UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
MODALIDAD A DISTANCIA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES
Y
MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.
ASIGNATURA VARIABLE COMPLEJA

Unidad 3: Sucesiones y series en C

Objetivo General:

Estudiar la convergencia o divergencia de sucesiones, series de funciones y series de potencias, a través del estudio de los principales teoremas o resultados sobre esta temática en variable compleja.

Objetivos Específicos:

1. Describir el comportamiento de la convergencia de sucesiones.
2. Calcular sumas parciales de series de funciones.
3. Dar una introducción al estudio de series de potencias.
4. Estudiar teoremas importantes sobre la convergencia o divergencia de series.

Conocimientos Previos:

1. Análisis Matemático.
2. Series de funciones de variable real.
3. Series de Taylor y Laurent.
4. Convergencia o divergencias de series de funciones.

Contenidos

Índice

Resumen de la unidad

En esta unidad daremos un recorrido por el estudio de la convergencia o divergencia de sucesiones de variable compleja, sus criterios de convergencia. Se hace una introducción al estudio de sucesiones de funciones, sus criterios de convergencia, desarrollo de ejemplos etc. Finalmente se muestra el desarrollo en series de potencias a manera de introducción. Como siempre al final de la sección algunos ejercicios como práctica.

1. Series

La importancia fundamental de estudiar series en variable compleja es por la búsqueda de la representación en series de potencias de funciones que tienen buenas propiedades de regularidad. Vamos de definir un sucesión de manera análoga en el caso real.

Definición 1.1. *Una función de variable entera positiva,*

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$$

que se denota $f(n)$ o a_n, donde $n = 1, 2, 3, ...$, se llama sucesión de variable compleja. Por tanto, una sucesión es un conjunto de números $a_1, a_2, a_3, ...$ en un orden definido y formados de acuerdo con una regla bien definida.

Al igual que en el caso real cada número de la sucesión se llama *término* y a_n es el término *n-ésimo*. La sucesión $a_1, a_2, a_3, ...$ también se denota $\{a_n\}$.

Observación. Una sucesión es *finita* o *infinita* según tenga un número finito o infinito de términos. A menos que se especifique otra cosa, se considerarán únicamente sucesiones infinitas.

Ejemplo 1. Veamos algunos ejemplos de sucesiones de variable compleja:

a) El conjunto de números $i, i^2, i^3, ..., i^{100}$ es una sucesión finita; el término *n-ésimo* es $a_n = i^n$, $n = 1, 2, ..., 100$.

b) El conjunto de números $1 + i, (1 + i)^2/2!, (1 + i)^3/3!, ...$ es una sucesión infinita; el término *n-ésimo* es $a_n = (1 + i)^n/n!, n = 1, 2, 3, ...$

c) El conjunto de números $\dfrac{1+i}{1-i}, \dfrac{1+i}{1-i}, \dfrac{2+i}{2-i}, ..., \dfrac{n+i}{n-i}, ...$ es una sucesión infinita.

1.1. Límite de una sucesión

En esta sección haremos una discusión sobre la definición del límite de una sucesión de variable compleja y resaltar su similitud como en el caso real.

Definición 1.2. *Se dice que un número l es el límite de una sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, ...$ si para todo número positivo ϵ hay un número positivo N que dependa de ϵ tal que $|a_n - l| < \epsilon$ para todo $n > N$. En ese caso se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.*

Observación. Si una sucesión tiene límite, se dice que la sucesión es *convergente* y se denota por $a_n \to l$; si no es así, la sucesión es *divergente*. Una sucesión sólo puede converger a un límite, es decir, si el límite existe, éste es único.

Una forma más sencilla de explicar este concepto de límite es decir que una sucesión $a_1, a_2, a_3, ...$ es convergente o tiende a un límite l si sus términos sucesivos “están cada vez más cerca” de l dependerá de la métrica que se utilice así será la “cercanía".

Ejemplo 2. Estudiemos la convergencia o divergencia de la sucesión $\left\{a_n = \dfrac{i^n}{n}\right\}_{n=0}^{\infty}$. Observemos primero que el numerador del término general es oscilante es decir, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$,$i^6 = -1$...., por lo que sus primeros 6 términos vienen dados por

$$a_1 = \frac{i}{1}, a_2 = \frac{-1}{2}, a_3 = \frac{-i}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{i}{5}, a_6 = \frac{-1}{6}.$$

Al graficarlos en el plano complejo intuitivamente la sucesión se acerca a cero en forma de espiral, como podemos verlo en la siguiente figura:

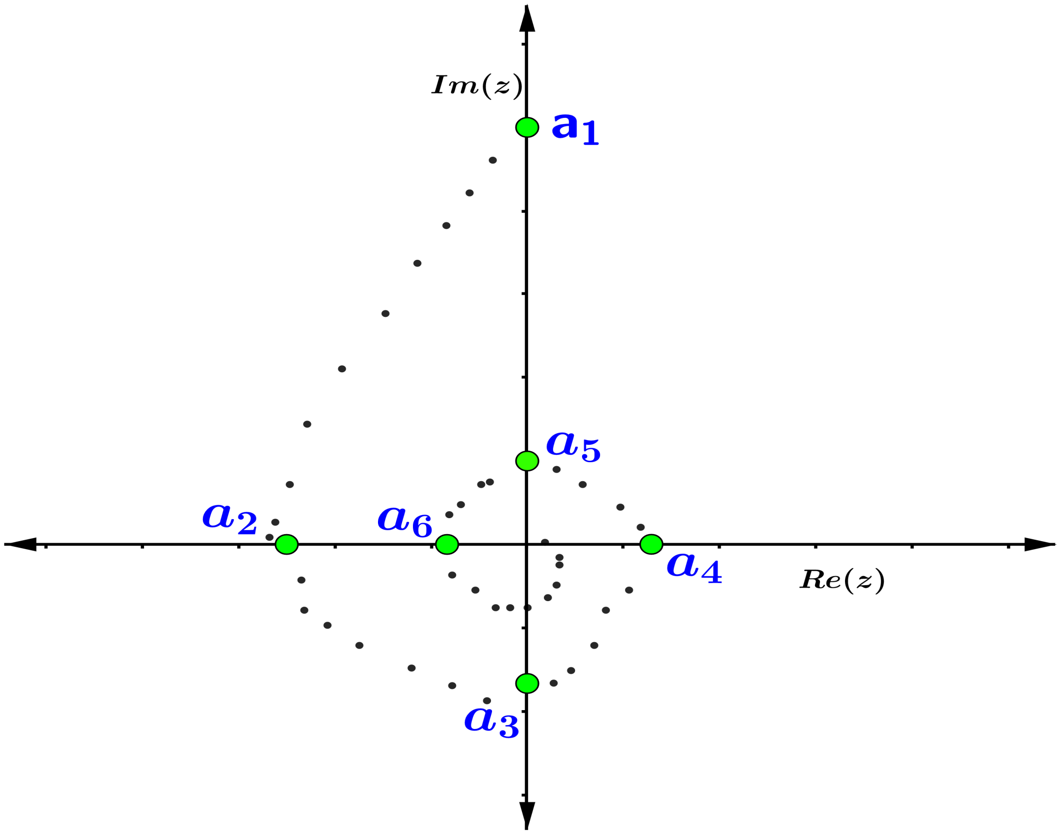

Figura 1: Convergencia de a_n en forma de espiral.

Calculando el límite cuando $n \to \infty$ de a_n tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot i^n = 0$$

así $a_n \to 0$.

A continuación, se presentan algunas propiedades de sucesiones convergentes:

Teorema 1.1. *Supongamos que a_n y b_n son sucesiones de variable compleja tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Entonces:*

1. $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B$.

2. $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = A - B$.

3. $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n) = AB$.

4. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{A}{B}$, *si* $B \neq 0$.

1.2. Series infinitas

Analizaremos brevemente las definiciones más importantes sobre series de funciones de variable compleja, para definir posteriormente las series de funciones de variable compleja y analizar su convergencia de manera análoga al caso de variable real. Consideremos los siguientes elementos $a_1, a_2, a_3, ...$ de una sucesión cualquiera. Definimos las sumas parciales como sigue:

Definición 1.3. *Se define una nueva sucesión* $S_1, S_2, S_3, ...$ *mediante*

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, ..., S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

donde a S_n*, que se le conoce como n-ésima suma parcial, es la suma de los primeros n términos de la sucesión* a_n*.*

Definición 1.4. *La sucesión* $S_1, S_2, S_3, ...$ *se simboliza como*

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

y se le llama serie infinita.

Si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ existe, se dice que la serie es *convergente*, y S, su *suma*; si no es así, se dice que la serie es divergente.

Proposición 1.1. *Una condición necesaria para que una serie converja es que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*; sin embargo, esto no es suficiente.*

El recíproco de la proposición anterior no es cierto , por ejemplo la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ satisface la condición necesaria pero no es convergente.

Proposición 1.2. *Sea* $z_k = \alpha_k + i\beta_k$ *con* $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$*. Entonces:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k(converge) \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(converge) \text{ y } \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(converge)$$

Es consecuencia de la propiedad análoga para sucesiones y de la definición de serie dado que se pide la convergencia de la serie definida por la parte real y la serie definida por la parte imaginaria y la convergencia de una ellas afecta la convergencia de la serie compleja.

Ejemplo 3. Estudiemos la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ para $z \in \mathbb{C}$.

- Si $|z| \geqslant 1$, la serie diverge ya que z^k no tiende a cero cuando $k \to \infty$.

- Si $|z| < 1$, es posible calcular el valor de la $n-$ ésima suma parcial:

$$S_n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

y por lo tanto, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} z^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}$.

Observación. Una sucesión z_n converge si es una *Sucesión de Cauchy*, en otras palabras si para toda $\epsilon > 0$, existe N tal que $n, m > N$ implica que $|z_n - z_m| < \epsilon$.

Consideremos la serie infinita $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ y la sucesión de sumas parciales $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z_k$. Notemos que

$$S_{n+p} - S_p = \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k$$

por lo que el criterio de Cauchy lo podemos enunciar como sigue:

Proposición 1.3. *La serie infinita* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z_k$, *converge si para toda* ε, *existe* N *tal que tal que* $n > N$ *implica que* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} z_k < \epsilon$ *para toda* $p = 1, 2, 3, ...,$ *de hecho si* $p = 1$ *el criterio de Cauchy establece que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ *implica que* $z_k \to 0$.

Al igual que en el caso real tenernos la siguiente definición de series absolutamente convergente.

Definición 1.5. *Se dice que la serie compleja* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ *es absolutamente convergente si la serie* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ *es convergente.*

Observación. Note que en el caso real es valor absoluto y en el caso complejo es el módulo de complejo z_k.

Proposición 1.4. *Si la serie* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ *converge absolutamente, entonces converge.*

Para la demostración de este resultado se puede utilizar el criterio de Cauchy. Por otra parte tome en cuenta que el recíproco no es cierto.

Ejemplo 4. La serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ es convergente pero no es absolutamente convergente dado que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k}\right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ es divergente resultado obtenido en el caso real.

Lo importante de este hecho es que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ es real y por lo tanto podemos aplicar todos los criterios que conocemos del análisis real. A continuación mostramos algunos de esos criterios:

Proposición 1.5. *Criterios de comparación de sucesiones complejas.*

1. **Serie geométrica**. *Si* $|r| < 1$, *entonces la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} r^n$ *converge a* $\frac{1}{1-r}$ *y no converge si* $|r| \geq 1$.

2. **Criterio de comparación.** *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converge, y* $0 \leq a_k \leq b_k$, *entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge; si* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *diverge y* $0 \leq c_k \leq d_k$, *entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ *diverge.*

3. **Criterio de p-series.** $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ *converge si* $p > 1$ *y diverge a* ∞ *(esto es, las sumas parciales crecen sin cota si* $p \leq 1$.

4. **Criterio de la razón.** *Suponga que* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *existe y es estrictamente menor que 1. Entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\ n}$ *converge absolutamente. Si el limite es estrictamente mayor que que 1, la serie diverge. Si el límite es igual a 1, el criterio falla.*

5. **Criterio de la raíz.** *Suponga que el limite* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *existe y es estrictamente menor que 1. Entonces* $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente. Si el limite es estrictamente mayor que 1, la serie diverge; si el limite es igual a uno, el criterio falla.*

2. Sucesiones de funciones

Las ideas de la sección anterior, sobre sucesiones y series de constantes se amplían con facilidad a sucesiones y series de funciones. Si $f_1(z), f_2(z), ...f_n(z), ...$, que denota en forma breve $f_n(z)$, una sucesión definida de funciones de z y unívoca en una región del plano z. Veamos la definición de convergencia de series complejas con analogía a la definición en series reales.

Definición 2.1. *Si dado un número positivo* ϵ *existe un número* N *(que suele depender de* ϵ *y de* z*) tal que*

$$|f_n(z) - f_N(z)| < \epsilon, \ \forall n > N$$

se dice que la sucesión converge o es convergente a $F(z)$.

Observación. El límite de $f_n(z)$ cuando $n \to \infty$ se denota $F(z)$ y se escribe $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = F_n(z)$.

Si una sucesión converge para todos los valores (o puntos) z en una región $\mathcal{R}$,se dice que $\mathcal{R}$ es la *región de convergencia* de la sucesión. Si una sucesión no converge en algún valor (punto) z, se dice que es *divergente* en z.

Supóngase que $f_n : A \to \mathbf{C}$ es una sucesión de funciones, todas ellas definidas en el conjunto A. Se dice que la sucesión converge puntualmente si, para cada $z \in A$, la sucesión $f_n(z)$ converge. El límite define una nueva función $f(z)$ en A. Una clase más importante de convergencia es la llamada convergencia uniforme y se define como sigue.

Definición 2.2. *Una sucesión* $\mathrm{f_n} : \mathrm{A} \to \mathrm{C}$ *de funciones definidas en un conjunto* A*, se dice que converge uniformemente a una función f, si para cada* $\varepsilon > 0$*, existe una N tal que* $\mathrm{n} \geq \mathrm{N}$ *implica que* $|\mathrm{f}_n(\mathrm{z}) - \mathrm{f}(\mathrm{z})| < \varepsilon$ *para cada* $\mathrm{z} \in \mathrm{A}$*. Esto se escribe como "*$f_{\mathrm{n}} \to f$ *uniformemente en A".*

- *Se dice que una serie* $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \mathrm{g_k(z)}$ *converge puntualmente, si las correspondientes sumas parciales* $\mathrm{s_n(z)} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{g_k(z)}$ *converge puntualmente.*

- *Se dice que una serie* $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \mathrm{g_k(z)}$ *converge uniformemente si* $\mathrm{s_n}$ *(z) converge uniformemente.*

Observación. La convergencia uniforme implica la convergencia puntual. La diferencia entre convergencia uniforme y puntual es la siguiente. Para la convergencia puntual, dada $\varepsilon > 0$, a la N requerida se le permite variar de punto a punto: mientras que para la convergencia uniforme, debemos poder encontrar una sola N que funcione para toda z.

No es posible dibujar funciones de variable compleja, dado que se necesitan cuatro dimensiones reales, sin embargo las nociones de las funciones de variable real nos pueden instruir para dar ejemplos.
Veamos el significado geométrico. Dado > 0, y n suficientemente grande la gráfica de $f_n(z)$ debe permanecer dentro del ϵ-tubo alrededor de la gráfica de $f(z)$. La siguiente figura ilustra la convergencia.

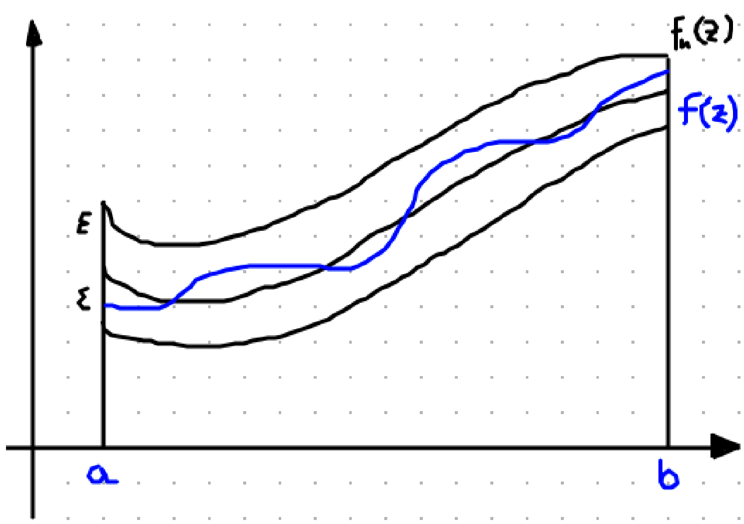

Figura 2: Convergencia uniforme en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 5. La sucesión de funciones $f_n(x) = x^n$ converge puntualmente a la función $f(x) = 0$ en el intervalo $[0, 1[$. Al valor de la función x^n, le toma mucho más acercarse al 0 para x para x cerca de 1, que cerca del 0, tomando x suficientemente cerca de 1, necesitamos valores de n arbitrariamente grandes.
La convergencia es uniforme en cualquier subintervalo cerrado $[0, r]$, con $r < 1$. La ilustración se muestra a continuación:

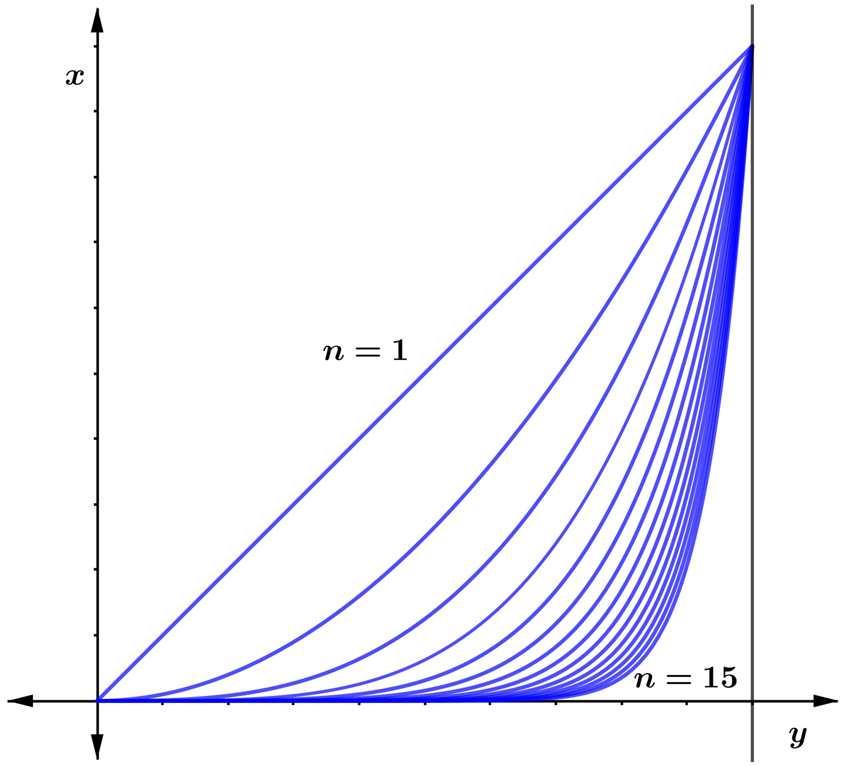

Figura 3: La convergencia de x^n a 0 no es uniforme en $\{x|0 \geq x < 1\}$.

Proposición 2.1. *Criterio de Cauchy.*

(I) *Una sucesión* $\mathrm{f_n}$ *(z) converge uniformemente en A si, para cualquier* $\varepsilon > 0$*, existe una N tal que* $\mathrm{n \geq N}$ *implica que* $|\mathrm{f_n(z) - f_{n+p}(z)}| < \varepsilon$ *para toda* $\mathrm{z \in A}$

$$y \text{ toda } \mathrm{p} = 1, 2, 3, \ldots$$

(II) *Una serie* $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ *converge uniformemente en A si, para toda* $\varepsilon > 0$, *existe una N tal que* $n \geq \mathrm{N}$ *implica que*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z) \right| < \varepsilon$$

para toda $\mathrm{z \in A}$ *y toda* $\mathrm{p} = 1, 2, \ldots$

El siguiente resultado establece una propiedad básica de la convergencia uniforme.

Proposición 2.2. *Si la sucesión* $\mathrm{f_n}$ *consiste de funciones continuas definidas en A y si* $\mathrm{f_n} \to \mathrm{f}$ *uniformemente, entonces* f *es continua en* A. *Similarmente, si las funciones* $\mathrm{g_k(z)}$ *son continuas y* $g(z) = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} \mathrm{g_k(z)}$ *converge uniformemente en* A, *entonces* g *es continua en A.*

El resultado importante es que la convergencia de funciones continuas es continua. A continuación estudiamos un ejemplo donde la convergencia no es uniforme y el límite es discontinuo.

Ejemplo 6. Considere la sucesión de funciones definidas por

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } x \leq -1/n \\ nx & \text{para } -1/n < x < 1/n \\ 1 & \text{para } 1/n \leq x \end{cases}$$

Las funciones f_n convergen puntualmente a f en toda la línea, pero la convergencia no es uniforme en cualquier intervalo que contenga a 0, ya que para valores de x distintos de 0 y muy pequeños, n tendría que ser muy grande para llevar a $f_n(x)$ dentro de una distancia específica de $f(x)$. Cada una de las funciones f_n es continua, pero la función límite no lo es, la función límite es la siguiente

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\infty < x < 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \\ 1 & \text{para } 0 < x < \infty \end{cases}$$

Note que la continuidad se pierde en $x = 0$. Observe el el gráfico de estas funciones

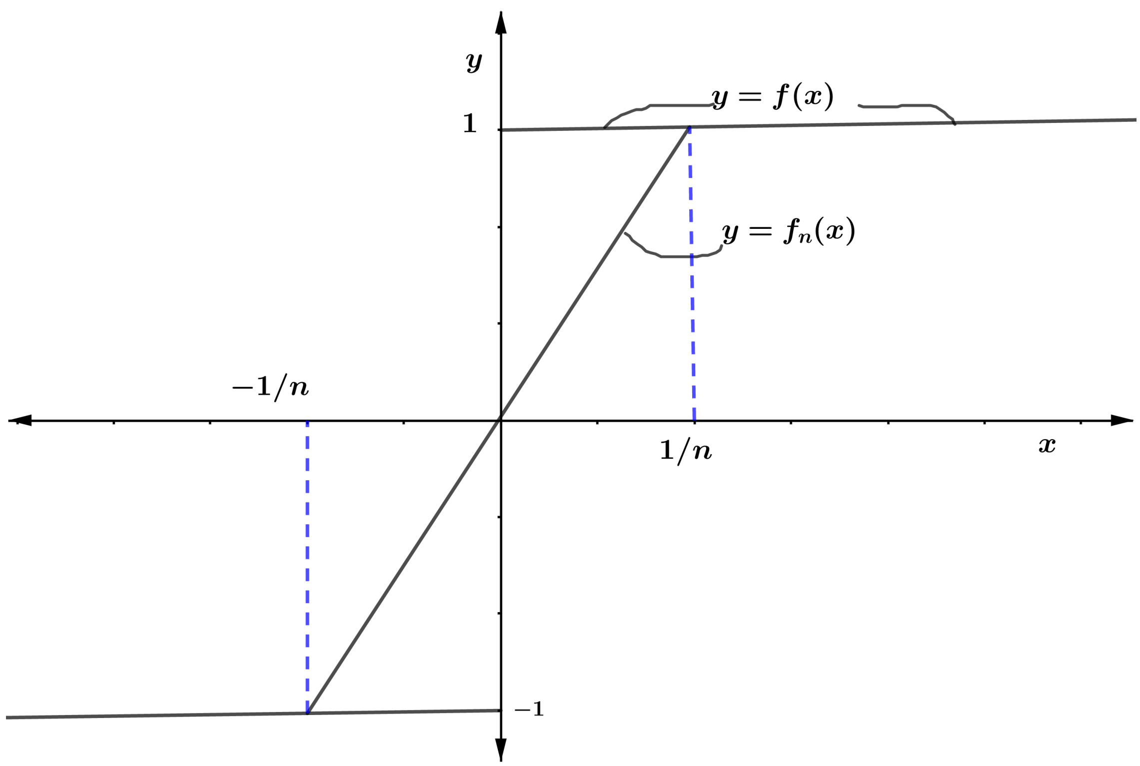

Figura 4: Un limite no uniforme de funciones continuas, necesariamente es continuo.

Proposición 2.3. *Sea g_n una sucesión de funciones definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$. Suponga que existe una sucesión de constantes reales $M_n \geq 0$ tal que*

(I) $|\mathrm{g_n(z)}| \leq \mathrm{M_n}$ *para toda* $\mathrm{z} \in \mathrm{A}$. **y**

(II) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *converge.*

Entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ *convergente absoluta y uniformemente en A.*

Ejemplo 7. En este ejemplo se demostrará que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ converge uniformemente en los conjuntos de la forma $A_r = \{z, |z| < r\}$, para cada $r \in [0, 1[$.

Aquí $g_n(z) = z^n/n$ y $\mathrm{l}g_n(z)| = |z|^n/n \leq r^n/n$ ya que $|z| \leq r$. Por lo tanto, hacemos $M_n = r^n/n$. Pero $r^n/n \leq r^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge para $0 \leq r < 1$. Así, ΣM_n converge y por el criterio M de Weierstrass, la serie dada converge uniformemente en A_r. Esta converge puntualmente en $A = \{z, |z| < 1\}$, ya que cada $z \in A$ está en alguna A_r, para r suficientemente cerca de 1.

Sin embargo, esta serie no converge uniformemente en A. En efecto, si lo hiciera, $\Sigma x^n/n$ convergería uniformemente en $[0, 1[$.

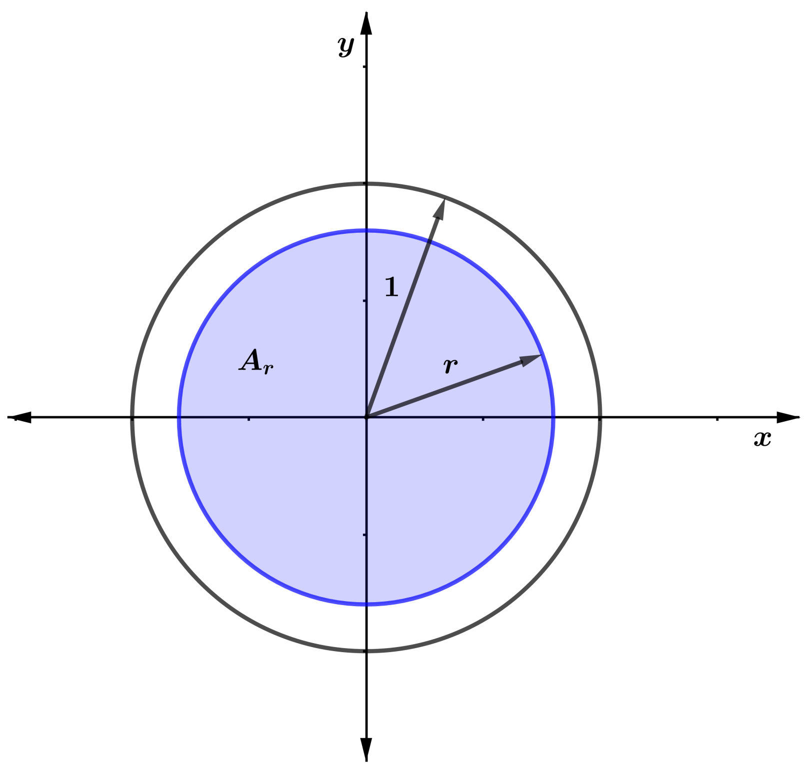

Figura 5: Un limite no uniforme de funciones continuas, necesariamente es continuo.

Suponga que esto fuera cierto, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existiría una N tal que $n \geq N$ implicaría que

$$\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots + \frac{x^{n+p}}{n+p} < \varepsilon$$

para toda $x \in [0, 1[$ y $p = 0, 1, 2, \ldots$ Pero la serie de tipo armónico

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \cdots$$

diverge a infinito (esto es, las sumas parciales $\to \infty$) y, por tanto, podemos escoger p tal que

$$\frac{1}{N} + \cdots + \frac{1}{N+p} > 2\varepsilon$$

Enseguida, escogemos x tan cerca de 1 que $x^{N+p} > \frac{1}{2}$. Entonces

$$\frac{x^N}{N} + \cdots + \frac{x^{N+p}}{N+p} > x^{N+p}\left(\frac{1}{N} + \cdots + \frac{1}{N+p}\right) > \varepsilon$$

lo cual es una contradicción. Sin embargo, nótese que $g(z)$ es, no obstante, continua en A pues es continua en cada z, ya que cada z está en alguna A_r, en la cual tenemos convergencia uniforme.

2.1. Series de funciones

A partir de la sucesión de funciones $f_n(z)$ se forma una nueva sucesión $S_n(z)$, que se define de la manera siguiente:

$$S_1(z) = f_1(z)$$

$$S_2(z) = f_1(z) + f_2(z) + ... + f_n(z)$$

$$\vdots$$

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + ... + f_n(z)$$

donde $S_n(z)$, que se conoce como la *n-ésima suma parcial*, es la suma de los n primeros términos de la sucesión $f_n(z)$.
La sucesión $S_1(z), S_2(z), ...oS_n(z)$ se representa simbólicamente como

$$f_1(z) + f_2(z) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \tag{1}$$

y se llama serie infinita. Si $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$, se dice que la serie es *convergente* y que $S(z)$ es su *suma*; si no es así, se dice que la serie es *divergente*. En ocasiones se escribe también $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$

como $\sum f_n(z)$ o $\sum f_n$ para simplificar.
Como ya se dijo, una condición necesaria para que una serie (1) converja es que $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = 0$, pero esta condición no es suficiente.
Si una serie converge para todos los valores (puntos) z en una región $\mathcal{R}$, se dice que $\mathcal{R}$ es la *región de convergencia* de esa serie.

Ejemplo 8. Se demostrará que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) = 1$ para toda z.

Dado un número $\epsilon > 0$ hay que hallar un N tal que $|1 + z/n - 1| < \epsilon$ para $n > N$. Así, $|z/n| < \epsilon$, es decir, $|z|/n < \epsilon$ si $n > |z|/\epsilon = N$.

Ejemplo 9. Pruebe que, para $|z| < 1$, la serie $z(1-z) + z^2(1-z) + z^3(1-z) + ...$ converge y encuentre su suma.
Solución.
La suma de los primeros n términos de la serie es

$$S_n(z) = z(1-z) + z^2(1-z) + ... + z^n(1-z)$$
$$S_n(z) = z - z^2 + z^2 - z^3 + ... + z^n - z^{n+1} = z - z^{n+1}$$

Ahora, $|S_n(z) - z| = |-z^{n+1}| = |z|^{n+1} < \epsilon$, para $(n+1)ln\,|z| < ln\epsilon$, es decir, $n+1 > ln\epsilon/ln\,|z|$ o $n > (ln\epsilon/ln\,|z|) - 1$. Si $z = 0$, $S_n(0) = 0$ y $|S_n(0) - 0| < \epsilon$ para toda n. Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = z$, la suma buscada para toda z tal que $|z| < 1$.

Ejemplo 10.
1. Demuestre que la sucesión $1/1 + nz$ converge uniformemente a cero para todo z tal que $|z| \geq 2$.
2. ¿Puede extenderse la región de convergencia uniforme del inciso 1? Explique.

Demostración.

1. Se tiene que $|(1/1+nz) - 0| < \epsilon$ cuando $1/|1+nz| < \epsilon$ o $|1+nz| > 1/\epsilon$. Ahora, $|1+nz| \leq |1| + |nz| = 1 + n|z|$ y $1 + n|z| \geq |1+nz| > 1/\epsilon$ para $n > (1/\epsilon - 1/|z|)$. Por tanto, esta sucesión converge a cero para $|z| > 2$.
   Para determinar si esta sucesión converge uniformemente a cero, observe que en $|z| \geq 2$ el mayor valor de $(1/\epsilon - 1/|z|)$ corresponde a $|z| = 2$ y está dado por $\frac{1}{2}(1/\epsilon) - 1 = N$. Se sigue que $|(1/1+nz) - 0| < \epsilon$ para todo $n > N$, donde N sólo depende de ϵ y no de la z particular en $|z| \geq 2$. Por tanto, esta sucesión converge uniformemente a cero en esta región.
2. Si δ es cualquier número positivo, el mayor valor de $((1/\epsilon) - 1)/|z|$ en $|z| \geq \delta$ se obtiene cuando $|z| = \delta$ y está dado por $((1/\epsilon) - 1)/\delta$. Como en el inciso 1, se sigue que esta sucesión converge uniformemente a cero para todo z tal que $|z| \geq \delta$, es decir, en toda región que excluya todos los puntos que se encuentren en una vecindad de $z = 0$.
   Como δ puede elegirse arbitrariamente cercana a cero, se sigue que la región del inciso 1 puede extenderse considerablemente.

2.2. Serie de potencias

Una serie de la forma

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \tag{2}$$

se llama *serie de potencias* en $z - a$. Esta serie (2) en ocasiones se escribe, de manera abreviada, $\sum a_n(z-a)^n$.
Es claro que la serie de potencias (2) converge para $z = a$, y éste puede ser el único punto en el que converja. Pero, en general, esta serie converge también en otros puntos. En ese caso, puede mostrarse que existe un número positivo R tal que (2) converja para $|z-a| < R$ y diverja para $|z-a| > R$, y para $|z-a| = R$ *pueda converger o pueda no converger.*
Geométricamente, si es una circunferencia de radio R con centro en $z = a$, la serie (2) converge en todos los puntos interiores de y diverge en todos los puntos exteriores de , y sobre la circunferencia puede converger o puede no converger. Se considera los casos especiales en los que $R = 0$ y $R = \infty$, respectivamente, son los casos en los que (2) converge sólo en $z = a$ o converge para todo valor (finito) de z. Debido a esta interpretación geométrica, R suele conocerse como *radio de convergencia* de (2), y el círculo correspondiente, como *círculo de convergencia.*

Ejemplo 11. Suponga que una serie de potencias $\sum a_n z^n$ converge para $z = z_0 \neq 0$. Demuestre que esta serie converge:

1. Absolutamente para $|z| < |z_0|$
2. Uniformemente para $|z| \leq |z_1|$, donde $|z_1| < |z_0|$

Demostración.

1. Como $\sum a_n z_0^n$ converge, $\lim_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$, y puede hacerse $|a_n z_0^n| < 1$ al elegir n lo bastante grande, es decir, $|a_n| < 1/|z_0|^n$ para $n > N$. Entonces

$$\sum_{N+1}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{N+1}^{\infty} |a_n|\,|z|^n \leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{|z|^n}{|z_0|^n} \ (1)$$

   Pero la última serie en (1) converge para $|z| < |z_0|$ y así, de acuerdo con el criterio de la comparación, la primera serie converge, es decir, la serie dada es absolutamente convergente.

2. Sea $M_n = |z_1|^n / |z_0|^n$. Entonces $\sum M_n$ converge, porque $|z_1| < |z_0|$. Como en el inciso 1, $|a_n z^n| < M_n$ para $|z| \leq |z_1|$, de manera que, de acuerdo con el criterio M de Weierstrass, $\sum a_n z^n$ es uniformemente convergente.
   Se concluye que una serie de potencias es uniformemente convergente en toda región comprendida por completo en el interior de su círculo de convergencia.

Ejemplo 12. Demuestre que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y la correspondiente serie de derivadas $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ tienen el mismo radio de convergencia.

Demostración.

Sea $R > 0$ el radio de convergencia de $\sum a_n z^n$. Sea $0 < |z_0| < R$. Entonces, como en el Ejemplo 6, puede elegirse N de manera que $|a_n| < 1/|z_0|^n$ para $n > N$. Así, para $n > N$, los términos de la serie $\sum |n a_n z^{n-1}| = \sum n |a_n| |z|^{n-1}$ pueden hacerse menores que los términos correspondientes de la serie $\sum n(|z|^{n-1})/|z_0|^n$, la cual, de acuerdo con el criterio del cociente, converge para $|z| < |z_0| < R$.

Por tanto, $\sum n a_n z^{n-1}$ converge absolutamente en todos los puntos tales que $|z| < |z_0|$ (sin importar lo cerca de R que esté $|z_0|$), es decir, para $|z| < R$. Pero si $|z| > R$, $\lim_{n\to\infty} a_n z^{n-1}$ y por ende $\lim_{n\to\infty} n a_n z^{n-1} \neq 0$, de manera que $\sum n a_n z^{n-1}$ no converge. Así, R es el radio de convergencia de $\sum n a_n z^{n-1}$. Esto también es válido si $R = 0$.

Observe que, para valores de z tales que $|z| = R$, la serie de las derivadas puede o no converger.

2.3. Algunos teoremas importantes

A manera de referencia se presenta a continuación una lista de algunos de los teoremas más importantes relacionados con sucesiones y series. Muchos resultarán familiares por sus análogos para variables reales.

Teoremas generales

Teorema 2.1. *Si una sucesión tiene un límite, este límite es único [es decir, no hay otro].*

Teorema 2.2. *Sea $u_n = a_n + ib_n$, $n = 1, 2, 3, ...$, donde a_n y b_n son reales.Así, una condición necesaria y suficiente para que u_n converja es que a_n y b_n converjan.*

Teorema 2.3. *Sea a_n una sucesión real con la propiedad de que*
i) $a_{n+1} \geq a_n$ o $a_{n+1} \leq a_n$
ii) $|a_n| < M$ (una constante)
Así, a_n converge.
Si se satisface la primera condición de la propiedad i), se dice que la sucesión es monótona creciente; si se satisface la segunda condición de la propiedad i), se dice que la sucesión es monótona decreciente. Si se satisface la propiedad ii), se dice que la sucesión es acotada. Por tanto, este teorema establece que toda sucesión monótona (creciente o decreciente) y acotada tiene un límite.

Teorema 2.4. *Una condición necesaria y suficiente para que u_n converja es que, dado un $\epsilon > 0$, pueda hallarse un número N tal que $|u_p - u_q| < \epsilon$ para toda $p > N$, $q > N$.*
Este teorema, que tiene la ventaja de no requerir del límite mismo, se llama criterio de convergencia de Cauchy.

Teorema 2.5. *Una condición necesaria para que* $\sum u_n$ *converja es que* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. *Pero esta condición no es suficiente.*

Teorema 2.6. *La multiplicación de cada miembro de una serie por una constante diferente de cero no afecta la convergencia o divergencia de la serie. Si dada una serie se le elimina (o se adiciona) un número finito de términos, esto no afecta la convergencia o divergencia de la serie.*

Teorema 2.7. *Una condición necesaria y suficiente para que converja* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n)$, *donde* a_n *y* b_n *son reales, es que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converjan.*

Teorema 2.8. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *converge, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *converge. Es decir, una serie absolutamente convergente es convergente.*

Teorema 2.9. *Los términos de una serie absolutamente convergente pueden reordenarse de cualquier manera, y todas esas series reordenadas convergen a la misma suma. Asimismo, la suma, diferencia y producto de la serie absolutamente convergente son absolutamente convergentes. Esto no ocurre con las series condicionalmente convergentes*

Criterios de convergencia

Teorema 2.10. *Criterio de comparación*
a) Si $\sum |v_n|$ *converge y* $|u_n| \leq |v_n|$, *entonces* $\sum u_n$ *converge absolutamente.*
b) Si $\sum |v_n|$ *diverge y* $|u_n| \geq |v_n|$, *entonces* $\sum |u_n|$ *diverge, pero* $\sum u_n$ *puede converger o no.*

Teorema 2.11. *Criterio del cociente*
Sea $\lim_{n\infty} |u_{n+1}/u_n| = L$. *Entonces* $\sum u_n$ *converge (absolutamente) si* $L < 1$ *y diverge si* $L > 1$. *Si* $L = 1$, *esta prueba no da ningún resultado.*

Teorema 2.12. *Criterio de la raíz n-ésima*
Sea $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L$. *Entonces* $\sum u_n$ *converge (absolutamente) si* $L < 1$ *y diverge si* $L > 1$. *Si* $L = 1$, *si esta prueba no da ningún resultado.*

Teorema 2.13. *Criterio de la integral*
Si $f(x) \geq 0$ *para* $x \geq a$, *entonces* $\sum f(n)$ *converge o diverge según* $\lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)dx$ *converja o diverja.*

Teorema 2.14. *Criterio de Raabe*
Sea $\lim_{n\to\infty} n(1 - |u_{n+1}/u_n|) = L$. *Entonces* $\sum u_n$ *converge (absolutamente) si* $L > 1$ *y diverge o converge condicionalmente si* $L < 1$. *Si* $L = 1$, *esta prueba no da ningún resultado.*

Teorema 2.15. *Criterio de Gauss*
Suponga que $|u_{n+1}/u_n| = 1 - (L/n) + (c_n/n^2)$, *donde* $|c_n| < M$ *para toda* $n > M$. *Entonces* $\sum u_n$ *converge (absolutamente) si* $L > 1$ *y diverge o converge condicionalmente si* $L \leq 1$.

Teorema 2.16. *Criterio de la serie alternante*
Si $a_n \geq 0$, $a_{n+1} \leq a_n$ *para* $n = 1, 2, 3, ...$ *y* $\lim_{n\infty} a_n = 0$, *entonces* $a_1 - a_2 + a_3 - ... = \sum(-1)^{n-1}a_n$ *converge.*

Teorema 2.17. *Criterio M de Wieirstrass*
Si $|u_n(z)| \leq M_n$ *es independiente de* z *en una región* $\mathcal{R}$ *y* $\sum M_n$ *converge, entonces* $\sum u_n(z)$ *es uniformemente convergente en* $\mathcal{R}$*.*

Teorema 2.18. *La suma de una serie uniformemente convergente de funciones continuas es continua, es decir, si* $u_n(z)$ *es continua en* $\mathcal{R}$ *y* $S(z) = \sum u_n(z)$ *es uniformemente convergente en* $\mathcal{R}$*, entonces* $S(z)$ *es continua en* $\mathcal{R}$*.*

Teorema 2.19. *Una serie de potencias converge uniforme y absolutamente en toda región comprendida en el interior de su círculo de convergencia.*

Teorema 2.20.

- *Una serie de potencias se diferencia término por término en el interior de su círculo de convergencia.*

- *Una serie de potencias se integra término por término a lo largo de cualquier curva* C *comprendida en el interior de su círculo de convergencia.*

- *La suma de una serie de potencias es continua en toda región comprendida en el interior de su círculo de convergencia.*

Teorema 2.21. *Teorema de Abel*
Sea R *el radio de convergencia de* $\sum a_n z^n$ *y suponga que* z_0 *es un punto sobre la circunferencia de convergencia, tal que* $\sum a_n z_0^n$ *converja. Así,* $\lim\limits_{z \to z_0} \sum a_n z^n = \sum a_n z^n$*, donde* $z \to z_0$ *desde el interior del círculo de convergencia. Es fácil efectuar extensiones a otras series de potencias.*

Teorema 2.22. *Suponga que* $\sum a_n z^n$ *converge a cero para toda* z *tal que* $|z| < R$*, donde* $R > 0$*. Así,* $a_n = 0$*. De manera equivalente, si* $\sum a_n z^n = \sum b_n z^n$ *para toda* z *tal que* $|z| < R$*, entonces* $a_n = b_n$*.*

3. Ejercicios

Ejercicio 3.1. Con la definición, demuestre:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-2z}{n+z} = 3$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{nz}{n^2+z^2} = 0$

Ejercicio 3.2. Verifique que la serie $\frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} + ... = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{2^n}$ converge para $|z| < 2$ y encuentre su suma.

Ejercicio 3.3. Demuestre que, para toda z finita, $\lim_{n\to\infty} z^n/n! = 0$.

Ejercicio 3.4. Demuestre que $u_n(z) = 3z + 4z^2/n$, $n = 1, 2, 3, ...$, converge uniformemente a $3z$ para toda z en el interior de la circunferencia $|z| = 1$. ¿Puede ampliarse la circunferencia?

Ejercicio 3.5. Demuestre que la serie $1 + az + a^2z^2 + ...$ converge uniformemente a $1/(1 - az)$ en el interior y sobre la circunferencia $|z| = R$, donde $R < 1/|a|$.

Ejercicio 3.6. Investigue la convergencia absoluta y uniforme de la serie
$\frac{z}{3} + \frac{z(3-z)}{3^2} + \frac{z(3-z)^2}{3^3} + \frac{z(3-z)^3}{3^4} + ...$

Ejercicio 3.7. Suponga que cada una de dos series es absoluta y uniformemente convergente en $\mathcal{R}$. Demuestre que en $\mathcal{R}$ su producto es absoluta y uniformemente convergente.

Ejercicio 3.8. Para las series siguientes, determine la región en la que la serie es uniformemente convergente:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^{2n}}{n^2}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)z^n}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2 + |z|^2}$

Ejercicio 3.9. 1. Demuestre que $1/(1 + z^2) = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + ...$ para $|z| < 1$.

2. Demuestre que $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$

4. Bibliografía

- [1] Marsden, J. E., Hoffman, M. J., Buenrostro, G. I. (1996). Análisis básico de variable compleja. Trillas.
- [2] Spiegel, M. R. (1999). Variable compleja. McGraw-Hill.
- [3] Lunts, V. G. (1977). Problemas sobre la teoria de funciones de variable compleja. Mir.
- [4] Brown J. Churchill R. (2004). Variable compleja y aplicaciones. Mc GrawHill. México.
- [5] Spiegel, M. (2001). Variable Compleja. Serie Schaum: Mc Graw-Hill: México.

Fin de la Unidad.