Derivación:

5)

Se hace la expansión de Taylor de la forma

$$f(x+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(h)^n$$

De donde se obtiene la aproximación de la 2d derivada sumando lo siguiente:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)$$

$$f''(x)=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}-\frac{h^2}{2*4!}f^{(4)}(x)-\cdots$$

Con estimación de $O(h^2)$ como se aprecia en la expresión

Para determinar la 4 derivada, se realiza la 2da derivada sobre la 2da derivada de la siguiente forma:

$$f^{(4)}(x)=\frac{f''(x+h)-2f''(x)+f''(x-h)}{h^2}$$

Veamos termino por termino

$$f''(x+h)=\frac{f(x+h+h)-2f(x+h)+f(x+h-h)}{h^2}$$
$$=\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}$$

$$2f''(x)=\frac{2f(x+h)-4f(x)+2f(x-h)}{h^2}$$

$$f''(x-h)=\frac{f(x-h+h)-2f(x-h)+f(x-h-h)}{h^2}$$
$$=\frac{f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{h^2}$$

Reemplazando en la expresión original

$$f^{(4)}(x)=\frac{1}{h^4}[f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)-2f(x+h)+4f(x)-2f(x-h)+f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)]$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{f(x+2h)-4f(x+h)+6f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{h^4}+\cdots$$

$$D^4 f\left(x_j\right) \cong \frac{f\left(x_j+2\right)-4f\left(x_j+1\right)+6f\left(x_j\right)-4f\left(x_j-1\right)+f\left(x_j-2\right)}{h^4}$$

Para demostrar el orden de la estimación se expande los términos anteriores en series de Taylor:

$$f(x+2h)=f(x)+2hf'(x)+\frac{4}{2}h^2f^{(2)}(x)+\frac{8}{3!}f^{(3)}(x)+\frac{16}{4!}f^{(4)}(x)+O(h^5)$$

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f^{(2)}(x)+\frac{1}{3!}f^{(3)}(x)+\frac{1}{4!}f^{(4)}(x)+O(h^5)$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f^{(2)}(x)-\frac{1}{3!}f^{(3)}(x)+\frac{1}{4!}f^{(4)}(x)+O(h^5)$$

$$f(h-2)=f(x)-2hf'(x)+\frac{4}{2}h^2f^{(2)}(x)-\frac{8}{3!}f^{(3)}(x)+\frac{16}{4!}f^{(4)}(x)+O(h^5)$$

Como

$$f^{(4)}(x)=\frac{f(x+2h)-4f(x+h)+6f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{h^4}$$

Reemplazando se llega a que antes del orden 4 todos los términos se cancelaban

$$f^{(4)}(x)=\frac{1}{h^4}(f^{(4)}(x)+\frac{7}{15}f^{(5)}(x)+\cdots)$$

$$f^{(4)}(x)(h^4-1)=\frac{7h^4}{15}f^{(5)}(x)+\cdots$$

Se concluye que la estimación es de orden 4 $O(h^4)$

8)

a) El polinomio de interpolación de grado 2 puede ser

$$f(x)\approx p(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

Reemplazando en los valores del conjunto soporte

$$f(x_0)=p(x_0)=a_0$$

$$f(x_1)=p(x_1)=a_0+a_1(x_1-x_0)$$

$$f(x_2)=p(x_2)=a_0+a_1(x_2-x_0)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

Por lo tanto

$$f(x_0)=a_0$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} = a_1$$

$$f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0) = a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$a_2 = \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Construyendo el polinomio

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) + \frac{f(x_2) - f(x_0) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}(x - x_0)(x - x_1)$$

Para discretización equisdistante:

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}(x - x_0) + \frac{f(x_2) - f(x_0) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}(x_2 - x_0)}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1)$$