

Détaillez vos réponses, prouvez vos affirmations. Les étoiles marquent les questions difficiles.

IMPORTANT : Pensez à noter le numéro du sujet sur votre copie.

Durée : 2h. Documents autorisés. Pas de calculatrices. Pas d’ordinateur. Pas de téléphone.

Question 1

Calculer la valeur en base 10 de l’expression suivante

$$\frac{(101000)_4 - (540)_{16}}{2^6}$$

Question 2

Prouver que

$$p \rightarrow r \models (p \wedge q) \rightarrow r.$$

Question 3

En utilisant exclusivement les symboles $+$, $-$, \times , $=$, \leq , les constantes $0, 1, 2, \dots$ et le calcul des prédicats, écrire en langage logique l’affirmation « tout nombre peut s’écrire comme somme de deux nombres non nuls ».

Question 4

Montrer par induction que $\sum_{k=0}^n (9k - 1) = \frac{1}{2} (n + 1)(9n - 2)$ pour tout $n \geq 0$.

Question 5

Pour chacune des fonctions suivantes dire si elle est injective et/ou surjective. Donner une justification dans le cas affirmatif, ou un contre-exemple dans le cas négatif.

- (a) La tangente, $\tan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- (b) La fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n!$,
- (c) La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

Question 6

Soit A l’ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$. Pour chacune des relations binaires sur A ci-dessous (exprimées comme des sous-ensembles de $A \times A$), dire si elle est réflexive, symétrique, anti-symétrique, transitive.

- (a) $\mathcal{R} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$,
- (b) $\mathcal{S} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$,
- (c) $\mathcal{T} = \{(0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$.

Suggestion : dessinez les diagrammes des relations.

- (d) Y a-t-il des relations d’équivalence ? Quelles sont les classes d’équivalence ?

Question 7

Soient

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et σ_1^{-1} .
- (b) Calculer les décompositions en cycles de σ_1 , σ_2 , σ_1^{-1} et σ_2^{-1} .

Question 8

On s’intéresse au nombre de façons d’écrire un entier n comme une somme de k entiers positifs. Par exemple, 4 peut s’écrire de trois façons différentes comme une somme de trois entiers :

$$1 + 1 + 2, \quad 1 + 2 + 1, \quad 2 + 1 + 1$$

On va noter $S(n, k)$ ce nombre, donc $S(4, 3) = 3$.

- (a) Énumérer toutes les possibilités pour $1 \leq k \leq n \leq 4$. Combien vaut $S(n, k)$ dans ces cas ?
- (b) Pour un n quelconque, combien valent $S(n, 1)$ et $S(n, n)$?
- (c) Pour un n quelconque, combien valent $S(n, 2)$ et $S(n, n - 1)$?
- (d) Combien de façons y a-t-il d’écrire n comme une somme de k entiers positifs commençant par $1 + \dots$? (Dans l’exemple, on voit que les seules possibilités pour $n = 4$, $k = 3$ sont $1 + 1 + 2$ et $1 + 2 + 1$.)
- (e) Combien de façons y a-t-il d’écrire n comme une somme de k entiers positifs ne commençant pas par $1 + \dots$? (Dans l’exemple, on voit que la seule possibilité pour $n = 4$, $k = 3$ est $2 + 1 + 1$.)
- (f) En déduire une définition récursive de $S(n, k)$.
- (g) Prouver par induction que $S(n, k) = \binom{n-1}{k-1}$.
- (h) (**) Combien de façons y a-t-il de d’écrire un entier n comme une somme de k entiers *positifs ou nuls* ?

Solutions

Solution 1 En passant par la base 4 on a

$$\frac{(101000)_4 - (540)_{16}}{2^6} = \frac{(101000)_4 - (111000)_4}{2^6} = \frac{(-10000)_4}{2^6} = (-10)_4 = -4.$$

Solution 2 Il suffit d'écrire les tables de vérité.

p	q	r	$p \rightarrow r$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

On remarque qu'à chaque fois que la proposition de gauche est vraie, celle de droite l'est aussi. Donc $(p \wedge q) \rightarrow r$ est bien une conséquence logique de $p \rightarrow r$. On remarque, par contre, que les deux propositions ne sont pas sémantiquement équivalentes.

Solution 3

$$\forall x. \exists y. \exists z. (x = y + z) \wedge \neg(y = 0) \wedge \neg(z = 0).$$

Solution 4 On procède par induction. Le cas de base est immédiat. Pour la récurrence on a

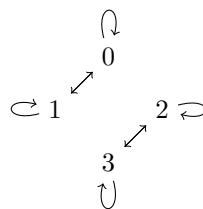
$$\sum_{k=0}^{n+1} (9k-1) = 9n+8 + \sum_{k=0}^n (9k-1) = 9n+8 + \frac{9}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 1 = \frac{9}{2}n^2 + \frac{25}{2}n + 7 = \frac{1}{2}(n+2)(9n+7).$$

Solution 5

- (a) La tangente prend toutes les valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$, elle est donc surjective. Par contre, elle est périodique de période 2π , c'est à dire que $\tan(x) = \tan(x+2\pi)$ pour tout x ; elle n'est donc pas injective.
- (b) On a $0! = 1! = 1$, la fonction factorielle n'est donc pas injective. Il est facile de voir que la fonction factorielle est croissante, en effet $n! = n \cdot (n-1)! \geq n-1!$. On a $2! = 2$ et $3! = 6$, puisque la factorielle est croissante, elle ne peut prendre aucune valeur entre 3 et 5; elle n'est donc pas surjective.
- (c) On a $(-1)^2 = 1^2 = 1$, la fonction n'est donc pas injective. Elle ne prend aucune valeur négative, elle n'est donc pas non plus surjective.

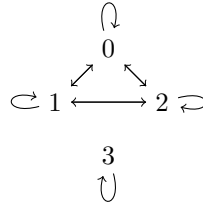
Solution 6

- (a) Le graphe de la relation \mathbb{R} est



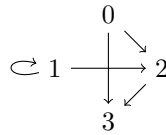
Elle est réflexive, symétrique et transitive. Elle n'est pas anti-symétrique, car il y a une double flèche, par exemple, entre 0 et 1.

- (b) Le graphe de la relation \mathcal{S} est



Elle est réflexive, symétrique et transitive. Elle n'est pas anti-symétrique, car il y a une double flèche, par exemple, entre 0 et 1.

- (c) Le graphe de la relation \mathcal{T} est



Elle n'est pas symétrique, ni réflexive. Elle est anti-symétrique (pas de double flèches entre éléments distincts), et transitive (la seule chose à vérifier c'est qu'on a un chemin $0 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, et aussi le chemin direct $0 \rightarrow 3$).

- (d) Les relations \mathcal{R} et \mathcal{S} sont réflexives, symétriques et transitives, elles sont donc des relations d'équivalence. Dans le premier cas, il y a deux classes d'équivalence : $\{0, 1\}$ et $\{2, 3\}$. Dans le second cas, il y a deux classes d'équivalence : $\{0, 1, 2\}$ et $\{3\}$.

Solution 7

$$(a) \sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \sigma_1 = (1 \ 6 \ 3 \ 2 \ 5), \sigma_2 = (1 \ 4 \ 6 \ 5 \ 2 \ 3), \sigma_1^{-1} = (1 \ 5 \ 2 \ 3 \ 6), \sigma_2^{-1} = (1 \ 3 \ 2 \ 5 \ 6 \ 4).$$

Solution 8

- (a) Voici la liste des possibilités :

$$\begin{array}{lllll} 1 = 1, & & & & \\ 2 = 2, & 2 = 1 + 1, & & & \\ 3 = 3, & 3 = 1 + 2 = 2 + 1, & 3 = 1 + 1 + 1, & & \\ 4 = 4, & 4 = 1 + 3 = 3 + 1, & 4 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1, & 4 = 1 + 1 + 1 + 1. \end{array}$$

Ce qui donne les premières lignes du triangle de Pascal :

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

- (b) On voit bien que la seule façon d'écrire n comme une somme de 1 terme est $n = n$. La seule façon d'écrire n comme une somme de n termes est $n = 1 + 1 + \dots + 1$. Donc $S(n, 1) = S(n, n) = 1$.

- (c) Les façons d'écrire n comme une somme de 2 termes sont :

$$1 + (n - 1), \quad 2 + (n - 2), \quad \dots, \quad (n - 1) + 1.$$

Ceci correspond à écrire $n = a + b$, avec $a = m$ et $b = n - m$, où les valeurs de m comprises entre 1 et $n - 1$ sont acceptables. Il y a donc $n - 1$ façons possibles.

Les façons d'écrire n comme une somme de $n - 1$ termes sont :

$$1 + 1 + \cdots + 1 + 2, \quad 1 + 1 + \cdots + 2 + 1, \quad \dots, \quad 2 + 1 + \cdots + 1.$$

Le terme 2 peut être placé à n'importe laquelle des $n - 1$ positions, il y a donc $n - 1$ possibilités.

Donc $S(n, 1) = S(n, n - 1) = n - 1$.

- (d) Supposons que n est écrit comme une somme de k termes $n = 1 + \cdots$. Si on enlève le premier 1, il reste $k - 1$ termes qui somment à $n - 1$. Il y a donc $S(n - 1, k - 1)$ façons différentes d'écrire n ainsi.
- (e) Supposons que n est écrit comme une somme de k termes $n = a + \cdots$, avec $a > 1$. Puisque $a > 1$, on peut enlever 1 de a et obtenir une somme de k termes positifs

$$n - 1 = (a - 1) + \cdots.$$

Il y a donc $S(n - 1, k)$ façons différentes d'écrire n ainsi.

- (f) Des deux points précédents, on déduit $S(n, k) = S(n - 1, k) + S(n - 1, k - 1)$.
- (g) On a déjà vérifié au premier point que $S(1, 1) = \binom{0}{0} = 1$. Par induction sur n , on déduit du point précédent

$$S(n, k) = S(n - 1, k) + S(n - 1, k - 1) = \binom{n - 2}{k - 1} + \binom{n - 2}{k - 2} = \binom{n - 1}{k - 1},$$

où la deuxième égalité vient de l'hypothèse de récurrence, et la troisième de l'égalité fondamentale sur les coefficients binomiaux.

- (h) Considérons une somme de k termes positifs ou nuls, par exemple

$$4 = 0 + 1 + 2 + 0 + 1.$$

En ajoutant 1 à chacun des k termes on obtient k termes strictement positifs qui somment à $n + k$, par exemple

$$4 + 5 = 1 + 2 + 3 + 1 + 2.$$

Deux sommes différentes pour n donneront lieu à deux sommes différentes pour $n + k$ par cette transformation, et toute somme pour $n + k$ peut s'obtenir de cette façon. Autrement dit, on a établi une bijection entre les sommes de k entiers positifs ou nuls pour n et les sommes de k entiers positifs pour $n + k$. On en déduit qu'en général il y a $S(n + k, k) = \binom{n + k - 1}{k - 1}$ façons d'écrire n comme une somme de k entiers positifs ou nuls.