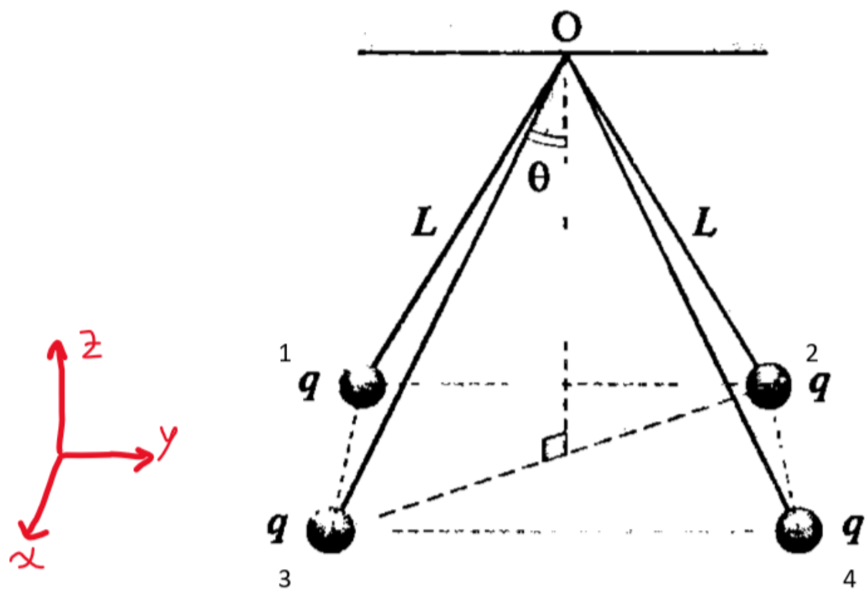
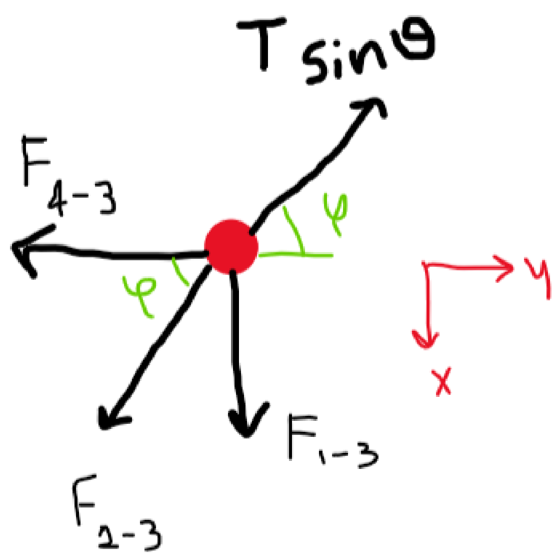
Preparcial 3:

21. *Calculo de raíces en física:* Cuatro esferas de pesos iguales $w = 114.6\ N$ y cargas iguales $q = 3 \times 10^{-4}\ C$ se encuentran en los extremos de hilos inelásticos y aislantes de longitudes $L = 5\ m$. Los que a su vez se encuentran unidos en $\mathcal{O}$. Para la aplicación numérica use $g = 10\ m/s^2$ (Tomado de [5]).



Haciendo el análisis de fuerzas sobre la esfera 3 se tiene

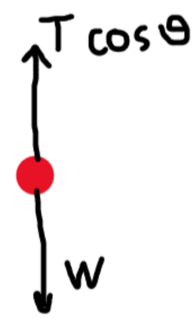
Viendo solamente el plano x-y



$$\sum F_x = F_{1-3} + F_{2-3} \sin\varphi - T \sin\theta \sin\varphi = 0$$

$$\sum F_y = -F_{4-3} - F_{2-3}\cos\varphi + T\sin\theta\cos\varphi = 0$$

Para el eje z-y se tiene entonces

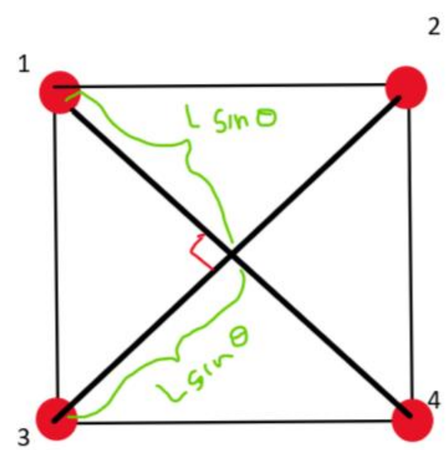


$$\sum F_z = -w + T\cos\theta = 0$$

De igual forma se sabe que:

$$r_{2-3} = 2L\sin\theta$$

Además, como las 4 esferas son de igual peso e igual carga eléctrica, los 4 puntos vistos en el plano x-y forman un cuadrado y $\varphi = 45°$



Llegando a:

$$F_{1-3} = F_{4-3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{\left(\sqrt{2}L\sin\theta\right)^2}; \qquad F_{2-3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{4L^2\sin^2\theta}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{2L^2\sin^2\theta} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{4L^2\sin^2\theta}\sin 45° - T\sin\theta\sin 45° = 0$$

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{2L^2\sin^2\theta} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{4L^2\sin^2\theta}\cos 45° + T\sin\theta\cos 45° = 0$$

$$T = \frac{w}{\cos\theta}$$

Fijémonos que las ecuaciones sobre x y y son linealmente dependientes. Entonces tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas, en un sistema no lineal.

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{2L^2\sin^2\theta}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+\frac{w\sin\theta}{\cos\theta}\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

Multiplicando ambos lados por $\sin^5\theta$

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{2L^2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\sin^3\theta+\frac{w\sin^6\theta}{\cos\theta}\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

$$\sin^6\theta-\frac{1}{4w\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{2L^2}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)\cos\theta\sin^3\theta=0$$