A **análise combinatória** ou **combinatória** é a parte da Matemática que estuda métodos e técnicas que permitem resolver problemas relacionados com contagem.
Muito utilizada nos estudos sobre probabilidade, ela faz análise das possibilidades e das combinações possíveis entre um conjunto de elementos.

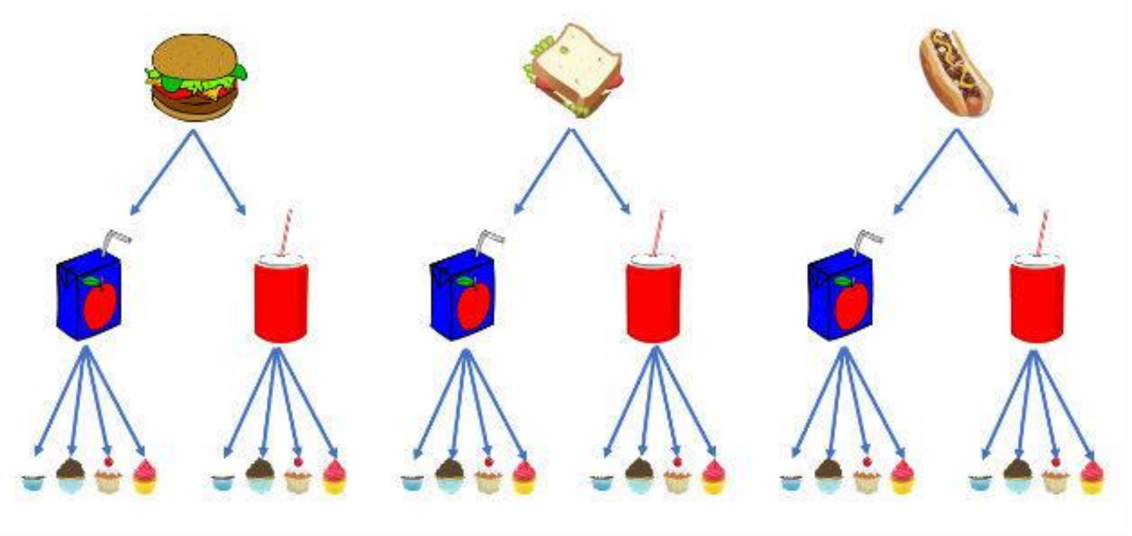
Princípio Fundamental da Contagem

O **princípio fundamental da contagem,** também chamado de princípio multiplicativo, postula que:
"*quando um evento é composto por n etapas sucessivas e independentes, de tal modo que as possibilidades da primeira etapa é x e as possibilidades da segunda etapa é y, resulta no número total de possibilidades de o evento ocorrer, dado pelo produto (x) . (y)*".

Em resumo, no princípio fundamental da contagem, multiplica-se o número de opções entre as escolhas que lhe são apresentadas.

Exemplo
Uma lanchonete vende uma promoção de lanche a um preço único. No lanche, estão incluídos um sanduíche, uma bebida e uma sobremesa. São oferecidos três opções de sanduíches: hambúrguer especial, sanduíche vegetariano e cachorro-quente completo. Como opção de bebida pode-se escolher 2 tipos: suco de maçã ou guaraná. Para a sobremesa, existem quatro opções: cupcake de cereja, cupcake de chocolate, cupcake de morango e cupcake de baunilha. Considerando todas as opções oferecidas, de quantas maneiras um cliente pode escolher o seu lanche?

Solução
Podemos começar a resolução do problema apresentado, construindo uma árvore de possibilidades, conforme ilustrado abaixo:



Acompanhando o diagrama, podemos diretamente contar quantos tipos diferentes de lanches podemos escolher. Assim, identificamos que existem 24 combinações possíveis.

Podemos ainda resolver o problema usando o princípio multiplicativo. Para saber quais as diferentes possibilidades de lanches, basta multiplicar o número de opções de sanduíches, bebidas e sobremesa.

Total de possibilidades: 3.2.4 = 24

Portanto, temos **24 tipos diferentes de lanches** para escolher na promoção.

Tipos de Combinatória

O princípio fundamental da contagem pode ser usado em grande parte dos problemas relacionados com contagem. Entretanto, em algumas situações seu uso torna a resolução muito trabalhosa.

Desta maneira, usamos algumas técnicas para resolver problemas com determinadas características. Basicamente há três tipos de agrupamentos: arranjos, combinações e permutações.

Antes de conhecermos melhor esses procedimentos de cálculo, precisamos definir uma ferramenta muito utilizada em problemas de contagem, que é o fatorial.

O fatorial de um número natural é definido como o produto deste número por todos os seus antecessores. Utilizamos o símbolo **!** para indicar o fatorial de um número.
Define-se ainda que o fatorial de zero é igual a 1.

Exemplo
O! = 1
1! = 1
3! = 3.2.1 = 6
7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5 040
10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 3 628 800
Note que o valor do fatorial cresce rapidamente, conforme cresce o número. Então, frequentemente usamos simplificações para efetuar os cálculos de análise combinatória.

Arranjos

Nos **arranjos**, os agrupamentos dos elementos dependem da ordem e da natureza dos mesmos.
Para obter o arranjo simples de *n* elementos tomados, p a p (p ≤ n), utiliza-se a seguinte expressão:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo

Como exemplo de arranjo, podemos pensar na votação para escolher um representante e um vice-representante de uma turma, com 20 alunos. Sendo que o mais votado será o representante e o segundo mais votado o vice-representante.

Dessa forma, de quantas maneiras distintas a escolha poderá ser feita? Observe que nesse caso, a ordem é importante, visto que altera o resultado final.

$$A_{20,2} = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20.19.\cancel{18!}}{\cancel{18!}} = 380$$

Logo, o arranjo pode ser feito de **380** maneiras diferentes.

Permutações

As **permutações** são agrupamentos ordenados, onde o número de elementos (n) do agrupamento é igual ao número de elementos disponíveis.
Note que a permutação é um caso especial de arranjo, quando o número de elementos é igual ao número de agrupamentos. Desta maneira, o denominador na fórmula do arranjo é igual a 1 na permutação.

Assim a permutação é expressa pela fórmula:

$$P_n = n!$$

Exemplo
Para exemplificar, vamos pensar de quantas maneiras diferentes 6 pessoas podem se sentar em um banco com 6 lugares.

Como a ordem em que irão se sentar é importante e o número de lugares é igual ao número de pessoas, iremos usar a permutação:

$$P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$$

Logo, existem **720** maneiras diferentes para as 6 pessoas sentarem neste banco.

Combinações

As **combinações** são subconjuntos em que a ordem dos elementos não é importante, entretanto, são caracterizadas pela natureza dos mesmos.

Assim, para calcular uma combinação simples de *n* elementos tomados p a p ($p \leq n$), utiliza-se a seguinte expressão:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Exemplo
A fim de exemplificar, podemos pensar na escolha de 3 membros para formar uma comissão organizadora de um evento, dentre as 10 pessoas que se candidataram.

De quantas maneiras distintas essa comissão poderá ser formada?

Note que, ao contrário dos arranjos, nas combinações a ordem dos elementos não é relevante. Isso quer dizer que escolher Maria, João e José é equivalente à escolher João, José e Maria.

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10.9.8.\cancel{7!}}{3!\,\cancel{7!}} = \frac{10.9.8}{3.2.1} = 120$$

Observe que para simplificar os cálculos, transformamos o fatorial de 10 em produto, mas conservamos o fatorial de 7, pois, desta forma, foi possível simplificar com o fatorial de 7 do denominador.

Assim, existem **120** maneiras distintas formar a comissão.

Probabilidade e Análise Combinatória

A Probabilidade permite analisar ou calcular as chances de obter determinado resultado diante de um experimento aleatório. São exemplos as chances de um número sair em um lançamento de dados ou a possibilidade de ganhar na loteria.

A partir disso, a probabilidade é determinada pela razão entre o número de eventos possíveis e número de eventos favoráveis, sendo apresentada pela seguinte expressão:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Sendo:

P (A): probabilidade de ocorrer um evento A
n (A): número de resultados favoráveis
n (Ω): número total de resultados possíveis
Para encontrar o número de casos possíveis e favoráveis, muitas vezes necessitamos recorrer as fórmulas estudadas em análise combinatória.

Exemplo

Qual a probabilidade de um apostador ganhar o prêmio máximo da mega-sena, fazendo uma aposta mínima, ou seja, apostar exatamente nos seis números sorteados?

Talão da mega-sena

Solução

Como vimos, a probabilidade é calculada pela razão entre os casos favoráveis e os casos possíveis. Nesta situação, temos apenas um caso favorável, ou seja, apostar exatamente nos seis números sorteados.

Já o número de casos possíveis é calculado levando em consideração que serão sorteados, ao acaso, 6 números, não importando a ordem, de um total de 60 números.

Para fazer esse cálculo, usaremos a fórmula de combinação, conforme indicado abaixo:

$$C_{60,6} = \frac{60!}{6!\,(60-6)!} = \frac{60.59.58.57.56.55.\cancel{54!}}{6!.\cancel{54!}} = \frac{36\,045\,979\,200}{720}$$

$$C_{60,6} = 50\,063\,860$$

Assim, existem **50 063 860** modos distintos de sair o resultado. A probabilidade de acertarmos então será calculada como:

$$P = \frac{1}{50\,063\,860} = 0{,}00000002 = 0{,}000002\%$$