

تمرین ۳ تصحیح درستی

فایده نایب ۸۱۰۱۹۸۴۷۹

$$\min J = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5$$

$$\begin{aligned} \text{د.ت: } & 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 8 \\ & x_3 + x_4 \leq 8 \\ & x_1, x_3 \in \{0, 1\} \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & 2x_1 + x_2 - x_6 = 1 \\ & x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ & x_3 + x_4 + x_5 = 8 \\ & x_1 + x_6 = 1 \\ & x_3 + x_9 = 1 \\ & x_i \geq 0 \text{ و } x_1, x_3 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

مقادیر	دقت
۴	۷-۴
۸	۹-۱۰
۱۰	۱۰-۱۵
۷	۱۵-۱۸
۱۲	۱۸-۲۲
۵	۲۲-۲

⇒ ۴ عدد

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 \\ & x_2 + x_3 \\ & x_3 + x_4 \\ & x_4 + x_5 \\ & x_5 + x_6 \\ & x_6 + x_7 \end{aligned}$$

هدف = کمترین مقدار ضریب
 $\sum x_i$

$$\Rightarrow \min J = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$\begin{aligned} \text{د.ت: } & \left\{ \begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_2 + x_3 &\geq 8 \\ x_3 + x_4 &\geq 10 \\ x_4 + x_5 &\geq 7 \\ x_5 + x_6 &\geq 12 \\ x_6 + x_1 &\geq 8 \end{aligned} \right. \\ & x_i \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_7 &= 4 \\ x_2 + x_3 - x_8 &= 8 \\ x_3 + x_4 - x_9 &= 10 \\ x_4 + x_5 - x_{10} &= 7 \\ x_5 + x_6 - x_{11} &= 12 \\ x_6 + x_1 - x_{12} &= 8 \end{aligned} \right. \\ & x_i \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\min J = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1, x_2 \in \{0, 1\} \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 1 & \rightarrow x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 2 & \rightarrow x_3 \\ x_1 + x_4 = 1 & \rightarrow x_4 \\ x_2 + x_5 = 1 & \rightarrow x_5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & x_1, x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
-Z	2	1	0	0	0	0	0	-3
x_1	1	0	0	0	0	1	-1	1
x_2	1	1	0	0	0	1	0	2
x_3	1	0	1	0	0	0	0	1
x_4	0	0	0	1	0	1	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
-Z	0	0	0	0	0	0.5	0.5	-2.5
x_1	1	0	0	0	0	0.5	-0.5	0.5
x_2	0	1	0	0	0	0.5	0.5	1.5
x_3	0	0	1	0	0	-0.5	0.5	0.5
x_4	0	0	0	1	0	1	0	1

$$\Rightarrow J^* = 5.5 \quad x_1^* = x_2^* = x_3^* = 0 \quad x_4 = 0.5 \quad x_5 = 1.5 \quad x_6 = 0.5 \quad x_7 = 1$$

چون باغی شمره جای حل را تمام دهیم

$$x_1 = 1 \quad LP 0.0$$

$$x_1 = 0 \quad LP 0.1$$

$$LP 0.0 \quad x_1 = 1$$

با بستن ا حاد بین

	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
-Z	0	0	0	0	0.5	0.5	-5.5
x_2	1	0	0	0	0.5	-0.5	0.5
x_3	0	1	0	0	0.5	0.5	1.5
x_4	0	0	1	0	-0.5	0.5	0.5
x_5	0	0	0	1	1	0	1

	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
-Z	0.5	0	0	0	0.5	1	-5.5
x_2	-0.5	0	0	0	0.5	0	-0.5
x_3	0.5	1	0	0	0.5	-1	1.5
x_4	0.5	0	1	0	-0.5	0	0.5
x_5	0	0	0	1	1	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
-Z	0	0	0	0	1	1	-4
x_1	1	0	0	0	-1	0	1
x_2	0	1	0	0	1	-1	1
x_3	0	0	1	0	0	0	0
x_4	0	0	0	1	1	0	1

$$\Rightarrow J^* = 4 \quad x_1^* = x_2^* = 0 \quad x_3^* = 1 \quad x_4^* = 1 \quad x_5^* = 0 \quad x_6^* = 1 \quad x_7^* = 1$$

در حالت LPO.0 که $x_1^* = 1$ بود جواب ها همه قیدها را برآورده می کنند و $J^* = 4$ شود

حال LPO.1 را صواب کنیم

$$x_1 = 0$$

	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
-Z	0	0	0	0	0.5	0.5	-9.5
-	0	0	0	0	0.5	-0.5	0.5
x_2	1	0	0	0	0.5	0.5	1.5
x_3	0	1	0	0	-9.5	0.5	0.5
x_4	0	0	1	0	1	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
-Z	0.5	0	0	0	0.5	1	-9.5
x_1	0.5	0	0	0	-0.5	0	0.5
x_2	0.5	1	0	0	0.5	-1	1.5
x_3	-0.5	0	1	0	0.5	0	0.5
x_4	1	0	0	0	0	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
-Z	0	0	0	0	1	1	-7
x_1	1	0	0	0	-1	0	1
x_2	0	1	0	0	1	-1	1
x_3	0	0	1	0	0	0	1
x_4	0	0	0	1	1	0	0

$$J^* = 4 \quad x_1^* = x_2^* = x_3^* = 0 \quad x_4^* = x_5^* = x_6^* = 1$$

حالت LPO.1 که $x_1^* = 0$ بود قیدها را برآورده می کنند و $J^* = 4$ شود

بنابراین برای هر دو حالت $x_1^* = 0$ و $x_1^* = 1$ به حالت بهینه $J^* = 4$ می رسد

$$(1) \quad x_1^* = 0 \quad x_2^* = 1 \quad x_3^* = 1 \quad x_4^* = 0 \quad x_5^* = 0 \quad x_6^* = 1 \quad x_7^* = 0$$

$$(2) \quad x_1^* = 1 \quad x_2^* = 0 \quad x_3^* = 1 \quad x_4^* = 1 \quad x_5^* = 0 \quad x_6^* = 0 \quad x_7^* = 1$$

$$\min J = 4x_1 + \varepsilon x_2 + x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & x_2 + 2x_3 = 4 \\ & x_2 + 4x_3 - 4x_4 = \omega \\ & 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ & x_2 \in \mathbb{Z} \\ & x_4 \text{ unbounded} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z_\omega = x'_\omega - x''_\omega$$

(ع) چون x_ω محدود ندارد ابتدا مقیود را با دو متغیر جدید می‌کنیم

$$\begin{aligned} & x_2 + 2x_3 = 4 \\ & x_2 + 4x_3 - 4x'_\omega + 4x''_\omega = \omega \\ & 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_\varepsilon, x'_\omega, x''_\omega \geq 0 \\ & x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

سه دو متغیر جدید می‌کنیم.

$$\max J = 4\lambda_1 + \omega\lambda_2 + 4\lambda_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 2\lambda_3 \leq \varepsilon \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq \varepsilon \\ & 2\lambda_2 - 2\lambda_3 \leq 1 \\ & 2\lambda_1 \leq 0 \Rightarrow -\lambda_1 \geq 0 \Rightarrow \lambda'_1 \geq 0 \\ & -2\lambda_2 \leq 0 \Rightarrow \lambda_2 \geq 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \\ & 2\lambda_2 \leq 0 \Rightarrow \lambda_2 \leq 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \\ & -\infty < \lambda'_1 < \infty \end{aligned}$$

$$\max J = 4\lambda_3 + 4\lambda_1$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 2\lambda_3' - 2\lambda_3'' \leq \varepsilon \\ & -\lambda_1' + \lambda_3 \leq \varepsilon \\ & -2\lambda_3' + 2\lambda_3'' \leq 1 \\ & \lambda_1', \lambda_3', \lambda_3'' \geq 0 \end{aligned}$$

$$\max J = 4\lambda_1 + 4\lambda_3' - 4\lambda_3''$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 2\lambda_3' - 2\lambda_3'' + \lambda_\varepsilon = \varepsilon \\ & -\lambda_1' + \lambda_3' - \lambda_3'' + \lambda_\omega = \varepsilon \\ & -2\lambda_3' + 2\lambda_3'' + \lambda_4 = 1 \\ & \lambda_i \geq 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow

	λ_3'	λ_ω	λ_4	λ_1'	λ_ε	λ_3''	RHS
-2	-4	0	0	4	0	4	0
λ_3'	2	0	0	0	1	-2	ε
λ_ω	1	1	0	-1	0	-1	ε
λ_4	-2	0	1	0	0	2	1

	λ_3'	λ_ω	λ_4	λ_1'	λ_ε	λ_3''	RHS
-2	0	0	0	0	2	0	12
λ_3'	1	0	0	0	1/2	-1	2
λ_ω	0	1	0	-1	-1/2	0	2
λ_4	0	0	1	0	1	0	ω

$$\lambda_1' = \lambda_\varepsilon = \lambda_3'' = 0$$

$$\lambda_3' = 2$$

$$\lambda_\omega = 2$$

$$\lambda_4 = \omega$$

سے پانچ بہ نسبت زیری ہو

$$\lambda_1^* = 1 \quad \lambda_2^* = \lambda_3^* = 0 \quad \rightarrow \quad J^* = 12$$

$$1\lambda_1 = 1 \rightarrow \text{active} \rightarrow x_1^* > 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \leq 1 \rightarrow x_2^* = 0$$

$$1\lambda_1 - 1\lambda_2 = -1 \leq 1 \rightarrow x_3^* = 0$$

$$1\lambda_1 = 0 \rightarrow x_4^* > 0$$

$$-1\lambda_2 = 0 \rightarrow x_5^* > 0$$

$$1\lambda_2 = 0 \rightarrow x_6^* > 0$$

$$2x_1 + 1x_2 = 0 + 1x_2 = 4 \rightarrow x_2^* = 4$$

$$1x_1 + 1x_2 - 1x_3 = -1x_3 = 0 \rightarrow x_3^* = 0$$

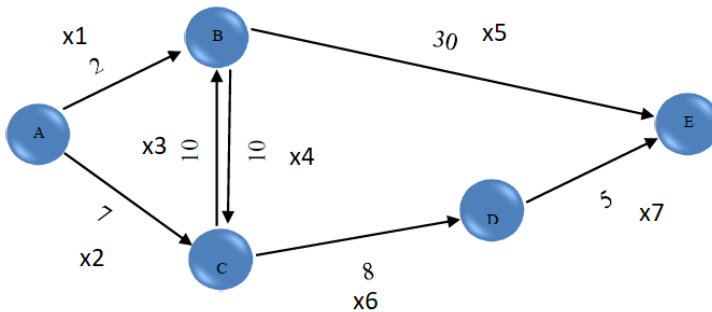
$$1x_1 + x_2 - 1x_3 = 1x_1 = 4 \rightarrow x_1^* = 4$$

$$\Rightarrow x_1^* = 4 \quad x_2^* = 4 \quad x_3^* = 0 \quad x_4^* = 4 \quad x_5^* = 0 \quad x_6^* = 0 \quad J^* = 12$$

$$(2) \quad x_1^* = 1 \quad x_2^* = 0 \quad x_3^* = 1 \quad x_4^* = 1 \quad x_5^* = 0 \quad x_6^* = 0 \quad x_7 = 1$$

سوال 5)

ابتدا به هر یال یک متغیر نسبت می‌دهیم. این متغیرها باینری خواهد بود و عدد 1 نشان دهنده این است که یال در مسیر وجود دارد.



```

model.x1=pyo.Var(within=Binary)
model.x2=pyo.Var(within=Binary)
model.x3=pyo.Var(within=Binary)
model.x4=pyo.Var(within=Binary)
model.x5=pyo.Var(within=Binary)
model.x6=pyo.Var(within=Binary)
model.x7=pyo.Var(within=Binary)
  
```

سپس قیود را پیدا می‌کنیم.

قید اول : از بین مسیر های x_1 و x_2 فقط یکی را میتوان انتخاب کرد بنابراین به شکل $x_1+x_2==1$ نوشته می شود.

قید دوم : اگر x_6 انتخاب شود قطعا x_7 نیز انتخاب می شود پس مقادیر این دو متغیر یکسان خواهد بود. $(x_6==x_7)$

قید سوم : برای رسیدن به مقصد حتما یا از مسیر x_5 می‌رسیم و یا از x_7 . چون $x_6==x_7$ است پس فرقی نمیکند قید را $x_5+x_7==1$ بنویسیم یا $x_5+x_6=1$ بنویسیم. هر دو قید معادلند.

قید چهارم : اگر مسیر x_1 انتخاب شده باشد، نیاز به قیدی داریم تا x_1 را بتواند به x_6 وابسته کند. چون در صورتی که بخواهیم از x_6 عبور کنیم حتما باید x_4 نیز فعال شود. این قید به صورت $x_1+x_6 \leq x_4+1$ نوشته می شود.

قید پنجم : اگر مسیر x_2 انتخاب شده باشد، نیاز به قیدی داریم تا x_2 را بتواند به x_5 وابسته کند. چون در صورتی که بخواهیم از x_5 عبور کنیم حتما باید x_3 نیز فعال شود. این قید به صورت $x_2+x_5 \leq x_3+1$ نوشته می شود.

```

model.c1 = pyo.Constraint(expr= x1+x2==1 )
model.c2 = pyo.Constraint(expr= x6==x7 )
model.c3 = pyo.Constraint(expr= x5+x7==1)
model.c4 = pyo.Constraint(expr= x1+x6<=x4+1 )
model.c5 = pyo.Constraint(expr= x2+x5<=x3+1 )
  
```

تابع هدف نیز به صورت مجموع حاصل ضرب هر متغیر در هزینه اش است

```
model.obj = pyo.Objective(expr= 2*x1+7*x2+10*x3+10*x4+30*x5+8*x6+5*x7, sense=minimize)

opt = SolverFactory('glpk')
opt.solve(model)

model.display()
```

حال مدل را اجرا میکنیم تا نتایج را مشاهده کنیم.

مقادیر متغیرها به شکل زیر می شود.

```
Variables:
  x1 : Size=1, Index=None
      Key : Lower : Value : Upper : Fixed : Stale : Domain
      None : 0 : 0.0 : 1 : False : False : Binary
  x2 : Size=1, Index=None
      Key : Lower : Value : Upper : Fixed : Stale : Domain
      None : 0 : 1.0 : 1 : False : False : Binary
  x3 : Size=1, Index=None
      Key : Lower : Value : Upper : Fixed : Stale : Domain
      None : 0 : 0.0 : 1 : False : False : Binary
  x4 : Size=1, Index=None
      Key : Lower : Value : Upper : Fixed : Stale : Domain
      None : 0 : 0.0 : 1 : False : False : Binary
  x5 : Size=1, Index=None
      Key : Lower : Value : Upper : Fixed : Stale : Domain
      None : 0 : 0.0 : 1 : False : False : Binary
  x6 : Size=1, Index=None
      Key : Lower : Value : Upper : Fixed : Stale : Domain
      None : 0 : 1.0 : 1 : False : False : Binary
  x7 : Size=1, Index=None
      Key : Lower : Value : Upper : Fixed : Stale : Domain
      None : 0 : 1.0 : 1 : False : False : Binary
```

مقدار تابع هدف نیز برابر می شود با 20 .

```
Objectives:
  obj : Size=1, Index=None, Active=True
      Key : Active : Value
      None : True : 20.0
```