Lisez le sujet jusqu'au bout, puis revenez ici.

Maintenant choisissez un exercice. Lisez-le en entier, assurez-vous de l'avoir compris, si vous avez un doute n'hésitez pas à poser une question. Essayez de répondre d'abord aux parties qui vous paraissent plus simples, n'hésitez pas à sauter un point sur lequel vous bloquez.

Ne répondez pas aux questions par un simple *oui* ou *non*. Argumentez vos réponses, prouvez vos affirmations.

Les étoiles marquent les exercices difficiles. Plus il y a d'étoiles plus la solution de l'exercice sort des schémas vus en TD.

**Pas de calculettes. Pas d'ordinateur. Pas de téléphone portable.**

---

**Question 1**

En utilisant exclusivement [1] les symboles $\in, +, \times, =, \neq, <, >, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, les constantes $0, 1, \ldots$ et les connecteurs de la logique du premier ordre $(\forall, \exists, \wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$, exprimer les assertions suivantes :

(a) Tout entier a un opposé.

(b) Tout entier positif s'écrit comme somme de quatre carrés (théorème de Lagrange).

(c) $(\star)$ $n$ est premier.

**Question 2**

On considère le système de preuve constitué des schémas d'axiomes

1. $(\neg\phi \vee \psi) \to (\phi \to \psi)$,
2. $(\phi \wedge \neg\psi) \to \neg(\phi \to \psi)$,

et des règles d'inférence suivantes (*modus ponens* et *introduction de la conjonction*)

$$\frac{\phi \to \psi \quad \phi}{\psi} M, \qquad \frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge_I,$$

(a) Donner une preuve formelle de $A, B \vdash (A \wedge B)$.

(b) Donner une preuve formelle de $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$.

**Question 3**

**Rappel :** Une formule de la forme $A \vee B$ (aussi noté $A + B$, surtout en électronique) est appelée une *clause disjonctive*. Une formule de la forme $A \wedge B$ (aussi noté $AB$) est appelée une *clause conjonctive*.

(a) Trouver les formules booléennees avec le moins de clauses disjonctives possibles correspondantes aux deux tableaux de Karnaugh suivants.

(a.1)

| $_{AB}\backslash^{CD}$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 01 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 11 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 1 |

(a.2)

| $_{AB}\backslash^{CD}$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 01 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 0 | 1 | 1 | 1 |

(b) $(\star)$ Trouver une formule booléenne équivalente à la formule

$$\bar{A}D + \bar{A}B\bar{D} + ABC\bar{D}$$

ayant le même nombre de clauses disjonctives (trois) et moins de clauses conjonctives.

1. En particulier, vous n'avez pas droit à $/, \div, |$, mod et d'autres symboles *exotiques*

**Question 4**

Soient $\sigma_1$ et $\sigma_2$ les permutations suivantes

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$, $\sigma_2 \circ \sigma_1$, $\sigma_1^{-1}$ et $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2 \circ \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1$.

(b) ($\star$) Exhiber une permutation qui commute avec $\sigma_2$ (i.e. telle que $\sigma_2 \circ \tau = \tau \circ \sigma_2$).

## Combinatoire des tableaux de Karnaugh

Le but des exercices qui suivent est de montrer (d'une façon un peu tordue) qu'un même tableau de Karnaugh peut donner lieu à plusieurs formules équivalentes. À l'exception de la dernière, les questions sont indépendantes et peuvent être résolues sans respecter l'ordre.

**Question 5**

Dans la question 3 on s'intéressait aux tableaux de Karnaugh à 4 variables ($A$, $B$, $C$ et $D$) ; on s'intéresse maintenant aux tableaux à un nombre arbitraire de variables.

(a) Combien de cases contient un tableau de Karnaugh à 1, 2, 3 ou 4 variables ? Combien de cases contient un tableau de Karnaugh à $n$ variables ?

(b) Deux tableaux de Karnaugh sont différents si au moins l'une des cases est différente. Sachant qu'une case vaut soit 0, soit 1, combien de tableaux de Karnaugh différents à $n$ variables existent-ils ?

**Question 6**

On veut maintenant compter combien il y a de *clauses conjonctives.*

(a) On se donne $n$ lettres $A, B, C, \ldots$. Un choix de $k$ lettres parmi les $n$ est appelé une *partie de taille* $k$. Combien y a-t-il de parties de taille $k$ ?

(b) Une clause conjonctive (par exemple $A\bar{B}D$) peut être vue comme une partie dans laquelle on a marqué certaines lettres avec une barre. Si on a une partie de taille $k$ (par exemple $ABD$), combien de façons différentes de marquer ses lettres y a-t-il ?

(c) Fixons $n$ variables $A, B, C, \ldots$. Combien y a-t-il de clauses conjonctives différentes contenant exactement $k$ des $n$ variables ? [2]

**Question 7**

Prouver l'égalité $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$.

**Question 8**

Si on considère l'ensemble $\mathcal{C}$ de toutes les clauses conjonctives, une clause disjonctive peut être vue comme un sous-ensemble (éventuellement vide) de $\mathcal{C}$. Supposant qu'il y ait au total $m$ clauses conjonctives, combien de clauses disjonctives y a-t-il ?

**Question 9** ($\star\star$)

Cette question est dure pour la simple raison qu'il faut avoir résolu les questions 5 à 8 pour pouvoir y répondre.

(a) Fixons $n$ variables $A, B, C, \ldots$. Combien y a-t-il de clauses disjonctives ?

(b) Déduire qu'à un seul tableau de Karnaugh à $n$ variables correspondent nécessairement plusieurs formules.

(c) Inversement, peut-on avoir une formule à qui correspondent plusieurs tableaux de Karnaugh ?

2. Si $k = 0$ on note $\mathbf{1}$ l'unique clause conjonctive contenant 0 variables. C'est la clause qui vaut toujours vrai.

## Solutions

### Solution 1

(a) $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, n + m = 0.$

(b) $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists a, b, c, d \in \mathbb{Z}, n = a \times a + b \times b + c \times c + d \times d.$

(c) $\forall a, b \in \mathbb{Z}, (ab = n) \Rightarrow (a = 1 \vee b = 1).$

### Solution 2

(a) C'est une simple application de la règle $\wedge_I$.

$$\dfrac{\overline{A} \quad \overline{B}}{A \wedge B}\wedge_I$$

(b) Il s'agit d'une application de $\wedge_I$ et d'un *modus ponens* avec l'axiome 2.

$$\dfrac{(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B) \qquad \dfrac{\overline{A} \quad \overline{\neg B}}{A \wedge \neg B}\wedge_I}{\neg(A \to B)}M$$

### Solution 3

(a.1) $\bar{B}\bar{D} + B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}CD$,

(a.2) Il y a plusieurs solutions contenant quatre clauses conjonctives. Les solutions $AB + \bar{C}D + C\bar{D} + AD$ et $AB + \bar{C}D + C\bar{D} + AC$ sont les deux qui contiennent le moins de clauses conjonctives.

(b) On commence par écrire le tableau de Karnaugh de la formule :

| $AB \backslash CD$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 01 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Maintenant on calcule une formule pour ce tableau en faisant bien attention à sélectionner des *paquets* les plus gros possibles (ce qui nous oblige à les superposer). Le résultat est la formule $\bar{A}D + \bar{A}B + BC\bar{D}$.

Alternativement, sans utiliser de tableau, on aurait pu utiliser la distributivité :

$$\bar{A}D + \bar{A}B\bar{D} = \bar{A}(D + B\bar{D}),$$

utiliser une table de vérité (ou un tableau de Karnaugh à deux variables) pour montrer que

$$D + B\bar{D} = D + B,$$

et conclure en appliquant à nouveau la distributivité

$$\bar{A}(D + B\bar{D}) = \bar{A}D + \bar{A}B.$$

Et on peut répéter en simplifiant de la même façon $\bar{A}B + ABC\bar{D} = \bar{A}B + BC\bar{D}$.

### Solution 4

(a) On a

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on a par définition $\sigma_2 \circ \sigma_2^{-1} = \mathrm{id}$ et, en substituant cette égalité,

$$\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2 \circ \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1 = \sigma_1^{-1} \circ \mathrm{id} \circ \sigma_1 = \mathrm{id} \circ \sigma_1^{-1} \circ \sigma_1 = \mathrm{id} \circ \mathrm{id} = \mathrm{id}.$$

(b) Un choix de simplicité consiste à prendre $\tau = \mathrm{id}$, alors par définition même de l'identité, ceci commute avec n'importe quelle permutation (et donc en particulier avec $\sigma_2$).
Si on veut chercher moins trivial, on observe que la décomposition de $\sigma_2$ en cycles est $(1\ 6)(3\ 4\ 5) = (3\ 4\ 5)(1\ 6)$ (car les cycles disjoints commutent). On note $\tau = (1\ 6)$, on se souvient qu'il s'agit d'une transposition et que les transpositions sont des involutions, i.e. $\tau = \tau^{-1}$. On en déduit

$$\tau \circ \sigma_2 = \tau \circ (1\ 6)(3\ 4\ 5) = \tau \circ \tau^{-1}(3\ 4\ 5) = \mathrm{id} \circ (3\ 4\ 5) =$$
$$(3\ 4\ 5) \circ \mathrm{id} = (3\ 4\ 5) \circ \tau^{-1} \circ \tau = (3\ 4\ 5) \circ (1\ 6) \circ \tau = \sigma_2 \circ \tau.$$

**Solution 5**

(a) Les tableaux à 1, 2, 3 ou 4 variables contiennent respectivement 2, 4, 8 et 16 cases. En général, à chaque fois qu'on ajoute une variable on multiplie par deux le nombre de cases, donc par une récurrence évidente on a que un tableau à $n$ variables contient $2^n$ cases.

(b) Il est bien connu qu'il y a $2^m$ mots différents de longueur $m$ composés de 0 et de 1 (la preuve se fait avec une simple récurrence). Un tableau à $n$ variables est déterminé par le contenu de ses $2^n$ cases, il y en a donc $2^{2^n}$ au total.

**Solution 6**

(a) C'est la définition du coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

(b) Une fois fixée une partie de taille $k$, pour chaque élément on a le choix entre poser une barre ou non. Ceci est équivalent à donner un mot de longueur $k$ composé de 0 et de 1 (0 pour une barre et 1 pour pas de barre, par exemple). Il y a donc $2^k$ façons différentes de poser des barres.

(c) Des deux points précédents, on déduit immédiatement qu'il y a $\binom{n}{k}2^k$ clauses conjonctives différentes de longueur $k$.

**Solution 7** Il suffit d'instancier le théorème binomial

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

avec $a = 2$ et $b = 1$.

**Solution 8** Il est connu que si $A$ est un ensemble fini de cardinalité $m$, son ensemble des parties $\mathcal{P}(A)$ a cardinalité $2^m$. Ceci peut être vu en associant une chaîne binaire de longueur $m$ à chaque sous-ensemble de $A$ : à chaque élément de $A$ on fait correspondre 1 si l'élément est dans le sous-ensemble et 0 sinon.

**Solution 9**

(a) De la question 6 on sait qu'il y a $\binom{n}{k}2^k$ clauses conjonctives de longueur $k$ et de la question 7 on déduit qu'il y a au total $3^n$ clauses conjonctives. Grâce à la question 8 on conclut qu'il y a au total $2^{3^n}$ clauses disjonctives.

(b) On a démontré dans la question 5 qu'il y a au total $2^{2^n}$ tableaux de Karnaugh différents, donc moins que les clauses disjonctives (excepté pour $n = 0$). Mais à toute clause disjonctive correspond le tableau de Karnaugh donné par sa table de vérité, donc nécessairement cette correspondance est surjective mais pas injective. Il y a donc bien des tableaux de Karnaugh qui correspondent à plusieurs formules différentes (ce qu'on savait déjà très bien. . .il suffit de voir la question 3).

(c) Comme on l'a dit ci-dessus, à chaque formule correspond le tableau de Karnaugh de sa table de vérité. Puisque cette table de vérité est unique, le tableau l'est aussi.