Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 9. cvičení*

14. dubna 2020

1 Dualita

Mějme následující úlohu lineárního programování P s n proměnnými a m podmínkami:

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \le \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{x} \ge \mathbf{0}. \tag{P}$$

Té budeme říkat *primární lineární program* (neboli *primár*). Jeho *duálním lineárním programem* (neboli *duálem*) nazveme následující lineární program D s m proměnnými a n podmínkami:

$$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \text{ za podmínek } A^\top \mathbf{y} \ge \mathbf{c} \text{ a } \mathbf{y} \ge \mathbf{0}. \tag{D}$$

Vysvětlení: při řešení P se snažíme najít lineární kombinaci m podmínek soustavy $A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$ s nějakými koeficienty $y_1, \dots, y_m \ge 0$ takovými, aby výsledná nerovnost měla j-tý koeficient aspoň c_j pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ a pravá strana přitom byla co nejmenší.

Ukazuje se, že program D „hlídá“ program P podle následujícího výsledku, ze kterého například vidíme, že je-li P neomezený, pak D nemá přípustné řešení.

Věta 1 (Slabá věta o dualitě)**.** *Pro každé přípustné řešení* $\mathbf{x}$ *úlohy* P *a každé přípustné řešení* $\mathbf{y}$ *úlohy* D *platí* $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \le \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$.

Následující zesílení je asi nejdůležitějším teoretickým výsledkem o lineárních programech.

Věta 2 (Silná věta o dualitě)**.** *Pro úlohy* P *a* D *nastane právě jedna z následujících čtyř možností:*

(a) Ani P *ani* D *nemá přípustné řešení.*

(b) Úloha P *je neomezená a* D *nemá přípustné řešení.*

(c) Úloha P *nemá přípustné řešení a* D *je neomezená.*

(d) Úlohy P *i* D *mají přípustné řešení. Pak mají i optímální řešení* $\mathbf{x}^*$ *a* $\mathbf{y}^*$ *a platí* $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}^*$.

Duální lineární programy můžeme uvážit i pro lineární programy v obecném tvaru, stačí postupovat podle následující tabulky. Postup funguje zleva doprava i zprava doleva.

	Primární úloha	Duální úloha
Proměnné	$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$	$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$
Matice	$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$	$A^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}$
Pravá strana	$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$	$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$
Účelová funkce	$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$	$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$
Podmínky	i-tá podmínka má $\le$	$y_i \ge 0$
	$\ge$	$y_i \le 0$
	$=$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \ge 0$	j-tá podmínka má $\ge$
	$x_j \le 0$	$\le$
	$x_j \in \mathbb{R}$	$=$

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Příklad 1. *Vytvořte duální program D pro následující primární lineární program P:*

$$\begin{aligned} \max 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Řešení. Můžeme postupovat přímo podle návodu v tabulce, ale ukážeme si nejdřív motivaci, odkud se dualita vzala. Konkrétně uvedeme motivaci duality jako počítání horních odhadů na maximální hodnotu účelové funkce. Našim cílem v P je najít maximum. Běžný způsob hledání maxima je hledání přípustných řešení $\mathbf{x}$ pro P, pro která je hodnota $\mathbf{c}^\top\mathbf{x}$ co nejvyšší. Stejně tak bychom ale mohli hledat „horní odhady" na hodnotu maxima, tedy hledat číslo u takové, že pro každé přípustné řešení $\mathbf{x}$ pro P platí $\mathbf{c}^\top\mathbf{x} \leq u$.

Odhadneme-li hodnotu účelové funkce dvojnásobkem první nerovnosti, dostaneme

$$\mathbf{c}^\top\mathbf{x} = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 2(5x_1 + 2x_2 + x_3) \leq 2 \cdot 5 = 10.$$

Tedy každé přípustné řešení $\mathbf{x}$, včetně optima, v účelové funkci dává hodnotu nanejvýš deset. Z druhých dvou rovnic podobným postupem přímo nic nezískáme, ale pokud bychom sečetli všechny tři nerovnosti, tak dostaneme

$$\mathbf{c}^\top\mathbf{x} = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 = (5x_1 + 2x_2 + x_3) + (x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) \leq 5 + 2 + 2 = 9,$$

čili lepší horní odhad. Uvážením všech možných lineárních kombinací nerovnic s nezápornými koeficienty můžeme podobně dostat lepší a lepší odhady (koeficienty musí být neáporné, jinak bychom otočili příslušnou nerovnost a už bychom ji nemohli sečíst s ostatními). Cílem je najít koeficienty k rovnicím, aby horní odhad byl co nejmenší, přičemž podmínkou je, aby hodnota $\mathbf{c}^\top\mathbf{x}$ byla vždy nanejvýš náš součet nerovnic. Pokud naši podmínku vyjádříme po složkách, tak součet koeficientů u x_i přes všchny nerovnice musí být aspoň c_i. To odpovídá řešení duálu.

Když naši úvahu napíšeme formálně, dostáváme tentýž duál D, který by nám dal postup podle tabulky:

$$\begin{aligned} \min 5y_1 + 2y_2 + 2y_3 & \\ 5y_1 + 1y_2 &\geq 6 \\ 2y_1 + 1y_2 + 1y_3 &\geq 4 \\ 1y_1 + 1y_3 &\geq 2 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

□

Příklad 2. *Vytvořte duální program D pro následující primární lineární program P:*

$$\begin{aligned} \max x_1 - 2x_2 + 3x_4 & \\ x_2 - 6x_3 + x_4 &\leq 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 &\geq 5 \\ x_2 &\leq 0 \\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Řešení. Postupem podle tabulky a definice dostáváme duální program

$$\begin{aligned} \min 4y_1 + 5y_3 & \\ -y_2 + 6y_3 &= 1 \\ y_1 + 3y_2 - 2y_3 &\leq -2 \\ -6y_1 - 3y_2 + 2y_3 &= 0 \\ y_1 - 4y_3 &\geq 3 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2 &\in \mathbb{R} \\ y_3 &\leq 0. \end{aligned}$$

□

Příklad 3. *Dokažte nebo vyvraťte tvrzení:*

(a) Pro každý lineární program P platí, že duál duálu P je původní program P.

(b) Pokud má lineární program optimum s celočíselnými proměnnými, tak má celočíselné optimální řešení i duál.

Řešení. (a) Platí, stačí ukázat, že převodem podle tabulky zleva doprava a poté znovu zprava doleva dostaneme tentýž lineární program, se kterým jsme začali. Případně můžeme nahlédnout přímo, co se stane, použijeme-li převod dvakrát za sebou pro program P s $\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Z duality dostáváme $\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$ za podmínek $A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ a $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, což po přepsání minima na maximum a přenásobením podmínek -1 je totéž jako $\max -\mathbf{b}^\top \mathbf{y}$ za podmínek $-A^\top \mathbf{y} \leq -\mathbf{c}$ a $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$. Na tento program můžeme použít dualitu znovu a dostaneme $\min -\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ za podmínek $-A\mathbf{x} \geq -\mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Přepíšeme-li minimum na maximum a přenásobíme-li podmínky -1, tak dostáváme původní program P, který je zároveň duálem duálu pro P.

(b) Neplatí. Mějme například úlohu $\max x/2$, $x \leq 2$, $x \geq 0$. Jejím optimálním řešením je pak $x = 2$ s hodnotou účelové funkce 1. Jejím duálem ovšem je $\min 2y$, $y \geq 1/2$, jehož optimální řešením je $y = 1/2$.

□

Příklad 4. *(*) Mějme následující úlohu lineárního programování P:*

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Pomocí duality zkonstruujte soustavu nerovnic, pro kterou ze souřadnic libovolného řešení lze vyčíst optimální řešení pro P.

Tím ukážeme, že asymptotická složitost problému rozhodnout, zda je daný mnohostěn neprázdný, je stejná jako složitost problému nalezení optimálního řešení úlohy lineárního programování. Nebo ještě jinak: nalezení přípustného řešení lineárního programu je asymptoticky stejně obtížné jako nalezení optimálního řešení.

Řešení. Vytvoříme soustavu nerovnic S, která má řešení právě tehdy, když úloha P a její duál D mají přípustná řešení se stejnou hodnotou účelové funkce.

Vektor proměnných v S je $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}$, čili konkatenace $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ („připojení $\mathbf{y}$ za $\mathbf{x}$“), což speciálně znamená, že máme $n + m$ proměnných. Podmínky jsou pak následující:

$$\begin{aligned} (A \mid 0)(\mathbf{x} \circ \mathbf{y}) &\leq \mathbf{b} \circ \mathbf{0} \\ (0 \mid A^\top)(\mathbf{x} \circ \mathbf{y}) &\geq \mathbf{0} \circ \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} &= \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \circ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

kde $(A \mid 0)$ označuje matici $m \times (m+n)$ vzniklou z A rozšířením o nulovou matici $m \times m$ a podobně $(0 \mid A^\top)$ označuje matici $n \times (m+n)$ vzniklou z $A^\top$ rozšířením o nulovou matici $n \times n$.

Ukážeme,že soustava S řešení právě tehdy, když měl program P optimální řešení. Pokud má S řešení $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}$, pak máme přípustná řešení $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ pro P i D, jejichž hodnota účelové funkce je stejná, což podle Silné věty o dualitě (dokonce i podle Slabé věty o dualitě) znamená, že $\mathbf{x}$ je optimálním řešením pro P a $\mathbf{y}$ je optimálním řešením pro D. Naopak pokud má P optimální řešení $\mathbf{x}$, pak podle Silné věty o dualitě má i duál D optimální řešení $\mathbf{y}$ a jejich hodnoty účelové funkce se rovnají. To odpovídá řešení $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}$ soustavy S. $\square$