به نام خدا

تمرین سری سوم
درس نظریه و الگوریتم های گراف
دکتر فرزانه غیور باغبانی

فرزان رحمانی
۹۹۵۲۱۲۷۱

سوال اول

ابتدا تعاریف را بیان میکنیم.

Definition 5.1

- A separating set or a vertex cut of a graph G is a set $S \subseteq V(G)$ such that $G - S$ has more than one component.
- Vertex connectivity or connectivity $\kappa(G)$ of a graph G is defined as follows:
  - $\kappa(G) = 0$ if G is disconnected;
  - $\kappa(G) = |G| - 1$ if G is connected, but has no pair of distinct non-adjacent vertices.
  - $\kappa(G) = j$ if G is connected, but has a pair of non-adjacent vertices, and j is the smallest integer such that G has a j-element vertex cut.
- If k is a positive integer, then G is k-connected or k-vertex-connected if $k \leq \kappa(G)$.

Definition 5.4

- A disconnecting set of edges of a graph G with $|G| > 1$ is a set $F \subseteq E(G)$ such that $G \setminus F$ has more than one component.
- A graph is k-edge-connected if every disconnecting set has at least k edges.
- The edge connectivity of G, written $\kappa'(G)$ is the maximum k such that G is k-edge-connected.
- Given $S, T \subseteq V(G)$, we write $[S, T]$ for the set of edges with one endpoint in S and the other in T.
- An edge cut is a set of edges of the form $[S, \overline{S}]$ where S is a non-empty proper subset of $V(G)$.
- A bond is a minimal non-empty edge cut.

Theorem 5.7 (Whitney 1932)

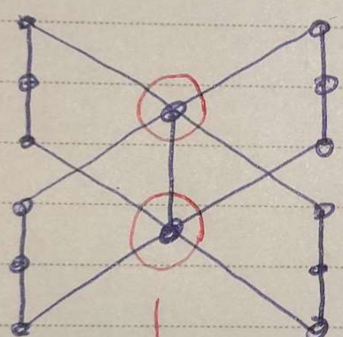
If G is graph with $|G| > 1$, then $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$.

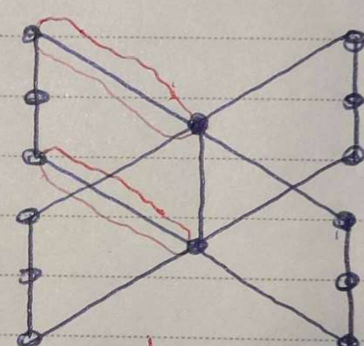
خیر راس برشی ندارد چون با حذف یک راس گراف نا همبند نمی شود.(چنین راس وجود ندارد چرا که گراف شامل ۴ دور C_5 است که با هم در دو راس مشترک هستند پس حداقل به دو راس نیاز است) -- خیر یال برشی ندارد چون با حذف یک یال گراف نا همبند نمی شود.(چنین یالی وحود ندارد چرا که گراف شامل ۴ دور C_5 است که با هم در دو راس مشترک هستند پس حداقل به دو یال نیاز است) -- حداقل تعداد یال که باید از این گراف حذف کرد تا ناهمبند شود ۲ تاست. -- حداقل تعداد راس که باید از این گراف حذف کرد تا ناهمبند شود ۲ تاست.

$\delta(G) = 2 \rightarrow \kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq ۲$

$\kappa(G) = 1$ یا ۲ $\xrightarrow[\text{دارد که در دو راس مشترک هستند}]{\text{چون چهار } C_5}$ $\begin{cases} 1 \times \\ ۲ \checkmark \end{cases}$ $\boxed{\kappa(G) = ۲}$

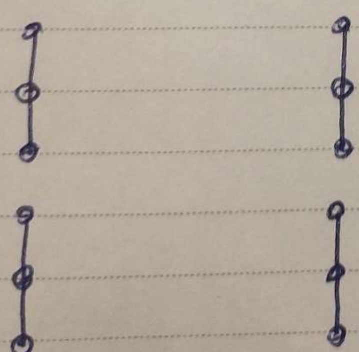
$\kappa'(G) = 1$ یا ۲ $\xrightarrow[\text{که در دو راس اشتراک دارند پس حداقل به دو راس نیاز است.}]{\text{چون چهار } C_5 \text{ دارد}}$ $\begin{cases} 1 \times \\ ۲ \checkmark \end{cases}$ $\boxed{\kappa'(G) = ۲}$

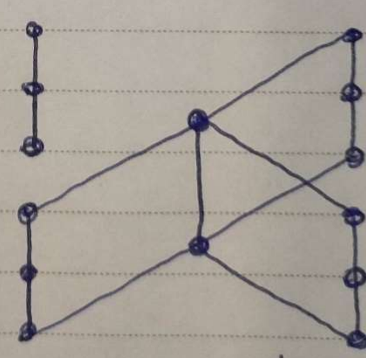




minimal vertex cut | $\kappa(G) = 2$

minimal edge cut | $\kappa'(G) = 2$





ناهمبند

ناهمبند

سوال دوم

با توجه به قضیه 4-Color Theorem که در اسلاید های درس موجود است حداقل تعداد رنگ ۴ رنگ است.

Theorem 7.4 (4-Color Theorem, Appel and Haken 1977)

Every loopless planar graph has a proper 4-coloring.

توضیح:

حداقل تعداد رنگ مورد نیاز برای رنگ آمیزی یک نقشه جغرافیایی به گونه ای که هیچ دو کشور همسایه رنگ یکسانی نداشته باشند، چهار رنگ است. این نتیجه به قضیه چهار رنگ(4-Color Theorem) معروف است.

قضیه چهار رنگ(4-Color Theorem) بیان می کند که با توجه به تفکیک یک صفحه به مناطق (مانند کشورهای روی نقشه)، بیش از چهار رنگ برای اختصاص دادن یک رنگ به هر منطقه لازم نیست به طوری که هیچ دو منطقه مجاور هم رنگ نباشند.

در واقع:

- ساختن نقشه هایی که حداقل به چهار رنگ نیاز دارند آسان است. به عنوان مثال، نقشه ای با چهار کشور که یک نقطه مرزی مشترک دارند به چهار رنگ مختلف نیاز دارد.
- بخش چالش برانگیز اثبات این موضوع است که بدون توجه به پیچیدگی نقشه، هرگز به بیش از چهار رنگ نیاز نیست.
- قضیه چهار رنگ برای اولین بار در سال ۱۸۵۲ حدس زده شد، اما به دلیل پیچیدگی آن بیش از یک قرن اثبات نشده باقی ماند.
- در سال ۱۹۷۶، کنت آپل(Kenneth Appel) و ولفگانگ هاکن(Wolfgang Haken) اولین اثبات قضیه چهار رنگ را با استفاده از روشی به کمک کامپیوتر منتشر کردند. اثبات آنها شامل کاهش مسئله به تعداد زیاد اما محدود موارد و سپس بررسی هر مورد با استفاده از یک برنامه کامپیوتری بود.
- در حالی که اثبات صحیح است، به دلیل اتکای زیاد به محاسبات رایانه ای و ناتوانی در تأیید اثبات با دست، توسط برخی از ریاضیدانان کاملاً رضایت بخش تلقی نمی شود.
- با این وجود، قضیه چهار رنگ به طور مستقل توسط سایر برنامه های کامپیوتری تأیید شده است، و اکنون به عنوان یک نتیجه اثبات شده در نظریه گراف پذیرفته شده است.

بنابراین، به طور خلاصه، چهار رنگ برای رنگ آمیزی هر نقشه جغرافیایی به طوری که هیچ دو کشور همسایه رنگ یکسانی نداشته باشند کافی است.

مراجع:

https://claude.ai/chats

سوال سوم

ابتدا تعریف گراف سطحی و قضیه سطحی بودن و نبودن را بیان میکنیم:

Definition 6.3

- A drawing of a graph G is a function that maps each vertex $v \in V(G)$ to a point $f(v)$ in the plane, and each uv-edge to a simple polygonal $f(u)f(v)$-curve in the plane.
- A point $f(e) \cap f(e')$ other than the a common endpoint is a crossing.
- A graph is planar if it has a drawing without crossings. Such a drawing is a planar embedding of G.
- A plane graph is a particular drawing of a a graph in the plane with no crossings.

Theorem 6.17 (Kuratowski 1930)

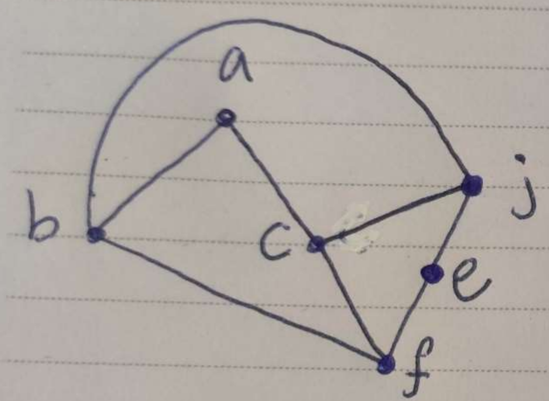
A graph is planar if and only if it has neither K_5 nor $K_{3,3}$ as a topological minor.

Theorem 6.18 (Wagner)

A graph is planar if and only if it has neither K_5 nor $K_{3,3}$ as a minor.

گراف اول مسطح هست چراکه دارای رسم مسطح است و رسم

آن به شکل زیر است.



has a drawing without crossings

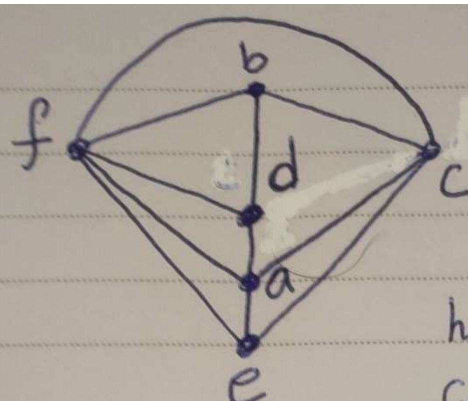
$\Downarrow$

is planer graph

گراف دوم هم مسطح است

چرا که به شکل رو به رو قابل رسم

است. has a drawing without crossings.

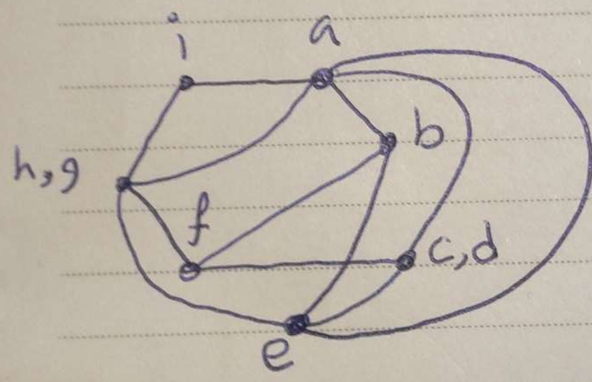


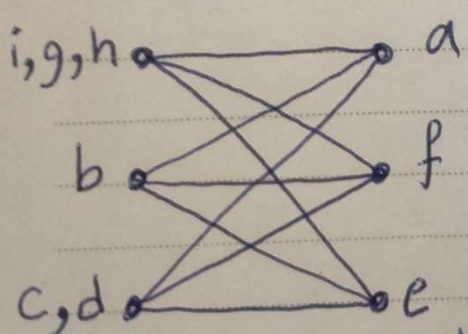
گراف سوم planar نیست چرا که $K_{3,3}$ را به عنوان

minor دارد. روش به دست آوردن آن را بیان می کنیم.

ابتدا یال cd و hg را

contract می کنیم.





حال یال ih را contract می کنیم.

همچنین یال ae را از گراف

حذف می کنیم.

همان طور که مشاهده می کنیم این

گراف $K_{3,3}$ است که چون minor

گراف سوال است پس گراف سوم planar است.

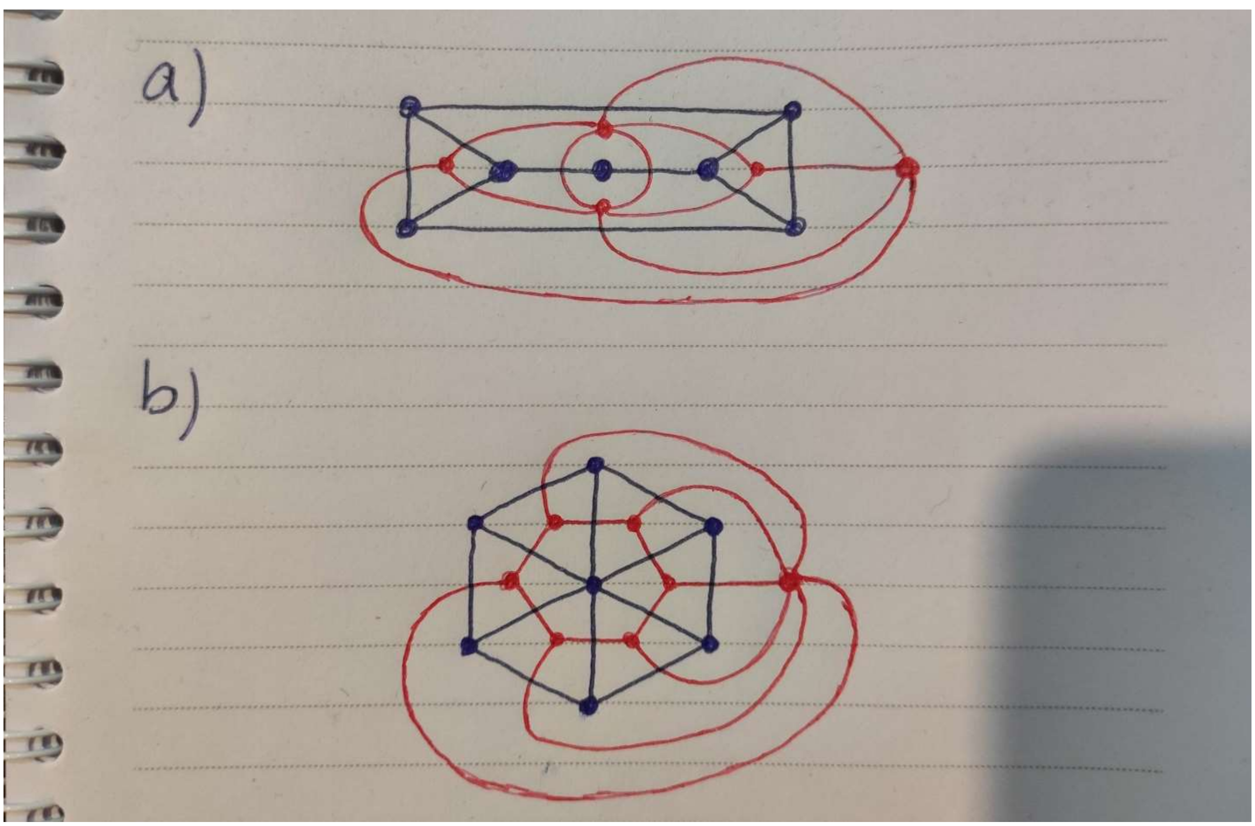
سوال چهارم
با توجه به تعریف زیر به حل سوال می پردازیم:

Theorem 6.5 (Jordan Curve Theorem)

If C is a simple closed polygonal curve in the plane, then the complement of C in the plane consists of two connected components each with C as the boundary.

Definition 6.6

- The connected components of the complement of a plane graph are the faces of the embedding.
- The length of a face is the number of edges in the boundary of the face, with cut-edges counted twice.
- The dual graph G^* of a non-empty plane graph G is the graph such that
  - the vertices of G^* are the faces of G;
  - the edges of G^* are the edges of G;
  - a vertex and an edge of G^* are incident if and only if the edge is the boundary of the corresponding face of G.



پایان