Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 8. cvičení*

7. dubna 2020

1 Simplexová metoda o něco podrobněji

Víme, že simplexová metoda se může zacyklit a pak nikdy neskončí. To nastává pouze v degenerovaném případě a je to jediný způsob, jak metoda může selhat. V praxi toto typicky nenastává a možnost zacyklení se často ignoruje. Jinak se zacyklení dá zabránit volbou vhodného pivotovacího pravidla, poslouží například Blandovo pravidlo.

Příklady pivotovacích pravidel pro výběr vstupující proměnné x_t a vystupující x_s:

1. *Dantzigovo pravidlo:* Vyber $t \in N$ s maximálním r_t a zvol x_s libovolně z možných proměnných.
2. *Blandovo pravidlo:* Vyber nejmenší možné $t \in N$ a pro něj nejmenší možné $s \in B$. Brání zacyklení, ale je pomalé.

Existuje spousta dalších pivotovacích pravidel (lexikografické, náhodné a další).

Efektivita simplexové metody: V praxi funguje velmi efektivně, podle počítačových experimentů u úloh v rovnicovém tvaru s m omezeními typicky stačí k nalezení optima $2m$ až $3m$ pivotovacích kroků. Není známé pivotovací pravidlo, pro které by se umělo ukázat, že simplexová metoda skončí v počtu kroků, který je polynomiální vzhledem k počtu omezení m a počtu proměnných n. Naopak pro spoustu pivotovacích pravidel existují příklady v rovnicovém tvaru s $O(n)$ omezeními a $O(n)$ proměnnými, pro které s určitou počáteční bází potřebuje simplexová metoda $2^{\Omega(n)}$ pivotovacích kroků. Tyto příklady jsou ovšem vzácné. Existuje pravděpodobnostní pivotovací pravidlo, pro nějž je známo, že simplexová metoda nad každou vstupní úlohou použije nanejvýš $e^{O(\sqrt{n \ln n})}$ pivotovacích kroků.

Příklad 1. *Vyřešte simplexovou metodou následující úlohu lineárního programování:*

$$\begin{aligned}
&\max 5x_1 - 19x_2 - 3x_3 - 4x_4 \\
&x_5 = -0.5x_1 + 2x_2 + 0.5x_3 - 4x_4 \\
&x_6 = -0.5x_1 + 4x_2 + 1x_3 - x_4 \\
&x_7 = 1 - x_1 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0.
\end{aligned}$$

Jako pivotovací pravidlo použijte Blandovo pravidlo. Změní se výpočet, pokud bychom používali Dantzigovo pravidlo?

Řešení. Zadání už je ve formě simplexové tabulky, kterou můžeme použít na začátek. Odpovídá přípustnému bázickému řešení $x_1 = \cdots = x_6 = 0$ a $x_7 = 1$, přičemž máme bázi $\{5, 6, 7\}$. Do báze nyní může vstoupit pouze x_1, ale s hodnotou 0, jedná se tedy o degenerovaný případ, který se případně může zacyklit a tedy se nám Blandovo pravidlo může hodit. Vystupující proměnná x_5 je určená jednoznačně Blandovým pravidlem, protože index 5 je menší než 6, což jsou dva indexy z báze, mezi kterými se rozhodujeme. Zde by Dantzigovo pravidlo vybralo vystupující proměnnou libovolně. Dostáváme následující simplexovou tabulku:

$$\begin{aligned}
&\max x_2 + 2x_3 - 44x_4 - 10x_5 \\
&x_1 = \quad 4x_2 + x_3 \quad - 8x_4 - 2x_5 \\
&x_6 = \quad 2x_2 + 0.5x_3 + 3x_4 + x_5 \\
&x_7 = 1 - 4x_2 - x_3 \quad + 8x_4 + 2x_5
\end{aligned}$$

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Podle Blandova pravidla do báze vstupuje x_2, protože máme na výběr z indexů 2 a 3 a $2 < 3$ (Dantzigovo pravidlo by zvolilo x_3). Vystupující proměnná x_7 je pak určená jednoznačně a dostáváme následující simplexovou tabulku:

$$\begin{aligned}
\max\ 0.25 + \frac{7}{4}x_3 - 42x_4 - 9.5x_5 - 0.25x_7 \\
x_1 &= 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - x_7 \\
x_6 &= 0.5 \qquad\qquad + 7x_4 + 2x_5 \quad - 0.5x_7 \\
x_2 &= 0.25 - 0.25x_3 + 2x_4 + 0.5x_5 - 0.25x_7
\end{aligned}$$

Nyní může do báze vstoupit jen x_3 a jednoznačně je určená i vystupující proměnná x_2. Dostáváme poslední simplexovou tabulku:

$$\begin{aligned}
\max\ 2 - 7x_2 - 28x_4 - 6x_5 - 2x_7 \\
x_1 &= 1 \qquad\qquad\qquad\qquad - x_7 \\
x_6 &= 0.5 \qquad + 7x_4 + 2x_5 - 0.5x_7 \\
x_3 &= 1 - 4x_2 + 8x_4 + 2x_5 - x_7
\end{aligned}$$

Jde tedy o optimální řešení $\mathbf{x} = (1, 0, 1, 0, 0, 1/2, 0)$ s hodnotou optima 2. Kdybychom ve druhém kroku místo Blandova pravidla použili Dantzigovo pravidlo, dostali bychom tabulku s optimálním řešením hned. □

Příklad 2. *Na následující úlohy lineárního programování aplikujte simplexovou metodu. V nějaké chvíli by již nemělo být možné pokračovat. Zkuste důvodnit, proč se algoritmus zastavil.*

(a) Optimalizujte funkci $\max 3x_1 + x_2$ *za podmínek*

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 &\le -1 \\
-x_1 - x_2 &\le -3 \\
2x_1 - x_2 &\le 2 \\
x_1, x_2 &\ge 0.
\end{aligned}$$

Po převodu do rovnicového tvaru můžete použít počáteční přípustné bázické řešení s $x_1 = 3$ *a* $x_2 = 4$.

(b) Optimalizujte funkci $\max 4x_1 + 5x_2 + 3x_3$ *za podmínek*

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 &\ge 20 \\
5x_1 + 6x_2 + 5x_3 &\le 50 \\
x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\le 30 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0.
\end{aligned}$$

Řešení. (a) Tato úloha, jak uvidíme, je neomezená. Dá se rovnou nahlédnout, že proměnná x_2 může být jakkoli vysoká. Přepíšeme si úlohu do rovnicového tvaru, čímž dostaneme úlohu

$$\begin{aligned}
\max\ 3x_1 + x_2 \\
x_1 - x_2 + s_1 &= -1 \\
x_1 + x_2 - s_2 &= 3 \\
2x_1 - x_2 + s_3 &= 2 \\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\ge 0.
\end{aligned}$$

Použijeme počáteční přípustné bázické řešení $x_1 = 3, x_2 = 4, s_1 = 0, s_2 = 4, s_3 = 0$ ze zadání a vytvoříme příslušnou simplexovou tabulku. Všimněte si, že musíme dosazovat za bázické proměnné na pravé straně, abychom dostali správný tvar tabulky.

$$\begin{aligned}
\max\ 9 - 3s_1 + s_2 \\
x_1 &= 3 - s_1 \\
x_2 &= 0 \qquad + s_2 \\
s_3 &= 0
\end{aligned}$$

Vstupující proměnná s_2 je jednoznačně určená, ale neodpovídá jí žádná vystupující proměnná (příslušný sloupec v simplexové tabulce je nezáporný). To, jak víme ze šestého cvičení, znamená, že účelová funkce je neomezená.

(b) Tato úloha, jak později uvidíme, nemá přípustné řešení. Připomeneme, jak podle postupu ze šestého cvičení najdeme počáteční bázické řešení úlohy P lineárního programování v rovnicovém tvaru, kde chceme najít max $\mathbf{c}^\top\mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, přičemž $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Předpokládáme, že $\operatorname{rank}(A) = m$. Přenásobíme soustavu, aby $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, a vyřeš simplexovou metodou pomocnou úlohu max $-x_{n+1} - \ldots - x_{n+m}$ za $\overline{A}\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$, $\overline{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$, kde $\overline{A} = (A \mid I_m) \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)}$ a $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_{n+m})$. Tato úloha má snadné počáteční řešení $(0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m)$. Pokud je optimální hodnota záporná, pak skončíme, protože neexistuje přípustné řešení pro P. Jinak je optimem $(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ a pak je $(x_1, \ldots, x_n)$ počátečním řešením pro P.

Proto nejdřív vytvoříme pomocnou úlohu podle návodu a dostaneme:

$$\begin{aligned}
\max\ & -s_1 - s_2 - s_3\\
x_1 + x_2 + 2x_3 - r_1 + s_1 &= 20\\
5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + r_2 + s_2 &= 50\\
x_1 + 3x_2 + 5x_3 + r_3 + s_3 &= 30\\
x_1, x_2, x_3, r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3 &\geq 0,
\end{aligned}$$

přičemž nejdříve jsme převedli úlohu na rovnicový tvar přidáním proměnných $r_1, r_2, r_3 \geq 0$. Zvolíme počáteční přípustné bázické řešení $x_1 = x_2 = x_3 = 0 = r_1 = r_2 = r_3, s_1 = 20, s_2 = 50, s_3 = 30$ a pro bázické proměnné s_1, s_2, s_3 vytvoříme počáteční simplexovou tabulku:

$$\begin{aligned}
\max\ & -100 + 7x_1 + 10x_2 + 12x_3 - r_1 + r_2 + r_3\\
s_1 &= 20 - x_1 - x_2 - 2x_3 + r_1\\
s_2 &= 50 - 5x_1 - 6x_2 - 5x_3 - r_2\\
s_3 &= 30 - x_1 - 3x_2 - 5x_3 - r_3.
\end{aligned}$$

Podle Dantzigova pravidla do báze vstupuje x_3 a vystupuje s_3. Dostáváme novou simplexovou tabulku:

$$\begin{aligned}
\max\ & -28 + \frac{23x_1}{5} + \frac{14x_2}{5} - \frac{12s_3}{5} - r_1 + r_2 - \frac{7r_3}{5}\\
s_1 &= 8 - \frac{3x_1}{5} + \frac{x_2}{5} + \frac{2s_3}{5} + \frac{2r_3}{5} + r_1\\
s_2 &= 20 - 4x_1 - 3x_2 + s_3 + r_3 - r_2\\
x_3 &= 6 - \frac{x_1}{5} - \frac{3x_2}{5} - \frac{s_3}{5} - \frac{r_3}{5}
\end{aligned}$$

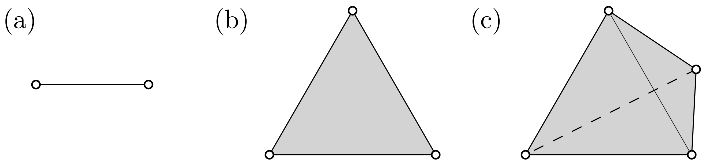
Dál vstupuje x_1 a vystupuje s_2. Dostáváme

$$\begin{aligned}
\max\ & -5 - \frac{13x_2}{20} - \frac{25s_3}{20} - \frac{23s_2}{20} - r_1 - \frac{3r_2}{20} - \frac{r_3}{4}\\
s_1 &= 5 + \frac{13x_2}{20} + \frac{s_3}{4} + \frac{3s_2}{20} + \frac{r_3}{4} + r_1 + \frac{3r_2}{20}\\
x_1 &= 5 - \frac{3x_2}{4} + \frac{s_3}{4} - \frac{s_2}{4} + \frac{r_3}{4} - \frac{r_2}{4}\\
x_3 &= 5 - \frac{9x_2}{20} + \frac{x_2}{20} - \frac{s_3}{4} - \frac{r_3}{4} + \frac{r_2}{20}
\end{aligned}$$

Tím jsme našli optimum $x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = 5, s_1 = 5$, $s_2 = s_3 = 0 = r_1 = r_2 = r_3$ s hodnotou -5. Protože je hodnota záporná, tak původní úloha nemá přípustné řešení.

□

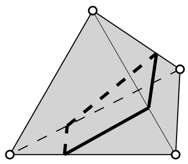
Příklad 3. *Pro přirozené d mějme d-dimenzionální simplex $S \subseteq \mathbb{R}^d$, neboli konvexní obal $d+1$ afinně nezávislých bodů v $\mathbb{R}^d$. Existuje nadrovina taková, že průnik ani jednoho jí určeného uzavřeného poloprostoru s S není simplex (libovolné dimenze)?*



Obrázek 1: Příklady d-dimenzionálních simplexů pro (a) $d = 1$, (b) $d = 2$ a (c) $d = 3$.

Řešení. Záleží na dimenzi d. Pro $d \leq 2$ taková nadrovina neexistuje, což jde rozmyslet snadným rozborem případů. Pro $d \geq 3$ pak ale takovou nadrovinu najdeme. Chceme nadrovinu, která neobsahuje vrcholy simplexu a která má na každé své straně alespoň 2 vrcholy. Graf odpovídající hranám a vrcholům simplexu je úplný graf na $d + 1$ vrcholech a my hledáme nadrovinu, která v tomto grafu určí řez velikosti větší než d (průniky hran simplexu s nadrovinou určí vrcholy a my tak opět dostaneme graf), což pak nemůže odpovídat simplexu, protože leží na nadrovině a musí mít dimenzi nanejvýš $d - 1$ a tedy i nanejvýš d vrcholů. V grafu K_{d+1} jsou totiž řezy velikosti d pouze řezy odpovídající množině hran vedoucí z vrcholu. Protože průnik simplexu S s každým poloprostorem dané nadroviny má jako stěnu tento mnohostěn ležící na dané nadrovině, tak tento průnik není simplexem, jelikož každá stěna simplexu je opět simplexem.

Příklad takové nadroviny pro $d = 3$ je na obrázku.



Obrázek 2: Příklady hledané nadroviny pro $d = 3$.

Formálně pro $S = \operatorname{conv}(\{(0, \ldots, 0), (1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}) \subseteq \mathbb{R}^d$ stačí uvážit nadrovinu

$$\{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \colon x_1 + x_2 = 1/2\}.$$

Ta má pro $d \geq 3$ v každém ze svých poloprostorů aspoň dva vrcholy simplexu S. □