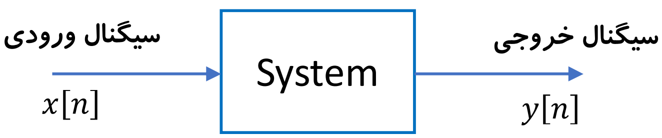
سیگنال‌ها و سیستم‌ها

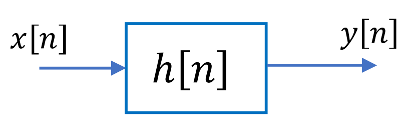
فصل دوم

تحلیل سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) در حوزه زمان

سیستم‌های LTI زمان گسسته



$x[n] = \delta[n] \quad \rightarrow \quad y[n] = h[n]$ پاسخ ضربه



هر سیگنال زمان گسسته را می توان به شکل مجموع وزن داری از ضربه های انتقال یافته بسط داد، که قدرت هر ضربه معادل مقدار سیگنال در آن لحظه است، به عبارت دیگر:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] = \cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots$$

سیستم‌های LTI زمان گسسته

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

حال اگر فرض کنیم پاسخ سیستم LTI زمان گسسته به ورودی ضربه واحد $\delta[n]$ برابر با $h[n]$ باشد، آنگاه با توجه به خاصیت TI بودن سیستم، پاسخ به $\delta[n-k]$ برابر با $h[n-k]$ است

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \xrightarrow{\text{سیستم LTI}} y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

پس می‌توان از طریق مجموع کانولوشن پاسخ سیستم به هر ورودی دلخواه $x[n]$ را به دست آورد:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$ مجموع کانولوشن

محاسبه مجموع کانولوشن

۱- روش محاسباتی: در این روش می‌توان با استفاده از رابطه مجموع کانولوشن و محاسبات ریاضی مانند محاسبات سری، حاصل مجموع کانولوشن را به دست آورد.

** برخی روابط مفید برای محاسبه مجموع کانولوشن:

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2} \qquad |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \qquad |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} na^n = \frac{(N-1)a^{N+1} - Na^N + a}{(1-a)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{1}{6}N(N-1)(2N-1)$$

محاسبه مجموع کانولوشن

۲- روش گرافیکی: در این روش ابتدا $x[k]$ و $h[k]$ را برحسب k رسم نموده و سپس $h[-k]$ یا $x[-k]$ را رسم نموده و برای محاسبه $y[k]$ آن را به اندازه n انتقال می‌دهیم. اگر n مثبت بود به سمت راست و اگر n منفی بود به سمت چپ شیفت می‌دهیم.

در ادامه، مجموع حاصلضرب مؤلفه‌های مشترک (غیر صفر) را به‌دست می‌آوریم:

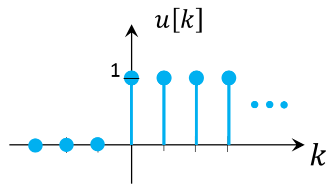
$$x[k], h[k] \xrightarrow{\text{قرینگی زمانی}} h[-k] \xrightarrow[\text{اندازه } n]{\text{انتقال زمانی به}} h[n-k] \xrightarrow[\text{مؤلفه‌ها}]{\text{حاصلضرب}} x[k]h[n-k]$$

$$\xrightarrow[\text{حاصلضرب}]{\text{محاسبه مجموع}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

محاسبه مجموع کانولوشن

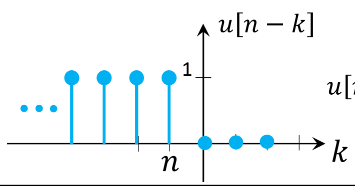
مثال: فرض کنید $x[n] = u[n]$ و $h[n] = u[n]$ باشند، آنگاه برای محاسبه مجموع کانولوشن داریم:

روش محاسباتی : $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]u[n-k] = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$



$$u[k] = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & n < 0 \\ n+1 & n \geq 0 \end{cases} = (n+1)u[n]$$



$$u[n-k] = \begin{cases} 1 & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

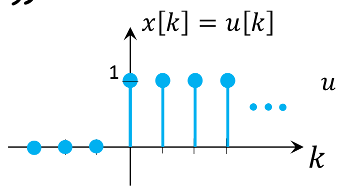
$$\Rightarrow u[k]u[n-k] = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq n \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

محاسبه مجموع کانولوشن

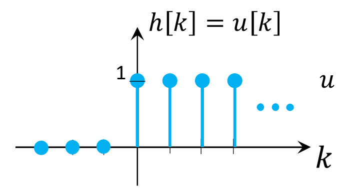
مثال: فرض کنید $x[n]=u[n]$ و $h[n]=u[n]$ باشند، آنگاه برای محاسبه مجموع کانولوشن داریم:

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

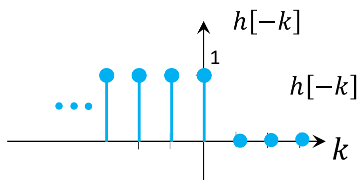
روش گرافیکی :



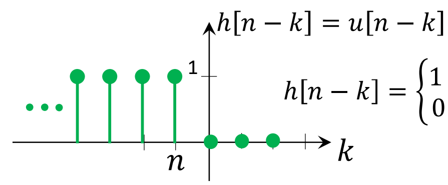
$$u[k]=\begin{cases}1 & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$



$$u[k]=\begin{cases}1 & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$

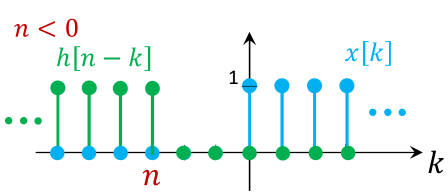


$$h[-k]=u[-k]=\begin{cases}1 & k\leq 0\\ 0 & k>0\end{cases}$$

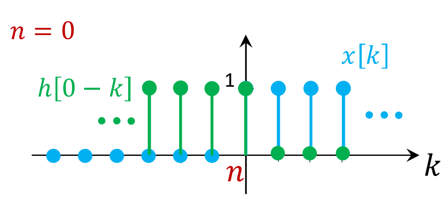


$$h[n-k]=\begin{cases}1 & k\leq n\\ 0 & k>n\end{cases}$$

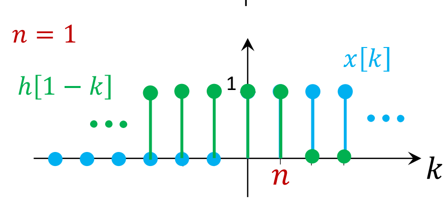
$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$



$$for\quad n<0\quad\rightarrow\ y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]u[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 0=0$$



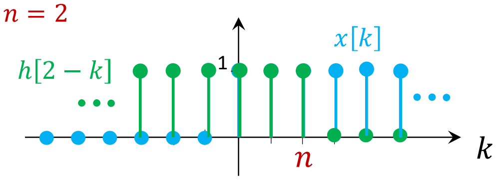
$$for\quad n=0\quad\rightarrow\ y[0]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]u[0-k]=\sum_{k=0}^{0} 1=1$$



$$for\quad n=1\quad\rightarrow\ y[1]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]u[1-k]=\sum_{k=0}^{1} 1=2$$

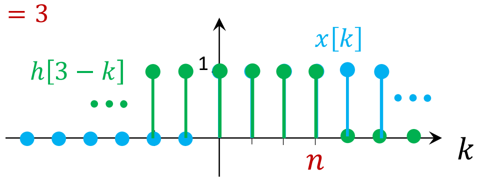
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$n = 2$



$$for \quad n = 2 \quad \rightarrow \; y[2] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]u[2-k] = \sum_{k=0}^{2} 1 = 3$$

$n = 3$



$$for \quad n = 3 \quad \rightarrow \; y[3] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]u[3-k] = \sum_{k=0}^{3} 1 = 4$$

$$\Rightarrow \; y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ n+1 & n \geq 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \; u[n] * u[n] = (n+1)u[n]$$

محاسبه مجموع کانولوشن

مثال: فرض کنید $x[n] = u[n] - u[n-3]$ و $h[n] = u[n] - u[n-2]$ باشند، آنگاه برای محاسبه مجموع کانولوشن داریم:

روش محاسباتی : $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (u[k] - u[k-3])(u[n-k] - u[n-k-2])$

$$= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]u[n-k]}_{①} - \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]u[n-k-2]}_{②} - \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k-3]u[n-k]}_{③} + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k-3]u[n-k-2]}_{④}$$

1 $u[k]u[n-k] = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le n \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} u[k]u[n-k] = (n+1)u[n]$

2 $u[k]u[n-k-2] = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le n-2 \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-2} u[k]u[n-k-2] = (n-1)u[n-2]$

3 $u[k-3]u[n-k] = \begin{cases} 1 & 3 \le k \le n \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad \Rightarrow \sum_{k=3}^{n} u[k-3]u[n-k] = (n-2)u[n-3]$

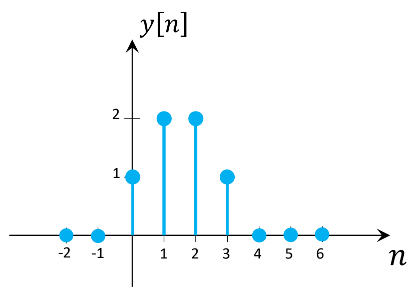
$\geq 0 \quad \geq 0 \qquad\qquad (n-۲)-۳+۱$

4 $u[k-3]u[n-k-2] = \begin{cases} 1 & 3 \le k \le n-2 \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad \Rightarrow \sum_{k=3}^{n-2} u[k-3]u[n-k] = (n-4)u[n-5]$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = (n+1)u[n] - (n-1)u[n-2] - (n-2)u[n-3] + (n-4)u[n-5]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$$= (n+1)u[n] - (n-1)u[n-2] - (n-2)u[n-3] + (n-4)u[n-5]$$

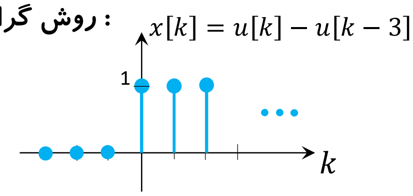


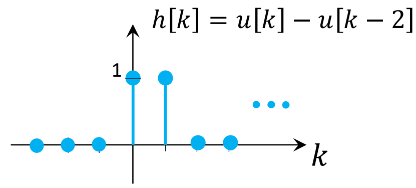
محاسبه مجموع کانولوشن

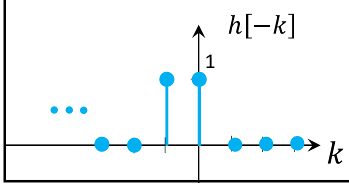
مثال: فرض کنید $x[n]=u[n]-u[n-3]$ و $h[n]=u[n]-u[n-2]$ باشند، آنگاه برای محاسبه مجموع کانولوشن داریم:

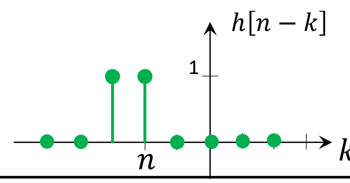
$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

روش گرافیکی :

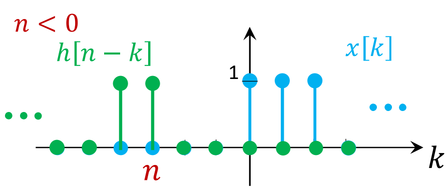




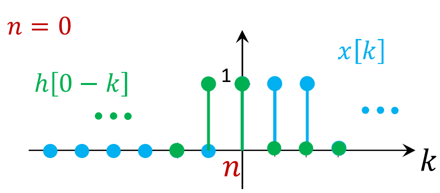




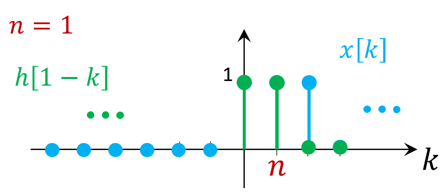
$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$



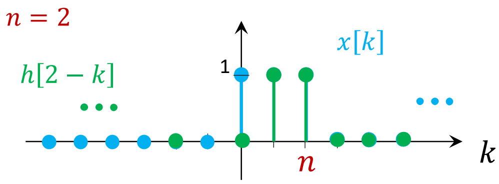
$$for\quad n<0\quad \rightarrow\ y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}0=0$$



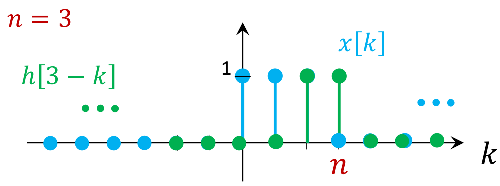
$$for\quad n=0\quad \rightarrow\ y[0]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[0-k]=\sum_{k=0}^{0}1=1$$



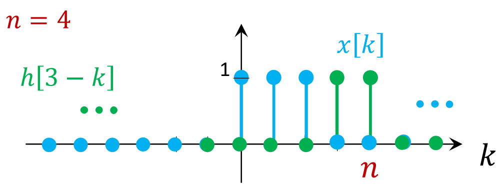
$$for\quad n=1\quad \rightarrow\ y[1]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[1-k]=\sum_{k=0}^{1}1=2$$



$$for \quad n = 2 \quad \rightarrow \; y[2] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[2-k] = \sum_{k=1}^{2} 1 = 2$$



$$for \quad n = 3 \quad \rightarrow \; y[3] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[3-k] = \sum_{k=2}^{2} 1 = 1$$



$$for \quad n = 4 \quad \rightarrow \; y[4] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[4-k] = 0$$

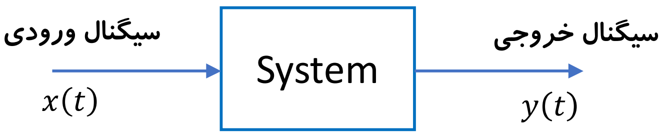
$$for \quad n \geq 5 \quad \rightarrow \; y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = 0$$

محاسبه مجموع کانولوشن

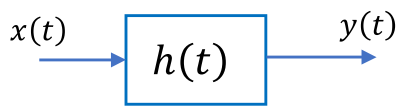
نکته ۱: اگر دو سیگنال گسسته $x[n]$ و $h[n]$ با طول محدود داشته باشیم به‌طوری‌که سیگنال $x[n]$ به طول L_1 و سیگنال $h[n]$ به طول L_2 باشد، آنگاه حاصل $x[n] * h[n]$ به طول $\boxed{L = L_1 + L_2 - 1}$ خواهد بود. البته اگر مجموع حاصلضرب‌ها صفر شود می‌تواند طول آن کمتر هم باشد.

نکته ۲: اگر مقادیر غیر صفر $x[n]$ در بازه $[M_x, N_x]$ و مقادیر غیر صفر $h[n]$ در بازه $[M_h, N_h]$ باشد، آنگاه مقادیر غیر صفر $x[n] * h[n]$ در بازه $[M_x + M_h \, , N_x + N_h]$ خواهد بود.

سیستم‌های LTI زمان پیوسته



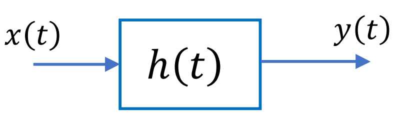
$x(t) = \delta(t) \quad \rightarrow \quad y(t) = h(t)$ پاسخ ضربه



هر سیگنال زمان پیوسته را می توان به شکل مجموع وزن داری از ضربه های انتقال یافته با فاصله بسیار ناچیز بسط داد، به عبارت دیگر:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

سیستم‌های LTI زمان پیوسته



حال اگر فرض کنیم پاسخ سیستم LTI زمان پیوسته به ورودی ضربه واحد $\delta(t)$ برابر با $h(t)$ باشد، آنگاه:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \xrightarrow{\text{سیستم LTI}} y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

پس می‌توان از طریق انتگرال کانولوشن پاسخ سیستم به هر ورودی دلخواه $x(t)$ را به دست آورد:

انتگرال کانولوشن $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$

محاسبه انتگرال کانولوشن

روش محاسباتی: در این روش با استفاده از ساده سازی ریاضی و محاسبه انتگرال می توان خروجی را به دست آورد.

روش گرافیکی: در این روش ابتدا $x(\tau)$ و $h(\tau)$ را برحسب τ رسم نموده و سپس $h(-\tau)$ یا $x(-\tau)$ را رسم نموده و برای محاسبه $y(\tau)$ آن را به اندازه t انتقال می‌دهیم.

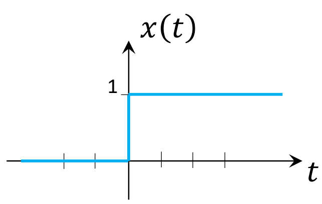
حال $h(t-\tau)$ و $x(\tau)$ در هم ضرب کرده و سطح زیر نمودار حاصل را به عنوان انتگرال حاصل‌ضرب به‌دست می‌آوریم. معمولاً در مسائل، حاصل ضرب را می‌توان به چند قسمت تقسیم نمود و انتگرال هر قسمت را به‌صورت جداگانه محاسبه نمود و خروجی را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای به دست آورد:

$$x(\tau),h(\tau)\xrightarrow{\text{قرینگی زمانی}} h(-\tau)\xrightarrow[\text{اندازه } t]{\text{انتقال زمانی به}} h(t-\tau)\xrightarrow{\text{حاصلضرب}} x(\tau)h(t-\tau)\xrightarrow{\text{انتگرال}}$$

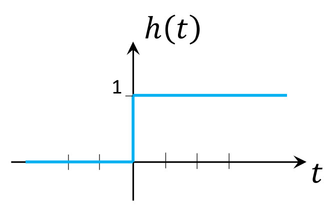
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

محاسبه انتگرال کانولوشن

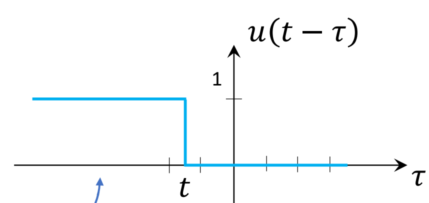
مثال: خروجی برای یک سیستم LTI به‌ازای ورودی و پاسخ ضربه نشان داده شده را به‌دست آورید.



$x(t)=u(t)$



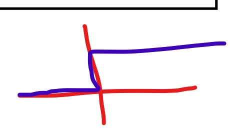
$y(t)=u(t)$



روش محاسباتی : $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\ =\int_{-\infty}^{t} x(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau\ =r(t)$

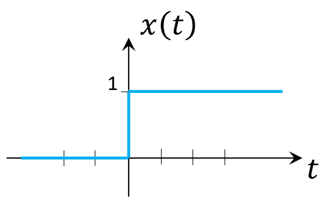
$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\ =\int_{-\infty}^{t} h(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau\ =r(t)$$

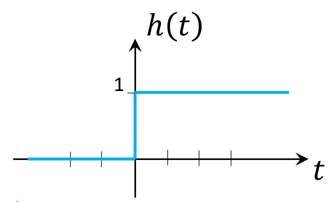
$\int_0^t d\tau=t$



محاسبه انتگرال کانولوشن

مثال: خروجی برای یک سیستم LTI به‌ازای ورودی و پاسخ ضربه نشان داده شده را به‌دست آورید.



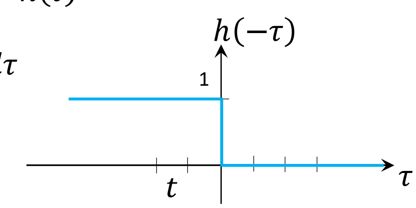


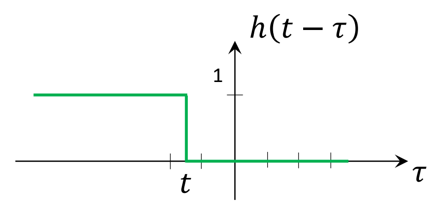
$x(t) = u(t)$

h $\cancel{y}(t) = u(t)$

روش گرافیکی : $y(t) = x(t) * h(t)$

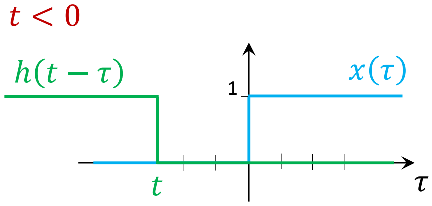
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \boxed{h(t-\tau)} d\tau$$





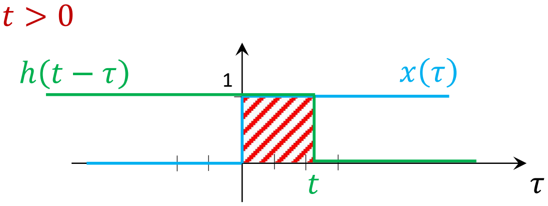
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$t < 0$



$$\rightarrow\ y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 d\tau = 0$$

$t > 0$



$$\rightarrow\ y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{0}^{t} 1 d\tau = t$$

$$\Rightarrow y(t) = x(t) * h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases} = r(t)$$