Lineární programování a kombinatorická optimalizace – 2. teoretický úkol

Pavel Mikuláš

10. května 2020

Příklad 1. *Franta uhodl přípustné řešení* $\mathbf{x} = (6, 2, 0)$ *následujícího lineárního programu:*

$$\begin{aligned} \texttt{max}\ x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 14 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 28 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\leq 30 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Rozhodněte za pomoci komplementarity, zda Franta uhodl optimální řešení.

Nejprve vytvoříme duál k zadanému lineárnímu programu:

$$\begin{aligned} \texttt{min}\ 14y_1 + 28y_2 + 30y_3 \\ 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 &\geq 1 \\ y_1 + 2y_2 + 5y_3 &\geq 2 \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 &\geq -1 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Z komplementarity vidíme, že 1. a 2. nerovnost v duálu musí být těsná, protože $x_1 \neq 0$ a $x_2 \neq 0$.
Dosadíme navrhované přípustné řešení do podmínek primáru, abychom zjistili, které nerovnosti jsou těsné.

$$\begin{aligned} 2 * 6 + 2 + 0 &= 14 \\ 4 * 6 + 2 * 2 + 0 &= 28 \\ 2 * 6 + 5 * 2 + 0 &= 22 \end{aligned}$$

Vidíme, že 1. a 2. nerovnost je splněna těsně, tedy $y_1 \neq 0$ a $y_2 \neq 0$ a $y_3 = 0$.
Z prvních dvou nerovností duálu spočteme y_1, y_2 a ověříme zda (y_1, y_2, y_3) je přípustné řešení.

$$\begin{aligned} 2y_1 + 4y_2 &= 1 \\ y_1 + 2y_2 &= 2 \end{aligned}$$

Tato soustava rovnic nemá řešení. Tedy první dvě nerovnosti nelze splnit těsně za předpokladu, že $y_3 = 0$. Jsme tedy ve sporu s větou o komplementaritě a tudíž $\mathbf{x} = (6, 2, 0)$ nemůže být optimem primáru.

Příklad 2. *Vezměme si sloupcový vektor* $\mathbf{v} \in \{0,1\}^n$*. Řekneme, že* $\mathbf{v}$ *je intervalový, pokud má* $\mathbf{v}$ *hodnoty* 1 *za sebou v právě jednom souvislém intervalu (případně i nulové délky). Matice* M *je intervalová, pokud všechny její sloupce jsou intervalové vektory.*

(a) *Buď* $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ *matice taková, že pro každou její podmatici* $A^{'} \in \mathbb{Z}^{k \times k}$ *existuje unimodulární matice* $B \in \mathbb{Z}^{k \times k}$ *taková, že* $BA^{'}$ *je singulární nebo unimodulární. Dokažte, že* A *je totálně unimodulární.*

Důkaz: Z vlastností determinantu víme, že $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$ pro libovolné matice A,B řádu n a $\det(A) = 0$ pokud A je singulární.
Matice B je regulární, protože z unimodularity má nenulový determinant. Pokud $BA^{'}$ je singulární, pak $A^{'}$ musí být singulární a tedy $\det(A^{'}) = 0$.
Jinak je $BA^{'}$ unimodulární, tedy $\det(BA^{'}) \in \{-1, 1\}$. Jelikož $\det(B) \in \{-1, 1\}$ pak nutně i $\det(A^{'}) \in \{-1, 1\}$.
Pro všechny čtvercové podmatice $A^{'}$ matice A tedy platí $\det(A^{'}) \in \{-1, 0, 1\}$ a tedy matice A je *totálně unimodulární.*

⊠

(b) *Dokažte, že každá intervalová matice* M *je totálně unimodulární.*

Důkaz: Zadefinujeme si matici D tak, že od i-tého řádku vždy odečteme i+1-ní řádek a poslední řádek zachováme, formálně:

$$\textit{Pro podmatici } M^{'k \times k} \textit{ matice } M^{m \times n} \textit{ definujeme } D^{k \times k}$$

$$D_{r,s} = \begin{cases} M^{'}_{r,s} - M^{'}_{r+1,s} & \textit{pokud } r + 1 \leq k \\ M^{'}_{r,s} & \textit{jinak} \end{cases}$$

Z vlastností determinantu se odečtením jedné řádky od druhé nezmění, tedy $\det(M^{'}) = \det(D)$ pro každou čtvercovou podmatici matice M.
Nahlédneme, že takto zadefinovaná matice má v každém sloupci nejvýše dva nenulové prvky, jelikož je matice intervalová. Tedy každý sloupec bude mít nenulovou hodnotu pouze na místech, kde začíná a končí sekvence jedniček. Pokud tato sekvence začíná na začátku sloupce, v matici bude pouze jedna nenulová hodnota a to 1 na místě, kde sekvence končí, popř. na konci pokud jsou ve sloupci samé jedničky. Pokud je sloupec $M^{'}$ nulový, bude nulový i sloupec v D.
Podle Věta 9.3 z přednášky je matice D *totálně unimodulární*, tedy každá čtverová podmatice $M^{'}$ matice M je *totálně unimodulární* a tedy i matice M je *totálně unimodulární.*

⊠