

# Lineární programování a kombinatorická optimalizace – 3. opáčko

Pavel Mikuláš

3. května 2020

**Příklad 1.** Dualizujte následující relaxaci celočíselného programu:

$$\begin{aligned} \text{Proměnné:} \quad & x_i \geq 0, x_{i,j} \geq 0 \text{ pro každé } i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\} \\ \text{Účelová funkce:} \quad & \min \sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d_{ij} x_{i,j} \\ \text{Podmínky:} \quad & x_i \geq x_{i,j} \text{ pro každé } i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\} \\ & \sum_{i=1}^n x_{i,j} \geq 1 \text{ pro každé } j \in \{1, \dots, m\} \end{aligned}$$

Upravíme si první podmínku tak, abychom měli proměnné na levé straně a konstanty na pravé:

$$\begin{aligned} \text{Proměnné:} \quad & x_i \geq 0, x_{i,j} \geq 0 \text{ pro každé } i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\} \\ \text{Účelová funkce:} \quad & \min \sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d_{ij} x_{i,j} \\ \text{Podmínky:} \quad & x_i - x_{i,j} \geq 0 \text{ pro každé } i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\} \\ & \sum_{i=1}^n x_{i,j} \geq 1 \text{ pro každé } j \in \{1, \dots, m\} \end{aligned}$$

A postupujeme podle tabulky zprava doleva, tedy z první podmínky dostaneme proměnné  $y_{i,j} \geq 0$  a z druhé podmínky  $y_j \geq 0$ .

Z koeficientů pravých stran dostaneme účelovou funkci, tedy  $y_{i,j}$  se vynulují a  $y_j$  se sečtou s koeficientem 1. Máme tedy účelovou funkci:  $\max \sum_{j=1}^m y_j$ .

Zbývá jen určit podmínky. Transponujeme matici podmínek, tedy prohodíme indexy řádků a sloupců. Původní cenový vektor použijeme na pravé straně a jelikož původní proměnné byly nezáporné, otočíme i znaménko nerovnosti. Dostaneme tedy následující duální lineární program:

$$\begin{aligned} \text{Proměnné:} \quad & y_j \geq 0, y_{i,j} \geq 0 \text{ pro každé } i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\} \\ \text{Účelová funkce:} \quad & \max \sum_{j=1}^m y_j \\ \text{Podmínky:} \quad & \sum_{j=1}^m y_{i,j} \leq c_i \text{ pro každé } i \in \{1, \dots, n\} \\ & y_j - y_{i,j} \leq d_{ij} \text{ pro každé } i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\} \end{aligned}$$