به نام خدا

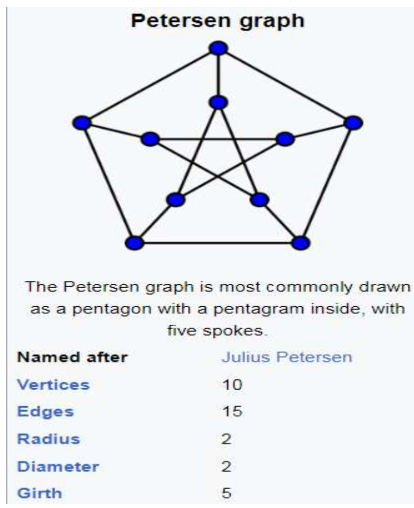
تمرین تئوری سری چهارم
درس نظریه و الگوریتم های گراف
دکتر فرزانه غیور باغبانی

فرزان رحمانی

۹۹۵۲۱۲۷۱

سوال اول

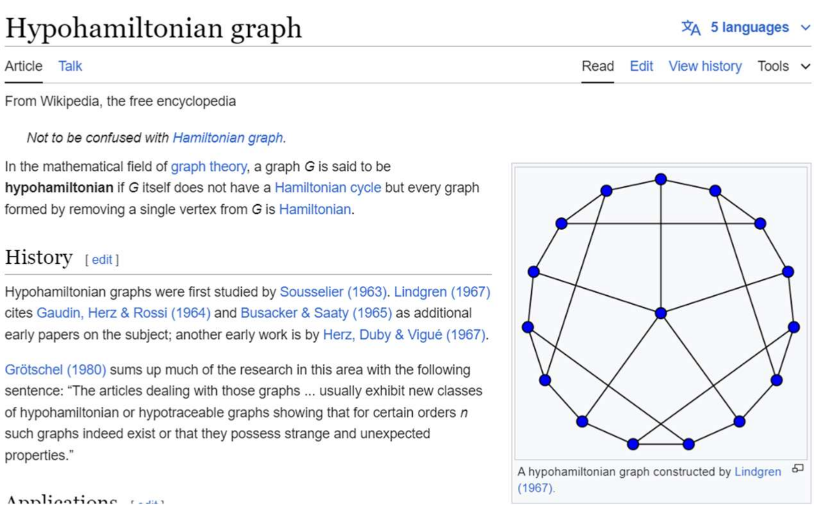
ابتدا تعاریف گراف پترسن و گراف درون همیلتونی را بیان می کنیم و سپس به اثبات می پردازیم.



Petersen graph

The Petersen graph is most commonly drawn as a pentagon with a pentagram inside, with five spokes.

Named after	Julius Petersen
Vertices	10
Edges	15
Radius	2
Diameter	2
Girth	5



Hypohamiltonian graph

5 languages

Article Talk Read Edit View history Tools

From Wikipedia, the free encyclopedia

Not to be confused with Hamiltonian graph.

In the mathematical field of graph theory, a graph *G* is said to be **hypohamiltonian** if *G* itself does not have a Hamiltonian cycle but every graph formed by removing a single vertex from *G* is Hamiltonian.

History [edit]

Hypohamiltonian graphs were first studied by Sousselier (1963). Lindgren (1967) cites Gaudin, Herz & Rossi (1964) and Busacker & Saaty (1965) as additional early papers on the subject; another early work is by Herz, Duby & Vigué (1967).

Grötschel (1980) sums up much of the research in this area with the following sentence: "The articles dealing with those graphs ... usually exhibit new classes of hypohamiltonian or hypotraceable graphs showing that for certain orders *n* such graphs indeed exist or that they possess strange and unexpected properties."

A hypohamiltonian graph constructed by Lindgren (1967).

اثبات:

برای اثبات اینکه گراف پترسن یک گراف درون همیلتونی(Hypohamiltonian) است، باید دو ویژگی را نشان دهیم:

۱. **گراف پترسن همیلتونی نیست:** به این معنا که این گراف شامل یک دورهمیلتونی (یک چرخه که هر راس را دقیقاً یک بار بازدید می‌کند) نیست.

۲. **گراف پترسن با حذف هر راس به یک گراف همیلتونی تبدیل می‌شود:** به این معنا که اگر هر راس را از گراف حذف کنیم، گراف باقی‌مانده شامل یک دور همیلتونی است.

۱. گراف پترسن همیلتونی‌نیست:

ابتدا اثبات می‌کنیم که گراف پترسن یک چرخه همیلتونی ندارد. گراف پترسن یک گراف مشهور با 10 راس و 15 یال است که به صورت زیر ساختاردهی شده است:

- رئوس می‌توانند به صورت {1, 2, 3, 4, 5, 1', 2', 3', 4', 5'} نامگذاری شوند.
- یال‌ها رئوس i را به i+1 مد 5 و i' را به i'+1 مد 5 متصل می‌کنند و دو 5-cycle جداگانه تشکیل می‌دهند.
- علاوه بر این، هر i به و هر i' به (i + 2)' متصل است.

یکی از ویژگی‌های کلیدی گراف پترسن این است که چرخه همیلتونی ندارد. این قضیه می‌تواند از طرق مختلفی اثبات شود، از جمله بررسی تمام دورهای ممکن و نشان دادن اینکه هیچ‌کدام همه رئوس را دقیقاً یک بار بازدید نمی‌کنند .یک روش معمول استفاده از این است که گراف پترسن سه منظم و دوبخشی است، که منجر به تناقض با ویژگی‌های مورد نیاز برای یک دور همیلتونی می‌شود.

۲. گراف پترسن با حذف هر راس همیلتونی می‌شود:

سپس، باید نشان دهیم که گراف پترسن با حذف هر راس به یک گراف همیلتونی تبدیل می‌شود. این به این معناست که برای هر راس vدر گراف پترسن، گراف G – v شامل یک دور همیلتونی است.

ما نشان می‌دهیم که با حذف هر راس، زیرگراف باقی‌مانده شامل یک دور همیلتونی است .به دلیل ساختار متقارن گراف پترسن، کافی است این را برای یک راس نشان دهیم، زیرا استدلال را می‌توان به هر راس دیگر تعمیم داد.

فرض کنیم راس $v1$ را حذف کنیم .پس از حذف $v1$ 9 راس و 12 یال باقی می‌ماند. باید یک دور همیلتونی در این گراف پیدا کنیم.

مثال:

فرض کنیم راس $v1$ را حذف کنیم .رئوس باقی‌مانده {2, 3, 4, 5, 1', 2', 3', 4', 5’ } هستند.

تشخیص ساختار باقی‌مانده:

- بدون $v1$ رئوس $v2,v3,v4,v5$ هنوز بخشی از یک 5-cycle بدون یک راس هستند.
- رئوس {1', 2', 3', 4', 5’} نیز یک 5-cycle تشکیل می‌دهند.
- اتصالات بین i و (i + 2)’ به طور جزئی حفظ می‌شوند.

ساخت چرخه همیلتونی:

- از هر راس شروع کنیم، مثلاً $v1$
- مسیر را در دور داخلی دنبال کنیم $v2 \to v3 \to v4 \to v5$
- به راس متناظر در دور بیرونی برویم $v5 \to v3' \to v1' \to v4' \to v2' \to v5' \to v4 \to v3 \to v2$

با ساخت یک مسیر که تمام رئوس را دقیقاً یک بار بازدید می‌کند، می‌توانیم نشان دهیم که یک دور همیلتونی در گراف پترسن با حذف هر راس وجود دارد.

تایید حالت های دیگر:

برای اطمینان از کلیت، این‌ساختار را برای چند راس تکرار کنیم. برای هر راس حذف شده، زیرگراف باقی‌مانده را بازسازی کرده و یک دور همیلتونی شناسایی‌کنیم. تقارن گراف‌پترسن تضمین می‌کند که این ویژگی برای همه رئوس صادق است٠

همچنین در ادامه اثبات این سوال به بیان دیگر آمده است:

To show that the Petersen graph is a Hypohamiltonian graph, we need to demonstrate two key properties:

1. The Petersen graph is not Hamiltonian, i.e., it does not contain a Hamiltonian cycle.
2. For each vertex v in the Petersen graph, the graph obtained by removing vv (denoted $G-v$) is Hamiltonian, i.e., it contains a Hamiltonian cycle.

Step 1: Show that the Petersen graph is not Hamiltonian

The Petersen graph is a well-known graph with 10 vertices and 15 edges. It is typically represented as follows:

Vertices: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Edges: {(0, 1), (0, 4), (0, 5), (1, 2), (1, 6), (2, 3), (2, 7), (3, 4), (3, 8), (4, 9),

(5, 7), (5, 8), (6, 8), (6, 9), (7, 9)}

It is a well-established result in graph theory that the Petersen graph is not Hamiltonian. This can be verified by attempting to construct a Hamiltonian cycle and finding that none exists. Therefore, the Petersen graph does not contain a Hamiltonian cycle.

Step 2: Show that removing any vertex results in a Hamiltonian graph

To demonstrate that removing any vertex from the Petersen graph results in a graph that is Hamiltonian, we need to show that for each vertex v in the Petersen graph, the resulting graph $G-v$ contains a Hamiltonian cycle.

Here is a way to approach this:

1. **Remove vertex 0**: The resulting graph $G-0$ consists of vertices {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. A Hamiltonian cycle in this graph is: 1-6-9-4-3-8-5-7-2-1.
2. **Remove vertex 1**: The resulting graph $G-1$ consists of vertices {0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. A Hamiltonian cycle in this graph is: 0-4-9-6-8-5-7-2-3-0.
3. **Remove vertex 2**: The resulting graph $G-2$ consists of vertices {0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. A Hamiltonian cycle in this graph is: 0-4-9-6-1-7-5-8-3-0.
4. **Remove vertex 3**: The resulting graph $G-3$ consists of vertices {0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. A Hamiltonian cycle in this graph is: 0-4-9-6-1-7-2-8-5-0.
5. **Remove vertex 4**: The resulting graph $G-4$ consists of vertices {0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9}. A Hamiltonian cycle in this graph is: 0-5-8-3-2-7-9-6-1-0.
6. **Remove vertex 5**: The resulting graph $G-5$ consists of vertices {0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9}. A Hamiltonian cycle in this graph is: 0-1-6-9-4-3-8-2-7-0.
7. **Remove vertex 6**: The resulting graph $G-6$ consists of vertices {0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9}. A Hamiltonian cycle in this graph is: 0-4-3-8-2-7-9-5-1-0.

8. **Remove vertex 7**: The resulting graph $G-7$ consists of vertices {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9}. A Hamiltonian cycle in this graph is: 0-4-9-6-1-5-8-3-2-0.
9. **Remove vertex 8**: The resulting graph $G-8$ consists of vertices {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9}. A Hamiltonian cycle in this graph is: 0-4-9-6-1-7-2-3-5-0.
10. **Remove vertex 9**: The resulting graph $G-9$ consists of vertices {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. A Hamiltonian cycle in this graph is: 0-4-3-8-5-7-2-1-6-0.

In each case, we can find a Hamiltonian cycle in $G-v$, showing that the Petersen graph satisfies the conditions of being Hypohamiltonian.

Conclusion

The Petersen graph is not Hamiltonian itself, and the removal of any vertex results in a graph that is Hamiltonian. Thus, the Petersen graph is a Hypohamiltonian graph.

سوال دوم

اثبات.

در K5,5 تعداد ۲۵ یال وجود دارد، بنابراین یکی از رنگ‌ها حداقل ۱۳ یال را خواهد داشت. اجازه دهید S زیرگراف K5,5 باشد که توسط این یال‌ها ایجاد شده است. از آنجا که S دو بخشی است، بنابراین دقیقاً زمانی که دو رأس دو همسایه مشترک داشته باشند، یک K2,2 (تک‌رنگ) را شامل خواهد شد. ما سه حالت را بررسی می‌کنیم.

حالت ۱.

فرض کنید یک رأس v در S درجه ۵ داشته باشد. از آنجا که درجه متوسط چهار رأس باقی‌مانده در مجموعه دو بخشی شامل v، دو است (زیرا درجه کل ۱۳ است)، بنابراین حداقل یکی از این رأس‌های باقی‌مانده درجه حداقل دو دارد؛ آن را w نام‌گذاری می‌کنیم. از آنجا که مجموعه دو بخشی دیگر پنج رأس دارد، بنابراین v و w باید دو همسایه مشترک داشته باشند. یعنی S (و به تبع آن K5,5) شامل یک K2,2 است.

حالت ۲.

فرض کنید رأس v در S درجه ۴ داشته باشد. از آنجا که حداقل نه یال باقی‌مانده است، بنابراین برخی از رأس‌ها در S درجه ۳ دارند؛ آن را w نام‌گذاری می‌کنیم. سپس v و w باید دو همسایه مشترک داشته باشند. یعنی S (و به تبع آن K5,5) شامل یک K2,2 است.

حالت ۳.

فرض کنید حداقل سه رأس در یکی از مجموعه‌های دو بخشی درجه حداقل ۳ در S داشته باشند؛ آن‌ها را u، v و w نام‌گذاری می‌کنیم. حداقل دو تا از u، v، w باید دو همسایه مشترک داشته باشند. یعنی S (و به تبع آن K5,5) شامل یک K2,2 است.

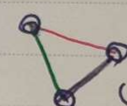
اگر هیچ یک از حالت‌ها برقرار نباشد و هیچ راسی درجه ۴ یا ۵ نداشته باشد و حداکثر دو رأس درجه ۳ داشته باشند، سپس ما می‌توانیم (حداکثر) دو رأس با درجه ۳ و سه رأس با درجه ۲ داشته باشیم که در مجموع (حداکثر) ۱۲ یال دارند. اما S دارای ۱۳ یال است، بنابراین این حالت‌ها تمام حالات ممکن را پوشش می‌دهند و ادعا بیان شده صحیح است.

Mathematic Induction

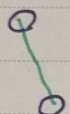
ریاضی

برای اثبات این سوال از استدلال استقرای استفاده می کنیم.

Base Case: $k=1 \rightarrow 2k+1=3 \rightarrow K_3 \rightarrow$



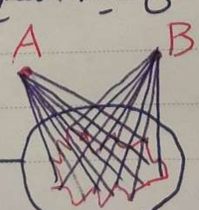
گراف کامل با ۳ رأس که یال های آن با ۳ رنگ، رنگ آمیزی شده اند.



زیر درخت تک رنگ با $k+1=2$ رأس ←

پس پایه استقرا درست است.

Inductive Step: فرض می کنیم به ازای $2k-1=2(k-1)+1$ رأس، که با ۳ رنگ، رنگ کردیم زیردرختی تک رنگ با $k-1$ راس وجود دارد. حال برای گام استقرا به ازای $2k+1$ رأس اثبات می کنیم بدون آنکه خللی به کلیت مسئله وارد شود فرض می کنیم در گراف $2k-1$ راسی ها زیردرخت $k-1$ رأسی از یک رنگ باشد، حال طبق شکل با اضافه شدن دو رأس A و B، اگر حداقل یکی از این دو به $k-1$ رأس دیگر یالی به رنگ یک داشته باشند حکم ما ثابت می شود، پس فرض می کنیم تمامی یال های رأس های A و B به $k-1$ رأس دیگر از رنگ های ۲ و ۳ هستند. طبق اصل لانه کبوتری می دانیم حداقل $k-1$ یال از بین $2k-2$ یال به رنگ ۲ یا ۳ هستند. پس این $k-1$ راس پایین با حداقل یکی از رأس های A یا B تشکیل درخت تک رنگ با رنگ ۲ یا ۳ می دهد.
پس حکم استقرا ما درست است.



$k-1$ رأس که تشکیل درخت تک رنگ با رنگ 1 داده اند. ←

k رأس

سوال چهارم

ابتدا تعریف گراف همیلتونی را بیان میکنیم.

Definition 8.1

- A spanning subgraph that is a cycle or a path is called a Hamilton cycle or a Hamilton path.
- A graph is Hamiltonian if it has a Hamilton cycle.

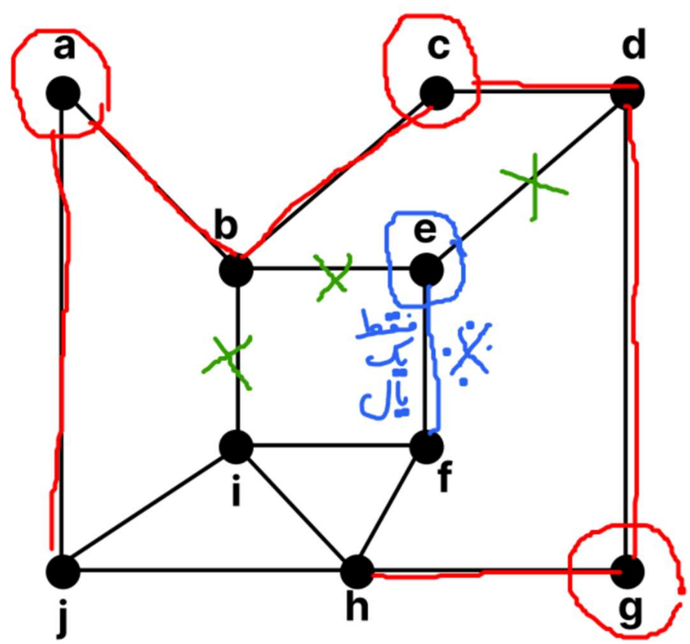
الف) همیلتونی نیست.

گراف صورت سوال همیلتونی نیست چرا که نمی‌توانیم برای آن دور همیلتونی پیدا کنیم. دلیل آن به شرح زیر است:

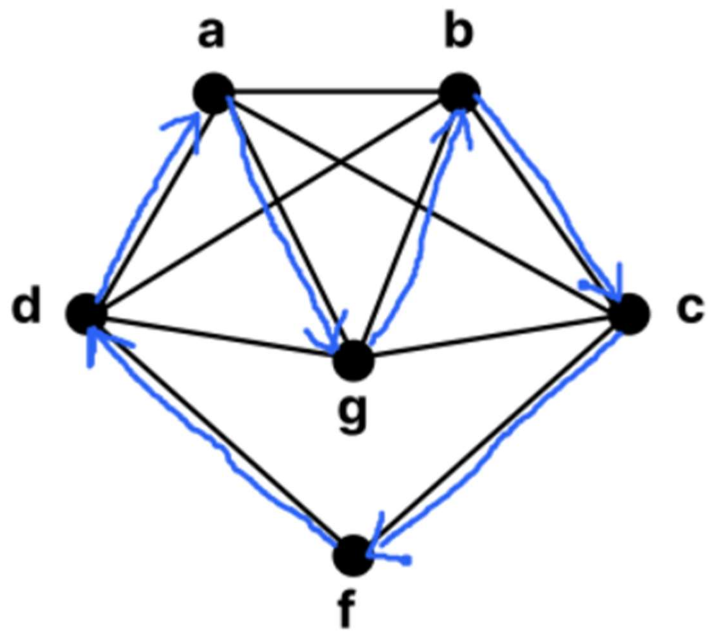
- برای اینکه دور همیلتونی داشته باشیم باید درجه تمام رئوس بزرگتر از ۱ باشد. (شرط وجود یک راس داخل دور است چرا که باید یک بار وارد راس و یکبار از آن خارج شویم.)
- رئوسی که درجه آنها ۲ میباشد هر دو یال آنها باید داخل دور باشند.

درجه رئوس a و g و c درجه ۲است لذا باید یال های aj و ab و hg و gd و cb و cd داخل دور همیلتونی باشند.
راس d هم توسط دو یال cd و gd داخل دور همیلتونی می‌آید پس یال ed داخل دور نیست. (چرا که اگر این یال داخل دور بیاید راس d بیشتر از یکبار دیده میشود)

همچنین یال‌های bc و ab هم داخل دور همیلتونی هستند در نتیجه راس b هم توسط این دو یال داخل دور می‌آید و یال های be و bi حذف میشوند و نمی توانند داخل دور همیلتونی باشند. تا اینجا دو یال be و ed از یال های راس e حذف شده‌اند و نمی‌توانند داخل دور همیلتونی بیایند. فقط یک یال ef باقی می‌ماند که چون فقط یک یال داریم در نتیجه راس e داخل دور نمیتواند بیاید پس دوری که تمام راس ها را پوشش بدهد نداریم، در حقیقت دور گراف همیلتونی ندارد. در نتیجه گراف همیلتونی نیست.

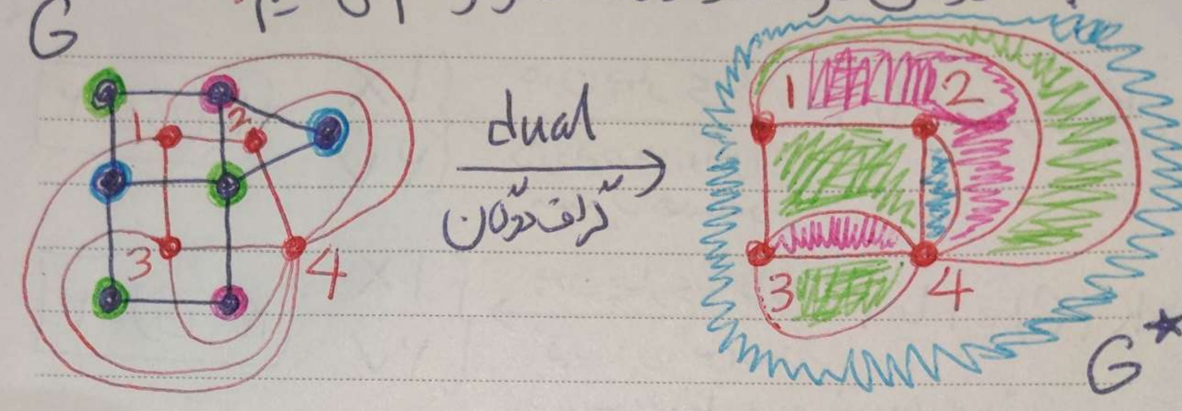


ب) همیلتونی است.
این گراف دارای یک دور همیلتونی می‌باشد پس این گراف همیلتونی است.
دور $d \to a \to g \to b \to c \to f \to d$ یک دور همیلتونی است که تمام راس ها را پوشش می‌دهد.



سوال پنجم

ابتدا دوگان گراف داده شده را رسم می کنیم.

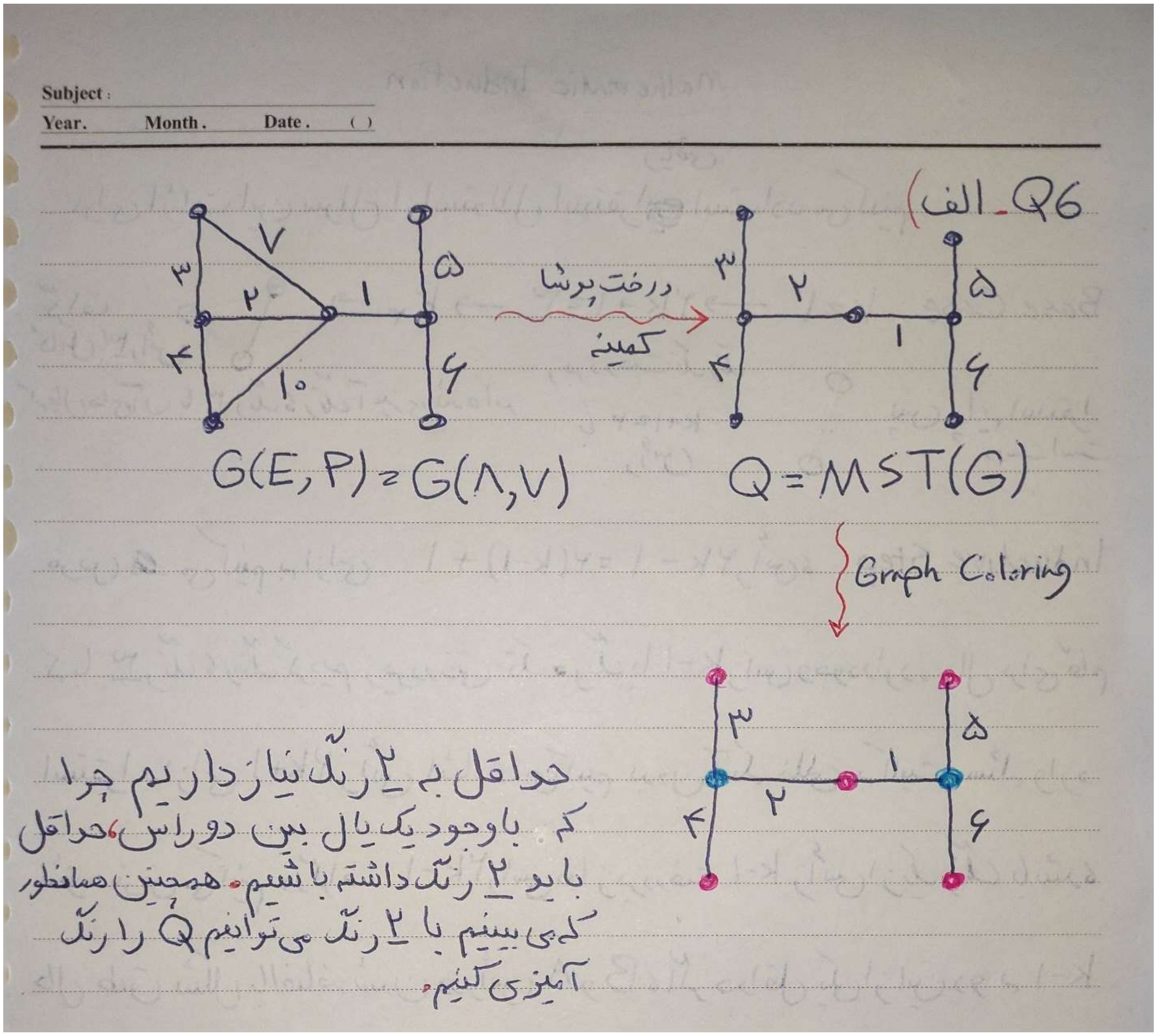


همان طور که در بالا رنگ آمیزی کرده ایم حداقل به سه رنگ برای Map Coloring روی نواحی آن نیاز داریم. (چون حداقل ۳ ناحیه داریم که دو به دو مجاور هستند پس حداقل به ۳ رنگ نیاز داریم.)

* به بیان دیگر: رنگ آمیزی ناحیه‌های یک گراف مشابه این است که راس های دوگان آن گراف را رنگ آمیزی کنیم. دوگانِ دوگان یک گراف متصل صفحه ای خود آن گراف است ($(G^*)^* = G$)، پس در واقع باید راس های گراف اصلی را رنگ آمیزی کنیم. برای رنگ آمیزی سه راس بخش مثلثی (دور به طول فرد) به سه رنگ نیاز داریم. بقیه گراف را هم با همین ۳ رنگ می توان رنگ آمیزی کرد. پس راس های گراف اصلی را می توان با ۳ رنگ رنگ آمیزی کرد. لذا به دنبال آن ناحیه‌های دوگان گراف اصلی هم با ۳ رنگ قابل رنگ آمیزی می باشد.

سوال ششم

الف)



ب)

بله همواره برای Graph Coloring درخت MST به ۲ رنگ نیاز داریم.

اثبات مختصر. MST یک درخت است. همان طور که میدانیم در درخت دور(cycle)، back edge و یا forward edge وجود ندارد. پس همسایه های هر راس فقط پدر و فرزندان آن راس می‌باشند. میتوان به پدر و فرزندان هر راس رنگ یکسانی(مثلا قرمز) داد (چون با یکدیگر همسایه نیستند چراکه back edge یا forward edge نداریم) و رنگ دوم (مثلا آبی) را به خود راس نسبت می دهیم. این‌کار را برای کل درخت میتوانیم تعمیم دهیم پس در نتیجه یک درخت را میتوانیم با دو رنگ، رنگ‌آمیزی کرد.

همچنین می توانیم با اثبات استقرای ریاضی هم مسئله را دقیق تر ثابت کنیم.

اثبات با استقرای ریاضی:

برای اثبات اینکه هر درخت(MST نیز یک درخت است) با دو رنگ قابل رنگ‌آمیزی است، باید نشان دهیم که امکان دارد رئوس هر درخت را با استفاده از تنها دو رنگ به گونه‌ای رنگ‌آمیزی کنیم که هیچ دو رئوس مجاور رنگ یکسانی نداشته باشند. این خاصیت به عنوان دو بخشی بودن شناخته می‌شود. بیایید گام به گام این اثبات را با استفاده از روش استقرایی بررسی کنیم.

پایه استقرا

در نظر بگیرید یک درخت تنها یک رأس دارد. یک رأس می‌تواند با یکی از دو رنگ رنگ‌آمیزی شود. چون هیچ یالی وجود ندارد، رئوسی برای بررسی وجود ندارد که رنگ متفاوت داشته باشند. بنابراین، یک درخت تک رأس به صورت بدیهی با دو رنگ قابل رنگ‌آمیزی است.

گام استقرا

فرض کنید که هر درخت با n رأس قابل رنگ‌آمیزی با دو رنگ است. اکنون، درختی با n+1 رأس در نظر بگیرید. باید نشان دهیم که این درخت نیز با دو رنگ قابل رنگ‌آمیزی است.

۱. **حذف یک برگ:**

- در هر درختی با n+1 رأس، حداقل یک برگ وجود دارد (یک رأسی که درجه آن ۱ است). این برگ را با v و تنها همسایه‌اش را با u نشان می‌دهیم.
- برگ v را از درخت حذف کنید. گراف باقی‌مانده هنوز یک درخت است (زیرا حذف یک برگ درخت را قطع نمی‌کند) و دارای n رأس است.

۲. **رنگ‌آمیزی درخت باقی‌مانده:**

- بر اساس فرض استقرا، می‌توانیم درخت باقی‌مانده با n رأس را با دو رنگ به گونه‌ای رنگ‌آمیزی کنیم که هیچ دو رئوس مجاور رنگ یکسان نداشته باشند.

۳. **اضافه کردن برگ:**

- برگ v را دوباره به درخت اضافه کنید. چون v یک برگ است، تنها یک همسایه به نام u دارد. رأس u قبلاً رنگ‌آمیزی شده است (با یکی از رنگ‌های ۱ یا ۲).
- برگ v را با رنگی متفاوت از رنگ u رنگ‌آمیزی کنید. این اطمینان می‌دهد که v و u رنگ‌های متفاوتی دارند.

از آنجا که اضافه کردن برگ v و رنگ‌آمیزی آن با رنگی متفاوت از رنگ همسایه‌اش u خاصیت نداشتن رنگ یکسان در رئوس مجاور را حفظ می‌کند، درخت با n+1 رأس نیز با دو رنگ قابل رنگ‌آمیزی است.

نتیجه‌گیری

با استفاده از استقرا، هر درخت با n رأس قابل رنگ‌آمیزی با دو رنگ است. پس MST که خود نیز یک درخت است قابل رنگ آمیزی با دو راس است.

بنابراین، نشان دادیم که هر درخت با دو رنگ قابل رنگ‌آمیزی است، یعنی امکان دارد رئوس هر درخت را با استفاده از تنها دو رنگ به گونه‌ای رنگ‌آمیزی کنیم که هیچ دو رئوس مجاور رنگ یکسانی نداشته باشند.

شهود بیشتر:

برای شهود بیشتر این موضوع، یک درخت T با n+1 راس را در نظر بگیرید. درخت یک گراف متصل(connected) و بدون دور است. برای هر درخت، اگر از هر راسی شروع کنیم و یک جستجوی عرضی (BFS) یا عمقی (DFS) انجام دهیم، می‌توانیم راس شروع را با رنگ ۱ رنگ‌آمیزی کنیم. سپس تمامی راس‌های با فاصله فرد از راس شروع را با رنگ ۲ و تمامی راس‌های با فاصله زوج را با رنگ ۱ رنگ‌آمیزی کنیم.

از آنجا که درخت‌ها دور ندارند، این اطمینان می‌دهد که هیچ دو راس مجاوری با یک رنگ، رنگ‌آمیزی نشده‌اند و رنگ‌آمیزی دو بخشی صحیح باقی می‌ماند.

مراجع:

https://chat.openai.com/
https://bard.google.com/
https://claude.ai/chats
https://faculty.etsu.edu/gardnerr/5347/Beamer-Pearls/Proofs-Pearls-4-3-print.pdf
https://en.wikipedia.org/wiki/Hypohamiltonian_graph

پایان