Základy kombinatorické a výpočetní geometrie

Pavel Mikuláš

5.10.2020

1 Příklad 1

Najděte příklad 4 konvexních množin v rovině takových, že průnik libovolých 3 z nich obsahuje úsečku délky 1, ale průnik všech 4 úsečku délky 1 neobsahuje.

$$M_1 = \{(x,y); x \in [0,2], y \in [0,1]\} \qquad M_2 = \{(x,y); x \in [0,1], y \in [0,2]\}$$
$$M_3 = \{(x,y); x \in [1,2], y \in [0,2]\} \qquad M_4 = \{(x,y); x \in [0,2], y \in [1,2]\}$$

$$\begin{aligned} M_1 \cap M_2 \cap M_3 &= \{(x,y), x = 1, y \in [0,1]\} \\ M_1 \cap M_2 \cap M_4 &= \{(x,y), x \in [0,1], y = 1\} \\ M_1 \cap M_3 \cap M_4 &= \{(x,y), x \in [1,2], y = 1\} \\ M_2 \cap M_3 \cap M_4 &= \{(x,y), x = 1, y \in [1,2]\} \\ M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 &= \{(x,y) = (1,1)\} \end{aligned}$$

Vidíme, že všechny průniky 3 množin obsahují jednotkovou úsečku, v tomto případě uzavřený interval délky 1. Ovšem průnik všech 4 množin obsahuje pouze jediný bod, a to $(x,y) = (1,1)$.

2 Příklad 2

Najděte příklad množiny $M \subset \mathbb{R}^2$, která je uzavřená, ale jejíž konvexní obal uzavřený není.

$$M = \left\{(x,y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \geq \frac{1}{1+x^2}\right\}$$

Tato množina je díky ostré nerovnosti uzavřená. Dále víme, že:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Konvexní obal $conv(M)$ množiny M je poté $\{(x,y), x \in \mathbb{R}, y > 0\}$. Protože funkce $\frac{1}{1+x^2}$ je symetrická podle osy y a v obou směrech se funkce blíží 0 musí podle konvexity $conv(M)$ obsahovat všechny body na přímce $y = \epsilon$ pro každé $\epsilon > 0$. Pokud by ale nerovnost u y platila ostře, dostaneme se do sporu s minimalitou $conv(M)$. Dostáváme tedy $conv(M) = \{(x,y), x \in \mathbb{R}, y > 0\}$, což je otevřená množina.

3 Příklad 3

Najděte dvě neprázdné disjunktní uzavřené konvexní množiny v rovině, které od sebe nejde ostře oddělit přímkou. Přímka p ostře odděluje množiny C a D, pokud C a D leží v opačných otevřených polorovinách určených přímkou p.

Chceme tedy ukázat, že požadavek na kompaktnost jedné z množin je nutný pro platnost věty o oddělování nadrovinou. Definujeme množiny.

$$C = \{(x, y), x \leq 0, y \in \mathbb{R}\} \qquad D = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \,|\, y \leq \log x\}$$

Množiny C a D jsou uzavřené díky ostrým nerovnostem. Množina C je konvexní triviálně, množina D potom protože *log* je konkávní funkce. Jelikož $\lim_{x\to 0} \log x = -\infty$ je jedinou přímkou oddělující tyto dvě množiny přímka $x = 0$. Ovšem přímka $x = 0$ leží v množině C podle její definice. Tedy C leží v uzavřené polorovině určené přímkou $x = 0$, nikoliv však v otevřené. A tedy neexistuje přímka p ostře oddělující množiny C a D, tedy množiny C a D nelze ostře oddělit přímkou.