Задачи ЕГЭ №18 с делимостью

Метод Здвижковой А.В. для решения задач с поразрядными операциями можно применить и для задач следующего типа:

Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$(\neg ДЕЛ(x, A) \wedge ДЕЛ(x, 6)) \rightarrow \neg ДЕЛ(x, 3)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)? (сайт Полякова К.Ю., документ ege18.doc, задача для тренировки 120).

Введем обозначения: ДЕЛ(x,k) - D_k.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. $D_k \wedge D_n = D_m$, где m=НОК(k,n), то есть множество простых делителей (1) числа m является объединением множеств простых делителей чисел k и n. (1)
2. $D_k \rightarrow D_n$ истинно тогда и только тогда, когда множество простых делителей числа n является подмножеством простых делителей числа k. (2)

Решение задачи сводится к приведению высказывания к <u>одной</u> импликации с последующим анализом простых делителей чисел.

Для решения задач используются также некоторые свойства импликации

$$A \rightarrow B \vee C = (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C) \qquad (3)$$

$$A \vee B \rightarrow C = (A \rightarrow C) \cdot (B \rightarrow C) \qquad (4)$$

(операция $\vee$ имеет более высокий приоритет, чем импликация, поэтому скобки можно не ставить)

Примеры (сайт Полякова К.Ю., документ ege18.doc)

120) Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$(\neg ДЕЛ(x, A) \wedge ДЕЛ(x, 6)) \rightarrow \neg ДЕЛ(x, 3)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение

Запишем высказывание в других обозначениях: $\overline{D_A} \cdot D_6 \to \overline{D_3}$. Заменим импликацию дизъюнкцией и применим закон Моргана:

$$\overline{D_A} \cdot D_6 \to \overline{D_3} = D_A \vee \overline{D_6} \vee \overline{D_3} = D_A \vee \overline{D_6 \cdot D_3}$$

$D_6 \cdot D_3 = D_6$ согласно (1).

Запишем высказывание теперь в виде импликации

$$D_A \vee \overline{D_6 \cdot D_3} = D_6 \to D_A$$

Согласно (2) А может быть равно 1,2,3 или 6; максимальное – 6.

Ответ: 6.

125) Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наибольшего натурального числа A формула

(¬ДЕЛ(x, A) $\wedge$ ¬ДЕЛ(x, 6)) $\to$ ¬ДЕЛ(x, 3)

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение

Запишем высказывание в других обозначениях: $\overline{D_A} \cdot \overline{D_6} \to \overline{D_3}$. Применим закон Моргана, заменим импликацию дизъюнкцией:

$$\overline{D_A} \cdot \overline{D_6} \to \overline{D_3} = \overline{D_A \vee D_6} \to \overline{D_3} = D_A \vee D_6 \vee \overline{D_3} = D_3 \to D_A \vee D_6$$

Применяем равенство (3):

$$D_3 \to D_A \vee D_6 = (D_3 \to D_A) \vee (D_3 \to D_6)$$

Второе высказывание в данной дизъюнкции согласно (2) ложно, поэтому должно быть истинно первое высказывание. Следовательно, A=3.

Ответ: 3.

127) Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого **наименьшего** натурального числа A формула

(ДЕЛ(x, A) $\wedge$ ¬ДЕЛ(x, 15)) $\rightarrow$ (ДЕЛ(x, 18) $\vee$ ДЕЛ(x, 15))

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение

Запишем высказывание в других обозначениях: $D_A \cdot \overline{D_{15}} \rightarrow D_{18} \vee D_{15}$. Заменим импликацию дизъюнкцией и применим закон Моргана:

$$D_A \cdot \overline{D_{15}} \rightarrow D_{18} \vee D_{15} = \overline{D_A} \vee D_{15} \vee D_{18} \vee D_{15} = \overline{D_A} \vee D_{15} \vee D_{18} = D_A \rightarrow D_{15} \vee D_{18}$$

Применяем равенство (3):

$$D_A \rightarrow D_{15} \vee D_{18} = (D_A \rightarrow D_{15}) \vee (D_A \rightarrow D_{18})$$

Согласно (2) в А должны содержаться все простые делители числа 15 или числа 18. Так как требуется найти наименьшее значение, то ответ - 15.

Ответ: 15.

131) Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого **наименьшего** натурального числа A формула

(ДЕЛ(x, A) $\wedge$ ДЕЛ(x, 12)) $\rightarrow$ (ДЕЛ(x, 42) $\vee$ ¬ДЕЛ(x, 12))

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение

Запишем высказывание в других обозначениях: $D_A \cdot D_{12} \rightarrow D_{42} \vee \overline{D_{12}}$. Заменим импликацию дизъюнкцией и применим закон Моргана:

$$D_A \cdot D_{12} \rightarrow D_{42} \vee \overline{D_{12}} = \overline{D_A} \vee \overline{D_{12}} \vee D_{42} \vee \overline{D_{12}} = \overline{D_A} \vee \overline{D_{12}} \vee D_{42} = D_A \cdot D_{12} \rightarrow D_{42}$$

Простые делители числа 12: 2,2,3.

Простые делители числа 42: 2,3,7.

Чтобы выполнялось условие (2) (учитывая равенство (1)), достаточно А = 7.

Ответ: 7.

132) Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$\neg ДЕЛ(x, A) \to (\neg ДЕЛ(x, 24) \wedge \neg ДЕЛ(x, 36))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение

Запишем высказывание в других обозначениях: $\overline{D_A} \to \overline{D_{24}} \cdot \overline{D_{36}}$. Заменим импликацию дизъюнкцией и применим закон Моргана:

$$\overline{D_A} \to \overline{D_{24}} \cdot \overline{D_{36}} = D_A \vee \overline{D_{24} \vee D_{36}} = D_{24} \vee D_{36} \to D_A$$

В данном случае можно было также воспользоваться равенством

$$A \to \bar{B} = B \to \bar{A}$$

Применяем равенство (4):

$$D_{24} \vee D_{36} \to D_A = (D_{24} \to D_A) \cdot (D_{36} \to D_A)$$

Истинными должны быть оба высказывания.

Простые делители числа 24: 2,2,2,3.

Простые делители числа 36: 2,2,3,3.

Согласно (2) простые делители числа А должны содержаться и во множестве $\{2,2,2,3\}$и во множестве $\{2,2,3,3\}$. Максимальное возможное множество, удовлетворяющее этим условиям – $\{2,2,3\}$. Ответ -12.

Ответ: 12.

143) Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наименьшего натурального числа A формула

$$(ДЕЛ(x, 45) \wedge \neg ДЕЛ(x, 15)) \to \neg ДЕЛ(x, A)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение

Запишем высказывание в других обозначениях: $D_{45} \cdot \overline{D_{15}} \to \overline{D_A}$. Заменим импликацию дизъюнкцией и применим закон Моргана:

$$D_{45} \cdot \overline{D_{15}} \to \overline{D_A} = \overline{D_{45}} \vee D_{15} \vee \overline{D_A} = \overline{D_A \cdot D_{45}} \vee D_{15} = D_A \cdot D_{45} \to D_{15}$$

Согласно (2) все простые делители числа 15 (а это 3 и 5) должны входить в объединенное множество делителей А и 45. Так как 45 нацело делится на 15, что и означает выполнение этого условия, то А может быть любым натуральным числом.

Ответ: 1.