LICENCIATURA EN INFORMATICA

PROGRAMADOR UNIVERSITARIO

INGENIERÍA EN INFORMÁTICA

ELEMENTOS DE COMPUTACIÓN Y LÓGICA

2023

Lic. Mariela A. Velázquez - Dr. Leonardo Albarracín

Universidad Nacional de Tucumán

2020 - AÑO DEL GENERAL MANUEL BELGRANO

Contenido

Unidad 1. Proposiciones Simples y Compuestas. Representación simbólica. Conectivos lógicos: Negación, Conjunción, Disyunción, Condicional, Bicondicional. Tablas de verdad. Jerarquía de conectivos. Clasificación de fórmulas lógicas por su significado: Tautologías, contradicciones y contingencias. Implicación y equivalencia lógica. Leyes Lógicas

Unidad 2. Razonamientos. Componentes: premisas, conclusión. Reglas de inferencia. Métodos de demostración: directo e indirecto. Validez de un razonamiento.

Unidad 3. Lógica de Predicados. Funciones proposicionales. Universo del discurso. Representación simbólica. Cuantificadores: Cuantificador universal y cuantificador existencial. Alcance de un cuantificador. Variables libres y variables vinculadas. Proposiciones categóricas. Negación de proposiciones cuantificadas. Equivalencia de proposiciones cuantificadas universalmente y existencialmente. Razonamientos. Reglas de especificación universal y existencial. Reglas de generalización universal y existencial.

Unidad 4. Álgebras Booleanas y circuitos combinatorios. Propiedades de los circuitos combinatorios. Funciones Booleanas.

Unidad 5. Sistemas de numeración binario. Conversiones. Suma y resta de binarios. Sistema de numeración octal. conversiones. Sistema de numeración hexadecimal.

Unidad 6. Diseño de Algoritmos. La programación como una metodología. Diseño de Algoritmos. Métodos de refinamientos sucesivos. Lenguaje de Diseño de programas. La programación estructurada. Estructuras algorítmicas fundamentales. Formas de reducción de complejidad: secuenciación, análisis por casos, análisis Iterativo. Generalización del concepto de procedimiento: Acciones parametrizadas, funciones.

Unidad N° 1 - Parte 2: Jerarquía de conectivos. Clasificación de fórmulas lógicas por su significado: Tautologías, contradicciones y contingencias. Implicación y equivalencia lógica. Leyes lógicas.

Repasemos lo visto

Que es la Lógica

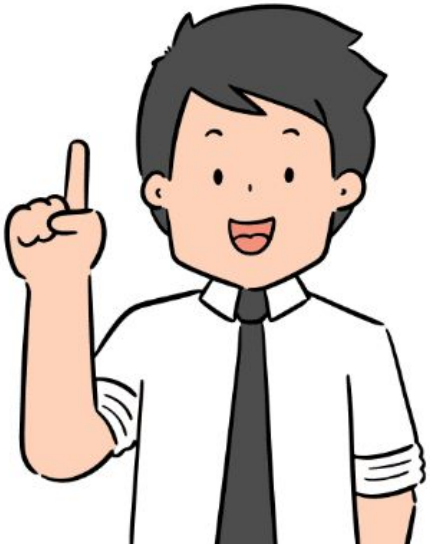
- Consejos y trucos para el buen pensar
- Estudio de las verdades más generales acerca de las cosas
- Acerca del lenguaje y que podemos expresar con él.

Campos de aplicación

Ciencias de la computación: estudio de las bases de datos, interpretación de lenguajes de programación y algoritmos, entre otros.

Principio de Bivalencia

En la lógica clásica, tanto de enunciados como de predicados se asume que cada expresión lógica es verdadera o falsa



Repasemos lo visto

Proposiciones atómicas

Declaración indivisible que denota un hecho de la realidad y asume un valor de verdad.

Conectivos

Los conectivos son expresiones lingüísticas que ligan dos proposiciones: “y”, “no”, “pero”, “o”, “aunque”,…

Proposiciones compuestas

Proposiciones atómicas

+

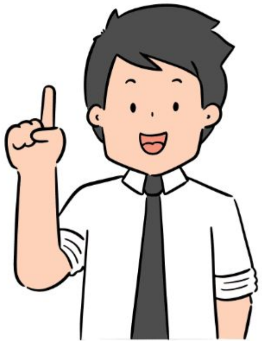
Conectivos

=

Proposición compuesta

Tablas de verdad

p	q	p ⋀ q	p v q	¬p	p □ q	p ↔ q
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	V	V	V



Disyunción exclusiva

La proposición compuesta "A o B" es verdadera

si una y sólo una de ellas es verdadera

Usamos el símbolo $\veebar$ para la disyunción exclusiva. La proposición compuesta es: $p \veebar q$.

Por ejemplo: Mañana iremos a clase o nos quedaremos en casa a estudiar.

1 p = Mañana iremos a clase.

q = Mañana nos quedaremos en casa a estudiar.

Proposiciones atómicas

conectivo: o 2

$p \veebar q$ 3

A	B	$A \veebar B$
V	V	**F**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Tabla de verdad: o exclusivo

A	B	A v B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla de verdad: o inclusivo

A y B no son fórmulas del lenguaje, sino metavariables que representan cualquier fórmula del lenguaje.

Jerarquía de conectivos: Alcance, precedencia y conectivo principal

Cuando agregamos un conectivo a una fórmula, es importante determinar las partes de la fórmula que este afecta.

En cuanto al alcance o ambiente de los conectivos, tenemos dos tipos: conectivos binarios ($\wedge$, $\vee$) y unarios ($\neg$).

- Los conectivos binarios se hallan en el medio de dos proposiciones (P, Q, …) que afecta.
- En el caso de la negación, este operador se encuentra inmediatamente a la izquierda de la proposición que afecta.

Jerarquía de conectivos: Alcance, precedencia y conectivo principal

Analicemos los siguientes ejemplos:

1. $P \lor Q$ — Claramente el conectivo afecta a P y Q.
2. $\neg P \lor Q$ — Claramente la negación afecta solo a P.
3. $P \lor Q \land R$ — Se detectan ambigüedades.

La pregunta es ¿en qué orden esto sucede?.

Para esto debemos determinar el nivel de precedencia de cada conectivo. Esto es: ¿qué conectivo aplicamos primero?

El orden de precedencia para los operadores vistos es:

1. **¬**
2. **∧**
3. **∨**
4. **→**
5. **↔**

Con las reglas de precedencia es fácil resolver las ambigüedades.

Jerarquía de conectivos: Alcance, precedencia y conectivo principal

En la proposición del ejemplo: el conectivo $\wedge$ solo afecta a Q y a R, $\vee$ afecta a P y a $(Q \wedge R)$.

El concepto de conectivo principal ayudará a entender fácilmente una formula. En el caso de la proposición dada, el conectivo principal es la disyunción porque es el conectivo que afecta la formula en su totalidad.

Cuando más de dos variables o constantes aparecen en una formula, debemos usar paréntesis para indicar apropiadamente el alcance de cada conectivo. Esto, a su vez, también aclara el concepto del conectivo principal.

Por ejemplo, la proposición 3 con paréntesis y siguiendo las reglas de precedencia queda como:

$$[\,(P) \vee (Q \wedge R)\,] \equiv P \vee (Q \wedge R)$$

Clasificación de formulas lógicas

Por lo general, los hechos de nuestra realidad representados como sentencias proposicionales encajan en formas proposicional que determinan contingencias.

Es decir, tienen estructuras lógicas que cuando son sustituidas por proposiciones específicas, el valor de verdad va a depender de cada sentencia o proposición que usemos.

Por ejemplo:

La proposición, “Si la economía del país no es buena, entonces los precios aumentan y los salarios disminuyen”

puede ser formalizada como:

p: la economía del país es buena.

q: los precios aumentan.

r: los salarios disminuyen.

$\neg p \rightarrow (q \wedge r)$ cuya forma proposicional puede ser estudiada en la Tabla 1.0

Clasificación de formulas lógicas

p	q	r	¬p	→	(q ∧ r)
V	V	V	F	**V**	V
V	V	F	F	**V**	F
V	F	V	F	**V**	F
V	F	F	F	**V**	F
F	V	V	V	**V**	V
F	V	F	V	**F**	F
F	F	V	V	**F**	F
F	F	F	V	**F**	F

Tabla 1.0

La forma proposicional puede ser sustituida por proposiciones que determinan una proposición falsa, y en otros, verdadera.

Contingencia: Una forma proposicional es una contingencia cuando el valor de verdad va a depender de las proposiciones que usemos.

Clasificación de formulas lógicas

Una **tautología** o una **contradicción** es una proposición que depende sólo por su forma proposicional y no por su contenido. Este tipo de enunciados proposicionales no hace ninguna declaración acerca del mundo, no proveen información acerca del mundo, o sea, como se dijo, no necesitamos una prueba empírica para determinar su valor de verdad, es una verdad puramente analítica. Pero, este tipo de formas proposicionales son extremadamente útiles para la consistencia, consecuencia y equivalencia de enunciados y razonamientos.

Por ejemplo:

La proposición, "Cuando aumentan los precios o disminuyen los salarios, pero no disminuyen los salarios, entonces aumentan los precios."

puede ser formalizada como:

q: los precios aumentan.

r: los salarios disminuyen.

$[(q \vee r) \wedge \neg r] \rightarrow q$ cuya forma proposicional puede ser estudiada en la Tabla 1.1

Clasificación de formulas lógicas

q	r	[(q v r)	∧	¬r]	→ q
V	V	V	F	F	V
V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V

Tabla 1.1

La tabla muestra claramente que el valor de verdad de esta proposición no depende del valor de verdad de sus componentes. Siempre será verdadera sin importar el valor de sus proposiciones que la componen.

Tautología: Una forma proposicional es una Tautología cuando el valor de verdad de cualquier sustitución posible no depende de las proposiciones que usemos y resulta siempre en una proposición verdadera.

Clasificación de formulas lógicas

Una **contradicción** es falsa en cada interpretación posible de su forma proposicional.

Por ejemplo:

La proposición, "Los precios aumentan o disminuyen los salarios, sin embargo no disminuyen los salarios ni aumentan los precios."

puede ser formalizada como:

q: los precios aumentan.

r: los salarios disminuyen.

[(q v r) ∧ (¬r ∧ ¬q)] cuya forma proposicional puede ser estudiada en la Tabla 1.2

Clasificación de formulas lógicas

q	r	[(q v r)	∧	(¬r ∧ ¬q)]
		V	F	F
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	F	F	V
F	F	**Tabla 1.2**		

En la tabla que el conectivo principal produce falso para todas las combinaciones posibles de valores de verdad de sus componentes.

Contradicción: Una forma proposicional es una contradicción cuando el valor de verdad de cualquier sustitución posible no depende de las proposiciones que usemos y resulta siempre en una proposición falsa.

Relaciones entre proposiciones

Las relaciones entre formas proposicionales son necesarias tanto para el reemplazo de una fórmula por otra como para determinar la validez de un razonamiento.

Equivalencia lógica: Dados P y Q proposiciones compuestas se dice que son lógicamente equivalentes **(P ≡ Q)** siempre que para todos los valores de verdad de P, Q son ambas verdaderas o ambas falsas. A fines prácticos decimos que P es lógicamente equivalente a Q si **P ⇔ Q** es una tautología.

Usamos el símbolo ↔ para la equivalencia material.
Usamos ⇔ para la Equivalencia lógica.

Usamos ⇔ para la equivalencia lógica: p ⇔ q cuando se cumple que p ↔ q es una tautología

Relaciones entre proposiciones

Por ejemplo:

$$\neg(p \vee q) \quad \equiv \quad (\neg p \wedge \neg q)$$

p	q	$\neg(p \vee q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg p \wedge \neg q)$
		F	**V**	F
V	V	F	**V**	F
V	F	F	**V**	F
F	V	V	**V**	V
F	F			

Cuando el bicondicional (o equivalencia material) entre dos proposiciones es una tautología, puedo expresar esto diciendo que hay una equivalencia lógica entre ambas proposiciones de la siguiente manera: $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ o $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$

Cuando queremos expresar que no hay una equivalencia lógica entre dos proposiciones, lo hacemos tachando el símbolo de equivalencia lógica.
Por ejemplo: $\neg(p \vee q) \not\Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$ o $\neg(p \vee q) \not\equiv \neg(p \wedge q)$

Relaciones entre proposiciones

Implicancia lógica: Una forma proposicional A implica lógicamente otra forma proposicional B (A ⇒ B), si y solo si la proposición compuesta (A □ B) es una tautología.

Usamos el símbolo → para la <u>condición material</u>
Usamos ⇒ para la <u>Implicancia lógica.</u>

Usamos ⇒ para la Implicancia lógica: p ⇒ q cuando se cumple que p → q es una tautología

Relaciones entre proposiciones

Por ejemplo: Una implicación lógica conocida dice que dada una conjunción **$(p \wedge q)$** verdadera, podemos derivar que la proposición **p** es verdadera. Esto es obvio si conocemos la semántica del operador $\wedge$ visto en la clase anterior.

p	q	$(p \wedge q)$	$\rightarrow$	p
V	V	V	**V**	V
V	F	F	**V**	V
F	V	F	**V**	F
F	F	F	**V**	F

Cuando el condicional (o implicancia material) entre dos proposiciones es una tautología, podemos expresar esto diciendo que la primera proposición implica lógicamente a la segunda proposición.En este caso, de la siguiente manera: **$(p \wedge q) \Rightarrow p$.**

Cuando queremos expresar que no hay una implicancia lógica entre dos proposiciones, lo hacemos tachando el símbolo de implicancia lógica. Por ejemplo: **$(p \wedge q) \not\Rightarrow \neg p$**

Condicional, reciproca y contrarecíproca

Retomemos un concepto visto anteriormente.

Condicional: Son proposiciones de la forma **Si p entonces q** , que denotamos: **p□q**

- **Si** los tres lados son congruentes, **entonces** el triángulo es equilátero.

  p: los tres lados son congruentes.
  q: el triángulo es equilátero.

  p□q

- **Si** el triángulo es equilátero, **entonces** los tres lados son congruentes.

  Recíproca

  q□p

- **Si** el triángulo no es equilátero, **entonces** los tres lados no son congruentes.

  Contrarrecíproca

  ¬q □ ¬p

Demostrar que: $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

"Eliminación" de los conectivos: condicional y bicondicional

El tratamiento simbólico de condicionales y bicondicionales suele ser complicado de manejar, es por esto que se busca eliminar estos conectivos de la expresión.

Para eliminar el condición material de una proposición compuesta, se utiliza la siguiente equivalencia lógica: $\mathbf{P \rightarrow Q \equiv \neg P \lor Q}$

Por otro lado, existen dos modos de expresar la bicondicional

$$\mathbf{P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow P)}$$

$$\mathbf{P \leftrightarrow Q \equiv (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)}$$

Leyes lógicas

Las leyes son equivalencias importantes que nos permiten simplificar una expresión o manipular expresiones lógicas. Todas ellas pueden ser demostradas mediante el método de la tabla de verdad.

Ley	Forma
Idempotencia	$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$
Ley de medio excluido Ley de contradicción	$p \vee \neg p \equiv V$ $p \wedge \neg p \equiv F$
Conmutativa	$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$
Asociativa	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
Absorción	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
Distributiva	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Involución	$\neg\neg p \equiv p$
De Morgan	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
Identidad (o elemento neutro)	$p \vee F \equiv p$ $p \wedge V \equiv p$
Dominación	$p \vee V \equiv V$ $p \wedge F \equiv F$
Complementación	$\neg F \equiv V$ $\neg V \equiv F$

Ejercicio 1

Comprobar la siguiente equivalencia: $p \wedge (p \vee q) \overset{?}{\equiv} p$

Mediante la tabla de verdad:

p	q	$p \quad \wedge \quad (p \vee q)$	$[p \wedge (p \vee q)] \quad \leftrightarrow \quad p$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

Rsta: la expresión $p \wedge (p \vee q)$ es lógicamente equivalente a p

EJERCICIO 2

Comprobar la siguiente equivalencia: $p \land (p \lor q) \stackrel{?}{\equiv} p$

Usando leyes lógicas:

$p \land (p \lor q) \equiv p$

$p \land (p \lor q) \equiv (p \lor F) \land (p \lor q)$ Por Ley de identidad $\boxed{p \lor F \equiv p}$

$\equiv p \lor (F \land q)$ Por Ley distributiva $\boxed{p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)}$

$\equiv p \lor F$ Por Ley de dominación $\boxed{p \land F \equiv F}$

$\equiv p$ Por Ley de identidad $\boxed{p \lor F \equiv p}$

Rsta: la expresión $p \land (p \lor q)$ es lógicamente equivalente a p

Hasta la próxima clase

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F