سیگنال‌ها و سیستم‌ها

فصل پنجم

تبدیل فوریه زمان گسسته

تبدیل فوریه

سری فوریه ابزاری قدرتمند برای تجزیه و تحلیل سیگنال‌های متناوب است ولی در مورد سیگنال‌های نامتناوب کاربردی ندارد و لذا بحث تبدیل فوریه پیش می‌آید.

ایده اصلی برای تعریف تبدیل فوریه گسسته به‌منظور تحلیل فرکانسی سیگنال ها و سیستم‌های زمان گسسته از آنجا گرفته شده است که یک سیگنال نامتناوب را می‌توان به صورت سیگنال متناوب با دوره تناوب بینهایت در نظر گرفت و از تعاریف و مفاهیم سری فوریه گسسته کمک گرفت تا به تبدیل فوریه گسسته دست یابیم.

تبدیل فوریه زمان گسسته

روابط تبدیل فوریه و عکس تبدیل فوریه

روشی برای بیان سیگنال $x[n]$ از حوزه زمان به حوزه فرکانس

تبدیل فوریه زمان گسسته : $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \Rightarrow$

روشی برای بیان سیگنال از حوزه فرکانس به حوزه زمان

تبدیل فوریه زمان گسسته معکوس : $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \Rightarrow$

$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ و $x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\}$

نکته: تبدیل فوریه زمان گسسته را طیف سیگنال زمان‌گسسته می نامند و همانند سیگنال زمان پیوسته یک تابع پیوسته از فرکانس (ω) است.

تبدیل فوریه زمان گسسته

موارد تفاوت با تبدیل فوریه زمان پیوسته

✓ تبدیل فوریه زمان گسسته متناوب با دوره تناوب 2π است.

$$X(e^{j(\omega+2k\pi)}) = X(e^{j\omega})$$

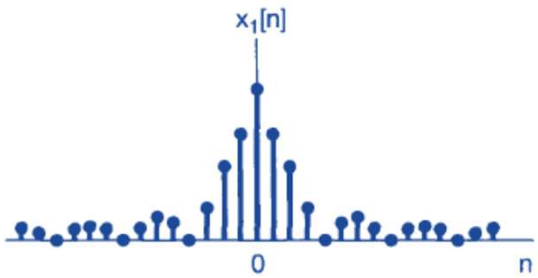
✓ بازه انتگرال‌گیری در تبدیل فوریه زمان گسسته معکوس، محدود است. (روی بازه‌ای به‌طول 2π انتگرال‌گیری انجام می‌شود).

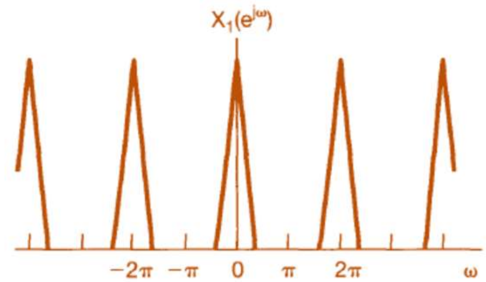
$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

تبدیل فوریه زمان گسسته

موارد تفاوت با تبدیل فوریه زمان پیوسته

✓ طیف سیگنال زمان‌گسسته با تغییرات آهسته (سیگنال‌های فرکانس پایین یا همان پایین‌گذر) نزدیک $2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ غیر صفر است. به عبارت دیگر برای سیگنال‌های فرکانس پایین اندازه طیف نزدیک $2k\pi$ بیشتر از اندازه طیف در اطراف $(2k+1)\pi$ است.

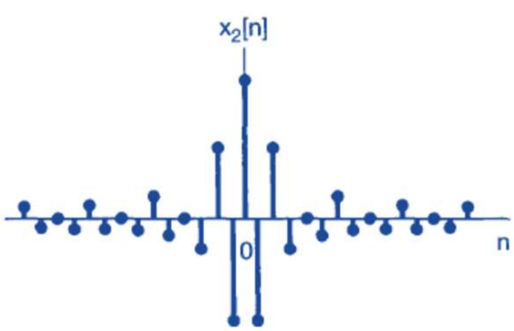


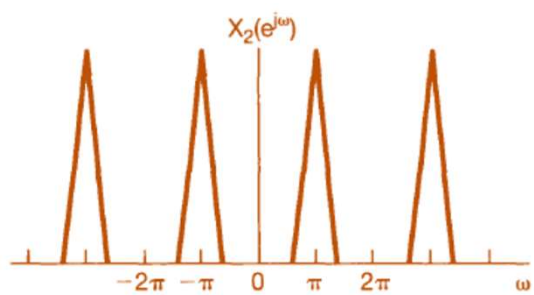


تبدیل فوریه زمان گسسته

موارد تفاوت با تبدیل فوریه زمان پیوسته

✓ طیف سیگنال زمان‌گسسته با تغییرات سریع نزدیک $(2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ غیر صفر است. به عبارت دیگر برای سیگنال‌های فرکانس بالا (بالاگذر) اندازه طیف نزدیک $(2k+1)\pi$ بزرگتر از اندازه طیف در اطراف $2k\pi$ است.





همگرایی تبدیل فوریه زمان گسسته

شرایط کافی برای همگرایی (مشابه حالت پیوسته)

شرط جمع‌پذیری مطلق سیگنال $x[n]$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty$$

شرط محدودیت انرژی سیگنال $x[n]$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

** باید توجه داشت که تبدیل فوریه زمان گسسته معکوس، مشکل همگرایی ندارد.

تبدیل فوریه زمان گسسته

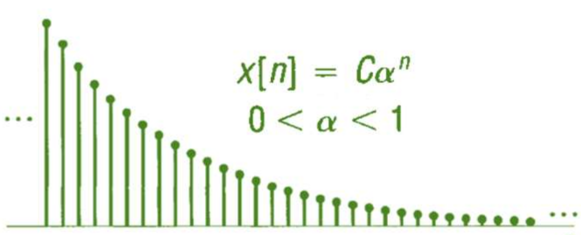
مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را به‌دست آورید:

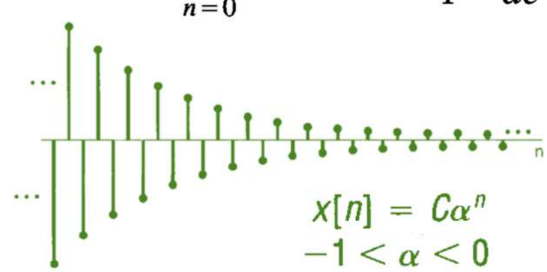
$$x[n] = a^n u[n], \qquad |a| < 1$$

تبدیل فوریه زمان گسسته

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$



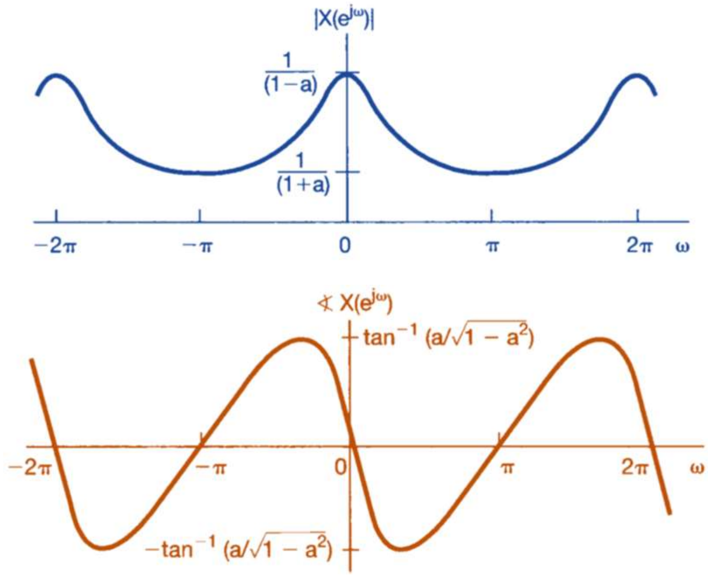


$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$2k\pi > (2k+1)\pi$

پایین گذر

$a > 0$

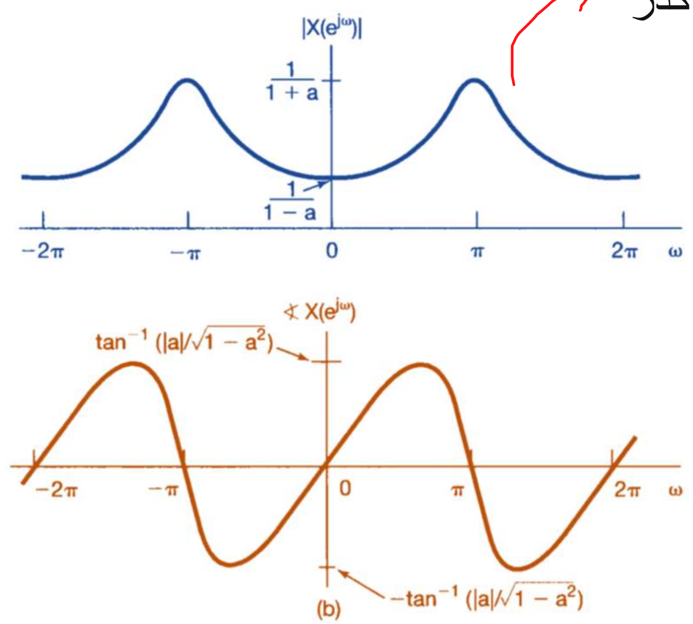


$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$2k\pi < (2k+1)\pi$

بالا گذر

$a < 0$



$a>0$ $\quad$ $a<0$

تبدیل فوریه زمان گسسته

مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را به‌دست آورید:

$$x[n] = a^{|n|}, \qquad |a| < 1$$

تبدیل فوریه زمان گسسته
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$(ae^{j\omega})^{-n}$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|}e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1=n} a^{-n}e^{-j\omega n}$$

$n=-1,-2,\dots$

تبدیل

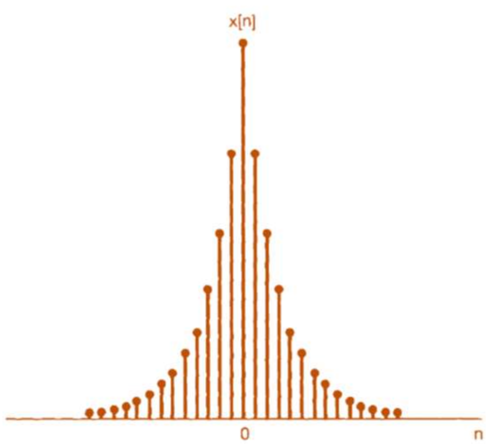
$m=1,2,\dots$

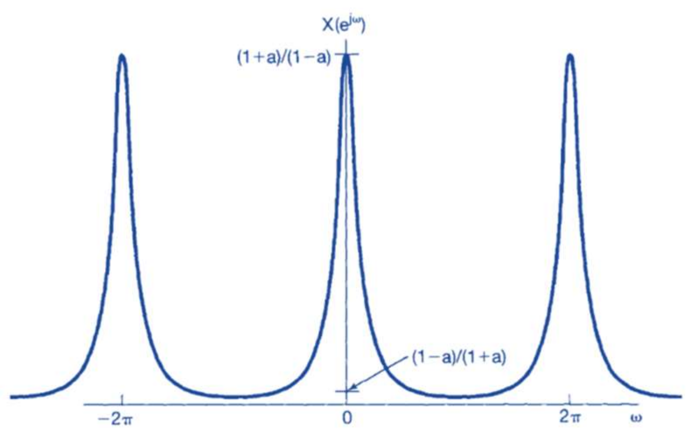
$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-j\omega})^n + \sum_{m=1}^{\infty}(ae^{j\omega})^m.$$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}} = \frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega + a^2}$$

2kπ > (2k+1)π

پایین گذر





$0 < a < 1$

تبدیل فوریه زمان گسسته

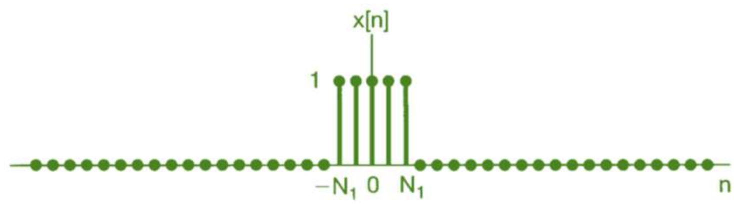
مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را به‌دست آورید:

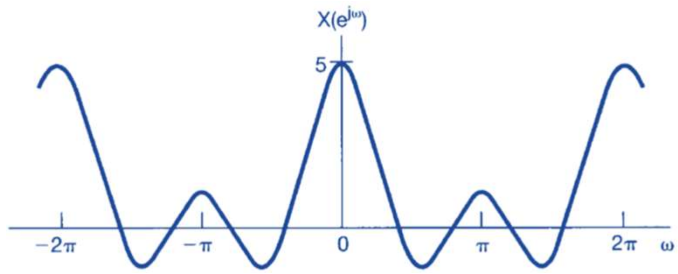
$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \le N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow \quad X(e^{j\omega}) = \frac{\sin\omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)}{\sin(\omega/2)}$$





2π

تبدیل فوریه زمان گسسته

مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را به‌دست آورید:

$$x[n] = \delta[n]$$

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0]$$

تبدیل فوریه زمان گسسته

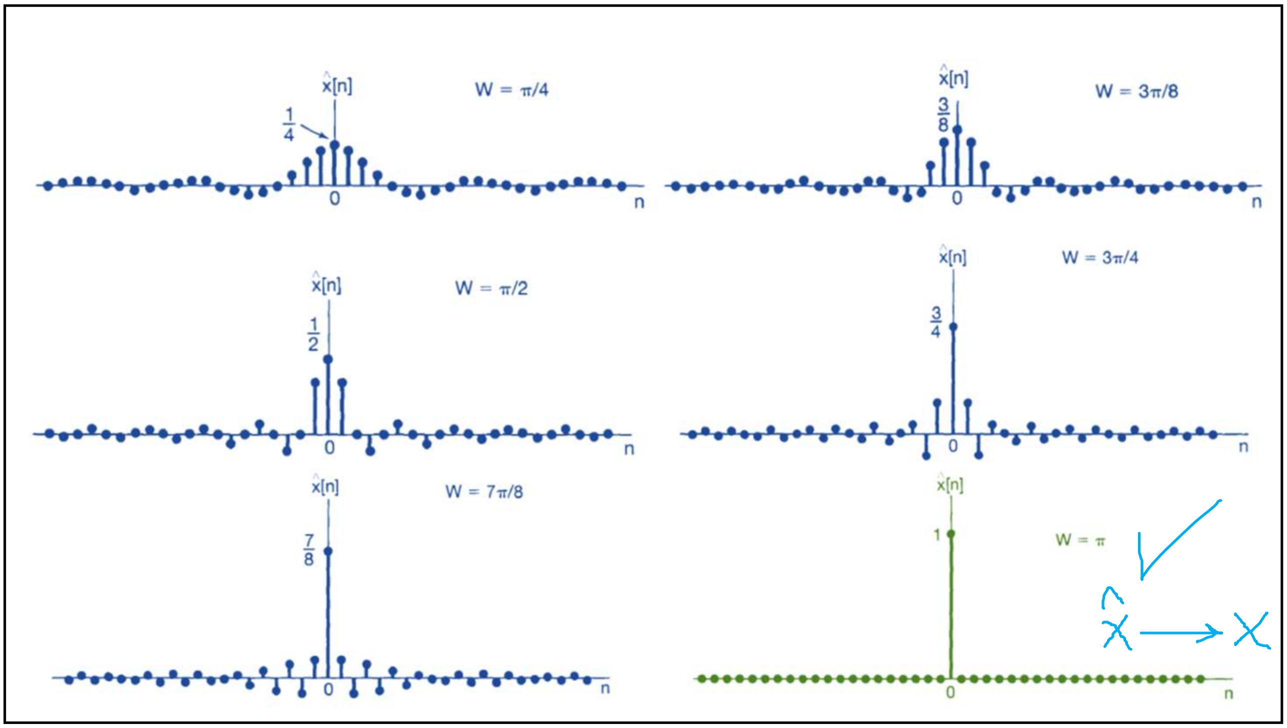
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]e^{-j\omega n} = 1$$

تبدیل فوریه زمان گسسته معکوس

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \overbrace{X(e^{j\omega})}^{1} e^{j\omega n}d\omega \Rightarrow \hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega n}\,d\omega = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$

$n=0$

1



تبدیل فوریه زمان گسسته

مثال: تبدیل فوریه معکوس $X(e^{j\omega}) = \delta(\omega) \;,\; -\pi < \omega \le \pi$ را به‌دست آورید:

تبدیل فوریه زمان گسسته معکوس

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\delta(\omega)e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{2\pi}\delta(\omega)e^{j(0)n}d\omega}_{1} = \frac{1}{2\pi}$$

تبدیل فوریه زمان گسسته برای سیگنال‌های متناوب

دقت کنید که سیگنال‌های متناوب شرط کافی برای همگرایی را ندارند ولی تبدیل فوریه دارند

ابتدا فرض می کنیم که تبدیل فوریه سیگنال $x[n]$ برابر است با:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) e^{j\omega n}$$

$$\Rightarrow x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} 2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) e^{j(\omega_0 + 2\pi l)n}\, d\omega$$

$$= e^{j(\omega_0 + 2\pi l)n} \int_{2\pi} 2\pi \underbrace{\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)}_{\text{در یک پریود } 2\pi \text{ فقط یک ضربه وجود دارد}}\, d\omega = e^{j\omega_0 n} \overbrace{e^{j2\pi l n}}^{1} = e^{j\omega_0 n}$$

نتیجه

تبدیل فوریه زمان گسسته برای سیگنال‌های متناوب

$$e^{j\omega_0 n} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)t} \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{N}\right)$$

تبدیل فوریه گسسته برای سیگنال‌های متناوب

مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را به‌دست آورید:

$$x[n] = \cos \omega_0 n$$

$a_1 = \frac{1}{2} \quad a_{-1} = \frac{1}{2}$

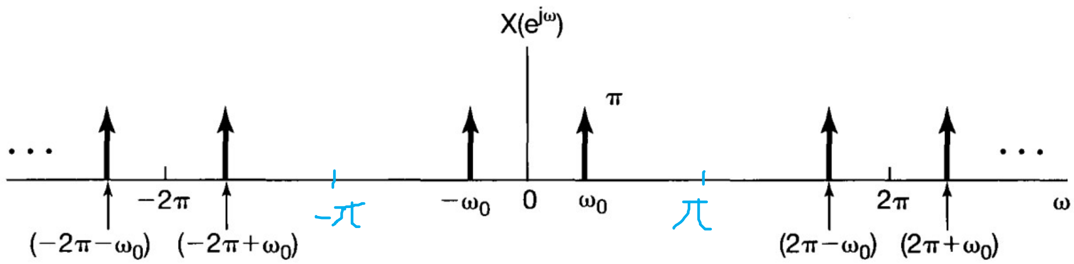
$$x[n] = \cos \omega_0 n = \underbrace{\frac{1}{2} e^{j\omega_0 n}}_{k=1} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n}}_{k=-1}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{5}$$

تابع متناوب

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi\,\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5} - 2\pi l\right) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi\,\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5} - 2\pi l\right)$$

$$X(e^{j\omega}) = \pi\,\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5}\right) + \pi\,\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5}\right), \qquad -\pi \le \omega < \pi,$$

در يك پريود 2 پی فقط يك ضربه وجود دارد

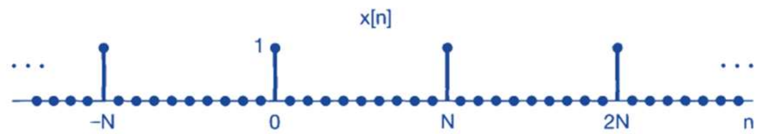


Discrete-time Fourier transform of $x[n] = \cos \omega_0 n$.

تبدیل فوریه گسسته برای سیگنال‌های متناوب

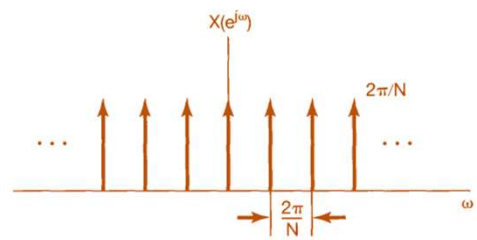
مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را به‌دست آورید:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-kN],$$



$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}. \quad \Rightarrow \quad a_k = \frac{1}{N}.$$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$



خواص تبدیل فوریه زمان گسسته

خاصیت تناوب:

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} X(e^{j\omega}). \Rightarrow X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega}).$$

خاصیت خطی بودن:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} X_1(e^{j\omega})$$
$$x_2[n] \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} X_2(e^{j\omega}), \Rightarrow ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}).$$

خاصیت شیفت زمانی و فرکانسی:

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} X(e^{j\omega}), \Rightarrow x[n-n_0] \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$$
$$e^{j\omega_0 n}x[n] \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} X(e^{j(\omega-\omega_0)}).$$

خواص تبدیل فوریه زمان گسسته

خاصیت مزدوج و تقارن مزدوج:

$$x[n] \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}), \quad \Rightarrow \quad x^*[n] \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X^*(e^{-j\omega}).$$

if $x[n]$ is real $\Rightarrow$ $X(e^{j\omega})$ is conjugate symmetric. $\Rightarrow$ $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \quad [x[n]\text{real}].$

$\Rightarrow$ $\mathcal{E}v\{x[n]\} \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$

real part of the Fourier transform is an *even* function of frequency.

$\mathcal{O}d\{x[n]\} \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} j\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\},$

imaginary part is an *odd* function of frequency.

خواص تبدیل فوریه زمان گسسته

خاصیت تفاضل گیری‌گیری و جمع انباره‌ای:

$$x[n] \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}), \Rightarrow x[n] - x[n-1] \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega}).$$

$$x[n] \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}), \Rightarrow \sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k).$$

خواص تبدیل فوریه زمان گسسته

مثال: با استفاده از خواص، تبدیل فوریه سیگنال زیر را به‌دست آورید:

$$x[n] = u[n]$$

فرسال

$$g[n] = \delta[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} G(e^{j\omega}) = 1.$$

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} g[m]. \quad \Rightarrow \quad X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-e^{-j\omega})} G(e^{j\omega}) + \pi G(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k).$$

خواص تبدیل فوریه زمان گسسته

قرینگی زمانی:

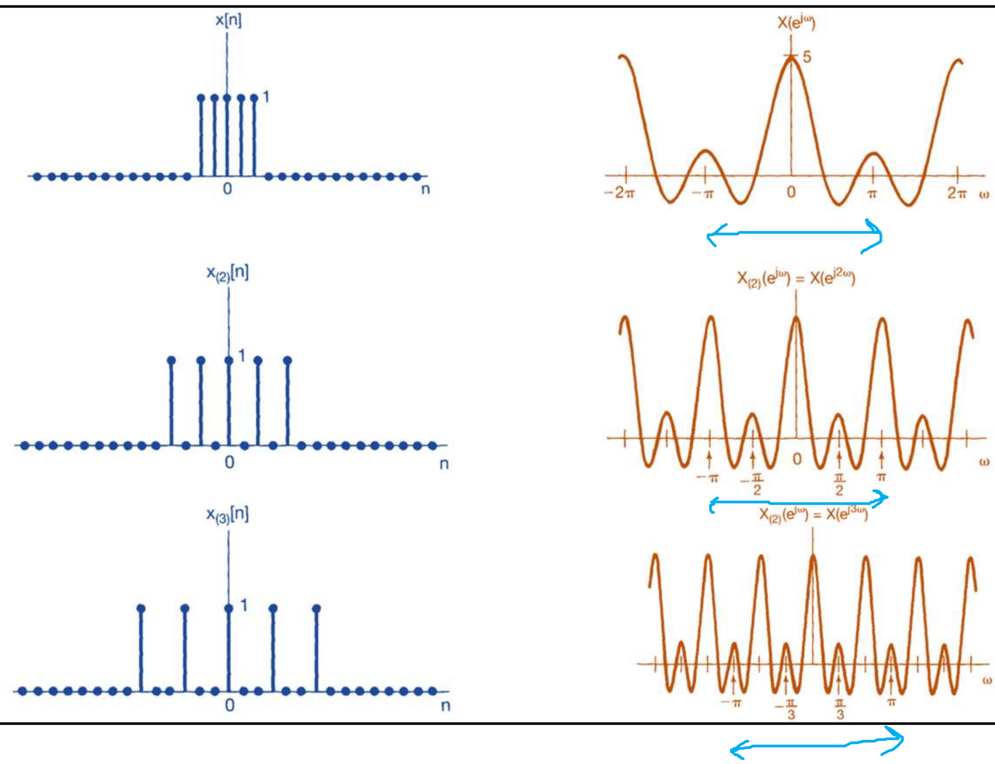
$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}). \quad \Rightarrow \quad x[-n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{-j\omega}).$$

خواص تبدیل فوریه زمان گسسته

مقیاس‌دهی زمانی و فرکانسی:

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega), \quad \Rightarrow \quad x_{(k)}[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{jk\omega}).$$

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{if } n \text{ is a multiple of } k \\ 0, & \text{if } n \text{ is not a multiple of } k. \end{cases}$$



خواص تبدیل فوریه زمان گسسته

مشتقگیری فرکانسی:

$$x[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}). \Rightarrow \quad nx[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}.$$

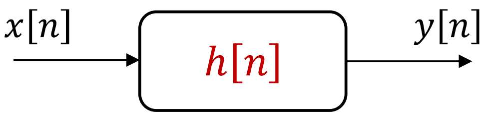
خواص تبدیل فوریه زمان گسسته

تساوی پارسوال:

$$x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega), \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

خواص تبدیل فوریه زمان گسسته

خاصیت کانولوشن:



$$x[n] = e^{j\omega n} \longrightarrow y(t) = \mathrm{H}\left(e^{-j\omega}\right)e^{j\omega n}$$

$$\mathrm{H}\left(e^{-j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n], \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}),}$$

خواص تبدیل فوریه زمان گسسته

خاصیت ضرب:

$$x[n]y[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

خواص تبدیل فوریه زمان گسسته

Section	Property	Aperiodic Signal	Fourier Transform
		$x[n]$ $y[n]$	$\left.\begin{matrix} X(e^{j\omega}) \\ Y(e^{j\omega}) \end{matrix}\right\}$ periodic with period 2π
5.3.2	Linearity	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
5.3.3	Time Shifting	$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
5.3.3	Frequency Shifting	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
5.3.4	Conjugation	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
5.3.6	Time Reversal	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
5.3.7	Time Expansion	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{if } n = \text{multiple of } k \\ 0, & \text{if } n \neq \text{multiple of } k \end{cases}$	$X(e^{jk\omega})$
5.4	Convolution	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
5.5	Multiplication	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
5.3.5	Differencing in Time	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
5.3.5	Accumulation	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}}X(e^{j\omega})$ $+\pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$

خواص تبدیل فوریه زمان گسسته

5.3.8	Differentiation in Frequency	$nx[n]$	$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
5.3.4	Conjugate Symmetry for Real Signals	$x[n]$ real	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\} = \mathcal{R}e\{X(e^{-j\omega})\} \\ \mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\} = -\mathcal{I}m\{X(e^{-j\omega})\} \\ \lvert X(e^{j\omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\omega})\rvert \\ \sphericalangle X(e^{j\omega}) = -\sphericalangle X(e^{-j\omega}) \end{cases}$
5.3.4	Symmetry for Real, Even Signals	$x[n]$ real an even	$X(e^{j\omega})$ real and even
5.3.4	Symmetry for Real, Odd Signals	$x[n]$ real and odd	$X(e^{j\omega})$ purely imaginary and odd
5.3.4	Even-odd Decomposition of Real Signals	$x_e[n] = \mathcal{E}v\{x[n]\}$ $[x[n]$ real$]$ $x_o[n] = \mathcal{O}d\{x[n]\}$ $[x[n]$ real$]$	$\mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$ $j\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\}$
5.3.9	Parseval's Relation for Aperiodic Signals		

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Signal	Fourier Transform	Fourier Series Coefficients (if periodic)
$\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	a_k
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational $\Rightarrow$ The signal is aperiodic
$\cos \omega_0 n$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\}$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational $\Rightarrow$ The signal is aperiodic
$\sin \omega_0 n$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\}$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi r}{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j}, & k = r, r \pm N, r \pm 2N, \ldots \\ -\frac{1}{2j}, & k = -r, -r \pm N, -r \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational $\Rightarrow$ The signal is aperiodic

	F	FS
$x[n] = 1$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi l)$	$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
Periodic square wave $x[n] = \begin{cases} 1, & \|n\| \le N_1 \\ 0, & N_1 < \|n\| \le N/2 \end{cases}$ and $x[n+N] = x[n]$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{\sin[(2\pi k/N)(N_1 + \frac{1}{2})]}{N \sin[2\pi k/2N]},\ k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$ $a_k = \frac{2N_1 + 1}{N},\ k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{1}{N}$ for all k
$a^n u[n],\quad \|a\| < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$	—
$x[n] \begin{cases} 1, & \|n\| \le N_1 \\ 0, & \|n\| > N_1 \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)}$	—

	F	FS
$\frac{\sin Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ $0 < W < \pi$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \le \|\omega\| \le W \\ 0, & W < \|\omega\| \le \pi \end{cases}$ $X(\omega)$ periodic with period 2π	—
$\delta[n]$	1	—
$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega - 2\pi k)$	—
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$	—
$(n+1)a^n u[n], \quad \|a\| < 1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$	—
$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n], \quad \|a\| < 1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^r}$	—

	F	FS
$\frac{\sin Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ $0 < W < \pi$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \le \|\omega\| \le W \\ 0, & W < \|\omega\| \le \pi \end{cases}$ $X(\omega)$ periodic with period 2π	—
$\delta[n]$	1	—
$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega - 2\pi k)$	—
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$	—
$(n+1)a^n u[n], \quad \|a\| < 1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$	—
$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n], \quad \|a\| < 1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^r}$	—

خاصیت دوگانی (Duality)

	Continuous time: Time domain	Continuous time: Frequency domain	Discrete time: Time domain	Discrete time: Frequency domain
Fourier Series	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ continuous time periodic in time	$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}$ discrete frequency aperiodic in frequency	$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$ discrete time periodic in time	$a_k = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$ discrete frequency periodic in frequency
Fourier Transform	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ continuous time aperiodic in time	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ continuous frequency aperiodic in frequency	$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ discrete time aperiodic in time	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$ continuous frequency periodic in frequency

دل گر چه درین بادیه بسیار شتافت

یک موی ندانست و بسی موی شکافت

گرچه ز دلم هزار خورشید بتافت

آخر به کمال ذره‌ای راه نیافت

ابوسعید ابوالخیر