	UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR MODALIDAD A DISTANCIA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA LICENCIATURA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA. ASIGNATURA: VARIABLE COMPLEJA	

Unidad 1: Topología sobre $\mathbb{C}$

Objetivo General:

Estudiar los principios y definiciones básicas de la teoría de números complejos y su estructura como espacio topológico.

Objetivos Específicos:

1. Conocer las propiedades básicas de números complejos.
2. Comprender la aplicación geométrica de los números complejos.
3. Describir la topología del conjunto de números complejos.
4. Entender las definiciones de conjuntos conexos y compactos.

Conocimientos Previos:

1. Conoce la definición de números complejos.
2. Identifica la definición de una topología.
3. Recuerda la estructura algebraica de un campo.
4. Álgebra Lineal.
5. Calculo Diferencial e Integral.

CONTENIDOS:

Índice

Resumen de la unidad

En esta sección se aborda el concepto de números complejos, las propiedades más relevantes resaltando la aplicaciones geométricas de las principales definiciones y resultados. Se aborda el estudio del conjunto de los números complejos, el cual se denota por $\mathbb{C}$ desde su estructura algebraica como campo, desde su descripción topológica definiendo abiertos, cerrados además de estudiar algunas propiedades de los conjuntos conexos y compactos de este espacio topológico. Es importante aclarar que las pruebas de los resultados importantes se dejará como lectura adicional al lector dado que el objetivo es analizar su aplicación mediante ejemplos y ejercicios al final de la unidad.

1. Introducción a los números complejos

El desarrollo de la matemática está íntimamente relacionado con el estudio del número. Los números complejos ($\mathbb{C}$) se empezaron a utilizar para obtener la solución de ecuaciones algebraicas y finaliza en ese sentido con la demostración del teorema fundamental del álgebra. Una definición no tan clara del conjunto de los números complejos es el campo más pequeño que contiene al campo de los números reales; es decir si existe un campo $\mathbb{F} \neq \mathbb{C}$ que contiene a $\mathbb{R}$ entonces $\mathbb{C} \subset \mathbb{F}$.

La construcción de este concepto se realiza definiéndolo como el campo que contiene todas las soluciones de las ecuaciones cuadráticas con coeficientes reales, por ejemplo $x^2+1=0$ que no tiene soluciones reales dado que $x = \pm\sqrt{-1} := \pm i$.

Definición 1.1. *El sistema de los números complejos, denotado por $\mathbb{C}$, es el conjunto $\mathbf{R}^2$ junto con las reglas usuales de la adición de vectores y la multiplicación escalar por un número real, a saber:*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$a(x, y) = (ax, ay)$$

y con la operación de multiplicación compleja, definida como

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

El lugar de representar un número complejo como $w = (x, y)$, lo representaremos como $w = x+iy$ donde $i = \sqrt{-1}$, además llamaremos a x la parte real $Re(w)$ y a y como la parte imaginaria $Im(y)$, ver Figura 1.

Puesto que la multiplicación de números reales es asociativa, conmutativa y distributiva, la multiplicación de números complejos también lo es; es decir, para todos los números complejos z, w, s, tenemos $(zw)s = z(ws)$, $zw = wz$, y $z(w + s) = zw + zs$.

Observación. Los números complejos son una extensión de los números reales, ya que si x es real, podemos también escribir x en lugar de $x + 0i = (x, 0)$. En otras palabras, los reales $\mathbb{R}$ son identificados con el eje x en $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$; vemos entonces que los números reales son aquellos números complejos $x + yi$ para los cuales $y = 0$. Usualmente decimos que $\mathbb{C}$ es una extensión del campo base $\mathbb{R}$.

Por otra parte al igual que el conjunto de los números reales es un campo también lo es $\mathbb{C}$ por lo que vamos a describir la construcción de los inversos multiplicativos. Sea $x + iy \neq 0 \in \mathbb{C}$, necesitamos encontrar otro número real $z' = x' + iy'$, tal que $z \cdot z' = 1$. Esta ecuación impone condiciones que nos permitirán calcular $x\prime$ y y'.

Lo primero que hacemos es calcular el producto de $zz' = (xx' - yy') + (xy' + x'y)\, i$ a igualando a $1 + 0i$ de estos obtenemos dos ecuaciones lineales $xx' - yy' = 1$ y $xy' + x'y = 0$, que pueden ser resueltas para x' y y' haciendo $x' = x/\left(x^2 + y^2\right)$ y $y' = -y/\left(x^2 + y^2\right)$, ya que $x^2 + y^2 \neq 0$, luego para $z = x + iy \neq 0$, podemos establecer $z' := z^{-1}$

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{iy}{x^2 + y^2}$$

En la siguiente figura se puede observar los números complejos $z = a + bi$, $w = x + iy$, $2z$ y $z + w$, representados en el plano complejo, su comportamiento es similar al de vectores en el plano $\mathbb{R}^2$.

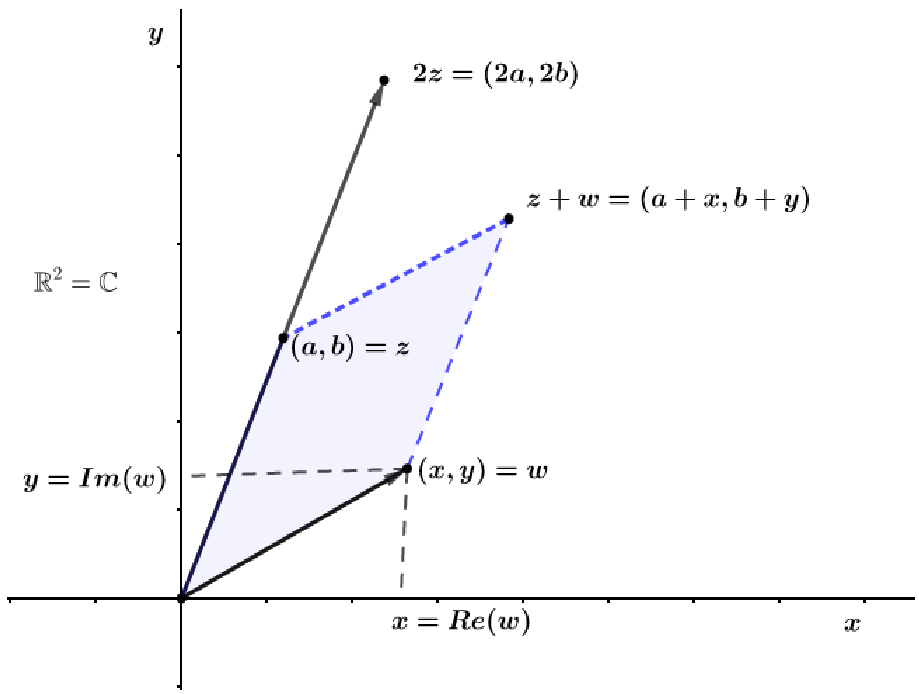

Figura 1: Geometría de los números complejos.

Si z y w son números complejos, con $w \neq 0$, entonces el símbolo z/w significa zw^{-1}; llamamos a z/w el cociente de z por w. Por ende, $z^{-1} = 1/z$.

El primer teorema hace referencia a la estructura algebraica que tiene $\mathbb{C}$, la demostración de este resultado puede consultarla en el libro [1] presentado en la bibliografía al final de este documento.

Teorema 1.1. *Los números complejos $\mathbb{C}$ forman un campo.*

Recordatorio: Un *campo* es una estructura algebraica que consta se las siguientes propiedades:

- Reglas de la adición:
  1. $z + w = w + z$
  2. $z + (w + s) = (z + w) + s$
  3. $z + 0 = z$
  4. $z + (-z) = 0$
- Reglas de la multiplicación:
  1. $zw = wz$
  2. $(zw)s = z(ws)$
  3. $1z = z$
  4. $z\left(z^{-1}\right) = 1$ para $z \neq 0$
- Ley distributiva: $z(w + s) = zw + zs$

Para la demostración del teorema deberá asumir que $z, w, s \in \mathbb{C}$.

1.1. Propiedades de números complejos

Una de las razones para usar los números complejos es la de permitirnos sacar raíces cuadradas de números reales negativos y con este campo de números complejos esto lo podemos realizar siempre. Veamos la siguiente proposición:

Proposición 1.1. *Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces existe un $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^2 = z$. (Nótese que $-w$ también satisface esta ecuación.)*

Demostración.
Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Queremos encontrar $w = x + iy$ tal que

$$a + bi = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)i$$

así que debemos resolver simultáneamente $x^2 - y^2 = a$ y $2xy = b$ por la unicidad de los números complejos($a + ib = c + id$ si y sólo sí $a = c$ y $b = d$). La existencia de las soluciones es geométricamente clara a partir del dibujo de las gráficas de las dos ecuaciones. Éstas se muestran en la figura 2, para el caso en que ambas,a y b, son positivos.

A partir de la gráfica es claro que debe haber dos soluciones que son negativas una con respecto de la otra, éstas serán obtenidas algebraicamente en el siguiente párrafo. La figura es la siguiente:

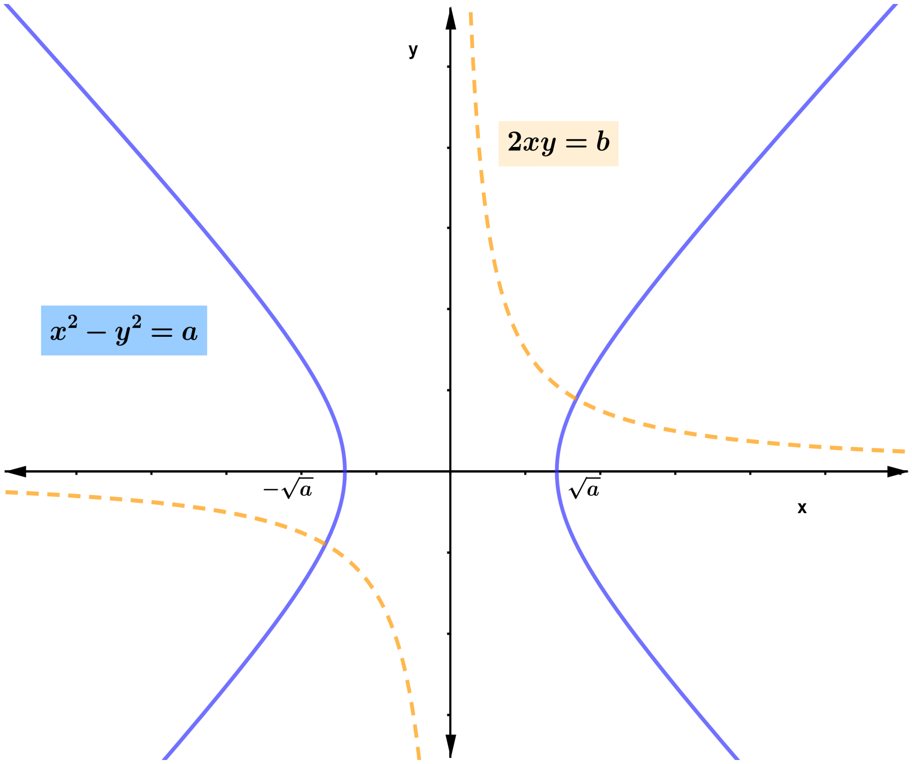

Figura 2: Geometría de los números complejos.

Sabemos que $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = a^2+b^2$. Por tanto, $x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$ y por ende $x^2 = \left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)/2$ y $y^2 = \left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)/2$. Si hacemos

$$\alpha = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \quad \text{y } \beta = \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

donde el símbolo de raíz cuadrada denota la raíz cuadrada positiva de números reales positivos, entonces, en el caso que b es positivo, tenemos que $x = \alpha$ y $y = \beta$, o $x = -\alpha$ y $y = -\beta$; en el caso en que b es negativo, tenemos que $x = \alpha$ y $y = -\beta$, o $x = -\alpha$ y $y = \beta$, Concluimos que la ecuación $w^2 = z$ tiene soluciones $\pm(\alpha + \mu\beta i)$, donde $\mu = 1$ si $b \geq 0$, y $\mu = -1$ si $b < 0$.

De las expresiones para a y 13 podemos concluir tres cosas:

- Las raíces cuadradas de un número complejo son reales si y sólo si el número complejo es real y positivo;
- Las raíces cuadradas de un número complejo son puramente imaginarias si y sólo si el número complejo es real y negativo.
- Las dos raíces cuadradas de un número coinciden si y sólo si el número complejo es cero.

Definición 1.2. *Si x y y son números reales, y z es el número complejo $x+y$, entonces al número complejo $x-y$ a se le denomina el conjugado de z, y se denota $\bar{z}=x-iy$.*

Ejemplo 1. 1. Si $z=3+5z$, entonces $\bar{z}=3-5z, \mathrm{Re}(z)=3$, y $\mathrm{Im}(z)=5$.

2. Si $z=8-13z$, entonces $\bar{z}=8+13z, \mathrm{Re}(z)=8$, y $\mathrm{Im}(z)=-13$.

La conjugación por un número complejo, nos permite definir una función de variable compleja

$$\rho:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$

como $\rho(z)=\bar{z}$.

Al identificar $\mathbb{C}$ con el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ podemos interpretar esta función como la reflexión con respecto al eje x. Mientras que $\mathrm{Re}(z)$ corresponde a la proyección ortogonal de z con respecto al eje x y $\mathrm{Im}(z)$ corresponde a la proyección ortogonal con respecto al eje y.

La siguiente figura modela geométricamente la conjugación del complejo z:

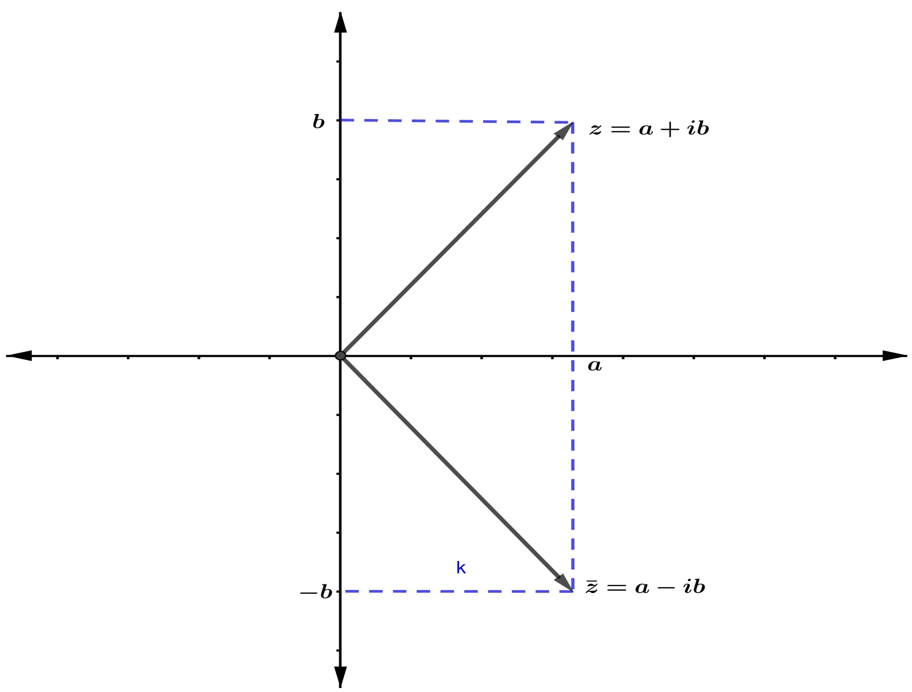

Figura 3: Reflexión de la función ρ sobre el eje x.

La Proposición 1.2 establece algunas de la propiedades de esta definición, desde el punto de vista algebraico, una sugerencia de la demostración utilizar el método directo y las operaciones definidas de producto suma y cociente.

Proposición 1.2. *Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces se tienen las siguientes proposición respecto al conjugado de z:*

1) $\overline{z+z'} = \bar{z} + \overline{z'}$

2) $\overline{\mathrm{zz'}} = \overline{\mathrm{z}}\overline{\mathrm{z'}}$

3) $\overline{\mathrm{z/z'}} = \overline{\mathrm{z/z'}}$ *para* $\mathrm{z'} \neq 0$

4) $z = \bar{z}$ *si y sólo si* z *es real.*

5) $\operatorname{Re} z = (z+\bar{z})/2e \operatorname{Im} z = (z-\bar{z})/2i$

6) $\bar{\bar{z}} = \mathbf{z}$

Definición 1.3. *Si z es un número complejo, el módulo de z, que denotaremos $|z|$, se define como la raíz cuadrada no negativa de $z \cdot \bar{z}$, esto es, $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$*

Note que es la misma definición de módulo o de norma que se adopta a $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, de manera que dentro de la raíz cuadrada en la definición esta el producto punto usual.

Ejemplo 2. A continuación ejemplos de cálculos de módulos en complejos:

1. Si $z = 8 - 15i$ entonces $|z| = \sqrt{289} = 17$.
2. Si $z = -24 + 7i$ entonces $|z| = \sqrt{625} = 25$.
3. Si $z = -5 - 12i$ entonces $|z| = \sqrt{169} = 13$.
4. Si $z = 1 + i$ entonces $|z| = \sqrt{2}$.

Cuando $z = x + 0i$ es un número real, $\bar{z} = z = x$, así $z \cdot \bar{z} = x^2 \geq 0$, por lo que $\sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2} = |x|$. Por tanto, el módulo de un número real coincide con su valor absoluto x.
La siguiente proposición estable algunas de las propiedades a partir de la definición.

Proposición 1.3. *Sea $z \in \mathbb{C}$ cualquier número complejo. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $|\mathrm{zz'}| = |z| \cdot |z'|$.

2. Si $\mathrm{z'} \neq 0$, *entonces* $\mathrm{k/z'}| = |z|/|z'\,|$.

3. $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z| y - |z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|$; *esto es,* $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ *y* $|\operatorname{Im} z| \leq |z\,|$.

4. $|\bar{z}| = |z|$.

5. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

6. $|z - z'| \geq ||z| - |z'||$.

Observe que en la Proposición 1.3 el punto (5) es la desigualdad triangular para el caso de vectores en $\mathbb{R}^2$. Observar la figura 4 en la que se describe el aspecto geométrico.

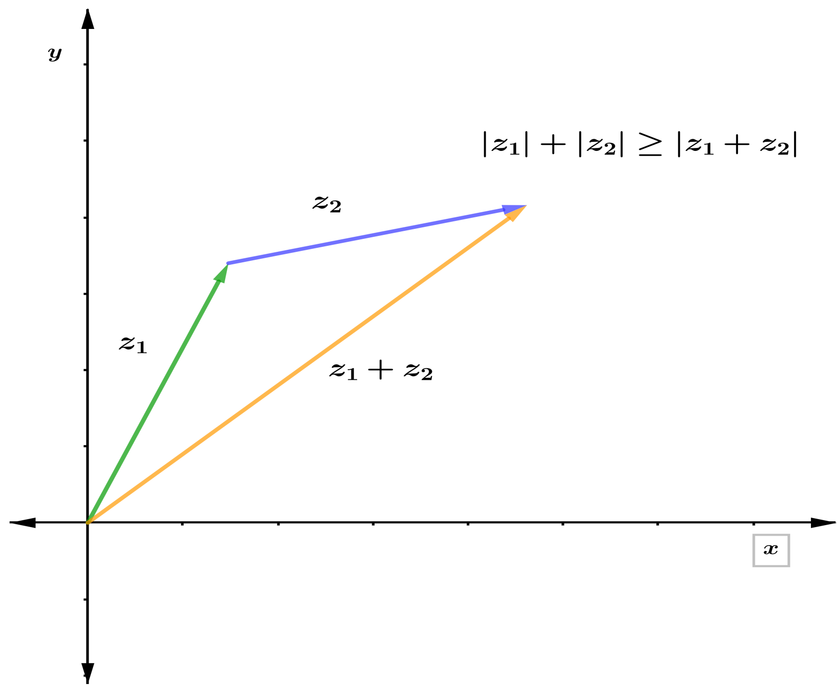

Figura 4: Desigualdad triangular.

Ejemplo 3. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$. Demostrar que

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right| = 1$$

para cualesquiera números complejos a y b.

Demostración.
Puesto que $|z| = 1$, tenemos que $z = \bar{z}^{-1}$. Por lo tanto

$$\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} = \frac{az+b}{\bar{b}+\bar{a}\bar{z}} \cdot \frac{1}{z}.$$

Por las propiedades del valor absoluto y puesto que Iz I $= 1$,

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right| = \left|\frac{az+b}{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}\right| \cdot \frac{1}{|z|} = 1$$

ya que $|az+b| = \overline{|az+b|} = \overline{|\ az}+\bar{b}\ |$.

Ejemplo 4. Muestre que el máximo del valor absoluto de z$^2+1$ en el disco Iz I ≤ 1 es 2 . Solución. Por la desigualdad del triángulo. $|z^2+11 \leq| z^2|+1 \leq |z|^2+1 \leq 1^2+1 = 2$ ya que $|z| \leq 1$, así $|z^2+1|$ no excede a 2 en el disco. Puesto que el valor 2 se alcanza en $z = 1$, entonces el máximo es 2 .

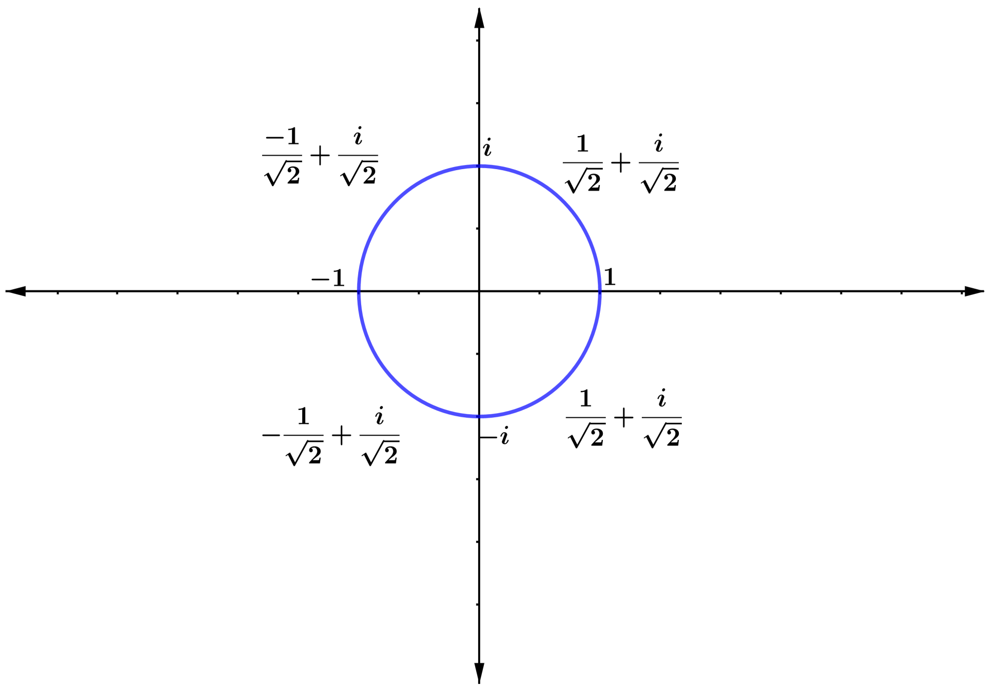

Figura 5: Interpretación geométrica Ejemplo 3.

Ejemplo 5. Suponga que u $=$ a $+ ib$ y v $=$ c $+ id$ son números complejos fijos y que μ es un número real positivo. Demuestre que la ecuación.

$$\left|\frac{z-u}{z-v}\right|^2 = \mu$$

describe un circulo o una linea recta en el plano complejo.

Solución.
Si hacemos $z = x + iy$, la ecuación resulta

$$\mu = \left|\frac{(x-a)+i(y-b)}{(x-c)+i(y-d)}\right|^2 = \frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{(x-c)^2+(y-d)^2}$$

Después de hacer el producto cruzado, desarrollar y luego agrupar los términos en x y y en el lado izquierdo, obtenemos

$$(1-\mu)x^2 + (1-\mu)y^2 - 2(a-\mu c)x - 2(b-\mu d)y = \mu\left(c^2+d^2\right) - \left(a^2+b^2\right)$$

Si $\mu = 1$, ésta es la ecuación de una línea. En efecto, es la línea perpendicular que biseca el segmento entre u y v. Si $\mu \neq 1$, al completar cuadrados obtenemos

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{a-\mu c}{1-\mu}\right)^2 + \left(y - \frac{b-\mu d}{1-\mu}\right)^2 &= \frac{\mu\left(c^2+d^2\right)-\left(a^2+b^2\right)}{1-\mu} + \left(\frac{a-\mu c}{1-\mu}\right)^2 + \left(\frac{b-\mu d}{1-\mu}\right)^2 \\ &= \frac{\mu}{(1-\mu)^2}\left[(a-c)^2+(b-d)^2\right]\end{aligned}$$

que es la ecuación de un círculo con centro en $((a-\mu c)/(1-\mu), (b-\mu d)/(1-\mu)$ y de radio $\sqrt{\mu}/11-\mu\ |)\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$.

1.2. Forma polar de los números complejos

Si P es un punto en el plano complejo correspondiente al complejo $z = x + iy$. Entonces observando la figura 6 podemos establecer las relaciones:

$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\,\text{sen}(\theta)$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ y θ llamado el argumento del complejo z denotado por $arg(z)$ es el ángulo formado por el segmento OP y la el eje x positivo. De estas ecuaciones se deduce que

$$z = x + iy = r(\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta))$$

la cual es llamada la forma polar del número complejo z. Al módulo de $z(\ r)$ y $arg(z)$ (θ) se les llama coordenadas polares.

Teorema 1.2 (Fórmula de Moivre)**.** *Sean los números complejos $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\,\text{sen}(\theta_1))$ y $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_2))$ se tienen los siguientes resultados:*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)) \tag{1}$$

y

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)). \tag{2}$$

De la ecuación (1) podemos generalizar el resultado para el producto de números complejos $z_1 z_2 ... z_n$, para escribir la fórmula

$$z_1 z_2 ... z_n = r_1 r_2 \cdots r_n(\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)) \tag{3}$$

y si de (3) hacemos $z = z_1 = z_2 = z_3 = ... = z_n$ obtenemos la fórmula

$$z^n = [r(\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta))]^n = r^n(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)) \tag{4}$$

a la que se suele llamar como Teorema de Moivre.

A continuación se le presenta un ejemplo de una potencia cúbica de un número complejo con el objetivo de escribirlo en la forma $a + ib$.

Ejemplo 6. Use el teorema de De Moivre para determinar y expresar en la forma $a + bi$

$$\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3$$

Solución.
Según el teorema de De Moivre,

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

En nuestro caso tenemos que, $r = 1$, $\theta = \frac{\pi}{6}$, $n = 3$ y aplicando el teorema,

$$
\begin{aligned}
\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3 =& 1^3\left(\cos 3\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin 3\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\\
&=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=(0+i)=i
\end{aligned}
$$

Ejemplo 7. Si $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ y $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$, usando las formas trigonométricas podemos determinar $z_1 z_2$. La representación geométrica de los números se muestra en la figura 6. Revise el cálculo del módulo, r, y del argumento, θ, en cada caso.

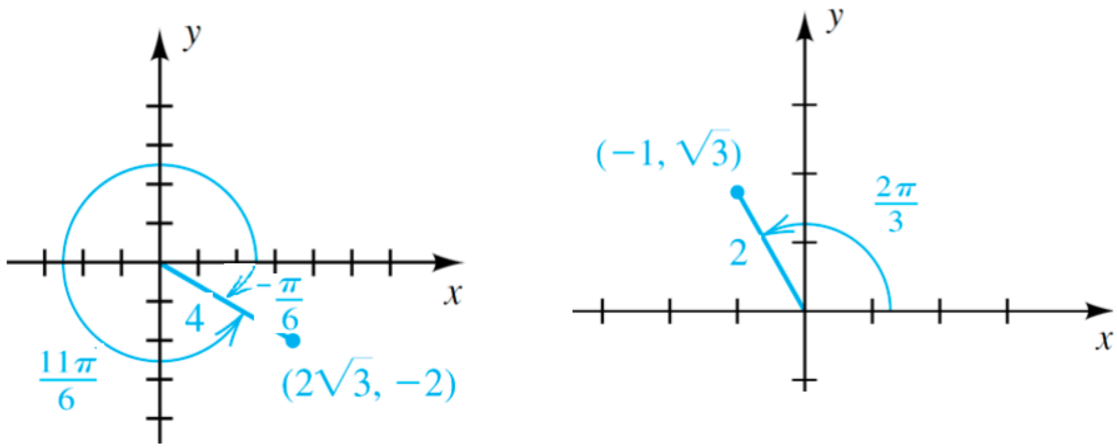

Figura 6: Coordenada polares de z_1 y z_2 respectivamente.

Usando $r_1 = 4$ y $\theta_1 = -\pi/6$, entonces z_1, en la forma trigonométrica es $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$ y $r_2 = 2$, $\theta_2 = 2\pi/3$, entonces z_2, en la forma trigonométrica es $z_2 = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Utilizando la ecuación (1) obtenemos que

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= 4\cdot 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)\right]\\
&= 8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\\
&= 8(0+i) = 8i.
\end{aligned}
$$

1.3. Raíces de números complejos

Un número w es llamado una raíz n-ésima de un número complejo z si $w^n = z$, y escribimos $w = z^{1/n}$. Del teorema de De Moivre, podemos demostrar que si n es un entero positivo,

$$
\begin{aligned}
z^{1/n} &= \{r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)\}^{1/n}\\
&= \left\{r^{1/n}\cdot\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right\} \qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1
\end{aligned}
$$

Cuando $z = 1$, diremos que w es una raíz n-ésima de la unidad si $w^n = 1$. A continuación se muestra un ejemplo relacionado y al final de esta sección presentamos ejercicios similares para su práctica y mejor comprensión de estos resultados.

Ejemplo 8. Hallar todas las raíces sextas de la unidad.
Solución.
Tomamos la representación en forma polar de 1, la cual viene dada por

$$1 = 1 \cdot (\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ)$$

luego hallamos las raíces sextas por medio de la ecuación descrita anteriormente

$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1}\left(\cos\left(\frac{0^\circ + 2k\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0^\circ + 2k\pi}{6}\right)\right)$$

con k $= 0, 1, 2, 3, 4,$ y5 Estos valores de k nos dan las seis raíces

$$\begin{array}{ll}
w_1 = 1\,(\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ) & k = 0 \\
w_2 = 1\,(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) & k = 1 \\
w_3 = 1\,(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) & k = 2 \\
w_4 = 1\,(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ) & k = 3 \\
w_5 = 1\,(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) & k = 4 \\
w_6 = 1\,(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ) & k = 5
\end{array}$$

Si las graficamos en el plano complejo, vemos que ellas ocupan los vértices de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de radio 1. Observe la siguiente figura:

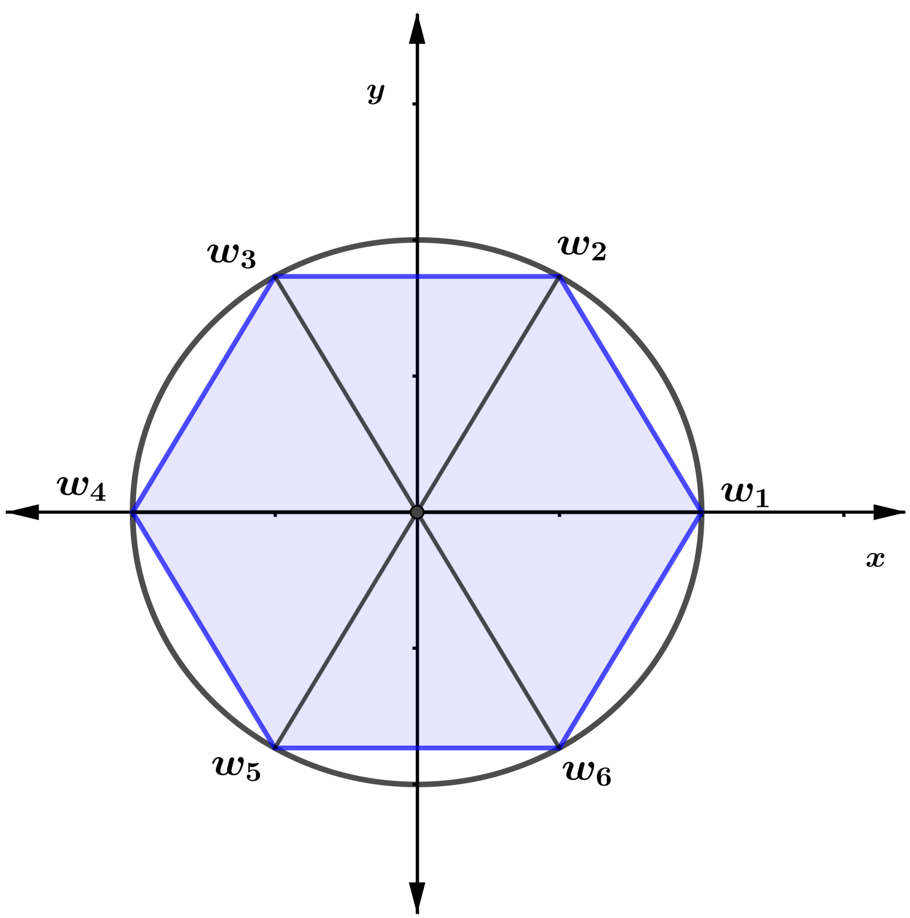

Figura 7: Raíces sextas de la unidad en el plano complejo.

2. Conjuntos abiertos, cerrados sobre $\mathbb{C}$

Cualquier colección de puntos en el plano complejo se denomina un conjunto (bidimen sional) de puntos, y cada punto es un miembro o elemento del conjunto. Las definiciones fundamentales siguientes son dadas aquí por referencia.

Definición 2.1. *Una vecindad de radio delta, o δ, de un punto z_0 es el conjunto de todos los puntos z tales que $|z - z_0| < \delta$ donde δ es cualquier número positivo dado. Una vecindad reducida δ de z_0 es una vecindad de z_0 en la que el punto z_0 se omite, es decir, $0 < |z - z_0| < \delta$*

Definición 2.2. *Un punto z_0 se llama un punto limite o punto de acumulación de un conjunto S si cada vecindad δ reducida de z_0 contiene puntos de S.*

Puesto que δ puede ser cualquier número positivo, se deduce que S debe tener infinitos puntos. Obsérvese que z_0 puede pertenecer o no al conjunto S.

Definición 2.3. *Un conjunto S se dice que es cerrado si cada punto limite de S pertenece a S, esto es, si S contiene todos sus puntos límites. Por ejemplo, el conjunto de todos los z tales que $|z| \leqq 1$ es un conjunto cerrado.*

Algunas propiedades son

- Si $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una colección de conjuntos cerrados, entonces $\cap_{\alpha \in I} F_\alpha$ es un conjunto cerrado.
- Si F_1, F_2 son cerrados, entonces $F_1 \cap F_2$ es cerrado.

Ejemplo 9. Los siguiente conjuntos son cerrados

- $\mathbb{C}$ y $\emptyset$ son cerrados.
- Para todo $z \in \mathbb{C}, r > 0$, se tiene que $\bar{D}(z, r)$ es cerrado.
- La circunferencia unitaria $\{z \in \mathbb{C} \text{tal que} |z| = 1\}$ es cerrada.

Definición 2.4. *Un conjunto S se dice que es acotado si podemos encontrar una constante M tal que $|z| < M$ para cada punto z en S. Un conjunto ilimitado es un conjunto que no es acotado. Un conjunto que es acotado y cerrado se llama, algunas veces, compacto.*

Definición 2.5. *Un punto z_0 se llama un punto interior de un conjunto S si podemos encontrar una vecindad de z_0 cuyos puntos pertenecen todos a S. Si cada vecindad o de z_0 contiene puntos pertenecientes a S y también puntos no pertenecientes a S, entonces z_0 se llama un punto frontera. Si un punto no es punto interior ni punto frontera de un conjunto S, es un punto exterior de S.*

Definición 2.6. *Un conjunto abierto es un conjunto que consiste solamente de puntos interiores. Por ejemplo, el conjunto de puntos z tales que $|z| < 1$ es un conjunto abierto.*

Algunas de sus propiedades son

- Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una colección de conjuntos abiertos, entonces $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha$ es un conjunto abierto.

- Si U_1, U_2 son abiertos, entonces $U_1 \cap U_2$ es abierto.

Ejemplo 10. Los siguientes conjuntos son abiertos

- $\mathbb{C}$ es abierto.
- $\emptyset$ es abierto.
- Para todo $z \in \mathbb{C}, r > 0$, se tiene que $D(z, r)$ es abierto.

Definición 2.7. *Un conjunto abierto S es conexo si cualquier par de puntos del conjunto pueden ser unidos por un camino formado por segmentos de recta (esto es, un camino poligonal) contenidos en S.*

Definición 2.8. *Un conjunto abierto conexo es llamado una región abierta o dominio.*

Definición 2.9. *Si a un conjunto S agregamos todos los puntos límite de S, el nuevo conjunto se llama la clausura de S y es un conjunto cerrado.*

Definición 2.10. *La clausura de una región abierta o dominio se llama una región cerrada.*

Definición 2.11. *Si a una región abierta o dominio agregamos alguno, todos o ninguno de sus puntos límites, obtenemos un conjunto llamado una región. Si se agregan todos los puntos límites, la región está cerrada; si ninguno es agregado, la región está abierta. En este libro, siempre que usamos la palabra región sin especificarla, queremos significar región abierta o dominio.*

Ahora vamos a describir la topología que podemos asignar a $\mathbb{C}$ heredada como espacio métrico.

3. Topología sobre $\mathbb{C}$

El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos y el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ no sólo se identifican como conjuntos, sino también como espacios métricos. Más concretamente, $\mathbb{C}$ es un espacio métrico con la distancia $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_0^+$ definida por

$$d(z, w) = |w - z| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Decimos simplemente que d es la distancia de $\mathbb{C}$, pues nunca consideramos otra. Cualquier noción métrica que usemos en $\mathbb{C}$, como la complitud, la acotación o la continuidad uniforme, se refiere siempre a esta distancia. Recordando que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, al restringir d a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ obtenemos la distancia usual de $\mathbb{R}$, luego vemos siempre a $\mathbb{R}$ como subespacio métrico de $\mathbb{C}$.

Las bolas abiertas o cerradas en $\mathbb{C}$ suelen llamarse discos. Más concretamente, para $a \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$, el disco abierto y el disco cerrado, de centro a y radio r, vienen dados por

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\} \quad \text{y} \quad \bar{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leqslant r\}$$

Naturalmente, la topología de $\mathbb{C}$ es la generada por su distancia, y es también la única topología que consideramos en $\mathbb{C}$. Cualquier noción topológica que usemos en $\mathbb{C}$, como la continuidad, la compacidad, la conexión y tantas otras, se refiere siempre a dicha topología. Por supuesto, la topología de $\mathbb{C}$ induce en $\mathbb{R}$ su topología usual.

Los abiertos de $\mathbb{C}$ son las uniones (arbitrarias) de discos abiertos. Equivalentemente, un conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto cuando coincide con su interior:

$$\text{abierto} \iff \Omega = \Omega^\circ \iff \forall z \in \Omega \exists r \in \mathbb{R}^+ : D(z,r) \subset \Omega$$

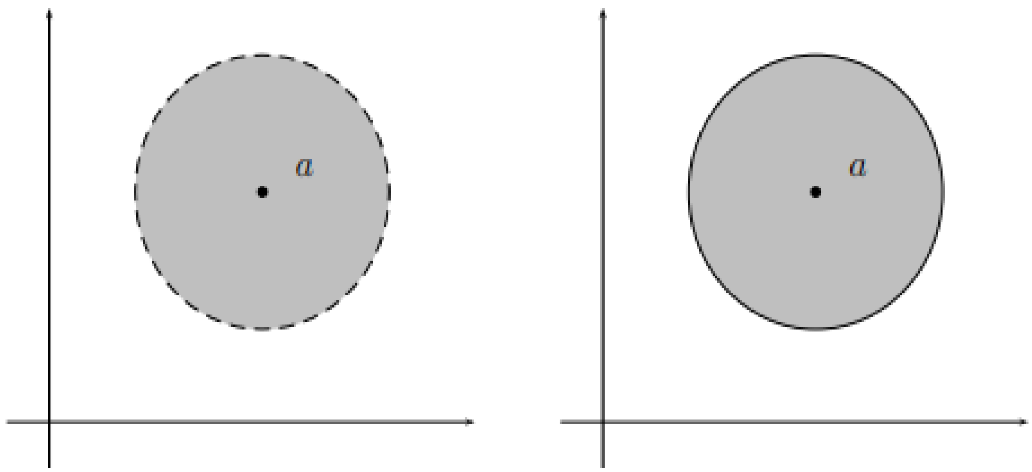

Figura 8: Disco abierto y cerrado

3.1. Sucesiones de números complejos

Como en cualquier espacio métrico, la topología de $\mathbb{C}$ puede caracterizarse mediante la convergencia de sucesiones, noción que ahora vamos a repasar. Si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos y $z \in \mathbb{C}$, tenemos

$$\{z_n\} \to z \iff [\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon]$$

lo que equivale a $\{|z_n - z|\} \to 0$. En particular $\{z_n\} \to 0$ si, y sólo si, $\{|z_n|\} \to 0$ Sabemos que, para un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ y un punto $z \in \mathbb{C}$, se tiene $z \in \bar{A}$ si, y sólo si, existe una sucesión de puntos de A que converge a z. Por tanto, A es cerrado si, y sólo si, contiene a los límites de todas las sucesiones de puntos de A que sean convergentes:

$$A \text{ cerrado} \iff A = \bar{A} \iff [z_n \in A \forall n \in \mathbb{N}, \{z_n\} \to z \in \mathbb{C} \Rightarrow z \in A]$$

Queda así caracterizada la topología de $\mathbb{C}$ mediante la convergencia de sucesiones. La convergencia de una sucesión de números complejos equivale a la de las sucesiones de sus partes reales e imaginarias,

$$\{z_n\} \to z \quad \iff \quad \{\operatorname{Re} z_n\} \to \operatorname{Re} z \quad \text{y} \quad \{\operatorname{Im} z_n\} \to \operatorname{Im} z$$

equivalencia que se comprueba directamente usando que

$$mx\{|\operatorname{Re} w|, |\operatorname{Im} w|\} \leqslant |w| \leqslant |\operatorname{Re} w| + |\operatorname{Im} w| \quad \forall w \in \mathbb{C}$$

Estas desigualdades también nos dicen que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es de Cauchy si, y sólo si, tanto $\{\operatorname{Re} z_n\}$ como $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son sucesiones de Cauchy de números reales. Del teorema de complitud de $\mathbb{R}$ deducimos la principal propiedad de $\mathbb{C}$ como espacio métrico. Por lo que $\mathbb{C}$ es un espacio métrico completo. Por tanto, un subespacio métrico de $\mathbb{C}$ es completo si, y sólo si, es un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$.

3.2. Relación entre conjunto acotado y compacto

Claramente, un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ está acotado, si y solo si, A está acotado en módulo:

$$A \text{ acotado } \iff \exists M \in \mathbb{R} : |z| \leqslant M \quad \forall z \in A$$

Recordamos también que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ está acotada cuando lo está el conjunto de sus términos:

$$\{z_n\} \text{ acotada } \iff \exists M \in \mathbb{R} : |z_n| \leqslant M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Toda sucesión convergente de números complejos está acotada: si $\{z_n\} \to z \in \mathbb{C}$, se tiene $|z_n| \leqslant |z_n - z| + |z|$ para todo $n \in \mathbb{N}, y$ basta usar que $\{|z_n - z|\} \to 0$.

De las desigualdades (2) deducimos que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ está acotada si, y sólo si, las sucesiones de números reales $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ están acotadas.

Esto permite probar fácilmente para C el teorema de Bolzano-Weierstrass, que de hecho es válido en $\mathbb{R}^N$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Así pues,

Teorema 3.1. *Toda sucesión acotada de números complejos admite una sucesión parcial convergente.*

Recordemos ahora que un subconjunto K de un espacio métrico E es compacto si, y sólo si, toda sucesión de puntos de K admite una sucesión parcial que converge a un punto de K. Esto implica siempre que K está acotado y es un subconjunto cerrado de E. En el caso $E = \mathbb{C}$, como ocurre en general en $\mathbb{R}^N$, usando el teorema de Bolzano-Weierstrass, obtenemos fácilmente el recíproco. Por tanto:

Teorema 3.2. *Un subconjunto de $\mathbb{C}$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

En particular los discos cerrados son compactos, y obtenemos otra propiedad topológica clave de $\mathbb{C}$: es un espacio topológico localmente compacto, es decir, todo punto de C tiene un entorno compacto.

En este primer acercamiento hemos definido los conjuntos abiertos, cerrados y compactos, sin embargo para profundizar sobre la topología de $\mathbb{C}$ es necesario definir aplicaciones y funciones complejas.

Lo felicitamos por su esmero, dedicación, y compromiso, facilitamos a continuación ejercicios para consolidar los conceptos brindados.

4. Ejercicios

Los siguientes ejercicios son referentes a los contenidos estudiados en este primer acercamiento con el curso de variable compleja.

Ejercicio 4.1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $z^6 + 8 = 0$

b) $z^3 - 4 = 0$

c) $z^5 - 2 = 0$

d) $z^4 + i = 0$

Ejercicio 4.2.

Ejercicio 4.3.

Ejercicio 4.4. ¿Cuál es el conjugado complejo de $(3 + 8i)^4/(1 + i)^{10}$?

Ejercicio 4.5. ¿Cuál es el conjugado complejo de $(8 - 2i)^{10}/(4 + 6i)^5$?

Ejercicio 4.6. Exprese $\cos 5x$ y sen $5x$ en términos de $\cos x$ y sen x.

Ejercicio 4.7. Exprese $\cos 6x$ y sen $6x$ en términos de $\cos x$ y sen x.

Ejercicio 4.8. Encuentre el módulo de $\{i(2 + 3i)(5 - 2i)]/(-2 - i)$

Ejercicio 4.9. Encuentre el módulo de $(2 - 3i)^2/(8 + 6i)^2$

Ejercicio 4.10. Sea w una raíz n -ésima de la unidad, $w \neq 1$. Demuestre que

$$1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0.$$

Ejercicio 4.11. Demuestre que las raíces de un polinomio con coeficientes reales ocurren en parejas conjugadas.

Ejercicio 4.12. Si $a, b \in \mathbf{C}$, pruebe la identidad del paralelogramo:

$$|a - b|^2 + |a + b|^2 = 2\left(|a|^2 + |b|^2\right).$$

Ejercicio 4.13. Pruebe la identidad de Lagrange:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_k w_k\right|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \ln_k 2^2\right) - \sum_{k \in j} |z_k \bar{w}_j - z_j \bar{w}_k|^2$$

Deduzca la desigualdad de Cauchy a partir de su demostración.

Ejercicio 4.14. Encuentre el máximo de $|\mathrm{z}^n + a|$ para aquellas z con lz! ≤ 1.

Ejercicio 4.15. Calcule la mínima cota superior (esto es, el supremo) del siguiente conjunto de números reales: $\{\operatorname{Re}(iz^3 + 1)$ tal que $|z| < 2\}$.

Ejercicio 4.16. Pruebe la identidad trigonométrica de Lagrange:

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$$

(Suponga que sen $(\theta/2) \neq 0$..)

Ejercicio 4.17. Suponga que los números complejos z_1, z_2, z_3 satisfacen la ecuación

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

interpretando el resultado de cada afirmación.)

Ejercicio 4.18. Hallar todas las raíces quintas de la unidad.

Ejercicio 4.19. Encontrar todos los valores de z para los cuales $z^5 = -32$. Grafícalos en el plano complejo.

Ejercicio 4.20. Graficar en el plano complejo los conjuntos que se muestran a continuación. Además decidir si son abiertos, cerrados, acotados, conexos o dominios.

a) $\{z \in C; |z + 3 - 4i| \leq 5\}$

b) $\{z \in C; |z - 1 - i| < 2\}$

c) $\mathrm{Re}(z) \leq 3$

d) $\mathrm{lm}(z) < 2$

e) $\{z \in C; 1 < |z + 1 - i| < 2\}$

f) $\left\{z \in C; \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}\right\}$

g) $\mathrm{Re}(z) = 2$

h) $\mathrm{lm}(z + 3) > 1$

i) $\{z \in C; |z - i| < 2y|z - 3| = |z + 3|\}$

5. Bibliografía

- [1] Marsden, J. E., Hoffman, M. J., Buenrostro, G. I. (1996). Análisis básico de variable compleja. Trillas.
- [2] Spiegel, M. R. (1999). Variable compleja. McGraw-Hill.
- [3] Lunts, V. G. (1977). Problemas sobre la teoria de funciones de variable compleja. Mir.
- [4] Brown J. Churchill R. (2004). Variable compleja y aplicaciones. Mc GrawHill. México.
- [5] Spiegel, M. (2001). Variable Compleja. Serie Schaum: Mc Graw-Hill: México.

Fin de la Unidad.