Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 11. cvičení*

28. dubna 2020

1 Komplementarita

Věta 1 (Věta o komplementaritě)**.** *Mějme úlohu lineárního programování P a její duál D v následující formě:*

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}, A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \tag{P}$$

$$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}, A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \tag{D}$$

Mějme přípustná řešení $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{y}^*$ pro P a D a označme jako $A_{j,i}$ prvek matice A na pozici (j,i). Pak $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{y}^*$ jsou optimálními řešeními úloh P a D právě tehdy, když platí následující dva vztahy

$$x_i = 0 \text{ nebo } \sum_{j=1}^{m} A_{j,i} y_j = c_j \text{ pro každé } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ a}$$

$$y_j = 0 \text{ nebo } \sum_{i=1}^{n} A_{j,i} x_i = b_i \text{ pro každé } j \in \{1, \ldots, m\}.$$

První vztah říká, že pro každé i je buď i-tá proměnná primáru nulová nebo je i-tá podmínka duálu *těsná*. Druhý vztah analogicky říká, že pro každé j je buď j-tá proměnná duálu nulová nebo je j-tá podmínka primáru těsná. Tento výsledek nám pomůže ověřovat optimalitu řešení či například určovat optima duálu z optim primáru.

Příklad (Řešený příklad)**.** *Mějme následující primár P a duál D:*

$$\begin{aligned} \max 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4& \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &\leq 12 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\leq 7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned} \tag{P}$$

a

$$\begin{aligned} \min 12y_1 + 7y_2 + 10y_3& \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 &\geq 2 \\ y_1 - 3y_2 + y_3 &\geq 4 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 &\geq 3 \\ 4y_1 + 3y_2 - y_3 &\geq 1 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{D}$$

Buď $\mathbf{x}^* = \left(0, \frac{52}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$ optimem v P. Určete optimum v D.

Řešení. Pode Věty o komplementaritě jsou 2. a 4. nerovnost v D splněny těsně, protože $x_2 \neq 0$ a $x_4 \neq 0$. V primáru P po dosazení hodnot $\mathbf{x}^*$ vidíme, že 2. nerovnost v P není těsná a podle Věty o komplementaritě tedy máme $y_2 = 0$. Dosazením $y_2 = 0$ do 2. a 4. nerovnosti v D zapsaných s rovností dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} y_1 + y_3 &= 4 \\ 4y_1 - y_3 &= 1, \end{aligned}$$

jejíž řešení $\mathbf{y}^* = (1, 0, 3)$ je přípustné pro D a tedy je optimem v D. □

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Příklad 1. *Optimálním řešením duální úlohy D k následující úloze P je* $\mathbf{y}^* = \left(0, 7, \frac{11}{2}, 0\right)$.

$$\begin{aligned} \max 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 & \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 &\le 12 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\le -1 \\ 2x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 + x_3 &\le 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned} \tag{P}$$

(a) Spočtěte pomocí komplementarity optimální řešení primáru P.

(b) Nalezněte vektory $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ *a* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$*, které splňují oba vztahy z Věty o komplementaritě, ale ani* $\mathbf{x}$ *a ani* $\mathbf{y}$ *nejsou optimálními řešeními pro P a D.*

Řešení. (a) Standardním převodem dostaneme následující duální úlohu D:

$$\begin{aligned} \min 12y_1 - y_2 + 4y_3 + 4y_4 & \\ 5y_1 - y_2 + 2y_3 + y_4 &\ge 4 \\ y_1 - y_2 + y_3 &\ge -2 \\ -2y_1 + y_2 + y_4 &\ge 7 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\ge 0 \end{aligned} \tag{D}$$

Druhá nerovnost v D není pro $\mathbf{y}^*$ těsná. Podle Věty o komplementaritě tedy v optimálním řešení $\mathbf{x}^* = (x_1, x_2, x_3)$ úlohy P platí $x_2 = 0$. Dále z této věty plyne, že druhá a třetí nerovnost v P musejí být pro $\mathbf{x}^*$ těsné, protože druhá ani třetí souřadnice v $\mathbf{y}^*$ není nulová. Optimální řešení $\mathbf{x}^*$ tak určíme vyřešením soustavy

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 &= 4, \end{aligned}$$

která má řešení $\mathbf{x}^* = (2, 0, 1)$, které je nezáporné a tedy přípustné. Řešení $\mathbf{x}^*$ je tedy optimálním řešením pro P.

(b) Narozdíl od Věty o komplementaritě nevyžadujeme přípustnost $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$. Takže za $\mathbf{x}$ stačí vzít $(0, 0, -1)$ a za $\mathbf{y}$ vzít $(0, 7, 0, 0)$. Pak $\mathbf{x}$ není přípustným řešením pro P, protože má zápornou souřadnici. Tím nemůže být ani optimálním řešením pro P. Jediná nenulová souřadnice v $\mathbf{x}$ je x_3, ale třetí nerovnost v D platí pro $\mathbf{y}$ s rovností. Podobně jediná nenulová souřadnice v $\mathbf{y}$ je y_2, ale druhá nerovnost v P platí pro $\mathbf{x}$ s rovností. Podmínky komplementarity jsou tedy splněny. □

Příklad 2. *Mějme následující zadání duálu D úlohy P:*

$$\begin{aligned} \max 3y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 4y_4 & \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 &\le 5 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + 3y_4 &= 3 \\ y_1 + y_2 + y_3 &\ge 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\ge 0 \end{aligned} \tag{D}$$

Přípustným řešením primáru P je $\mathbf{x}' = (4, 0, -1)$. *Je toto řešení primáru optimem v P?*

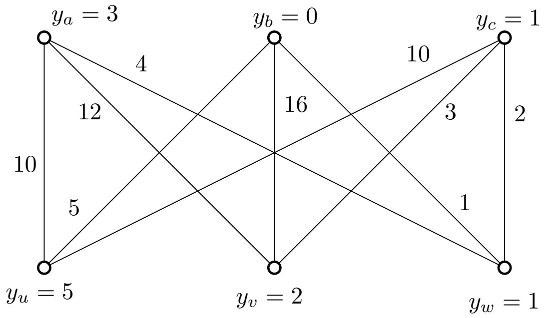
Řešení. Upravíme duál na vhodný tvar D' a zdualizujeme jej, čímž obdržíme primár P'.

$$\begin{aligned} \min -3y_1 - 3y_2 - 6y_3 - 4y_4 & \\ -y_1 - 2y_2 - 3y_3 - y_4 &\ge -5 \\ -y_1 - y_2 - 2y_3 - 3y_4 &\ge -3 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + 3y_4 &\ge 3 \\ y_1 + y_2 + y_3 &\ge 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\ge 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max -5x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 & \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &\le -3 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &\le -3 \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 &\le -6 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 &\le -4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0. \end{aligned}$$

V nově zapsaném primáru P' odpovídají proměnné x_2 a x_3 původní proměnné $x'_2 = x_2 - x_3$ podle převodu reálné proměnné na nezáporné (rovnost v D odpovídá reálné proměnné v P). Protože $x'_2 = 0$, tak $x_2 = x_3 = 0$. Zbytek proměnných si odpovídá a máme $x_1 = x'_1 = 4$ a $x_4 = x'_3 = -1$.

Po dosazení $\mathbf{x}'$ do primáru P' vidíme, že těsná je v P' pouze čtvrtá nerovnost, u ostatních nerovností dostáváme volnosti $-2, -6, -7$. Podle Věty o komplementaritě potřebujeme najít řešení duálu D', které je těsné v 1. nerovici (protože $x_1 \neq 0$) a může mít jako nenulovou souřadnici pouze y_4 (protože tesná je v P' pouze čtvrtá nerovnost). Tedy $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ a $y_4 = 5$. To ale nesplňuje 2. nerovnost v D', takže $(4, 0, 0, -1)$ není optimálním řešením primární úlohy P'. To znamená, že $\mathbf{x}' = (4, 0, -1)$ není optimálním řešením primární úlohy P. $\square$

Příklad 3. *Na obrázku je bipartitní graf, který má u hran napsané ceny a u vrcholů řešení duálního programu k perfektnímu párování maximální ceny. Dokažte, že toto řešení je optimální.*



Řešení. Pro připomenutí: z minulého cvičení víme, že relaxace lineárního programu pro nalezení maximálního váženého párování vypadá následovně:

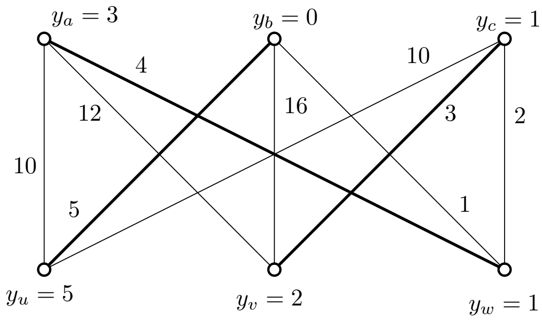
$$\begin{aligned} \text{Proměnné:} \quad & x_e \geq 0 \text{ pro každé } e \in E \\ \text{Účelová funkce:} \quad & \max \sum_{e \in E} w_e \cdot x_e \\ \text{Podmínky :} \quad & \sum_{\{v,w\} \in E} x_{\{v,w\}} \leq 1 \text{ pro každé } v \in V. \end{aligned}$$

Duálem této relaxace je relaxace úlohy nalezení minimálního vrcholového pokrytí s váženými hranami (vrcholovému pokrytí řešení odpovídá pro jednotkové váhy w_i):

$$\begin{aligned} \text{Proměnné:} \quad & y_v \geq 0 \text{ pro každé } v \in V \\ \text{Účelová funkce:} \quad & \min \sum_{v \in V} y_v \\ \text{Podmínky :} \quad & y_u + y_v \geq w_{\{u,v\}} \text{ pro každé } \{u, v\} \in E. \end{aligned}$$

Celočíselné řešení primáru skutečně odpovídá perfektnímu párování, stačí vzít párování tvořené hranami e s $x_e > 0$.

Máme-li párování (neboli přípustné řešení primáru) a k němu přípustné řešení $\mathbf{y}$ duálu, které splňují podmínky komplementarity, pak podle Věty o komplementaritě se jedná o dvojici optimálních řešení. Stačí tedy najít párování, které s uvedeným řešením $\mathbf{y}$ za zadání splňuje podmínky komplementarity. Tyto podmínky nám zde říkají, že pokud je $y_v \neq 0$, pak je vrchol v obsažen v nějaké hraně párování párování, a pokud $x_{\{u,v\}} \neq 0$ (tedy hrana $\{u, v\}$ je v párování), pak $y_u + y_v = w_{\{u,v\}}$. První podmínka je splněna v každém perfektním párování a druhá podmínka je splněna, vezmeme-li párování tvořené hranami $\{u, v\}$ s $y_u + y_v = w_{\{u,v\}}$. Takové perfektní párování je na obrázku. Řešení $\mathbf{y}$ ze zadání je tedy optimální. $\square$



$y_a = 3$
$y_b = 0$
$y_c = 1$
4
10
12
16
3
2
10
5
1
$y_u = 5$
$y_v = 2$
$y_w = 1$