A$. It follows by the way G_1 was constructed that $N_{G_1}(T) = N_G(T)$. As a result, $|N_{G_1}(T)| = |N_G(T)| \geq |T|$. Then G_1 satisfies condition (b). In order to argue that G_2 also satisfies condition (b), take $T' \subseteq X \setminus A$ and observe that $N_G(T' \cup A) = N_G(A) \cup N_{G_2}(T')$, where the union on the right-hand side is disjoint. Since $|N_G(T' \cup A)| \geq |T' \cup A|$ and $|N_G(A)| = |A|$,

$$|N_{G_2}(T')| = |N_G(T' \cup A)| - |N_G(A)| \geq |T' \cup A| - |A| = (|T'| + |A|) - |A| = |T'|.$$

Therefore G_2 also satisfies condition (b). Since $|A| < |X|$ and $|X \setminus A| < |X|$, our induction hypothesis guarantees the existence of a perfect matching S_1 in G_1 of A into $N_G(A)$ and a perfect matching S_2 in G_2 of $X \setminus A$ into $Y \setminus N_G(A)$. Then it follows from the construction of G_1 and G_2 that $S_1 \cup S_2$ is a perfect matching in G of X into Y, which concludes the proof. □

مراجع:

https://chat.openai.com/
https://bard.google.com/
https://claude.ai/chats
https://www.cs.utexas.edu/~ecprice/courses/randomized/fa17/notes/lec12.pdf
https://math.mit.edu/~fgotti/docs/Courses/Combinatorial%20Analysis/30.%20Matchings%20and%20Hall's%20Theorem/Matching%20and%20Hall's%20Theorem.pdf

پایان