代数

数学系必备的代数语言

作者：肥猫

组织：Elegant math Program

时间：2022 → ∞

版本：0.0

ElegantLaTeX Program

Algebra is the intellectual instrument which has been created for rendering clear the quantitative aspects of the world.—-Whitehead

目录

第 1 章 记号说明 **1**

第 2 章 伽罗瓦理论 **2**

2.1 多项式 2
2.2 对称多项式 2
2.3 域和域扩张 4
2.4 代数元和域扩张 4
2.5 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 上的代数元和超越元 4
2.6 分裂域 4
2.7 可分扩张 4
2.8 代数闭包和伽罗瓦扩张 4
2.9 有限伽罗瓦扩张的刻画 4
2.10 伽罗瓦对应 4
2.11 有限域 4
2.12 分圆域和库摩尔扩张 4
2.13 迹和范数 4
2.14 根式解方程 4

参考文献 **5**

第 1 章 记号说明

1. 笔记中我们总是假设环为含幺元交换环, 除非特别说明

第 2 章 伽罗瓦理论

2.1 多项式

见 基础代数 1

2.2 对称多项式

记 S_n 为 n 元对称群.

定义 2.1 (对称多项式)

给定一个含幺交换环 R, 未定元 $x_1, \cdots x_n$, 设 $f \in R[x_1, \cdots, x_n]$, 如果

$$\forall s \in S_n, f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_{s(1)}, x_{s(2)}, \cdots, x_{s(n)}) \tag{2.1}$$

则称 f 是环 $R[x_1, \cdots, x_n]$ 的对称多项式, 显然对称多项式关于环加法和乘法封闭, 且 $\forall c \in R$ 都可以看做 $R[x_1, \cdots, x_n]$ 上的多项式, 显然 c 是对称多项式.

♣

例题 2.1 幂和 $p_r := \sum X_i^r, r \geq 0$ 为对称多项式.

注[另一种视角] 对称多项式环的元素是置换群作用在多项式环不动元构成的集合.

考虑乘积

$$\Pi_{i=1}^n (T + x^i) = (T + x_1) \cdots (T + x_n) \tag{2.2}$$

$$= T^n + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)T^{n-1} + \cdots + x_1 \cdots x_n \tag{2.3}$$

记 $s_r := s_{n,r}$ 为上述乘积 T^{n-r} 的系数, 那么

$$s_r = \sum_{1 \leq i_1 \cdots \leq i_r} x_{i_1} \cdots x_{i_n} \tag{2.4}$$

按照惯例, $s_{0,n} = 1; s_{r,n} = 0, r > n$. 称这些多项式是关于 $R[x_1, \cdots, x_n]$ 的初等对称多项式.

问题 2.1 验证这些多项式是对称多项式.

定理 2.1 (牛顿对称多项式定理)

1. $R[x_1, \cdots, x_n]$ 上的对称多项式都属于 $R[s_1, \cdots, s_r]$
2. 初等对称多项式没有非平凡关系. 也就是说, 假如有环同态

$$\delta : R[y_1, \cdots, y_n] \to R[x_1, \cdots, x_n] G(y_1, y_2, \cdots y_n) \mapsto G(s_1, s_2, \cdots, s_n) \tag{2.5}$$

, 那么该环同态的核为 0

♡

证明 首先 $I = (i_1, \cdots, i_n), i_k \geq 0, 1 \leq k \leq n$, 记 $X^I = x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$. 称这样的多项式为 (首一) 单项式. $R[x_1, \cdots, x_n]$ 是单项式的线性组合. 称 X^I 的次数为 $\sum i_k$, 称 $R[x_1, \cdots, x_n]$是齐次多项式, 如果其为同次数的单项式的线性组合. 如果 $f \in R[x_1, \cdots, x_n]$, 那么有以下的分解且分解方式为一 $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d$ 和的每项都为 k 次齐次多项式或者 0. 如果 f 为对称多项式那么 f_k 为齐次多项式. 因此我们总可以假设 f 是齐次对称多项式.(留给读者验证初等对称多项式2.4的多项式)

给定 X^I, X^J, 我们熟知由字典排序法可以给出一个全序结构.

对于一个齐次对称多项式, 我们总可以找到字典排序法下的最大项作为首项, 按降序排列. 并且总可以将首项分解成为若干个初等对称多项式乘积的首项. 亦即: $f_{top} = c(c_1 \cdots c_i)_{top} = g_{top}$, 这些 c_i 可以重复, 那么 $h = f - cg$ 比 f 少了至少一项. 因为 f 项数有限 (多项式定义), 因此 f 确实可以表示成为初等对称多项式的多项式.

第二部分的证明可以通过归纳法证明假设 ker δ 非平凡出现的最小维数为 n, 那么总可以假设 y_n 不整除 G,

于是我们代入 $x_n=0$ 得 $G(s_{1,n},s_{2,n},\cdots,s_{n-1,n},0)=0$(这里需要初等对称多项式的定义和环上的多项式的定义) 此时 $s_{i,n}=s_{i,n-1}$

定理 2.2 (牛顿公式)

这个公式是关于幂和2.1和初等对称多项式2.4的关系的.

$$\forall k\geq, p_k-s_1p_{k-1}+\cdots+(-1)^{k-1}s_{k-1}p_1+(-1)^kp_0s_k=. \tag{2.6}$$

♡

证明 考虑 $F(T)=\Pi_{i=1}^n(1-x_iT^i)=\sum_{i=0}^n(-1)^ic_iT^i$ 2.4 以下是由代数恒等式求导得初等对称多项式的有关恒等式

$$\begin{aligned}\frac{F'(T)}{F_T}&=\sum_{i=1}^n-\frac{x_i}{1-x_iT} &(2.7)\\&=-\frac{1}{T}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^\infty(x_iT)^j &(2.8)\\&=-\frac{1}{T}\sum_{j=1}^\infty p_jT^j &(2.9)\end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}-TF'T&=s_1T+\cdots+(-1)^{n-1}ns_nT^n &(2.10)\\&=F(T)\sum_{r=1}^\infty p_rT^r &(2.11)\end{aligned}$$

比较系数得到结论 (这里留给读者)

定义 2.2

称 n 元多项式 $\Delta(x_1,\cdots,x_n)^2=(-1)^{n(n-1)/2}\Pi_{i\neq j}(x_i-x_j)$ 为变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的判别式. 留给读者证明判别式是齐次对称多项式.

♣

令 $f(T)=\Pi_{i=1}^n(T-\alpha_i)$

$$\begin{aligned}Disc(f)&:=\Delta^2(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) &(2.12)\\&=\Pi_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2 &(2.13)\end{aligned}$$

显然 f 有重根当且仅当判别式为 0

注 当 f 是二次函数时 $f=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2):=x^2+bx+c$, 那么这时的 f 的判别式是 $(\alpha_1-\alpha_2)^2=b^2-4c$, 因此我们的定义是初中熟知的二次方程的判别法的推广.

2.3 域和域扩张

2.4 代数元和域扩张

2.5 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 上的代数元和超越元

2.6 分裂域

2.7 可分扩张

2.8 代数闭包和伽罗瓦扩张

2.9 有限伽罗瓦扩张的刻画

2.10 伽罗瓦对应

2.11 有限域

2.12 分圆域和库摩尔扩张

2.13 迹和范数

2.14 根式解方程

我们基于 [2] 学习

$$asdasd \tag{2.14}$$

[1] dasad2.14

参考文献

[1] Paolo Aluffi. *Algebra: Chapter 0*. 2009.

[2] Serge Lang. *Algebra*. 1993. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0041-0.