Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 10. cvičení*

21. dubna 2020

1 Dualita její aplikace

Mějme následující úlohu lineárního programování P s n proměnnými a m podmínkami:

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{P}$$

Té budeme říkat *primární lineární program* (neboli *primár*). Jeho *duálním lineárním programem* (neboli *duálem*) nazveme následující lineární program D s m proměnnými a n podmínkami:

$$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \text{ za podmínek } A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \text{ a } \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \tag{D}$$

Vysvětlení: při řešení P se snažíme najít lineární kombinaci m podmínek soustavy $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ s nějakými koeficienty $y_1, \ldots, y_m \geq 0$ takovými, aby výsledná nerovnost měla j-tý koeficient aspoň c_j pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ a pravá strana přitom byla co nejmenší.

Ukazuje se, že program D „hlídá“ program P podle následujícího výsledku, ze kterého například vidíme, že je-li P neomezený, pak D nemá přípustné řešení.

Věta 1 (Slabá věta o dualitě)**.** *Pro každé přípustné řešení* $\mathbf{x}$ *úlohy* P *a každé přípustné řešení* $\mathbf{y}$ *úlohy* D *platí* $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$.

Následující zesílení je asi nejdůležitějším teoretickým výsledkem o lineárních programech.

Věta 2 (Silná věta o dualitě)**.** *Pro úlohy* P *a* D *nastane právě jedna z následujících čtyř možností:*

(a) Ani P *ani* D *nemá přípustné řešení.*

(b) Úloha P *je neomezená a* D *nemá přípustné řešení.*

(c) Úloha P *nemá přípustné řešení a* D *je neomezená.*

(d) Úlohy P *i* D *mají přípustné řešení. Pak mají i optimální řešení* $\mathbf{x}^*$ *a* $\mathbf{y}^*$ *a platí* $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}^*$.

Duální lineární programy můžeme uvážit i pro lineární programy v obecném tvaru, stačí postupovat podle následující tabulky. Postup funguje zleva doprava i zprava doleva.

	Primární úloha	Duální úloha
Proměnné	$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$	$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$
Matice	$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$	$A^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}$
Pravá strana	$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$	$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$
Účelová funkce	$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$	$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$
Podmínky	i-tá podmínka má $\leq$	$y_i \geq 0$
	$\geq$	$y_i \leq 0$
	$=$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \geq 0$	j-tá podmínka má $\geq$
	$x_j \leq 0$	$\leq$
	$x_j \in \mathbb{R}$	$=$

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Příklad 1. *Sestrojte duální úlohu k lineární relaxaci úlohy* Nalezení minimálního vrcholového pokrytí *ve váženém grafu $G = (V, E, w)$, kde $w \colon V \to \mathbb{R}^+$. Pro připomenutí, tato relaxace vypadá následovně:*

$$\begin{aligned} \textit{Proměnné:} \quad & x_v \geq 0 \textit{ pro každé } v \in V \\ \textit{Účelová funkce:} \quad & \min \sum_{v \in V} w(v) x_v \\ \textit{Podmínky}: \quad & x_u + x_v \geq 1 \textit{ pro každé } \{u, v\} \in E \end{aligned}$$

Jaký problém řeší duální úloha pro jednotkové váhy?

Řešení. Nejprve převedeme primár do tvaru $\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned} \text{Proměnné:} \quad & x_v \geq 0 \text{ pro každé } v \in V \\ \text{Účelová funkce:} \quad & \max \sum_{v \in V} -w(v) x_v \\ \text{Podmínky}: \quad & -x_u - x_v \leq -1 \text{ pro každé } \{u, v\} \in E \end{aligned}$$

Poté vytvoříme duál (lze postupovat i podle tabulky zprava doleva bez předešlého předvodu).

$$\begin{aligned} \text{Proměnné:} \quad & y_e \geq 0 \text{ pro každé } e \in E \\ \text{Účelová funkce:} \quad & \min \sum_{e \in E} -y_e \\ \text{Podmínky}: \quad & \sum_{\{v,w\} \in E} -y_{\{v,w\}} \geq -w(v) \text{ pro každé } v \in V \end{aligned}$$

Po přepsání účelové funkce na maximum pak dostáváme

$$\begin{aligned} \text{Proměnné:} \quad & y_e \geq 0 \text{ pro každé } e \in E \\ \text{Účelová funkce:} \quad & \max \sum_{e \in E} y_e \\ \text{Podmínky}: \quad & \sum_{\{v,w\} \in E} y_{\{v,w\}} \leq w(v) \text{ pro každé } v \in V \end{aligned}$$

Duál je pro jednotkové váhy lineární relaxací problému maximálního párování, příčemž párování je graf maximálního stupně 1. To proto, že podmínky v duálu jsou poté ve tvaru $\sum_{\{v,w\} \in E} y_{\{v,w\}} \leq 1$ pro každé $v \in V$ a maximalizujeme součet $\sum_{e \in E} y_e$, což by v případě binárních proměnných odpovídalo výběrům co nejvíce hran, přičemž z každého vrcholu vede nanejvýš jedna vybraná hrana. Neboli pak chceme vyrat co nejvíce hran tvořících párování.

Zatímco problém nalezení minimálního vrcholového pokrytí je NP-úplný, problém nalezení maximálního párování v obecném grafu se dá řešit v polynomiálním čase pomocí kvítkového Edmonsova algoritmu („Blossom algorithm“). Podle Silné věty o dualitě se hodnoty optimálních řešení primáru a duálu rovnají. Nedokázali jsme tedy, že $P = NP$? Ne, protože duální k sobě jsou jen lineární relaxace problémů nalezení minimálního vrcholového pokrytí a relaxace problému nalezení maximálního párování. Trváme-li na celočíselnosti řešení, pak se může stát, že celočíselné optimum u úlohy nalezení minimálního vrcholového pokrytí je menší než celočíslené optimální řešení úlohy nalezení maximálního párování. Je-li ovšem graf G bipartitní, pak, jak snad ještě uvidíme, vždy existuje celočíselné optimální řešení a dostáváme tak důkaz Königovy–Egerváryho věty, která říká, že v bipartitiním grafu se velikost maximálního párování rovná velikosti minimálního vrcholového pokrytí. □

Síť je uspořádaná čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, neboli $E \subseteq V \times V$, z a s jsou dva různé vrcholy grafu G (zvané *zdroj* a *stok*) a *kapacita* $c \colon E \to \mathbb{R}_0^+$ je funkce ohodnocující hrany. *Tok v síti* je každá funkce $f \colon E \to \mathbb{R}$ splňující $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro každou hranu $e \in E$ a

$$\sum_{v:(u,v) \in E} f(u, v) = \sum_{v:(v,u) \in E} f(v, u)$$

pro každý vrchol $u \in V$ mimo stok a zdroj. *Velikost toku* je

$$w(f) = \sum_{v:(z,v)\in E} f(z,v) - \sum_{v:(v,z)\in E} f(v,z).$$

Řezem v síti je množina R hran vedoucích z množiny vrcholů Z do množiny vrcholů $S = V \setminus S$, kde $z \in Z$ a $s \in S$. *Kapacitou řezu* R je $\sum_{e\in R} c(e)$.

Příklad 2. *Uvažme následující úlohu lineárního programování pro problém* Nalezení maximálního toku *v síti* $(G = (V,E), z, s, c)$*:*

$$\begin{aligned}
\textit{Proměnné:}\quad & x_e \geq 0 \textit{ pro každé } e \in E\\
\textit{Účelová funkce:}\quad & \max x_{s,z}\\
\textit{Podmínky:}\quad & \sum_{u:(u,v)\in E} x_{u,v} - \sum_{u:(v,u)\in E} x_{v,u} = 0 \textit{ pro každé } v \in V\\
& x_e \leq c(e) \textit{ pro každé } e \in E
\end{aligned}$$

(V tomto programu jsme přidali hranu (s,z) *„nekonečně“ velké kapacity, čímž tok cirkuluje a program se tak zjednoduší uvedením podmínek Kirchhoffových zákonů i pro zdroj a stok).*

Sestrojte duál této úlohy a (*) nahlédněte, že odpovídá relaxaci úlohy Nalezení řezu minimální kapacity v síti.

Řešení. Podle tabulky je duálem následující úloha:

$$\begin{aligned}
\text{Proměnné:}\quad & y_v \in \mathbb{R} \text{ pro každé } v \in V \text{ a } y_e \geq 0 \text{ pro každé } e \in E\\
\text{Účelová funkce:}\quad & \min \sum_{e\in E} c(e) y_e\\
\text{Podmínky:}\quad & y_{u,v} + y_v - y_u \geq 0 \text{ pro každé } (u,v) \in E \setminus \{(s,z)\}\\
& y_{s,z} + y_z - y_s \geq 1
\end{aligned}$$

Dokážeme, že duál je relaxací úlohy *Nalezení minimálního řezu v síti.* V duálu proměnné y_e odpovídají hranám e, které vybereme do R, je-li $y_e > 0$, a proměnné y_v odpovídají vybraným vrcholům do Z, které vybereme, je-li $y_v > y_s$. Položme $S = V \setminus Z$. Podmínky $y_{u,v} + y_v - y_u \geq 0$, které jsou ekvivalentní s $y_{u,v} \geq y_u - y_v$, říkají, že je-li $u \in Z$ a $v \in S$, pak je $(u,v) \in R$. Tedy R obsahuje hrany jdoucí ze Z do S.

Nyní nahlédneme, že skutečně platí $z \in Z$ a $s \in S$. Podmínka $y_{s,z} + y_z - y_s \geq 1$ v naší interpretaci říká, že $z \in Z$ a $s \in S$, protože $c(s,z)$ je velmi velké a tedy z minimalizace je v optimu $y_{s,z} = 0$, což z podmínek dává $0 \geq y_s - y_z$, neboli $y_z \geq y_s$. Potom z $y_z - y_s \geq 1$ je nutně $y_z > y_s$, což znamená $z \in Z$, zatímco triviálně neplatí $y_s > y_s$ a tak $s \in S$.

Proměnné y_e a y_v tak skutečně určují rozdělení V na Z a S, kde $z \in Z$ a $s \in S$, přičemž hrany ze Z do S musí být v R, které tak obsahuje řez. Ještě ukážeme, že v optimálním řešení jsou v R skutečně jen hrany jdoucí ze Z do S a žádné navíc. Z minimalizace jsou hodnoty y_e co nejmenší a nezáporné, tedy $y_{u,v} = y_u - y_v$ pro $y_u > y_v$ a 0 jinak. Pokud $u,v \in Z$, pak volbou $y_u = y_v$ je $y_{u,v} = 0$ a podobně pro $u,v \in S$. Tedy z minimalizace mají všechny proměnné y_u s $u \in Z$ stejnou hodnotu y_z a y_u s $u \in S$ mají stejnou hodnotu y_s a v R skutečne leží jen hrany mezi Z do S. Hodnotu $y_{s,z} = y_z - y_s \geq 1$ chceme co nejmenší, což odpovídá volbě $y_{s,z} = 1$, speciálně $y_z > y_s$ a v R tak leží jen hrany směřující ze Z do S, protože hrany (u,v) z S do Z mají $y_u - y_v = y_s - y_z < 0$ a tak $y_{u,v} = 0$. Z tvaru účelové funkce je tak optimálním řešením duálu řez minimální kapacity.

Podle Silné věty o dualitě platí, že velikost maximálního toku se rovná „kapacitě minimálního řezu“, který vystoupí relaxace úlohy nalezení minimálního řezu. O tomto řešení ještě nevíme, zda musí být celočíselné a nedokážeme tedy ještě říct, že dává opravdový minimální řez. Později si snad ale ukážeme, že jsou-li kapacity v síti celočíselné, tak existuje optimální celočíselné řešení duálu. To nám potom podle Silné věty o dualitě nejen dokáže Hlavní větu o tocích (maximální velikost toku v síti se rovná kapacitě minimálního řezu), ale také větu o celočíslenosti (Jsou-li kapacity celočíselné, tak existuje celočíselný tok maximální velikosti.). □

Příklad 3. *(a) Uvažte následující lineární program pro neorientovaný graf $G = (V, E)$ a jeho vrcholy s a t:*

$$\begin{aligned} \textit{Proměnné:} \quad & x_v \geq 0 \textit{ pro každé } v \in V \\ \textit{Účelová funkce:} \quad & \max x_t \\ \textit{Podmínky:} \quad & x_s = 0 \\ & x_u - x_v \leq 1 \textit{ pro každé } \{u, v\} \in E \\ & x_v - x_u \leq 1 \textit{ pro každé } \{u, v\} \in E \end{aligned}$$

Nahlédněte, že řeší úlohu Nalezení délky nejkratší cesty *mezi vrcholy s a t v G. V účelové funkci je skutečně maximum, i když chceme nalézt nejkratší cestu.*

(b) Zkonstruujte duál k předešlé úloze. Jaký problém duál řeší?

Řešení. (a) Lineární program ze zadání nastaví nulu do x_s a poté zvyšuje hodnoty v dalších vrcholech podle jejich minimální vdálenosti od s. Představme si hodnotu proměnné x_v jako pozici, na reálné ose, na kterou umístíme vrchol v. Potom podmínky říkají, že za každou hranu $\{u, v\} \in E$ jsou vrcholy u a v umístěné ve vzdálenosti nanejvýš 1 od sebe. Maximalizujeme hodnotu $x_t \geq 0$, neboli chceme pozici vrcholu x_t dát co nejdál napravo od nuly. Nejvíce nás přitom limituje délka nejkratší cesty z s do t, protože za každou její hranu můžeme dát její vrcholy do vzdálenosti 1 na reálné ose, čímž vidíme, že x_t je shora odhadnuté délkou nejkratší cesty z s do t v G. Na druhou stranu existuje řešení $(x_v)_{v \in V}$, ve kterém je x_t rovné délce nejkratší cesty z s do t v G, stačí pro každé $v \in V$ nastavit x_v jako délku nejkratší cesty z s do v. Tedy x_t skutečně odpovídá délce nejkratší cesty z s do t v G.

(b) Z úlohy v zadání uděláme duál podle tabulky a dostaneme lineární program se dvěma proměnnými $y_{u,v}$ a $y_{v,u}$ za každou hranu $\{u, v\} \in E$ a jednou proměnnou y_s navíc za podmínku $x_s = 0$. V každém sloupci původní matice podmínek odpovídajícímu vrcholu $v \in V \setminus \{s, t\}$ jsou členy $+1$ za každou hranu $\{u, v\}$ v pořadí (u, v) a -1 za pořadí (v, u). Tento sloupec se v duálu stane řádkem a dá nám jednu podmínku. Pro vrchol t máme podobné sloupce a tedy i podmínky, jen na pravé straně je 1 namísto 0 kvůli původní účelové funkci. Pro vrchol s je ve soupci ještě navíc 1 za první původní podmínku, což se projeví na levé straně příslušné podmínky pro s v duálu. Konkrétně dostaneme následující lineární program:

$$\begin{aligned} \text{Proměnné:} \quad & y_{u,v}, y_{v,u} \geq 0 \text{ pro každé } \{u, v\} \in E \text{ a } y_s \in \mathbb{R} \\ \text{Účelová funkce:} \quad & \min \sum_{\{u,v\} \in E} (y_{u,v} + y_{v,u}) \\ \text{Podmínky:} \quad & - \sum_{\{u,v\} \in E} y_{u,v} + \sum_{\{v,u\} \in E} y_{v,u} \geq 0 \text{ pro každé } v \in V \setminus \{s, t\} \\ & - \sum_{\{u,t\} \in E} y_{u,t} + \sum_{\{t,u\} \in E} y_{t,u} \geq 1 \\ & y_s - \sum_{\{u,s\} \in E} y_{u,s} + \sum_{\{s,u\} \in E} y_{s,u} \geq 0 \end{aligned}$$

V duálu tedy hledáme minimální „tok“ v síti určené orientací grafu G, do které přidáme hrany v obou směrech za každou původní hranu. Chceme takový tok, aby ze stoku t odteklo o 1 víc, než do něj přiteklo, a z každého vrcholu odteklo aspoň tolik, kolik do něj přiteklo.

□