

MASTER 1 MÉCANIQUE UPEC - UGE

TP1 - SIMULATION NUMÉRIQUE EN MÉCANIQUE DES FLUIDES

Cavité différentiellement chauffée

Auteurs :
LIBAT Louis

Date : 20 octobre 2022

Table des matières

Table des figures	i
1 Introduction	1
2 Modélisation	1
2.1 Équations sous forme dimensionnelle	1
2.2 Conditions aux limites	2
2.3 Équations sous forme adimensionnelle	2
3 Résolution du problème	3
3.1 Géométrie	3
3.2 Maillage	3
3.3 Résolution sous Fluent	3
4 Analyse des résultats	4
4.1 Visualisation des champs	4
4.2 Convergence en maillage	5
4.3 Essai avec différents nombres de Rayleigh	6
5 Conclusion	7
6 Appendix	8
Références	8

Table des figures

1	Maillage - Taille N=40	3
2	Résultats	4
3	Composante de vitesse sur le plan médian horizontale	4
4	Composante de vitesse sur le plan médian vertical	5
5	Erreur Nusselt en fonction de la taille du maillage	5
6	Profil de vitesse u en $x=H/2$ en fonction de y pour $Ra=10^6$ - Maillage 40	6
7	Profil de vitesse u en $x=H/2$ en fonction de y pour $Ra=10^6$ - Maillage 80	7
8	Profil de vitesse u en $x=H/2$ en fonction de y pour $Ra=10^6$ - Maillage 160	7
9	Résultats	8

1 Introduction

Le problème posé dans ce TP est celui de la cavité différentiellement chauffée. Il repose sur le principe de la convection qui est un mode de transfert de chaleur entre un fluide et un solide (parois). C'est un phénomène qui se retrouve dans la vie quotidienne dans notre habitat, autour de notre corps et dans de nombreux processus industriels.

Le cas de la cavité différentiellement chauffée est étudié depuis 1983 au travers de l'étude menée par Vahl Davis. L'enceinte est carrée et deux parois sont soumises à un écart de température ; les autres sont considérées adiabatiques.

Ce TP a pour but d'étudier le comportement thermique et dynamique du fluide présent dans l'enceinte carrée chauffée de côté H . Quelques hypothèses sont mises en place :

- Écoulement bi-dimensionnelle (2D)
- Incompressibilité du fluide newtonien
- Propriétés des fluides constantes
- Prise en compte de la gravité

2 Modélisation

On considère donc une cavité carrée ayant pour longueur H . Les parois haute et basse sont considérées adiabatiques mais les parois gauche et droite sont à des températures respectives T_c et T_f . On note $\Delta T = T_c - T_f$. Le mouvement du fluide est dû à la gravité qui est perpendiculaire au gradient de température. Avec les hypothèses énoncées précédemment, on considère donc les équations de Navier-Stokes incompressible et d'énergie. On applique l'approximation de Boussinesq-Oberbeck où :

$$\rho(T) = \rho_0(1 - \beta(T - T_0))$$

uniquement dans le terme de gravité et $\rho = \rho_0$ dans les autres termes.

2.1 Équations sous forme dimensionnelle

Les équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et d'énergie s'écrivent ainsi :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho_0(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \quad (2)$$

$$\rho_0(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g + \mu(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) \quad (3)$$

$$\rho_0 c_p(u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial y}) = \lambda(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}) \quad (4)$$

Or la pression motrice s'écrit :

$$p' = p + \rho_0 g y$$

Donc on peut réécrire, d'après l'approximation de Boussinesq-Oberbeck :

$$-\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g = -\frac{\partial p'}{\partial y} + \rho_0 g \beta(T - T_0)$$

Au final, les équations deviennent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$\rho_0(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \quad (6)$$

$$\rho_0(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial y}) = -\frac{\partial p'}{\partial y} + \rho_0 g \beta (T - T_0) + \mu (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) \quad (7)$$

$$\rho_0 c_p (u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial y}) = \lambda (\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}) \quad (8)$$

2.2 Conditions aux limites

Les parois hautes et basse sont considérées adiabatiques. Les conditions limites sont de type Neumann sur ces parois.

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x}(x, y = 0) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x}(x, y = H) = 0 \end{cases}$$

Les parois droite et gauche sont respectivement au température T_f et T_c . Les conditions limites sont de type Dirichlet sur ces parois.

$$\begin{cases} T(x = 0, y) = T_c \\ T(x = H, y) = T_f \end{cases}$$

Concernant la vitesse du fluide, il y a adhérence à la paroi.

$$u(x = H, y) = u(x = 0, y) = w(x = H, y) = w(x = 0, y) = 0$$

$$u(x, y = H) = u(x, y = 0) = w(x, y = H) = w(x, y = 0) = 0$$

2.3 Équations sous forme adimensionnelle

Afin de résoudre le système d'équation, il est nécessaire d'utiliser un système d'unité cohérent. On décide de choisir un adimensionnement permettant d'écrire les variables des équation de Navier-Stokes en fonction des caractéristiques de l'écoulement. Les variables adimensionnelles deviennent :

$$x^* = \frac{x}{H}, \quad y^* = \frac{y}{H}, \quad u^* = \frac{u}{u_{ref}}, \quad w^* = \frac{w}{w_{ref}}, \quad p^* = \frac{p}{\rho u_{ref}^2}, \quad T^* = \frac{T - T_f}{T_c - T_f}$$

L'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*} = 0$$

L'équation de conservation de quantité de mouvement devient :

$$\rho_0 (u^* u_{ref} \frac{\partial (u^* u_{ref})}{\partial (x^* H)} + w^* u_{ref} \frac{\partial (u^* u_{ref})}{\partial (y^* H)}) = -\frac{\partial (p^* \rho_0 u_{ref}^2)}{\partial (x^* H)} + \mu (\frac{\partial^2 (u^* u_{ref})}{\partial (x^* H)^2} + \frac{\partial^2 (u^* u_{ref})}{\partial (y^* H)^2})$$

En simplifiant :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu}{H \rho_0 u_{ref}} (\frac{\partial^2 u^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial (y^*)^2})$$

Or :

$$\frac{1}{Re} = \frac{\nu}{H u_{ref}} = \frac{\nu}{H \sqrt{g \beta \Delta T H}}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Ra = \frac{\beta g \Delta T H^3}{\nu}$$

Donc :

$$\frac{1}{Re} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}}$$

Au final :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} (\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}) \quad (9)$$

Pour la direction y, la démonstration est identique en ajoutant le terme $\rho_0 g \beta \Delta T$, ainsi :

$$u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} \right) - T^*$$

L'équation de conservation d'énergie avec les variables adimensionnelles devient :

$$\rho_0 c p (u^* u_{ref} \frac{\partial T^*}{\partial (x^* H)} + w^* u_{ref} \frac{\partial T^*}{\partial (y^* H)}) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial (x^* H)^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial (y^* H)^2} \right)$$

Or :

$$\frac{\alpha}{H u_{ref}} = \frac{1}{\sqrt{Ra Pr}}$$

Donc :

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\sqrt{Ra Pr}} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

3 Résolution du problème

La résolution du problème se fait grâce au solveur Fluent. Après avoir construit la géométrie (carrée de coté 1cm) via l'outil Design Modeler, le maillage est généré via l'outil Meshing. Le problème est ensuite résolu via le solveur Fluent.

3.1 Géométrie

La géométrie du problème est un carré de coté H=1cm.

3.2 Maillage

Le maillage mis en place ici est de type structuré composé de carrées élémentaires N sur chaque arêtes. Un raffinement est effectué sur les bord avec un rapport de taille de 2.

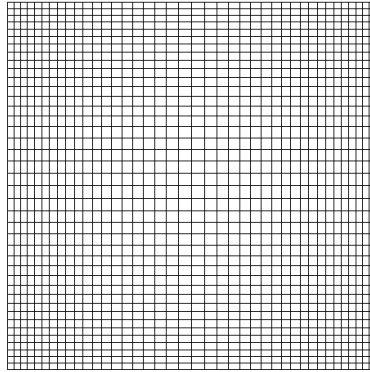


FIGURE 1 – Maillage - Taille N=40

3.3 Résolution sous Fluent

Grâce au solveur Fluent, on définit la physique mise en jeu, les conditions limites, les valeurs de références. On lance la simulation et on laisse itérer jusqu'à ce que les résidus atteignent la précision machine. On visualise ensuite les champs des grandeurs requises.

4 Analyse des résultats

La première simulation avec un maillage de taille $N=40$ donne les résultats suivants. Le nombre de Prandtl est bien $Pr=0.71$ et celui de Rayleigh $Ra = 10^3$.

4.1 Visualisation des champs

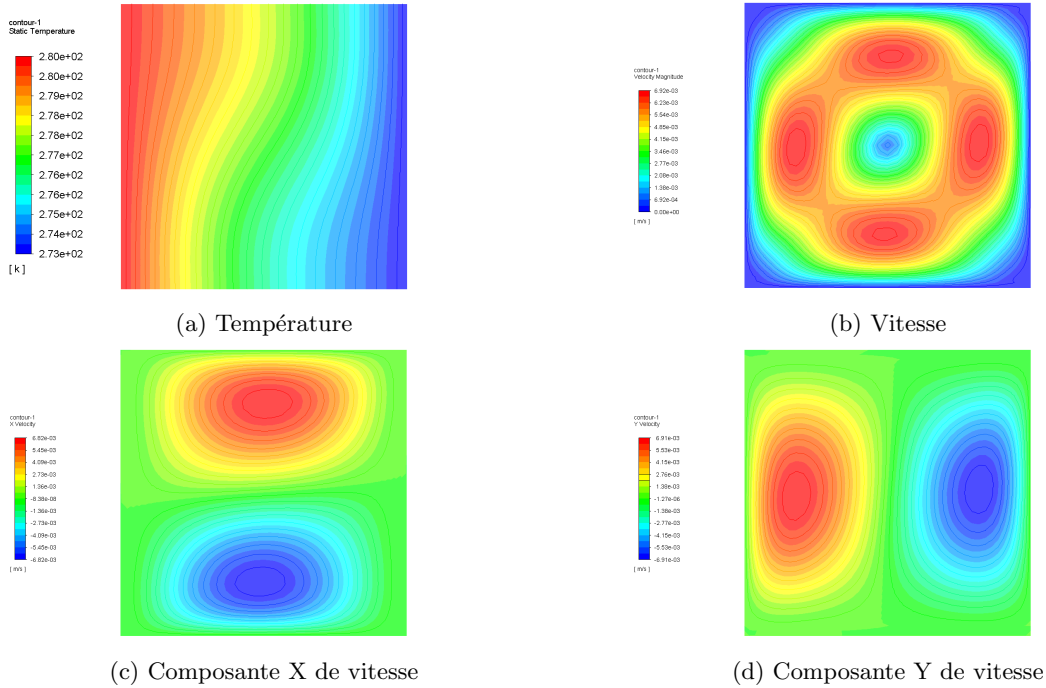


FIGURE 2 – Résultats

La présence d'une paroi chaude et d'une paroi froide entraîne l'apparition d'un gradient de température. De plus, les isothermes sont incurvées, significatif de l'approximation de Boussinesq. Les particules chaudes s'élèvent vers le haut de la cavité tandis que les plus froides tombent vers le bas. Concernant la vitesse, elle est nulle aux parois, traduisant la condition d'adhérence. Le champ de vitesse est circulaire. La composante x de vitesse est maximale et positive sur la partie supérieure de la cavité et est négative sur la partie basse de la cavité. Les particules situées en haut vont vers la droite alors que celles présentes en bas vont vers la gauche. La composante y de la vitesse est positive sur la partie gauche et est négative sur la partie droite. Les particules à gauche montent et celles situées à droite descendent. Le mouvement de la cellule de convection est donc bien circulaire.

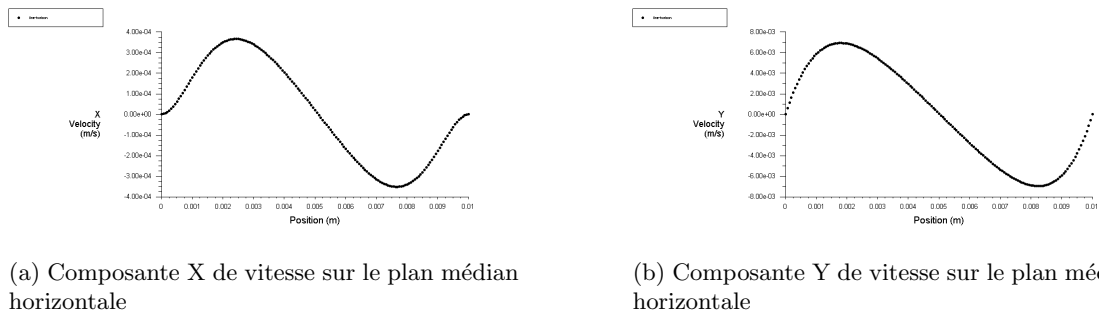
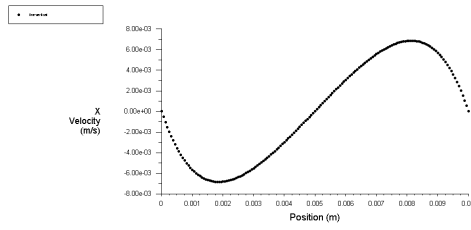
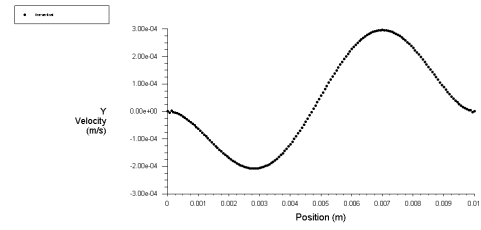


FIGURE 3 – Composante de vitesse sur le plan médian horizontale



(a) Composante X de vitesse sur le plan médian vertical



(b) Composante Y de vitesse sur le plan médian vertical

FIGURE 4 – Composante de vitesse sur le plan médian vertical

4.2 Convergence en maillage

L'étude de convergence en maillage est une partie essentielle d'un projet de simulation numérique. Un maillage dit "fin" est plus précis qu'un maillage dit "grossier", par contre le temps de calcul est lui plus important. Choisir un type de maillage fait partie du compromis entre précision et temps de calcul. La première étape d'une étude en convergence consiste à suivre l'évolution d'une grandeur ici le Nusselt en fonction du maillage. Puis une fois que le maillage est "bon" (L'erreur sur le Nusselt ne varie plus), on effectue une étude de convergence en résidu. On fait varier le critère d'arrêt des résidus de 10^{-3} à 10^{-15} .

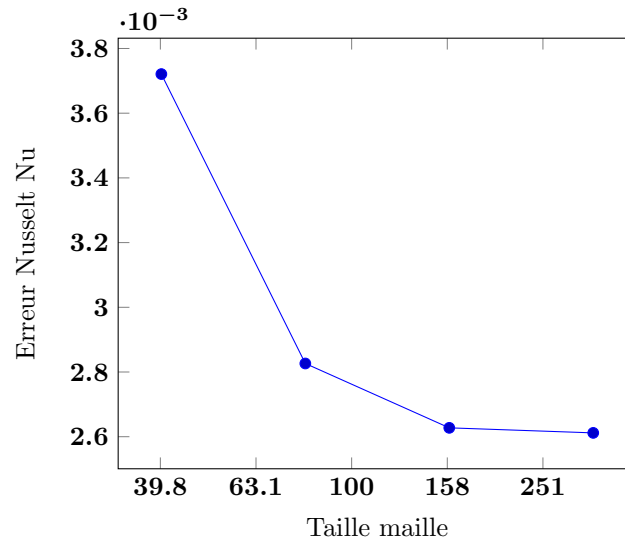


FIGURE 5 – Erreur Nusselt en fonction de la taille du maillage

Taille du maillage	Erreur Nu	Pm (Pa)	Vm (m/s)
40	0,0037209	1,9837e-4	4,1026e-3
80	0,0028263	1,4545e-4	4,0697e-3
160	0,0026274	1,1906e-4	4,0627e-3
320	0,0026118	1,1021e-4	4,0135e-3

TABLE 1 – Pression et vitesse moyenne, Erreur Nusselt en fonction du maillage pour $Ra=10^3$

On choisit un maillage de taille 160x160 permettant une solution de qualité tout en limitant le temps de calcul. On choisit le critère d'arrêt des résidus à 10^{-6} .

Résidus	Nb itérations
e-3	1
e-6	10000
e-9	10000
e-12	10000

TABLE 2 – Résidus

4.3 Essai avec différents nombres de Rayleigh

La dernière étape de l'étude est de faire varier le nombre de Rayleigh. Pour rappel, la formule pour calculer le nombre de Rayleigh est :

$$Ra = \frac{\beta g \Delta T H^3}{\mu \alpha}$$

Afin de faire varier le nombre de Rayleigh, tout en conservant le nombre de Prandtl et la taille de la géométrie, nous pouvons agir sur g et ΔT . On souhaite faire des essais pour des nombre de Rayleigh de 10^3 à 10^6 . On choisit donc de faire varier la valeur de g . Les résultats auraient été identique en faisant varier la valeur de ΔT .

Nombre de Rayleigh	10^3	10^4	10^5	10^6
Nu	1,1186274	2.2472069	4.525527	8.8446074
Umax(1/2,y)/(alpha/H)	3,65	16,2	34,9	65,2
Wmax(x,1/2)/(alpha/H)	3,70	19,7	68,6	221

TABLE 3 – Comparaison des différents paramètres pour différents nombre de Rayleigh

On remarque que les valeurs calculées via Fluent correspondent aux valeurs données dans le tableau du sujet.

On constate également que le nombre de Nusselt double lorsque l'on multiplie le Rayleigh par 10. Quelque soit le Rayleigh, les variations des différentes valeurs ont le même comportement.

Ces observations et ces résultats valident notre étude.

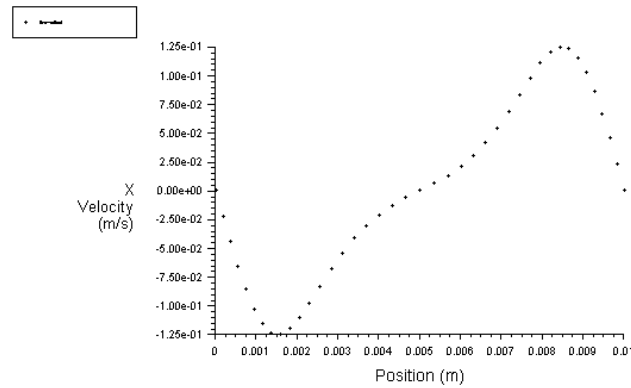


FIGURE 6 – Profil de vitesse u en $x=H/2$ en fonction de y pour $Ra=10^6$ - Maillage 40

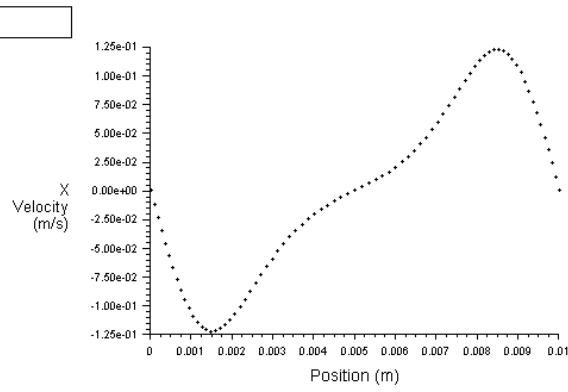


FIGURE 7 – Profil de vitesse u en $x=H/2$ en fonction de y pour $Ra=10^6$ - Maillage 80

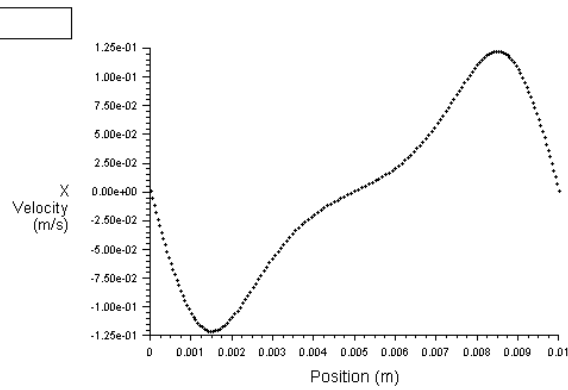


FIGURE 8 – Profil de vitesse u en $x=H/2$ en fonction de y pour $Ra=10^6$ - Maillage 160

5 Conclusion

Cette partie vient conclure ce travail riche d'enseignement à la fois sur le logiciel Ansys-Fluent mais aussi sur l'étude de la cavité thermique. Au travers d'une étude de convection naturelle en cavité carrée, ce TP nous a permis de mettre en application les notions de simulation numérique en mécanique des fluides. La taille du maillage, le critère d'arrêt des résidus sont des éléments permettant de réaliser un bon modèle et une bonne simulation numérique. L'étude en convergence du maillage permet de trouver le compromis entre précision et temps de calcul.

L'étude du nombre de Rayleigh nous informe du phénomène moteur principal dans la convection. Plus le nombre de Rayleigh augmente plus les iso-températures sont incurvées. Les résultats obtenus coïncident avec ceux donnés dans le tableau de référence.

6 Appendix

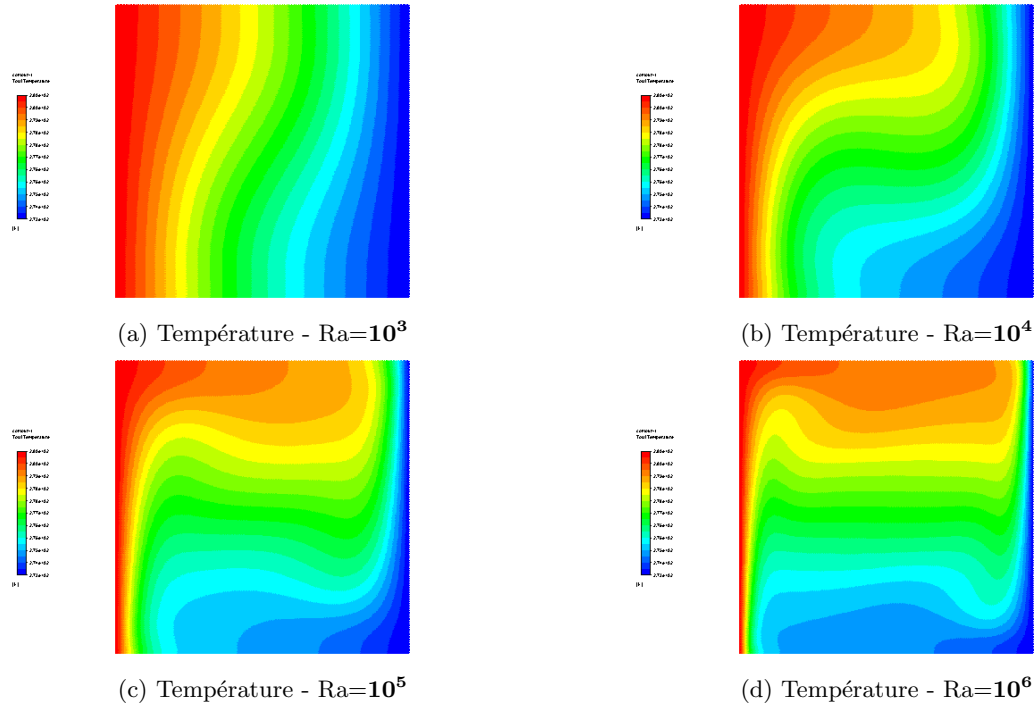


FIGURE 9 – Résultats

Références

- [1] G. de Vahl Davis, Natural convection in air square cavity : a benchmark numerical solution. Int. J. Numer. Meth. Fl., 3 :249–264, 1983.
- [2] Patrick Le Quéré. Accurate solutions to the square thermally driven cavity at high Rayleigh number. Comput. Fluids, 20 :29–41, 1991.
- [3] Francis Lénine, DJANNA KOFFI, Convection naturelle turbulente en cavité différentiellement chauffée a grands nombres de Rayleigh, école nationale Supérieure de mécanique et d'aérotechnique, 2011