Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 6. cvičení*

24. března 2020

1 Simplexová metoda

Úloha lineárního programování v rovnicovém tvaru je zapsaná jako max $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Předpokládejme, že $\operatorname{rank}(A) = m$.

Báze je množinou $B \subseteq \{1, \dots n\}$ indexů proměnných takovou, že A_B je regulární, kde A_B značí podmatici A indexovanou sloupci z B. *Bázickým řešením* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ odpovídající bázi B je řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, pro které platí $x_i = 0$ pro každé $i \notin B$. *Přípustná báze* je taková, že jí odpovídající bázické řešení $\mathbf{x}$ je přípustné, tedy $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Vzorový řešený příklad:

$$\begin{aligned} \max 2x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Upravíme na rovnicový tvar zavedením nových proměnných $s_1, s_2, s_3 \geq 0$:

$$\begin{aligned} \max 2x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ x_1 + s_2 = 3 \\ x_2 + s_3 = 2 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Začneme v nějakém přípustném bázickém řešení. Zde lze zvolit původní proměnné $x_1 = x_2 = 0$ a $(s_1, s_2, s_3) = \mathbf{b}^\top = (1, 3, 2)$. Pak přepíšeme soustavu tak, aby bázické proměnné s_1, s_2, s_3 byly na levé straně:

$$\begin{aligned} &\max 2x_1 + x_2 \\ &s_1 = 1 + x_1 - x_2 \\ &s_2 = 3 - x_1 \\ &s_3 = 2 \qquad\;\; - x_2 \end{aligned}$$

Vstoupíme x_1 do báze, protože má nejvyšší koeficient v účelové funkci, a vystoupíme s_2:

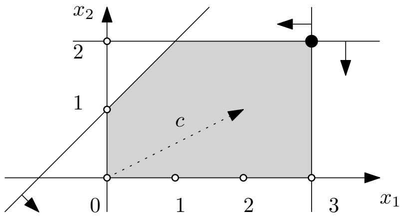
$$\begin{aligned} &\max 6 + x_2 - 2s_3 \\ &s_1 = 4 - x_2 - s_3 \\ &x_1 = 3 \qquad\;\; - s_3 \\ &s_3 = 2 - x_2 \end{aligned}$$

Vstoupíme x_2 do báze, protože má nejvyšší koeficient v účelové funkci, a vystoupíme s_3:

$$\begin{aligned} &\max 8 - 3s_3 \\ &s_1 = 2 \\ &x_1 = 3 - s_3 \\ &x_2 = 2 - s_3 \end{aligned}$$

Není, co zlepšovat, takže máme optimum pro $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $s_1 = 2$ a $s_2 = s_3 = 0$ s hodnotou účelové funkce 8.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/



Obrázek 1: V obrázku uvedené řešení odpovídá posunu z počátku do vrcholu $(3, 0)$ a poté do $(3, 2)$.

Pseudokód simplexové metody:

1. *Vstup:* Úloha lineárního programování P v rovnicovém tvaru, max $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Předpokládáme, že $\operatorname{rank}(A) = m$.

2. *Nalezni počáteční bázické přípustné řešení*: Přenásob soustavu, aby $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, a vyřeš simplexovou metodou pomocnou úlohu $\min x_{n+1} + \cdots + x_{n+m}$ za $\overline{A}\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$, $\overline{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$, kde $\overline{A} = (A \mid I_m) \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$ a $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_{n+m})$. Tato úloha má snadné počáteční řešení $(0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m)$. Pokud je optimální hodnota kladná, pak **skonči**, protože neexistuje přípustné řešení pro P. Jinak je optimem $(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ a pak je $(x_1, \ldots, x_n)$ počátečním řešením pro P.

3. *Spočítej simplexovou tabulku*: Pro přípustnou bázi $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ přepiš P na $\max z$ pro

$$\begin{aligned} z &= z_0 + \mathbf{r}^\top \mathbf{x}_N \text{ za podmínek} \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{p} + Q\mathbf{x}_N, \end{aligned}$$

   kde $N = \{1, \ldots, n\} \setminus B$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $z_0 \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{n-m}$.

4. *Vrať případné optimum*: Pokud $\mathbf{r} \leq \mathbf{0}$, tak **skonči** a vrať optimum s bázickými proměnnými $\mathbf{x}_B = \mathbf{p}$ a nebázickými proměnnými $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$.

5. *Vyber proměnnou vstupující do báze*: Podle zvoleného pivotovacího pravidla vyber vstupující proměnnou x_t z proměnných x_j s $j \in N$ a $r_j > 0$. Protože není $\mathbf{r} \leq \mathbf{0}$, tak vstupující proměnná x_t vždy existuje. Volbou x_t chceme zvýšit hodnotu účelové funkce.

6. *Vyber proměnnou vystupující z báze*: Uvaž řádky i simplexové tabulky, ve kterých se x_t objevuje, a vyber z nich vystupující proměnnou x_s tak, aby $\frac{-p_s}{Q_{s,t}} = \min_{i \in B: Q_{i,t} < 0} \frac{-p_i}{Q_{i,t}}$. Speciálně tedy musí platit $Q_{s,t} < 0$. Tato volba x_s zajišťuje, že nové bázické řešení je přípustné.

   Pokud vystupující proměnná neexistuje (t-tý sloupec Q je nezáporný), pak **skonči**, protože úloha P je neomezená. Je-li na výběr více vystupujících proměnných, tak vyber podle pivotovacího pravidla, či libovolně, pokud pravidlo ani tak vystupující proměnnou nespecifikuje.

7. *Aktualizuj simplexovou tabulku a iteruj*: Zvol $(B \setminus \{s\}) \cup \{t\}$ jako novou bázi a přepiš simplexovou tabulku tak, aby odpovídala této nové bázi. Pokračuj krokem 4.

V kroce 5 se může stát, že nově vybraná vstupující proměnná nevylepší hodnotu účelové funkce a pak říkáme, že řešení je *degenerované*. To například nastává, pokud je v předešlém kroce na výběr více vystupujících proměnných. U degenerovaných řešení může dojít k *zacyklení* simplexové metody, kdy se nevylepšuje hodnota účelové funkce a algoritmus se nikdy nezastaví. Zacyklení se dá zabránit volbou vhodného pivotovacího pravidla.

Příklady pivotovacích pravidel pro výběr vstupující proměnné x_t a vystupující x_s:

1. *Dantzigovo pravidlo:* Vyber $t \in N$ s maximálním r_t a zvol x_s libovolně z možných proměnných.

2. *Blandovo pravidlo:* Vyber nejmenší možné $t \in N$ a pro něj nejmenší možné $s \in B$. Brání zacyklení, ale je pomalé.

Existuje spousta dalších pivotovacích pravidel (lexikografické, náhodné a další).

Příklad 1. *Převeďte následující soustavu nerovnic do rovnicového tvaru:*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_2 + x_3 &\le 12 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 &\ge -7 \\ x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{R} \\ x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

Nalezněte také nějaké bázické přípustné řešení pro zadaný rovnicový tvar.

Mějme libovolný lineární program s m lineárními nerovnicemi či rovnicemi a n proměnnými. Kolik proměnných nám vždy stačí v rovnicovém tvaru této úlohy?

Řešení. Proměnné x_1, x_2, x_3 je třeba převést na dvojice nezáporných proměnných x_i^+, x_i^-, protože mohou nabývat libovolných reálných hodnot. Také je poté nutné převést nerovnosti na rovnosti zavedením nových nezáporných proměnných $s_1, s_2, s_3 \ge 0$. Celkem tedy dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} x_1^+ - x_1^- + x_2^+ - x_2^- + s_1 &= 3 \\ x_2^+ - x_2^- + x_3^+ - x_3^- + s_2 &= 12 \\ x_1^+ - x_1^- + 3x_2^+ - 3x_2^- - x_4 - s_3 &= -7 \\ x_1^+, x_2^+, x_3^+, x_1^-, x_2^-, x_3^-, x_4, s_1, s_2, s_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Počáteční přípustné bázické řešení je například $s_1 = 3, s_2 = 12, s_3 = 7$.

Na převod do rovnicového tvaru stačí $2n+m$ proměnných, dvě za každou původní při případném převodu reálných proměnných na nezáporné a m proměnných pro převod nerovností na rovnosti. □

Příklad 2. *Vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu lineárního programování:*

$$\begin{aligned} \max 3x_1 + 4x_2 & \\ x_1 + x_2 &\le 4 \\ 2x_1 + x_2 &\le 5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Řešení. Převedeme na rovnicový tvar pomocí dvou nových proměnných $s_1, s_2 \ge 0$.

$$\begin{aligned} \max 3x_1 + 4x_2 & \\ s_1 &= 4 - x_1 - x_2 \\ s_2 &= 5 - 2x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Vstoupíme třeba y, protože má větší koeficient v účelové funkci, vystoupíme s_1.

$$\begin{aligned} \max 16 - x_1 - 4s_1 & \\ x_2 &= 4 - x_1 - s_1 \\ s_2 &= 1 - x_1 + s_1 \end{aligned}$$

Dále učelová funkce vylepšit nejde, optimum je tedy pro $x_1 = 0$ a $x_2 = 4$ s hodnotou účelové funkce 16. □

Příklad 3. *Mějme zadanou následující úlohu lineárního programování*

$$\begin{aligned} \max x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & \\ x_1 - x_5 + x_6 &= 20 \\ x_1 + x_3 + x_7 &= 30 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_8 &= 10 \\ x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_9 &= 1 \\ x_1, x_2, \ldots, x_9 &\ge 0 \end{aligned}$$

a počáteční bázické řešení $(0, 0, 0, 0, 0, 20, 30, 10, 1)$. *Proveďte jeden krok simplexové metody, který maximalizuje přírůstek v účelové funkci.*

Řešení. Z tvaru bázického řešení víme, že proměnné x_6, x_7, x_8, x_9 jsou v bázi (jsou nenulové) a tedy momentální tvar simplexové tabulky vypadá následovně:

$$\begin{aligned} &\max x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \\ x_6 &= 20 - x_1 + x_5 \\ x_7 &= 30 - x_1 - x_3 \\ x_8 &= 10 - x_1 - x_2 - x_4 \\ x_9 &= 1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \end{aligned}$$

Do báze můžeme přidat libovolnou proměnnou: x_1 za x_6, x_7, či x_8, x_2 za x_9 či za x_8, x_3 za x_7, x_4 za x_8, x_5 za x_9. Vybereme si například x_3 za x_7, protože ta maximalizuje růst účelové funkce (dostaneme přírůstek $3 \cdot 30 = 90$). Tím dostaneme novou simplexovou tabulku

$$\begin{aligned} &\max 90 - 2x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 5x_5 - 3x_7 \\ x_6 &= 20 - x_1 + x_5 \\ x_3 &= 30 - x_1 - x_7 \\ x_8 &= 10 - x_1 - x_2 - x_4 \\ x_9 &= 31 - x_1 - x_2 + x_4 - x_5 - x_7 \end{aligned}$$

Obecně nemusíme maximalizovat přírůstek účelové funkce a záleží na tom, jaké pivotovací pravidlo si vybereme. □

Příklad 4. *Vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu lineárního programování:*

$$\begin{aligned} \max 2x_1 - x_2 + 2x_3 & \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\leq 20 \\ x_2 + 2x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Řešení. Zavedeme nové nezáporné proměnné $s_1.s_2, s_3 \geq 0$ a přepíšeme úlohu do rovnicového tvaru. Poté vytvoříme simplexovou tabulku pro přípustné bazické řešení s bází odpovídající novým proměnným.

$$\begin{aligned} &\max 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ s_1 &= 10 - 2x_1 - x_2 \\ s_2 &= 20 - x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ s_3 &= 5 - x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$

Do báze vstupuje x_1 a vystupuje s_1.

$$\begin{aligned} &\max 10 - 2x_2 + 2x_3 - s_1 \\ x_1 &= 5 - 0.5x_2 - 0.5s_1 \\ s_2 &= 15 - 1.5x_2 + 2x_3 + 0.5s_1 \\ s_3 &= 5 - x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$

Do báze vstupuje x_3 a vystupuje s_3.

$$\begin{aligned} &\max 15 - 3x_2 - s_1 - s_3 \\ x_1 &= 5 - 0.5x_2 - 0.5s_1 \\ s_2 &= 20 - 2.5x_2 + 0.5s_1 - s_3 \\ x_3 &= 2.5 - 0.5x_2 - 0.5s_3 \end{aligned}$$

Poté nelze účelovou funkci vylepšit a tedy máme optimální řešení s $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2.5$, $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ a hodnotou účelové funkce 15.

□