# Grafos

$V^{(2)}$ Para qualquer conjunto $V$, denotaremos por $V^{(2)}$ o conjunto de todos os pares não-ordenados de elementos de $V$. Se $V$ tem $n$ elementos então $V^{(2)}$ tem $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ elementos. Os elementos de $V^{(2)}$ serão identificados com os subconjuntos de $V$ que têm cardinalidade $2$. Assim, cada elemento de $V^{(2)}$ terá a forma $\{v, w\}$, sendo $v$ e $w$ dois elementos distintos de $V$.

$(V, A)$ Um **grafo** é um par $(V, A)$ em que $V$ é um conjunto arbitrário e $A$ é um subconjunto de $V^{(2)}$. Os elementos de $V$ são chamados **vértices** e os de $A$ são chamados **arestas**. Neste texto, vamos nos restringir a grafos em que o conjunto de vértices é finito.[2]

$vw$ Uma aresta como $\{v, w\}$ será denotada simplesmente por $vw$ ou por $wv$. Dire- mos que a aresta $vw$ **incide** em $v$ e em $w$ e que $v$ e $w$ são as **pontas** da aresta. Se $vw$ é uma aresta, diremos que os vértices $v$ e $w$ são **vizinhos** ou **adjacentes**.

De acordo com nossa definição, um grafo não pode ter duas arestas diferentes com o mesmo par de pontas (ou seja, não pode ter arestas “paralelas”). Também não pode ter uma aresta com pontas coincidentes (ou seja, não pode ter “laços”). Há quem goste de enfatizar esse aspecto da definição dizendo que o grafo é “simples”.

Muitas vezes é conveniente dar um nome ao grafo como um todo. Se o nome do

---

[1] A palavra “grafo” é um neologismo derivado da palavra *graph* em inglês. Ela foi usada pela primeira vez no sentido que nos interessa aqui pelo matemático inglês James Joseph Sylvester (□□□□ – □□□□).

[2] Além disso, suporemos quase sempre, tacitamente, que $V \neq \emptyset$.

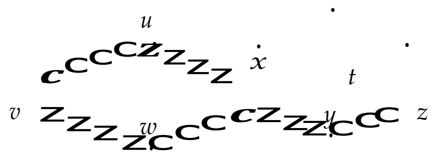


Figura 1.1: Esta figura é um desenho do grafo cujos vértices são $t$ , $u$ , $v$ , $w$ , $x$ , $y$ , $z$ e cujas arestas são $vw$ , $uv$ , $xw$ , $xu$ , $yz$ e $xy$ .

grafo for $G$, o conjunto dos seus vértices será denotado por $V(G)$ e o conjunto das suas arestas por $A(G)$. O número de vértices de $G$ é denotado por $n(G)$ e o número de arestas por $m(G)$; portanto, $V(tt)$ $A(tt)$ $n(tt)$

$$n(G) = |V(G)| \quad \text{e} \quad m(G) = |A(G)| \ .$$ $m(tt)$

O **complemento** de um grafo $(V, A)$ é o grafo $(V, V^{(2)} \setminus A)$. O complemento de um grafo $G$ será denotado por $G$. $tt$

Um grafo $G$ é **completo** se $A(G) = V(G)^{(2)}$ e **vazio** se $A(G) = \emptyset$. A expressão "$G$ é um $K_n$" é uma abreviatura de "$G$ é um grafo completo com $n$ vértices". A expressão "$G$ é um $\overline{K_n}$" é uma abreviatura de "$G$ é um grafo vazio com $n$ vértices". $K_n$ $\overline{K_n}$

## 1.2 Alguns exemplos de grafos

**Exemplo 1.1** Os vértices do grafo são as casas de um tabuleiro de xadrez (generalizado) com $t$ linhas e $t$ colunas.[3] Dois vértices são adjacentes se uma dama do jogo de xadrez pode saltar de um deles para o outro em um só movimento. Esse é o grafo **dos movimentos da dama**, ou simplesmente o grafo **da dama**. Para deixar cla- ras as dimensões do tabuleiro, podemos dizer que esse é o grafo **da dama $t$–por–$t$**. Quantos vértices e quantas arestas tem o grafo da dama 3–por–3?

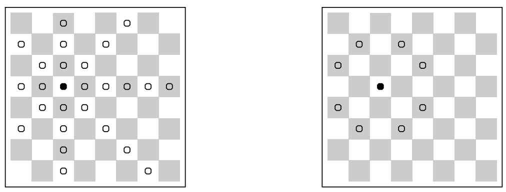

Figura 1.2: Tabuleiros de xadrez 8–por–8. A figura esquerda indica todos os vizinhos do vértice • no grafo da dama (veja exemplo 1.1). A da direita indica todos os vizinhos do vértice • no grafo do cavalo (veja exemplo 1.2).

**Exemplo 1.2** Por analogia com o exemplo anterior, definem-se o grafo **do rei**, o grafo **do bispo**, o grafo **do cavalo** e o grafo **da torre $t$–por–$t$**. Quantos vértices e quantas arestas tem o grafo do cavalo 4–por–4?

[3] No tabuleiro usual, $t$ vale 8 .

**Exemplo 1.3** O grafo **das palavras** é definido assim: cada vértice é uma palavra da língua portuguesa e duas palavras são adjacentes se diferem em exatamente uma posição. Por exemplo, `rato` e `ralo` são adjacentes, enquanto `ralo` e `rota` não são. Faça uma figura da parte do grafo definida pelas palavras abaixo:

```
caiado cavado cavalo girafa girava ralo ramo rata rato remo
reta reto rota vaiado varado virada virado virava
```

**Exemplo 1.4** Um **cubo** de dimensão $k$, ou $k$-**cubo**, é o grafo definido da seguinte maneira: os vértices do grafo são todas as seqüências $b_1 b_2 \ldots b_k$ em que cada $b_i$ pertence a $\{0, 1\}$; dois vértices são adjacentes se diferem em exatamente uma posição. Faça figuras dos cubos de dimensões 1, 2 e 3.

**Exemplo 1.5** O grafo **dos estados do Brasil** é definido assim: cada vértice é um dos estados da República Federativa do Brasil; dois estados são adjacentes se têm uma fronteira comum. Quantos vértices tem o grafo? Quantas arestas?

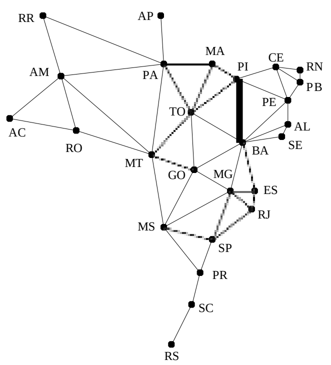


Figura 1.3: Adjacência entre estados do Brasil (veja exemplo 1.5).

**Exemplo 1.6** Seja $M$ uma matriz simétrica com linhas e colunas indexadas por um conjunto $V$. Suponha que $M_{vv} = 0$ para todo $v$ em $V$. O grafo **da matriz** $M$ é definido da seguinte maneira: o conjunto de vértices do grafo é $V$ e dois vértices $u$ e $v$ são adjacentes se $M_{uv} \neq 0$.

**Exemplo 1.7** A **grade** $p$**–por–**$q$ é o grafo definido assim: o conjunto de vértices é o produto cartesiano $\{1, 2, \ldots, p\} \times \{1, 2, \ldots, q\}$ e dois vértices $(i, j)$ e $(i', j')$ de $V$ são adjacentes se $i = i'$ e $|j - j'| = 1$ ou se $j = j'$ e $|i - i'| = 1$. (Veja a figura 1.4.) Quantas arestas tem a grade $p$–por–$q$?

**Exemplo 1.8** Seja $V$ o conjunto de todos os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que têm exatamente 2 elementos. Digamos que dois elementos $v$ e $w$ de $V$ são adjacentes se $v \cap w = \emptyset$. Essa relação de adjacência sobre $V$ define o grafo **de Petersen**[4] (veja figura 1.4).

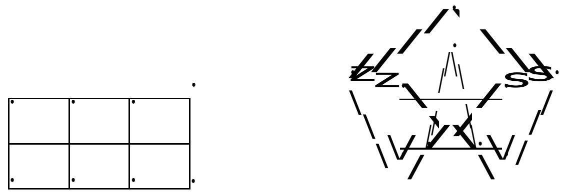

Figura 1.4: Uma grade 3–por– 4 (veja exemplo 1.7) e um grafo de Petersen (veja exemplo 1.8).

**Exemplo 1.9** Os hidrocarbonetos conhecidos como alcanos têm fórmula química $C_pH_{2p+2}$ , onde $C$ e $H$ representam moléculas de carbono e hidrogênio respectivamente. As moléculas de alcanos podem ser representadas por grafos como os da figura 1.5.

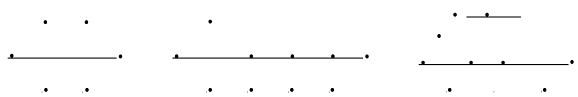

Figura 1.5: Etano ( $C_2H_6$ ), butano ( $C_4H_{10}$ ) e isobutano ( $C_4H_{10}$ ). Os vértices em que incide uma só aresta representam átomos de hidrogênio ($H$); os demais representam átomos de carbono ($C$). Veja o exemplo 1.9.

**Exemplo 1.10** Sejam $U$ e $W$ dois conjuntos mutuamente disjuntos e seja $A$ o conjunto de todos os pares não-ordenados da forma $uw$ com $u \in U$ e $w \in W$. Dizemos que $(U \cup W, A)$ é um **grafo bipartido completo**. Dizemos que esse grafo é um $K_{p,q}$, sendo $p := |U|$ e $q := |W|$. $K_{p,q}$

**Exemplo 1.11** Seja $V$ um conjunto de pontos no plano. Digamos que dois desses pontos são adjacentes se a distância entre eles é menor que 2. Essa relação de adjacência define o grafo **dos pontos no plano** (sobre o conjunto $V$). Faça uma figura do grafo definido pelos pontos abaixo.

$$\begin{array}{ccc} (0,2) & (1,2) & (2,2) \\ (0,1) & (1,1) & (2,1) \\ (0,0) & (1,0) & (2,0) \end{array}$$

**Exemplo 1.12** Suponha dados $k$ intervalos de comprimento finito, digamos $I_1, \ldots, I_k$, na reta real. Digamos que dois intervalos $I_i$ e $I_j$ são adjacentes se

[4] Julius Petersen ( □□□□ – □□□□ ), matemático dinamarquês.

$I_i \cap I_j \neq \emptyset$. Essa relação de adjacência define um grafo com conjunto de vértices $\{I_1, \ldots, I_k\}$. Esse é um grafo **de intervalos**. Faça uma figura do grafo definido pelos intervalos $[0, 2]$, $[1, 4]$, $[3, 6]$, $[5, 6]$ e $[1, 6]$.

**Exemplo 1.13** Seja $\leq$ uma relação de ordem parcial sobre um conjunto finito $V$. Portanto, a relação é transitiva (se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$), anti-simétrica (se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$) e reflexiva ($x \leq x$ para todo $x$). Digamos que dois elementos distintos $x$ e $y$ de $V$ são adjacentes se forem comparáveis, ou seja, se $x \leq y$ ou $y \leq x$. Essa relação de adjacência define o grafo **de comparabilidade** da relação $\leq$.

**Exemplo 1.14** Um grafo é **planar** se pode ser desenhado no plano sem que as curvas que representam arestas se cruzem. Mostre que o grafo dos estados do Brasil (veja exemplo 1.5) é planar. Mostre que o grafo do 3-cubo (veja exemplo 1.4) é planar. Verifique que $K_5$ não é planar.

**Exemplo 1.15** Duas arestas de um grafo $G$ são **adjacentes** se têm uma ponta comum. Essa relação de adjacência define o **grafo das arestas** de $G$.[5] Se $G'$ denota o grafo das arestas de $G$ então $V(G') = A(G)$ e cada aresta de $G'$ é um par $ab$ em que $a$ e $b$ são arestas adjacentes de $G$. (Veja a figura 1.6).

Faça uma figura do grafo das arestas de um $K_3$ e de um $K_{1,3}$ (veja exemplo 1.10). Faça uma figura do grafo das arestas de um $K_4$. Quantos vértices e quantas arestas tem o grafo das arestas de um $K_n$?

Seja $G$ o grafo das arestas de um $K_5$. Desenhe $\overline{G}$. Você já viu esse grafo neste texto?

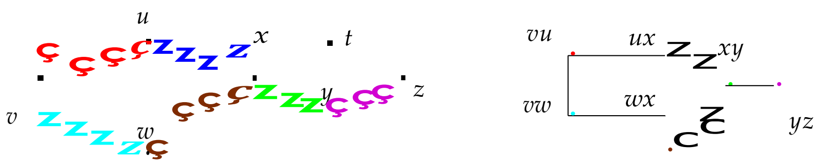


Figura 1.6: Um grafo (esquerda) e seu grafo das arestas (direita).

Figura 1.6: Um grafo (esquerda) e seu grafo das arestas (direita).