1) Hacer pasos intermedios para regla de trapecio simple

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx = \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$$

Donde $p_1(x)$ es el polinomio de interpolación de la forma:

$$f(x) \approx p_1(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

$$I \approx \int_a^b \left[\frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)\right] dx$$

$$I \approx \frac{f(a)}{a-b}\left[\frac{x^2}{2} - bx\right]_a^b + \frac{f(b)}{b-a}\left[\frac{x^2}{2} - ax\right]_a^b$$

$$\left[\frac{x^2}{2} - bx\right]_a^b = \frac{b^2}{2} - b^2 - \left(\frac{a^2}{2} - ba\right); \qquad \left[\frac{x^2}{2} - ax\right]_a^b = \frac{b^2}{2} - ab - \left(\frac{a^2}{2} - a^2\right)$$

$$I \approx \frac{f(a)}{a-b}\left[\frac{b^2-a^2}{2} - b^2 + ba\right] + \frac{f(b)}{b-a}\left[\frac{b^2-a^2}{2} - ab + a^2\right]$$

$$I \approx \frac{f(a)}{a-b}\left[\frac{-(b+a)(a-b)}{2} + b(a-b)\right] + \frac{f(b)}{b-a}\left[\frac{(b+a)(b-a)}{2} - a(b-a)\right]$$

$$I \approx -\frac{b+a}{2}f(a) + bf(a) + \frac{b+a}{2}f(b) - af(b)$$

$$I \approx= \frac{-b-a+2b}{2}f(a) + \frac{b+a-2a}{2}f(b) = \frac{b-a}{2}f(a) + \frac{b-a}{2}f(b)$$

Llegando finalmente a

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$$

3)

Hacer pasos intermedios para encontrar la regla de Simpson simple

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx = \frac{h}{3}\big(f(a) + 4f(x_m) + f(b)\big)$$

Donde $x_m = \frac{a+b}{2}$

Aquí, el integrando se cambia por un polinomio interpolador. En esta regla en específico, se toban subintervalos con 3 puntos (de modo que hayan 2 “áreas” de integración en cada subintervalo).

$$f(x) \approx p_2(x) = \mathcal{L}_0 f(a) + \mathcal{L}_1 f(x_m) + \mathcal{L}_2 f(b)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}_0} = \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_m})}{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x_m})} \qquad \boldsymbol{\mathcal{L}_1} = \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{x_m}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x_m}-\boldsymbol{b})} \qquad \boldsymbol{\mathcal{L}_2} = \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_m})}{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{x_m})}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \mathcal{L}_0(x) f(a)dx + \int_a^b \mathcal{L}_1(x) f(x_m)dx + \int_a^b \mathcal{L}_2(x) f(b)dx$$

Teniendo en cuenta que se puede escribir x como $x = a + th$ se realiza este cambio de variable

$$\mathcal{L}_0 = \frac{(x-b)(x-x_m)}{(a-b)(a-x_m)} = \frac{(a+th-a-2h)(a+th-a-h)}{(-2h)(-h)}$$

$$= \frac{h(t-2)h(t-1)}{2h^2}$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{th * h(t-2)}{(h)(-h)} = \frac{th * h(t-2)}{-h^2}$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{th * h(t-1)}{(2h)(h)} = \frac{th * h(t-1)}{2h^2}$$

Los límites de integración ahora son

$$a = a + th \rightarrow t = 0$$

$$b = a + 2h = a + th \rightarrow t = 2$$

De 0 a 2 y

$$dx = hdt$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(a)h}{2}\int_0^2 (t-2)(t-1)dt - f(x_m)h\int_0^2 t(t-2)dt + \frac{f(b)h}{2}\int_0^2 t(t-1)dt$$

La primera integral corresponde a:

$$\frac{f(a)h}{2}\int_0^2 (t^2-3t+2)dt = \left(\frac{f(a)h}{2}\right)\left[\frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}t^2 + 2t\right]_0^2 = \left(\frac{f(a)h}{2}\right)\frac{2}{3} = \frac{h}{3}f(a)$$

La segunda integral corresponde a:

$$-f(x_m)h\int_0^2 (t^2-2t)dt = (-f(x_m)h)\left[\frac{t^3}{3} - t^2\right]_0^2 = (-f(x_m)h)\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}hf(x_m)$$

La tercera integral corresponde a:

$$\frac{f(b)h}{2}\int_0^2 (t^2-t)dt = \left(\frac{f(b)h}{2}\right)\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_0^2 = \left(\frac{f(b)h}{2}\right)\frac{2}{3} = \frac{h}{3}f(b)$$

Obteniendo finalmente que:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}f(a) + \frac{4}{3}hf(x_m) + \frac{h}{3}f(b)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\big(f(a) + 4f(x_m) + f(b)\big)$$