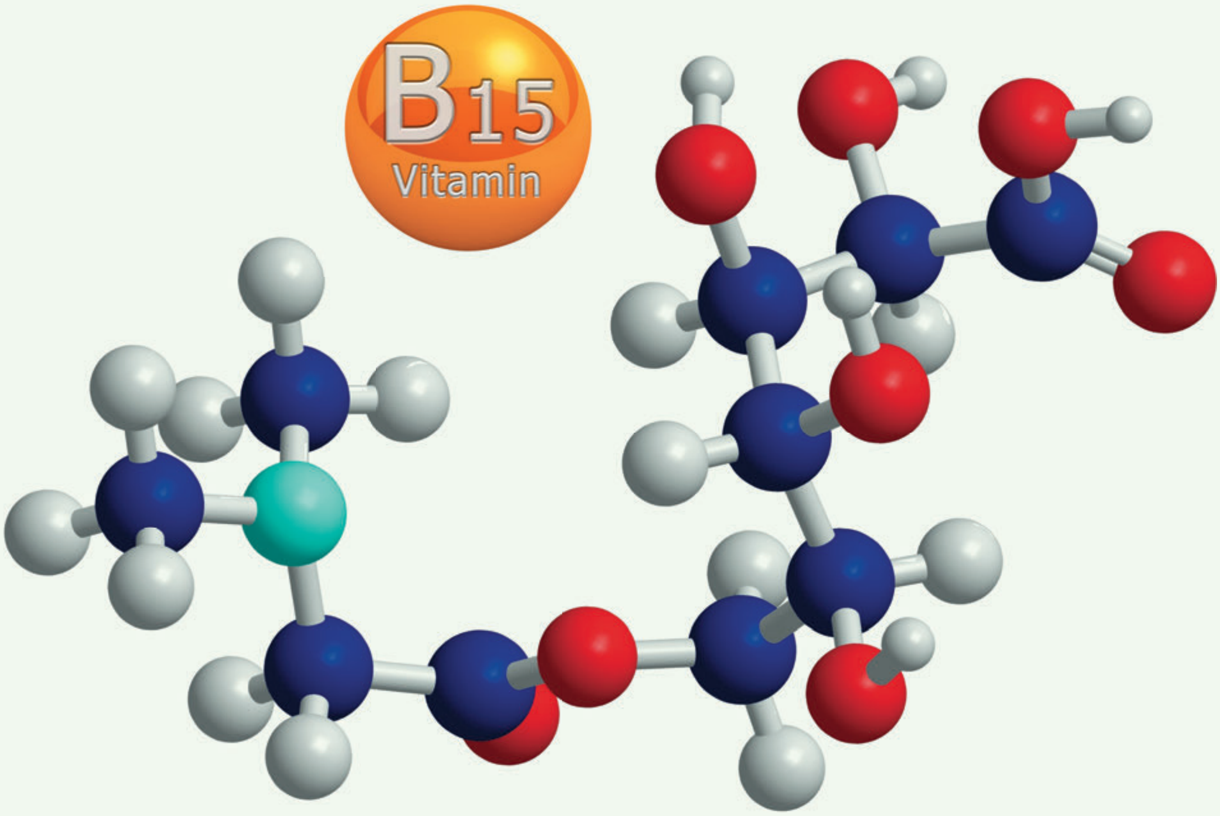


Люблю ЕГЭ за B15, или Еще раз про метод отображения

Е.А. Мирончик,
МБНОУ “Лицей № 111”,
г. Новокузнецк

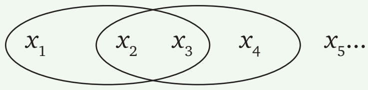
Задание на решение системы логических уравнений остается в ЕГЭ одним из самых сложных. Но решение этой системы не только проверяет знание логических операций и умение считать у наших школьников, но и учит рассуждать, строить логические цепочки. Конечно, оно незаслуженно находится в части B. При оценке ответа нет возможности квалифицировать ошибку, так как ответ, как и логическое высказывание, бывает либо истинным, либо ложным. А поводов дать неверный в этом случае ответ много: можно написать наугад, а можно решить все от начала до конца, проделать все логические преобразования, выстроить верную цепочку рассуждений и в последнем действии допустить арифметическую ошибку. Заметим, что при решении этого задания количество только арифметических действий доходит до 40. Но тут у выпускников и учителей нет выбора. Будем действовать по схеме — сначала купили, потом полюбили. За что можно полюбить это задание? Например, за то, что оно не скучное, что в нем больше разнообразия, чем в задачах на количество информации, где надо просто применить формулу, или в задачах про системы счисления, в которых надо освоить три алгоритма. На примере задания B15 можно еще раз поговорить о сложных понятиях информатики: “деревья”, “графы”, “матрица смежности”. А самое главное, B15 учит думать и рассуждать.

Существует много вариантов решения задания B15, но в этой статье все системы будут решены методом отображений, который разнообразен в своем применении и опубликован в № 10 журнала “Информатика”, 2013 г. Одним из ключевых моментов при разборе систем является определение основного отображения, необходимого для решения системы. Обратите внимание, что в примерах знак “·” обозначает конъюнкцию, а “+” — дизъюнкцию.

Система 1

$$\begin{cases} x_1 \cdot \left(x_2 + \overline{x_3}\right) + \overline{x_1} \cdot \left(x_2 \oplus x_3\right) = 1 \\ x_2 \cdot \left(x_3 + \overline{x_4}\right) + \overline{x_2} \cdot \left(x_3 \oplus x_4\right) = 1 \\ \ldots \\ x_8 \cdot \left(x_9 + \overline{x_{10}}\right) + \overline{x_8} \cdot \left(x_9 \oplus x_{10}\right) = 1 \end{cases}$$

В этой системе в двух соседних уравнениях присутствует пара общих неизвестных

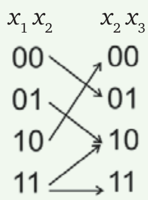


Зная количество пар (x_1, x_2), можно найти количество пар (x_2, x_3) и найти общее количество решений первого уравнения системы, а продолжая применять правило, построенное для первого уравнения, можно найти количество пар (x_9, x_{10}) и определить, сколько раз дерево решений доведет до x_{10}, что и будет ответом к этому заданию. В цепочке рассуждений будем переходить от пары к паре:

$$(x_1, x_2) \Rightarrow (x_2, x_3) \Rightarrow (x_3, x_4) \Rightarrow (x_4, x_5) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (x_9, x_{10})$$

Построим дерево решений первого уравнения и отображение, соответствующее первому уравнению:

x_1	x_2	x_3
0	0	1
	1	0
1	0	0
	1	0
		1



	Количество пар								
Пара	x_1, x_2	x_2, x_3	x_3, x_4	x_4, x_5	x_5, x_6	x_6, x_7	x_7, x_8	x_8, x_9	x_9, x_{10}
00	1	1	2	2	2	3	3	3	4
01	1	1	1	2	2	2	3	3	3
10	1	2	2	2	3	3	3	4	4
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1

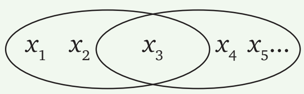
4 + 3 + 4 + 1 = 12

Ответ: 12

Система 2

$$\begin{cases} x_1 \cdot \left(x_2 + \overline{x_3}\right) + \overline{x_1} \cdot \left(x_2 \oplus x_3\right) = 1 \\ x_3 \cdot \left(x_4 + \overline{x_5}\right) + \overline{x_3} \cdot \left(x_4 \oplus x_5\right) = 1 \\ x_5 \cdot \left(x_6 + \overline{x_7}\right) + \overline{x_5} \cdot \left(x_6 \oplus x_7\right) = 1 \\ x_7 \cdot \left(x_8 + \overline{x_9}\right) + \overline{x_7} \cdot \left(x_8 \oplus x_9\right) = 1 \end{cases}$$

Эта система похожа на систему 1, но в ней меньше уравнений. В двух соседних уравнениях присутствует одна общая неизвестная.

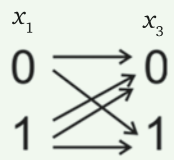


Цепочка рассуждений при построении решения системы будет такой:

$$x_1 \Rightarrow x_3 \Rightarrow x_5 \Rightarrow x_7 \Rightarrow x_9$$

Дерево решений совпадает с деревом первой системы. При решении этой системы можно построить другое отображение. x_1 может принять два различных значения и x_3 также два разных значения.

x_1	x_2	x_3
0	0	1
	1	0
1	0	0
	1	0
		1



Начиная строить дерево решений с $x_1 = 1$, можно построить три ветки, ведущие x_3. Из них две идут к нулевому значению и одна к единице.

Таблица вычислений будет такой:

	Количество значений				
	x_1	x_3	x_5	x_7	x_9
0	1	3	7	17	41
1	1	2	5	12	29

41+29=70

Ответ: 70

Разберем систему, в которой задать отображение с помощью стрелок не удобно.

Система 3

$$\begin{cases} x_1 \cdot (x_2 \to \overline{x_3}) + \overline{x_1} \cdot x_4 = 1 \\ x_3 \cdot (x_4 \to \overline{x_5}) + \overline{x_3} \cdot x_6 = 1 \\ x_5 \cdot (x_6 \to \overline{x_7}) + \overline{x_5} \cdot x_8 = 1 \\ x_7 \cdot (x_8 \to \overline{x_9}) + \overline{x_7} \cdot x_{10} = 1 \end{cases}$$

В этой системе в двух соседних уравнениях присутствует пара общих неизвестных

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7 \ldots$

Каждое уравнение системы зависит от четырех переменных. Индексы соседних уравнений отличаются на 2. Общими переменными для соседних уравнений является пара переменных. Зная количество пар (x_1, x_2), можно найти количество пар (x_3, x_4). Ветки построенного дерева будут вести к элементу x_{10}, что соответствует последней паре (x_9, x_{10}).

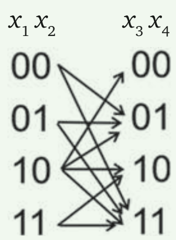
$$(x_1, x_2) \Rightarrow (x_3, x_4) \Rightarrow (x_5, x_6) \Rightarrow (x_7, x_8) \Rightarrow (x_9, x_{10})$$

Построим дерево решений первого уравнения:

$$x_1 \cdot (x_2 \to \overline{x_3}) + \overline{x_1} \cdot x_4 = 1$$

Построим дерево решений первого уравнения и отображение, соответствующее первому уравнению. Из каждой пары может выходить четыре стрелки и в каждую пару может входить до четырех стрелок. Запись отображения с помощью стрелок трудно читается, но стрелки не единственный способ для записи соответствия.

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	1
		1	1
	1	0	1
		1	1
1	0	0	0
			1
		1	0
			1
	1	0	x
		1	0
			1



Можно полученное отображение записать в виде рекуррентных формул:
F(00) = F(10);
F(01) = F(00)+F(01)+F(10);
F(10) = F(10)+F(11);
F(11) = F(00)+F(01)+F(10)+F(11).
А можно задать отображение с помощью матрицы смежности:

источник \ приемник	00	01	10	11
00		+		+
01		+		+
10	+	+	+	+
11			+	+

	Количество пар				
Пара	x_1, x_2	x_3, x_4	x_5, x_6	x_7, x_8	x_9, x_{10}
00	1	1	2	6	16
01	1	3	6	14	36
10	1	2	6	16	40
11	1	4	10	24	60

16 + 36 + 40 + 60 = 152
Ответ: 152

Система 4

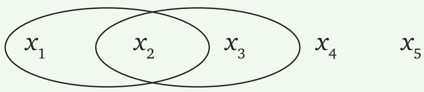
$$\begin{cases}(x_1 \to x_2)\cdot(x_2 \to x_3)\cdot(x_3 \to x_4)\cdot(x_4 \to x_5)=1\\(y_1 \to y_2)\cdot(y_2 \to y_3)\cdot(y_3 \to y_4)\cdot(y_4 \to y_5)=1\\x_4 \to y_4 =1\end{cases}$$

Первый способ
Два первых уравнения отличаются только буквами, значит, решение их будет одинаковым. Рассмотрим первое уравнение:

$$(x_1 \to x_2)\cdot(x_2 \to x_3)\cdot(x_3 \to x_4)\cdot(x_4 \to x_5)=1$$

Его можно переписать в виде системы:

$$\begin{cases}x_1 \to x_2 =1\\x_2 \to x_3 =1\\x_3 \to x_4 =1\\x_4 \to x_5 =1\end{cases}$$

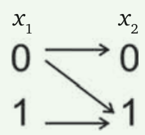


Цепочка рассуждений при построении решения системы будет такой:

$$x_1 \Rightarrow x_2 \Rightarrow x_3 \Rightarrow x_4 \Rightarrow x_5$$

Построим дерево решений и соответствующее ему отображение:

x_1	x_2
0	0
	1
1	1



Для второго уравнения системы рассуждения повторяются. В системе присутствует третье уравнение, связывающее первые два. Значит, необходимо заполнить две таблицы при разных значениях x_4.

$x_4 = 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	1	1	1	1	1
1	1	2	3	0	1

два решения

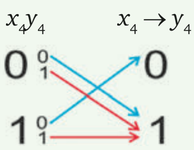
$x_4 = 1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	1	1	1	0	0
1	1	2	3	4	4

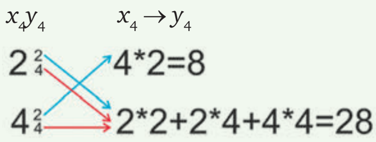
четыре решения

Отображение для третьего уравнения (решение одного уравнения методом отображения также рассмотрено в журнале “Информатика”, № 10/2013).

Отображение для импликации:



Вычисления:



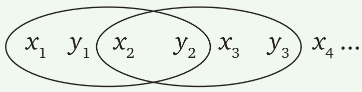
Ответ: 28

Второй способ

$$\begin{cases}(x_1 \to x_2)\cdot(x_2 \to x_3)\cdot(x_3 \to x_4)\cdot(x_4 \to x_5)=1\\(y_1 \to y_2)\cdot(y_2 \to y_3)\cdot(y_3 \to y_4)\cdot(y_4 \to y_5)=1\\x_4 \to y_4 = 1\end{cases}$$

Можно записать эту систему в виде одного уравнения, применив конъюнкцию к левым частям уравнений. Перегруппируем выражение в левой части уравнения и опять запишем в виде системы:

$$\begin{cases}(x_1 \to x_2)\cdot(y_1 \to y_2)=1\\(x_2 \to x_3)\cdot(y_2 \to y_3)=1\\(x_3 \to x_4)\cdot(y_3 \to y_4)=1\\(x_4 \to x_5)\cdot(y_4 \to y_5)=1\\x_4 \to y_4 = 1\end{cases}$$



Каждое уравнение системы зависит от четырех переменных. Общими переменными для соседних уравнений является пара переменных.

$$(x_1, y_1) \Rightarrow (x_2, y_2) \Rightarrow (x_3, y_3) \Rightarrow (x_4, y_4) \Rightarrow (x_5, y_5)$$

Построим дерево решений первого уравнения:

x_1	y_1	x_2	y_2
0	0	0	0
			1
		1	0
			1
	1	0	1
		1	1
1	0	0	x
		1	0
			1
	1	0	x
		1	1

Отображение зададим матрицей смежности и для удобства вычислений совместим в одну таблицу матрицу и вычисления. Так как по последнему уравнению подходят три пары (01), (01), (11), то количество пар (10) в четвертом столбике будет равно 0.

	Матрица смежности	приемник				Количество решений				
		00	01	10	11	x_1, y_1	x_2, y_2	x_3, y_3	x_4, y_4	x_5, y_5
источник	00	+	+	+	+	1	1	1	1	1
	01		+		+	1	2	3	4	5
	10			+	+	1	2	3	**0**	1
	11				+	1	4	9	16	21

1 + 5 + 1 + 21 = 28

Ответ: 28

Система 5

$$\begin{cases}(x_1 \to x_2)\cdot(x_2 \to x_3)\cdot(x_3 \to x_4)\cdot(x_4 \to x_5)\cdot(x_5 \to x_6)=1\\(x_1 \to y_1)\cdot(x_2 \to y_2)\cdot(x_3 \to y_3)\cdot(x_4 \to y_4)\cdot(x_5 \to y_5)\cdot(x_6 \to y_6)=1\end{cases}$$

Первый способ

Выражения в левой части первого и второго уравнений равны 1, следовательно, и произведение левых частей равно 1.

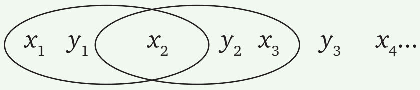
$$(x_1 \to x_2)\cdot\ldots\cdot(x_5 \to x_6)\cdot(x_1 \to y_1)\cdot\ldots\cdot(x_5 \to x_6)=1$$

Перегруппируем множители:

$$(x_1 \to x_2)\cdot(x_1 \to y_1)\cdot\ldots\cdot(x_5 \to x_6)\cdot\ldots\cdot(x_5 \to y_5)\cdot(x_6 \to x_6)=1$$

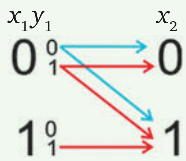
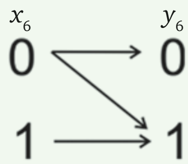
И запишем полученное уравнение в виде системы:

$$\begin{cases}(x_1 \to x_2)\cdot(x_1 \to y_1)=1\\(x_2 \to x_3)\cdot(x_2 \to y_2)=1\\(x_3 \to x_4)\cdot(x_3 \to y_3)=1\\(x_4 \to x_5)\cdot(x_4 \to y_4)=1\\(x_5 \to x_6)\cdot(x_5 \to y_5)=1\\x_6 \to y_6=1\end{cases}$$



Общими переменными для соседних уравнений является одна переменная.

$$x_1 \Rightarrow x_2 \Rightarrow x_3 \Rightarrow x_4 \Rightarrow x_5 \Rightarrow x_6 \Rightarrow y_5$$

Для первого уравнения системы (и похожих на него 2, 3, 4, 5-го) дерево решений будет таким:	Первым пяти уравнениям будет соответствовать отображение:
(см. таблицу ниже)	
Отображение для последнего уравнения:	

x_1	y_1	x_2
0	0	0
		1
	1	0
		1
1	0	X
	1	1

По построенному отображению заполним таблицу для вычисления количества решений:

	Количество решений по первым пяти уравнениям						Количество решений после подключения последнего уравнения
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_6
0	1	2	4	8	16	32	32
1	1	3	7	15	31	63	95

Ответ: 32 + 95 = 127 решений

Второй способ

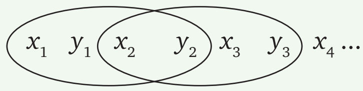
$$\begin{cases}(x_1 \to x_2)\cdot(x_2 \to x_3)\cdot(x_3 \to x_4)\cdot(x_4 \to x_5)\cdot(x_5 \to x_6)=1\\(x_1 \to y_1)\cdot(x_2 \to y_2)\cdot(x_3 \to y_3)\cdot(x_4 \to y_4)\cdot(x_5 \to y_5)\cdot(x_6 \to y_6)=1\end{cases}$$

Так же, как и в предыдущем случае, перепишем систему в виде:

$$\begin{cases}(x_1 \to x_2)\cdot(x_1 \to y_1)=1\\(x_2 \to x_3)\cdot(x_2 \to y_2)=1\\(x_3 \to x_4)\cdot(x_3 \to y_3)=1\\(x_4 \to x_5)\cdot(x_4 \to y_4)=1\\(x_5 \to x_6)\cdot(x_5 \to y_5)=1\\x_6 \to y_6=1\end{cases}$$

В первых пяти уравнениях по три переменных. Пара (x_1, y_1) определяет количество возможных сочетаний пары (x_2, y_2), а пара (x_3, y_3) получается из пары (x_2, y_2) по точно такому же правилу. Но в первом уравнении нет y_2, а во втором не хватает y_3 и так далее. Значит, первое уравнение не накладывает никаких ограничений на значения y_2, а второе — на y_3 и т.д. Значит, их значения могут быть любыми. Добавим недостающие переменные в первые пять уравнений, не изменяя систему.

$$\begin{cases}(x_1 \to x_2)\cdot(x_1 \to y_1)+y_2\cdot\overline{y_2}=1\\(x_2 \to x_3)\cdot(x_2 \to y_2)+y_3\cdot\overline{y_3}=1\\(x_3 \to x_4)\cdot(x_3 \to y_3)+y_4\cdot\overline{y_4}=1\\(x_4 \to x_5)\cdot(x_4 \to y_4)+y_5\cdot\overline{y_5}=1\\(x_5 \to x_6)\cdot(x_5 \to y_5)+y_6\cdot\overline{y_6}=1\\x_6 \to y_6=1\end{cases}$$

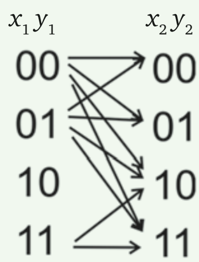


Каждое уравнение системы зависит от четырех переменных. Общими переменными для соседних уравнений является пара переменных.

$$(x_1, y_1) \Rightarrow (x_2, y_2) \Rightarrow (x_3, y_3) \Rightarrow (x_4, y_4) \Rightarrow (x_5, y_5) \Rightarrow (x_6, y_6)$$

Построим дерево решений первого уравнения и отображение множеств ему соответствующее.

x_1	y_1	x_2	y_2
0	0	0	0
			1
		1	0
			1
	1	0	0
			1
		1	0
			1
1	0	x	
	1	1	0
			1



При заполнении таблицы будем использовать это отображение пять раз и вычислим количество пар (x_6, y_6). Можно задать отображение матрицей смежности.

		приемник				Количество решений по первым пяти уравнениям					
		00	01	10	11	x_1, y_1	x_2, y_2	x_3, y_3	x_4, y_4	x_5, y_5	x_6, y_6
источник	00	+	+	+	+	1	2	4	8	16	32
	01	+	+	+	+	1	2	4	8	16	32
	10					1	3	7	15	31	~~63~~
	11			+	+	1	3	7	15	31	63

Последнему уравнению не удовлетворяет пара (10). Ответ будет складываться из значений последнего столбика, соответствующих парам (00), (01) и (11).

32 + 32 + 63 = 127

Ответ: 127

Решение задания B15 легко переносится в электронную таблицу или на язык программирования, и выбор можно оставить за учеником. Возможно, когда-нибудь так и будет. На пути к ответу ученик пройдет все этапы: от построения математической модели до ответа.