Lógica para Computação	**Primeiro Semestre, 2015**
Aula 6: Dedução Natural	
DAINF-UTFPR	Prof. Ricardo Dutra da Silva

Em busca de uma forma de dedução mais próxima do que uma pessoa costuma fazer, foi criado o método de dedução natural. O método usa:

- basicamente duas regras por conectivo (uma para introduzir o conectivo e outra para removê-lo);
- introdução de hipóteses que devem ser oportunamente descartadas.

A seguir veremos como são as regras para cada conectivo. Em geral, as regras serão apresentadas com o formato abaixo.

$$\frac{A_1 \qquad \ldots \qquad A_n}{B}\,(\text{nome})$$

Acima da barra horizontal aparecem fórmulas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ que são premissas da regra, ou seja, fórmulas que são dadas como verdadeiras ($I(A_1) = I(A_2) = \ldots = I(A_n) = 1$). Abaixo da barra horizontal é apresentada a conclusão, ou seja, a partir de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ podemos deduzir B. B é consequência lógica do conjunto de fórmulas $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Entre os parênteses que aparecem na regra será colocado o nome da fórmula, comumente um dos conectivos seguido por um "i" (introdução do conectivo) ou por "e" (eliminação do conectivo).

$\wedge$-introdução Permite concluir $A \wedge B$ dado que A e B já foram concluídas. A regra é escrita como

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\,(\wedge\text{i})$$

Acima da linha são fornecidas as duas premissas da regra e abaixo da linha a conclusão. A regra afirma que se A e B são fórmulas com interpretação verdadeira, então podemos concluir a fórmula $A \wedge B$. A justificativa é óbvia pela definição do conectivo[1]. À direita está o nome da regra, "$\wedge$ i", significando "introdução da conjunção", pois uma fórmula que contém a conjunção foi concluída.

[1]Em caso de dúvida, use o método de tabela-verdade para verificar a consequência lógica.

$\wedge$-eliminação Temos duas regras para eliminar a conjunção

$$\frac{A \wedge B}{A}\ (\wedge \mathrm{e}1)$$

e

$$\frac{A \wedge B}{B}\ (\wedge \mathrm{e}2)$$

Uma regra diz que se temos uma prova de $A \wedge B$ então podemos concluir A, a outra, nas mesmas condições, diz que podemos concluir B.

Exemplo 6.1

Para provar que $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$ é correta, podemos prosseguir como a seguir. Listamos inicialmente as premissas, ou seja, a teoria Γ, se houver. Chamamos essas fórmulas de premissas pois já são dadas pelo problema e consideradas verdadeiras. Temos duas premissas: $\Gamma = \{p \wedge q, r\}$.

1.	$p \wedge q$	*premissa*
2.	r	*premissa*

Pela aplicação da segunda regra de eliminação da conjunção, usando a primeira linha da prova, obtemos a fórmula q.

$$\frac{p \wedge q}{q}\ (\wedge e2)$$

A aplicação é mostrada na linha três, indicando, à direita, a regra que foi usada e sobre qual fórmula (fórmula da linha 1).

1.	$p \wedge q$	*premissa*
2.	r	*premissa*
3.	q	*$\wedge$e2 1*

Como as fórmulas q e r já foram concluídas (nas linhas 3 e 2), então podemos concluir que $q \wedge r$ também é verdadeira.

$$\frac{q \qquad r}{q \wedge r}\ (\wedge i)$$

A quarta linha segue da aplicação da regra de introdução da conjunção.

1.	$p \wedge q$	*premissa*
2.	r	*premissa*
3.	q	$\wedge$*e2 1*
4.	$q \wedge r$	$\wedge$*i 3,2*

Chegamos no consequente $q \wedge r$, portanto a dedução $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$ é correta.

Exemplo 6.2

O sequente $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$ é correto.

1.	$(p \wedge q) \wedge r$	*premissa*
2.	$s \wedge t$	*premissa*
3.	$p \wedge q$	$\wedge$*e1 1*
4.	q	$\wedge$*e2 3*
5.	s	$\wedge$*e1 2*
6.	$q \wedge s$	$\wedge$*i 4,5*

As próximas regras demonstram a introdução e eliminação da dupla negação.

$\neg\neg$-introdução Sabemos que $A \equiv \neg\neg A$. Logo, se temos A, podemos concluir $\neg\neg A$.

$$\frac{A}{\neg\neg A}\ (\neg\neg\mathrm{i})$$

$\neg\neg$-eliminação De forma similar, podemos concluir A caso tenhamos $\neg\neg A$.

$$\frac{\neg\neg A}{A}\ (\neg\neg\mathrm{e})$$

Exemplo 6.3

Para provar $p, \neg\neg(p \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$, após listar as premissas, podemos incluir a dupla negação na fórmula p. Precisamos de $\neg\neg p$ na conclusão do sequente.

1.	p	*premissa*
2.	$\neg\neg(p \wedge r)$	*premissa*
3.	$\neg\neg p$	$\neg\neg$*i 1*

Precisamos também de um r. A única fórmula que contém um r é a premissa da linha 2. Podemos usar a regra de remoção da dupla negação sobre a linha 2 para concluir $p \wedge r$. Em seguida, aplicamos a eliminação da conjunção nesta última fórmula.

1.	p	*premissa*
2.	$\neg\neg(p \wedge r)$	*premissa*
3.	$\neg\neg p$	$\neg\neg$*i 1*
4.	$p \wedge r$	$\neg\neg$*e 2*
5.	r	$\wedge$*e2 4*

Por fim, como temos $\neg\neg p$ e temos r, concluímos $\neg\neg p \wedge r$ usando a regra de introdução da conjunção.

1.	p	*premissa*
2.	$\neg\neg(p \wedge r)$	*premissa*
3.	$\neg\neg p$	$\neg\neg$*i 1*
4.	$p \wedge r$	$\neg\neg$*e 2*
5.	r	$\wedge$*e2 4*
6.	$\neg\neg p \wedge r$	$\wedge$*i 3,5*

$\rightarrow$-eliminação (modus ponens) Dado que $A \rightarrow B$ e A já foram concluídas, podemos concluir B. Já verificamos que esta regra é correta ao estudar consequência lógica, $A \rightarrow B, A \vDash B$. Se usarmos o teorema da dedução nesta última relação, verificamos que $A \rightarrow B \vDash A \rightarrow B$. Claramente é demonstrada a consequência lógica.

$$\frac{A \qquad A \rightarrow B}{B}\ (\rightarrow\text{e/MP})$$

Exemplo 6.4

A dedução $\neg p \wedge q, \neg p \wedge q \to r \vee \neg p \vdash r \vee \neg p$ *é correta como mostra a prova abaixo. A regra modus ponens é aplicada sobre as premissas das linhas 1 e 2.*

1.	$\neg p \wedge q$	*premissa*
2.	$\neg p \wedge q \to r \vee \neg p$	*premissa*
3.	$r \vee \neg p$	$\to$*e 1,2*

Exemplo 6.5

Prova de $p, p \to q, p \to (q \to r) \vdash r$.

1.	p	*premissa*
2.	$p \to q$	*premissa*
3.	$p \to (q \to r)$	*premissa*
4.	q	$\to$*e 1,2*
5.	$q \to r$	$\to$*e 1,3*
6.	r	$\to$*e 4,5*

$\to$-eliminação (modus tollens) Suponha que tenhamos $A \to B$ e $\neg B$. Se A for verdade então, por modus ponens, concluímos B. Neste caso temos B e $\neg B$, o que é impossível. Então A só pode ser falso e $\neg A$ verdadeiro. Com isso podemos concluir a seguinte regra[2].

$$\frac{A \to B \qquad \neg B}{\neg A}\,(MT)$$

[2]Podemos também raciocinar usando a semântica do conectivo $\to$. Temos $I(\neg B) = 1$ e $I(A \to B) = 1$; se $I(A) = 1$ então $I(A \to B) = I(1 \to 0) = 0$, contradizendo $I(A \to B) = 1$. Portanto, $I(A) = 0$ e, consequentemente, $I(\neg A) = 1$.

Exemplo 6.6

Para provar o sequente $p \to (q \to r), p, \neg r \vdash \neg q$ usamos inicialmente a regra modus ponens nas linhas 1 e 2 para concluir $q \to r$. Como temos $\neg r$, por modus tollens, nas fórmulas das linhas 3 e 4, concluímos $\neg q$.

1.	$p \to (q \to r)$	*premissa*
2.	p	*premissa*
3.	$\neg r$	*premissa*
4.	$q \to r$	$\to$*e 2,1*
5.	$\neg q$	*MT 4,3*

Exemplo 6.7

Prova da dedução $\neg p \to q, \neg q \vdash p$.

1.	$\neg p \to q$	*premissa*
2.	$\neg q$	*premissa*
3.	$\neg\neg p$	*MT 1,2*
4.	p	$\neg\neg$*e 3*

A seguir veremos a regra de introdução da implicação. A regra usará a técnica de introdução de hipóteses, que é bastante importante em provas por dedução natural mas que deve ser bem compreendida e usada com cuidado.

$\to$-introdução Incluir a implicação é uma tarefa um pouco mais complicada do que vimos, até agora, para os outros conectivos. A regra de introdução da implicação é mostrada a seguir.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]^j \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \to B}\ (\to i)^j$$

A primeira linha da regra, $[A]$, é uma hipótese. Uma suposição temporária de que uma fórmula A é verdadeira. A premissa da regra informa que a partir da hipótese A, usando quaisquer regras de dedução natural, foi produzido um conjunto de deduções $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$, com $A_n = B$. Em outras palavras, foi possível deduzir B a partir de A. A conclusão da regra significa que, se tal dedução foi possível, então podemos concluir que $A \to B$ é verdadeira.

Além disso, a regra diz que a hipótese A e todas as regras derivadas dela até B podem ser usadas até o momento em que B é encontrada. A partir do momento que concluímos $A \to B$, nenhuma das fórmulas entre A e B, incluindo estas, pode ser usada mais. Existe um escopo definido para a hipótese, um determinado local em que é possível usá-la. Em nossas provas, vamos mostrar esse escopo abrindo e fechando uma "caixa", como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 6.8

Para provar $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$*, iniciamos listando as premissas.*

1.	$p \to q$	*premissa*

Queremos chegar na fórmula $\neg q \to \neg p$ *e portanto parece razoável usar a regra de introdução da implicação. A regra diz que se usarmos* $\neg q$ *como hipótese e formos capazes de deduzir* $\neg p$*, então podemos concluir* $\neg q \to \neg p$*. Fazemos então a hipótese* $\neg q$ *como abaixo. Note que foi criada uma "caixa" delimitando o escopo da hipótese.*

1.	$p \to q$	*premissa*
2.	$\boxed{\neg q}$	*hipótese*

Precisamos deduzir $\neg p$ *a partir da hipótese. Isso é obtido usando a regra modus tollens nas linhas 1 e 2.*

1.	$p \to q$	*premissa*
2.	$\neg q$	*hipótese*
3.	$\neg p$	*MT 1,2*

Agora podemos concluir $\neg q \to \neg p$, conforme a regra de introdução da implicação, usando as fórmulas deduzidas nas linhas 2 e 3.

1.	$p \to q$	*premissa*
2.	$\neg q$	*hipótese*
3.	$\neg p$	*MT 1,2*
4.	$\neg q \to \neg p$	*$\to$i 2-3*

Alguns pontos da aplicação dessa regra merecem nota:

1. Para concluir $A \to B$, a "caixa" deve iniciar com a hipótese A e terminar com a dedução B;

2. As fórmulas dentro da "caixa" podem ser usadas apenas dentro da caixa, somente dentro do escopo;

3. Qualquer fórmula concluída anteriormente à abertura da caixa pode ser usada dentro da caixa, desde que não pertença a alguma caixa que já foi fechada.

4. A conclusão de $A \to B$ é independente da interpretação da hipótese. Por isso, a conclusão é escrita fora da caixa.

Como podemos justificar que essa é uma regra correta? Queremos concluir $A \to B$, ou seja, $I(A \to B) = 1$. Em que condições poderemos fazer isso? Sabemos que existem três possibilidades para que $I(A \to B) = 1$:

1. $I(A) = 0$ e $I(B) = 0$;

2. $I(A) = 0$ e $I(B) = 1$;

3. $I(A) = 1$ e $I(B) = 1$.

Notamos que se $I(A) = 0$, não dependemos da valoração de B e podemos assumir $I(A \to B) = 1$. Mas ainda existe o caso de $I(A) = 1$, para o qual obrigatoriamente $I(B) = 1$. Esse é o caso que temos que provar e é o caso refletido na regra de introdução da implicação.

Fazemos a suposição de que $I(A) = 1$ e, se deduzimos $I(B) = 1$, todas as possibilidades para $I(A \to B) = 1$ são cobertas. Podemos concluir $A \to B$ mesmo sem saber se $I(A) = 0$ ou $I(A) = 1$.

Exemplo 6.9

Para provar $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$*, começamos com as premissas.*

1.	$\neg q \rightarrow \neg p$	*premissa*

Para concluir $p \rightarrow \neg\neg q$ *usamos a regra da introdução da implicação. A regra diz que precisamos ter uma hipótese* p *e que precisamos deduzir* $\neg q$*. A hipótese é feita abaixo com seu escopo delimitado por uma caixa.*

1.	$\neg q \rightarrow \neg p$	*premissa*
2.	$\boxed{p}$	*hipótese*

Pela regra de introdução da dupla negação chegamos na próxima linha de prova.

1.	$\neg q \rightarrow \neg p$	*premissa*
2.	p	*hipótese*
3.	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ *2*

Por modus tollens obtemos a quarta linha da prova.

1.	$\neg q \rightarrow \neg p$	*premissa*
2.	p	*hipótese*
3.	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ *2*
4.	$\neg\neg q$	*MT 1,3*

Agora temos exatamente o que a regra de introdução da implicação pede. Iniciamos com a hipótese p e deduzimos $\neg\neg q$. Portanto, podemos concluir $p \to \neg\neg q$. Note que na descrição de como a fórmula foi deduzida referenciamos todas as linhas usadas na regra de introdução da implicação, ou seja, as linhas de 2 até 4.

1.	$\neg q \to \neg p$	*premissa*
2.	p	*hipótese*
3.	$\neg\neg p$	$\neg\neg$*i 2*
4.	$\neg\neg q$	*MT 1,3*
5.	$p \to \neg\neg q$	$\to$*i 2-4*

Definição 6.1. *Caso o sequente $\Gamma \vdash A$ possua teoria vazia, então este é denotado $\vdash A$ e chamado de teorema.*

Exemplo 6.10

Provar o teorema $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$.

1.	$q \rightarrow r$	*hipótese*
2.	$\neg q \rightarrow \neg p$	*hipótese*
3.	p	*hipótese*
4.	$\neg\neg p$	$\neg\neg$*i 3*
5.	$\neg\neg q$	*MT 2,4*
6.	q	$\neg\neg$*e 6*
7.	r	$\rightarrow$*e 1,6*
8.	$p \rightarrow r$	$\rightarrow$*i 3-7*
9.	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow$*i 2-8*
10.	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow$*i 1-9*

Algumas vezes, o teorema da dedução pode tornar uma prova mais simples de ser visualizada.

Exemplo 6.11

Provar $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$.

Sabemos que $\vdash (q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$ *pode ser reescrito, conforme o teorema da dedução, como*

$$q \to r \vdash (\neg q \to \neg p) \to (p \to r)$$
$$q \to r, \neg q \to \neg p \vdash (p \to r)$$
$$q \to r, \neg q \to \neg p, p \vdash r$$

Podemos usar uma das formas alternativas em uma prova por dedução natural, como na prova abaixo.

1.	$q \to r$	*premissa*
2.	$\neg q \to \neg p$	*premissa*
3.	p	*premissa*
4.	$\neg\neg p$	$\neg\neg$*i 3*
5.	$\neg\neg q$	*MT 2,4*
6.	q	$\neg\neg$*e 5*
7.	r	$\to$*e 1,6*

$\vee$**-introdução** Dada uma premissa A, nós podemos concluir $A \vee B$ para qualquer fórmula B. A justificativa segue diretamente da definição da semântica do conectivo $\vee$. A interpretação $I(A \vee B) = 1$ se $I(A) = 1$ ou $I(B) = 1$. Já temos $I(A) = 1$, não dependendo de $I(B)$. Da mesma forma, dada uma premissa B, podemos concluir $A \vee B$. Temos as regras abaixo.

$$\frac{A}{A \vee B}\,(\vee\text{i}1)$$

$$\frac{B}{A \vee B}\,(\vee\text{i}2)$$

$\vee$**-eliminação** A exclusão da disjunção é uma regra mais complicada. Como usar uma fórmula $A \vee B$ em uma prova? Sabemos que pelo menos umas das duas subfórmulas é verdadeira, A ou B. No entanto, não sabemos qual. A solução é fornecer duas provas separadas para um mesmo argumento:

1. Fazemos a hipótese de que A é verdadeira e obtemos C.

2. Fazemos a hipótese de que B é verdadeira e obtemos C.

3. Neste caso podemos assumir C verdadeira já que chegamos neste resultado tanto por A quanto por B.

Podemos enunciar a regra como abaixo.

$$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ (\vee\mathrm{e})$$

Note que a regra informa que precisamos de duas premissas. Cada uma terá seu próprio escopo.

Exemplo 6.12

Para provar o sequente $p \vee q \vdash q \vee p$ começamos como de costume, listando as premissas.

1.	$p \vee q$	*premissa*

Temos uma disjunção, vamos tentar usar a regra de eliminação da disjunção. A regra diz que precisamos de duas hipóteses. Abaixo é criada a primeira hipótese e seu escopo é explicitado por uma caixa dentro da prova.

1.	$p \vee q$	*premissa*
2.	$\boxed{p}$	*hipótese*

Vamos tentar concluir $q \vee p$ a partir da hipótese p. Mas isso é fácil, a segunda regra de inclusão da disjunção pode ser usada.

1.	$p \vee q$	*premissa*
2.	p	*hipótese*
3.	$q \vee p$	$\vee$*i2 2*

Chegamos na conclusão do sequente que queremos provar. No entanto, não basta chegar apenas pela hipótese de p. Segundo a regra de eliminação da disjunção, é preciso também fazer a hipótese de q e chegar na mesma conclusão. Fazemos então a hipótese q com seu escopo também bem definido.

1.	$p \vee q$	premissa
2.	p	*hipótese*
3.	$q \vee p$	$\vee i2$ *2*
4.	q	*hipótese*

Novamente pela regra de inclusão da disjunção é possível concluir $q \vee p$.

1.	$p \vee q$	premissa
2.	p	*hipótese*
3.	$q \vee p$	$\vee i2$ *2*
4.	q	*hipótese*
5.	$q \vee p$	$\vee i1$ *4*

Como encontramos $q \vee p$ por ambos os caminhos, podemos concluir que $q \vee p$ é verdadeira. A prova foi bem sucedida. A descrição de como a linha $q \vee p$ foi obtida reflete a regra de eliminação da disjunção. Temos o nome da regra $\vee e$, que foi aplicada na fórmula da linha 1 e que foi provada, independentemente, para hipóteses diferentes, nas linhas de 2 a 3 e de 4 a 5.

1.	$p \vee q$	*premissa*
2.	$\boxed{p}$	*hipótese*
3.	$\boxed{q \vee p}$	$\vee$*i2 2*
4.	$\boxed{q}$	*hipótese*
5.	$\boxed{q \vee p}$	$\vee$*i1 4*
6.	$q \vee p$	$\vee$*e 1,2-3,4-5*

Exemplo 6.13

A prova de $q \to r \vdash (p \vee q) \to (p \vee r)$ *usa hipóteses para as regras de introdução da implicação e para eliminação da disjunção. Note os escopos dados pelas caixas.*

1.	$q \to r$	*premissa*
2.	$p \vee q$	*hipótese*
3.	$\quad p$	*hipótese*
4.	$\quad p \vee r$	$\vee$*i1 3*
5.	$\quad q$	*hipótese*
6.	$\quad r$	$\to$*e 1,5*
7.	$\quad p \vee r$	$\vee$*i2 6*
8.	$p \vee r$	$\vee$*e 2,3-4,5-7*
9.	$(p \vee q) \to (p \vee r)$	$\to$*i 2-8*

Exemplo 6.14

Provar $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$.

1.	$(p \vee q) \vee r$	*premissa*
2.	$p \vee q$	*hipótese*
3.	p	*hipótese*
4.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee$*i1 3*
5.	q	*hipótese*
6.	$q \vee r$	$\vee$*i1 5*
7.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee$*i1 6*
8.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee$e *2,3-4,5-7*
9.	r	*hipótese*
10.	$q \vee r$	$\vee$*i2 9*
11.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee$*i2 10*
12.	$p \vee (q \vee r)$	$\vee$e *1,2-8,9-11*