Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 5. cvičení*

17. března 2020

1 Mnohostěny

Množina $K \subseteq \mathbb{R}^d$ je *konvexní*, pokud pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ a $t \in [0,1]$ platí $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \in K$. Jinak řečeno, každá úsečka se dvěma konci v K je celá v K. *Konvexní mnohostěn* je průnikem konečně mnoha poloprostorů. Alternativně je konvexním mnohostěnem libovolná množina bodů tvaru $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \colon A\mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$ pro nějakou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Nechť P je konvexní mnohostěn a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$. Jestliže pro každé $\mathbf{x} \in P$ platí $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \le t$ a zároveň existuje $\mathbf{x} \in P : \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = t$, pak množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \colon \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = t\}$ tvoří *tečnou nadrovinu* H mnohostěnu P. Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem P pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu P. K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* $\emptyset$ a P. Stěny dimenzí 0, 1 a $d-1$ nazýváme *vrcholy*, *hrany* a *fasety*.

Příklad 1. *Dokažte, že množina všech optimálních řešení lineárního programu* $\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ *za podmínek* $A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$*, kde* $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$*, je konvexní množina.*

Řešení. Mějme množinu X všech optimálních řešení daného lineárního programu. Uvažme dvě optimální řešení $\mathbf{x} \in X$ a $\mathbf{x}' \in X$ a číslo $t \in [0,1]$. Podle úsečkové definice konvexity chceme ukázat, že bod $\mathbf{x}'' = t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{x}'$ leží v X. Vektor $\mathbf{x}''$ je přípustným řešením daného lineárního programu, protože platí

$$A\mathbf{x}'' = A(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{x}') = tA\mathbf{x} + (1-t)A\mathbf{x}' \le t\mathbf{b} + (1-t)\mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Také platí, že hodnota účelové funkce na $\mathbf{x}''$ se stále rovná optimální hodnotě h našeho lineárního programu, protože

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{x}'' = \mathbf{c}^\top (t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{x}') = t\mathbf{c}^\top \mathbf{x} + (1-t)\mathbf{c}^\top \mathbf{x}' = th + (1-t)h = h.$$

Tedy $\mathbf{x}''$ je optimálním řešením, neboli $\mathbf{x}'' \in X$, a množina X je skutečně konvexní.

Alternativní řešení: Množina optimálních řešení X je konvexním mnohostěnem. Stačí totiž k podmínkám přidat novou podmínku $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \ge h$, že hodnota účelové funkce je alespoň tak velká jako je optimální hodnota h a výsledkem je konvexní mnohostěn množiny optimálních řešení. □

Příklad 2. *Mějme mnohostěn* $P \subseteq \mathbb{R}^3$ *určený množinou vrcholů*

$$\mathbf{a} = (2,1,6), \quad \mathbf{b} = (0,-5,0), \quad \mathbf{c} = (-2,2,-1), \quad \mathbf{d} = (0,-4,0), \quad \mathbf{e} = (0,1,1).$$

Pro každou z následujících rovin určete, zda je vůči P *tečná, sečná či mimoběžná. Pro tečné roviny určete dimenzi příslušné stěny.*

(a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 5x + 3y - 2z = 1\}$,

(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y - z = 2\}$,

(c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 3x + z = 0\}$.

Řešení. (a) Daná rovina je vůči P tečná, protože platí $5x+3y-2z \le 1$ pro každou volbu $(x,y,z) \in \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{e}\}$. Dimenze příslušné stěny je 1, protože rovnost nastává právě v případech $(x,y,z) \in \{\mathbf{a},\mathbf{e}\}$.

(b) Daná rovina je vůči P mimoběžná, protože platí $x + y - z < 2$ pro každou volbu $(x,y,z) \in \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{e}\}$.

(c) Daná rovina je vůči P sečná, protože platí $3x + z < 0$ pro $(x,y,z) = \mathbf{c}$ a $3x + z > 0$ pro $(x,y,z) \in \{\mathbf{a},\mathbf{e}\}$. Ve zbylých dvou případech $(x,y,z) \in \{\mathbf{b},\mathbf{d}\}$ nastává rovnost. □

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

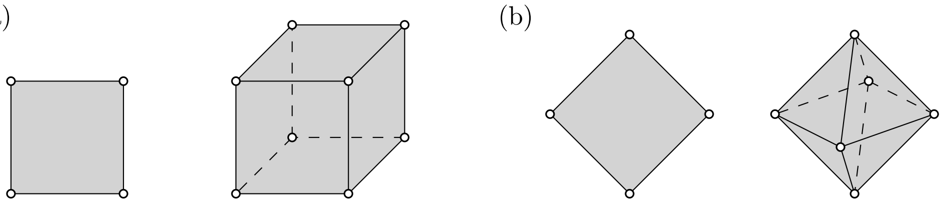
Příklad 3. *Počty stěn pro známé mnohostěny v $\mathbb{R}^d$, kde $d \in \mathbb{N}$.*

(a) Jaký je počet vrcholů a faset d-dimenzionální krychle $[0,1]^d$?

(b) Jaký je počet vrcholů a faset d-dimenzionálního křížového mnohostěnu *(neboli zobecněného osmistěnu)*

$$\{(x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^d \colon |x_1| + |x_2| + |x_3| + \cdots + |x_d| \le 1\}?$$

(a) (b)



Obrázek 1: Příklady (a) d-dimenzionální krychle a (b) d-dimenzionálního křížového mnohostěnu pro $d = 2, 3$.

Řešení. (a) Ukážeme, že d-dimenzionální krychle má 2^d vrcholů a $2d$ faset. Daná krychle je průnikem $2d$ poloprostorů $\{(x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^d \colon 0 \le x_i\}$ a $\{(x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^d \colon x_i \le 1\}$ pro $i \in \{1,\ldots,d\}$. Vrchol je průnikem d nadrovin určenými těmito poloprostory a každá taková nadrovina určuje jednu souřadnici vrcholu (buď 0 nebo 1), přičemž za každou souřadnici můžeme od každého ze dvou typů poloprostorů vybrat nadrovinu pro právě jeden z nich. Každý vrchol tedy odpovídá výběru podmnožiny d-prvkové množiny a máme tak celkem 2^d možností a tedy i vrcholů.

Každý z $2d$ poloprostorů určuje (svou vlastní) fasetu, protože lze snadno ověřit, že příslušná nadrovina je tečná a obsahuje d afinně nezávislých vrcholů (například pro nadrovinu $x_1 = 1$ se jedná o vrcholy $(1,0,\ldots,0), (1,1,0,\ldots,0), \ldots, (1,\ldots,1)$). Více faset než je určujících poloprostorů být nemůže a tedy máme právě $2d$ faset.

(b) Ukážeme, že d-dimenzionální křížový mnohostěn má 2^d faset a $2d$ vrcholů. To plyne z faktu, že d-dimenzionální křížový mnohostěn je duální k d-dimenzionální krychli, ale dá se to ukázat i přímo. Daný mnohostěn je průnikem 2^d poloprostorů $H(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d) = \{(x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^d \colon \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_d x_d \le 1\}$, kde $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d \in \{-1,1\}$. Každý poloprostor určuje fasetu, protože lze snadno ověřit, že příslušná nadrovina je tečná a obsahuje d afinně nezávislých bodů mnohostěnu (pro nadrovinu $H(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d)$ se jedná o body $(x_1,\ldots,x_d) \in \{-1,0,1\}$, kde je právě jedna souřadnice x_i nenulová a platí $x_i = \varepsilon_i$). Více faset než je určujících poloprostorů být nemůže a tedy máme právě 2^d faset.

Každý z množiny B uvažovaných $2d$ bodů tvaru $(0,\ldots,0,\pm 1,0,\ldots,0)$ leží v $2^{d-1} \ge d$ fasetách a je tedy vrcholem. Žádné další vrcholy nemáme, protože se dá ukázat, že každý bod $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_d)$ našeho mnohostěnu ležící na některé nadrovině $H(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d)$ je konvexní kombinací bodů z B. Pak totiž z $|x_1| + \cdots + |x_d| = 1 = \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_d x_d$ platí $\varepsilon_i = \operatorname{sgn}(x_i)$ pro $i = 1,\ldots,d$ a stačí jako koeficient u bodu $\mathbf{b}_i = (0,\ldots,0,\varepsilon_i,0,\ldots,0)$ zvolit $\varepsilon_i x_i \in [0,1]$, čímž $\sum_{i=1}^d \varepsilon_i x_i = \sum_{i=1}^d |x_i| = 1$ a

$$\sum_{i=1}^d \varepsilon_i x_i \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^d |x_i| \mathbf{b}_i = \mathbf{x},$$

protože na i-té souřadnici dostáváme $|x_i|\varepsilon_i = x_i$. Tedy máme právě $2d$ vrcholů.

Obecně je počet stěn dimenze $k \in \{0,\ldots,d-1\}$ v d-dimenzionálním křížovém mnohostěnu roven $2^{k+1}\binom{d}{k+1}$, což odpovídá počtu stěn dimenze $d-k-1$ v d-dimenzionální krychli. □

Příklad 4. *Nalezněte všechny vrcholy mnohostěnu zadaného následujícími nerovnostmi a zdůvodněte, že jiné vrcholy neexistují:*

$$x + y + z \le 3,$$
$$y + 2z \le 2,$$
$$x, y, z \ge 0.$$

Řešení. Vrchol musí mít splněny tři nerovnosti s rovností, čili stačí projít všech $\binom{5}{3} = 10$ trojic rovností a tím projdeme všechny případné vrcholy (ostatní nerovnosti musí být také vždy splněny, ale ne nutně s rovností). Vzhledem k tomu, že tři nerovnosti se týkají nezápornosti, je prohledávání případů jednodušší (vždy je aspoň jedna proměnná nulová). Nakonec dostaneme vrcholy

$$(0,0,0), (3,0,0), (0,2,0), (0,0,1), (1,2,0), (2,0,1).$$

Pro $x = 0$ nelze splnit všechny nerovnosti a zároveň první dvě nerovnosti s rovností. □

Příklad 5. *Rozhodněte, zda je bod* $\mathbf{v} = (1,1,1)$ *vrcholem mnohostěnu definovaného následujícím systémem nerovnic:*

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -10 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Řešení. Bod $\mathbf{v}$ je vrcholem mnohostěnu v $\mathbb{R}^d$, pokud leží v aspoň d tečných nadrovinách, které určují fasety. To odpovídá tomu, že splňuje d nerovností, které určují mnohostěn, s rovností (předpokládáme, že žádná nerovnost ani rovnost není zbytečná a tedy že popis mnohostěnu je minimální). Přesněji je popis mnohostěnu minimální, pokud nelze vynechat žádnou rovnici ani nerovnici beze změny mnohostěnu a nemůžeme změnit žádnou nerovnost na rovnost beze změny mnohostěnu.

(a) Bod $\mathbf{v}$ není vrcholem mnohostěnu. Popis mnohostěnu není minimální, protože čtvrtá nerovnost je lineární kombinací prvních dvou. Minimální popis sestává pouze z prvních tří nerovností a bod $\mathbf{v}$ musí splňovat všechny tři s rovností, aby byl vrcholem. Bod $\mathbf{v}$ ale s rovností splňuje pouze první dvě. Jediným vrcholem mnohostěnu je $(1,1,3)$.

(b) Bod $\mathbf{v}$ není vrcholem mnohostěnu. Splňuje sice tři nerovnosti s rovností (konkrétně první, třetí a čtvrtou), ale první a čtvrtá nerovnost jsou opačné a dávají tedy rovnost (popis mnohostěnu tak opět není minimální). Mnohostěn ležící na nadrovině určené touto rovností má dimenzi 2 a aby bod $\mathbf{v}$ byl vrcholem tohoto mnohostěnu, tak musí splňovat dvě nerovnosti, které jej určují, s rovností. Tedy bod $\mathbf{v}$ by musel splňovat i druhou nerovnost s rovností, což nesplňuje. Jediným vrcholem mnohostěnu je $(1/58, 34/29, 61/58)$. □