به نام خدا

تمرین سری پنجم
درس نظریه و الگوریتم های گراف
دکتر فرزانه غیور باغبانی

فرزان رحمانی
۹۹۵۲۱۲۷۱

سوال اول

Subject :

Year. Month . Date . ( )

1

$$A-\lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda I_3)$$

را به دست می‌آوریم.

$$\det(A-\lambda I_3) = (1-\lambda)^2(-\lambda) - (1-\lambda) = 0 (1-\lambda)$$

$$\begin{cases} 1-\lambda = 0 \longrightarrow \boxed{\lambda = 1} \\ \lambda(1-\lambda)+2=0 \longrightarrow \boxed{\lambda=-1 , \lambda=2} \end{cases} \longrightarrow \lambda = -1, +1, +2$$

$$\downarrow$$

$$\max(\lambda) = \lambda^* = +2$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longrightarrow Ax = \overbrace{2x}^{\lambda^* x} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_1 \\ x_1 + x_3 = 2x_2 \\ x_2 + x_3 = 2x_3 \end{cases}$$

$$\|x\| = \sqrt{3} \longleftarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longleftarrow x_1 = x_2 = x_3$$

حال یک عدد غیرصفر مثلاً 1 را

12

به دست می‌آوریم و سپس آن را بر اندازهٔ آن تقسیم می‌کنیم.

برای هر نیم مقدار

برای اینکه نرمال شود.

نرمال

$$x^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0.577 \\ 0.577 \\ 0.577 \end{bmatrix}$$

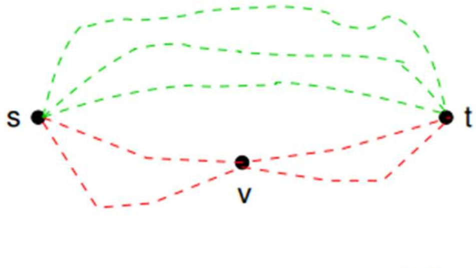
بردار ویژه مربوط به بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A

ASEMAN

سوال دوم

از تعاریف زیر استفاده میکنیم.

Notation: Any shortest path between nodes s and t will be called an s-t **shortest path**.



- Let σ_{st} denote the number of all s-t shortest paths. $\sigma_{st} = 5$
- Let $\sigma_{st}(v)$ denote the number of all s-t shortest paths that pass through node v. $\sigma_{st}(v) = 2$

Definition: The **betweenness centrality** of a node v, denoted by $\beta(v)$, is defined by

$$\beta(v) \;=\; \sum_{\substack{s\,,\,t \\ s\neq v\,,\,t\neq v}} \left[\frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}}\right]$$

Definition: The **farness centrality** f_i of node v_i is given by

$$\begin{aligned} f_i &= \text{Sum of the distances between } v_i \text{ and the other nodes} \\ &= \sum_{v_j \in V - \{v_i\}} d_{ij} \end{aligned}$$

Definition: The **closeness centrality** (or **nearness centrality**) η_i of node v_i is given by $\eta_i \;=\; 1/f_i$.

ابتدا $\beta(E)$ را محاسبه می کنیم. برای محاسبه آن σ_{st} و $\sigma_{st}(E)$ را محاسبه می کنیم.

$AB \to \frac{1}{3} \to 0$	$BC \to 0$	$CF \to 0$	$FG \to 0$
$AC \to \frac{1}{2} \to 0$	$BD \to 0$	$CG \to 0$	$FH \to 0$
$AD \to 0$	$BF \to 0$	$CH \to 0$	$GH \to 0$
$AF \to 0$	$BG \to 0$	$DF \to 0$	
$AG \to 0$	$BH \to 0$	$DG \to 0$	$\boxed{\beta(E) = 0}$
$AH \to 0$	$CD \to \frac{1}{3} \to 0$	$DH \to 0$	

حال $\beta(F)$ را محاسبه می کنیم.

$AB \to \frac{1}{3} \to 1$	$BC \to 0$	$CE \to 0$	$EG \to 0$
$AC \to \frac{1}{2} \to 0$	$BD \to 0$	$CG \to 1$	$EH \to 0$
$AD \to 0$	$BE \to 0$	$CH \to 1$	$GH \to \frac{1}{2} \to 0$
$AE \to 0$	$BG \to \frac{1}{2} \to 0$	$DE \to 0$	
$AG \to 0$	$BH \to \frac{1}{2} \to 0$	$DG \to 0$	$\boxed{\beta(F) = 2}$
$AH \to 0$	$CD \to \frac{1}{3} \to 0$	$DH \to 0$	

$$f_A = 2+2+1+1+1+1+2 \longrightarrow \boxed{\eta_A = \frac{1}{10}}$$

$$\longrightarrow f_A = 10$$

$$f_C = 2+1+2+1+1+2+2 = 11 \longrightarrow \boxed{\eta_C = \frac{1}{11}}$$

$$f_C = 11$$

سوال سوم

Subject :

Year. Month. Date. ( )

۳) الف)

ماتریس مجاورت:

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\
\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 3 & \infty & \infty \\
1 & 0 & \infty & 1 & \infty \\
3 & \infty & 0 & 1 & \infty \\
\infty & 1 & 1 & 0 & 2 \\
\infty & \infty & \infty & 2 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

ب)

$$
d^0 = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 3 & \infty & \infty \\
1 & 0 & 4 & 1 & \infty \\
3 & 4 & 1 & 0 & \infty \\
\infty & 1 & 1 & 0 & 2 \\
\infty & \infty & \infty & 2 & 0
\end{bmatrix}
\rightarrow d^1 = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 3 & 2 & \infty \\
1 & 0 & 4 & 1 & \infty \\
3 & 4 & 0 & 1 & \infty \\
2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\
\infty & \infty & \infty & 2 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\rightarrow d^2 = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 3 & 2 & \infty \\
1 & 0 & 4 & 1 & \infty \\
3 & 4 & 0 & 1 & \infty \\
2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\
\infty & \infty & \infty & 2 & 0
\end{bmatrix}
\rightarrow d^3 = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 3 & 2 & 4 \\
1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\
3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\
2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\
4 & 3 & 3 & 2 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\rightarrow d^4 = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 3 & 2 & 4 \\
1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\
3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\
2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\
4 & 3 & 3 & 2 & 0
\end{bmatrix}
\Rightarrow \boxed{d^5 = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 3 & 2 & 4 \\
1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\
3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\
2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\
4 & 3 & 3 & 2 & 0
\end{bmatrix}}
$$

ماتریس نهایی الگوریتم

پ) $f_A = 1+3+2+4 = 10$ $\quad f_B = 1+2+1+3 = 7$

$f_C = 3+2+1+3 = 9$ $\quad f_D = 2+1+1+2 = 6$ $\quad f_E = 4+3+3+2 = 12$

ت) $\eta_A = \frac{1}{f_A} = \frac{1}{10}$ $\quad \eta_B = \frac{1}{f_B} = \frac{1}{7}$ $\quad \eta_C = \frac{1}{f_C} = \frac{1}{9}$

$\eta_E = \frac{1}{f_E} = \frac{1}{12}$ $\quad \eta_D = \frac{1}{f_D} = \frac{1}{6}$

ث) رأس D بالاترین closeness مرکزی را دارد، چرا که از نظر عدد بزرگترین η را دارد و کمترین f را دارد.

$\max\{\frac{1}{10}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}\} = \frac{1}{6}$

$\arg\max\{\eta_A, \eta_B, \eta_C, \eta_D, \eta_E\} = D \rightarrow \max \eta, \min f$

$f_E > f_A > f_C > f_B > f_D \rightarrow \eta_E < \eta_A < \eta_C < \eta_B < \eta_D$

ج) رأس های E و A کمترین closeness مرکزی را دارند. یک راهکار می تواند ایجاد یال AE با وزن $\frac{1}{}$ باشد. درحالت کلی افزودن یال های جدید با وزن کمتر از کوتاه ترین مسیرهای موجود مثلاً ایجاد یال BC با وزن کمتر از 3 یا یال BE با وزن کمتر از 3 می تواند مرکزیت رأس ها را بهبود ببخشد. به عنوان نمونه ایجاد یال BC یا AD با وزن $\frac{1}{}$ به بهبود مرکزیت کمک می کند.

سوال چهارم

از فرمول های زیر استفاده میکنیم.

1 Expected degree of any node $= p(n-1)$.

2 Expected number of edges $= n(n-1)p/2$.

3 Let $\pi_k(v)$ denote the probability that node v has degree $= k$ $(0 \le k \le n-1)$. Then,

$$\pi_k(v) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}.$$

Subject :

Year. Month. Date. ( )

۴) $G(n=۱۰۰, p=۰,۰۵)$

الف) $\frac{n(n-1)}{۲} \times p = \frac{۱۰۰ \times ۹۹}{۲} \times ۰,۰۵ = \frac{۵ \times ۹۹}{۲} = ۲۴۷,۵$

ب) $p(n-1) = ۰,۰۵ \times (۱۰۰-۱) = ۰,۰۵ \times ۹۹ = ۴,۹۵$

ج) $\pi_k(v) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} = \binom{۱۰۰-۱}{۵}(۰,۰۵)^۵(۱-۰,۰۵)^{۱۰۰-۱-۵}$

$\rightarrow \pi_۵(v) = \binom{۹۹}{۵}(۰,۰۵)^۵(۰,۹۵)^{۹۴}$

سوال پنجم

از فرمول های زیر استفاده میکنیم.

1. Expected degree of any node $= p(n-1)$.

2. Expected number of edges $= n(n-1)p/2$.

3. Let $\pi_k(v)$ denote the probability that node v has degree $= k$ $(0 \leq k \leq n-1)$. Then,

$$\pi_k(v) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}.$$

۵ $G(n=۱۰۰ , p=۰٫۰۲)$

1. $p(n-1) = ۰٫۰۲ \times (۱۰۰-۱) = ۰٫۰۲ \times ۹۹ = ۱٫۹۸$

2. $\frac{n(n-1)}{۲} \times p = \frac{۱۰۰ \times ۹۹}{۲} \times ۰٫۰۲ = ۹۹$

3. $\pi_k(v) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k-1} = \binom{۱۰۰-۱}{۲} (۰٫۰۲)^۲ (۰٫۹۸)^{۱۰۰-۲-۱}$

$\pi_۲(v) = \binom{۹۹}{۲} (۰٫۰۲)^۲ (۰٫۹۸)^{۹۷} = \frac{۹۹ \times ۹۸}{۲} \times ۴ \times ۱۰^{-۴} \times (۰٫۹۸)^{۹۷}$

پایان