6. **(Theoretical)** Muestre con detalle que la sustitución hacia atrás se expresa como:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}x_j}{A_{ii}} \tag{5.57}$$

donde $i = n, n-1, ..., 0$. Note que la diagonal de la matriz triangular superior puede tener cualquier valor.

Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales triangular superior

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + \cdots + A_{1n}x_n = b_1$$

$$0 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + \cdots + A_{2n}x_n = b_2$$

$$0 + 0 + A_{33}x_3 + \cdots + A_{3n}x_n = b_3$$

$$\vdots$$

$$A_{nn}x_n = b_n$$

Se puede ver matricialmente como

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Este sistema se resuelve fácilmente desde la ultima ecuación hacia arriba en la matriz

$$x_n = \frac{b_n}{A_{nn}}$$

Luego para la siguiente

$$A_{n-1;\, n-1}x_{n-1} + A_{n-1,n}x_n = b_{n-1}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - A_{n-1;\, n}x_n}{A_{n-1,;\, n-1}}$$

Después

$$A_{n-2;\, n-2}x_{n-2} + A_{n-2;\, n-1}x_{n-1} + A_{n-2,n}x_n = b_{n-2}$$

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - A_{n-2;\, n-1}x_{n-1} + A_{n-2,n}x_n}{A_{n-2;\, n-2}}$$

$$A_{n-3;\, n-3}x_{n-3} + A_{n-3;\, n-2}x_{n-2} + A_{n-3;\, n-1}x_{n-1} + A_{n-3,n}x_n = b_{n-3}$$

$$x_{n-3} = \frac{b_{n-3} - A_{n-3;\, n-2}x_{n-2} - A_{n-3;\, n-1}x_{n-1} + A_{n-3,n}x_n}{A_{n-3;\, n-3}}$$

Se puede observar un patrón:

$$x_i = \frac{b_i - A_{i,i+1}x_{i+1} - A_{i,i+2}x_{i+2} - \cdots}{A_{ii}}$$

En el numerador, se le restan N términos a b_i tantos como su posición de abajo hacia arriba en la matriz menos un término. Se llega finalmente a:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}x_j}{A_{ii}}$$

Para $i = n, n-1, \ldots, 0$