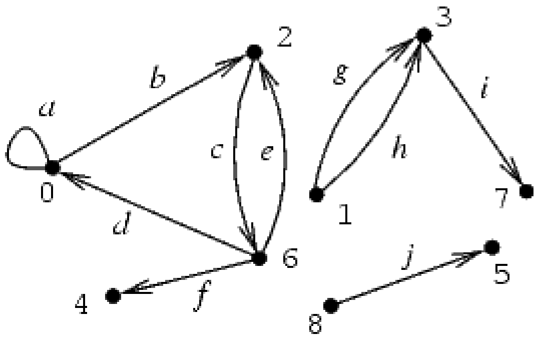
O que é um grafo?

Um *grafo* (= *graph*) é um animal formado por dois conjuntos: um conjunto de coisas chamadas *vértices* e um conjunto de coisas chamadas *arcos*; cada arco está associado a dois vértices: o primeiro é a *ponta inicial* do arco e o segundo é a *ponta final*. Você pode imaginar que um grafo é um mapa rodoviário idealizado: os vértices são cidades e os arcos são estradas de mão única.

EXEMPLO 1: Digamos que os vértices de nosso grafo são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e os arcos são $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$. Então a seguinte tabela define um grafo:

ponta inicial	0	0	2	6	6	6	1	1	3	8
arco	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
ponta final	0	2	6	0	2	4	3	3	7	5



Se um arco a tem ponta inicial v e ponta final w, dizemos que a *vai de v a w*. Dizemos também que a *sai de v* e *entra em w*. Às vezes, um arco com ponta inicial v e ponta final w será denotado por (v,w) ou por $v\!-\!w$ ou ainda por vw. Como se vê, os arcos são dirigidos; há quem goste de enfatizar esse fato dizendo que o grafo é *dirigido* (= *directed*).

De maneira mais formal, podemos dizer que um grafo é um terno (V,A,f), onde V e A são conjuntos finitos arbitrários e f é a função que associa a cada elemento de A um par ordenado de elementos de V. Às vezes, a função f é subentendida e dizemos simplesmente o grafo (V,A). Se o grafo como um todo é denotado por G, o seu conjunto de vértices será denotado por VG e o seu conjunto de arcos por AG. Se o grafo for denotado por g, os conjuntos de vértices e arcos serão denotados por Vg e Ag respectivamente.

Laços e arcos paralelos

Um arco é um *laço* (= *loop* = *self-loop*) se sua ponta inicial coincide com sua ponta final, ou seja, se o arco é da forma (v,v). Dois arcos são *paralelos* se têm a mesma ponta inicial e a mesma ponta final, ou seja, se os dois arcos são da forma (v,w). A propósito, dois arcos são *antiparalelos* se a ponta inicial de um é ponta final do outro, ou seja, se um arco é da forma (v,w) enquanto o outro é da forma (w,v).

Um grafo é *simétrico* (= *symmetric*) se para cada arco da forma (v,w) existe um arco da forma (w,v). Há um tipo especial muito importante de grafo simétrico: o grafo *não-dirigido* (= *undirected*); vamos tratar desse tipo de grafo mais tarde.

Exercício

1. Qual a relação entre o número de arcos e o número de vértices de um grafo? E se o grafo não tem laços nem arcos paralelos? E se o grafo não tem laços nem arcos paralelos nem arcos antiparalelos?

Exemplos

A natureza está cheia de grafos. Eis alguns exemplos:

- Cada vértice é um dos setores (agricultura, bancos, mineração, comércio, etc.) da *economia de um país*. Há um arco de x a y se houver um fluxo significativo de bens e serviços de x para y. O grafo não tem arcos paralelos, mas pode ter laços; em geral, o grafo não é simétrico.

- Cada vértice é uma *tarefa de um grande projeto*. Há um arco de x a y se x é pré-requisito de y, ou seja, se x deve estar pronta antes que y possa começar.

- Cada vértice é um *arquivo de um sistema de software*. Cada arco é uma dependência: um arquivo v é construído a partir de todos os arquivos w para os quais existe um arco da forma (v,w). Exemplo: se os arquivos são *aaa.y*, *aaa.c*, *bbb.c*, *bbb.h*, *aaa.o*, *bbb.o*, *aaa* e *bbb*, poderem

os ter arcos da
forma (*aaa*, *aaa.o*), (*aaa.o, aaa.c*), (*aaa.o, bbb.h*), etc. O utilitário *make* do UNIX trabalha sobre grafos deste tipo.

- Cada vértice é uma *página na teia WWW*. Cada arco é um link que leva de uma página a outra. [Parece que há cerca de 2 milhões de vértices e 5 milhões de arcos.]

- Os vértices são *times de futebol* e os arcos são os jogos entre os times durante um campeonato. É claro que o grafo é simétrico e não tem laços (mas pode ter arcos paralelos).

- Cada vértice é uma *espécie animal* (cavalo, urso, koala, coelho, mosquito, etc.) ou *vegetal* (cenoura, palmeira, eucalipto, alga, etc.). Há um arco de x para y se a espécie x se alimenta da espécie y.

- Os vértices são as casas de um *tabuleiro de xadrez*. Há um arco de x para y se um cavalo do jogo pode ir de x a y em um só movimento. É claro que esse grafo é simétrico.

- Os vértices são *palavras em português* (girafa, girava, cavalo, etc.). Há um arco de x a y se e só se as duas palavras diferem em exatamente uma posição (por exemplo, há um arco de girafa a girava). É claro que o grafo não tem laços nem arcos paralelos, mas é simétrico. (Poderíamos eliminar a simetria apagando o arco de x a y se y precede x no dicionário.)

- Cada vértice do grafo é um conjunto com exatamente dois dos números *1, 2, 3, 4, 5*. Há um arco de x para y se os conjuntos são disjuntos. Este grafo não tem laços nem arcos antiparalelos, mas é simétrico; ele é conhecido como *grafo de Petersen*. (Poderíamos eliminar a simetria apagando o arco de x a y se y precede x na ordem lexicográfica.)

- Os vértices são *intervalos* (de tempo, por exemplo). Há um arco de J para K (e também de K para J) se os intervalos forem disjuntos. É claro que esse grafo é simétrico.

Adjacência

Um vértice w é *adjacente a* (ou *vizinho de*) um vértice v se existe um arco da forma (v,w), ou seja, se existe um arco com ponta inicial v e ponta final w. A relação de adjacência entre vértices pode não ser simétrica: w pode ser adjacente a v sem que v seja adjacente a w.

EXEMPLO: No exemplo 1, os vértices adjacentes a 6 são 0, 2 e 4. O único vértice adjacente a 8 é 5.

Matriz de adjacências

A *matriz de adjacências* de um grafo, digamos M, tem linhas e colunas indexadas pelos vértices. Para cada par v,w de vértices, $M[v,w]$ é o número de arcos com ponta inicial v e ponta final w. (Algumas pessoas preferem uma matriz booleana: $M[v,w]$ vale 1 se existe algum arco de v a w e vale 0 em caso contrário.)

EXEMPLO: Eis a matriz de adjacências do grafo do exemplo 1 (os 0 foram trocados por - para tornar a figura mais bonita):

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	-	1	-	-	-	-	-	-
1	-	-	-	2	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-	1	-	-
3	-	-	-	-	-	-	-	1	-
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	1	-	1	-	1	-	-	-	-
7	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8	-	-	-	-	-	1	-	-	-

A matriz de adjacências de um grafo pode ser um bom substituto para um *desenho* do grafo, especialmente se os vértices forem colocados em uma ordem apropriada. Por exemplo, a segunda das matrizes abaixo revela melhor a estrutura do grafo que a primeira, embora ambas representem o mesmo grafo.

	0	1	2	3	4	5	6
0	-	-	-	1	-	-	-
1	1	-	-	-	-	1	-
2	-	-	-	-	1	-	1
3	1	-	-	1	-	1	-
4	-	-	1	-	-	-	1
5	1	1	-	1	-	-	-
6	-	-	1	-	1	-	-

	0	1	3	5	2	4	6
0	-	-	1	-	-	-	-
1	1	-	-	1	-	-	-
3	1	-	1	1	-	-	-
5	1	1	1	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	1	1
4	-	-	-	-	1	-	1
6	-	-	-	-	1	1	-