Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 12. cvičení*

5. května 2020

1 Totální unimodularita

Čtvercová matice A je *unimodulární*, pokud je celočíselná a platí $\det A \in \{-1, 1\}$. Matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je *totálně unimodulární*, pokud každá její čtvercová podmatice má determinant rovný -1, 0 nebo 1.

Totálně unimodulární matice jsou pro nás zajímavé, protože mnohostěn $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ má celočíselné vrcholy pro každé $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ právě tehdy, když je A totálně unimodulární. Na takových mnohostěnech dokážeme pro každé $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ najít v polynomiálním čase celočíselné optimum. Neboli příslušné celočíslené lineární programy dokážeme řešit efektivně.

Několik faktů o unimodulárních a totálně unimodulárních maticích:

(a) Součin a inverze unimodulárních matic jsou unimodulární matice.

(b) Unimodulární matice jsou právě ty celočíslené matice, jejichž inverze je celočíselná.

(c) Unimodulární matice může obsahovat i jiná čísla než 0 a ± 1 (viz matice A dole).

(d) Součin totálně unimodulárních matic nemusí být totálně unimodulární (viz druhá mocnina matice B dole).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(e) Existuje polynomiální algoritmus na rozpoznávání totální unimodularity.

Příklad 1. *Dokažte, že pokud má matice $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ inverzní matici, která je rovněž celočíselná, pak je A unimodulární.*

Řešení. Jelikož se ve výpočtu determinantu nevyskytuje dělení a A i A^{-1} jsou celočíselné, musí být $\det(A)$ i $\det(A^{-1})$ celočíselné. Víme, že $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$, kde I_n je jednotková matice s rozměry $n \times n$. Jediná dvě celočíselná řešení rovnice $x \cdot y = 1$ jsou $x = y = 1$ a $x = y = -1$. Tedy $\det(A) \in \{-1, 1\}$ a A je tak unimodulární. □

Příklad 2. *Mějme matici $A \in \{-1, 0, 1\}^{m\times n}$, ve které každý sloupec obsahuje nanejvýš dva nenulové prvky. Nechť lze řádky matice A rozdělit do dvou množin R_1 a R_2 takových, že jsou-li ve sloupci dva nenulové prvky stejného znaménka, pak oba patří do různých množin R_i a R_j a pokud sloupec obsahuje dva nenulové prvky různých znamének, pak tyto řádky leží ve stejné množině R_i. Dokažte, že taková matice A je totálně unimodulární.*

Nápověda: vzpomeňte si na Laplaceův rozvoj pro počítání determinantu.

Řešení. Připomeňme nejdříve Laplaceův rozvoj pro počítání determinantu. Nechť $A' = (a'_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je čtvercová matice. Označme jako $A'_{i,j}$ podmatici A' vzniklou po smazání i-tého řádku a j-tého sloupce. Pak pro libovolná $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ platí

$$\begin{aligned} \det(A') &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a'_{i,j} \det(A'_{i,j}) \qquad \text{(rozvoj přes řádek } i\text{)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a'_{i,j} \det(A'_{i,j}) \quad \text{(rozvoj přes sloupec } j\text{)} \end{aligned}$$

Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matice ze zadání s množinami řádků R_1 a R_2. Chceme ukázat, že každá čtvercová podmatice $A' \in \mathbb{Z}^{k\times k}$ matice A má determinant v $\{-1, 0, 1\}$.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Postupujeme silnou indukcí podle k. Pro k je tvrzení triviální, předpokládejme tedy $k \geq 2$ a nechť tvrzení platí pro všechny menší matice, které splňují zadání. Všimněme si, že každá čtvercová podmatice A' matice A splňuje předpoklady ze zadání. Stačí ukázat, že $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$. Máli matice A' sloupec se samými nulami, tak například z Laplaceova rozvoje vidíme, že má nulový determinant. Pokud má matice A' sloupec s jedním nenulovým prvkem, pak Laplaceovým rozvojem přes daný sloupec z indukčního předpokladu dostáváme $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$. Nechť tedy každý sloupec obsahuje dva nenulové prvky. Označme jako A'_i i-tý řádek matice A'. Potom dostáváme

$$\sum_{i \in R_1} A'_i - \sum_{j \in R_2} A'_j = \mathbf{0},$$

protože v každém sloupci se členy na řádcích ze stejné množiny R_i vyruší (mají totiž podle předpokladů opačné znaménko) a členy v řádcích z různých množin R_i a R_j mají podle předpokladů stejné znaménko a vyruší se, protože členy z R_1 v lineární kombinaci násobíme jedničkou a členy z R_2 násobíme minus jedničkou. Tedy matice A' je singulární a $\det(A') = 0$.

Podobně se dá ukázat, že každá matice $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s nanejvýš jednou jedničkou a nanejvýš jednou minus jedničkou v každém sloupci je totálně unimodulární, což je speciálnější tvrzení (platí pro $R_1 = \{1, \ldots, m\}$ a $R_2 = \emptyset$). □

Příklad 3. *Dokažte následující dvě tvrzení a zkuste si rozmyslet případné algoritmické důsledky pro známé problémy.*

(a) Maticí incidence orientovaného grafu $G = (V, E)$ *je matice* $A_G \in \{-1, 0, 1\}^{|V| \times |E|}$, *kde* $(A_G)_{v,e} = -1$, *pokud* $e = (v, u)$, $(A_G)_{v,e} = 1$, *pokud* $e = (u, v)$, *a* $(A_G)_{v,e} = 0$ *jinak. Dokažte, že* A_G *je totálně unimodulární.*

(b) Maticí incidence neorientovaného grafu $G = (V, E)$ *je matice* $A_G \in \{0, 1\}^{|V| \times |E|}$, *kde* $(A_G)_{v,e} = 1$, *je-li* $v \in E$, *a* $(A_G)_{v,e} = 0$ *jinak. Dokažte, že matice incidence neorientovaného grafu* G *je totálně unimodulární právě tehdy, když je* G *bipartitní.*

Nápověda: v obou částech se může hodit znění předešlého příkladu.

Řešení. (a) Rozdělme řádky matice A_G na $R_1 = V$ a $R_2 = \emptyset$. Potom jsou splněny předpoklady předešlého příkladu. Jistě $A \in \{-1, 0, 1\}$ a v každém sloupci jsou také nanejvýš dva nenulové prvky. V každém sloupci matice A je totiž jedna jednička a jedna minus jednička a příslušné řádky patří do téže množiny R_1. V žádném sloupci nejsou nikdy dva nenulové prvky stejného znaménka a proto A_2 může být prázdná. Podle předešlého příkladu je tak A_G totálně unimodulární.

Jako algoritmický důsledek zde dostáváme polynomiální algoritmus pro nalezení celočísleného maximálního toku v síti $(G = (V, E), z, s, c)$ s celočíslenými kapacitami. Připomeňme příslušný lineární program, jehož matice podmínek odpovídá rošířené matici incidence $(A_G \mid I_{|E|})$:

$$\begin{aligned}
\text{Proměnné:} \quad & x_e \geq 0 \text{ pro každé } e \in E \\
\text{Účelová funkce:} \quad & \max x_{s,z} \\
\text{Podmínky :} \quad & \sum_{u:(u,v) \in E} x_{u,v} - \sum_{u:(v,u) \in E} x_{v,u} = 0 \text{ pro každé } v \in V \\
& x_e \leq c(e) \text{ pro každé } e \in E
\end{aligned}$$

Tato rozšířená matice $(A_G \mid I_{|E|})$ vzniklá přidáním řádků jednotkové matice $I_{|E|}$ je totiž také totálně unimodulární, pro rozšíření totiž stačí opět uvážit důkaz pomocí Laplaceova rozvoje. Z duality také dostáváme alternativní důkaz Hlavní věty o tocích a Věty o celočíselnosti.

(b) Mějme bipartitní graf $G = (V = V_1 \cup V_2, E)$. Ukážeme, že jeho matice incidence A_G je totálně unimodulární. Rozdělme řádky matice A_G na $R_1 = V_1$ a $R_2 = V_2$, tedy podle partit. Potom jsou splněny předpoklady předešlého příkladu. Jistě $A \in \{-1, 0, 1\}$ a v každém sloupci jsou také nanejvýš dva nenulové prvky. Každý sloupec matice A odpovídá hraně s jedním vrcholem v R_1 a druhým v R_2, přičemž tento sloupec obsahuje dvě jedničky. Podle předešlého příkladu je tak A_G totálně unimodulární.

Nyní ukážeme opačnou implikaci, tedy že matice incidence nebipartitního grafu není totálně unimodulární. Nebipartitní graf obsahuje lichou kružnici. Uvažme podmatici B incidence této kružnice. Gaussovou eliminací B zjistíme, že determinant B je 2. Podrobněji matice incidence pro kružnici bude bez újmy na obecnosti vypadat takto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pro získání diagonální matice v každém kroku odečítáme i-tý řádek od $(i+1)$-ního. V posledním sloupci nám bude alternovat -1. V případě liché kružnice pak v předposledním řádku v posledním sloupci bude -1. Tedy do posledního řádku se na diagonálu dostane 2. Matice A_G tak není totálně unimodulární.

Jako algoritmický důasledek dostáváme polynomiální algoritmus pro hledání maximálního párování v bipartitním grafu $G = (V, E)$. Ten se dá totiž zapsat následujícím lineárním programem, jehož maticí podmínek je A_G':

$$\begin{aligned} \text{Proměnné:} \quad & x_e \geq 0 \text{ pro každé } e \in E \\ \text{Účelová funkce:} \quad & \max \sum_{e \in E} x_e \\ \text{Podmínky :} \quad & \sum_{w:\{v,w\} \in E} x_{\{v,w\}} \leq 1 \text{ pro každé } v \in V \end{aligned}$$

Z duality pak víme, že velikost minimálního vrcholového pokrytí v bipartitním grafu se rovná velikosti maximálního párování. Tím máme alternaativní důkaz Königovy–Egerváryho věty a dokážeem v polynomiálním čase zjistit velikost minimálního vrcholového pokrytí v bipartitním grafu, což je nad obecnými grafy NP-těžký problém.

□

Příklad 4. *Nalezněte celočíselný mnohostěn $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, kde A je matice s rozměry alespoň 3×3 a A i $\mathbf{b}$ jsou celočíselné, ale A není totálně unimodulární. Může navíc A obsahovat pouze prvky -1, 0 a 1? A co když zakážeme i -1?*

Řešení. Takový příklad se dá najít dokonce i pro A s prvky jen 0 a 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Pro $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ pak daný mnohostěn obsahuje pouze triviální řešení $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Po sečtení všech řádků totiž dostáváme podmínku $2\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$. □

Příklad 5. *Rozhodněte, jestli je zadaná matice totálně unimodulární:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení. Zadaná matice je totálně unimodulární. První řádek není třeba uvažovat, obsahuje totiž jen jednu jedničku a stačí uvážit Laplaceův rozvoj. Po jeho odebrání první sloupec obsahuje jen

-1, čili jde opět vynechat, a nakonec poslední řádek obsahuje jen 1 a taky jde vynechat. Čili zbyde:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Prostřední dva řádky vynásobíme -1, což nemění absolutní hodnotu determinantu žádné podmatice, a dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Neboli v každém sloupci je právě jedna 1 a jedna -1. Podle výsledku z přednášky či podle druhého cvičení je tak matice totálně unimodulární. $\square$