UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
MODALIDAD A DISTANCIA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.
ASIGNATURA VARIABLE COMPLEJA

Unidad 4: Diferenciación compleja

Objetivo General:

Estudiar las funciones analíticas de variable compleja, sus puntos singulares y las curvas descritas por ecuaciones complejas.

Objetivos Específicos:

1. Estudiar funciones analíticas de variable compleja.
2. Describir las propiedades de derivación de las funciones elementales.
3. Estudiar las singularidades de las funciones analíticas.
4. Definir el concepto de curvas complejas.

Conocimientos Previos:

1. Análisis Matemático.
2. Derivadas de funciones de variable real.
3. Series de Taylor.
4. Longitudes de curvas.
5. Puntos singulares.

Contenidos

Índice

1. Derivadas **3**

2. Funciones analíticas **4**

2.1. Ecuaciones de Cauchy-Riemann 5

2.2. Funciones armónicas 9

3. Diferenciales y derivadas elementales **11**

3.1. Reglas de diferenciación 12

3.2. Derivadas de orden superior 15

3.3. Regla de L´Hopital 16

4. Puntos singulares **17**

5. Curvas complejas **19**

5.1. Familias ortogonales 20

5.2. Teorema de Taylor 20

6. Ejercicios **22**

Resumen de la unidad

En esta unidad iniciaremos con la definición de la derivada de una función de variable compleja, interpretando su aspecto geométrico, para luego estudiar funciones analíticas, un caso especial de funciones armónicas, las derivadas de funciones elementales para finalizar con un estudio de los puntos singulares de una función compleja junto con su gráfica.

1. Derivadas

Iniciamos considerando una función compleja $f : A \to \mathbb{C}$, donde A es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. A continuación se presenta la defincíón de la derivada de forma análoga al caso real:

Definición 1.1. *Si $f(z)$ es unívoca en una región del plano $\mathbb{C}$, la derivada de $f(z)$ se define como*

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{1}$$

siempre que este límite exista independientemente de la manera en que $\Delta z \to 0$. Si es así, se dice que $f(z)$ es diferenciable en z.

En la definición dada (1), también suele usarse h en lugar de Δz. Aunque diferenciabilidad implica continuidad, lo contrario no es verdad.

Ejemplo 1. A partir de la definición, encontramos la derivada de la función $f(z) = z^3 - 2z$:

1. $z = z_0$
2. $z = -1$

De acuerdo con la definición, la derivada en $z = z_0$ es

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^3 - 2(z_0 + \Delta z) - (z_0^3 - 2z_0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0^3 + 3z_0^2 \Delta z + 3z_0(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 - 2z_0 - 2\Delta z - z_0^3 + 2z_0}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} 3z_0^2 + 3z_0 \Delta z + (\Delta z)^2 - 2 \\ &= 3z_0^2 - 2 \end{aligned}$$

En general, $f'(z) = 3z^2 - 2$ para toda z, de manera que por sustitución directa se encuentra que en $z_0 = 1$, $f'(-1) = 3(-1)^2 - 2 = 1$.

La mayoría de propiedades que conocemos de derivadas para el caso real también se aplica para funciones complejo diferenciables. A continuación, daremos la definición de funciones derivables en el sentido complejo.

2. Funciones analíticas

Si la derivada $f'(z)$ existe en todos los puntos z de una región $\mathcal{R}$, se dice que $f(z)$ es *analítica* en $\mathcal{R}$ y se refiere a una *función analítica* en $\mathcal{R}$. Como sinónimos de analítica suelen usarse también los términos *regular* y *holomorfa*. Se dice que una función $f(z)$ es *analítica en un punto* z_0 si existe una vecindad $|z-z_0|<\delta$ en la que para todos sus puntos exista $f'(z)$.

Proposición 2.1. *Si $f'(z_0)$ existe, entonces f es continua en z_0.*

Por la regla de suma para límites, sólo necesitamos mostrar que

$$\lim_{z\to z^0}\left[f(z)-f\left(z_0\right)\right]=0,$$

pero

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)-f\left(z_0\right)\right]=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)-f\left(z_0\right)}{z-z_0}\left(z-z_0\right)\right]$$

1o cual, por la regla del producto para límites, es igual a $f'\left(z_0\right)\cdot 0=0$.

Proposición 2.2. *Suponga que f y g son analíticas en A, donde $A\subset\mathbb{C}$ es un conjunto abierto. Entonces*

a) *$af+bg$ es analítica en A y$(af+bg)'(z)=af'(z)+bg'(z)$ para cualesquiera números complejos a y b.*

b) *$f\cdot g$ es analítica en A y$(\mathrm{fg})'(\mathrm{z})=\mathrm{f}'(\mathrm{z})\mathrm{g}(\mathrm{z})+\mathrm{f}(\mathrm{z})\mathrm{g}'(\mathrm{z})$*

c) *Si $\mathrm{g}(\mathrm{z})\neq 0$ para toda $\mathrm{z}\in\mathrm{A}$, entonces f/g es analítica en Ay*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z)=\frac{f'(z)g(z)-g'(z)f(z)}{[g(z)]^2}$$

d) *Cualquier polinomio $a\,_0+\mathrm{a}_1\mathrm{z}+\cdots+\mathrm{a}_\mathrm{n}\mathrm{z}^\mathrm{n}$ es analítico en todo C con derivada $\mathrm{a}_1+2\mathrm{a}_2\mathrm{z}+\cdots+\mathrm{na}_\mathrm{n}\mathrm{z}^{\mathrm{n}-1}$*

e) *Cualquier función racional*

$$\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m}$$

es analítica en el conjunto abierto consistente de toda z excepto aquellos puntos (a lo más, m) donde el denominador es cero.

Proposición 2.3. *(Regla de la Cadena.)*
Sean $\mathrm{f}:\mathrm{A}\to\mathrm{C}$ y $\mathrm{g}:\mathrm{B}\to C$ analíticas $(\mathrm{A},\mathrm{B}$ son conjuntos abiertos) y asuma que $\mathrm{f}(\mathrm{A})\subset\mathrm{B}$. Entonces $(\mathrm{g}\circ\mathrm{f})(\mathrm{z})=\mathrm{g}(\mathrm{f}(\mathrm{z}))$ es analítica y

$$\frac{d}{dz}(g\circ f)(z)=g'(f(z))\cdot f'(z).$$

La idea básica de la demostración de este teorema es que si $w = f(z)$ y $w_0 = f(z_0)$, entonces

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

y si hacemos que $z \to z_0$, también tenemos que $w \to w_0$y el lado derecho de la ecuación precedente resulta ser $g'(w_0) f'(z_0)$. El problema es que aun si $z \neq z_0$, podríamos tener $w = w_0$.

Proposición 2.4. *Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo, sea $f : A \to \mathbb{C}$ analítica. Si $f'(z) = 0$ en A, entonces f es constante en A.*

Ejemplo 2. Dada $w = f(z) = (1+z)/(1-z)$. Con la definición de límite de obtenemos la derivada $\dfrac{dw}{dz}$:

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dz} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{1+(z+\Delta z)}{1-(z-(z+\Delta z))} - \frac{1+z}{1-z}}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2}{(1-z-\Delta z)(1-z)} \\
&= \frac{2}{(1-z)^2}.
\end{aligned}$$

Independientemente de la manera como $\Delta z \to 0$, siempre que $z \neq 1$.

Note que también podemos utilizar, las reglas de diferenciación. De acuerdo con la regla del cociente, si $z \neq 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) &= \frac{(1-z)\frac{d}{dz}(1+z) - (1+z)\frac{d}{dz}(1-z)}{(1-z)^2} \\
&= \frac{(1-z)(1) - (1+z)(-1)}{(1-z)^2} \\
&= \frac{2}{(1-z)^2}
\end{aligned}$$

La función $f(z)$ es analítica para todos los valores finitos de z, excepto para $z = 1$, punto en el que la derivada no existe y la función no es analítica. Al punto $z = 1$ se le llama un *punto singular* de $f(z)$.

2.1. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Supongamos que $f : A \subset \mathbf{C} = \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ y si $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) = u(x,y) + iv(x,y)$,. A continuación se define la matriz jacobiana de f:

Definición 2.1. *La matriz jacobiana de f se define como la matriz de las derivadas parciales dada por*

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

en cada punto (x,y).

Si relacionamos las derivadas parciales con la derivada compleja, desde el punto de vista de las variables relacionadas, se dice que f es diferenciable con derivada la matriz $Df\,(x_0, y_0)$ en (x_0, y_0) si para toda $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que $\llcorner x_0, y_0| - (x, y)| < \delta$ implica

$$|f(x, y) - f\,(x_0, y_0) - Df\,(x_0, y_0)\,[(x, y) - (x_0, y_0)]| \leq \varepsilon\,|(x, y) - (x_0, y_0)|$$

donde $Df\,(x_0, y_0) \cdot [(x, y) - (x_0, y_0)]$ significa que la matriz $Df\,(x_0, y_0)$ aplicada al vector (columna)

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

y $|w|$ representa la longitud de un vector w.

Si f es diferenciable, entonces las parciales usuales $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial}$ existen y $Df\,(x_0, y_0)$ está dada por la matriz jacobiana. La expresión $Df\,(x_0, y_0)\,[w]$ representa la derivada de f en la dirección w. Si las parciales existen y son continuas, entonces f es diferenciable. Generalmente, entonces, la diferenciabilidad es un poco más fuerte que la existencia de las parciales individuales.

Una condición necesaria para que $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea analítica en una región $\mathcal{R}$ es que, en $\mathcal{R}$, u y v satisfagan las *ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

Si las derivadas parciales son continuas en $\mathcal{R}$, entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann son condiciones suficientes para que $f(z)$ sea analítica en $\mathcal{R}$. A las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ se les suele llamar *funciones conjugadas*. Dada una u que tenga primeras derivadas parciales continuas en una región simple conexa $\mathcal{R}$, puede hallarse v (dentro de una constante aditiva arbitraria) tal que $u + iv = f(z)$ sea analítica.

Teorema 2.1. *Sea* $\mathrm{f} : \mathrm{A} \subset \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ *una función dada, con A un conjunto abierto. Entonces* $\mathrm{f}'\,(\mathrm{z}_0)$ *existe si y sólo si f es diferenciable en el sentido de las variables reales y en* $(x_0, y_0) = z_0$*, u y v satisfacen*

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}} \quad y \quad \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} = -\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}}$$

Si $f'\,(\mathrm{z}_0)$ existe, entonces

$$\begin{aligned} f'\,(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

Una función continuamente diferenciable es uno a uno y sobre en un conjunto abierto y tiene una inversa diferenciable en alguna vecindad de un punto donde el determinante jacobiano de la matriz derivada no es 0.

Teorema 2.2. *(Teorema de la función inversa.)*
Sea $\mathrm{f} : \mathrm{A} \to \mathrm{C}$ *analítica (con* f' *continua) y suponga que* $\mathrm{f}'(\mathrm{z}_0) \neq 0$. *Entonces existe una vecindad* U *de* z_0*y una vecindad* V *de* $\mathrm{f}(\mathrm{z}_0)$ *tal que* $\mathrm{f} : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ *es una biyección (esto es, es uno a uno* y *sobre)* y *su función inversa* f^{-1} *es analítica con su derivada dada por*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dw}}\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{w}) = \frac{1}{\mathrm{f}'(\mathrm{z})} \qquad \textit{donde } \mathrm{w} = \mathrm{f}(\mathrm{z})$$

Note que el teorema trata de la existencia de la función inversa, y como en la mayoría de de proposiciones matemáticas la existencia no nos da un teorema fuerte dado que no describe el proceso de encontrar la función inversa, además se refiere a una inversa local.

Ejemplo 3. Por ejemplo, vamos a considerar $f(z) = z^2$ definida en $A = \mathbf{C}\backslash\{0\}$. Entonces $f'(z) = 2z \neq 0$ en cada punto de A.

Una condición necesaria y suficiente para que $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea analítica en una región $\mathcal{R}$ es que en esa región $\mathcal{R}$ se satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$, $\partial u/\partial y = -(\partial v/\partial x)$, donde se supone que estas derivadas parciales son continuas en $\mathcal{R}$. Para que $f(z)$ sea analítica, el límite

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{\Delta x + i\Delta y} \tag{3}$$

Debe existir como condición necesaria independientemente de la manera en la que Δz (o Δx y Δy) tiendan a cero. Se considerarán dos aproximaciones posibles.

Caso 1. $\Delta y = 0$, $\Delta x \to 0$. En este caso 3 se convierte en

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \left[\frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] \right\} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

siempre que existan las derivadas parciales.

Caso 2. $\Delta x = 0$, $\Delta y \to 0$. En este caso, 3 se convierte en

$$\lim_{\Delta y \to 0} \left\{ \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right\} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

pero $f(z)$ no puede ser analítica a menos que estos dos límites sean idénticos. Por tanto, una condición necesaria para que $f(z)$ sea analítica es que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

o

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Para la condición de suficiencia se supone que $\partial u/\partial x$ y $\partial u/\partial y$ son continuas, se tiene

$$\begin{aligned}
\Delta u &= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) \\
&= \{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y+\Delta y)\} + \{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)\} \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon_1\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \eta_1\right)\Delta y \\
&= \frac{\partial u}{x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \eta_1 \Delta y
\end{aligned}$$

donde $\epsilon_1 \to 0$ y $\eta_1 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, de igual manera, como se supone que $\partial v/\partial x$ y $\partial v/\partial y$ son continuas, se tiene

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \epsilon_2\right)\Delta x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \eta_2\right)\Delta y \\
&= \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \epsilon_2 \Delta x + \eta_2 \Delta y
\end{aligned}$$

donde $\epsilon_2 \to 0$ y $\eta_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. Entonces, tenemos lo siguiente

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v \tag{4}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y + \epsilon\Delta x + \eta\Delta y \tag{5}$$

donde $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_{2\to 0}$ y $\eta = \eta_1 + i\eta_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. De acuerdo con las ecuaciones de Cauchy-Riemann, 4 se expresa como:

$$\begin{aligned}
\Delta w &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y + \epsilon\Delta x + \eta\Delta y \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + \epsilon\Delta x + \eta\Delta y
\end{aligned}$$

Al dividir entre $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ y tomar el límite cuando $\Delta z \to 0$, se ve que

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dz} &= f'(z) \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}$$

de manera que la derivada existe y es única, es decir, $f(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$.

2.2. Funciones armónicas

Si las segundas derivadas parciales de u y v respecto de x y y existen y son continuas en una región $\mathcal{R}$, entonces, de acuerdo con 2, se encuentra que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{6}$$

En estas condiciones se sigue que la parte real y la parte imaginaria de una función analítica satisfacen la *ecuación de Laplace*, que se denota

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 y} = 0 \ \ o \ \ \bigtriangledown^2 \Psi = 0 \ \ donde \ \bigtriangledown^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{7}$$

al operador $\bigtriangledown^2$ se le suele llamar *laplaciano*.

Definición 2.2. *Una función dos veces continuamente diferenciable $u : A \to \mathbb{R}$ definido en un conjunto abierto A es* **armónica** *si*

$$\bigtriangledown^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Proposición 2.5. *Supongamos que f es una función de variable compleja y* $\mathrm{u} = Re(\mathrm{f})$ *y* $\mathrm{v} = Im(\mathrm{f})$*, su parte real e imaginaria respectivamente, entonces u y v son armónicas en* A.

Demostración. Usamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ y $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$. Diferenciando la primera ecuación con respecto de x y la segunda ecuación con respecto de y obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \tag{9}$$

del cálculo sabemos que las segundas parciales son simétricas:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

Si sumamos las ecuaciones en el conjunto de ecuaciones (8) y (9) nos da

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

∎

La ecuación para v se prueba de manera análoga a la escrita para u.

Veamos algunos ejemplos que ilustran el uso de estas definiciones y propiedades:

Ejemplo 4. La función $u = e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \cos y)$ es armónica. Iniciamos calculando las derivadas parciales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= (e^{-x})(\operatorname{sen} y) + (-e^{-x})(x \operatorname{sen} y - y \cos y) \\ &= e^{-x} \operatorname{sen} y - xe^{-x} \operatorname{sen} y + ye^{-x} \cos y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{-x} \operatorname{sen} y - xe^{-x} \operatorname{sen} y + ye^{-x} \cos y) && (10)\\ &= -2e^{-x} \operatorname{sen} y + xe^{-x} \operatorname{sen} y - ye^{-x} \cos y && (11)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= e^{-x}(x \cos y + y \operatorname{sen} y - \cos y) \\ &= xe^{-x} \cos y + ye^{-x} \operatorname{sen} y - e^{-x} \cos y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(xe^{-x} \cos y + ye^{-x} \operatorname{sen} y - e^{-x} \cos y) && (12)\\ &= -xe^{-x} \operatorname{sen} y + 2e^{-x} \operatorname{sen} y + ye^{-x} \cos y && (13)\end{aligned}$$

se suman 11 y 13 para obtener $(\partial^2 u/\partial x^2) + (\partial^2 u/\partial y^2) = 0$, por lo que u es armónica.

Ejemplo 5. Para encontrar v tal que $f(z) = u + iv$ sea analítica utilizamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} && (14)\\ &= e^{-x} \operatorname{sen} y - xe^{-x} \operatorname{sen} y + ye^{-x} \cos y && (15)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} && (16)\\ &= e^{-x} \cos y - xe^{-x} \cos y - ye^{-z} \operatorname{sen} y && (17)\end{aligned}$$

Se integra 15 respecto a y, manteniendo x constante. Entonces,

$$\begin{aligned}v &= -e^{-x} \cos y + xe^{-x} \cos y + e^{-x}(y \operatorname{sen} y + \cos y) + F(x) && (18)\\ &= ye^{-x} \operatorname{sen} y + xe^{-x} \cos y + F(x) && (19)\end{aligned}$$

donde $F(x)$ es una función real arbitraria de x. Se sustituye 19 en 17 y se obtiene

$$-ye^{-x}\operatorname{sen} y - xe^{-x}\cos y + e^{-x}\cos y + F'(x) = -ye^{-x}\operatorname{sen} y - xe^{-x}\cos y - ye^{-x}\operatorname{sen} y$$

o $F'(x) = 0$, y $F(x) = c$, una constante. Entonces, de acuerdo con 19,

$$v = e^{-x}(y\operatorname{sen} y + x\cos y) + c$$

Para encontrar $f(z)$, tenemos tres formas diferentes de hacerlo:
Método 1. Se tiene

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Con $y = 0$

$$f(x) = u(x,0) + iv(x,0)$$

Se sustituye x por z,

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0)$$

entonces, $u(z,0) = 0$, $v(z,0) = ze^{-z}$ y por tanto

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0) = ize^{-z},$$

salvo una constante aditiva arbitraria.
Método 2. Salvo una constante aditiva arbitraria, de acuerdo con los resultados del ejemplo anterior.

$$\begin{aligned}
f(z) &= u + iv = e^{-x}(x\operatorname{sen} y - y\cos y) + ie^{-x}(y\operatorname{sen} y + x\cos y) \\
&= e^{-x}\left\{x\left(\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}\right) - y\left(\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}\right)\right\} + ie^{-x}\left\{y\left(\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}\right) + x\left(\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}\right)\right\} \\
&= i(x+iy)e^{-(x+iy)} \\
&= ize^{-z}.
\end{aligned}$$

Método 3. Se tiene $x = (z+\bar{z})/2$, $y = (z-\bar{z})/2i$, luego al sustituir en $u(x,y) + iv(x,y)$, se encuentra, después de un tedioso trabajo, que $\bar{z}$ desaparece y queda ize^{-z}.
En general, cuando se conocen u y v, se prefiere el método 1 a los métodos 2 y 3. Si sólo se conoce u (o v), se puede usar otro método.

3. Diferenciales y derivadas elementales

Sea $\Delta z = dz$ un incremento de z. Entonces el incremento de $w = f(z)$ viene dado por

$$\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z).$$

Si $f(z)$ es continua y tiene primera derivada continua en una región, entonces

$$\Delta w = f'(z)\Delta z + \epsilon \Delta z = f'(z)dz + \epsilon dz \tag{20}$$

donde $\epsilon \to 0$ cuando $\Delta z \to 0$. A la expresión

$$dw = f'(z)dz \tag{21}$$

se le conoce como *diferencial de* w o *de* $f(z)$, o *parte principal de* Δw. Observe que, en general, $\Delta w \neq dw$. A dz se le conoce como *diferencial de* z.
A partir de las definiciones 1 y 21, suele escribirse

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \tag{22}$$

Se debe resaltar que dz y dw no son los límites de Δz y Δw cuando $\Delta z \to 0$, pues estos límites son cero, mientras que dz y dw no son necesariamente cero. En cambio, dado dz, se determina dw de acuerdo con 21, es decir, dw es una variable dependiente determinada por la variable independiente dz para una z dada.
Es útil considerar a d/dz un *operador* que, cuando actúa sobre $w = f(z)$ y produce $dw/dz = f'(z)$.

Ejemplo 6. Dada $w = f(z) = z^3 - 2z^2$, encontremos Δw, dw y $\Delta w - dw$. Para encontrar Δw hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\Delta w &= f(z+\Delta z) - f(z) \\
&= \{(z+\Delta z)^3 - 2(z+\Delta z)^2\} - \{z^3 - 2z^2\} \\
&= z^3 + 3z^2\Delta z + 3z(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 - 2z^2 - 4z\Delta z - 2(\Delta z)^2 - z^3 + 2z^2 \\
&= (3z^2 - 4z)\Delta z + (3z-2)(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3
\end{aligned}$$

Luego como dw es la parte principal de $\Delta w = (3z^2 - 4z)\Delta z = (3z^2 - 4z)dz$, pues, por definición, $\Delta z = dz$. Observemos que $f'(z) = (3z^2 - 4z)$ y $dw = (3z^2 - 4z)dz$, es decir, $dw/dz = 3z^2 - 4z$.

Ahora sustituimos las expresiones encontradas para $\Delta w - dw$ las cuales son dw y Δw,

$$\Delta w - dw = (3z-2)(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 = \epsilon \Delta z,$$

donde $\epsilon = (3z-2)\Delta z + (\Delta z)^2$.

Observe que $\epsilon \to 0$ cuando $\Delta z \to 0$, es decir, $(\Delta w - dw)/\Delta z \to 0$. Se sigue que $\Delta w - dw$ es un infinitesimal de orden superior a Δz.

3.1. Reglas de diferenciación

Suponga que $f(z)$, $g(z)$ y $h(z)$ son funciones analíticas de z. Entonces son válidas las siguientes reglas de diferenciación (idénticas a las del cálculo elemental).

Teorema 3.1. *Reglas básicas de derivación de funciones complejas:*

1. $\frac{d}{dz}\{f(z)+g(z)\} = \frac{d}{dz}f(z) + \frac{d}{dz}g(z) = f'(z)+g'(z)$
2. $\frac{d}{dz}\{f(z)-g(z)\} = \frac{d}{dz}f(z) - \frac{d}{dz}g(z) = f'(z)-g'(z)$
3. $\frac{d}{dz}\{cf(z)\} = c\frac{d}{dz}f(z) = cf'(z)$ *donde c es una constante.*
4. $\frac{d}{dz}\{f(z)g(z)\} = f(z)\frac{d}{dz}g(z) + g(z)\frac{d}{dz}f(z) = f(z)g'(z)+g(z)f'(z)$
5. $\dfrac{d}{dz}\left\{\dfrac{f(z)}{g(z)}\right\} = \dfrac{g(z)(d/dz)f(z) - f(z)(d/dz)g(z)}{[g(z)]^2} = \dfrac{g(z)f'(z)-f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$ *si* $g(z)\neq 0$

Teorema 3.2. *Si $w = f(\zeta)$ donde $\zeta = g(z)$, entonces*

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz} = f'(\zeta)\frac{d\zeta}{dz} = f'\{g(z)\}g'(z) \tag{23}$$

De manera similar, si $w = f(\zeta)$ donde $\zeta = g(\eta)$ y $\eta = h(z)$, entonces

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{dz} \tag{24}$$

Las expresiones en 23 y 24 se conocen como *regla de la cadena* para la diferenciación de funciones complejas.

Teorema 3.3. *Si $w = f(z)$ tiene una función inversa unívoca f^{-1}, entonces $z = f^{-1}(w)$, y dw/dz y dz/dw se relacionan mediante*

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{dz/dw}. \tag{25}$$

Teorema 3.4. *Si $z = f(t)$ y $w = g(t)$, donde t es un parámetro, entonces*

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw/dt}{dz/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \tag{26}$$

Pueden formularse reglas semejantes para los diferenciales. Por ejemplo,

$$d\{f(z)+g(z)\} = df(z)+dg(z) = f'(z)dz + g'(z)dz = \{f'(z)+g'(z)\}dz$$

$$d\{f(z)g(z)\} = f(z)dg(z) + g(z)df(z) = \{f(z)g'(z)+g(z)f'(z)\}dz$$

Ejemplo 7. Para demostrar que $\dfrac{d}{dz}z^{1/2} = \dfrac{1}{2z^{1/2}}$, observamos que $z^{1/2}$ es una función multivaluada y para que una función tenga derivada, debe ser unívoca. Por tanto, como $z^{1/2}$ es una función multivaluada (en este caso con dos valores), es necesario restringirse primero a una rama y después a la otra, por lo que consideramos los dos casos:

- **Caso 1.** Considere primero la rama $w = z^{1/2}$ en la que $w = 1$, donde $z = 1$. En este caso, $w^2 = z$, de manera que

$$\frac{dz}{dw} = 2wyentonces\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2w}o\frac{d}{dz}z^{1/2} = \frac{1}{2z^{1/2}}.$$

- **Caso 2.** Después se considera la rama $w = z^{1/2}$ en la que $w = -1$, donde $z = 1$. En este caso también $w^2 = z$, de manera que

$$\frac{dz}{dw} = 2w$$

entonces

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2w}$$

o bien

$$\frac{d}{dz}z^{1/2} = \frac{1}{2z^{1/2}}$$

En ambos casos se tiene $(d/dz)z^{1/2} = 1/(2z^{1/2})$. Observe que en el punto de ramificación $z = 0$ no existe la derivada. En general, en un punto de ramificación una función no tiene derivada, es decir, no es analítica. Así, los puntos de ramificación son puntos singulares.

Ejemplo 8. Para comprobar que $\dfrac{d}{dz}\ln(z) = \dfrac{1}{z}$ hacemos lo siguiente. Sea $w = \ln(z)$, entonces, $z = e^w$ y $dz/dw = e^w = z$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\ln(z) &= \frac{dw}{dz}\\ &= \frac{1}{dz/dw}\\ &= \frac{1}{z}\end{aligned}$$

Observe que esto es válido sin importar la rama de $\ln(z)$ de que se trate. Observe también que la derivada no existe en el punto de ramificación $z = 0$.

En los casos de funciones con ramas, es decir, en los casos de funciones multivaluadas, la ramificación de la función a la derecha se elige de manera que coincida con la ramificación de la función a la izquierda. Observe que estas fórmulas son idénticas a las del cálculo elemental.

1. $\dfrac{d}{dz}(c) = 0$
2. $\dfrac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$
3. $\dfrac{d}{dz}e^z = e^z$
4. $\dfrac{d}{dz}a^z = a^z \ln(a)$
5. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{sen} z = \cos z$
6. $\dfrac{d}{dz}\cos z = -\operatorname{sen} z$
7. $\dfrac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z$
8. $\dfrac{d}{dz}\cot z = -\csc^2 z$
9. $\dfrac{d}{dz}\sec z = \sec z \tan z$
10. $\dfrac{d}{dz}\csc z = \csc z \cot z$
11. $\dfrac{d}{dz}\log_e z = \dfrac{d}{dz}\ln(z) = \frac{1}{z}$
12. $\frac{d}{dz}\log_a z = \dfrac{\log_a e}{z}$
13. $\frac{d}{dz}\operatorname{sen}^{-1} z = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$
14. $\frac{d}{dz}\cos^{-1} z = \dfrac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$
15. $\frac{d}{dz}\tan^{-1} z = \dfrac{1}{1+z^2}$
16. $\frac{d}{dz}\cot^{-1} z = \dfrac{-1}{1+z^2}$
17. $\frac{d}{dz}\sec^{-1} z = \dfrac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$
18. $\frac{d}{dz}\csc^{-1} z = \dfrac{-1}{z\sqrt{z^2-1}}$
19. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{senh} z = \cosh z$
20. $\dfrac{d}{dz}\cosh z = -\operatorname{senh} z$
21. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{senh}^{-1} z = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$
22. $\dfrac{d}{dz}\cosh^{-1} z = \dfrac{1}{\sqrt{z^2-1}}$
23. $\dfrac{d}{dz}\tanh^{-1} z = \dfrac{1}{1-z^2}$
24. $\dfrac{d}{dz}\coth^{-1} z = \dfrac{-1}{1-z^2}$

3.2. Derivadas de orden superior

Si $w = f(z)$ es analítica en una región, su derivada está dada por $f'(z)$, w' o dw/dz. Si $f'(z)$ también es analítica en esa región, su derivada se denota $f''(z)$, w'' o $(d/dz)(dw/dz) = d^2w/dz^2$ De manera similar, la n-ésima derivada de $f(z)$, sí existe, se denota $f^{(n)}(z)$, $w^{(n)}$ o d^nw/dz^n, donde n se conoce como el orden de la derivada. Así, las derivadas de primero, segundo, tercer,... orden se denotan, respectivamente, f', f'', f''',...Estas derivadas de orden superior se calculan mediante aplicaciones sucesivas de las reglas de diferenciación dadas antes. Uno de los teoremas más importantes, válido para funciones de una variable compleja y no necesariamente válido para funciones de una variable real, es el siguiente:

Teorema 3.5. *Suponga que $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$. Entonces, también $f'(z)$, $f''(z)$,... son analíticas en $\mathcal{R}$, es decir, en $\mathcal{R}$ existen todas las derivadas de orden superior.*

3.3. Regla de L´Hopital

Sean $f(z)$ y $g(z)$ analíticas en una región que contenga al punto z_0 y suponga que $f(z_0) = g(z_0) = 0$, pero $g'(z_0) \neq 0$. Así, la *regla de L'Hopital* establece que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} \tag{27}$$

En el caso de $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$ la regla puede ampliarse.
Suele decirse que el lado izquierdo de la expresión en 27 tiene la "forma indeterminada" $0/0$, pero tal terminología suele generar confusión porque en general no hay nada indeterminado. Los límites representados por las llamadas formas indeterminadas ∞/∞, $0 \cdot \infty$, ∞^0, 0^0, 1^∞ y $\infty - \infty$ suelen evaluarse mediante modificaciones apropiadas de la regla de L'Hopital.

Ejemplo 9. Suponiendo que $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$ que contiene al punto z_0, podemos comprobar que

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z - z_0)$$

donde $\eta \to 0$ cuando $z \to z_0$.

Para ello sea $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) = \eta$, de manera que

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z - z_0)$$

así, como $f(z)$ es analítica en z_0, se obtiene, como se buscaba,

$$\begin{aligned}\lim_{z \to z_0} \eta &= \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right\} \\ &= f'(z_0) - f'(z_0) \\ &= 0\end{aligned}$$

Ejemplo 10. Suponga que $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en z_0 y $f(z_0) = g(z_0) = 0$, pero $g'(z_0) \neq 0$. Podemos demostrar que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

de acuerdo con el ejemplo anterior, y al utilizar el hecho que $f(z_0) = g(z_0) = 0$,

$$\begin{aligned}f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \eta_1(z - z_0) \\ &= f'(z_0)(z - z_0) + \eta_1(z - z_0) \\ g(z) &= g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + \eta_2(z - z_0) \\ &= g'(z_0)(z - z_0) + \eta_2(z - z_0)\end{aligned}$$

donde $\lim\limits_{z \to z_0} \eta_1 = lim_{z \to z_0} \eta_2 = 0$. Entonces, como se buscaba,

$$lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = lim_{z \to z_0} \frac{\{f'(z_0) + \eta_1\}(z - z_0)}{\{g'(z_0) + \eta_2\}(z - z_0)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Otro método diferente de hacerlo es el siguiente

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} / \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\
&= \left(\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) / \left(\lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right) \\
&= \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.
\end{aligned}$$

4. Puntos singulares

Un punto en el que $f(z)$ no sea analítica se llama *punto singular o singularidad* de $f(z)$. Existen varios tipos de singularidades.

Definición 4.1. *Supongamos que f es una función compleja, entonces:*

1. ***Singularidades aisladas.*** *El punto $z = z_0$ es una singularidad aislada o un punto singular aislado de $f(z)$ si es posible hallar un $\delta > 0$ tal que el círculo $|z - z_0| = \delta$ no contenga ningún otro punto singular distinto de z_0 (es decir, si existe una vecindad agujerada δ de z_0 que no contenga ninguna singularidad). Si no es posible hallar un δ con estas características, se dice que z_0 es una singularidad no aislada.*
   Si z_0 no es un punto singular y es posible hallar un $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| = \delta$ no contenga ningún punto singular, entonces z_0 es un punto ordinario de $f(z)$.

2. ***Polos.*** *Si z_0 es una singularidad aislada y es posible hallar un entero positivo n tal que $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$, entonces $z = z_0$ es un polo de orden n. Si $n = 1$, z_0 es un polo simple.*

3. *Los **puntos de ramificación** de funciones multivaluadas, son puntos singulares no aislados, pues una función multivaluada no es continua y, por tanto, no es analítica en una vecindad agujerada de un punto de ramificación.*

4. ***Singularidades removibles*** *Un punto singular aislado z_0 es una singularidad removible de $f(z)$ si $lim_{z \to z_0} f(z)$ existe. Al definir $f(z) = lim_{z \to z_0} f(z)$ se muestra que $f(z)$ no sólo es continua en z_0, sino también analítica en z_0.*

5. ***Singularidades al infinito*** *El tipo de singularidad de $f(z)$ en $z = \infty$ es el mismo que el de $f(1/w)$ en $w = 0$.*

6. ***Singularidades esenciales*** *A una singularidad aislada que no es un polo o una singularidad removible se le llama singularidad esencial.*

Ejemplo 11. Estudiemos las singularidades de las siguientes funciones :

a) $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^3}$ tiene un polo de orden 3 en $z = 2$.

b) $f(z) = \dfrac{(3z-2)}{(z-1)^2(z+1)(z-4)}$ tiene un polo de orden 2 en $z = 1$, y polos simples en $z = -1$ y $z = 4$.
Si $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$, donde $f(z_0) \neq 0$ y n es un entero positivo, entonces a $z = z_0$ se le llama *cero de orden* n de $g(z)$. Si $n = 1$, z_0 se llama *cero simple*. En tal caso, z_0 es un polo de orden n de la función $1/g(z)$.

Ejemplo 12. Funciones complejas que tienen puntos de ramificación:

1. $f(z) = (z-3)^{1/2}$ tiene un punto de ramificación en $z = 3$.
2. $f(z) = ln/(z^2 + z - 2)$ tiene puntos de ramificación donde $z^2 + z - 2 = 0$, es decir, en $z = 1$ y $z = -2$.

Ejemplo 13. El punto singular $z = 0$ es una singularidad removible de $f(z) = \operatorname{sen}(z)/z$, pues $\lim\limits_{z \to 0}(\operatorname{sen}(z)/z) = 1$.

Ejemplo 14. La función $f(z) = e^{1/(z-2)}$ tiene una singularidad esencial en $z = 2$.

Si una función tiene una singularidad aislada, esa singularidad es removible, es un polo o es una singularidad esencial. A esto se debe que a los polos se les suela llamar *singularidades no esenciales*. De manera equivalente, $z = z_0$ es una singularidad esencial si no es posible hallar un entero positivo n tal que $lim_{z \to z_0}(z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$.

Ejemplo 15. La función $f(z) = z^3$ tiene un polo de orden 3 en $z = \infty$, pues $f(1/w) = 1/w^3$ tiene un polo de orden 3 en $w = 0$.

Ejemplo 16. Para encontrar todas las singularidades de $f(z) = \dfrac{z^8 + z^4 + 2}{(z-1)^3(3z+2)^2}$ y donde es analítica $f(z)$ hacemos lo siguiente:

1. En el plano finito z, las singularidades se encuentran en $z = 1$ y $z = -2/3$; $z = 1$ es un *polo de orden 3* y $z = -2/3$ es un *polo de orden 2*
   Para determinar que existe una singularidad en $z = 1/w$ (el punto al infinito), sea $z = \infty$. Así,

$$\begin{aligned} f(1/w) &= \frac{(1/w)^8 + (1/w)^4 + 2}{(1/w - 1)^3(3/w + 2)^2} \\ &= \frac{1 + w^4 + 2w^8}{w^3(1-w)^3(3+2w)^2} \end{aligned}$$

   Por tanto, como $w = 0$ es un polo de orden 3 de la función $f(1/w)$, se concluye que $z = \infty$ es un polo de orden 3 de la función $f(z)$. Así, la función dada tiene tres singularidades: un polo de orden 3 en $z = 1$, un polo de orden 2 en $z = -2/3$ y un polo de orden 3 en $z = \infty$.

2. Según el inciso 1) se concluye que $f(z)$ es analítica en todas las partes del plano finito z, excepto en los puntos $z = 1$ y $z = -2/3$.

5. Curvas complejas

Suponga que $\phi(t)$ y $\psi(t)$ son funciones reales de la variable real t, que se supone continua en $t_1 \leq t \leq t_2$. Así, las ecuaciones paramétricas

$$z = x + iy = \phi(t) + i\psi(t) = z(t), \;\; t_1 \leq t \leq t_2 \tag{28}$$

definen una curva continua o arco en el plano z, que une los puntos $a = z(t_1)$ y $b = z(t_2)$. Si $t_1 \neq t_2$ pero $z(t_1) = z(t_2)$, es decir, $a = b$, los puntos terminales coinciden y se dice que la curva es *cerrada*. Una curva cerrada que en ninguna parte se interseque consigo misma se llama *curva cerrada simple*. Si $\phi(t)$ y $\psi(t)$ [y por ende $z(t)$] tienen derivadas continuas en $t_1 \leq t \leq t_2$, se dice que la curva es una *curva suave* o un *arco suave*. A una curva compuesta de una cantidad infinita de arcos suaves se le llama *curva suave a trozos o contorno* . Por ejemplo, el borde de un cuadrado es una curva suave a trozos o contorno.

Ahora definimos lo que consideraremos una curva o camino sobre el plano complejo $\mathbb{C}$.

Definición 5.1. *Dado un intervalo compacto de la recta real* $[a, b]$, *definiremos una curva en C como una aplicación continua* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. *La imagen o gráfica de la curva en el plano complejo la denotaremos por* $\operatorname{graf}(\gamma) = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$. *Dado* $t \in [a, b]$ *se tiene que*

$$\gamma(t) = \operatorname{Re}\gamma(t) + i \operatorname{Im}\gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

donde $x(t)$ *e* $y(t)$ *son las partes real e imaginarias de* $\gamma(t)$.

- Una curva se dirá de clase C^1 si es derivable en (a, b). En ese caso γ' denotará la derivada de la misma.
- La curva se dirá de clase C^1 a trozos si existen $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, tal que $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ es de clase C^1 para $i = 0, 1, \ldots, n-1$.
- Una curva se dirá cerrada si $\gamma(a) = \gamma(b)$. Un curva se dirá de Jordan si es cerrada y sin autointersecciones $(\gamma(t) \neq \gamma(t')$ para todo $t, t' \in (a, b])$.

Definición 5.2. *Dadas dos curvas* $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ *y* $\gamma_2 : [c, d] \to$ C, *tales que* $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, *se define su unión o yuxtaposición* $\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a, b + d - c] \to \mathbb{C}$ *como*

$$\gamma_1 \cup \gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & si\ t \in [a, b] \\ \gamma_2(t - b + c) & si\ t \in [a, b] \end{cases}$$

y la curva inversa a una curva dada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, *denotada* $-\gamma : [-b, -a] \to \mathbb{C}$ *como*

$$(-\gamma)(t) = \gamma(-t)$$

Definición 5.3. *La longitud de una curva de clase* C^1 *se define como*

$$l(\gamma) := \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

Si la curva es de clase C^1 a trozos y se escribe como $\gamma = \cup_{j=1}^{k} \gamma_j$, donde cada curva γ_j es de clase C^1, se define su longitud como

$$l(\gamma) = \sum_{j=1}^{k} l\left(\gamma_j\right).$$

En cualquier caso, todas estas definiciones son análogas a aquellas que ya se estudiaron en el caso de curvas en el plano y el espacio que se vieron en la parte de teoría de campos.

5.1. Familias ortogonales

Sea $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función analítica, y $f'(z) \neq 0$. Entonces las familias de curvas de un parámetro

$$u(x, y) = \alpha, \;\; v(x, y) = \beta \tag{29}$$

donde α y β son constantes, son *ortogonales*, es decir, en el punto de intersección cada miembro de una familia es perpendicular a cada miembro de la otra familia. Las correspondientes curvas imagen en el plano w, que son líneas paralelas a los ejes u y v, forman también familias ortogonales.

En vista de esto, puede pensarse que si la función $f(z)$ es analítica y $f'(z) \neq 0$, entonces el ángulo entre cualesquiera dos curvas C_1 y C_2 que se intersequen en el plano z será igual (en magnitud y en sentido) al ángulo entre las correspondientes curvas imagen C_1' y C_2' que se intersequen en el plano w. Esta conjetura es correcta y lleva al tema de las *transformaciones conformes*, tema de tanta importancia, desde el punto de vista teórico y de sus aplicaciones.

5.2. Teorema de Taylor

Sea $f(z)$ analítica en el interior y sobre una curva simple cerrada C. Sean a y $a + h$ dos puntos en el interior de C. Entonces,

$$f(a + b) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + ... + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + ... \tag{30}$$

o, al escribir $z = a + h$, $h = z - a$

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \frac{f''(a)}{2!}(z - a)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}(z - a)^n + ... \tag{31}$$

Esto se conoce como *teorema de Taylor*, y la serie en (30) o (31), como *serie de Taylor* o *expansión de Taylor* para $f(a + h)$ o $f(z)$, respectivamente.

La región de convergencia de la serie (31) está dada por $|z - a| < R$, donde el radio R de convergencia es la distancia de a a la singularidad más cercana de la función $f(z)$. Sobre $|z - a| = R$, la serie puede o no converger. Para $|z - a| > R$, la serie diverge.
Si la singularidad más cercana de $f(z)$ se encuentra al infinito, el radio de convergencia es infinito, es decir, la serie converge para toda z. Si en (30) o en (31) $a = 0$ se obtiene una *serie de Maclaurin*.

Ejemplo 17. Sea $f(z) = \ln(1+z)$, donde se considera la rama que tiene el valor cero cuando $z = 0$.

1. Obtenga el desarrollo de $f(z)$ en una serie de Taylor entorno a $z = 0$.
2. Determine la región de convergencia de la serie del inciso 1.
3. Obtenga el desarrollo de $\ln(1 + z/1 - z)$ en una serie de Taylor entorno a $z = 0$

Solución.

a) Si $f(z) = ln(1 + z)$, $f(0) = 0$, entonces $f'(z) = \frac{1}{1+z} = (1 + z)^{-1}$, $f'(0) = 1$, $f''(z) = -(1 + z)^{-2}$, $f''(0) = -1$, $f'''(z) = (-1)(-2)(1 + z)^{-3}$, $f'''(0) = 2!$ y así sucesivamente hasta obtener $f^{n+1}(z) = (-1)^n n!(1 + z)^{-(n+1)}$, $f^{n+1}(0) = (-1)^n n!$. Entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= \ln(1+z) \\ &= f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + ... \\ &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + ... \end{aligned}$$

b) El término n-ésimo es $u_n = (-1)^{n-1}z^n/n$. Con el criterio del cociente,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{nz}{n+1}\right| = |z|$$

y la serie converge para $|z| < 1$. Puede mostrarse que la serie converge para $|z| = 1$, salvo para $z = -1$.
Este resultado también se obtiene porque la serie converge en un círculo que se extiende hasta la singularidad más cercana (es decir, $z = 1$) a $f(z)$.

c) De acuerdo con el resultado del literal a), al sustituir z por z,

$$\begin{aligned} \ln(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + ... \\ \ln(1-z) &= -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - ... \end{aligned}$$

dos series que convergen para $|z| < 1$. Se restan y se obtiene

$$\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + ...\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^{2n+1}}{2n+1}$$

que converge para $|z| < 1$. También puede mostrarse que esta serie converge para $|z| = 1$, salvo en $z = \pm 1$.

Ejemplo 18. Obtenga el desarrollo de $f(z) = \operatorname{sen}(z)$ en una serie de Taylor en torno a $z = \pi/4$ y la región de convergencia de esta serie.

- $f(z) = \operatorname{sen}(z)$, $f'(z) = \cos(z)$, $f''(z) = -\operatorname{sen}(z)$, $f'''(z) = -\cos(z)$, $f^{(4)}(z) = \operatorname{sen}(z)$,...
  $f(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $f'(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $f''(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$, $f'''(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$, $f^{(4)}(\pi/4) = \sqrt{2}/2$,...
  como $a = \pi/4$, entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)(z-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(z-a)^3}{3!} + ... \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(z-\pi/4) - \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2!}(z-\pi/4)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 3!}(z-\pi/4)^3 + ... \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1 + (z-\pi/4) - \frac{(z-\pi/4)^2}{2!} - \frac{(z-\pi/4)^3}{3!} + ...\right\} \end{aligned}$$

  Siguiendo otro método consideremos a $u = z - \pi/4$ o $z = u + \pi/4$. De ese modo se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(z) &= \operatorname{sen}(u+\pi/4) = \operatorname{sen}(u)\cos(\pi/4) + \cos(u)\operatorname{sen}(\pi/4) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen}(u) + \cos(u)) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - ...\right) + \left(1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - ...\right)\right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1 + u - \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + ...\right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1 + (z-\pi/4) - \frac{(z-\pi/4)^2}{2!} - \frac{(z-\pi/4)^3}{3!} + ...\right\} \end{aligned}$$

- Como la singularidad de $\operatorname{sen}(z)$ más cercana a $\pi/4$ está al infinito, la serie converge para todo valor finito de z, es decir, para $|z| < \infty$. A eso también se llega con el criterio del cociente.

6. Ejercicios

1. Con la definición, encuentre la derivada, en el punto indicado, de las funciones siguientes:
   a) $f(z) = 3z^2 + 4iz - 5$; $z = 2$.
   b) $f(z) = \frac{2z-i}{z+2i}$; $z = -i$.
   c) $f(z) = 3z^{-2}$; $z = 1 + i$.
2. Determine si $\frac{d}{dz}(z^2\bar{z})$ no existe en ninguna parte.
3. Dadas las funciones siguientes determine los puntos singulares, es decir, los puntos en los que la función no es analítica. Determine la derivada en todos los demás puntos.

a) $\dfrac{z}{z+i}$.

b) $\dfrac{3z-2}{z^2+2z+5}$.

4. Verifique que la parte real y la imaginaria de las funciones siguientes satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y concluya si estas funciones son analíticas.

   a) $f(z) = z^2 + 5iz + 3 - i$.

   b) $f(z) = ze^{-z}$.

   c) $f(z) = \operatorname{sen}(2z)$.

5. Muestre que la función $x^2 + iy^3$ no es analítica en ninguna parte. Concilie esto con el hecho de que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en $x = 0$ y $y = 0$

6. Verifique que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen para las funciones:

   a) e^{z^2}.

   b) $\cos 2z$.

   c) $\operatorname{senh} 4z$.

7. Determine cuáles de las siguientes funciones u son armónicas. Para cada función armónica, encuentre la función armónica conjugada v y exprese $u + iv$ como función analítica de z.

   a) $3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$.

   b) $2xy + 3xy^2 - 2y^3$.

   c) $xe^z \cos y - ye^z \operatorname{sen} y$.

   d) $e^{-2xy} \operatorname{sen}(x^2 - y^2)$.

8. Sea $w = iz^2 - 4z + 3i$. Encuentre:

   a) Δw.

   b) dw.

   c) $\Delta w - dw$ en el punto $z = 2i$.

9. Suponga que $w = (2z+1)^3$, $z = -i$, $\Delta z = 1 + i$. Encuentre:

   a) Δw.

   b) dw.

10. Con las reglas de diferenciación, encuentre la derivada de cada función siguiente:

    a) $(1+4i)z^2 - 3z - 2$.

    b) $(2z+3i)(z-i)$.

    c) $(2z-i)(z+2i)$.

    d) $(2iz+1)^2$.

    e) $(iz-1)^{-3}$.

11. Encuentre las derivadas de las funciones siguientes en el punto indicado:

    a) $(z+2i)(i-z)(2z-1)$; $z=i$.
    b) $\{z+(z^2+1)^2\}^2$; $z=1+i$.

12. Evalúe

    a) $\lim_{z\to 0} \frac{z-\operatorname{sen} z}{z^3}$.
    b) $\lim_{z\to m\pi i} (z-m\pi i)\left(\frac{e^z}{\operatorname{sen} z}\right)$.

13. Evalúe $\lim_{z\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right)^{1/z^2}$.

14. Localice e indique las singularidades en el plano finito z de las funciones siguientes.

    a) $\frac{z^2-3z}{z^2+2z+2}$.
    b) $\frac{ln(z+3i)}{z^2}$.
    c) $\operatorname{sen}^{-1}(1/z)$.
    d) $\sqrt{z(z^2+1)}$.
    e) $\frac{\cos z}{(z+i)^3}$.

15. Muestre que $f(z)=(z+3i)^5/(z^2-2z+5)^2$ tiene polos dobles en $z=1\pm 2i$ y un polo simple al infinito.

16. Muestre que e^{x^2} tiene una singularidad esencial al infinito.

17. Localice e indique todas las singularidades de las funciones siguientes:

    a) $(z+3)/(z^2-1)$.
    b) $\csc(1/z^2)$.
    c) $(z^2+1)/z^{3/2}$.

18. Encuentre las trayectorias ortogonales de las siguientes familias de curvas:

    a) $x^3y-xy^3=\alpha$.
    b) $e^{-x}\cos y+xy=\alpha$.

19. Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $r^2\cos 2\theta=\alpha$