فاطمه ناشیان ۸۱۰۱۹۸۴۷۹ تمرین ۵ تحقیق در عملیات

۱)

$$\max\ -(x-2)^2-2(y-1)^2 \quad\rightarrow\quad \min\ (x-2)^2+2(y-1)^2$$

$$x+4y\leq 3 \qquad\qquad x+4y-3\leq 0$$

$$x\geq y \qquad\qquad y-x\leq 0$$

لاگرانژین $L(x,\gamma)=(x-2)^2+2(y-1)^2+\gamma_1(x+4y-3)+\gamma_2(y-x)$

KKT
$$\begin{cases}\nabla_x L=\begin{bmatrix}2(x-2)+\gamma_1-\gamma_2\\ 4(y-1)+4\gamma_1+\gamma_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\\ x+4y-3\leq 0\\ y-x\leq 0\\ \gamma_1(x+4y-3)=0\\ \gamma_2(y-x)=0\\ \gamma_1,\gamma_2\geq 0\end{cases}$$

۱) فرض دو قید غیرفعال

$$\gamma_1=\gamma_2=0\rightarrow\begin{cases}x-2=0 & \rightarrow x=2\\ y-1=0 & \rightarrow y=1\end{cases}$$

$$x+4y-3=2+4-3=3<0 \quad \times$$ فرض اشتباه

۲) فرض قید اول فعال و قید دوم غیرفعال

$$\boxed{\gamma_2=0}\rightarrow\begin{cases}2(x-2)+\gamma_1=0\\ 4(y-1)+4\gamma_1=0\\ x+4y-3=0\end{cases}\rightarrow\boxed{x=\frac{5}{3}}\quad\boxed{y=\frac{1}{3}}\quad\boxed{\gamma_1=\frac{2}{3}}\quad ✓$$

محاسبه هسین $H=\begin{bmatrix}2&0\\0&4\end{bmatrix}>0 \rightarrow PD \rightarrow \boxed{\max\ -(x-2)^2-2(y-1)^2=-1}$

۳) فرض قید اول غیرفعال و قید دوم فعال

$$\gamma_1=0\rightarrow\begin{cases}2(x-2)-\gamma_2=0\\ 4(y-1)+\gamma_2=0\\ y-x=0\end{cases}\rightarrow x=\frac{4}{3}\quad y=\frac{4}{3}\quad \gamma_2=-\frac{4}{3}$$ × فرض اشتباه

۴) فرض هر دو قید فعال

$$\begin{cases}2x-4+\gamma_1-\gamma_2=0\\ 4y-4+4\gamma_1+\gamma_2=0\\ x+4y-3=0\\ y-x=0\end{cases}\rightarrow x=\frac{3}{5}\quad y=\frac{3}{5}\quad \gamma_1=\frac{22}{25}\quad \gamma_2=-\frac{48}{25}\quad\times$$

۲)

$$L(x,\lambda,\gamma) = (x_1-2)^2 + x_2 - 2 + \gamma(x_1+x_2-2) + \lambda(x_1-x_2-1)$$

$$\begin{cases} \nabla_x L = \begin{bmatrix} 2(x_1-2)+\gamma+\lambda \\ 1+\gamma-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \nabla_\lambda L = x_1 - x_2 - 1 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2 \leq 0 \quad , \quad \gamma \geq 0 \\ \gamma(x_1+x_2-2) = 0 \end{cases}$$

$$\gamma = 0 \qquad \begin{cases} 2x_1 - 4 + \lambda = 0 \\ 1 + \lambda = 0 \quad \rightarrow \lambda = 1 \\ x_1 - x_2 - 1 = 0 \end{cases} \quad x_1 = \frac{3}{2} \quad \Big\} \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\gamma \neq 0 \qquad \begin{cases} 2x_1 - 4 + \gamma + \lambda = 0 \\ 1 + \gamma - \lambda = 0 \\ x_1 - x_2 - 1 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2 = 0 \end{cases} \quad x_1 = \frac{3}{2} \; , \; x_2 = \frac{1}{2} \; , \; \gamma = 0 \; , \; \lambda = 1$$

بنابراین جواب به صورت $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ خواهد بود.

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$ نمی‌توان نتیجه گرفت

$$\nabla h(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad d^T \nabla h(x) = d_1 - d_2 = 0 \rightarrow d_1 = d_2$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = 2d_1^2 > 0 \rightarrow$$ نقطه بدست آمده مینیمم است.

$$\min\ 3x_1^2+4x_1x_2+x_2^2+x_1x_3+x_3-x_2$$
$$x_1+x_2\geq 2$$
$$x_1\geq 1$$
$$x_1-x_3=8$$

$\rightsquigarrow$ مسأله convex است پس نقطه کمینه یکتا دارد.

$$L(x,\lambda,\gamma)=3x_1^2+4x_1x_2+x_2^2+x_1x_3+x_3-x_2+\lambda(x_1-x_3-8)+\gamma_1(2-x_1-x_2)+\gamma_2(1-x_1)$$

$$\begin{cases}\nabla_x L: & 6x_1+4x_2+x_3+\lambda-\gamma_1-\gamma_2=0\\ & 4x_1+2x_2-1-\gamma_1=0\\ & x_1+1-\lambda=0\\ \nabla_\lambda L: & x_1-x_3-8=0\\ g(x)\leq 0: & 2-x_1-x_2\leq 0\\ & 1-x_1\leq 0\\ \gamma_i g_i(x)=0: & \gamma_1(2-x_1-x_2)=0 \qquad \gamma_2(1-x_1)=0\\ & \gamma_1,\gamma_2\geq 0\end{cases}$$

باید ۴ حالت فعال بودن یا نبودن γ_1 و γ_2 را بررسی کنیم

$$\gamma_1=0\quad \gamma_2=0 \rightarrow \begin{cases}6x_1+4x_2+x_3+\lambda=0\\ 4x_1+2x_2-1=0\\ x_1+1-\lambda=0\\ x_1-x_3-8=0\end{cases} \Rightarrow$$ دستگاه جواب ندارد

$$\gamma_1\neq 0\quad \gamma_2=0 \rightarrow \begin{cases}6x_1+4x_2+x_3+\lambda-\gamma_1=0\\ 4x_1+2x_2-1-\gamma_1=0\\ x_1+1-\lambda=0\\ x_1-x_3-8=0\\ 2-x_1-x_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1^*=1\\ x_2^*=1\\ x_3^*=-7\\ \lambda^*=2\\ \gamma_1^*=5\\ \gamma_2=0\end{cases} \Rightarrow \boxed{J^*=-7}$$

$$H=\begin{bmatrix}6&4&1\\4&2&0\\1&0&0\end{bmatrix} \rightsquigarrow$$ نامعین $$\nabla h(x)=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \qquad d^T\nabla h(x)=d_1-d_3=0$$
$$d_1=d_3$$

$$d^THd=[d_1\ d_2\ d_1]\begin{bmatrix}6&4&1\\4&2&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\d_1\end{bmatrix}=2(2d_1+d_2)^2>0 \rightsquigarrow PD \rightsquigarrow$$ این نقطه مینیمم تابع هدف است.

(٤

$$\text{Max} \quad 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 0/5\, x_2^2 - 10x_1 - 10x_2$$
$$x_1 + x_2 = 3$$

$$L(x,\lambda) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 0/5\, x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 3)$$

$$\nabla_x L : \quad \begin{array}{l} 6x_1 + 4x_2 - 10 + \lambda = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 10 + \lambda = 0 \end{array}$$

$$\nabla_\lambda L : \quad x_1 + x_2 - 3 = 0$$

$$x_1 = 3 - x_2 \Rightarrow \begin{cases} 18 - 6x_2 + 4x_2 - 10 + \lambda = -2x_2 + 8 + \lambda = 0 \\ 12 - 4x_2 + x_2 - 10 + \lambda = -3x_2 + 2 + \lambda = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{x_2 = -6}$$

$$\boxed{\lambda = -8 + 2\times -6 = -20} \quad , \quad \boxed{x_1 = 3 + 6 = 9} \Rightarrow \boxed{J^* = 15}$$

$$H(x) = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$ کهادها $|6| > 0$, $6 - 16 = -10 < 0$ $\rightarrow$ PSD فضای تانژانت

$$\nabla h(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad d^T \nabla h(x) = d_1 + d_2 = 0 \rightarrow d_1 = -d_2$$

$$d^T H d = [d_1 \;\; -d_1] \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ -d_1 \end{bmatrix} = -d_1^2 \leq 0 \rightarrow$$ نقطه به دست آمده ماکسیمم است

(5

الف) ابتدا پکیج pyomo را نصب میکنیم. سپس مدل را تعریف میکنیم و متغیر ها و شرط ها را به شکل زیر به مدل میدهیم. هدف ماکسیمم کردن تابع هدف است و تابع هدف غیر خطی است. همچنین متغیر ها میتواند مقادیر بزرگتر از صفر را اتخاذ کند.

```python
import pyomo.environ as pyo
from pyomo.environ import *
from pyomo.opt import SolverFactory
import sys
import numpy as np

solverpath_folder = "D:\\Ipopt\\bin"
solverpath_exe = "D:\\Ipopt\\bin\\ipopt.exe"

sys.path.append(solverpath_folder)

model = pyo.ConcreteModel()

model.x1 = pyo.Var(bounds=(0,np.inf))
model.x2 = pyo.Var(bounds=(0,np.inf))

x1 = model.x1
x2 = model.x2

model.c = pyo.Constraint(expr= 2*x1+x2<=3)

model.obj = pyo.Objective(expr= log(x1+1)+x2, sense=maximize)

opt = SolverFactory('ipopt', executable=solverpath_exe, validate=False)
opt.solve(model)

model.display()
```

نتایج به شکل زیر به دست می آید که x1=0 و x2=3 و J=3 خواهد بود.

```
Variables:
  x1 : Size=1, Index=None
      Key  : Lower : Value : Upper : Fixed : Stale : Domain
      None :     0 :   0.0 :  None : False : False :  Reals
  x2 : Size=1, Index=None
      Key  : Lower : Value            : Upper : Fixed : Stale : Domain
      None :     0 : 3.00000004244768 :  None : False : False :  Reals

Objectives:
  obj : Size=1, Index=None, Active=True
      Key  : Active : Value
      None :   True : 3.00000004244768

Constraints:
  c : Size=1
      Key  : Lower : Body             : Upper
      None :  None : 3.00000004244768 :   3.0
```

ب) قبل از اینکه به صورت دقیق بررسی کنیم، میبینیم که تابع هدف یک تابع با افزایش x1 و x2 همواره افزایش می یابد و قیدی که روی آن است سبب قطع شدن این افزایش می شود و از طرفی تابع هدف نهایتا روی همین قید متوقف می شود و ماکسیمم را پیدا میکند بنابراین این نقطه بهینه، نقطه بهینه سراسری تابع هدف در ناحیه تعریف شده است.

حال میخواهیم به صورت دقیق آن را بررسی کنیم. باید هسین را برای آن تعریف کنیم.

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{(x_1+1)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} => \left|\frac{1}{(x_1+1)^2}\right| > 0\,, \begin{vmatrix} \frac{1}{(x_1+1)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow PSD$$

باید از روش فضای تاژانت تغییر فضا دهیم تا بهتر نتیجه گیری کنیم.

$$g(x) = 2x_1 + x_2 - 3 \;\; \rightarrow \;\; c^T \nabla g = [c1 \quad c2] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2c_1 + c_2 = 0 \rightarrow c_2 = -2c_1$$

$$d\epsilon \begin{bmatrix} d_1 \\ -2d_1 \end{bmatrix} \;\; \rightarrow \;\; d^T H d = [d_1 \quad -2d_1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ -2d_1 \end{bmatrix} = d_1^2 > 0$$

با توجه به اینکه پاسخ مثبت شد، اثبات می شود که نقطه مد نظر بهینه سراسری است.