LICENCIATURA EN INFORMATICA

PROGRAMADOR UNIVERSITARIO

INGENIERÍA EN INFORMÁTICA

ELEMENTOS DE COMPUTACIÓN Y LÓGICA

2023

Lic. Mariela A. Velázquez - Dr. Leonardo Albarracin

Contenido

Unidad 1. Proposiciones Simples y Compuestas. Representación simbólica. Conectivos lógicos: Negación, Conjunción, Disyunción, Condicional, Bicondicional. Tablas de verdad. Jerarquía de conectivos. Clasificación de fórmulas lógicas por su significado: Tautologías, contradicciones y contingencias. Implicación y equivalencia lógica. Leyes Lógicas

Unidad 2. Razonamientos. Componentes: premisas, conclusión. Reglas de inferencia. Métodos de demostración: directo e indirecto. Validez de un razonamiento.Consistencia de Premisas.

Unidad 3. Lógica de Predicados. Funciones proposicionales. Universo del discurso. Representación simbólica. Cuantificadores: Cuantificador universal y cuantificador existencial. Alcance de un cuantificador. Variables libres y variables vinculadas. Proposiciones categóricas. Negación de proposiciones cuantificadas. Equivalencia de proposiciones cuantificadas universalmente y existencialmente. Razonamientos. Reglas de especificación universal y existencial. Reglas de generalización universal y existencial.

Unidad 4. Álgebras Booleanas y circuitos combinatorios. Propiedades de los circuitos combinatorios. Funciones Booleanas.

Unidad 5. Sistemas de numeración binario. Conversiones. Suma y resta de binarios. Sistema de numeración octal. conversiones. Sistema de numeración hexadecimal.

Unidad 6. Diseño de Algoritmos. La programación como una metodología. Diseño de Algoritmos. Métodos de refinamientos sucesivos. Lenguaje de Diseño de programas. La programación estructurada. Estructuras algorítmicas fundamentales. Formas de reducción de complejidad: secuenciación, análisis por casos, análisis Iterativo. Generalización del concepto de procedimiento: Acciones parametrizadas, funciones.

Unidad N° 4: Álgebra Booleanas y circuitos combinatorios. Propiedades de los circuitos combinatorios. Funciones Booleanas.

Un poco de historia...

- George Boole - matemático del siglo XIX; al cual se le atribuyen varias definiciones como: álgebra booleana, funciones booleanas, expresión booleana y anillo booleano, entre otras. Se preocupó por formalizar y mecanizar el proceso del pensamiento lógico.

Boole, George (1815-1864)

- Casi un siglo después del trabajo de Boole, Shannon observó que el álgebra booleana se podía usar para analizar circuitos eléctricos. Fue así como el álgebra booleana se convirtió en una herramienta indispensable para el análisis y diseño de las computadoras en las siguientes décadas.

Ejemplo

Antes de dar una definición formal analicemos un concepto ya visto anteriormente.

Para este ejemplo consideremos la **lógica proposicional**:

Veamos como operaciones de la lógica proposicional a la conjunción, disyunción y negación, es decir dada dos proposiciones p y q, tenemos las operaciones

$$p \wedge q \;,\; p \vee q \;,\; \neg p$$

- Recordemos que:
  - ✔ $p \wedge q$ es verdadero si ambas proposiciones lo son.
  - ✔ $p \vee q$ es verdadero si p o q lo son.
  - ✔ $\neg p$ es verdadero si p es falso.

Ejemplo

Estas operaciones cumplen con las siguientes leyes:

Sean p, q , r proposiciones

- Ley Asociativa
- Ley Conmutativa
- Ley Distributiva
- Ley de Identidad
- Ley de Complementación

Ejemplo

Entonces podemos decir que, en la lógica proposicional se tiene:

- Dos posible valores: **Verdadero, Falso**
- Operaciones binarias: **∧ , v**
- Una operación unaria: **¬**
- Dos valores neutros **(V, F)** para cada una de las operaciones binarias **(∧ , v)**
- ∀ p, q, r ∈ S se cumplen las leyes de:
  - ✔ Conmutativa
  - ✔ Asociativa
  - ✔ Distributiva
  - ✔ Identidad
  - ✔ Complementación

A esto lo podemos definir como B=(S, ∨, ∧, ¬, F, V)

¿Qué es un Álgebra de Boole?

- Sistema algebraico para el estudio y aplicación de la lógica.
- Formalización apropiada para la información digital.
- Aplicaciones: formalización algebraica, análisis, síntesis y comparación de circuitos, minimización de compuertas, etc.

Formalización del Álgebra de Boole

Un álgebra booleana B consiste en:

- Un conjunto **S** que contiene al menos dos elementos distintos.
- Dos operaciones binarias en S
  - ✔ **+** (suma lógica) $x, y \to x + y$
  - ✔ • (producto lógico) $x, y \to x \cdot y$
- Una operación unaria en S
  - ✔ ‘ (Negación lógica) $x \to x'$ $(x \to \bar{x})$
- Existen dos elementos únicos
  - ✔ 0 (elemento neutro para +)
  - ✔ 1 (elemento neutro para •)

Formalización del Álgebra de Boole

… además, se cumple las siguientes leyes:

- Ley asociativa
  - ✓ $\forall$ x, y, z $\in$ S $\quad (x + y) + z = x + (y + z) \quad | \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- Ley conmutativa
  - ✓ $\forall$ x, y $\in$ S $\quad x + y = y + x \quad | \quad x \cdot y = y \cdot x$
- Ley distributiva
  - ✓ $\forall$ x, y, z $\in$ S $\quad x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \quad | \quad x \cdot (y + z) = xy + xz$
- Ley de identidad
  - ✓ $\forall$ x $\in$ S $\quad x + 0 = x \quad | \quad x \cdot 1 = x$
- Ley de complementación
  - ✓ $\forall$ x $\in$ S $\quad x + x' = 1 \quad | \quad x \cdot x' = 0$

Luego, se dice que **B = (S, +, •, 0, 1, ‘)** es un **álgebra de boole**.

Formalización del Álgebra de Boole

Sea **B = (S, +, •, 0, 1, ‘)** es un álgebra de booleana. Las siguientes propiedades también se cumplen

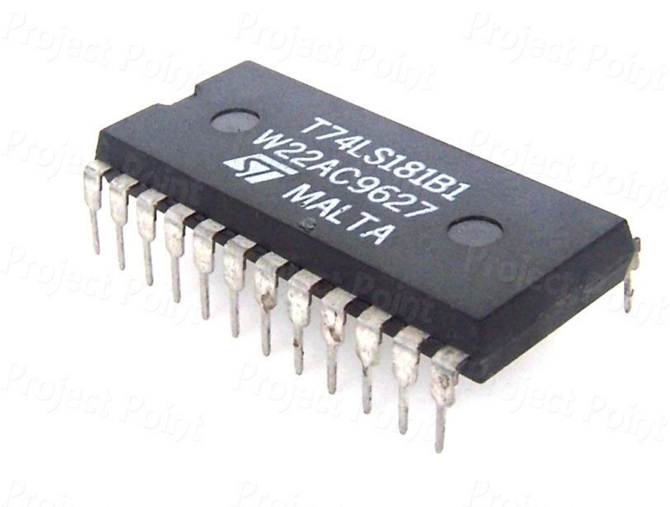
- Ley de idempotencia
  - ✓ $\forall x \in S$ $\quad x + x = x \quad | \quad x \bullet x = x$
- Ley de acotación
  - ✓ $\forall x \in S$ $\quad x + 1 = 1 \quad | \quad x \bullet 0 = 0$
- Ley absorción
  - ✓ $\forall x, y \in S$ $\quad x + (x \bullet y) = x \quad | \quad x \bullet (x + y) = x$
- Ley de De Morgan
  - ✓ $\forall x, y \in S$ $\quad (x + y)' = x' \bullet y' \quad | \quad (x \bullet y)' = x' + y'$
- Ley de involución
  - ✓ $\forall x \in S$ $\quad (x')' = x$

Simplifique la siguiente expresión booleana

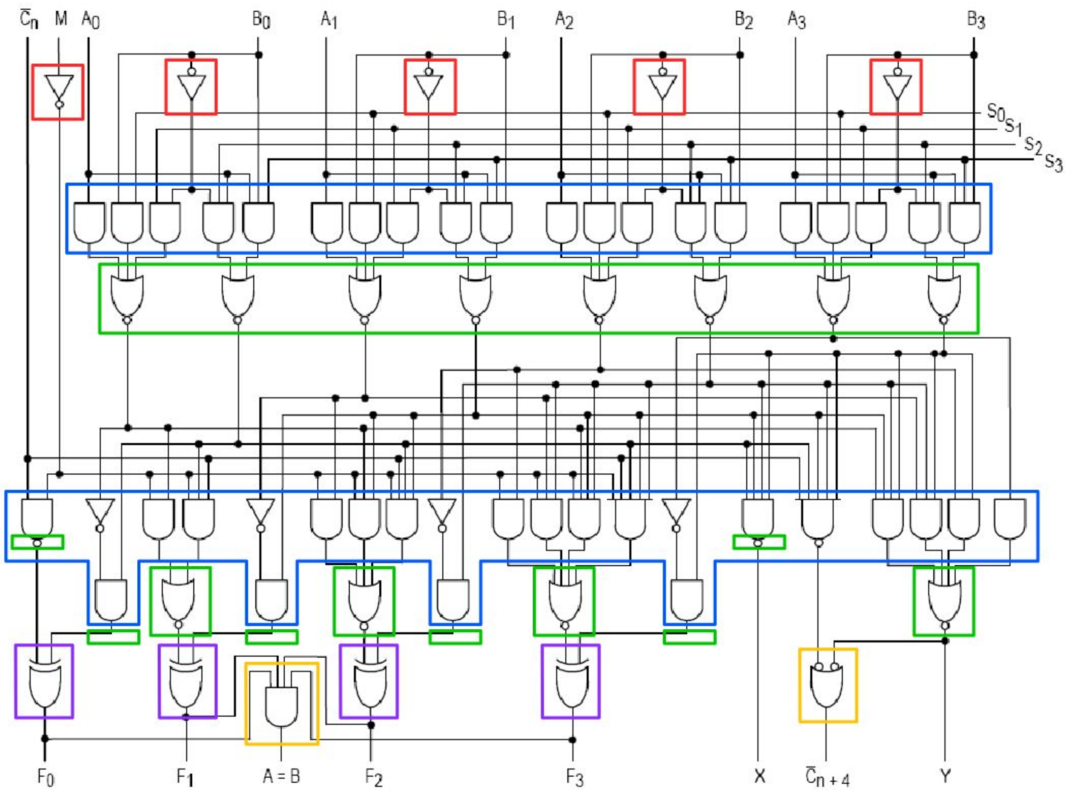
y (xz + yz) + y	
yxz + yyz + y	ley distributiva
yxz + yz + y	ley de idempotencia
yxz + (yz + y)	ley asociativa
yxz + y	ley de absorción
y (xz + 1)	ley distributiva
y (1)	ley acotación
y	ley identidad

Compuertas lógicas

Representan componentes físicos necesarios para la construcción de circuitos electrónicos.



74181
Unidad aritmético lógica (ALU)



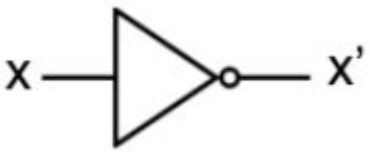
Compuertas lógicas

Compuerta NOT
(negación)

$1' = 0$

$0' = 1$

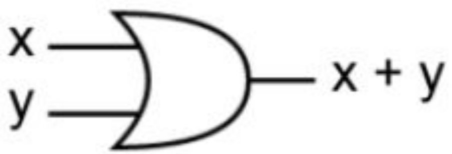
x	x'
1	0
0	1



Compuerta OR
(Suma lógica)

$1 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$
$0 + 1 = 1$
$0 + 0 = 0$

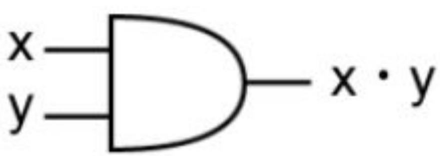
x	y	x + y
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0



Compuerta AND
(Producto lógico)

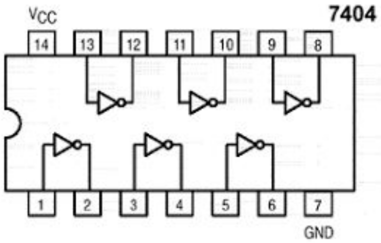
$1 \bullet 1 = 1$
$1 \bullet 0 = 0$
$0 \bullet 1 = 0$
$0 \bullet 0 = 0$

x	y	x • y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

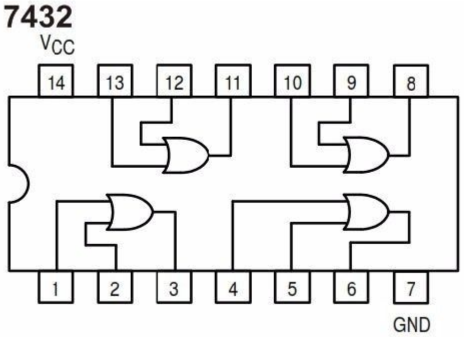


Compuertas lógicas - circuitos integrados

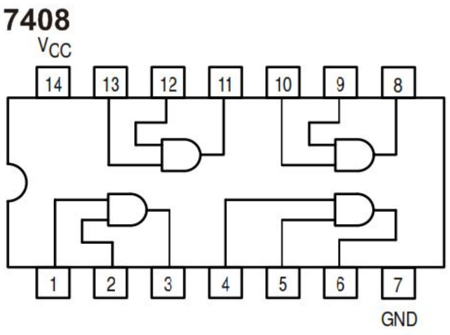
Compuerta NOT
(negación)



Compuerta OR
(Suma lógica)



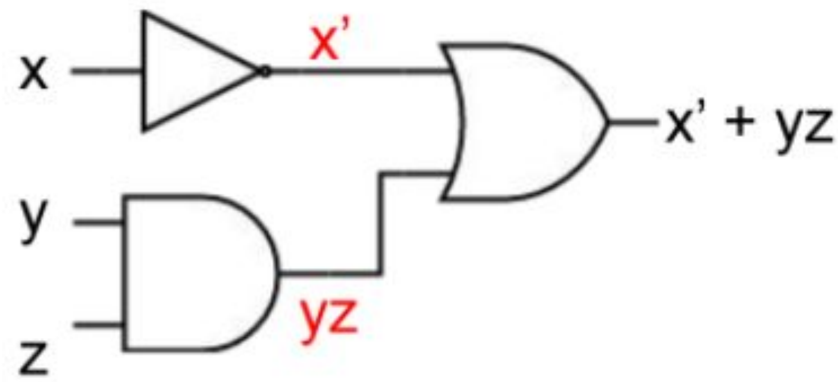
Compuerta AND
(Producto lógico)



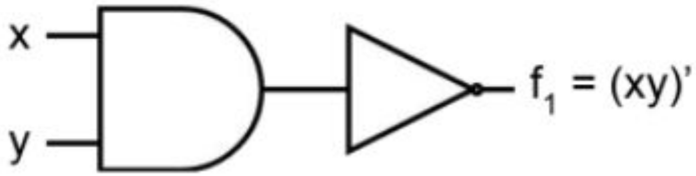
Circuitos combinatorios

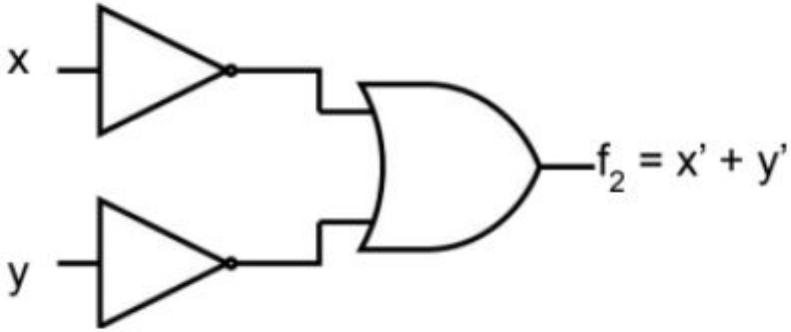
- Representan expresiones o funciones booleanas.
- La salida de una compuerta lógica puede ser la entrada de otra compuerta lógica.

Por ejemplo:



Circuitos combinatorios equivalentes

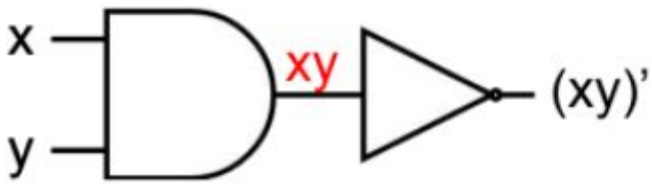


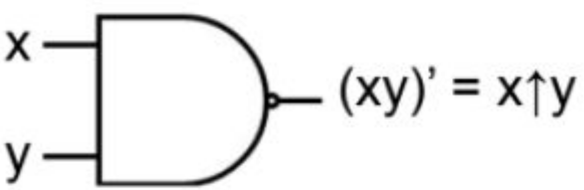


x	y	f_1	f_2
1	**1**	0	0
1	**0**	1	1
0	**1**	1	1
0	**0**	1	1

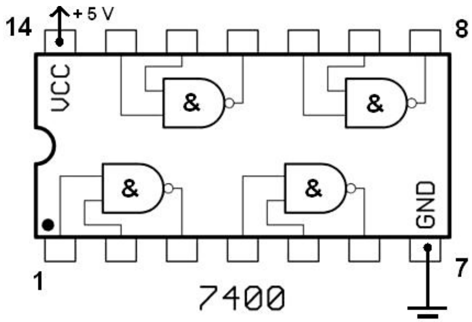
Más compuertas lógicas

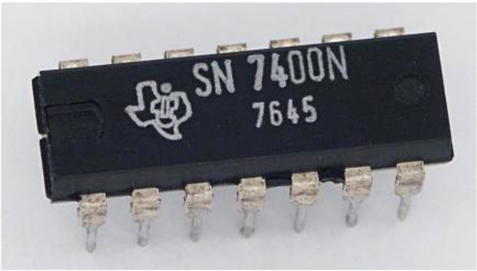
Compuerta NAND





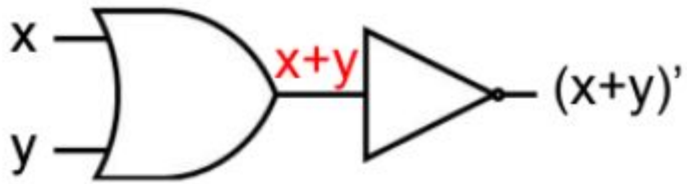
x	y	x ↑ y
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

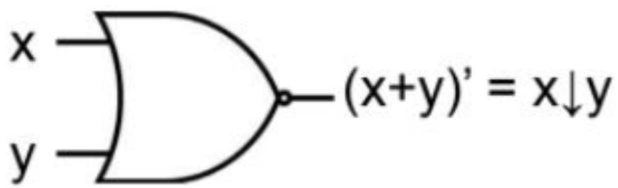




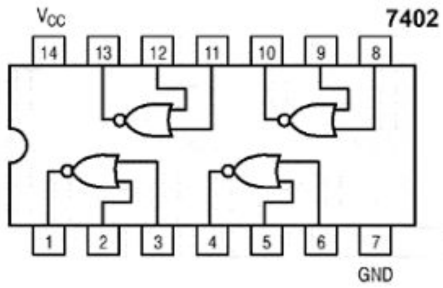
Más compuertas lógicas

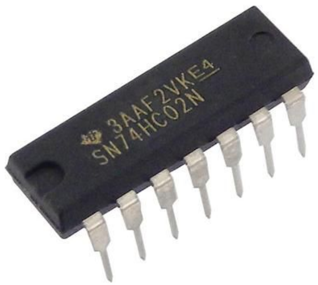
Compuerta NOR





x	y	x ↓ y
1	**1**	0
1	**0**	0
0	**1**	0
0	**0**	1





Funciones booleanas

Expresión lógica construida por una o más variables lógicas relacionadas entre sí por medio de las operaciones lógicas

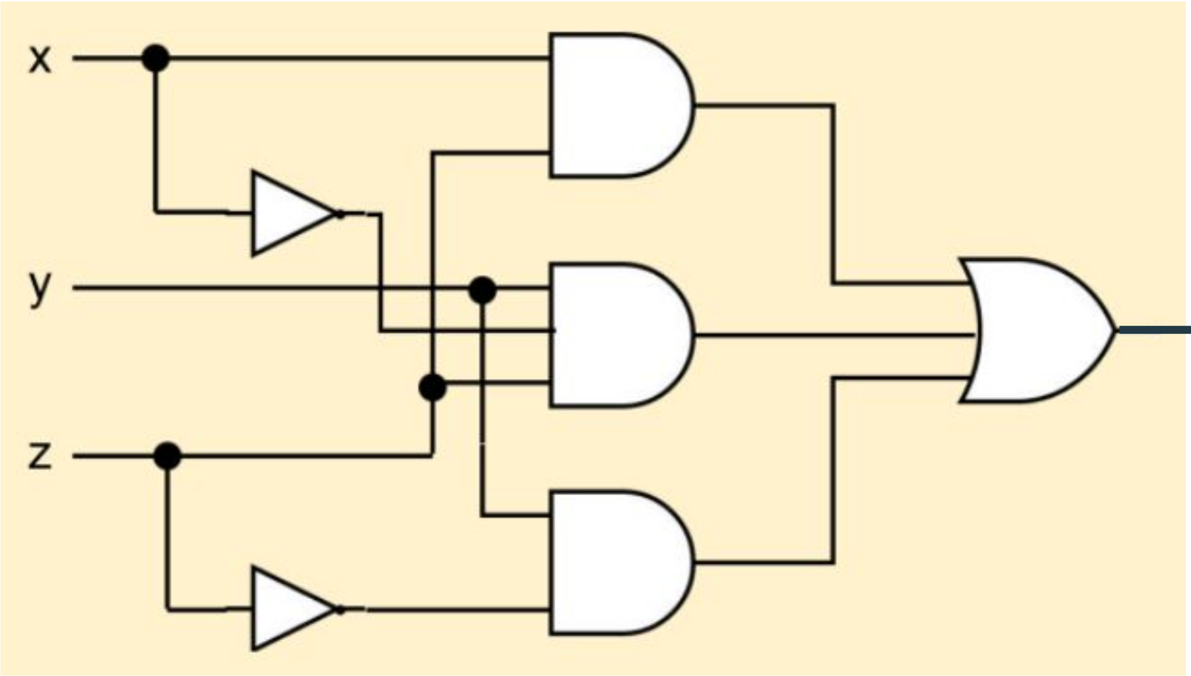
Cantidad de variables o entradas en un circuito

$$f : Z_2^n$$

Indica que es una Función binaria

Funciones booleanas

Dado el siguiente circuito combinatorio, exprese su función booleana correspondiente.

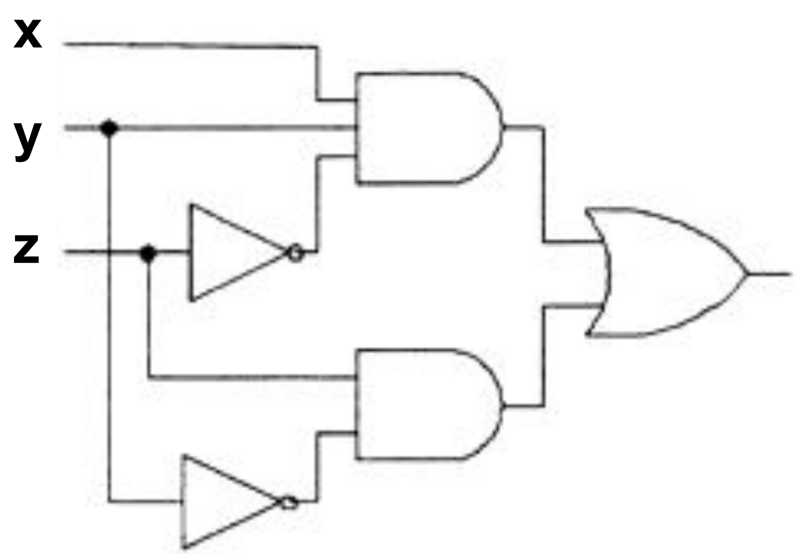


$f(x,y,z) = xz + x'yz + yz'$

Funciones booleanas

Dada la siguiente función booleana, grafique su correspondiente circuito combinatorio.

$f(x,y,z) = y'z + xyz'$



$f(x,y,z) = y'z + xyz'$

Formas estándares de expresiones booleanas

Toda función booleana puede ser convertida en cualquiera de estas formas:

- **Forma Normal Disyuntiva (FND)**
  - Suma de productos (minitérminos)
  - **$xyz + x'yz' + x'y'z'$**

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Productos de sumas (maxitérminos)
  - **$(x+y+z) \bullet (x'+y+z') \bullet (x'+y'+z')$**

Formas Normal Disyuntiva

Es una expresión en la que todas las variables involucradas aparecen en cada producto

- **Expresión en FND:**

  $\boxed{\bar{x}y\bar{z}} + \boxed{\bar{x}yz} + \boxed{x\bar{y}\bar{z}}$

- **Cada minitérmino expresa donde la función es 1**

x	y	z	f
1	1	1	**0**
1	1	0	**0**
1	0	1	**0**
1	0	0	**1**
0	1	1	**1**
0	1	0	**1**
0	0	1	**0**
0	0	0	**0**

Formas Normal Conjuntiva

Es una expresión en la que todas las variables involucradas aparecen en cada sumando

- **Expresión en FNC:**

$\boxed{(x+y+z)} \bullet \boxed{(x+y+\bar{z})} \bullet \boxed{(\bar{x}+y+\bar{z})} \bullet \boxed{(\bar{x}+\bar{y}+z)} \bullet \boxed{(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}$

- **Cada maxitérmino expresa donde la función es 0**

A tener en cuenta: **las variables son tomadas negadas**

x	y	z	f
1	1	1	**0**
1	1	0	**0**
1	0	1	**0**
1	0	0	**1**
0	1	1	**1**
0	1	0	**1**
0	0	1	**0**
0	0	0	**0**

Ejercicio

Transformar la siguiente expresión a FNC

$$(xy' + xz)' + x'$$

$$[(xy')' \bullet (xz)'] + x'$$

$$[(x' + y'') \bullet (x'+z')] + x'$$

$$[(x' + y) \bullet (x'+z')] + x'$$

$$[(x' + y) + x'] \bullet [(x'+z') + x']$$

$$(x' + x' + y) \bullet (x'+ x' + z')$$

$$(x'+ y) \bullet (x'+ z')$$

$$(x'+ y + 0) \bullet (x'+ z' +0)$$

$$(x'+ y + zz') \bullet (x'+ z' + yy')$$

$$(x'+y+z)(x'+y+z')(x'+y+z')(x'+z'+y')$$

$$\mathbf{(x'+y+z)(x'+y+z')(x'+y'+z')}$$

Ley asociativa	$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$
Ley conmutativa	$x + y = y + x$	$x \bullet y = y \bullet x$
Ley distributiva	$x + (y \bullet z) = (x + y) \bullet (x + z)$	$x \bullet (y + z) = xy + xz$
Ley de identidad	$x + 0 = x$	$x \bullet 1 = x$
Ley de complementación	$x + x' = 1$	$x \bullet x' = 0$
Ley de idempotencia	$x + x = x$	$x \bullet x = x$
Ley de acotación	$x + 1 = 1$	$x \bullet 0 = 0$
Ley absorción	$x + (x \bullet y) = x$	$x \bullet (x + y) = x$
Ley de De Morgan	$(x + y)' = x' \bullet y'$	$(x \bullet y)' = x' + y'$
Ley de involución	$(x')' = x$	

Hasta la próxima clase

p	q	p + q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0