Множества и логика в задачах ЕГЭ

К.Ю. Поляков,
д. т. н., Санкт-Петербург,
http://kpolyakov.spb.ru

Не секрет, что в последние годы ЕГЭ по информатике усложняется, "центр тяжести" заданий явно смещается в сторону математики и программирования [1]. Одно из направлений "главного удара" — это задачи на математическую логику, которые традиционно вызывают проблемы. Достаточно вспомнить задачу 23, бывшую B15 (см. [2] и приведенный там список литературы).

В прошедшем учебном году на учительских форумах больше всего обсуждались задачи на логику и множества (задачи типа 18 в [1]). Один из вариантов этой задачи ("задача про отрезки") уже рассматривался в статье [3]. Однако, как показала практика, любое изменение формулировки приводит в замешательство как школьников, так и многих учителей. Задача этой статьи — разобраться в общей основе, которая есть во всех задачах этого типа, и предложить общие подходы к их решению. Задачи для тренировки с ответами интересующийся читатель может найти на сайте [4].

Что нужно знать?

Приведем кратко те сведения из теории, которыми нужно владеть для того, чтобы решать такие задачи. Прежде всего мы рассматриваем задачи на множества, поэтому будем использовать основные операции с множествами.

Множество можно задать перечислением его элементов или с помощью логического выражения (условия), которое истинно для каждого элемента множества и ложно для всех элементов, не входящих во множество.

В любой задаче можно выделить некоторое "универсальное" множество, в которое входят все объекты, рассматриваемые в задаче. В качестве такого универсального множества может быть выбрано, например, множество точек числовой прямой; множество точек, принадлежащих отрезку; множество всех натуральных чисел; множество чисел, которые делятся на некоторое число или еще какое-то другое множество.

Основные операции над множествами — это дополнение (до выбранного универсального множества), пересечение и объединение.

Пусть A — это некоторое множество. Через $\bar{A}$ обозначают дополнение множества A до универсального множества, которое рассматривается в задаче. Например, если A — это множество точек, принадлежащих отрезку, то $\bar{A}$ — это множество точек, не принадлежащих этому отрезку (здесь универсальное множество — это множество всех точек числовой оси). Если A — множество натуральных чисел, которые делятся на некоторое число a, то $\bar{A}$ — это множество натуральных чисел, которые не делятся на a (здесь универсальное множество — это множество всех натуральных чисел).

Операции пересечения и объединения множеств будем обозначать так же, как и операции логического умножения и сложения. Через $A \cdot B$ обозначим пересечение множеств A и B, то есть все элементы, которые входят одновременно в A и B, а через $A+B$ — объединение множеств A и B, то есть все элементы, которые входят хотя бы в одно из двух множеств.

Другая часть теории, которой необходимо владеть, — это упрощение логических выражений и приведение их к некоторой стандартной форме, которая облегчает решение. Для этого пригодятся представление импликации в виде $A \to B = \bar{A} + B$ и законы де Моргана: $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$, $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$. Эта тема подробно разбиралась в статье [2].

Базовые факты и задачи

Операции с множествами тесно связаны с логическими операциями. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — логические выражения, которые определяют множества A и B. Тогда:

- выражение $\bar{\mathbf{A}}$ (“**не A**”) задает множество $\bar{A}$;
- выражение $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (“**A и B**”) задает множество $A \cdot B$;
- выражение $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (“**A или B**”) задает множество $A + B$.

Как мы покажем далее, многие задачи ЕГЭ на математическую логику сводятся к двум базовым задачам, в которых нужно найти дополнение какого-то множества.

Задача 1. *Каким должно быть множество A для того, чтобы множество $A + B$ совпадало с универсальным множеством?*

Очевидно, что можно выбрать в качестве решения дополнение множества B до универсального множества: $\bar{B}$. Множество $A_{\min} = \bar{B}$ — это минимальное множество, которое является решением задачи. Кроме того, решением будет и любое множество, включающее $\bar{B}$, то есть любое A, такое, что $A \geq \bar{B}$ (или, используя обозначения теории множеств, $A \supseteq \bar{B}$).

Заметим, что множество $A + B$, которое должно по условию задачи совпадать с универсальным множеством, определяется логическим выражением $\mathbf{A} + \mathbf{B}$. Это выражение может быть преобразовано, с учетом свойств импликации, к форме $\bar{\mathbf{B}} \to \mathbf{A}$. Переход от условия $\mathbf{A} + \mathbf{B} = 1$ к условию $\bar{\mathbf{B}} \to \mathbf{A} = 1$ в некоторых случаях упрощает решение задач.

Задача 2. *Каким должно быть множество A для того, чтобы множество $\bar{A} + B$ совпадало с универсальным множеством?*

В этом случае получаем $\bar{A} \geq \bar{B}$, откуда сразу следует, что $A \leq B$, то есть множество A должно быть подмножеством множества B ($A \subseteq B$). Тогда максимальное множество A, которое является решением, совпадает с B: $A_{\max} = B$.

В некоторых случаях задача упрощается, если заменить условие $\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{B} = 1$, определяющее множество $\bar{A} + B$, на эквивалентное условие $\mathbf{A} \to \mathbf{B} = 1$ или $\bar{\mathbf{B}} \to \bar{\mathbf{A}} = 1$.

Таким образом, конкретную задачу на множества и математическую логику нужно попытаться привести к форме Задачи 1 или Задачи 2, а затем использовать готовое решение. Далее мы разберем задачи с различной формулировкой на эту тему.

Отрезки

Задача 3 [1]. *На числовой прямой даны два отрезка: P = [37; 60] и Q = [40; 77]. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A, что выражение*

$$(x \in P) \to (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in P))$$

истинно при любом значении переменной x.

Обозначим условия, показывающие принадлежность числа x к множествам, следующим образом:

$$\mathbf{P} = (x \in P),\ \mathbf{Q} = (x \in Q),\ \mathbf{A} = (x \in A).$$

Тогда логическое выражение, соответствующее условию задачи, может быть записано так:

$$\mathbf{P} \to (\mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{A}} \to \bar{\mathbf{P}}).$$

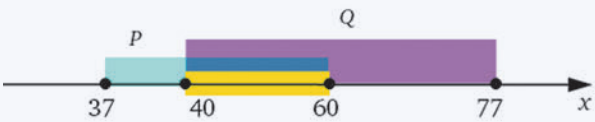
Используя свойство импликации $A \to B = \bar{A} + B$ и закон де Моргана $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$, получаем

$$\mathbf{P} \to (\mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{A}} \to \bar{\mathbf{P}}) = \bar{\mathbf{P}} + (\mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{A}} \to \bar{\mathbf{P}}) = \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{A} + \bar{\mathbf{P}} = \mathbf{A} + \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{Q}}.$$

В результате мы свели задачу к базовой Задаче 1, где $B = \bar{P} + \bar{Q}$. Ее решение

$$A_{\min} = \overline{\bar{P} + \bar{Q}} = P \cdot Q$$

— это пересечение множеств P и Q, то есть общая часть двух отрезков. В нашей задаче это отрезок [40; 60] (он обозначен желтым цветом на рисунке), его длина — 20.



Ответ: 20.

Задача 4. *На числовой прямой даны два отрезка: P = [10; 20] и Q = [25; 55]. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка A, что выражение*

$$(x \in A) \to ((x \in P) \in (x \in Q))$$

истинно при любом значении переменной x.

При введенных ранее обозначениях логическое выражение, соответствующее условию задачи, может быть записано в виде:

$\mathbf{A} \to (\mathbf{P}+\mathbf{Q})$.

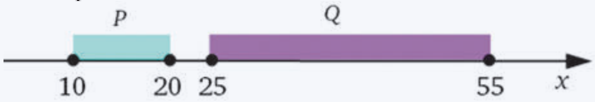
Используя свойство импликации $A \to B = \bar{A}+B$, получаем

$$\mathbf{A} \to (\mathbf{P}+\mathbf{Q}) = \bar{\mathbf{A}}+\mathbf{P}+\mathbf{Q}.$$

Мы свели задачу к базовой Задаче 2, где $B = P+Q$. Ее решение

$$A_{max} = P+Q$$

— это объединение множеств P и Q, включающее оба отрезка:



Нужно учесть, что множество A — это один отрезок, а множество $P+Q$ — это объединение двух непересекающихся отрезков. Отрезок нельзя разделить на две части, поэтому обеспечить выполнение условия $A = P+Q$ невозможно. Самое лучшее, что можно сделать, — это выбрать наибольший из двух отрезков, в данном случае $A = Q$. Длина этого отрезка — 30.

Ответ: 30.

Множества чисел

Задача 5. *Элементами множеств A, P и Q являются натуральные числа, причем*

$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ *и* $Q = \{4, 8, 12, 116\}$.

Известно, что выражение

$(x \in P) \to (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in P))$

истинно при любом значении переменной x. Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества A.

Обозначим

$$\mathbf{P} = (x \in P),\ \mathbf{Q} = (x \in Q),\ \mathbf{A} = (x \in A).$$

Тогда логическое выражение, соответствующее условию задачи, может быть записано так:

$$\mathbf{P} \to (\mathbf{Q}\cdot\bar{\mathbf{A}} \to \bar{\mathbf{P}}).$$

Заметим, что это выражение совпадает с аналогичным выражением для Задачи 3. Применяя те же преобразования, получаем

$$\mathbf{P} \to (\mathbf{Q}\cdot\bar{\mathbf{A}} \to \bar{\mathbf{P}}) = \mathbf{A}+\bar{\mathbf{P}}+\bar{\mathbf{Q}}.$$

В результате мы свели задачу к базовой Задаче 1, где $B = \bar{P}+\bar{Q}$. Ее решение

$$A_{\min} = \overline{\bar{P}+\bar{Q}} = P\cdot Q$$

— это пересечение множеств P и Q, то есть множество общих элементов P и Q. Поэтому

$$A_{\min} = \{4, 8, 12\}.$$

Сумма элементов этого множества равна 24.

Ответ: 24.

Задача 6. *Элементами множеств A, P и Q являются натуральные числа, причем*

$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ *и*

$Q = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$.

Известно, что выражение

$((x \in A) \to \neg(x \in P)) \wedge (\neg(x \in Q) \to \neg(x \in A))$

истинно при любом значении переменной x. Определите наибольшее возможное количество элементов множества A.

Введем обозначения

$$\mathbf{P} = (x \in P),\ \mathbf{Q} = (x \in Q),\ \mathbf{A} = (x \in A).$$

Тогда логическое выражение, соответствующее условию задачи, может быть записано так:

$$(\mathbf{A} \to \bar{\mathbf{P}})\cdot(\bar{\mathbf{Q}} \to \bar{\mathbf{A}}).$$

Используя свойство импликации $A \to B = \bar{A}+B$ и закон поглощения $A + A\cdot B = A$, получаем

$$(\mathbf{A} \to \bar{\mathbf{P}})\cdot(\bar{\mathbf{Q}} \to \bar{\mathbf{A}}) = (\bar{\mathbf{A}}+\bar{\mathbf{P}})\cdot(\mathbf{Q}+\bar{\mathbf{A}}) =$$

$$= \bar{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{Q}+\bar{\mathbf{P}}\cdot\bar{\mathbf{A}}+\bar{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{Q}+\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}+\bar{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{Q}.$$

В результате мы свели задачу к базовой Задаче 2, где $B = \bar{P}\cdot Q$. Ее решение

$$A_{\max} = \bar{P}\cdot Q$$

— это пересечение множеств $\bar{P}$ и Q, то есть все элементы, которые входят в Q и не входят в P:

$$A_{\max} = \{3, 9, 15, 21, 24, 27, 30\}.$$

Количество элементов этого множества равно 7.

Ответ: 7.

Делимость

В следующих задачах $ДЕЛ(n,\ m)$ обозначает утверждение *“натуральное число n делится без остатка на натуральное число m”*.

Здесь и далее в этом разделе мы будем обозначать через D_N множество натуральных чисел, делящихся на N. Жирным прямым шрифтом обозначим условия

$$\mathbf{D}_N = (x \in D_N),\ \mathbf{A} = (x \in D_A).$$

Задача 7. *Для какого наибольшего натурального числа A выражение*

$\neg ДЕЛ(x, A) \to (ДЕЛ(x, 6) \to \neg ДЕЛ(x, 4))$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Истинным для всех x должно быть выражение

$$\bar{\mathbf{A}} \to (\mathbf{D}_6 \to \bar{\mathbf{D}}_4).$$

Упростим это выражение, раскрыв импликацию по правилу $A \to B = \bar{A}+B$:

$$\bar{\mathbf{A}} \to (\mathbf{D}_6 \to \bar{\mathbf{D}}_4) = \mathbf{A}+\bar{\mathbf{D}}_6+\bar{\mathbf{D}}_4.$$

Мы свели задачу к базовой Задаче 1, где $B = \bar{D}_6+\bar{D}_4$. Ее решение

$$D_{A\ \min} = \overline{\bar{D}_6+\bar{D}_4} = D_6\cdot D_4$$

— это множество всех чисел, которые делятся одновременно на 4 и 6, то есть делятся на наименьшее общее кратное чисел 4 и 6 — число 12. Поэтому 12 — это и есть наибольшее возможное значение A.

Почему 12 — это именно *наибольшее* возможное значение, хотя мы искали минимальное множество $D_{A\ \min}$? Дело в том, что в качестве A можно выбрать любой делитель 12: 1, 2, 3, 4, 6 или 12. Но при уменьшении A соответствующее множество D_A расширяется. Например, при $A = 1$ множество D_A включает все натуральные числа, а не только кратные 12. Поэтому максимальному A соответствует минимальное множество D_A. Брать значение A больше, чем 12, нельзя, потому что в соответствующее множество D_A войдут не все элементы множества $D_6\cdot D_4$ (например, не войдет число 12).

Ответ: 12.

Задача 8. *Для какого наибольшего натурального числа А выражение*

$$\neg ДЕЛ(x, A) \to (\neg ДЕЛ(x, 21) \wedge \neg ДЕЛ(x, 35))$$

тождественно истинно?

Истинным для всех *x* должно быть выражение

$$\mathbf{\bar{A} \to (\bar{D}_{21} \cdot \bar{D}_{35})}.$$

Раскроем импликацию по правилу $A \to B = \bar{A} + B$:

$$\mathbf{\bar{A} \to (\bar{D}_{21} \cdot \bar{D}_{35}) = A + \bar{D}_{21} \cdot \bar{D}_{35}}.$$

Мы свели задачу к базовой Задаче 1, где $B = \bar{D}_{21} \cdot \bar{D}_{35}$. Ее решение:

$$D_{A\ \min} = \overline{\bar{D}_{21} \cdot \bar{D}_{35}} = D_{21} + D_{35}$$

— это множество чисел, которые делятся на 21 или на 35.

Получить множество $D_{A\ \min}$ с помощью одной операции *ДЕЛ* невозможно. Заметим, что любое множество D_A, где *A* — какой-нибудь общий делитель чисел 21 и 35, содержит $D_{A\ \min}$ (все числа, делящиеся на 21 или на 35). Так как 7 — это наибольший общий делитель этих чисел, множество D_7 — это минимальное множество, которое включает $D_{A\ \min}$ (напомним, что чем больше *A*, тем меньше множество D_A). Поэтому наибольшее значение *A* равно 7.

Ответ: 7.

Задача 9. *Для какого наименьшего натурального числа А выражение*

$$ДЕЛ(x, A) \to (ДЕЛ(x, 21) \vee ДЕЛ(x, 35))$$

тождественно истинно?

Истинным для всех *x* должно быть выражение

$$\mathbf{A \to (D_{21} + D_{35})}.$$

Раскроем импликацию по правилу $A \to B = \bar{A} + B$:

$$\mathbf{A \to (D_{21} + D_{35}) = \bar{A} + D_{21} + D_{35}}.$$

Мы свели задачу к базовой Задаче 2, где $B = D_{21} + D_{35}$. Ее решение:

$$D_{A\ \max} = D_{21} + D_{35}$$

— это множество чисел, которые делятся на 21 или на 35. Получить такое множество в точности с помощью операции *ДЕЛ* не удается; нужное нам множество должно входить во множество $D_{21} + D_{35}$.

Можно выбрать в качестве *A* число 21 или число 35, так как $D_{21} \le D_{21} + D_{35}$ и $D_{35} \le D_{21} + D_{35}$. А вот числа, меньшие, чем 21, выбирать нельзя: при этом множество D_A не будет подмножеством $D_{21} + D_{35}$. Например, при выборе *A* = 7 множество D_7 содержит числа 7, 14, 28 и др., которые не делятся ни на 21, ни на 35.

Ответ: 21.

Задача 10. *Для какого наименьшего натурального числа А выражение*

$$ДЕЛ(x, A) \to (\neg ДЕЛ(x, 21) \wedge ДЕЛ(x, 35))$$

тождественно истинно?

Истинным для всех *x* должно быть выражение

$$\mathbf{A \to (\bar{D}_{21} + D_{35})}.$$

Раскроем импликацию по правилу $A \to B = \bar{A} + B$:

$$\mathbf{A \to (\bar{D}_{21} + D_{35}) = \bar{A} + \bar{D}_{21} + D_{35}}.$$

Мы свели задачу к базовой Задаче 2, где $B = \bar{D}_{21} + D_{35}$. Ее решение:

$$D_{A\ \max} = \bar{D}_{21} + D_{35}$$

— это множество чисел, которые не делятся на 21, плюс множество чисел, которые делятся на 35. Пока достаточно тяжело сказать, какое значение *A* нужно выбрать.

Удобнее преобразовать выражение к такой форме:

$$\mathbf{\bar{A} + \bar{D}_{21} + D_{35} = (A \cdot D_{21}) \to D_{35}}.$$

Это означает, что если число делится на *A* и делится на 21, то оно делится и на 35.

Если натуральное число *x* делится на *A*, то его можно записать в виде $x = A \cdot k$ для некоторого натурального *k*. Аналогично, если *x* делится на 21, то $x = 21 \cdot m$ для некоторого натурального *m*, а если оно делится на 35, то $x = 35 \cdot q$ для некоторого натурального *q*.

Представим числа 21 и 35 в виде произведения простых сомножителей:

$$21 = 3 \cdot 7,\ 35 = 5 \cdot 7.$$

Таким образом, при любом значении *k* число $x = A \cdot k = 3 \cdot 7 \cdot m$ должно делиться на $35 = 5 \cdot 7$. Для этого нужно с помощью сомножителя *A* добавить в произведение $A \cdot k = 3 \cdot 7 \cdot m$ недостающий сомножитель 5, который есть среди простых сомножителей числа 35, но отсутствует среди простых сомножителей числа 21. Этого будет достаточно, чтобы обеспечить делимость числа $A \cdot k = 3 \cdot 7 \cdot m$ на 35, поскольку сомножитель 7 там уже и так есть. Заметим, что в качестве *A* можно взять любое число, кратное 5, но минимальное возможное значение — это 5.

Ответ: 5.

Задача 11. *Для какого наименьшего натурального числа А выражение*

$$(ДЕЛ(x, A) \wedge ДЕЛ(x, 21)) \to ДЕЛ(x, 18)$$

тождественно истинно?

Истинным для всех *x* должно быть выражение

$$\mathbf{(A \cdot D_{21}) \to D_{18}}.$$

Это означает, что нужно выбрать такое *A*, что если число делится на *A* и делится на 21, то оно должно делиться на 18.

Рассуждая так же, как и при решении предыдущей задачи, находим, что при любом значении *k* число $x = A \cdot k = 3 \cdot 7 \cdot m$ должно делиться на $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$. Для этого нужно с помощью сомножителя *A* добавить в произведение $A \cdot k = 3 \cdot 7 \cdot m$ недостающие сомножители 2 и 3. Этого будет достаточно, чтобы обеспечить делимость числа $A \cdot k = 3 \cdot 7 \cdot m$ на 18, поскольку один сомножитель 3 там уже и так есть.

Кажется, что можно принять $A = 2 \cdot 3$, но это не так. Действительно, при таком выборе *A* получаем $x = 2 \cdot 3 \cdot k = 3 \cdot 7 \cdot m$, что гарантирует делимость числа на 2 и 3, но не гарантирует его делимость на 9, поскольку одна тройка в правой части уже была. Поэтому среди сомножителей *A* тройка должна встречаться дважды, то есть $A = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

Ответ: 18.

Побитовые операции

В следующих задачах выражение *M* & *K* обозначает поразрядную конъюнкцию *M* и *K* (логическое "И" между соответствующими битами двоичной записи).

Задача 12. *Определите наименьшее натуральное число А, такое, что выражение*

$$(x \,\&\, 53 \ne 0) \to ((x \,\&\, 41 = 0) \to (x \,\&\, A \ne 0))$$

тождественно истинно?

Обозначим через D_N множество натуральных чисел, для которых побитовая конъюнкция с числом N дает ненулевое значение:

$$D_N = \{x\colon x \mathbin{\&} N \neq 0\}.$$

Введем условия: $\mathbf{D}_N = (x \in D_N)$, $\mathbf{A} = (x \in D_A)$.

Преобразуем исходное выражение, используя свойство импликации $A \to B = \overline{A} + B$:

$$\mathbf{D_{53}} \to (\overline{\mathbf{D}}_{41} \to \mathbf{A}) = \mathbf{D_{53}} \to (\mathbf{D}_{41} + \mathbf{A}) = \mathbf{A} + \overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{53}} + \mathbf{D}_{41}.$$

Таким образом, мы пришли к базовой Задаче 1, где $B = \overline{D}_{53} + D_{41}$. Ее решение:

$$D_{A\,\min} = \overline{\overline{D}_{53} + D_{41}} = D_{53} \cdot \overline{D}_{41}.$$

Минимальное множество $D_{A\,\min}$ определяется одновременным выполнением двух условий:

$$x \mathbin{\&} 53 \neq 0 \text{ и } x \mathbin{\&} 41 = 0.$$

Теперь посмотрим, что означают эти условия такого типа. Для примера возьмем условие $x \mathbin{\&} 53 \neq 0$. Побитовая конъюнкция (операция "И") применяется к соответствующим битам чисел x и 53, где 53 выполняет роль маски. Запишем число 53 в двоичной системе счисления:

$$53 = 32 + 16 + 4 + 1 = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0 = 110101_2.$$

В двоичном коде числа 53 будут равны 1 (установлены) только биты с номерами 0, 2, 4 и 5.

После выполнения побитовой операции "И" сохраняются только те биты числа x, для которых соответствующие биты маски равны 1, остальные (соответствующие нулевым битам маски) обнуляются:

номер бита	5	4	3	2	1	0
53 =	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
x **=**	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
x **& 53 =**	**a**	**b**	**0**	**d**	**0**	**f**

Поэтому

- условие $x \mathbin{\&} 53 \neq 0$ означает, что среди битов $\{5, 4, 2, 0\}$ числа x есть ненулевые;
- условие $x \mathbin{\&} 53 = 0$ означает, что биты $\{5, 4, 2, 0\}$ числа x нулевые.

Итак, условие $\mathbf{D_{53}}$ обозначает, что среди битов $\{5, 4, 2, 0\}$ числа x есть ненулевые.

Запишем в двоичном коде число

$$41 = 32 + 8 + 1 = 2^5 + 2^3 + 2^0 = 101001_2.$$

Выполнение условия $\overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{41}}$ означает, что биты $\{5, 3, 0\}$ числа x — нулевые.

Если выполняется условие $\mathbf{D_{53}} \cdot \overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{41}}$, определяющее нужное нам множество, то среди битов $\{4, 2\}$ числа x есть ненулевые. Для всех таких чисел $x \mathbin{\&} A \neq 0$, где A может быть любым числом, у которого биты 4 и 2 равны 1. Минимальное из таких чисел равно $2^4 + 2^2 = 20$.

Возможен несколько другой подход, при котором логическое выражение сводится к импликации, содержащей **A** в правой части:

$$\mathbf{A} + \overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{53}} + \mathbf{D}_{41} = \overline{\overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{53}} + \mathbf{D}_{41}} \to \mathbf{A} = (\mathbf{D_{53}} \cdot \overline{\mathbf{D}}_{41}) \to \mathbf{A}.$$

Одновременное выполнение условий $\mathbf{D_{53}}$ и $\overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{41}}$ означает, что

- среди битов $\{5, 4, 2, 0\}$ числа x есть ненулевые;
- все биты $\{5, 3, 0\}$ числа x нулевые.

Следовательно, среди битов $\{4, 2\}$ есть ненулевые. Это (минимальное) множество определяется условием $x \mathbin{\&} A \neq 0$, где $A = 2^4 + 2^2 = 20$.

Подходят также любые другие значения A, в которых биты $\{4, 2\}$ равны 1, но все они больше, чем 20.

Ответ: 20.

Задача 12. *Определите наибольшее натуральное число A, такое, что выражение*

$$(x \mathbin{\&} A \neq 0) \to ((x \mathbin{\&} 20 = 0) \to (x \mathbin{\&} 5 \neq 0))$$

тождественно истинно?

Используя обозначения, введенные в предыдущей задаче, преобразуем выражение с помощью свойства импликации $A \to B = \overline{A} + B$:

$$\mathbf{A} \to (\overline{\mathbf{D}}_{20} \to \mathbf{D}_5) = \overline{\mathbf{A}} + (\overline{\mathbf{D}}_{20} \to \mathbf{D}_5) = \overline{\mathbf{A}} + \mathbf{D_{20}} + \mathbf{D}_5.$$

Таким образом, мы пришли к базовой Задаче 2, где $B = D_{20} + D_5$. Ее решение

$$D_{A\,\max} = D_{20} + D_5.$$

Максимальное множество определяется выполнением одного из двух условий:

$$x \mathbin{\&} 20 \neq 0 \text{ или } x \mathbin{\&} 5 \neq 0.$$

Представим числа 20 и 5 в двоичной системе счисления:

$$20 = 16 + 4 = 2^4 + 2^2 = 10100_2,$$
$$5 = 4 + 1 = 2^2 + 2^0 = 101_2.$$

Как следует из решения предыдущей задачи,

- условие $x \mathbin{\&} 20 \neq 0$ означает, что среди битов $\{4, 2\}$ числа x есть ненулевые;
- условие $x \mathbin{\&} 5 \neq 0$ означает, что среди битов $\{2, 0\}$ числа x есть ненулевые.

Объединение этих множеств — это множество чисел, в двоичной записи которых среди битов $\{4, 2, 0\}$ есть ненулевые. Это (максимальное) множество определяется условием $x \mathbin{\&} A \neq 0$, где

$$A = 2^4 + 2^2 + 2^0 = 21.$$

Заметим, что заданное условие выполняется и для других значений A, в которых все биты, кроме битов $\{4, 2, 0\}$, равны нулю (например, для $A = 4$), но все эти значения меньше, чем 21.

Возможен и другой подход — на основе импликации. Перепишем условие так, чтобы в правой части импликации было выражение $\overline{\mathbf{A}}$:

$$\overline{\mathbf{A}} + \mathbf{D_{20}} + \mathbf{D}_5 = \overline{\mathbf{D_{20}} + \mathbf{D}_5} \to \overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{20}} \cdot \overline{\mathbf{D}}_5 \to \overline{\mathbf{A}}.$$

Посмотрим, что следует из одновременного выполнения условий $\overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{20}}$ и $\overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{5}}$:

- условие $x \mathbin{\&} 20 = 0$ означает, что биты $\{4, 2\}$ числа x нулевые;
- условие $x \mathbin{\&} 5 = 0$ означает, что биты $\{2, 0\}$ числа x нулевые.

Отсюда следует, что биты $\{4, 2, 0\}$ числа x нулевые. В результате поразрядной конъюнкции эти биты значения A обнулятся, поэтому они могут быть равны единице, и при этом выражение $\overline{\mathbf{A}}$ останется истинно. Если же какие-то другие биты числа A будут равны 1, то результат будет зависеть от x, потому что соответствующие биты значения x могут быть также равны 1, и в этом случае выражение $\overline{\mathbf{A}}$ будет ложно. Следовательно, максимальное значение A, при котором выполняется условие, равно

$$A = 2^4 + 2^2 + 2^0 = 21.$$

Ответ: 21.

Битовые цепочки*

Задача 13. *Пусть P — множество всех 8-битовых цепочек, начинающихся с 1, Q — множество всех*

* Эта задача предложена Е.В. Хламовым.

8-битовых цепочек, оканчивающихся на 000, а A — некоторое множество произвольных 8-битовых цепочек. Сколько элементов содержит минимальное множество A, при котором для любой 8-битовой цепочки x истинно выражение

$$\neg(x \in A) \to (\neg(x \in P) \vee (x \in Q))?$$

Введем обозначения

$$\mathbf{P} = (x \in P), \mathbf{Q} = (x \in Q), \mathbf{A} = (x \in A).$$

Запишем условие в виде

$$\overline{\mathbf{A}} \to (\overline{\mathbf{P}} \to \mathbf{Q})$$

и раскроем импликацию по формуле $A \to B = \overline{A} + B$:

$$\overline{\mathbf{A}} \to (\overline{\mathbf{P}} \to \mathbf{Q}) = \mathbf{A} + \overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q}\ .$$

Мы получили базовую Задачу 1, где $B = \overline{P} + Q$, решение которой $A_{min} = \overline{\overline{P} + Q} = P \cdot \overline{Q}$. Это множество, состоящее из всех элементов множества *P*, не входящих во множество *Q*, то есть все 8-битовые цепочки, которые начинаются с 1 и оканчиваются не на 000.

Поскольку рассматриваются 8-битные цепочки, структура всех таких цепочек имеет вид **1********???**, где * обозначает любой из двух символов (0 или 1), а **???** — трехбитное окончание, не совпадающее с 000. Всего может быть $2^3 = 8$ комбинаций из трех битов, одно из них, 000, запрещено для окончания, поэтому остается еще 7 разрешенных вариантов.

Общее количество подходящих цепочек находим по правилам комбинаторики, перемножив количество вариантов для каждой части цепочки (1 для первого бита, по 2 для следующих четырех и 7 для трехбитного окончания):

$$1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 112.$$

Ответ: 112.

Автор благодарит д. ф.-м. н. М.А. Ройтберга за полезные замечания по содержанию статьи.

Литература

1. Демоверсия, спецификация, кодификатор ЕГЭ-2015 по информатике [Электронный ресурс] URL: *http://fipi.ru/sites/default/files/document/1409834615/inf11_2015.zip* (дата обращения 21.06.2014).
2. *Поляков К.Ю., Ройтберг М.А.* Системы логических уравнений: решение с помощью битовых цепочек // Информатика, № 12, 2014, с. 4–12.
3. *Поляков К.Ю.* ЕГЭ-А10: задачи с интервалами // Информатика, № 2, 2013, с. 4–9.
4. *Поляков К.Ю.* Подготовка к ЕГЭ по информатике [Электронный ресурс] URL: *http://kpolyakov.spb.ru/school/ege.htm* (дата обращения 21.06.2014).

ЛИЧНОСТИ

В Финляндии умер изобретатель технологии SMS

В конце июня 2015 года в Финляндии на 64-м году жизни после тяжелой болезни скончался инженер Матти Макконен — изобретатель технологии SMS.

Концепция SMS была создана Маккоmaterialized Макконеном в 1986 году, но первое короткое сообщение было послано лишь спустя восемь лет. В 2008 году ему была присвоена премия журнала “The Economist” в области инноваций. Инженер никогда не признавал себя “отцом SMS” и не патентовал свое изобретение, поскольку, по его мнению, этот титул был коллективным.

С журналистами Макконен тоже общался лишь посредством SMS, при этом он писал на правильном финском языке, используя все 160 символов.

“20 лет назад SMS не казалось мне чем-то особенным — это была просто одна из возможностей революционной системы мобильной связи, очень полезная для срочных деловых потребностей. Мы любили говорить о SMS и вещах подобного рода — 3G и так далее”, — рассказывал инженер.

Продолжение см. на с. 44

Фото с сайта *www.turktime.com*