LÓGICA MATEMÁTICA – AULA 01

Proposição

Chame-se proposição ou sentença toda oração declarativa que pode ser classificada de verdadeira ou de falsa.

Toda proposição apresenta três características obrigatórias:

1. Sendo oração, tem sujeito e predicado;
2. É declarativa (não pode ser exclamativa nem interrogativa);
3. Tem um, e somente um, dos dois valore lógicos: ou é verdadeira (V) ou é falsa (F).

Exemplos:

São proposições:

A. $9 \neq 5$ (nove é diferente de cinco)
B. $7 > 3$ (sete é maior que três)
C. $2 \in \mathbb{Z}$ (Dois é um número inteiro)
D. $3 \mid 11$ (três e divisor de 11)

Dessas proposições, todas são verdadeiras exceto a D.

Exemplos não consideradas proposições as frases:

A. $3 \bullet 5 + 1$ (onde falta predicado)
B. $\sqrt{2}$ E $\mathbb{Z}$? (que é oração interrogativa)
C. $3X - 1 = 11$ (que não pode ser classificada em verdadeira ou falsa)

Negação

A partir de uma proposição p qualquer sempre podemos construir outra, denominada negação de p e indicada com o símbolo ~p.

Exemplos

p	~p
$9 \neq 5$	$9 = 5$
$2 \in \mathbb{Z}$	$2 \notin \mathbb{Z}$
$7 > 3$	$7 \leqslant 3$
$3 \mid 11$	$3 \sim\mid 11$

Para que ~p seja realmente uma proposição devemos ser capazes de classifica-la em verdadeira (V) ou falsa (F). Para isso vamos postular (decretar) o seguinte critério de classificação:

A proposição ~p tem sempre o valor oposto de p , isto é, ~p é verdadeira quanto p é falsa e ~p é falsa quando p é verdadeira.

Símbolos matemáticos:

⩾ → Maior ou igual que

⩽ → Menor ou igual que

< → Menor que

> → Maior que

ℕ → Conjunto dos números naturais

∈ → Pertence a

∉ → Não pertence a

⊂ → Esta contido em

⊄ → Não esta contido em

I → É divisor de

~ I → Não é divisor de

∽→ Negação

= → É igual a

⋀ → Conectivo e

⋁ → Conectivo ou

≠→ É diferente de

Precedência Geral dos Operadores Aritméticos

Quando uma expressão aritmética precisa ser avaliada num algoritmo, o analisador processa a expressão dando prioridade para certos operadores. As sub-expressões que contém estes operadores serão avaliadas primeiro e seu valor substituído pela sub-expressão inteira. A seguir a próxima sub-expressão na ordem é avaliada e assim por diante até que toda a expressão corresponda a um só valor. A Tabela 4.2 mostra a ordem de prioridade na avaliação dos operadores numa expressão aritmética, chamada de precedência de operadores.

Tabela 4.2: Precedência Geral de Operadores Aritméticos

Ordem	**Operação**	**Símbolo**
1ª	Parênteses	`()`
2ª	Potenciação	`**`
3ª	Multiplicação, Divisão, Resto e Divisão Inteira	`*`, `/`, `mod`, `div`
4ª	Adição, Subtração	`+`, `-`

Conectivo "e": *(conjunção)*

Proposições compostas em que está presente o conectivo **"e"** são ditas **CONJUNÇÕES.** Simbolicamente, esse conectivo pode ser representado por "$\wedge$". Então, se temos a sentença:

- *"Marcos é médico **e** Maria é estudante"*

... poderemos representá-la apenas por: **$p \wedge q$.** onde: p = *Marcos é médico* e q = *Maria é estudante.*

Como se revela o **valor lógico** de uma *proposição conjuntiva*? Da seguinte forma: **uma conjunção só será verdadeira, se ambas as proposições componentes forem também verdadeiras**.

Então, diante da sentença *"Marcos é médico **e** Maria é estudante"*, só poderemos concluir que esta proposição composta é **verdadeira** se for verdade, ao mesmo tempo, que *Marcos é médico* e que *Maria é estudante.*

Pensando pelo caminho inverso, teremos que **basta que uma das proposições componentes seja falsa, e a conjunção será – toda ela – falsa. Obviamente que o resultado *falso* também ocorrerá quando ambas as proposições componentes forem falsas**.

Essas conclusões podem ser resumidas em uma pequena tabela. Trata-se da **tabela-verdade**, de fácil construção e de fácil entendimento.

Retomemos as nossas premissas:

p = *Marcos é médico* e **q** = *Maria é estudante.*

Se tivermos que ambas são verdadeiras, a conjunção formada por elas (*Marcos é médico **e** Maria é estudante*) será também verdadeira. Teremos:

Marcos é médico	Maria é estudante	Marcos é médico e Maria é estudante
p	**q**	**$p \wedge q$**
V	V	V

Se for verdade apenas que *Marcos é médico*, mas falso que *Maria é estudante*, teremos:

Marcos é médico	Maria é estudante	Marcos é médico e Maria é estudante
p	**q**	**$p \wedge q$**
V	F	F

Por outro lado, se for verdadeiro que *Maria é estudante*, e falso que *Marcos é médico*, teremos:

Marcos é médico	Maria é estudante	Marcos é médico e Maria é estudante
p	**q**	**$p \wedge q$**
F	V	F

Enfim, se ambas as sentenças simples forem falsas, teremos que:

Marcos é médico	Maria é estudante	Marcos é médico e Maria é estudante
p	**q**	**$p \wedge q$**
F	F	F

Ora, as quatro situações acima esgotam todas as possibilidades para uma conjunção. Fora disso não há outras! Criamos, portanto, a **tabela-verdade** que representa uma **conjunção**, ou seja, a tabela-verdade para uma proposição composta com a presença do conectivo **"e"**. Teremos:

p	q	p∧q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

É preciso que a informação constante da terceira coluna (em destaque) fique guardada em nossa memória: **uma conjunção só será verdadeira, quando ambas as partes que a compõem também forem verdadeiras. E falsa nos demais casos.**

Uma maneira de assimilar bem essa informação seria pensarmos nas sentenças simples como promessas de um pai a um filho: ***"eu te darei uma bola E te darei uma bicicleta"***. Ora, pergunte a qualquer criança! Ela vai entender que a promessa é para os dois presentes. Caso o pai não dê nenhum presente, ou dê apenas um deles, a promessa não terá sido cumprida. Terá sido falsa! No entanto, a promessa será verdadeira se as duas partes forem também verdadeiras!

Na hora de formar uma *tabela-verdade* para **duas** proposições componentes (**p** e **q**), saberemos, de antemão, que essa tabela terá quatro linhas. Começaremos, então, fazendo a seguinte estrutura:

p	q

Daí, a coluna da primeira proposição terá sempre a seguinte disposição: dois (V) "vês" seguidos de dois (F) "efes". Assim:

p	q
V	
V	
F	
F	

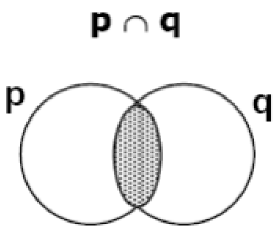
Enquanto a variação das letras (V e F) para a premissa **p** ocorre de duas em duas linhas, para a premissa **q** é diferente: "vês" (V) e "efes" (F) se alternando a cada linha, começando com um V. Assim:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Essa estrutura inicial é **sempre assim**, para tabelas-verdade de duas proposições **p** e **q**. A terceira coluna dependerá do **conectivo** que as une, e que está sendo analisado. No caso do conectivo **"e"**, ou seja, no caso da **conjunção**, já aprendemos a completar a nossa tabela verdade:

p	q	p∧q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Se as proposições **p** e **q** forem representadas como conjuntos, por meio de um diagrama, a conjunção "**p e q**" corresponderá à **interseção** do conjunto **p** com o conjunto **q**. Teremos:



Conectivo "ou": *(disjunção)*

Recebe o nome de **DISJUNÇÃO** toda proposição composta em que as partes estejam unidas pelo conectivo **ou**. Simbolicamente, representaremos esse conectivo por "∨". Portanto, se temos a sentença:

- *"Marcos é médico **ou** Maria é estudante"*

... então a representaremos por: **p** $\vee$ **q**.

Seremos capazes de criar uma *tabela-verdade* para uma *proposição disjuntiva*? Claro! Basta nos lembrarmos da tal promessa do pai para seu filho! Vejamos: ***"eu te darei uma bola OU te darei uma bicicleta"***. Neste caso, a criança já sabe, de antemão, que a promessa é por apenas um dos presentes! Bola **ou** bicicleta! Ganhando de presente apenas um deles, a promessa do pai *já valeu*! Já foi verdadeira! E se o pai for *abastado* e resolver dar os dois presentes? Pense na cara do menino! Feliz ou triste? Felicíssimo! A promessa foi mais do que cumprida. Só haverá um caso, todavia, em que a bendita promessa não se cumprirá: se o pai esquecer o presente, e não der nem a bola e nem a bicicleta. Terá sido falsa toda a *disjunção*.

Daí, concluímos: **uma disjunção será falsa quando as duas partes que a compõem forem ambas falsas! E nos demais casos, a disjunção será verdadeira!** Teremos as possíveis situações:

Te darei uma bola	Te darei uma bicicleta	Te darei uma bola ou te darei uma bicicleta
p	**q**	**p V q**
V	**V**	**V**

Ou:

Te darei uma bola	Te darei uma bicicleta	Te darei uma bola ou te darei uma bicicleta
p	**q**	**p V q**
V	**F**	**V**

Ou:

Te darei uma bola	Te darei uma bicicleta	Te darei uma bola ou te darei uma bicicleta
p	**q**	**p V q**
F	**V**	**V**

Ou, finalmente:

Te darei uma bola	Te darei uma bicicleta	Te darei uma bola ou te darei uma bicicleta
p	**q**	**p V q**
F	**F**	**F**

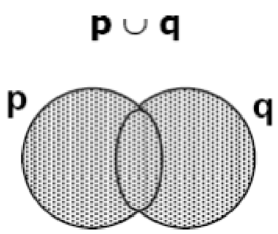
Juntando tudo, teremos:

p	q	pVq
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

A promessa inteira só é falsa se as duas partes forem descumpridas!

Observem que as duas primeiras colunas da tabela-verdade acima **–** as colunas do **p** e do **q** **–** são exatamente iguais às da tabela-verdade da *conjunção* (p **E** q). Muda apenas a terceira coluna, que agora representa um **"ou"**, a disjunção.

Se as proposições **p** e **q** forem representadas como conjuntos por meio de um diagrama, a disjunção "**p ou q**" corresponderá à **união** do conjunto **p** com o conjunto **q**,



Conectivo "Ou ... ou ...": *(disjunção exclusiva)*

Há um terceiro tipo de proposição composta, bem parecido com a disjunção que acabamos de ver, mas com uma pequena diferença. Comparemos as duas sentenças abaixo:

*"Te darei uma bola **OU** te darei uma bicicleta"*

*"**OU** te darei uma bola **OU** te darei uma bicicleta"*

A diferença é sutil, mas importante. Reparemos que na primeira sentença vê-se facilmente que se a primeira parte for *verdade* (*te darei uma bola*), isso não impedirá que a segunda parte (*te darei uma bicicleta*) também o seja. Já na segunda proposição, se for verdade que "*te darei uma bola*", então teremos que não será dada a bicicleta. E vice-versa, ou seja, se for verdade que "*te darei uma bicicleta*", então teremos que não será dada a bola.

Em outras palavras, a segunda estrutura apresenta duas ***situações mutuamente excludentes***, de sorte que apenas uma delas pode ser verdadeira, e a restante será necessariamente falsa. Ambas nunca poderão ser, ao mesmo tempo, verdadeiras; ambas nunca poderão ser, ao mesmo tempo, falsas.

Na segunda sentença acima, este tipo de construção é uma ***DISJUNÇÃO EXCLUSIVA***, pela presença dos dois conectivos "ou", que determina que **uma sentença é necessariamente verdadeira, e a outra, necessariamente falsa**.

E como fica a sua tabela-verdade? Ora, uma *disjunção exclusiva* só será verdadeira se obedecer à mútua exclusão das sentenças. Falando mais fácil: **só será verdadeira se houver uma das sentenças verdadeira e a outra falsa. Nos demais casos, a *disjunção exclusiva* será falsa.**

O símbolo que designa a *disjunção exclusiva* é o "$\underline{\vee}$". E a tabela-verdade será, pois, a seguinte:

p	q	p$\underline{\vee}$q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conectivo "Se ... então ...": *(condicional)*

Estamos agora falando de proposições como as que se seguem:

- *Se Pedro é médico, então Maria é dentista.*
- *Se amanhecer chovendo, então não irei à praia.*

Muita gente tem dificuldade em entender o funcionamento desse tipo de proposição. Convém, para facilitar nosso entendimento, que trabalhemos com a seguinte sentença.

- ***Se nasci em Fortaleza, então sou cearense.***

Cada um de vocês pode adaptar essa frase acima à sua realidade: troque *Fortaleza* pelo nome da sua cidade natal, e troque *cearense* pelo nome que se dá a quem nasce no seu Estado. Por exemplo:

- *Se nasci em Apodi, então sou potiguar.*
- *Se nasci em Russas, então sou cearense.*

E assim por diante. Pronto?

Agora me responda: qual é a única maneira dessa proposição estar incorreta? Ora, só há um jeito desta frase ser falsa: se a primeira parte for verdadeira, e a segunda for falsa. Ou seja, se é verdade que eu *nasci em Apodi*, então necessariamente é verdade que *eu sou potiguar*. Se alguém disser que é verdadeiro que *eu nasci em Apodi*, e que é falso que *eu sou potiguar*, então este *conjunto* estará todo falso.

É importante salientar que o exemplo trabalhado acima (*Se nasci em Russas então sou cearense*) foi escolhido exclusivamente para fins didáticos. Na realidade, não é preciso que exista qualquer conexão de sentido entre o conteúdo das proposições componentes da condicional. Por exemplo, poderíamos ter a seguinte sentença:

"Se a baleia é um mamífero então o papa é alemão"

O que interessa é apenas uma coisa: a primeira parte da condicional é uma **condição suficiente** para obtenção de um resultado necessário.

Percebam, pois, que se alguém disser que: *"Pedro ser rico é condição suficiente para Maria ser médica"*, então nós podemos reescrever essa sentença, usando o *formato* da condicional. Teremos:

- *"Pedro ser rico é condição suficiente para Maria ser médica"* é igual a:
- *"Se Pedro for rico, então Maria é médica"*

Por outro lado, se ocorrer de alguém dizer que: *"Maria ser médica é condição necessária para que Pedro seja rico"*, também poderemos traduzir isso de outra forma:

- *"Maria ser médica é condição necessária para que Pedro seja rico"* é igual a:
- *"Se Pedro for rico, então Maria é médica"*

Não podemos, pois esquecer disso:

- *Uma **condição suficiente** gera um **resultado necessário**.*

Pois bem! Como ficará nossa tabela-verdade, no caso da *proposição condicional*? Pensaremos aqui pela via de exceção: **só será falsa esta estrutura quando houver a condição suficiente, mas o resultado necessário não se confirmar. Ou seja, quando a primeira parte for verdadeira, e a segunda for falsa. Nos demais casos, a condicional será verdadeira.**

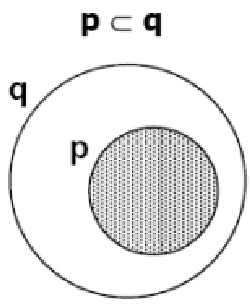
A sentença condicional "*Se **p**, então **q**" será representada por uma seta: **p→q**.*

*Na proposição "Se **p**, então **q**", a proposição **p** é denominada de antecedente, enquanto a proposição **q** é dita conseqüente.* Teremos:

p	q	p→q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Se as proposições **p** e **q** forem representadas como conjuntos, por meio de um diagrama, a

proposição condicional "**Se p então q**" corresponderá à **inclusão** do conjunto **p** no conjunto **q** (p está contido em q):



Conectivo " ... se e somente se ...": *(bicondicional)*

A estrutura dita *bicondicional* apresenta o conectivo *"se e somente se"*, separando as duas sentenças simples. Trata-se de uma proposição de fácil entendimento. Se alguém disser:

*"Eduardo fica alegre **se e somente se** Mariana sorri".*

É o mesmo que fazer a conjunção entre as duas proposições condicionais:

- *"Eduardo fica alegre **somente se** Mariana sorri **e** Mariana sorri **somente se** Eduardo fica alegre".*

Ou ainda, dito de outra forma:

- *"Se Eduardo fica alegre, então Mariana sorri* ***e*** *se Mariana sorri, então Eduardo fica alegre".*

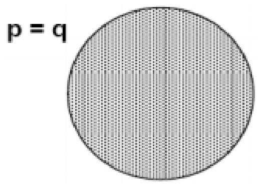
São construções de mesmo sentido!

A *bicondicional* é uma ***conjunção*** **entre duas *condicionais.* Haverá duas situações em que a *bicondicional* será verdadeira: quando antecedente e conseqüente forem ambos verdadeiros, ou quando forem ambos falsos. Nos demais casos, a *bicondicional* será falsa.**

Sabendo que a frase *"**p** se e somente se **q**"* é representada por **"p↔q"**, então nossa tabela-verdade será a seguinte:

p	q	p↔q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Se as proposições **p** e **q** forem representadas como conjuntos, por meio de um diagrama, a proposição bicondicional "**p se e somente se q**" corresponderá à **igualdade** dos conjuntos **p** e **q**.



Observação: Uma proposição bicondicional "**p se e somente se q**" equivale à proposição composta: "**se p então q e se q então p**", ou seja,

"$p \leftrightarrow q$" é a mesma coisa que " $(p \rightarrow q)$ e $(q \rightarrow p)$ "

Partícula " não": *(negação)*

Veremos algo de suma importância: **como negar uma proposição**.

No caso de uma proposição simples, não poderia ser mais fácil: basta pôr a palavra **não** antes da sentença, e já a tornamos uma negativa. Exemplos:

- *João é médico.* **Negativa:** *João **não** é médico.*
- *Maria é estudante.* **Negativa:** *Maria **não** é estudante.*

Reparemos que caso a sentença original já seja uma negativa (já traga a palavra *não*), então para negar a negativa, teremos que excluir a palavra *não*. Assim:

- *João **não** é médico.* **Negativa:** *João é médico.*
- *Maria **não** é estudante.* **Negativa:** *Maria é estudante.*

Pronto! Em se tratando de fazer a *negação* de proposições simples, já estamos *craques*!

O símbolo que representa a negação é uma pequena *cantoneira* (¬) ou um sinal de til (~), antecedendo a frase. (**Adotaremos o *til***).

A tabela-verdade da *negação* é mais simplificada que as demais já vistas. Teremos:

p	**~p**
V	**F**
F	**V**

Podem-se empregar, também, como equivalentes de **"não A"**, as seguintes expressões:

- ***Não é verdade que A.***
- ***É falso que A.***

Daí as seguintes frases são equivalentes:

- Lógica **não** é fácil.
- ***Não é verdade que*** lógica é fácil.
- ***É falso que*** lógica é fácil.

Negação de um proposição composta

Já sabemos negar uma proposição simples. Mas, e se for uma *proposição composta*, como fica? Aí, dependerá de qual é a estrutura em que se encontra essa *proposição*. Veremos, pois, uma a uma:

→Negação de uma proposição conjuntiva: ~(p e q)

Para negar uma proposição no formato de conjunção (**p e q**), faremos o seguinte:

1. **Negaremos a primeira parte (~p);**
2. **Negaremos a segunda parte (~q);**
3. **Trocaremos e por ou.**

E só!

Daí, a questão dirá: *"Não é verdade que João é médico e Pedro é dentista"*, e pedirá que encontremos, entre as opções de resposta, aquela frase que seja *logicamente equivalente* a esta fornecida.

Analisemos: o começo da sentença é *"não é verdade que..."*. Ora, dizer que *"não é verdade que..."* é nada mais nada menos que negar o que vem em seguida. E o que vem em seguida? Uma estrutura de conjunção!

Daí, como negaremos que *"João é médico e Pedro é dentista"*? Da forma explicada acima:

1. **Nega-se a primeira parte (~p) = João não é médico;**
2. **Nega-se a segunda parte (~q) = Pedro não é dentista;**
3. **Troca-se E por OU, e o resultado final será o seguinte:**

JOÃO NÃO É MÉDICO OU PEDRO NÃO É DENTISTA.

Traduzindo para a linguagem da lógica, dizemos que:

$$\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$$

Como fomos chegar à essa conclusão? Ora, por meio da comparação entre as tabelas-verdade das duas proposições acima. Vejamos como foi isso. Primeiro, trabalhemos a tabela-verdade do **~(p ∧ q)**.

Tudo começa com aquele formato básico, que já é nosso conhecido:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Daí, faremos a próxima coluna, que é a da conjunção (**e**). Teremos:

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Por fim, construiremos a coluna que é a negativa desta terceira. Ora, já sabemos que com a negativa, o que é verdadeiro vira falso, e o que é falso vira verdadeiro. Logo, teremos:

p	q	p ∧ q	~(p ∧ q)
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Guardemos, pois, essa última coluna (em destaque). Ela representa o *resultado lógico* da estrutura **~(p ∧ q)**. Agora, construamos a tabela-verdade da estrutura **~p v ~q**, e comparemos os resultados. No início, teremos:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Faremos agora as duas colunas das duas negativas, de **p** e de **q**. Para isso, conforme já sabemos, quem for **V** virará **F**, e vice-versa. Teremos:

p	q	~p	~q
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Agora, passemos à coluna final: **~p v ~q**. Aqui nos lembraremos de como funciona uma *disjunção*. A ***disjunção*** é a estrutura do **ou**. Para ser verdadeira basta que uma das sentenças também o seja. Daí, teremos:

p	q	~p	~q	~p V ~q
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Finalmente, comparemos a *coluna resultado* (em destaque) desta estrutura **(~p** $\vee$ **~q)** com aquela que estava *guardada* da estrutura **~(p** $\wedge$ **q)**. Teremos:

~(p $\wedge$ q)	~p V ~q
F	F
V	V
V	V
V	V

Resultados idênticos! Daí, do *ponto de vista lógico*, para negar **p e q**, negaremos **p**, negaremos **q**, e trocaremos **e** por **ou**.

→Negação de uma proposição disjuntiva: ~(p ou q)

Para negar uma proposição no formato de disjunção (**p ou q**), faremos o seguinte:

1. **Negaremos a primeira parte (~p);**
2. **Negaremos a segunda parte (~q);**
3. **Trocaremos OU por E.**

E só!

Se uma questão de prova disser: "Marque a assertiva que é logicamente equivalente à seguinte frase: *Não é verdade que Pedro é dentista ou Paulo é engenheiro"*.

Pensemos: a frase começa com um "*não é verdade que...*", ou seja, o que se segue está sendo negado! E o que se segue é uma estrutura em forma de *disjunção*. Daí, obedecendo aos passos descritos acima, faremos:

1. **Nega-se a primeira parte (~p) = Pedro não é dentista;**
2. **Nega-se a segunda parte (~q) = Paulo não é engenheiro;**
3. **Troca-se OU por E, e o resultado final será o seguinte:**

PEDRO NÃO É DENTISTA E PAULO NÃO É ENGENHEIRO.

Na linguagem apropriada, concluímos que:

$$\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$$

Se formos curiosos, poderemos fazer a comprovação – via tabelas-verdade – desta conclusão acima. Somos curiosos? Claro! Tomemos a primeira parte: **~(p V q)**. Teremos, de início:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Daí, construindo a coluna da disjunção (**p ou q**). Teremos:

p	q	p V q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Finalizando, fazendo a negação da coluna da disjunção, teremos:

p	q	p V q	~(p V q)
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

Guardemos essa *coluna resultado* para o final. E passemos à segunda parte da análise: a estrutura **~p ∧~q**. Teremos, a princípio, o seguinte:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Construindo-se as colunas de negações de **p** e **q**, teremos:

p	q	~p	~q
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Finalizando, fazendo a conjunção **~p e ~q**, teremos os seguintes resultados:

p	q	~p	~q	~p ∧~q
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Concluindo, comparemos a *coluna resultado* (em destaque) desta estrutura **(~p ∧~q)** com aquela que estava *guardada* da estrutura **~(p ∨q)**. Teremos:

~(p V q)	~p ∧~q
F	F
F	F
F	F
V	V

Resultados idênticos! Daí, do *ponto de vista lógico*, para negar **"p ou q"**, negaremos **p**, negaremos **q**, e trocaremos **ou** por **e**.

→Negação de uma proposição condicional: ~(p → q)

Como é que se nega uma condicional? Da seguinte forma:

1º) Mantém-se a primeira parte; e

2º) Nega-se a segunda parte.

Por exemplo, como seria a negativa de "*Se chover, então levarei o guarda-chuva*"?

p	q	~p	~q
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Finalizando, fazendo a conjunção **~p e ~q**, teremos os seguintes resultados:

p	q	~p	~q	~p ∧~q
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Concluindo, comparemos a *coluna resultado* (em destaque) desta estrutura **(~p ∧~q)** com aquela que estava *guardada* da estrutura **~(p ∨q)**. Teremos:

~(p V q)	~p ∧~q
F	F
F	F
F	F
V	V

Resultados idênticos! Daí, do *ponto de vista lógico*, para negar **"p ou q"**, negaremos **p**, negaremos **q**, e trocaremos **ou** por **e**.

→Negação de uma proposição condicional: ~(p → q)

Como é que se nega uma condicional? Da seguinte forma:

1º) Mantém-se a primeira parte; e

2º) Nega-se a segunda parte.

Por exemplo, como seria a negativa de "*Se chover, então levarei o guarda-chuva*"?

Tabelas-verdade

Trataremos agora um pouco mais a respeito de **TABELA-VERDADE**. Trata-se de uma tabela mediante a qual são analisados os valores lógicos de proposições compostas.

Já vimos que uma *Tabela-Verdade* que contém **duas** proposições apresentará exatamente um número de **quatro** linhas! Mas e se estivermos analisando uma proposição composta com três ou mais proposições componentes? Como ficaria a tabela-verdade neste caso? Generalizando para qualquer caso, teremos que o número de linhas de uma tabela-verdade será dado por:

$$\textbf{Nº linhas da Tabela-Verdade} = 2^{\text{nº de proposições}}$$

Ou seja, se estivermos trabalhando com duas proposições **p** e **q**, então a tabela-verdade terá 4 linhas. Se estivermos trabalhando com uma proposição composta que tenha **três** componentes **p, q e r,** a tabela-verdade terá $\mathbf{2^3 = 8}$. E assim, por diante.

→Tabelas-verdade para p e q:

Trabalhando com duas proposições componentes, a estrutura inicial da tabela-verdade será sempre aquela que já aprendemos. Qual seja:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

E a próxima coluna (ou próximas colunas) da tabela-verdade dependerá dos conectivos que estarão presentes na proposição composta.

Já sabemos construir, pelo menos, cinco tabelas-verdade de proposições compostas! A tabela-verdade da **conjunção, da disjunção, da disjunção exclusiva, da condicional e da bicondicional.** Com este conhecimento prévio, já estamos aptos a construir as tabelas-verdade de qualquer outra proposição formada por duas proposições componentes (**p** e **q**). Designaremos tal proposição composta da seguinte forma: **P(p, q)**.

Tabelas-verdade

Trataremos agora um pouco mais a respeito de **TABELA-VERDADE**. Trata-se de uma tabela mediante a qual são analisados os valores lógicos de proposições compostas.

Já vimos que uma *Tabela-Verdade* que contém **duas** proposições apresentará exatamente um número de **quatro** linhas! Mas e se estivermos analisando uma proposição composta com três ou mais proposições componentes? Como ficaria a tabela-verdade neste caso? Generalizando para qualquer caso, teremos que o número de linhas de uma tabela-verdade será dado por:

$$\textbf{Nº linhas da Tabela-Verdade} = \mathbf{2^{\text{nº de proposições}}}$$

Ou seja, se estivermos trabalhando com duas proposições **p** e **q**, então a tabela-verdade terá 4 linhas. Se estivermos trabalhando com uma proposição composta que tenha **três** componentes **p, q e r,** a tabela-verdade terá $\mathbf{2^3 = 8}$. E assim, por diante.

→Tabelas-verdade para p e q:

Trabalhando com duas proposições componentes, a estrutura inicial da tabela-verdade será sempre aquela que já aprendemos. Qual seja:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

E a próxima coluna (ou próximas colunas) da tabela-verdade dependerá dos conectivos que estarão presentes na proposição composta.

Já sabemos construir, pelo menos, cinco tabelas-verdade de proposições compostas! A tabela-verdade da **conjunção, da disjunção, da disjunção exclusiva, da condicional e da bicondicional.** Com este conhecimento prévio, já estamos aptos a construir as tabelas-verdade de qualquer outra proposição formada por duas proposições componentes (**p** e **q**). Designaremos tal proposição composta da seguinte forma: **P(p, q)**.

Suponhamos, pois, que estamos diante da seguinte proposição composta: **P(p, q)=~(p v ~q)** e desejamos construir a sua tabela-verdade. Como seria? O início da tabela é, conforme sabemos, sempre o mesmo. Teremos:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Agora olhemos para a proposição que estamos trabalhando **[~(p v ~q)]** e comparemos o que já temos na tabela acima com o que ainda precisamos encontrar. Já temos o **~q**? Ainda não! Então, é nosso próximo passo: construir a coluna da **negação de q**. Teremos:

p	q	~q
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Seguindo adiante, construiremos agora a coluna referente ao parênteses **(p v ~q)**. Trata-se pois, de uma *disjunção*, cujo funcionamento já é nosso conhecido (só será falsa se as duas partes forem falsas!). Colocaremos em destaque (sombreado) as colunas de nosso interesse para a formação desta *disjunção*. Teremos:

p	q	~q	p v ~q
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V

Por fim, concluindo a análise desta proposição composta, resta-nos construir a coluna que é a própria proposição: **~(p v ~q)**. Ou seja, faremos a **negação** da *disjunção* acima. Para isso, quem for VERDADEIRO vira FALSO e vice-versa. Teremos:

p	q	~q	p v ~q	~(p v ~q)
V	V	F	V	F
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F

É este, portanto, o resultado final da *tabela-verdade* para a proposição **~(p v ~q)**. Uma coisa muito importante que deve ser dita neste momento é que, na hora de construirmos a *tabela-verdade* de uma proposição composta qualquer, teremos que seguir uma certa **ordem de precedência** dos conectivos. Ou seja, os nossos passos terão que obedecer a uma seqüência. Começaremos sempre trabalhando com o que houver **dentro dos parênteses**. Só depois, passaremos ao que houver fora deles. Em ambos os casos, sempre obedecendo à seguinte ordem:

1. **Faremos as negações (~);**
2. **Faremos as conjunções ou disjunções, na ordem em que aparecerem;**
3. **Faremos a condicional;**
4. **Faremos o bicondicional.**

Para fixar nossos conhecimentos vamos construir a tabela-verdade da seguinte proposição composta: **P(p,q) = (p∧~q) V (q∧~p).**

SOLUÇÃO: Observamos que há dois parênteses. Começaremos, pois, a trabalhar o primeiro deles, isoladamente. Obedeceremos à *ordem de precedência* dos conectivos:

1º passo: Negação de q

p	q	~q
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V

2º passo: Conjunção

p	q	~q	p∧~q
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

4º passo: Conjunção

p	q	~p	q∧~p
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

5º passo: uma vez trabalhados os dois parênteses, faremos a disjunção que os une.

p∧~q	q∧~p	(p∧~q)V(q∧~p)
F	F	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Se quiséssemos, poderíamos ter feito tudo em uma única tabela maior, da seguinte forma:

p	q	~q	p∧~q	~p	q∧~p	(p∧~q)V(q∧~p)
V	V	F	F	F	F	F
V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F	F

Pronto! Concluímos mais um problema. Já estamos craques em construir tabelas-verdade para proposições de duas sentenças. Mas, e se estivermos trabalhando com três proposições simples (**p**, **q** e **r**)? Como é que se faz essa tabela-verdade? A primeira coisa é definir o número de linhas que esta tabela-verdade terá. Conforme já aprendemos, este cálculo será dado por **Nº linhas = 2 $^{\text{Nº de proposições}}$**. Logo, haverá oito linhas (**$2^3=8$**) numa ***tabela-verdade*** para três proposições simples. Para duas proposições, a tabela-verdade se inicia sempre do mesmo jeito. O mesmo ocorrerá para uma tabela-verdade de três proposições. Terá sempre o mesmo *início*. E será o seguinte:

p	q	r

A coluna da proposição **p** será construída da seguinte forma: quatro **V** alternando com quatro **F**; a coluna da proposição **q** tem outra alternância: dois **V** com dois **F**; por fim, a coluna da proposição **r** alternará sempre um **V** com um **F**. Teremos, portanto, sempre a mesma estrutura inicial:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Saber construir esta tabela acima é **obrigação**. Ela corresponde à estrutura inicial de uma tabela-verdade para três proposições simples.

Suponhamos que uma questão de prova peça que construamos a tabela-verdade da proposição composta seguinte: **P(p,q,r)=(p ∧ ~q) → (q v ~r).** A leitura dessa proposição é a seguinte: *Se **p** e não **q**, então **q** ou não **r**.*

Vamos fazer esse exercício? Começaremos sempre com a estrutura inicial para três proposições. Teremos:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Daí, já sabemos que existe uma *ordem de precedência* a ser observada, de modo que trabalharemos logo os parênteses da proposição acima. Começando pelo primeiro deles, faremos os seguintes passos:

1º passo: Negação de q

p	q	r	~q
V	V	V	F
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	V

2º passo: Conjunção do primeiro parênteses

p	q	r	~q	p ∧ ~q
V	V	V	F	F
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	V	F
F	F	F	V	F

3º passo: Negação de r

p	q	r	~q	p ∧ ~q	r
V	V	V	F	F	F
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F
F	F	F	V	F	V

4º passo: Disjunção do segundo parênteses

p	q	r	~q	p ∧ ~q	~r	q v ~r
V	V	V	F	F	F	V
V	V	F	F	F	V	V
V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	F
F	F	F	V	F	V	V

5º passo: Finalmente, vamos fazer a condicional.

RECORDANDO: a condicional só será falsa se tivermos VERDADEIRO na primeira parte e FALSO na segunda!!!

p	q	r	~q	p ∧ ~q	~r	q v ~r	(p ∧ ~q)→(q v ~r)
V	V	V	F	F	F	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	F	V	V	V

→Tautologia

Uma proposição composta formada por duas ou mais proposições **p**, **q**, **r**, ... será dita uma **Tautologia** se ela for **sempre verdadeira**, independentemente dos valores lógicos das proposições **p**, **q**, **r**, ... que a compõem. Em palavras mais simples: para saber se uma proposição composta é uma *Tautologia*, construiremos a sua tabela-verdade! Daí, **se a última coluna da tabela-verdade só apresentar *verdadeiro* (e nenhum *falso*), então estaremos diante de uma *Tautologia*.** Só isso!

Exemplo: A proposição **(p ∧ q) → (p V q)** é uma tautologia, pois é sempre verdadeira, independentemente dos valores lógicos de **p** e de **q**, como se pode observar na tabela-verdade.

p	q	p∧q	p v q	(p∧q)→(pVq)
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Observe que o valor lógico da proposição composta **(p∧q)→(pVq)**, que aparece na última coluna, é sempre **verdadeiro**. Passemos a outro exemplo de Tautologia: **[(p V q) ∧ (p ∧ s)] → p**. Construa a tabela-verdade e demonstre que se trata de uma *tautologia*.

→Contradição

Uma proposição composta formada por duas ou mais proposições **p**, **q**, **r**, ... será dita uma **contradição** se ela for **sempre falsa**, independentemente dos valores lógicos das proposições **p**, **q**,**r** ... que a compõem. Ou seja, **construindo a *tabela-verdade* de uma proposição composta, se todos os resultados da última coluna forem *FALSOS*, então estaremos diante de uma *contradição*.**

Exemplo: A proposição " **p ↔ ~p** " é uma contradição, pois sempre é falsa independentemente do valor lógico de **p**, como é possível observar na tabela-verdade abaixo:

p	~p	p ↔ ~p
V	F	F
F	V	F

→Contingência

Uma proposição composta será dita uma ***contingência*** sempre que não for uma *tautologia* ou uma *contradição*. Somente isso! Você pegará a proposição composta e construirá a sua *tabela-verdade*. Se você verificar que aquela proposição nem é uma *tautologia* (só resultados **V**), e nem é uma *contradição* (só resultados **F**), então, pela via de exceção, será dita uma *contingência*!

Exemplo: A proposição "**p ↔ (p∧q)**" é uma contingência. Por que essa proposição é uma contingência? Porque nem é uma tautologia e nem é uma contradição. Só por isso! Vejamos sua tabela-verdade a seguir.

p	q	p∧q	p ↔ (p∧q)
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	V
F	F	F	V

4º passo: Disjunção do segundo parênteses

p	q	r	~q	p ∧ ~q	~r	q v ~r
V	V	V	F	F	F	V
V	V	F	F	F	V	V
V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	F
F	F	F	V	F	V	V

5º passo: Finalmente, vamos fazer a condicional.

RECORDANDO: a condicional só será falsa se tivermos VERDADEIRO na primeira parte e FA na segunda!!!

p	q	r	~q	p ∧ ~q	~r	q v ~r	(p ∧ ~q)→(q v ~r)
V	V	V	F	F	F	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	F	V	V	V