LICENCIATURA EN INFORMATICA

PROGRAMADOR UNIVERSITARIO

INGENIERÍA EN INFORMÁTICA

ELEMENTOS DE COMPUTACIÓN Y LÓGICA

2023

Lic. Mariela A. Velázquez - Dr. Leonardo Albarracín

Universidad Nacional de Tucumán

2020 - AÑO DEL GENERAL MANUEL BELGRANO

Contenido

Unidad 1. Proposiciones Simples y Compuestas. Representación simbólica. Conectivos lógicos: Negación, Conjunción, Disyunción, Condicional, Bicondicional. Tablas de verdad. Jerarquía de conectivos. Clasificación de fórmulas lógicas por su significado: Tautologías, contradicciones y contingencias. Implicación y equivalencia lógica. Leyes Lógicas

Unidad 2. Razonamientos. Componentes: premisas, conclusión. Reglas de inferencia. Métodos de demostración: directo e indirecto. Validez de un razonamiento.Consistencia de Premisas.

Unidad 3. Lógica de Predicados. Funciones proposicionales. Universo del discurso. Representación simbólica. Cuantificadores: Cuantificador universal y cuantificador existencial. Alcance de un cuantificador. Variables libres y variables vinculadas. Proposiciones categóricas. Negación de proposiciones cuantificadas. Equivalencia de proposiciones cuantificadas universalmente y existencialmente. Razonamientos. Reglas de especificación universal y existencial. Reglas de generalización universal y existencial.

Unidad 4. Álgebras Booleanas y circuitos combinatorios. Propiedades de los circuitos combinatorios. Funciones Booleanas.

Unidad 5. Sistemas de numeración binario. Conversiones. Suma y resta de binarios. Sistema de numeración octal. conversiones. Sistema de numeración hexadecimal.

Unidad 6. Diseño de Algoritmos. La programación como una metodología. Diseño de Algoritmos. Métodos de refinamientos sucesivos. Lenguaje de Diseño de programas. La programación estructurada. Estructuras algorítmicas fundamentales. Formas de reducción de complejidad: secuenciación, análisis por casos, análisis Iterativo. Generalización del concepto de procedimiento: Acciones parametrizadas, funciones.

Unidad N° 3 - Parte 1: Lógica de Predicados. Funciones proposicionales. Universo del discurso. Representación simbólica. Cuantificadores: cuantificador universal y cuantificador existencial. Alcance de un cuantificador. Variables libres y vinculadas. Negación de proposiciones cuantificadas.

Repasemos lo visto

<table>
<tr><td rowspan="3">Métodos de Demostración</td><td>Método Directo</td><td>El principio de demostración directa es en la cual, a través de las premisas, obtenemos la conclusión de un modo directo. Las reglas de inferencias y equivalencias vistas son las herramientas necesarias para comprobar la validez del razonamiento.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Método Indirecto</td><td>Reducción al absurdo consiste en:
1. Negar la conclusión utilizando las leyes de la lógica.
2. El conjunto de hipótesis ahora es de la forma $P1 \land P2 \land \ldots \land Pn \land \neg Q$, es decir que $\neg Q$ se añade como una hipótesis.
3. Del conjunto de hipótesis enunciadas en 2) obtener una contradicción evidente</td></tr>
<tr><td>Contrarrecíproca
Otra forma de demostrar $p \rightarrow q$ es demostrar: $\neg q \rightarrow \neg p$, ambas proposiciones compuestas son equivalentes.</td></tr>
</table>

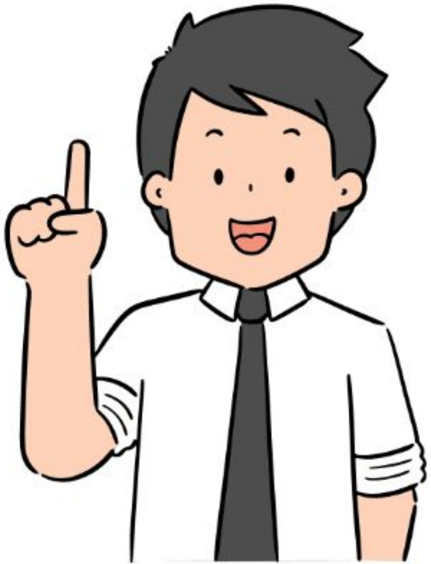
Repasemos lo visto

Premisas Inconsistentes: Un conjunto de premisas se dice inconsistente si su conjunción implica una contradicción.

Para probar la inconsistencia de un argumento basta con deducir una contradicción a partir de las premisas. En la prueba de consistencia de las premisas no se toma en cuenta a la conclusión.

Dado un razonamiento, se comprueba la consistencia o inconsistencia de las premisas.

- Si es inconsistente, entonces por esa misma razón será también inválido.
- Si es consistente, podrá ser válido o inválido.



Lógica de predicados

La lógica de predicados es una **generalización de la lógica proposicional**.

Existen situaciones en las cuales el cálculo proposicional **no es suficiente para representar** todas las afirmaciones que se puedan expresar.

Por ejemplo, si se tiene una expresión como “x es menor que 2”, no se puede afirmar si es verdadera o falsa. Pero en el momento en el cual se asocia a un valor en concreto a la variable x, ya se podrá dar un valor de verdad a la expresión y la misma ya será una proposición.

Lógica de predicados

Consideremos las siguientes proposiciones:

p: El perro es un animal.

q: El gato es un animal.

r: La vaca es un animal.

Las tres proposiciones tienen en común un **predicado** lingüístico "es un animal" y tiene diferente sujeto. La frase "es un animal" está dando una propiedad del sujeto.

Si escribimos: x es un animal.

Obtenemos una oración que **no es una proposición** dado que su valor de verdad dependerá del valor que tome x.

Si **x= "El perro"** obtenemos la proposición: **El perro es un animal**

Nota

Predicado: Afirman o declaran algo acerca de los individuos, elementos u objetos.

Funciones proposicionales

P(x): x es un animal

Siendo P una función Proposicional.

A las funciones proposicionales las denotamos con una letra mayúscula seguida de la/s variable/s entre paréntesis.

Por ejemplo:

Q(x): x es menor que 2; Q(x): $x < 2$

siendo Q una función proposicional.

T(x, y): $x = y+3$

siendo T una función proposicional.

Cuantificadores

Los cuantificadores nos permiten construir proposiciones a partir de funciones proposicionales ya sea particularizando o generalizando. Dada la función proposicional

P(x) : x es menor que 2

Podemos particularizar diciendo: **Existe** un número que es menor que 2.

En esta expresión estamos frente a un **Cuantificador existencial**, el símbolo que utilizaremos para este cuantificador será: $\exists$

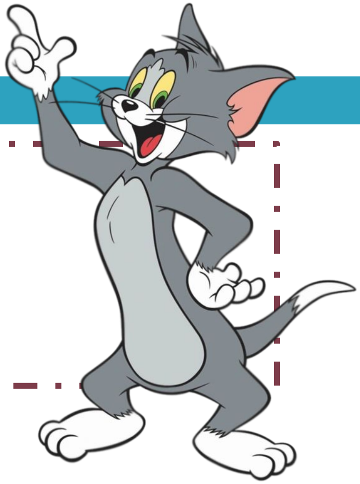
Entonces nuestra expresión la simbolizamos de la siguiente manera: $\exists$ **x: P(x)**

Podemos generalizar diciendo: **Todos** los números son menores que 2.

En esta expresión estamos frente a un **Cuantificador Universal**, el símbolo que utilizaremos para este cuantificador será: $\forall$

Entonces nuestra expresión la simbolizamos de la siguiente manera: $\forall$ **x: P(x)**

LÓGICA DE PREDICADOS



Analicemos el siguiente ejemplo 1:

Todos los gatos tienen cola. Tom es un gato.

Por lo tanto Tom tiene cola

Tom es un gato. → **X es un gato**

Tom tiene cola. → **X tiene cola**

X= Tom

Cola(x): x tiene cola

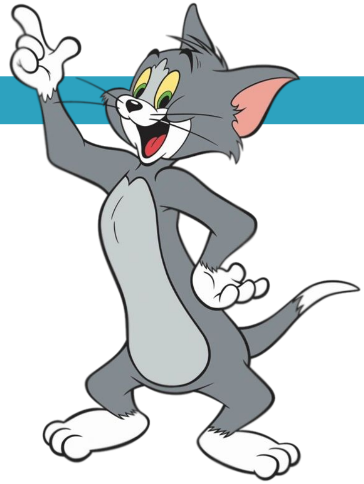
gato(x): x es un gato

Funciones Proposicionales

Todos los gatos tienen cola.

Cuantificador Universal: Todos.

Ejemplo 1:



Todos los gatos tienen cola. Tom es un gato.

Por lo tanto Tom tiene cola

- Para una Lógica de predicado de primer orden se necesita identificar:

Sujeto:

- **Constante**: individuos determinados (Tom)
- **Variable**: individuos indeterminados o genéricos (x)
- Necesidad de **cuantificadores**
- Necesidad de un contexto, dominio o **Universo** (animales)

U = { Animales }

gato(x): x es un gato

cola(x): x tiene cola

$$\frac{\begin{array}{r}\forall\, x\, [\, gato(x) \rightarrow cola(x)\,] \\ gato(Tom)\end{array}}{\therefore\ cola(Tom)}$$

Predicado:

- Propiedades o relaciones (tiene cola, es un gato)

Universo

- Universo del discurso o Dominio:
  U={ Todos los elementos que se vana a tener en cuenta }

- El valor de verdad del cálculo de predicado depende del universo en consideración.

- Contiene individuos (elementos u objetos):
  U={ e1, e2, …, en}

- Los individuos se representan con constantes individuales: Tom, Félix, 2, Juan, etc. Identifican unívocamente a cada individuo.

- Está formado por al menos un individuo.

Predicado

- Afirman o declaran algo acerca de los individuos, elementos u objetos del Universo en consideración.

- Pueden tener uno o más argumentos:

  P(x): x es par.
  Q(x,y): x > y

- Ejemplo:
  U={1,2,3} P(x): x es par P(2) ≡ Verdadero

Cuantificadores

Indican la **frecuencia** en que se aplica un predicado (propiedad o relación) para los elementos del Universo.

- **Cuantificador Universal (∀):**
  indica que un predicado es cierto para todos los elementos del U.

  $U=\{1,2,3\}$ $P(x)$: x es par.

  $\forall x\, P(x) \equiv P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \equiv F \wedge V \wedge F \equiv F$

- **Cuantificador Existencial (∃):**
  indica que un predicado es cierto para algunos elementos del U.
  $U=\{1,2,3\}$ $P(x)$: x es par.

  $\exists x\, P(x) \equiv P(1) \vee P(2) \vee P(3) \equiv F \vee V \vee F \equiv V$

EJEMPLO 2

Formalice la siguiente declaración del lenguaje coloquial a lógica de predicados

Para todo número positivo x, existe un número y tal que x es igual al cuadrado de y

$P(x): x > 0$

$C(x,y): x = y^2$

$$\forall x \; \exists y: [\, P(x) \rightarrow C(x,y) \,]$$

¿Cuál es el Universo?

U: {Enteros} **FALSO**. No existe un número entero y tal que x = 2 sea igual a $x = y^2$.

U: {Reales} Para cualquier número real positivo x, existe un número real y tal que x es igual a y^2 (es decir, $y = \sqrt{x}$)

VERDADERO

EJEMPLO 3

Escriba en lenguaje lógico la siguiente aseveración:

Todos aman a alguien

A(x, y): x ama a y

U = { Alumnos de ECyL }

“Todos” requiere un cuantificador universal y “alguien” requiere un cuantificador existencial.

$$\forall x \ \exists y : A(x,y)$$

En palabras: para cada persona x, existe una persona y, tal que x ama a y.

Observe que, si cambiamos el orden de los cuantificadores:

$$\exists x \ \forall y : A(x,y)$$

La expresión anterior no es una interpretación correcta de la afirmación original. Esta última afirmación es: Existe una persona x tal que para toda y, x ama a y.

Negación del cuantificador universal

$U=\{ 1, 2, 3 \}$ $P(x)$: x es par.

- **Cuantificador Universal (∀):**

$$\forall x\, P(x) \equiv P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \equiv F \wedge V \wedge F \equiv F$$

$$\neg [\forall x\, P(x)] \equiv \neg [P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)] \equiv \neg (F \wedge V \wedge F) \equiv \neg F$$

$$\exists x\, P(x) \equiv \neg P(1) \vee \neg P(2) \vee \neg P(3) \equiv V \vee F \vee V \equiv V$$

Ejercicio: Negar la siguiente expresión **$\forall x : (P(x) \rightarrow Q(x))$**

$\neg (\forall x:(P(x)\rightarrow Q(x))) \equiv \neg (\forall x) : \neg (P(x) \rightarrow Q(x))$

$\equiv \exists x : \neg (\neg P(x) \vee Q(x))$ por equivalencia lógica

$\equiv \exists x : (P(x) \wedge \neg Q(x))$ por Ley de De morgan y Ley de Involución

Negación del cuantificador Existencial

U={ 1, 2, 3 }   P(x): x es par.

- **Cuantificador Existencial (∃):**

$\exists\ x\ P(x) \quad \equiv\ P(1) \vee P(2) \vee P(3)\ \equiv F \vee V \vee F\ \equiv V$

$\neg [\ \exists\ x\ P(x)\ ] \quad \equiv \neg [\ P(1) \vee P(2) \vee P(3)]\ \equiv \neg (\ F \vee V \vee F) \equiv \neg V$

$\forall\ x \neg P(x) \quad \equiv \neg P(1)\ \wedge \neg P(2)\ \wedge \neg P(3) \quad \equiv V \wedge F \wedge V \equiv F$

Ejercicio: Negar la siguiente expresión **$\exists\ x : (P(x) \rightarrow Q(x))$**

$\neg (\exists\ x:(P(x) \rightarrow Q(x))) \equiv \neg (\exists\ x) : \neg (P(x) \rightarrow Q(x))$

$\equiv \forall x : \neg (\neg P(x)\ \vee Q(x))$ por equivalencia lógica

$\equiv \forall x : (\ P(x) \wedge \neg Q(x)\ )$ por Ley de De morgan y Ley de Involución

Tipos de declaraciones

- **Singulares**

  Declara algo sobre constantes individuales del Universo.

  Sócrates es mortal   Mortal(Sócrates)

- **Universales**

  Declara algo sobre cada miembro de una clase.

  Ningún profesor es millonario $\forall$ x Profesor(x) $\rightarrow$ $\neg$Millonario(x)

- **Particulares**

  Declara algo sobre algunos miembros de una clase.

  Algunos jugadores son veloces $\exists$ x Jugador(x) $\wedge$ Veloz(x)

Variables libres y vinculadas

Cuando un cuantificador se usa sobre una variable x o cuando se ha asignado un valor a esa variable para obtener una proposición, se dice que la ocurrencia de esa variable es vinculada; si no es así se dice variable libre.

La parte de la expresión lógica o fórmula de predicado a la cual se aplica un cuantificador recibe el nombre del alcance del cuantificador.

Expresión lógica	**Variable Ligada**	**Alcance del cuantificador**	**Variable Libre**
$\forall x\, P(x)$	x	P(x)	-
$\forall x\, P(x, y)$	x	P(x, y)	y
$\exists x\, P(x) \wedge Q(x)$	Primera x	P(x)	Segunda x

Ejemplo 4

Todos los estudiantes de informática que leen libros de informáticos reconocidos son listos

U = { personas }

E(x): x es estudiante de informática.

L(x): x es listo.

R(x): x lee libros de informáticos reconocidos.

$$\forall x \, [\, (E(x) \wedge R(x)) \rightarrow L(x) \,]$$

Nota: esta formalización es correcta, pero menos expresiva.

Ejemplo 4 - Completo

Todos los estudiantes de informática que leen libros de informáticos reconocidos son listos

U = { personas }

E(x): x es estudiante de informática.

L(x): x es listo.

H(x, y): x lee libros de y.

R(y): y es un reconocido informático.

x variable ligada

$$\forall x \quad [\ (\ E(x) \wedge H(x, y) \wedge R(y) \rightarrow L(x)\ ]\ )$$

Variable Cuantificada

Ámbito del cuantificador

y variable libre

Ejemplo 4 - Completo

Todos los estudiantes de informática que leen libros de informáticos reconocidos son listos

U = { personas }

E(x): x es estudiante de informática.

L(x): x es listo.

H(x, y): x lee libros de y.

R(y): y es un reconocido informático.

***x* variable ligada**

$$\forall x \; \exists y \; \underbrace{[\, (\, E(x) \land H(x, y) \land R(y)\,) \to L(x)\,]}_{\text{Ámbito del cuantificador}}$$

Variable Cuantificada

***y* variable ligada**

Variable Cuantificada

Hasta la próxima clase

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F