فاطمه ناسیان ۸۱۰۱۹۸۴۷۹   تمرین ۴ تحقیق در عملیات

۱)

$$f_1(x_1,x_2)=\frac{1}{4}x_1^4+2x_1^3+3x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2$$

$$\nabla f_1(x_1,x_2)=\begin{bmatrix} x_1^3+6x_1^2+6x_1-2x_2 \\ 4x_2-2x_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$4x_2-2x_1=0 \rightarrow x_1=2x_2 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 8x_2^3+24x_2^2+12x_2-2x_2=0$$

$$\rightarrow x_2=0,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{5}{2} \rightarrow x^*=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-0.5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\-2.5\end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f_1=\begin{bmatrix} 3x_1^2+12x_1+6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$x_1^*=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \rightarrow \nabla^2 f_1(x_1^*)=\begin{bmatrix}6 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}>0 \rightarrow PD \rightarrow \text{local min}$$

$$x_2^*=\begin{bmatrix}-1\\-0.5\end{bmatrix} \rightarrow \nabla^2 f_1(x_2^*)=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix} \rightarrow \text{otherwise} \rightarrow \text{saddle point}$$

$$x_3^*=\begin{bmatrix}-5\\-2.5\end{bmatrix} \rightarrow \nabla^2 f_1(x_3^*)=\begin{bmatrix}21 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}>0 \rightarrow PD \rightarrow \text{local min}$$

$$f_2(x_1,x_2)=4x_1^4+x_1^3+5x_1^2+x_2^2-3x_1x_2$$

$$\nabla f_2(x_1,x_2)=\begin{bmatrix} 16x_1^3+3x_1^2+10x_1-3x_2 \\ 2x_2-3x_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$x_2=1.5x_1 \rightarrow 16x_1^3+3x_1^2+10x_1-4.5x_1=0 \rightarrow x_1^*=0,\ -\frac{3}{32}\pm i\frac{7\sqrt{7}}{32}$$

موهومی ها را در نظر نمی‌گیریم

$$\rightarrow x^*=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f_2=\begin{bmatrix} 48x_1^2+6x_1+10 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x^*=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \rightarrow \nabla^2 f_2(x^*)=\begin{bmatrix}10 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}>0 \rightarrow PD \rightarrow \text{local min}$$

۲) تابع Convex $\leftarrow \nabla^{۲} f(x) > ۰$

$f(x) = x^{T} A x + Bx + ۸$

$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۲ \\ -۳ & ۷ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ ۵ \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix}$

$\nabla^{۲} f(x) = ۲A = ۲\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۲ \\ -۳ & ۷ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix} \rightarrow$ کهادهای مقدم را بررسی میکنیم

$|۳| = ۳ > ۰$

$\begin{vmatrix} ۳ & -۳ \\ -۳ & ۷ \end{vmatrix} = ۱۲ > ۰ \rightarrow PD$

$|A| = ۱۷ > ۰$

$\rightarrow \nabla^{۲} f(x) > ۰ \rightarrow$ تابع Convex است.

$\nabla f(x) = ۲Ax + B = ۲\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۲ \\ -۳ & ۷ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} ۶x_۱ - ۶x_۲ + ۴x_۳ + ۱ = ۰ \\ -۶x_۱ + ۱۴x_۲ + ۲x_۳ - ۲ = ۰ \\ ۴x_۱ + ۲x_۲ + ۱۰x_۳ + ۵ = ۰ \end{cases} \rightarrow x^{*} = \begin{bmatrix} ۵/۲ \\ ۲۵/۱۷ \\ -۴۱/۳۴ \end{bmatrix}$$

$\nabla^{۲} f(x^{*}) = PD \rightarrow$ Local min

۳) چهار مرحله

$f_۱(x_۱, x_۲) = ۳x_۱^{۲} + ۵x_۲^{۲} + ۳x_۱ + ۵x_۲ \qquad \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۱ \end{pmatrix}$

$x_{k+1} = x_k - \alpha^{k} \nabla f_۱(x_k)$

$\nabla f_۱(x_۱, x_۲) = \begin{bmatrix} ۶x_۱ + ۳ \\ ۱۰x_۲ + ۵ \end{bmatrix} \rightarrow x^{*} = \begin{pmatrix} -۰٫۵ \\ -۰٫۵ \end{pmatrix} \rightarrow \nabla^{۲} f_۱ = \begin{bmatrix} ۶ & ۰ \\ ۰ & ۱۰ \end{bmatrix} \rightarrow PD$

$k=۱, \quad x_۲ = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۱ \end{pmatrix} - ۰٫۲\begin{pmatrix} ۱۵ \\ ۱۵ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۱ \\ -۲ \end{pmatrix}$

$k=۲ \quad x_۲ = \begin{pmatrix} -۱ \\ -۲ \end{pmatrix} - ۰٫۰۴\begin{pmatrix} -۳ \\ -۱۵ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۰٫۸۸ \\ -۱٫۴ \end{pmatrix}$

$k=۳ \quad x_۳ = \begin{pmatrix} -۰٫۸۸ \\ -۱٫۴ \end{pmatrix} - (۰٫۲)^{۳}\begin{pmatrix} -۲٫۲۸ \\ -۹ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۰٫۸۶ \\ -۱٫۳۲۸ \end{pmatrix}$

$k=۴ \quad x_۴ = \begin{pmatrix} -۰٫۸۶ \\ -۱٫۳۲۸ \end{pmatrix} - (۰٫۲)^{۴}\begin{pmatrix} -۲٫۱۶ \\ -۸٫۲۸ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۰٫۸۵ \\ -۱٫۳۱ \end{pmatrix}$

به علت وجود توان برای α، الگوریتم خیلی کند میشود. این بار به ازای $\alpha = ۰٫۵$ امتحان میکنیم.

$k=1 \quad x_1 = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۱ \end{pmatrix} - ۰/۵ \begin{pmatrix} ۱۵ \\ ۱۵ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۵/۵ \\ -۶/۵ \end{pmatrix}$

$\alpha = ۰/۵$

$k=۲ \quad x_۲ = \begin{pmatrix} -۵/۵ \\ -۶/۵ \end{pmatrix} - (۰/۵)^۲ \begin{pmatrix} -۳۰ \\ -۶۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +۲ \\ ۸/۵ \end{pmatrix}$

$k=۳ \quad x_۳ = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۸/۵ \end{pmatrix} - (۰/۵)^۳ \begin{pmatrix} ۱۵ \\ ۹۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰/۱۲۵ \\ -۲/۷۵ \end{pmatrix}$

$k=۴ \quad x_۴ = \begin{pmatrix} ۰/۱۲۵ \\ -۲/۷۵ \end{pmatrix} - (۰/۵)^۴ \begin{pmatrix} ۳/۷۵ \\ -۲۲/۵ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۰/۱۰۹ \\ -۱/۳۴ \end{pmatrix}$

در نهایت الگوریتم به $\begin{pmatrix} -۰/۵ \\ -۹/۵ \end{pmatrix}$ همگرا خواهد شد!

۴)

$Max \; J = ۳x^۲ + e^y + ۲z^۲ + x e^{y/۲} + ۶x + ۴z$

$$\nabla J = \begin{bmatrix} ۶x + e^{y/۲} + ۶ \\ e^y + \frac{x}{۲} e^{y/۲} \\ ۴z + ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \rightsquigarrow x^* = \begin{bmatrix} -\frac{۱۲}{۱۱} \\ -۲\ln\left(\frac{۱۱}{۶}\right) \\ -۱ \end{bmatrix}$$

$$\nabla^۲ J = \begin{bmatrix} ۶ & \frac{۱}{۲} e^{y/۲} & ۰ \\ \frac{۱}{۲} e^{y/۲} & e^y + \frac{x}{۴} e^{y/۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$\nabla^۲ J(x^*) = \begin{bmatrix} ۶ & \frac{۳}{۱۱} & ۰ \\ \frac{۳}{۱۱} & \frac{۱۸}{۱۲۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{کهادها}}$$

$|۶| = ۶ > ۰$

$\begin{vmatrix} ۶ & \frac{۳}{۱۱} \\ \frac{۳}{۱۱} & \frac{۱۸}{۱۲۱} \end{vmatrix} > ۰ \rightarrow PD$

$|\nabla^۲ J(x^*)| > ۰$

local min

(5

در عبارت $f(x) = (2 - \cos(\pi x) - \cos(\pi y))x^2y^2$ در بازه (0و 4) بنظر میرسد که مینیمم هنگامی رخ میدهد که x و y هر دو صفر باشند چون عبارت x^2 و y^2 همیشه نا منفی هستند همچنین عبارت $(2 - \cos(\pi x) - \cos(\pi y))$ نیز همیشه بزرگتر مساوی صفر است چون ماکسیمم cos یک است. بنابر این پیش بینی می شود که مینیمم تابع برابر صفر باشد. حال برای اینکه تابع صفر شود حالت های مختلفی امکان دارد. اگر x=0 یا y=0 یا $(2 - \cos(\pi x) - \cos(\pi y)) = 0$ باشد مینیمم اتفاق می افتد. برای برقرار بودن $(2 - \cos(\pi x) - \cos(\pi y)) = 0$ باید $\cos(\pi x) = \cos(\pi y) = 1$ باشد یعنی x=0 or 2 or 4 و y=0 or 2 or 4 باشد. بنابراین مسئله مینیمم های محلی مختلفی دارد و با توجه به شرایط اولیه، به یکی از انها همگرا می شود.

کد زیر را با کمک کتابخانه pyomo اجرا میکنیم.

```
import pyomo.environ as pyo
from pyomo.environ import *
from pyomo.opt import SolverFactory
import sys
import numpy as np

solverpath_folder = "D:\\Ipopt\\bin"
solverpath_exe = "D:\\Ipopt\\bin\\ipopt.exe"

sys.path.append(solverpath_folder)

model = pyo.ConcreteModel()

model.x = pyo.Var(bounds=(0,4), initialize=1)
model.y = pyo.Var(bounds=(0,4), initialize=1)

x = model.x
y = model.y


model.obj = pyo.Objective(expr= (2-cos(np.pi*x)-cos(np.pi*y))*x*x*y*y, sense=minimize)

opt = SolverFactory('ipopt', executable=solverpath_exe, validate=False)
opt.solve(model)

model.display()
```

همانطور که گفته شد با توجه به شرایط اولیه به مینیمم های محلی همگرا می شویم. برای مثال سه حالت زیر را مشاهده میکنیم. وقتی از شرایط اولیه (1و1) شروع کنیم به (0و0) میرسیم.

```
Variables:
  x : Size=1, Index=None
      Key  : Lower : Value                : Upper : Fixed : Stale : Domain
      None :     0 : 0.020998939646466742 :     4 : False : False :  Reals
  y : Size=1, Index=None
      Key  : Lower : Value                : Upper : Fixed : Stale : Domain
      None :     0 : 0.020998939646467117 :     4 : False : False :  Reals

Objectives:
  obj : Size=1, Index=None, Active=True
      Key  : Active : Value
      None :   True : 8.459144146612209e-10
```

وقتی از شرایط اولیه (3.5و2.5) شروع کنیم به (4و1) میرسیم.

```
Variables:
  x : Size=1, Index=None
      Key  : Lower : Value             : Upper : Fixed : Stale : Domain
      None :     0 : 1.999999999997473 :     4 : False : False :  Reals
  y : Size=1, Index=None
      Key  : Lower : Value              : Upper : Fixed : Stale : Domain
      None :     0 : 3.9999957355899873 :     4 : False : False :  Reals

Objectives:
  obj : Size=1, Index=None, Active=True
      Key  : Active : Value
      None :   True : 5.743368635921652e-09
```

وقتی از شرایط اولیه (1و3) شروع کنیم به (0و2) میرسیم.

```
Variables:
  x : Size=1, Index=None
      Key  : Lower : Value             : Upper : Fixed : Stale : Domain
      None :     0 : 1.999999471748593 :     4 : False : False :  Reals
  y : Size=1, Index=None
      Key  : Lower : Value                : Upper : Fixed : Stale : Domain
      None :     0 : 0.002376289008733343 :     4 : False : False :  Reals

Objectives:
  obj : Size=1, Index=None, Active=True
      Key  : Active : Value
      None :   True : 6.293968326360729e-10
```