UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
MODALIDAD A DISTANCIA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES
Y
MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA
ASIGNATURA: VARIABLE COMPLEJA

Unidad 2: Introducción al estudio de funciones complejas

Objetivo General:

Establecer las características de las funciones elementales de variable compleja, analizando su continuidad, realizando interpretación geométrica y abordando desde el punto de vista analítico consolidando así los conceptos previos de topología.

Objetivos Específicos:

1. Estudiar de forma gráfica y analíticamente las funciones polinomiales.
2. Describir las principales propiedades geométricas de las funciones racionales de variable compleja.
3. Introducir el estudio de las transformaciones de Mobius.
4. Estudiar la continuidad de funciones elementales de variable compleja.
5. Describir analítica y geométricamente las funciones elementales de variable compleja.
6. Estudiar puntos de ramificación.

Conocimientos Previos:

1. Recuerda el concepto general de una función.
2. Continuidad de funciones.
3. Topología sobre $\mathbb{C}$.
4. Cálculo Diferencial e Integral.

Índice

Resumen de la unidad

En esta unidad daremos un recorrido sobre el comportamiento de las funciones complejas, iniciando con las funciones polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas e hiperbólicas, estudiando la continuidad con la topología que se ha definido para $\mathbb{C}$ en la unidad 1 de manera introductoria. Al final de esta sección estudiaremos los puntos de ramificación y ramas para concluir con la sección de ejercicios sobre los temas expuestos. Les felicitamos por su esmero, dedicación, y compromiso, facilitamos al final del material ejercicios para consolidar los conceptos brindados.

1. Funciones elementales

En esta sección definiremos las funciones elementales de variable compleja con similitud a los conceptos abordados sobre esta clase de funciones cuando se trabaja con variable real. Estas temáticas serán la base para el estudio de las funciones holomorfas o analíticas, para realizar un análisis complejo, en particular a la teoría de las aplicaciones conformes, la cual tiene muchas aplicaciones en ingeniería, pero es ampliamente usada también en teoría de números analítica.

Recordemos que una función real $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ de variable real sobre el conjunto de números reales es una función que asigna a un número real $x \in A$ otro número real $y = f(x) \in B$. De manera análoga definimos una función compleja $f(z)$ como sigue:

Definición 1.1. *Supongamos que A es un subconjunto del plano complejo C, se denomina función compleja de una variable compleja $f(z)$ a una aplicación*

$$f : A \to C$$

tal que a cada valor $z \in A \subseteq \mathbb{C}$ le corresponde un único número complejo $f(z)$.

Si $z = x + i \cdot y$, la función $f(z)$ se puede expresar de la forma

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$

donde u y v son funciones de dos variables reales que representan respectivamente la parte real y la parte imaginaria de $f(z)$.

1.1. Funciones polinomiales

Una de las funciones elementales de variable compleja son las funciones polinomiales $f(z)$, las cuales tienen la forma siguiente:

$$f(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0, a_j \in C \, \text{para} \, j = 0, \ldots, n$$

Las partes real e imaginaria de una función polinómica compleja son funciones polinómicas de dos variables reales. Así, por ejemplo:

$$f(z) = 2z^2 + 3 = 2(x + i \cdot y)^2 + 3 = \left(2\left(x^2 - y^2\right) + 3\right) + i \cdot (4x \cdot y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$

Es importante resaltar que una función polinómica compleja es aquella que se puede expresar como una combinación lineal de potencias de exponente natural de z, ya que puede ocurrir que $u(x, y)$ y $v(x, y)$ sean funciones polinómicas en $\mathbb{R}^2$ y sin embargo $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ no sea un polinomio complejo.

Un ejemplo es la función $f(z) = (x^2 + y^2) + i \cdot (x^2 - y^2)$, que no se puede expresar de la forma $az^2 + b \cdot z + c$, y por tanto no es un polinomio complejo.

Ejemplo 1. La función $f(z) = z^2 + 1$ se puede expresar como:

$$f(z) = (x + i \cdot y)^2 + 1 = x^2 - y^2 + 2x \cdot y \cdot i + 1 = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$

con $u(x, y) = x^2 - y^2 + 1$ y $v(x, y) = 2x \cdot y$

1.2. Funciones racionales

La definición de funciones racionales complejas se retoma de manera análoga a la establecida en el conjunto de números reales, la cual se define como sigue:

Definición 1.2. *Sean $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios complejos. Definimos la función racional compleja como*

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

donde $Q(z) \neq 0$.

Note que al igual que en el caso real, las funciones racionales se pueden definir en todo el plano complejo, salvo en el conjunto de los números complejos que anulen el denominador, que son las raíces del polinomio $Q(z)$.

Ejemplo 2. Si $P(z) = 2z^3 - 2z + 3$ y $Q(z) = z^2 + 1$, podemos escribir la función racional

$$f(z) = \frac{2z^3 - 2z + 3}{z^2 + 1}$$

la cual está definida para todo valor complejo del plano salvo para $z = i$ y $z = -1$, que son las raíces del polinomio $Q(z)$.

1.3. Funciones exponenciales

De cálculo sabemos que el desarrollo en serie de Taylor de la función exponencial e^x alrededor de $x_0 = 0$ viene dada por:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

y si sustituimos x por iy, donde $y \in \mathbb{R}$ todo seguirá funcionando bien, en cuestiones de convergencia de series, obtenemos

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \cdots \\ &= 1 + iy + \frac{i^2y^2}{2!} + \frac{i^3y^3}{3!} + \frac{i^4y^4}{4!} + \cdots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots \end{aligned}$$

por otro lado tenemos que

$$i^{4k+l} = \begin{cases} 1 & si \quad l \equiv 0\, md\,(4) \\ i & si \quad l \equiv 1\, md\,(4) \\ -1 & si \quad l \equiv 2\, md\,(4) \\ -i & si \quad l \equiv 3\, md\,(4) \end{cases}$$

ahora, reordenando los términos con parte real y parte imaginaria obtenemos

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta. \end{aligned}$$

ahora, tomando en cuenta la propiedad de números reales, $e^{m+n} = e^m e^n$, tenemos la siguiente definición:

Definición 1.3. *Dado $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, se tiene que*

$$e^z = e^x \left(\cos(y) + i \operatorname{sen}(y)\right).$$

Nótese que esta función así definida extiende a la función exponencial real.

El siguiente teorema resume algunas propiedades y nos dice que nuestra definición es la adecuada.

Teorema 1.1. *Sean z y w números complejos, la función exponencial e^z cumple las siguientes condiciones*

a) $e^{z+w} = e^z e^w$.

b) $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$.

c) $|e^{x+iy}| = e^x$

d) e^z *es periódica, y todos sus períodos son de la forma* $2\pi n i$, $n \in \mathbb{Z}$.

e) $e^z = 1$ *si y sólo si* $z = 2\pi n i$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ideas de la prueba: para la demostración en el caso a) debemos usar la definición de exponencial y propiedades de la suma de ángulos para la función seno y coseno. En el caso b) note que e^x nunca es nula al igual que el complejo $\cos(y) + i \operatorname{sen}(y)$ dado que tiene módulo 1 y nunca la parte real e imaginaria puede ser cero al mismo tiempo.
La periodicidad de la exponencial compleja se hereda de la periodicidad de las funciones seno y coseno.

Ahora nos interesa saber el efecto de la exponencial en algún subconjunto de $\mathbb{C}$, el problema es que ahora, los subconjuntos podrían ser muy complicados y tratar de ver en sí el efecto geométrico es imposible, así que nos limitaremos a ciertos tipos de conjuntos elementales, que permitan ver el efecto geométrico de la función exponencial.

A continuación se muestran algunos casos:

Ejemplo 3. Consideremos la recta horizontal $y = ki$; $k \in \mathbb{R}$ fija, y calculemos la exponencial de $z = x + ik$:

$$e^{x+ik} = e^x(\cos(k) + i \operatorname{sen}(k))$$

es decir, que la función exponencial nos lleva a todos aquellos puntos con módulo e^x, en la dirección del ángulo k, la siguiente figura muestra la aplicación geométrica en la imagen de la izquierda y el ángulo k en la derecha. Observe figura 1.

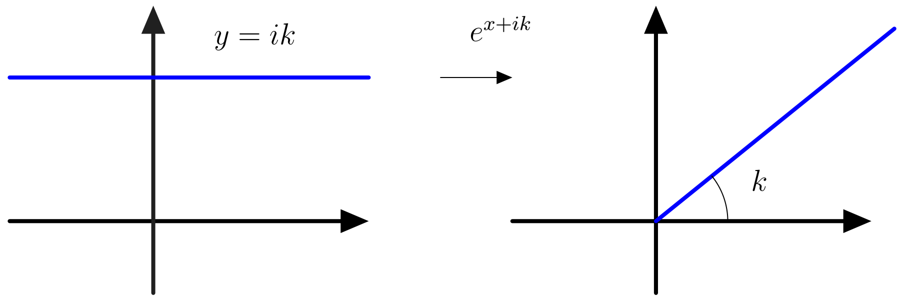

Figura 1: Exponencial en rectas horizontales.

Ejemplo 4. Si consideremos un recta vertical $x = k$. El efecto de la función exponencial en los puntos de la forma $z = k+iy$ es un círculo de radio e^k, recorriendo éste un número infinito de veces, la siguiente figura muestra el efecto de la función exponencial para el caso de rectas verticales.

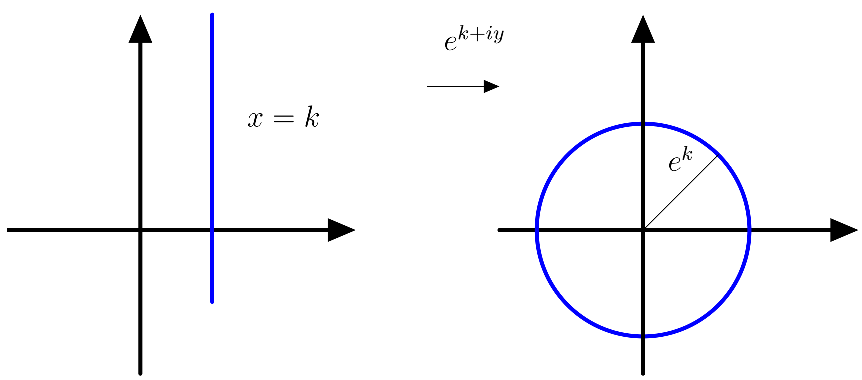

Figura 2: Exponencial en rectas vérticales.

1.4. Funciones logarítmicas

Nuestro propósito es definir una extensión de la función logaritmo con propiedades similares a las que tenemos cuando trabajamos con variable real y que a la vez sea la inversa de la función exponencial definida anteriormente; sin embargo, como la exponencial es una función periódica, deberemos de restringir el codominio del logaritmo. Antes de ello veamos de que forma podemos establecer una biyección entre una granja horizontal y el plano complejo menos el origen:

Teorema 1.2. *Sea*

$$A_{y_0} = \{x + iy \in \mathbb{C}| \quad y_0 \leq y < y_0 + 2\pi\},$$

entonces e^z es una biyección entre A_0 y $\mathbb{C} - \{0\}$.

Demostración. Sean z_1 y z_2 complejos tales que $e^{z_1} = e^{z_2}$ entonces $e^{z_1 - z_2} = 1$ y $z_1 - z_2 = 2\pi n i$. Ahora note que la distancia entre las partes imaginarias de dos puntos cualesquiera en A_{y_0} es menor que 2π, por lo que $z_1 = z_2$, de manera que e^z restringida a A_{y_0} es inyectiva.

Ahora, dado que $w \in \mathbb{C} - \{0\}$, $e^{x+iy} = w$ si y sólo si $e^x = |w|$ y $e^{iy} = \dfrac{w}{|w|}$, lo cual se traduce en $\log |w| = x$ y $\arg\left(\dfrac{w}{|w|}\right) = y$. La segunda ecuación tiene un número infinito de soluciones, una de las cuales satisface

$$y_0 \leq y < y_0 + 2\pi.$$

Por consiguiente, e^z restringida a A_{y_0} es sobreyectiva. ■

Recordemos que inyectividad más sobreyectividad equivale a biyectividad.

Geométricamente podemos observar que la región o banda A_{y_0} se transforma en el plano complejo menos el origen. La figura 3 ilustra este hecho.

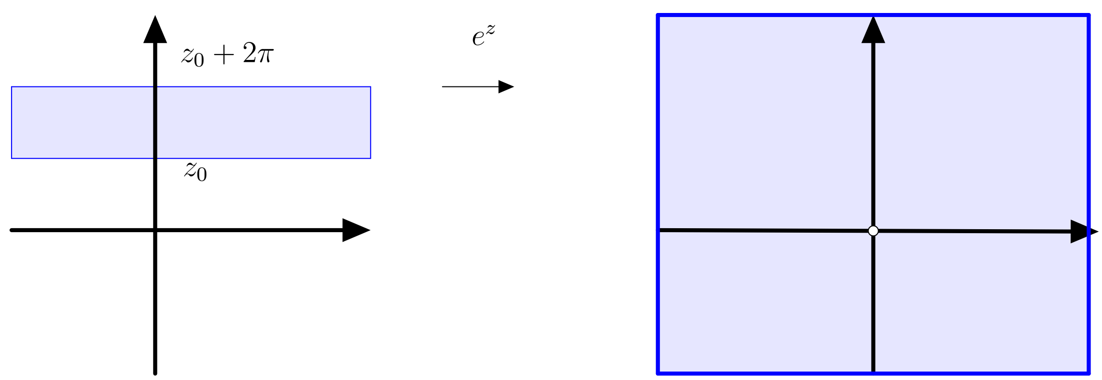

Figura 3: La región A_{y_0} se transforma en el plano menos el origen.

A partir de la demostración del teorema anterior, nos induce a considerar la siguiente definición del logaritmo de un número complejo:

Definición 1.4. *La función con dominio $\mathbb{C} - \{0\}$, codominio A_{y_0} y regla de correspondencia*

$$log(z) := log|z| + i\,arg(z), \quad arg(z) \in [y_0, y_0 + 2\pi)$$

se llama Rama de logaritmo. Esta función se denota usualmente por $log(z)$, obsérvese, sin embargo, que hay una infinidad de estas funciones.

Reemplazando el dominio por una superficie en forma de espiral infinita se puede determinar en forma unívoca la función logaritmo. Nótese que para que el logaritmo sea una función es necesario restringir el codominio, por el momento tomaremos el codominio de la forma

$$\{x + iy \in \mathbb{C}|\, y_0 \leq y < y_0 + 2\pi\}$$

ó

$$\{x + iy \in \mathbb{C}|\, y_0 < y \leq y_0 + 2\pi\}\; y_0 \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 5. Si $y_0 = 0$, entonces el intervalo es $(0, 2\pi]$ ó $[0, 2\pi)$ y

$$\log(1 + i) = \log|1 + i| + i\arg(1 + i) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.$$

Si $y_0 = \pi$, el intervalo es $(\pi, 3\pi]$, ó $[\pi, 3\pi)$, y

$$\log(1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{9\pi}{4}.$$

Teorema 1.3. *El logaritmo es la inversa de la exponencial en el siguiente sentido: Si log*(z) *representa una rama del logaritmo, entonces* $e^{log(z)} = z$, $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$. *También, si se elige la rama* $y_0 \leq y < y_0 + 2\pi$, *entonces* $log(e^z) = z$, $\forall z \in A_{y_0}$.

Teorema 1.4. *Si* z_2, $z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$, *entonces*

$$log(z_1 z_2) = log(z_1) + log(z_2) \quad mod(2\pi i).$$

La función logaritmo produce el efecto contrario de la exponencial, círculos se transforman en segmentos verticales y semirectas que parten del origen se convierten en rectas horizontales.
Esto se sigue ya que los círculos están dados por

$$r = k(\text{constante}).$$

y las semirectas por

$$\theta = k(\text{constante}).$$

La siguiente figura nos muestra la aplicación geométrica de nuestra definición de logaritmo.

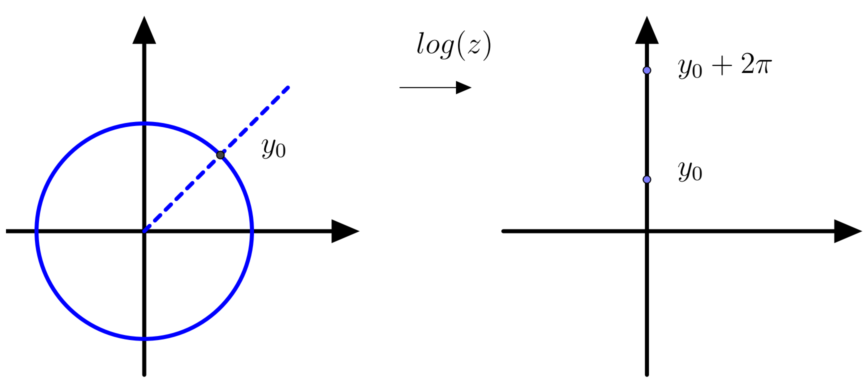

Figura 4: Geometría de la función logaritmo.

1.5. Funciones trigonométricas

De igual forma como hemos definido la función exponencial compleja, los polinomios complejos y la función logarítmo compleja podemos definir las funciones trigonométricas, a partir de las siguientes ecuaciones exponenciales:

$$e^{iy} = \cos(y) + i\,\text{sen}(y) \tag{1}$$
$$e^{-iy} = \cos(y) - i\,\text{sen}(y) \tag{2}$$

al sumar (1) y (2) obtenemos

$$e^{iy} + e^{-iy} = 2\cos(y)$$

de donde

$$\cos(y) = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

de manera similar, pero esta vez restando (1) y (1) obtenemos

$$\operatorname{sen}(y) = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

el proceso anterior sugiere la siguiente definición.

Definición 1.5. $\forall z \in \mathbb{C}$ *se tiene*

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$\tan(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)}.$$

Si y es real entonces

$$e^{iy} = +i, e^{-iy} = -i \Rightarrow= \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}).$$

Definición 1.6. *Para todo* $z \in \mathbb{C}$

$$cosz = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

Evidentemente, si z es real $\cos(z)$ y $\operatorname{sen}(z)$ se reducen a las correspondientes funciones reales.

Proposición 1.1. *Algunas de sus propiedades para todo z, $w \in \mathbb{C}$ son las siguientes:*

1. $\cos(-z) = \cos(z)$, $sen(-z) = -sen(z)$.

2. $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w)$, $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen}(z)\cos(w) + \cos(z)\operatorname{sen}(w)$.

3. $\cos(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right)$.

4. $\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$.

5. $\overline{\cos(z)} = \cos(\bar{z})$, $\overline{\operatorname{sen}(z)} = \operatorname{sen}(\bar{z})$.

6. $\operatorname{sen}(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi(k \in \mathbb{Z})$, $\cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi(k \in \mathbb{Z})$.

7. $\cos(z)$ *y* $\operatorname{sen}(z)$ *son funciones periódicas de período* $2k\pi$*, con* $(k \in \mathbb{Z})$*.*

Idea de la demostración: La primera propiedad se hereda de la paridad de la funciones trigonométricas. Para la segunda propiedad veamos un caso y queda el otro como ejercicio.

$$\begin{aligned}\cos(z)\cos(w) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w) &= \frac{1}{4}(e^{iz}+e^{-iz})(e^{iw}+e^{-iw}) + \frac{1}{4}(e^{iz}-e^{-iz})(e^{iw}-e^{-iw}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{iz}e^{iw}+e^{-iz}e^{-iw}) = \cos(z+w)\end{aligned}$$

Note que el caso 3) es un caso particular de la propiedad 2), sin embargo se resaltan las mismas propiedades que cumplen en el caso real. La identidad trigonométrica de 4) se justifica al hacer $w = -z$ en la fórmula para $\cos(z+w)$ y simplificar. El punto 5) es una consecuencia de $e^{\bar{w}} = e^{\bar{w}}$. En punto 6) observe que $\operatorname{sen}(z) = 0 \Leftrightarrow (e^{iz} - e^{-iz}) = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 \Leftrightarrow 2iz = 2k\pi i(k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow z = k\pi(k \in \mathbb{Z})$. Del apartado 3) se sigue la fórmula correspondiente para los ceros de $\cos(z)$. Para finalizar con el punto 7) basta probar la afirmación para la función $\operatorname{sen}(z)$. De la identidad

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(z+w) - \operatorname{sen}(z) &= \operatorname{sen}\left(z + \frac{w}{2} + \frac{w}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(z + \frac{w}{2} - \frac{w}{2}\right) \\ &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{w}{2}\right)\cos\left(z + \frac{w}{2}\right)\end{aligned}$$

Se sigue que $\operatorname{sen}(z+w) - sen(z) = 0$ para todo z si y sólo si $\operatorname{sen}\left(\frac{w}{2}\right) = 0$ (tomar $z = \frac{-w}{2}$, esto es equivalente a que w sea un múltiplo entero de 2π.

Observación. Como en el caso real, a partir de las funciones seno y coseno se definen las demás funciones trigonométricas:

- $\tan(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)}$, $\sec(z) = \frac{1}{\cos(z)}$, donde $z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
- $\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}(z)} = \frac{1}{\tan(z)}$, $\csc(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(z)}$, donde $z \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

1.6. Funciones hiperbólicas

Dado que ya se ha abordado el tema de la función exponencial definimos las funciones hiperbólicas como sigue:

Definición 1.7. *Para todo* $z \in \mathbb{C}$ *se definen las funciones hiperbólicas*

- $\cosh(z) := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$
- $\operatorname{senh}(z) : \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$.

De la definición anterior notemos que $\cosh(z) = \cos(iz)$ y $\operatorname{senh}(z) = -i\operatorname{sen}(iz)$. Basta considerar $z = x + iy$ y $iz = -y + ix$ y sustituir en la definición de la funciones hiperbólicas.

De estas igualdades se deducen las propiedades de las funciones hiperbólicas.

Proposición 1.2. *Las funciones hiperbólicas satisfacen las propiedades:*

a) $\cosh^2(z) - \operatorname{senh}^2 = 1$

b) Si $z = x + iy$*, entonces*

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(z) &= \operatorname{sen}(x+iy)\\ &= \operatorname{sen}(x)\cos(iy) + \cos(x)\operatorname{sen}(iy)\\ &= \operatorname{sen}(x)\cosh(y) + i\cos(x)\operatorname{senh}(y)\end{aligned}$$

donde $\cosh(y)$ *y* $\operatorname{senh}(y)$ *son las funciones hiperbólica reales.*

c) La tangente hiperbólica tiene la propiedad especial

$$\tanh(z) = \frac{\operatorname{senh}(z)}{\cosh(z)} = -i\tan(iz),$$

donde $z \neq \frac{i\pi}{2} + k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

Observación. En particular note que $\operatorname{sen}(z)$ es real si z es real, o si $z = \frac{\pi}{2} + iy + k\pi$ con $y \in \mathbb{R}$ arbitrario y $k \in \mathbb{Z}$. Análogamente, $\cos(z)$ es real si $z \in \mathbb{R}$, o si $z = iy + k\pi$ con $y \in \mathbb{R}$ arbitrario y $k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 6. Demostrar las siguientes propiedades:

a) $\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$

b) $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x + i \cos x \operatorname{senh} y$

c) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y$

d) $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$

Demostración.

Para el literal a) tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{1}{2}\left(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}\right)\\ &= \frac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i\operatorname{sen} x) + \frac{1}{2}e^{y}(\cos x + i\operatorname{sen} x)\\ &= \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y})\cos x - \frac{1}{2}i(e^{y} - e^{-y})\operatorname{sen} x\\ &= \cos x \cosh y - i\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y\end{aligned}$$

En el inciso b) se demuestra de manera semejante.

Por a) y además la identidad $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 &= \cos^2 x(1 + \operatorname{senh}^2 y) + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y \\ &= \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 y) \\ &= \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y \end{aligned}$$

Note que d) es sólo un caso similar al anterior y lo propondremos como ejercicio.

Observación. A continuación se presentan observaciones sobre la propiedades anteriores:

- Por las fórmulas a) y b), vemos que las funciones seno y coseno son periódicas, con período 2π, igual que en los reales. Luego se concluye la periodicidad de $\tan z$ y $\cot z$ tienen período π.

- Las identidades c) y d) muestran una diferencia esencial entre el seno y coseno reales y complejos. Mientras que $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ y $|\cos x| \leq 1$, las funciones seno y coseno complejas ya no están acotadas, sino que tenderán a infinito en valor absoluto cuando $y \to \infty$, ya que $\operatorname{senh} y \to \infty$.

Ejemplo 7. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos z = 5$

b) $\cos z = 0$

Solución.

Por la definición, tenemos $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = 5$. Si multiplicamos por $2e^{iz}$ obtenemos una ecuación cuadrática en la variable $w = e^{iz}$

$$w^2 - 10w + 1 = 0$$

y usando la fórmula general de segundo grado, obtenemos dos raíces

$$w = 5 - 2\sqrt{6}, w = 5 + 2\sqrt{6}$$

Las dos raíces son reales, lo cual nos lleva a lo siguiente
$e^{i(x+iy)} = e^{ix}e^{-y} = 5 - 2\sqrt{6}$ y $e^{ix} = 1$ y $e^{-y} = 5 \pm 2\sqrt{6}$.
Por lo tanto $x = 2n\pi$, $y = \pm 2.92$, así $z = \pm 2n\pi \pm 2.92i$.

Para el inciso b) tenemos por el mismo método,

$$
\begin{aligned}
\cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = 0,\\
e^{2iz} + 1 &= 0,\\
e^{iz} &= \pm\sqrt{-1}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{ix}e^{-y} &= \pm i \Rightarrow y = 0,\\
\cos xi \operatorname{sen} x &= \pm i \Rightarrow \cos x = 0, \operatorname{sen} x = \pm 1,
\end{aligned}
$$

$$x = \pm(2n+1)\frac{\pi}{2}, n = 0, 1, 2...$$

2. Continuidad de funciones complejas

Recordemos brevemente los conceptos previos que hemos estudiado sobre espacios topológicos para contextualizar la definición de límite la cual será necesaria para estudiar la continuidad de una función en variable compleja.

Definición 2.1. *Algunos de los conceptos topológicos básicos se muestran a continuación:*

i) *$A \subset \mathbb{C}$ es abierto si contiene un entorno de cada uno de sus puntos:*

$$\forall a \in A, \exists r > 0 \quad t.q. \quad D(a; r) \subset A$$

ii) *$A \subset \mathrm{C}$ cerrado $\Longleftrightarrow \mathrm{C} - A$ es abierto.*

iii) *$A \subset C$ es compacto $\Longleftrightarrow$ A es cerrado y acotado (se dice que A es acotado si $\exists R > 0$ t.q. $A \subset D(0; R)$)*

iv) *Una región ó dominio es un subconjunto abierto conexo y no vacío de $\mathbb{C}$.*

Una definición importante también es la de un conjunto conexo.

Definición 2.2. *Decimos $A \subset \mathbb{C}$ abierto es conexo si para todo par de puntos $z, w \in A$ hay una curva continua $\gamma : [0, 1] \to A$ t.q. $\gamma(0) = z, \gamma(1) = w$.*

Otra forma de decir que un espacio es conexo es decir que dos puntos cualesquiera están conectados por una curva continua o que es de una sola pieza.

2.1. Límites y sus propiedades

Sea f una función definida en todos los puntos z en algún vecindario de z_0. El hecho de que $f(z)$ tenga límite en w_0 cuando z_0 se acerca a z_0 lo escribiremos

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \tag{3}$$

la ecuación 3 significa que para cada número positivo ϵ, existe un número positivo δ tal que

$$|f(z) - w_0| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta. \tag{4}$$

Geométricamente, esto significa que para cada ϵ vecindario $|w - w_0| < \epsilon$ de w_0 existe un δ vecindario $0 < |z - z_0| < \delta$ de z_0 tal que todo punto z en este tiene una imagen w que se extiene en el ϵ vecindario. Si f tiene valor constante w_0, la imagen de z es siempre el centro de este vecindario.

Teorema 2.1. *Si el límite de una función $f(z)$ existe en un punto z_0 entonces dicho límite es único.*

Ejemplo 8. Si $f(z) = \dfrac{i\overline{z}}{2}$ en el disco abierto $|z| < 1$. Entonces

$$\lim_{z \to 1} f(z) = \frac{i}{2}$$

Observe que cuando z esá en el disco $|z| < 1$ tenemos

$$\left| f(z) - \frac{i}{2} \right| = \left| \frac{i\overline{z}}{2} - \frac{i}{2} \right| = \frac{|z-1|}{2}.$$

Entonces para cualquier z y cada número positivo ϵ

$$\left| f(z) - \frac{i}{2} \right| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - 1| < 2\epsilon.$$

Así la condición 4 se satisface para los puntos en la región $|z| < 1$ cuando δ es igual a 2ϵ o cualquier número más pequeño que éste.

Ejemplo 9. Si

$$f(z) = \frac{z}{\overline{z}}$$

el límite

$$\lim_{z \to 0} f(z)$$

no existe, para ver esto, hacemos $z = (x, y)$ y nos aproximaremos al origen por las direcciones de los ejes coordenados, cuando $z = (x, 0)$ es un punto distinto de cero en el eje real, al igual que $(0, y)$ es un punto distinto de cero en el eje imaginario, así tenemos que para el primer caso $f(z) = \dfrac{x + i0}{z - i0} = 1$, mientras que para el segundo caso $f(z) = \dfrac{0 + iy}{0 - iy} = -1$. Así acercándonos por los ejes coordenados al origen tenemos que el límite toma valores de 1 para el caso del eje real y -1 para el eje imaginario, pero por el teorema de unicidad esto no puede ser, por tanto el límite no existe.

Al igual como hicimos para el caso real, ahora estamos interesados en la construcción de un álgebra de límites para funciones de variable compleja, pero antes estableceremos un resultado adicional, el cual se presenta en el siguiente teorema

Teorema 2.2. *Supongamos que*

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y); \quad z = x + iy$$

y

$$z_0 = x_0 + iy_0; \quad w_0 = u_0 + iv_0.$$

Entonces se cumple

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \quad y \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

si y sólo si

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$$

Demostración. Ejercicio. ■

Teorema 2.3. *Supóngase que*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_1 \quad y \quad \lim_{z\to z_0} g(z) = w_2$$

entonces

a) $\lim_{z\to z_0}(f(z) + g(z)) = w_1 + w_2$.

b) $\lim_{z\to z_0}(f(z) \cdot g(z)) = w_1 \cdot w_2$.

c) $\lim_{z\to z_0}(f(z)/g(z)) = w_1/w_2$, *siempre que* $w_2 \neq 0$.

2.2. Límites que involucran el punto al infinito

En algunas ocasiones conviene incluir con el plano complejo el punto al infinito denotado por ∞ y usaremos límites para esto.

Definición 2.3. *Denotaremos por* $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *la extensión del plano complejo, esta forma de extender el plano complejo también es conocida como la esfera de Riemann.*

Hay una correspondencia biyectiva entre $\mathbb{S}^2$ -(0,0,1) y el plano complejo, al agregar el polo norte al primer conjunto y el infinito al plano complejo tenemos la biyección deseada, la correspondencia es llamada la proyección estereográfica.

Teorema 2.4. *Si* z_0 *y* w_0 *son puntos en los planos* z, w *respectivamente, entonces*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \quad si \quad \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z_0)} = 0$$

y

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0 \quad si \quad \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0.$$

Además

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \quad si \quad \lim_{z\to 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0$$

Demostración. Ejercicio. ■

Ejemplo 10. $\lim_{z\to 1} \dfrac{iz+3}{z+1} = \infty$ ya que

$$\lim_{z\to -1} \frac{z+1}{iz+3} = 0$$

y

$$\lim_{z\to\infty} \frac{2z+i}{z+1} = 2 \quad \text{ya que} \quad \lim_{z\to 0} \frac{2/z+i}{1/z+1} = \lim_{z\to 0} \frac{2+iz}{1+z} = 2.$$

Además

$$\lim_{z\to\infty} \frac{2z^3-1}{z^2+1} = \infty \quad \text{ya que} \quad \lim_{z\to 0} \frac{1/z^2+1}{2/z^3-1} = \lim_{z\to} \frac{z+z^3}{2-z^3} = 0.$$

A partir de la definición formal que hemos dado para límite, podemos establecer la continuidad de una función en un punto como sigue:

Definición 2.4. *Una función f es continua en un punto z_0 si se cumples las siguientes 3 condiciones*

a) $\lim_{z\to z_0} f(z)$ *existe.*

b) $f(z_0)$ *existe.*

c) $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

La tercera condición nos dice que para cada $\epsilon > 0$ existe un número positivo δ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad |z - z_0| < \delta.$$

Una función de variable compleja se dice que es continua en una región R si ésta es continua en cada punto de R. Si dos funciones son continuas en un punto z_0, entonces su suma, y producto también son continuas en dicho punto, el cociente es continuo es cualquier punto donde el denominador sea distinto de cero.

Teorema 2.5. *Una composición de funciones continuas también es continua.*

Demostración. Ejercicio. ■

Teorema 2.6. *Si una función $f(z)$ es continua y distinta de cero en un punto z_0, entonces $f(z) \neq 0$ en algún vecindario de dicho punto.*

Demostración. Ejercicio. ■

Teorema 2.7. *Si las funciones componentes u y v son continuas en el punto $z_0 = (x_0, y_0)$ sí y sólo si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ también lo es.*

3. Puntos de ramificación

En esta sección estudiaremos la definición de los puntos de ramificación que serán útiles para estudiar funciones holomorfas en la unidad 3. Iniciamos con algunas definiciones.

Definición 3.1. *Supongamos que tenemos una función f definida desde el plano complejo z al plano complejo w.*

- *Si para cada valor de la variable independiente z existe uno y solo un punto imagen w, la función se dice* ***uniforme*** *o* ***monovaluado****.*
- *Si para cada valor de la variable independiente z existe más de dos imágenes se dice que la función es* ***multiforme*** *o* ***multivaluada****.*

Los ejemplos más comunes de funciones multiformes son $arg(z)$, $log(z)$ y $\sqrt[n]{z}$. La mayoría de las funciones multiformes aparecen cuando se intenta determinar la inversa de funciones uniformes no inyectivas. Veamos la siguiente imagen que ilustra las funciones uniformes y multiformes.

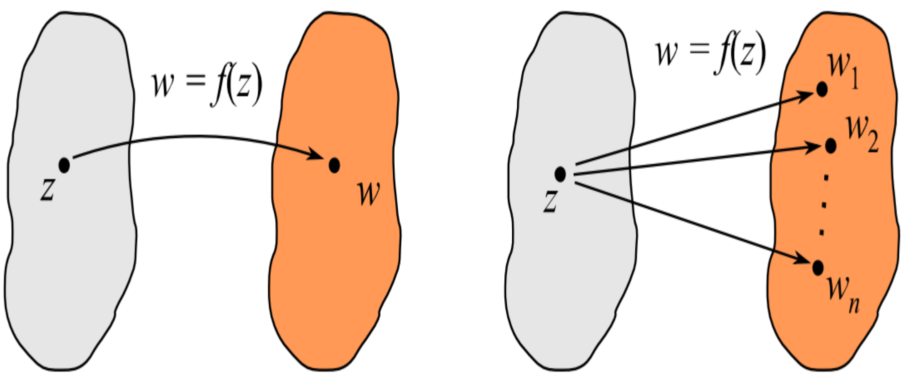

Figura 5: A la izquierda función monovaluada, a la derecha función multivaluada.

Estudiemos una función en particular para analizar la definición antes escrita.

Ejemplo 11. Consideremos la función $w = \sqrt[3]{z}$ y analicemos los valores o que sufre w si hacemos variar z en una trayectoria determina. Para ello, identificaremos a z con la posición $z(t)$ de un móvil. Supondremos que el móvil describe una trayectoria circular alrededor del origen en sentido antihorario; así, podremos escribir $z(t) = re^{i\theta(t)}$ con $\theta(t)$ una función continua de t.

1. Supongamos que la posición inicial del móvil es z_1. En ese punto, w toma el valor
$$w_1 = |z_1|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i\theta_1}{3}}.$$
2. Al completar un circuito, la posición del móvil volverá a hacer z_1, pero su argumento se modificó; $\theta_1 \to \theta_1 + 2\pi$. ¿Cuál será el valor de w? Se tendrá
$$w_2 = |z_1|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i(\theta_1+2\pi)}{3}} = w_1 e^{\frac{2\pi i}{3}} \neq w_1$$

3. Cuando el móvil vuelve a z_1, tras recorrer dos circuitos completos alrededor del origen $\theta_1 \to \theta_1 + 4\pi$. Por lo tanto, w tomará el valor

$$w_3 = |z_1|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i(\theta_1+6\pi)}{3}} = w_1 e^{\frac{4\pi i}{3}} \neq w_2.$$

4. Después de tres circuitos completos alrededor del origen, $\theta_1 \to \theta_1 + 6\pi$. Esta vez, cuando el móvil vuelve a z_1, $w_4 = |z_1|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i(\theta_1+6\pi)}{3}} = w_1$; es decir, w recupera su valor original.

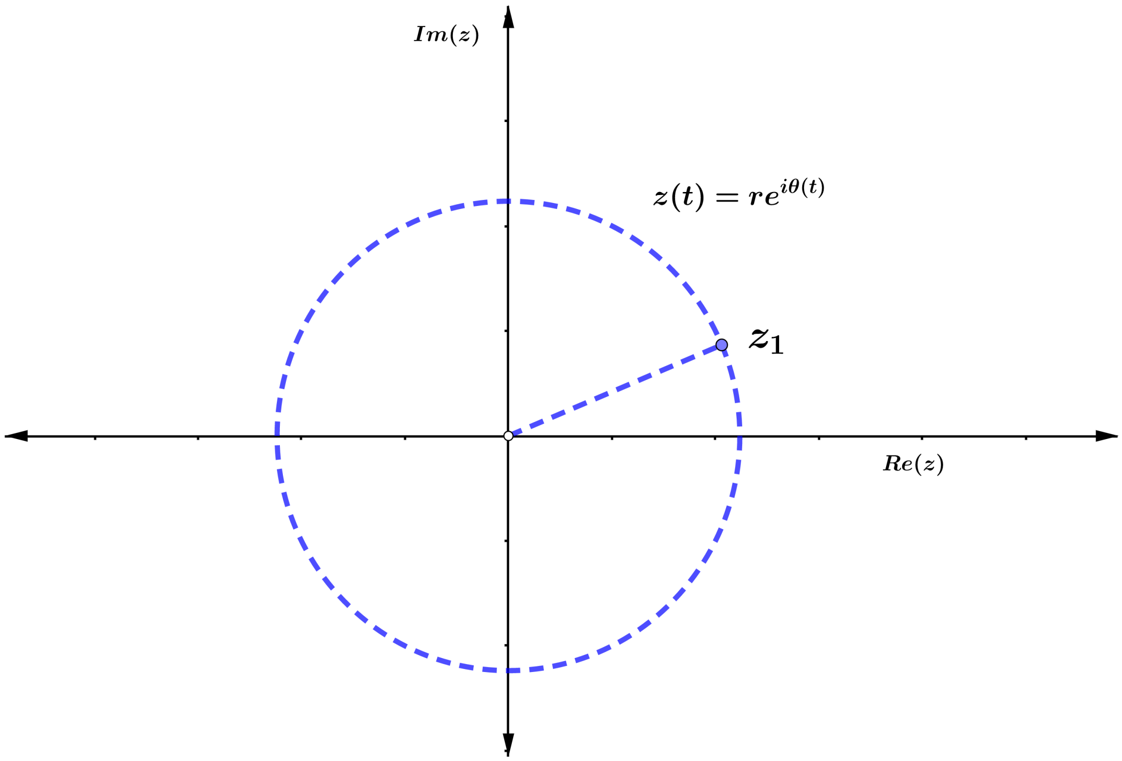

Figura 6: Recorrido de z sobre la circunferencia en sentido antihorario.

Los diferentes valores de w corresponden a las diferentes **ramas** de la función. Cada rama de una función multivaluada es una función monovaluada (dicho de otra forma, una **función multiforme** puede considerarse como una **colección de funciones uniformes**, cada una de ellas se denomina una rama de la función). El el caso de la función raíz cúbica las ramas son:

$$w = f(z) = z^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow \begin{cases} w_1 = f_1(z) = |z|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i\theta}{3}}, 0 \leq \theta < 2\pi \\ w_2 = f_2(z) = |z|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i\theta}{3}}, 2\pi \leq \theta < 4\pi \\ w_3 = f_3(z) = |z|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i\theta}{3}}, 4\pi \leq \theta < 6\pi \end{cases}$$

Definición 3.2. *Sea z_0 un punto que admita un entorno reducido completamente contenido en el dominio de la función.*
Sea γ es cualquier curva cerrada simple contenida en un entorno reducido (arbitrariamente pequeño) de z_0. Se dice que z_0 es un ***punto ramal*** *o de* ***ramificación*** *de la función si una vuelta de γ alrededor de z_0 produce un cambio de rama de la función. Si n vueltas alrededor de z_0 llevan a cada rama sobre sí misma, se dice que z_0 es un punto de ramificación de orden $n-1$.*

En el Ejemplo 11 $z_0 = 0$,

$\gamma : re^{i\theta(t)} t \in [0, \infty)$ y

$w = f(z) = z^{\frac{1}{3}}$ tiene un punto ramal en z_0 de orden $n = 2$. También $z = \infty$ es un punto de ramificación de esta función.

Definición 3.3. *Una línea que conecta dos, y solo dos, puntos ramales se denomina un* ***corte ramal****. Un corte ramal separa una rama de una función multivaluada de las ramas restantes.*

El corte ramal elegido es el conjunto $\{z : Rez \geq 0, Imz = 0\}$; une z_0 con $z = \infty$ para la función $f(z)$ del Ejemplo 11.

Observación. Es importante destacar que la descomposición de una función multivaluada en ramas depende de la elección del corte ramal y que esta elección no es única.

Ejemplo 12. Para la función $f(z) = \sqrt[3]{z}$ otro corte ramal posible es $\{z : Rez \leq 0, Imz = 0\}$ dando lugar a las siguientes ramas para $w = f(z)$:

$$w = f(z) = z^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow \begin{cases} w_1 = f_1(z) = |z|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i\theta}{3}}, -\pi \leq \theta < \pi \\ w_2 = f_2(z) = |z|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i\theta}{3}}, \pi \leq \theta < 3\pi \\ w_3 = f_3(z) = |z|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i\theta}{3}}, 3\pi \leq \theta < 5\pi \end{cases}$$

A diferencia del corte ramal, los puntos de ramificación son **intrínsecos** a la función multivaluada.

Obsérvese que las ramas de una función multivaluada son discontinuas.

Ejemplo 13. Si elijamos la rama definida por $f_1(z)$, para un punto z_* sobre el eje real, $arg(z) \to 0$ si $z \to z_*$ por encima del eje real; pero $argz \to 2\pi$ si $z \to z_*$ por debajo del eje real. Entonces, cuando z tiende a cruzar el corte ramal hacia z_*, la función $f_1(z)$ presenta una discontinuidad dada por

$$|z_*|^{\frac{1}{3}} = \left(\lim_{\varepsilon \to 0} e^{\frac{i(0+\varepsilon)}{3}} - \lim_{\varepsilon \to 0} e^{\frac{i(2\pi-\varepsilon)}{3}} \right) = |z_*|^{\frac{1}{3}} (1 - e^{\frac{i2\pi}{3}}).$$

Finalmente, las distintas ramas de una función multivaluada se **conectan con continuidad** sobre los puntos del corte ramal.

Ejemplo 14. Para un punto z_* sobre el eje real, $argz \to 2\pi$ si $z \to z_*$ por debajo del eje real para la rama $f_1(z)$ y por encima del eje real para la rama $f_2(z)$. Entonces,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f_1 \left(|z_*| \, e^{i(2\pi-\varepsilon)} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_2 \left(|z_*| \, e^{i(2\pi+\varepsilon)} \right)$$

En resumen, las funciones multivaluadas pueden caracterizarse por sus puntos ramales y los cortes ramales. Los cortes ramales, nos permiten trabajar con una rama de la función multivaluada que será discontinua sobre los puntos del corte ramal. No existe una manera única de definir un corte ramal; en general, será determinado a partir de las necesidades del cálculo. Cada corte ramal impone una restricción en el recorrido del argumento limitando su variación a un intervalo de longitud 2π y, viceversa, cada determinación del argumento implica un corte en el plano complejo.

Ejemplo 15. Consideremos la función $f(z) = \log(iz - 1)$. Para obtener la rama principal de la función infinitamente valuada $\log(w)$, se elige

$$-\pi < arg(w) \leq \pi$$

en el corte ramal será el conjunto $\{w : Rew \leq 0, Imw = 0\}$

Para determinar el corte ramal correspondiente a $f(z)$ (son los puntos donde $f(z)$ será discontinua), es decir:

$$Re(iz + 1) = 1 - y \leq 0 \text{ y } Im(iz + 1) = x = 0.$$

Esta sección se vuelve interesante cuando deseamos conocer el subconjunto del plano complejo donde una función es holomorfa. A continuación le presentamos la lista de ejercicios correspondiente a la unidad 2 de curso de variable compleja.

4. Ejercicios

Los siguientes ejercicios son referentes a los contenidos estudiados en esta segunda unidad del curso de variable compleja.

Ejercicio 4.1. Si $z = x + iy$ con $(x, y \in \mathbb{R})$, probar que $|\operatorname{sen}(z)|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$, $|\cos(z)|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y$. Deducir que $|\operatorname{senh} y| \leq |\operatorname{sen} z|$, $|\cos z| \leq |\cosh y|$. En particular sen y cos *no están acotadas* en $\mathbb{C}$.

Ejercicio 4.2. Demuestre las siguientes propiedades de la función exponencial compleja

1. $e^{z+w} = e^z.e^w$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$.
2. $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$
3. $\mid e^{x+iy} \mid = e^x$.
4. $e^z = 1$ si y sólo si $z = 2\pi n i$; $n \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 4.3. Simplifique e^{z^2}, e^{iz}y $e^{1/z}$

Ejercicio 4.4. Escriba $\mid e^{2z+i} \mid$ y $\mid e^{iz^2} \mid$ en términos de x y y, luego muestre que

$$\mid e^{2z+i} + e^{iz^2} \mid \leq e^{2x} + e^{-2xy}$$

Ejercicio 4.5. Muestre que $\mid e^{z^2} \mid \leq e^{|z|^2}$

Ejercicio 4.6. Encuentre todos los valores de z tales que

1. $e^z = 2$
2. $e^z = 1 + \sqrt{3}i$
3. $e^{2z-1} = 1$

Ejercicio 4.7. Muestre que $\overline{e^{iz}} = e^{i\overline{z}}$

Ejercicio 4.8. Demuestre la siguiente identidad

$$(e^z)^n = e^{nz}$$

Ejercicio 4.9. Considere la función exponencial $f(z) = e^z$. Determine la imagen según esta función de los siguientes conjuntos de puntos:

1. El eje real. La parte negativa del eje real. La parte positiva del eje real.
2. El eje imaginario.
3. El segmento S del eje imaginario definido por $S = \{z \in \mathbb{C}/z = it, t \in [0, \pi]\}$.
4. La banda infinita $H = \{z \in \mathbb{C}/z = x + iy;\ 0 \leq y \leq 2\pi\}$
5. La banda infinita $V = \{z \in \mathbb{C}/z = x + iy;\ 0 \leq x \leq 2\}$
6. El rectángulo $R = \{z \in \mathbb{C}/z = x + iy;\ -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \pi\}$

Ejercicio 4.10. Demuestre las siguientes identidades:

1. $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$
2. $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z . \operatorname{sen} w + \cos z . \cos w$
3. $\cos(z+w) = \cos z . \cos w - \operatorname{sen} z . \operatorname{sen} w$

Ejercicio 4.11. Utilice la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)$, para verificar que:

$$1 + 2\cos(\theta) + 2\cos(2\theta) + ...2\cos(n\theta) = \frac{\sin\left[(2n+1)\frac{\theta}{2}\right]}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$$

Ejercicio 4.12. Desarrollando en dos formas distintas $(cos(x) + isen(x))^n$ encuentre expresiones para $\sin(nx)$ y $\cos(nx)$.

Ejercicio 4.13. Para $x \in \mathbb{C}$ y tomando en cuenta las fórmulas de Euler $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ y $\operatorname{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ encuentre expresiones para $cos^n(x)$ y $sin^n(x)$.

Ejercicio 4.14. Para todo número complejo z, se tiene: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos(z)$.

Ejercicio 4.15. Verifique la identidad $\operatorname{sen}(2z) = 2\operatorname{sen}(z)\cos(z)$.

Ejercicio 4.16. Se define el seno y el coseno hiperbólico de z por $\operatorname{senh}(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ y $cosh(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$. Verifique que $\cosh(iz) = \cos(z)$ y que $\operatorname{senh}(iz) = i\operatorname{senh}(z)$.

Ejercicio 4.17. Muestre la identidad $\cosh^2(z) - \operatorname{senh}^2(z) = 1$.

Ejercicio 4.18. Verifique que $\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(x)\cosh(y) - i\cos(x)\operatorname{senh}(y)$.

Ejercicio 4.19. Muestre que $\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)$.

Ejercicio 4.20. Muestre que $\overline{\operatorname{sen}(z)} = \operatorname{sen}(\bar{z})$ y que $\overline{\cos(z)} = \cos(\bar{z})$.

Ejercicio 4.21. Muestre que $\overline{\cos(iz)} = \cos(i\bar{z})$ para todo z.

Ejercicio 4.22. Muestre que $\overline{\operatorname{sen}(iz)} = \operatorname{sen}(i\bar{z})$ si y sólo si $z = n\pi i$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

Ejercicio 4.23. Muestre que la función $f(z) = \operatorname{sen}(z)$ transforma:

1. La franja $|x| < \dfrac{\pi}{2}$ en el complemento del conjunto $S = \{z \in \mathbb{C}/y = 0, |x| \geq 0\}$
2. La franja $|x| < \dfrac{\pi}{2}$, $y > 0$ en el semiplano superior.
3. La franja $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $y > 0$ en el primer cuadrante.

Ejercicio 4.24. Muestre que: Si z_1, $z_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, entonces $log\,(z_1 z_2) = logz_1 + log_2$ (excepto por la adición de un un múltiplo entero de $2\pi i$)

Ejercicio 4.25. Muestre que:

1. $\log(-ei) = 1 - \dfrac{\pi}{2}i$
2. $\log(1-i) = \dfrac{1}{2}ln2 - \dfrac{\pi}{4}i$
3. $\log(-1+\sqrt{3}i) = \ln 2 + 2(n+\frac{1}{3})\pi i;\ n = 0, \pm 1, \pm 2...$
4. $\log(1+i)^2 = 2\log(1+i)$
5. $\log(-1+i)^2 \neq 2\log(-1+i)$

Ejercicio 4.26. Muestre que

$$\Re[\log(z-1)] = \frac{1}{2}\ln[(x-1)^2 + y^2];\ z \neq 1$$

Ejercicio 4.27. Encuentre todos los valores de:

1. $(-i)^i$
2. $(1+i)^{1+i}$
3. 2^i

Ejercicio 4.28. Muestre que $(1+i)^i = e^{\left(-\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)};\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

Ejercicio 4.29. Suponga que se tiene que $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_1$ y que $\lim_{z\to z_0} g(z) = w_1$. Entonces:

a) Para todo complejo c, se tiene que: $\lim_{z\to z_0} cf(z) = cw_0$

b) $\lim_{z\to z_0}(f(z)+g(z)) = w_0 + w_1$

c) $\lim_{z\to z_0}(f(z)-g(z)) = w_0 - w_1$

d) $\lim_{z\to z_0}(f(z).g(z)) = w_0.w_1$

Ejercicio 4.30. Use inducción matemática para demostrar que $\lim_{z\to z_0} z^n = z_0^n$

Ejercicio 4.31. Demuestre que si P es un polinomio complejo de grado n, $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$, entonces $\lim_{z\to z_0} P(z) = P(z_0)$.

Ejercicio 4.32. Si las funciones f y g son funciones continuas en z_0, entonces son continuas en z_0, las siguientes funciones:

a) La suma $f+g$ y la diferencia $f-g$

b) El producto$f.g$

c) La función conjugada $\overline{f}$

d) La función $\dfrac{1}{g}$, siempre que $g(z_0) \neq 0$

e) La función $\dfrac{f}{g}$, siempre que $g(z_0) \neq 0$

5. Bibliografía

- [1] Marsden, J. E., Hoffman, M. J., & Buenrostro, G. I. (1996). Análisis básico de variable compleja. Trillas.
- [2] Spiegel, M. R. (1999). Variable compleja. McGraw-Hill.
- [3] Lunts, V. G. (1977). Problemas sobre la teoria de funciones de variable compleja. Mir.
- [4] Brown J. Churchill R. (2004). Variable compleja y aplicaciones. Mc GrawHill. México.
- [5] Spiegel, M. (2001). Variable Compleja. Serie Schaum: Mc Graw-Hill: México.

Fin de la Unidad.