Lineární programování a kombinatorická optimalizace – 1. písemka

Pavel Mikuláš

7. dubna, 2020

1. **Příklad 1:**

   Proměnné x_4, x_5, x_6 převedeme na rozdíly dvojic proměnných $x_4^+, x_4^-, x_5^+, x_5^-, x_6^+, x_6^-$. Nerovnosti převedeme na rovnosti zavedením nových proměnných s_1, s_2, s_3.

$$\begin{aligned} \texttt{max}\, x_1 + 2x_5^+ - 2x_5^- \\ 4x_1 - 5x_3 - x_4^+ + x_4^- - s_1 = 5 \\ 3x_2 - x_3 - x_4^+ + x_4^- + s_2 = 12 \\ x_3 + x_5^+ - x_5^- = 9 \\ 2x_1 - x_4^+ + x_4^- - x_6^+ + x_6^- + s_3 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4^+, x_4^-, x_5^+, x_5^-, x_6^+, x_6^- \geq 0 \end{aligned}$$

   Můžeme problém dále převést na problém minimalizace podle zadání otočením znaménka účelové funkce

$$\begin{aligned} \texttt{min} - x_1 - 2x_5^+ + 2x_5^- \\ 4x_1 - 5x_3 - x_4^+ + x_4^- - s_1 = 5 \\ 3x_2 - x_3 - x_4^+ + x_4^- + s_2 = 12 \\ x_3 + x_5^+ - x_5^- = 9 \\ 2x_1 - x_4^+ + x_4^- - x_6^+ + x_6^- + s_3 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4^+, x_4^-, x_5^+, x_5^-, x_6^+, x_6^- \geq 0 \end{aligned}$$

2. **Příklad 2:**

   Zavedeme si nové proměnné x_i, s_{ij} takto:

$$\forall i, i \in \{1, .., n\} : x_i = \begin{cases} 1 & pokud\, i \in X \\ 0 & jinak \end{cases}$$

$$\forall i, j, i \in \{1, .., n\}, j \in \{1, .., m\} : s_{ij} = \begin{cases} 1 & pokud\, i \in S_j \\ 0 & jinak \end{cases}$$

A zformulujeme lineární program:

$$\begin{aligned} \mathtt{min} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \\ \forall S_j, j \in \{1,..,m\} : \sum_{i=1}^{n} x_i s_{ij} \geq 1 \\ \forall S_j, j \in \{1,..,m\} : \sum_{i=1}^{n} x_i s_{ij} \leq \sum_{i=1}^{n} s_{ij} - 1 \end{aligned}$$

3. **Příklad 3:**

   Zavedeme pomocné proměnné a operace

$$\begin{aligned} X = (b_1, b_2) &\ \text{hledaný bod} \\ M_i = (x_i, y_i) &\ \text{místa výskytu viru} \\ M_{i1} = x_i,\ M_{i2} = y_i &\ \text{první a druhá složka } M_i \\ X - M_i = (b_1 - x_i, b_2 - y_i) &\ \text{vektorové odčítání} \end{aligned}$$

   Problém minimalizace průměrné vzdálenosti převedeme na ekvivalentí problém minimalizace součtu vzdáleností(poměrně triviláně minimalizujeme čitatel zlomku s konstantním jmenovatelem). A lineární program s účelovou funkcí v absolutní hodnotě:

$$min \sum_{i=1}^{n} \|X - M_i\| = min \sum_{i=1}^{n} |b_1 - M_{i1}| + |b_2 - M_{i2}| = min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2} |b_j - M_i j|$$

   Převedeme na následující lineární problém:

$$\begin{aligned} min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2} z_{ij}^{+} + z_{ij}^{-} \\ \forall i, j : z_{ij}^{+} - z_{ij}^{-} = b_j - M_{ij} \\ \forall i, j : z_{ij}^{+}, z_{ij}^{-} \geq 0 \end{aligned}$$

4. **Příklad 4:**

   Pokud si sumu rozepíšeme dostaneme:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n$$

   Zaměříme se nejprve na první člen sumy tedy $\alpha_1 X_1$ a dokážeme, že je konvexní.

   Násobení množiny X reálnou konstantou α je definováno:

$$\alpha X = \big\{ \alpha x : x \in X \big\}$$

Dosadíme do definice konvexity množiny pro αX a dokážeme konvexitu:

$$\textit{Množina X je konvexní pokud: } \forall x, y \in X : tx + (1-y)t \in X$$
$$t(\alpha x) + (1-t)\alpha y = \alpha tx + \alpha y - \alpha ty = \alpha(tx + (1-t)y) \in \alpha X$$

Tedy násobení konvexní množiny reálnou konstantou zachovává konvexitu.

Zbývá tedy ukázat že součet množin X_1, X_2 definovaný takto:

$$X_1 + X_2 = \left\{x_1 + x_2 : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\right\}$$

zachovává konvexitu.

Opět dosadíme do definice konvexity a dokážeme

$$\begin{aligned} t(x_1 + x_2) + (1-t)(y_1 + y_2) &= tx_1 + tx_2 + (1-t)y_1 + (1-t)y_2 = \\ &= tx_1 + (1-t)y_1 + tx_2 + (1-t)y_2 \in X_1 + X_2 \end{aligned}$$

Jelikož obě tyto operace konvexitu zachovávají, jistě $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ je konvexní pro libovolnou volbu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

5. **Příklad 5:**

Rovnicový popis nadroviny získáme například tak, že body napíšeme po řádkách do matice. Od prvních 3 řádků odečteme 4tý řádek a namísto čtvrtého řádku napíšeme neznámé koeficieny rovnice nadroviny. Spočtením determinantu této matice pak dostaneme hledané koeficienty a tedy i hledanou rovnici.

$$\mathbf{det}\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Longrightarrow \mathbf{det}\begin{vmatrix} -4 & -4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix}$$
$$\mathbf{det}\begin{vmatrix} -4 & -4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Dostáváme tedy rovnici nadroviny $4x_1 - 6x_2 + 8x_3 - 4x_4 = b$, dopočteme konstantu b z $\mathbf{v_4}$

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 4 \\ x_3 - 1 \\ x_4 \end{pmatrix} = 4x_1 - 4 - 6x_2 + 24 + 8x_3 - 8 - 4x_4$$
$$\textit{rovnice nadroviny: } 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 - 4x_4 = -12$$

Abychom rozhodli, zda je nardovina tečná, sečná nebo mimoběžná, dosadíme do rovnice body $\mathbf{v_5}$ a $\mathbf{v_6}$.

$$4*3 - 6*0 + 8*0 - 4*0 = 12 \Longrightarrow > -12$$
$$4*0 - 6*2 + 8*0 - 4*1 = -16 \Longrightarrow < -12$$

Tedy jde o sečnou nadrovinu vůčí danému mnohostěnu.