Lineární programování a kombinatorická optimalizace – 2. písemka

Pavel Mikuláš

16. května 2020

Příklad 1. *Převeďte úlohu na rovnicový tvar, formulujte pomocnou úlohu simplexové metody a s její pomocí nalezněte přípustné bazické řešení lineárního programu, nebo ukažte, že je program nepřípustný:*

$$\begin{aligned} \texttt{max}\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 - x_2 \le -2 \\ x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Převedeme úlohu na rovnicový tvar. Tedy všechny nerovnosti se zápornou pravou stranou vynásobíme -1 a přidáme potřebné pomocné proměnné.

$$\begin{aligned} \texttt{max}\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - s_1 = 2 \\ x_1 - x_2 + s_2 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Dále formulujeme pomocnou úlohu, kterou dále získáme přípustné bazické řešení pro původní úlohu. Ke každé podmínce přidáme novou proměnnou s kladným koeficientem a nové proměnné použijeme jako počáteční řešení minimalizační úlohy. U třetí rovnosti můžeme použít již vytvořenou pomocnou proměnnou, pouze ji přejmenujeme.

$$\begin{aligned} \texttt{min}\ x_4 + x_5 + x_6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - s_1 + x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_6 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, s_1 \ge 0 \end{aligned}$$

Vytvoříme si simplexovou tabulku s novými proměnnými v bázi, zároveň si úlohu převedeme na maximalizační, tedy koeficienty účelové funkce vynásobíme -1.

$$\begin{aligned}
&\texttt{max} - 11 + 3x_1 + 2x_2 + x_3 - s_1\\
x_4 &= 5 - x_1 - 2x_2 - x_3\\
x_5 &= 2 - x_1 - x_2 + s_1\\
x_6 &= 4 - x_1 + x_2\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, s_1 \geq 0
\end{aligned}$$

Použijeme Dantzigovo pravidlo a do báze vstoupíme x_1. A vystupuje x_5 jakožto proměnná s minimálním $\frac{-p_i}{Q_{i,1}}$. Simplexová tabulka tedy nyní vypadá takto:

$$\begin{aligned}
&\texttt{max} - 5 - x_2 + x_3 - 3x_5 + 2s_1\\
x_4 &= 3 - x_2 - x_3 + x_5 - s_1\\
x_1 &= 2 - x_2 - x_5 + s_1\\
x_6 &= 2 + 2x_2 + x_5 - s_1\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, s_1 \geq 0
\end{aligned}$$

Do báze vstoupíme s_1 a vystoupíme x_6.

$$\begin{aligned}
&\texttt{max} - 1 + 3x_2 + x_3 - x_5 - 2x_6\\
x_4 &= 1 - 3x_2 - x_3 + x_6\\
x_1 &= 4 + x_2 - x_6\\
s_1 &= 2 + 2x_2 + x_5 - x_6\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, s_1 \geq 0
\end{aligned}$$

Do báze vstoupíme x_2 a vystoupíme x_4.

$$\begin{aligned}
&\texttt{max} - x_4 - x_5 - x_6\\
x_2 &= \frac{1}{3} - \frac{x_3}{3} - \frac{x_4}{3} + \frac{x_6}{3}\\
x_1 &= \frac{13}{3} - \frac{x_3}{3} - \frac{x_4}{3} - \frac{2x_6}{3}\\
s_1 &= \frac{8}{3} - \frac{2x_3}{3} - \frac{2x_4}{3} + x_5 - \frac{x_6}{3}\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, s_1 \geq 0
\end{aligned}$$

Optimální hodnota je nekladná a není co zlepšovat. Máme tedy optimum v $(\frac{13}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{8}{3}, 0, 0, 0)$. A tedy i počáteční přípustné bazické řešení původní úlohy $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}, \mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}) = (\frac{13}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{8}{3}, 0)$.

Příklad 2. *Problém* Minimálního pokrytí grafu klikami *je zadán následovně. Pro daný neorientovaný graf $G = (V, E)$ s n vrcholy chceme vybrat co nejméně klik (úplných podgrafů grafu G) takových, že každý vrchol grafu G bude patřit do nějaké z vybraných klik.*

Dualizujte následující relaxovaný celočíselný program pro tento problém:

$$\begin{aligned}
\textit{Proměnné:}\quad & x_{v,k} \geq 0 \text{ a } x_k \geq 0 \text{ pro každé } v \in V \text{ a } k \in \{1,\dots,n\} \\
\textit{Účelová funkce:}\quad & \texttt{min} \sum_{k=1}^{n} x_k \\
\textit{Podmínky:}\quad & x_{u,k} + x_{v,k} \leq 1 \text{ pro každé } \{u,v\} \notin E \text{ a } k \in \{1,\dots,n\} \\
& \sum_{k=1}^{n} x_{v,k} \geq 1 \text{ pro každé } v \in V \\
& x_k \geq \frac{1}{n} \sum_{v \in V} x_{v,k} \text{ pro každé } k \in \{1,\dots,n\}
\end{aligned}$$

Nejprve převedeme primár do tvaru max $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

$$\begin{aligned}
\textit{Proměnné:}\quad & x_{v,k} \geq 0 \text{ a } x_k \geq 0 \text{ pro každé } v \in V \text{ a } k \in \{1,\dots,n\} \\
\textit{Účelová funkce:}\quad & \texttt{max} - \sum_{k=1}^{n} x_k \\
\textit{Podmínky:}\quad & x_{u,k} + x_{v,k} \leq 1 \text{ pro každé } \{u,v\} \notin E \text{ a } k \in \{1,\dots,n\} \\
& -\sum_{k=1}^{n} x_{v,k} \leq -1 \text{ pro každé } v \in V \\
& -x_k + \frac{1}{n} \sum_{v \in V} x_{v,k} \leq 0 \text{ pro každé } k \in \{1,\dots,n\}
\end{aligned}$$

Za každou podmínku zadefinujeme novou proměnnou, tedy:

$$\begin{aligned}
y_{u,v,k} \quad & \text{pro každé } \{u,v\} \notin E, k \in \{1,\dots,n\} \text{ za první podmínku} \\
y_v \quad & \text{pro každé } v \in V \text{ za druhou podmínku} \\
z_k \quad & \text{pro každé } k \in \{1,\dots,n\} \text{ za třetí podmínku}
\end{aligned}$$

Účelovou funkci získáme snadno, sečteme proměnné vzniklé z první nerovnosti vynásobené koeficientem 1 a proměnné z druhé nerovnosti s koeficientem -1. Proměnné z poslední nerovnosti se vynásobí koeficientem 0, tedy do účelové funkce nezasáhnou. Výsledná účelová funkce pak bude vypadat takto:

$$\texttt{min} \sum_{\substack{\{u,v\} \notin E, \\ k \in \{1,\dots,n\}}} y_{u,v,k} - \sum_{v \in V} y_v$$

Transpozicí matice podmínek pak snadno získáme i podmínky duálního programu. Pro z_k je ve sloupci vždy jedna hodnota -1 za x_k.

Pro druhou podmínku, tedy pro proměnné vzhledem k $v \in V$ a $k \in \{1, \ldots, n\}$ se ve sloupci za každý vrchol vyskytne 1 vždy, když je koncovým vrcholem nějaké nehrany. Dále pak nejvýše jednou -1 za daný vrchol a dané k, pokud vrchol náleží k-té klice. A nakonec $\frac{1}{n} z_k$ z poslední podmínky po zafixování k a v.

Můžeme tedy sepsat výsledný duální program, otočíme znaménka nerovnosti a na pravé straně použijeme cenový vektor primáru.

$$
\begin{aligned}
\textit{Proměnné:} \quad & y_{u,v,k} \geq 0, y_v \geq 0, z_k \geq 0 \textit{ pro každé } \{u,v\} \notin E, v \in V, k \in \{1, \ldots, n\} \\
\textit{Účelová funkce:} \quad & \texttt{min} \sum_{\substack{\{u,v\} \notin E, \\ k \in \{1,\ldots,n\}}} y_{u,v,k} - \sum_{v \in V} y_v \\
\textit{Podmínky:} \quad & -z_k \geq -1 \textit{ pro každé } k \in \{1, \ldots, n\} \\
& \sum_{\{u,v\} \notin E} y_{u,v,k} - y_v + \frac{1}{n} z_k \geq 0 \textit{ pro každé } v \in V \textit{ a } k \in \{1, \ldots, n\}
\end{aligned}
$$

Příklad 3. Uvažujme problém rozvrhování n vyučovaných předmětů s délkami $p_1, \ldots, p_n$ do tří učeben S1, S2, S3 s cílem minimalizovat délku výuky. Dualizujte následující relaxovaný celočíselný program pro tento problém:

$$
\begin{aligned}
\textit{Proměnné:} \quad & x \geq 0 \textit{ a } x_{i,k} \geq 0 \textit{ pro každé } i \in \{1, \ldots, n\} \textit{ a } k \in \{1, 2, 3\} \\
\textit{Účelová funkce:} \quad & \texttt{min}\, x \\
\textit{Podmínky:} \quad & x_{1,1} = 1 \\
& x_{i,1} + x_{i,2} + x_{i,3} = 1 \textit{ pro každé } i \in \{1, \ldots, n\} \\
& x \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_{i,1} \\
& x \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_{i,2} \\
& x \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_{i,3}
\end{aligned}
$$

Nejprve si program upravíme tak, že sjednotíme podmínky a převedeme proměnné na levou stranu:

$$
\begin{aligned}
\textit{Proměnné:} \quad & x \geq 0 \textit{ a } x_{i,k} \geq 0 \textit{ pro každé } i \in \{1, \ldots, n\} \textit{ a } k \in \{1, 2, 3\} \\
\textit{Účelová funkce:} \quad & \texttt{min}\, x \\
\textit{Podmínky:} \quad & x_{1,1} = 1 \\
& \sum_{k=1}^{3} x_{i,k} = 1 \textit{ pro každé } i \in \{1, \ldots, n\} \\
& x - \sum_{i=1}^{n} p_i x_{i,k} \geq 0 \textit{ pro každé } k \in \{1, 2, 3\}
\end{aligned}
$$

Z podmínek získáme nové proměnné:

$$\begin{aligned} y &\in \mathbb{R} && \textit{za první podmínku} \\ y_i &\in \mathbb{R} && \textit{pro každé } i \in \{1,\dots,n\} \textit{ za druhou podmínku} \\ z_k &\geq 0 && \textit{pro každé } k \in \{1,2,3\} \textit{ za třetí podmínku} \end{aligned}$$

Účelovou funkci snadno z pravé strany podmínek:

$$\texttt{max}\ y + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Podmínky pak transpozicí matice podmínek, budeme jen muset zvlášť ošetřit první podmínku. Sepíšeme tedy výsledný duální program:

$$\begin{aligned} \textit{Proměnné:}\quad & y \in \mathbb{R}\ ,\ y_i \in \mathbb{R},\ z_k \geq 0 \textit{ pro každé } i \in \{1,\dots,n\} \textit{ a } k \in \{1,2,3\} \\ \textit{Účelová funkce:}\quad & \texttt{max}\, y + \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \textit{Podmínky:}\quad & \sum_{k=1}^{3} z_k \leq 1 \\ & y + y_1 - p_1 z_1 \leq 0 \textit{ pro } i = 1, k = 1 \\ & y_i - p_i z_k \leq 0 \textit{ pro } i \neq 1 \textit{ nebo } k \neq 1, i \in \{1,\dots,n\}, k \in \{1,2,3\} \end{aligned}$$

Příklad 4. Pro zadanou úlohu lineárního programování nalezněte optimální řešení s využitím toho, že optimální řešení $\mathbf{y}^*$ duálního programu je $(2, 1, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} \texttt{min}\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 12x_4 & \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &\geq 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &\geq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &\geq 2 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 &\geq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Použijeme větu o komplementaritě. Nejprve získáme duál převodem podle tabulky:

$$\begin{aligned} \texttt{max}\ 4y_1 + 5y_2 + 2y_3 + y_4 & \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 &\leq 4 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + 3y_4 &\leq 3 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + 7y_4 &\leq 7 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 + 2y_4 &\leq 12 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Zjistíme které nerovnosti v duálu platí těsně:

$$\begin{aligned} 2 + 2 &= 4 \\ 2 + 1 &= 3 \\ 2 + 1 &\neq 7 \\ 4 + 3 &\neq 12 \end{aligned}$$

Vidíme, že třetí a čtvrtá nerovnost neplatí těsně, tedy z věty o komplementaritě $x_3 = 0$ a $x_4 = 0$. Zbylé dva odhady musí platit těsně, protože $y_1 \neq 0$ a $y_2 \neq 0$. Dosadíme tedy do soustavy rovnic a získáme optimální řešení $\mathbf{x}^*$ primáru.

$$\begin{aligned} I: \ x_1 + x_2 &= 4 \\ II: 2x_1 + x_2 &= 5 \\ II - I => x_1 &= 1 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Dostali jsme řešení $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}, \mathbf{x_4}) = (1, 3, 0, 0)$, které je podle věty o komplementaritě optimálním řešením primáru.