RACIOCÍNIO LÓGICO

PRINCÍPIO DA REGRESSÃO OU REVERSÃO. LÓGICA DEDUTIVA, ARGUMENTATIVA E QUANTITATIVA.

Estruturas Lógicas – Verdade ou Mentira

Na lógica, uma estrutura (ou estrutura de interpretação) é um objeto que dá significado semântico ou interpretação aos símbolos definidos pela assinatura de uma linguagem. Uma estrutura possui diferentes configurações, seja em lógicas de primeira ordem, seja em linguagens lógicas poli-sortidas ou de ordem superior. As questões de Raciocínio Lógico sempre vão ser compostas por proposições que provam,a dão suporte, dão razão a algo, ou seja, são afirmações que expressam um pensamento de sentindo completo. Essas proposições podem ter um sentindo positivo ou negativo.

Exemplo 1: João anda de bicicleta.
Exemplo 2: Maria não gosta de banana.
Tanto o exemplo 1 quanto o 2 caracterizam uma afirmação/proposição.

A base das Estruturas Lógicas é saber o que é Verdade ou Mentira (verdadeiro/falso). Os resultados das proposições sempre tem que dar verdadeiro. Há alguns princípios básicos:

Contradição: Nenhuma proposição pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Terceiro Excluído: Dadas duas proposições lógicas contraditórias somente uma delas é verdadeira. Uma proposição ou é verdadeira ou é falsa, não há um terceiro valor lógico (“mais ou menos”, meio verdade ou meio mentira). Ex. Estudar é fácil. (o contrário seria: “Estudar é difícil”. Não existe meio termo, ou estudar é fácil ou estudar é difícil).

Para facilitar a resolução das questões de lógica usam-se os conectivos lógicos, que são símbolos que comprovam a veracidade das informações e unem as proposições uma a outra ou as transformam numa terceira proposição. Veja:
(~) “não”: negação
(Λ) “e”: conjunção
(V) “ou”: disjunção
(→) “se...então”: condicional
(↔) “se e somente se”: bicondicional

Temos as seguintes proposições:

O Pão é barato. O Queijo não é bom.
A letra *p* representa a primeira proposição e a letra *q*, a segunda. Assim, temos:
p: O Pão é barato.
q: O Queijo não é bom.

Negação (símbolo ~): Quando usamos a negação de uma proposição invertemos a afirmação que está sendo dada. Veja os exemplos:

~p (não p): O Pão não é barato. (É a negação lógica de p)
~q (não q): O Queijo é bom. (É a negação lógica de q)
Se uma proposição é verdadeira, quando usamos a negação vira falsa.
Se uma proposição é falsa, quando usamos a negação vira verdadeira.

Regrinha para o conectivo de negação (~):

P	*~P*
V	*F*
F	*V*

Conjunção (símbolo Λ): Este conectivo é utilizado para unir duas proposições formando uma terceira. O resultado dessa união somente será verdadeiro se as duas proposições (*p e q*) forem verdadeiras, ou seja, sendo pelo menos uma falsa, o resultado será falso. Ex.: *p Λ q*. (O Pão é barato e o Queijo não é bom). $\wedge$ = "e". Regrinha para o conectivo de conjunção (Λ):

P	*Q*	*PΛQ*
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*F*
F	*F*	*F*

Disjunção (símbolo V): Este conectivo também serve para unir duas proposições. O resultado será verdadeiro se pelo menos uma das proposições for verdadeira. Ex: p v q. (Ou o Pão é barato ou o Queijo não é bom.) V = "ou". Regrinha para o conectivo de disjunção (V):

P	*Q*	*PVQ*
V	*V*	*V*
V	*F*	*V*
F	*V*	*V*
F	*F*	*F*

Condicional (símbolo →): Este conectivo dá a ideia de condição para que a outra proposição exista. *"P"* será condição suficiente para *"Q"* e *"Q"* é condição necessária para *"P"*. Ex: *P → Q*. (Se o Pão é barato então o Queijo não é bom.) → = *"se...então"*. Regrinha para o conectivo condicional (→):

P	*Q*	*P→Q*
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*V*
F	*F*	*V*

Bicondicional (símbolo ↔): O resultado dessas proposições será verdadeiro se e somente se as duas forem iguais (as duas verdadeiras ou as duas falsas). *"P"* será condição suficiente e necessária para *"Q"*. Exemplo: *P ↔ Q*. (O Pão é barato se e somente se o Queijo não é bom.) ↔ = *"se e somente se"*. Regrinha para o conectivo bicondicional (↔):

P	*Q*	*P↔Q*
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*F*
F	*F*	*V*

Questões

01. *(ESAF - Receita Federal - Auditor Fiscal)* A afirmação *"A menina tem olhos azuis ou o menino é loiro"* tem como sentença logicamente equivalente:

(A) se o menino é loiro, então a menina tem olhos azuis.

(B) se a menina tem olhos azuis, então o menino é loiro.
(C) se a menina não tem olhos azuis, então o menino é loiro.
(D) não é verdade que se a menina tem olhos azuis, então o menino é loiro.
(E) não é verdade que se o menino é loiro, então a menina tem olhos azuis.

Parte inferior do formulário

02. *(ESAF - Receita Federal - Auditor Fiscal)* Se Anamara é médica, então Angélica é médica. Se Anamara é arquiteta, então Angélica ou Andrea são médicas. Se Andrea é arquiteta, então Angélica é arquiteta. Se Andrea é médica, então Anamara é médica. Considerando que as afirmações são verdadeiras, segue- se, portanto, que:
(A) Anamara, Angélica e Andrea são arquitetas.
(B) Anamara é médica, mas Angélica e Andrea são arquitetas.
(C) Anamara, Angélica e Andrea são médicas.
(D) Anamara e Angélica são arquitetas, mas Andrea é médica.
(E) Anamara e Andrea são médicas, mas Angélica é arquiteta.

03. *(ESAF - Receita Federal - Auditor Fiscal)* Se Ana é pianista, então Beatriz é violinista. Se Ana é violinista, então Beatriz é pianista. Se Ana é pianista, Denise é violinista. Se Ana é violinista, então Denise é pianista. Se Beatriz é violinista, então Denise é pianista. Sabendo-se que nenhuma delas toca mais de um instrumento, então Ana, Beatriz e Denise tocam, respectivamente:
(A) piano, piano, piano.
(B) violino, piano, piano.
(C) violino, piano, violino.
(D) violino, violino, piano.
(E) piano, piano, violino.

(CESPE – TRE-RJ – Técnico Judiciário)

Texto para as questões de 04 a 07.

O cenário político de uma pequena cidade tem sido movimentado por denúncias a respeito da existência de um esquema de compra de votos dos vereadores. A dúvida quanto a esse esquema persiste em três pontos, correspondentes às proposições *P*, *Q* e *R*:
P: O vereador Vitor não participou do esquema;
Q: O Prefeito Pérsio sabia do esquema;
R: O chefe de gabinete do Prefeito foi o mentor do esquema.

Os trabalhos de investigação de uma CPI da Câmara Municipal conduziram às premissas P_1, P_2 e P_3 seguintes:

P_1: Se o vereador Vitor não participou do esquema, então o Prefeito Pérsio não sabia do esquema.
P_2: Ou o chefe de gabinete foi o mentor do esquema, ou o Prefeito Pérsio sabia do esquema, mas não ambos.
P_3: Se o vereador Vitor não participou do esquema, então o chefe de gabinete não foi o mentor do esquema.

Considerando essa situação hipotética, julgue os itens seguintes, acerca de proposições lógicas.

04. Das premissas P_1, P_2 e P_3, é correto afirmar que “O chefe de gabinete foi o mentor do esquema ou o vereador Vitor participou do esquema”.

( ) Certo ( ) Errado

05. Parte superior do formulário
Considerando essa situação hipotética, julgue os itens seguintes, acerca de proposições lógicas. A premissa P_2 pode ser corretamente representada por $R \vee Q$.

( ) Certo ( ) Errado

06. Considerando essa situação hipotética, julgue os itens seguintes, acerca de proposições lógicas. A premissa P_3 é logicamente equivalente à proposição "*O vereador Vitor participou do esquema ou o chefe de gabinete não foi o mentor do esquema*".

( ) Certo ( ) Errado

07. Considerando essa situação hipotética, julgue os itens seguintes, acerca de proposições lógicas. A partir das premissas P_1, P_2 e P_3, é correto inferir que o prefeito Pérsio não sabia do esquema.

( ) Certo ( ) Errado

08. *(CESPE - TRE-ES - Técnico)* Entende-se por proposição todo conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo, isto é, que afirmam fatos ou exprimam juízos a respeito de determinados entes. Na lógica bivalente, esse juízo, que é conhecido como valor lógico da proposição, pode ser verdadeiro (V) ou falso (F), sendo objeto de estudo desse ramo da lógica apenas as proposições que atendam ao princípio da não contradição, em que uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa; e ao princípio do terceiro excluído, em que os únicos valores lógicos possíveis para uma proposição são verdadeiro e falso. Com base nessas informações, julgue os itens a seguir. Segundo os princípios da não contradição e do terceiro excluído, a uma proposição pode ser atribuído um e somente um valor lógico.

( ) Certo ( ) Errado

(CESPE - TRT-ES – Técnico *Judiciário)* Proposição

Texto para as questões 09 e 10.

Proposições são frases que podem ser julgadas como verdadeiras (V) ou falsas (F), mas não como V e F simultaneamente. As proposições simples são aquelas que não contêm nenhuma outra proposição como parte delas. As proposições compostas são construídas a partir de outras proposições, usando-se símbolos lógicos, parênteses e colchetes para que se evitem ambiguidades. As proposições são usualmente simbolizadas por letras maiúsculas do alfabeto: A, B, C, etc. Uma proposição composta da forma A $\vee$ B, chamada disjunção, deve ser lida como "A ou B" e tem o valor lógico F, se A e B são F, e V, nos demais casos. Uma proposição composta da forma A $\wedge$ B, chamada conjunção, deve ser lida como "A e B" e tem valor lógico V, se A e B são V, e F, nos demais casos. Além disso, A, que simboliza a negação da proposição A, é V, se A for F, e F, se A for V. Considere que cada uma das proposições seguintes tenha valor lógico V.

I- Tânia estava no escritório ou Jorge foi ao centro da cidade.
II- Manuel declarou o imposto de renda na data correta e Carla não pagou o condomínio.
III- Jorge não foi ao centro da cidade.

09. A partir dessas proposições, é correto afirmar que a proposição "Manuel declarou o imposto de renda na data correta e Jorge foi ao centro da cidade" tem valor lógico V.

( ) Certo ( ) Errado

10. A partir dessas proposições, é correto afirmar que a proposição. "*Carla pagou o condomínio*" tem valor lógico F.

( ) Certo ( ) Errado

Respostas

01. Resposta "C".

Proposição	*Equivalente*
$P \rightarrow Q$	$\sim Q \rightarrow \sim P$
$P \rightarrow Q$	$\sim P \vee Q$
$P \rightarrow Q$	*P é suficiente para Q*
$P \rightarrow Q$	*Q é necessário para P*

<u>A menina tem olhos azuis</u> ***ou*** *<u>o menino é loiro</u>.*
(~P) ***(∨)*** *(Q)*

<u>Se a menina não tem olhos azuis</u>, ***então*** *<u>o menino é loiro</u>.*
(~P) ***(→)*** *(Q)*

Sintetizando: Basta negar a primeira, manter a segunda e trocar o "ou" pelo "se então". "A menina tem olhos azuis *(M)* ou o menino é loiro (L)".

Está assim: *M v L*
Fica assim: *~M → L*
Se *a menina* ***não*** *tem olhos azuis,* ***então*** *o menino é loiro.*

02. Parte inferior do formulário

Resposta "C".

Anamara médica → Angélica médica. (verdadeira → verdadeira)
Anamara arquiteta → Angélica médica ∨ Andrea médica. (falsa → verdadeira ∨ verdadeira)
Andrea arquiteta → Angélica arquiteta. (falsa → falsa)
Andrea médica → Anamara médica. (verdadeira → verdadeira)

Como na questão não existe uma proposição simples, temos que escolher entre as existentes, uma proposição composta e supor se é verdadeira ou falsa. Nesta questão analise as proposições à medida que aparecem na questão, daí a primeira proposição sobre a pessoa assume o valor de verdade, as seguintes serão, em regra, falsas. Embora nada impeça que uma pessoa tenha mais de uma profissão, o que não deve ser levado em consideração. Importante lembrar que todas as proposições devem ter valor lógico verdadeiro. Para encontrar a resposta temos que testar algumas hipóteses até encontrar a que preencha todos os requisitos da regra.
- ***Se*** Anamara é médica, ***então*** Angélica é médica. (verdadeiro)
1. V V
2. F F
3. F V

- ***Se*** Anamara é arquiteta, ***então*** Angélica ou Andrea são médicas. (verdadeiro)
1. F V V - Para ser falso Todos devem ser falsos.
2. V F V - A segunda sentença deu falso e a VF apareceu, então descarta essa hipótese.
3. V V F - Aqui também ocorreu o mesmo problema da 2º hipótese, também devemos descartá-la.

- ***Se*** Andrea é arquiteta, ***então*** Angélica é arquiteta. (verdadeiro)
1. F F
2.
3.

- ***Se*** Andrea é médica, ***então*** Anamara é médica. (verdadeiro)
1. V V
2.
3.

03. Resposta "B".

Ana pianista → Beatriz violinista. (F → F)
Ana violinista → Beatriz pianista. (V → V)
Ana pianista → Denise violinista. (F → F)
Ana violinista → Denise pianista. (V → V)
Beatriz violinista → Denise pianista. (F → V)

Proposições Simples quando aparecem na questão, suponhamos que sejam verdadeiras (V). Como na questão não há proposições simples, escolhemos outra proposição composta e supomos que seja verdadeira ou falsa.

1º Passo: qual regra eu tenho que saber? Condicional (Se... então).

2º Passo: Fazer o teste com as hipóteses possíveis até encontrar a resposta.

Hipótese 1

- ***Se*** Ana é pianista, ***então*** Beatriz é violinista. (verdade)

V V - Como já sabemos, se a (verdade) aparecer primeiro, a (falso) não poderá.

- ***Se*** Ana é violinista, ***então*** Beatriz é pianista. (verdade)

F F - Já sabemos que Ana é pianista e Bia é violinista, então falso nelas.

- ***Se*** Ana é pianista, Denise é violinista. (verdade)

V V

- ***Se*** Ana é violinista, ***então*** Denise é pianista. (verdade)

F F

- ***Se*** Beatriz é violinista, ***então*** Denise é pianista. (verdade)

V F - Apareceu a temida V F, logo a nossa proposição será falsa. Então descarte essa hipótese.

Hipótese 2

- ***Se*** Ana é pianista, ***então*** Beatriz é violinista. (verdade)

F V

- ***Se*** Ana é violinista, ***então*** Beatriz é pianista. (verdade)

V F - A VF apareceu, então já podemos descartá-la, pois a nossa proposição será falsa.

04. Resposta "Certo".

É só aplicar a tabela verdade do "ou" (v).

V v F será verdadeiro, sendo falso apenas quando as duas forem falsas.

A tabela verdade do "ou". Vejam:

p	***q***	***p ∨ q***
V	*V*	*F*
V	*F*	*V*
F	*V*	*V*
F	*F*	*F*

No 2º caso, os dois não podem ser verdade ao mesmo tempo.

Disjunção exclusiva (Ou... ou)

Representado pelo **v**, ou ainda **ou**.

Pode aparecer assim também: *p v q*, **mas não ambos.**

Regra: Só será verdadeira se houver uma das sentenças verdadeira e outra falsa.

Hipótese 1:

P1: $F \rightarrow V = V$ (Não poderá aparecer VF).

P2: *V F = V* (Apenas um tem que ser verdadeiro).
P3: $F \rightarrow F = V$

Conclusões:
Vereador participou do esquema.
Prefeito não sabia.
Chefe do gabinete foi o mentor.

Então:
O chefe de gabinete foi o mentor do esquema **ou** o vereador Vitor participou do esquema.
V V = verdade, pois sabemos que para ser falso, **todos** devem ser **falsos**.

Hipótese 2:
P1: $F \rightarrow F = V$
P2: *F V = V*
P3: $F \rightarrow V = V$

Conclusões:
Vereador participou do esquema.
Prefeito sabia.
Chefe de gabinete não era o mentor.

Então:
O chefe de gabinete foi o mentor do esquema **ou** o vereador Vitor participou do esquema.
F V = verdade.

05. Resposta "Errado".
Não se trata de uma *Disjunção*, trata-se de uma *Disjunção Exclusiva*, cujo símbolo é . Também chamado de "*Ou Exclusivo*". É o famoso "*um ou outro mas* não ambos". Só vai assumir valor *verdade*, quando somente uma das proposições forem verdadeiras, pois quando as duas forem verdadeiras a proposição será *falsa*. Da mesma forma se as duas forem falsas, a proposição toda será *fals*a.

Tabela verdade do "*Ou Exclusivo*".

p	***q***	$p \vee q$
V	*V*	*F*
V	*F*	*V*
F	*V*	*V*
F	*F*	*F*

Com a frase em P_2 "*mas não ambos*" deixa claro que as duas premissas não podem ser verdadeiras, logo não é uma *Disjunção*, mas sim uma *Disjunção Exclusiva*, onde apenas uma das premissas pode ser verdadeira para que P_2 seja *verdadeira*.

06. Resposta "Certo".
Duas premissas são logicamente equivalentes quando elas possuem a mesma tabela verdade:

P	***R***	***P***	***R***	$P \rightarrow R$	$R \rightarrow P$	$P \vee R$
V	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*
F	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*
F	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*

Possuem a mesma tabela verdade,
logo são equivalentes.

Representando simbolicamente as equivalências, temos o seguinte:
$(P \rightarrow R) = (P \vee R) = (R \rightarrow P)$

As proposições dadas na questão:
P = O vereador Vitor ***não*** participou do esquema.
R = O chefe de gabinete do Prefeito ***foi*** o mentor do esquema.

Premissa dada na questão: P_3 = Se o vereador Vitor não participou do esquema, então o chefe do gabinete ***não*** foi o mentor do esquema. Em linguagem simbólica, a premissa P_3 fica assim: *$(P \rightarrow R)$*.

A questão quer saber se *$(P \rightarrow R)$* é logicamente equivalente a proposição: "*O vereador Vitor **participou** do esquema ou o chefe de gabinete **não foi** o mentor do esquema*", que pode ser representada da seguinte forma: *$(P \vee R)$*. Vemos que P3 tem a seguinte equivalente lógica: *$(P \rightarrow R) = (P \vee R)$*. Negamos a primeira sentença, mudamos o conectivo "→" para "∨", e depois mantemos a segunda sentença do mesmo jeito. Assim sendo, a questão está correta. As duas sentenças são "logicamente equivalentes".

07. Resposta "Errado".
A questão quer saber se o argumento "*o Prefeito Pérsio não sabia do esquema*" é um argumento válido. Quando o argumento é válido? Quando as premissas forem verdadeiras e a conclusão obrigatoriamente verdadeira ou quando as premissas forem falsas e a conclusão falsa. Quando o argumento não é válido? Quando as premissas forem verdadeiras e a conclusão for falsa. Pra resolver essas questões de validade de argumento é melhor começar de forma contrária ao comando da questão. Como a questão quer saber se o argumento é válido, vamos partir do princípio (hipótese) que é inválido. Fica assim:

P_1*: P → ~Q* ***verdade***
P_2*: R (ou exclusivo) Q* ***verdade***
P_3*: P → ~R* ***verdade***
Conclusão: O prefeito Pérsio não sabia do esquema. ***falso***

Se é ***falso*** que o Prefeito Pérsio não sabia, significa dizer que ele sabia do esquema. Então, pode-se deduzir que as proposições *~Q* e *Q* são, respectivamente, ***falsa*** e ***verdadeira***. Na segunda premissa: Se *Q* é verdadeira, *R* será obrigatoriamente ***falsa***, pois na disjunção exclusiva só vai ser ***verdade*** quando apenas um dos argumentos for verdadeiro. E se *R* é ***falso***, significa dizer que *~R* é ***verdadeiro***. Fazendo as substituições:

P_1*: P → ~Q Verdade*
F → F V
Por que *P* é falso? Na condicional só vai ser falso se a primeira for verdadeira e a segunda for falsa. Como "sabemos" que a premissa toda é verdadeira e que *~Q* é falso, *P* só pode assumir valor F.

P_2*: R (ou exclusivo) Q Verdade*
F (ou exclusivo) V V

Lembrando que na disjunção exclusiva, só vai ser verdade quando uma das proposições forem verdadeiras. Como sei que *Q* é verdadeiro, *R* só pode ser falso.

P_3*: P → ~R Verdade*
F → V V

Se deduz que *R* é falso, logo *~R* é verdadeiro. Consideramos inicialmente o argumento sendo não válido (premissas verdadeiras e conclusão falsa). Significa dizer que a questão está errada. Não é correto inferir que o Prefeito Pérsio não sabia do esquema. Foi comprovado que ele sabia do esquema.

08. Resposta "Certo".

Princípio da Não Contradição = Uma preposição será ***V*** ou ***F*** não podendo assumir os 2 valores simultaneamente. Representação: *$(P \wedge P)$*. Exemplo: Não ("a terra é redonda" e "a terra não é redonda").

Princípio do Terceiro Excluído = Uma preposição será ***V*** ou ***F***, não podendo assumir um 3º valor lógico. Representação: *P* $\vee$ *P*. Exemplo: *Ou este homem é José ou não é José.*

Uma proposição só poderá ser julgada *verdadeira* ou *falsa*, nunca poderá ser as duas coisas ao mesmo tempo.

09. Resposta "Errado".
Da proposição III "*Jorge não foi ao centro da cidade*" que é verdadeira e a questão diz "*Manuel declarou o imposto de renda na data correta e Jorge foi ao centro da cidade*" a segunda parte é ***falsa*** como o conectivo é ***"e"*** as duas teriam que ser verdadeiras (o que não acontece). Vamos analisar cada proposição de cada premissa, tendo em mente que as premissas tem valor lógico (V), daí tiramos um importante dado, sabemos que a premissa III é (V), portanto vamos atribuir o valor lógico (V) a proposição ***"e"*** e o valor lógico (F) a proposição "B", agora vamos separar:

A: Tânia estava no escritório (V)
B: Jorge foi ao centro da cidade (F)

Diante das análises iniciais temos que a premissa *A v B*, tem valor lógico (V), mas que a proposição *"B"* tem valor lógico (F), ou seja, *A v* (valor lógico F), para que essa premissa tenha o valor lógico (V), *"A"* tem que ter um valor lógico (V).

C: Manuel declarou o imposto de renda na data correta (V)
D: Carla não pagou o condomínio (V)

O enunciado fala para considerar todas as premissas com valor lógico (V), logo, a premissa *C* $\wedge$ *D* para ter valor lógico (V), ambas proposições devem ter valor lógico (V).

E: Jorge não foi ao centro da cidade (V)
Diante das explicações, *C* $\wedge$ *B = (V)* $\wedge$ *(F) = (F).*

10. Resposta "Certo".
Considere que cada uma das proposições seguintes tenha valor lógico V. Logo o que contraria essa verdade é falso.
I- V + F = V
II- V + V = V
III- V

Portanto se no item II diz que Carla não pagou o condomínio é verdadeiro, então o fato dela ter pago o condomínio é falso, pois está contradizendo o dito no item II. Os valores lógicos da segunda proposição não são deduzíveis, mas sim informados no enunciado.

II- Manuel declarou o imposto de renda na data correta e Carla não pagou o condomínio V e V. Portanto, se Carla não pagou o condomínio é Verdadeiro. Carla pagou o condomínio é Falso. Enunciado correto.

Argumentos

Um argumento é "uma série concatenada de afirmações com o fim de estabelecer uma proposição definida". É um conjunto de proposições com uma estrutura lógica de maneira tal que algumas delas acarretam ou tem como consequência outra proposição. Isto é, o conjunto de proposições $p_1,...,p_n$ que tem como consequência outra proposição q. Chamaremos as proposições $p_1,p_2,p_3,...,p_n$ de premissas do argumento, e a proposição q de conclusão do argumento. Podemos representar por:

p_1
p_2
p_3
.
.
.
p_n
$\therefore q$

Exemplos:

01.
Se eu passar no concurso, então irei trabalhar.
Passei no concurso
___
∴ Irei trabalhar

02.
Se ele me ama então casa comigo.
Ele me ama.
___
∴ Ele casa comigo.

03.
Todos os brasileiros são humanos.
Todos os paulistas são brasileiros.
___
∴ Todos os paulistas são humanos.

04.
Se o Palmeiras ganhar o jogo, todos os jogadores receberão o bicho.
Se o Palmeiras não ganhar o jogo, todos os jogadores receberão o bicho.
___
∴ Todos os jogadores receberão o bicho.

Observação: No caso geral representamos os argumentos escrevendo as premissas e separando por uma barra horizontal seguida da conclusão com três pontos antes. Veja exemplo:

Premissa: Todos os sais de sódio são substâncias solúveis em água.
Todos os sabões são sais de sódio.
___
Conclusão: ∴ Todos os sabões são substâncias solúveis em água.

Os argumentos, em lógica, possuem dois componentes básicos: suas premissas e sua conclusão. Por exemplo, em: "Todos os times brasileiros são bons e estão entre os melhores times do mundo. O Brasiliense é um time brasileiro. Logo, o Brasiliense está entre os melhores times do mundo", temos um argumento com duas premissas e a conclusão.

Evidentemente, pode-se construir um argumento válido a partir de premissas verdadeiras, chegando a uma conclusão também verdadeira. Mas também é possível construir argumentos válidos a partir de premissas falsas, chegando a conclusões falsas. O detalhe é que podemos partir de premissas falsas, proceder por meio de uma inferência válida e chegar a uma conclusão verdadeira. Por exemplo:

Premissa: Todos os peixes vivem no oceano.
Premissa: Lontras são peixes.
Conclusão: Logo, focas vivem no oceano.

Há, no entanto, uma coisa que não pode ser feita: a partir de premissas verdadeiras, inferirem de modo correto e chegar a uma conclusão falsa. Podemos resumir esses resultados numa tabela de regras de implicação. O símbolo A denota implicação; A é a premissa, B é a conclusão.

Regras de Implicação		
Premissas	Conclusão	Inferência
A	B	A à B
Falsas	Falsa	Verdadeira
Falsas	Verdadeira	Verdadeira
Verdadeiras	Falsa	Falsa
Verdadeiras	Verdadeira	Verdadeira

- Se as premissas são falsas e a inferência é válida, a conclusão pode ser verdadeira ou falsa (linhas 1 e 2).
- Se as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa, a inferência é inválida (linha 3).
- Se as premissas e a inferência são válidas, a conclusão é verdadeira (linha 4).

Desse modo, o fato de um argumento ser válido não significa necessariamente que sua conclusão seja verdadeira, pois pode ter partido de premissas falsas. Um argumento válido que foi derivado de premissas verdadeiras é chamado de argumento consistente. Esses, obrigatoriamente, chegam a conclusões verdadeiras.

Premissas: Argumentos dedutíveis sempre requerem certo número de “assunções-base”. São as chamadas premissas. É a partir delas que os argumentos são construídos ou, dizendo de outro modo, é as razões para se aceitar o argumento. Entretanto, algo que é uma premissa no contexto de um argumento em particular pode ser a conclusão de outro, por exemplo. As premissas do argumento sempre devem ser explicitadas. A omissão das premissas é comumente encarada como algo suspeito, e provavelmente reduzirá as chances de aceitação do argumento.

A apresentação das premissas de um argumento geralmente é precedida pelas palavras “admitindo que...”, “já que...”, “obviamente se...” e “porque...”. É imprescindível que seu oponente concorde com suas premissas antes de proceder à argumentação. Usar a palavra “obviamente” pode gerar desconfiança. Ela ocasionalmente faz algumas pessoas aceitarem afirmações falsas em vez de admitir que não entenda por que algo é “óbvio”. Não se deve hesitar em questionar afirmações supostamente “óbvias”.

Inferência: Uma vez que haja concordância sobre as premissas, o argumento procede passo a passo por meio do processo chamado “inferência”. Na inferência, parte-se de uma ou mais proposições aceitas (premissas) para chegar a outras novas. Se a inferência for válida, a nova proposição também deverá ser aceita. Posteriormente, essa proposição poderá ser empregada em novas inferências. Assim, inicialmente, apenas se pode inferir algo a partir das premissas do argumento; ao longo da argumentação, entretanto, o número de afirmações que podem ser utilizadas aumenta. Há vários tipos de inferência válidos, mas também alguns inválidos. O processo de inferência é comumente identificado pelas frases “Consequentemente...” ou “isso implica que...”.

Conclusão: Finalmente se chegará a uma proposição que consiste na conclusão, ou seja, no que se está tentando provar. Ela é o resultado final do processo de inferência e só pode ser classificada como conclusão no contexto de um argumento em particular. A conclusão respalda-se nas premissas e é inferida a partir delas.

A seguir está exemplificado um argumento válido, mas que pode ou não ser “consistente”.

1. Premissa: Todo evento tem uma causa.
2. Premissa: O universo teve um começo.
3. Premissa: Começar envolve um evento.
4. Inferência: Isso implica que o começo do universo envolveu um evento.
5. Inferência: Logo, o começo do universo teve uma causa.
6. Conclusão: O universo teve uma causa.

A proposição do item 4 foi inferida dos itens 2 e 3. O item 1, então, é usado em conjunto com proposição 4 para inferir uma nova proposição (item 5). O resultado dessa inferência é reafirmado (numa forma levemente simplificada) como sendo a conclusão.

Validade de um Argumento

Conforme citamos anteriormente, uma proposição é verdadeira ou falsa. No caso de um argumento diremos que ele é válido ou não válido. A validade de uma propriedade dos argumentos dedutivos que depende da forma (estrutura) lógica das suas proposições (premissas e conclusões) e não do conteúdo delas. Sendo assim podemos ter as seguintes combinações para os argumentos válidos dedutivos:

a) Premissas verdadeiras e conclusão verdadeira. Exemplo:

Todos os apartamentos são pequenos. (V)
Todos os apartamentos são residências. (V)

∴ Algumas residências são pequenas. (V)

b) Algumas ou todas as premissas falsas e uma conclusão verdadeira. Exemplo:

Todos os peixes têm asas. (F)
Todos os pássaros são peixes. (F)

∴ Todos os pássaros têm asas. (V)

c) Algumas ou todas as premissas falsas e uma conclusão falsa. Exemplo:

Todos os peixes têm asas. (F)
Todos os cães são peixes. (F)

∴ Todos os cães têm asas. (F)

Todos os argumentos acima são válidos, pois se suas premissas fossem verdadeiras então as conclusões também as seriam. Podemos dizer que um argumento é válido quando todas as suas premissas são verdadeiras, acarreta que sua conclusão também é verdadeira. Portanto, um argumento será não válido se existir a possibilidade de suas premissas serem verdadeiras e sua conclusão falsa. Observe que a validade do argumento depende apenas da estrutura dos enunciados. Exemplo:

Todas as mulheres são bonitas.
Todas as princesas são mulheres.

∴ Todas as princesas são bonitas.

Observe que não precisamos de nenhum conhecimento aprofundado sobre o assunto para concluir que o argumento é válido. Vamos substituir mulheres bonitas e princesas por A, B e C respectivamente e teremos:

Todos os A são B.
Todos os C são A.

∴ Todos os C são B.

Logo, o que é importante é a forma do argumento e não o conhecimento de A, B e C, isto é, este argumento é válido para quaisquer A, B e C, portanto, a validade é consequência da forma do argumento. O atributo validade aplica-se apenas aos argumentos dedutivos.

Argumentos Dedutivos e Indutivos

O argumento será dedutivo quando suas premissas fornecerem prova conclusiva da veracidade da conclusão, isto é, o argumento é dedutivo quando a conclusão é completamente derivada das premissas. Exemplo:

Todo ser humano tem mãe.
Todos os homens são humanos.

∴ Todos os homens têm mãe.

O argumento será indutivo quando suas premissas não fornecerem o apoio completo para retificar as conclusões. Exemplo:

O Flamengo é um bom time de futebol.
O Palmeiras é um bom time de futebol.
O Vasco é um bom time de futebol.
O Cruzeiro é um bom time de futebol.

$\therefore$ Todos os times brasileiros de futebol são bons.

Portanto, nos argumentos indutivos a conclusão possui informações que ultrapassam as fornecidas nas premissas. Sendo assim, não se aplica, então, a definição de argumentos válidos ou não válidos para argumentos indutivos.

Argumentos Dedutivos Válidos

Vimos então que a noção de argumentos válidos ou não válidos aplica-se apenas aos argumentos dedutivos, e também que a validade depende apenas da forma do argumento e não dos respectivos valores verdades das premissas. Vimos também que não podemos ter um argumento válido com premissas verdadeiras e conclusão falsa. A seguir exemplificaremos alguns argumentos dedutivos válidos importantes.

Afirmação do Antecedente: O primeiro argumento dedutivo válido que discutiremos chama-se "afirmação do antecedente", também conhecido como modus ponens. Exemplo:

Se José for reprovado no concurso, então será demitido do serviço.
José foi aprovado no concurso.

$\therefore$ José será demitido do serviço.

Este argumento é evidentemente válido e sua forma pode ser escrita da seguinte forma:

Se p, então q, $\underline{p.}$ $\therefore q.$	ou	$p \to q$ $\underline{p}$ $\therefore q$

Outro argumento dedutivo válido é a "negação do consequente" (também conhecido como modus tollens). Obs.: $(p \to q)$ é equivalente a $(\neg q \to \neg p)$. Esta equivalência é chamada de contra positiva. Exemplo:

"Se ele me ama, então casa comigo" é equivalente a "Se ele não casa comigo, então ele não me ama";

Então vejamos o exemplo do modus tollens. Exemplo:

Se aumentarmos os meios de pagamentos, então haverá inflação.
Não há inflação.

$\therefore$ Não aumentamos os meios de pagamentos.

Este argumento é evidentemente válido e sua forma pode ser escrita da seguinte maneira:

Se p, então q, $\underline{\textit{Não} \quad q.}$ $\therefore \textit{Não} \quad p.$	ou	$p \to q$ $\underline{\neg q}$ $\therefore \neg p$

Existe também um tipo de argumento válido conhecido pelo nome de dilena. Geralmente este argumento ocorre quando alguém é forçado a escolher entre duas alternativas indesejáveis. Exemplo:

João se inscreve no concurso de MS, porém não gostaria de sair de São Paulo, e seus colegas de trabalho estão torcendo por ele. Eis o dilema de João:

Ou João passa ou não passa no concurso.
Se João passar no concurso vai ter que ir embora de São Paulo.
Se João não passar no concurso ficará com vergonha diante dos colegas de trabalho.

$\therefore$ Ou João vai embora de São Paulo ou João ficará com vergonha dos colegas de trabalho.

Este argumento é evidentemente válido e sua forma pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{array}{c} p \text{ ou } q. \\ \text{Se } p \text{ então } r \\ \underline{\text{Se } \; p \; \text{ então } \; s.} \\ \therefore r \;\; \text{ou} \;\; s \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{c} p \vee q \\ p \rightarrow r \\ \underline{q \rightarrow s} \\ \therefore r \vee s \end{array}$$

Argumentos Dedutivos Não Válidos

Existe certa quantidade de artimanhas que devem ser evitadas quando se está construindo um argumento dedutivo. Elas são conhecidas como falácias. Na linguagem do dia a dia, nós denominamos muitas crenças equivocadas como falácias, mas, na lógica, o termo possui significado mais específico: falácia é uma falha técnica que torna o argumento inconsistente ou inválido (além da consistência do argumento, também se podem criticar as intenções por detrás da argumentação).

Argumentos contentores de falácias são denominados falaciosos. Frequentemente, parecem válidos e convincentes, às vezes, apenas uma análise pormenorizada é capaz de revelar a falha lógica. Com as premissas verdadeiras e a conclusão falsa nunca teremos um argumento válido, então este argumento é não válido, chamaremos os argumentos não válidos de falácias. A seguir, examinaremos algumas falácias conhecidas que ocorrem com muita frequência. O primeiro caso de argumento dedutivo não válido que veremos é o que chamamos de “falácia da afirmação do consequente”. Exemplo:

Se ele me ama então ele casa comigo.
Ele casa comigo.

$\therefore$ Ele me ama.

Podemos escrever esse argumento como:

$$\begin{array}{c} \text{Se } p, \text{ então } q, \\ \underline{q} \\ \therefore p \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \underline{q} \\ \therefore p \end{array}$$

Este argumento é uma falácia, podemos ter as premissas verdadeiras e a conclusão falsa.

Outra falácia que corre com frequência é a conhecida por “falácia da negação do antecedente”. Exemplo:

Se João parar de fumar ele engordará.
João não parou de fumar.

$\therefore$ João não engordará.

Observe que temos a forma:

Se p, então q,	ou	$p \to q$
Não p.		$\neg p$
$\therefore$ *Não q.*		$\therefore \neg q$

Este argumento é uma falácia, pois podemos ter as premissas verdadeiras e a conclusão falsa.

Os argumentos dedutivos não válidos podem combinar verdade ou falsidade das premissas de qualquer maneira com a verdade ou falsidade da conclusão. Assim, podemos ter, por exemplo, argumentos não válidos com premissas e conclusões verdadeiras, porém, as premissas não sustentam a conclusão. Exemplo:

Todos os mamíferos são mortais. (V)
Todos os gatos são mortais. (V)

∴ Todos os gatos são mamíferos. (V)

Este argumento tem a forma:

Todos os A são B.
Todos os C são B.

∴ Todos os C são A.

Podemos facilmente mostrar que esse argumento é não válido, pois as premissas não sustentam a conclusão, e veremos então que podemos ter as premissas verdadeiras e a conclusão falsa, nesta forma, bastando substituir A por mamífero, B por mortais e C por cobra.

Todos os mamíferos são mortais. (V)
Todas as cobras são mortais. (V)

∴ Todas as cobras são mamíferas. (F)

Podemos usar as tabelas-verdade, definidas nas estruturas lógicas, para demonstrarmos se um argumento é válido ou falso. Outra maneira de verificar se um dado argumento P_1, P_2, P_3, ...P_n é válido ou não, por meio das tabelas-verdade, é construir a condicional associada: ($P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 ... P_n$) e reconhecer se essa condicional é ou não uma tautologia. Se essa condicional associada é tautologia, o argumento é válido. Não sendo tautologia, o argumento dado é um sofisma (ou uma falácia).

Tautologia: Quando uma proposição composta é sempre verdadeira, então teremos uma tautologia. Ex: P (p,q) = $(\neg p \wedge \neg q) \leftrightarrow \neg (p \vee q)$. Numa tautologia, o valor lógico da proposição composta P (p,q,s) = $\{(p \wedge q) \vee (p \vee s) \vee [p \wedge \neg (q \wedge s)]\} \to p$ será sempre verdadeiro.

Há argumentos válidos com conclusões falsas, da mesma forma que há argumentos não válidos com conclusões verdadeiras. Logo, a verdade ou falsidade de sua conclusão não determinam a validade ou não validade de um argumento. O reconhecimento de argumentos é mais difícil que o das premissas ou da conclusão. Muitas pessoas abarrotam textos de asserções sem sequer produzirem algo que possa ser chamado de argumento. Às vezes, os argumentos não seguem os padrões descritos acima. Por exemplo, alguém pode dizer quais são suas conclusões e depois justificá-las. Isso é válido, mas pode ser um pouco confuso.

Para complicar, algumas afirmações parecem argumentos, mas não são. Por exemplo: "Se a Bíblia é verdadeira, Jesus foi ou um louco, ou um mentiroso, ou o Filho de Deus". Isso não é um argumento, é uma afirmação condicional. Não explicita as premissas necessárias para embasar as conclusões, sem mencionar que possui outras falhas.

Um argumento não equivale a uma explicação. Suponha que, tentando provar que Albert Einstein cria em Deus, alguém dissesse: "Einstein afirmou que 'Deus não joga dados' porque acreditava em Deus". Isso pode parecer um argumento relevante, mas não é. Trata-se de uma explicação da afirmação de Einstein. Para perceber isso, deve-se lembrar que uma afirmação da forma "X porque Y" pode ser reescrita na forma "Y logo X". O que resultaria em: "Einstein acreditava em Deus, por isso afirmou que 'Deus não joga dados'". Agora fica claro que a afirmação, que parecia um argumento, está admitindo a conclusão que deveria estar provando. Ademais, Einstein não cria num Deus pessoal preocupado com assuntos humanos.

Questões

01. Se Iara não fala italiano, então Ana fala alemão. Se Iara fala italiano, então ou Ching fala chinês ou Débora fala dinamarquês. Se Débora fala dinamarquês, Elton fala espanhol. Mas Elton fala espanhol se e somente se não for verdade que Francisco não fala francês. Ora, Francisco não fala francês e Ching não fala chinês. Logo,

a) Iara não fala italiano e Débora não fala dinamarquês.
b) Ching não fala chinês e Débora fala dinamarquês.
c) Francisco não fala francês e Elton fala espanhol.
d) Ana não fala alemão ou Iara fala italiano.
e) Ana fala alemão e Débora fala dinamarquês.

02. Sabe-se que todo o número inteiro n maior do que 1 admite pelo menos um divisor (ou fator) primo.Se n é primo, então tem somente dois divisores, a saber, 1 e n. Se n é uma potência de um primo p, ou seja, é da forma p^s, então 1, p, p^2, ..., p^s são os divisores positivos de n. Segue-se daí que a soma dos números inteiros positivos menores do que 100, que têm exatamente três divisores positivos, é igual a:

a) 25
b) 87
c) 112
d) 121
e) 169

03. Ou Lógica é fácil, ou Artur não gosta de Lógica. Por outro lado, se Geografia não é difícil, então Lógica é difícil. Daí segue-se que, se Artur gosta de Lógica, então:

a) Se Geografia é difícil, então Lógica é difícil.
b) Lógica é fácil e Geografia é difícil.
c) Lógica é fácil e Geografia é fácil.
d) Lógica é difícil e Geografia é difícil.
e) Lógica é difícil ou Geografia é fácil.

04. Três suspeitos de haver roubado o colar da rainha foram levados à presença de um velho e sábio professor de Lógica. Um dos suspeitos estava de camisa azul, outro de camisa branca e o outro de camisa preta. Sabe-se que um e apenas um dos suspeitos é culpado e que o culpado às vezes fala a verdade e às vezes mente. Sabe-se, também, que dos outros dois (isto é, dos suspeitos que são inocentes), um sempre diz a verdade e o outro sempre mente. O velho e sábio professor perguntou, a cada um dos suspeitos, qual entre eles era o culpado. Disse o de camisa azul: "Eu sou o culpado". Disse o de camisa branca, apontando para o de camisa azul: "Sim, ele é o culpado". Disse, por fim, o de camisa preta: "Eu roubei o colar da rainha; o culpado sou eu". O velho e sábio professor de Lógica, então, sorriu e concluiu corretamente que:

a) O culpado é o de camisa azul e o de camisa preta sempre mente.
b) O culpado é o de camisa branca e o de camisa preta sempre mente.
c) O culpado é o de camisa preta e o de camisa azul sempre mente.
d) O culpado é o de camisa preta e o de camisa azul sempre diz a verdade.
e) O culpado é o de camisa azul e o de camisa azul sempre diz a verdade.

05. O rei ir à caça é condição necessária para o duque sair do castelo, e é condição suficiente para a duquesa ir ao jardim. Por outro lado, o conde encontrar a princesa é condição necessária e suficiente para o barão sorrir e é condição necessária para a duquesa ir ao jardim. O barão não sorriu. Logo:

a) A duquesa foi ao jardim ou o conde encontrou a princesa.
b) Se o duque não saiu do castelo, então o conde encontrou a princesa.
c) O rei não foi à caça e o conde não encontrou a princesa.
d) O rei foi à caça e a duquesa não foi ao jardim.
e) O duque saiu do castelo e o rei não foi à caça.

06. (FUNIVERSA - 2012 - PC-DF - Perito Criminal) Parte superior do formulário

Cinco amigos encontraram-se em um bar e, depois de algumas horas de muita conversa, dividiram igualmente a conta, a qual fora de, exatos, R$ 200,00, já com a gorjeta incluída. Como se encontravam ligeiramente alterados pelo álcool ingerido, ocorreu uma dificuldade no fechamento da conta. Depois que todos julgaram ter contribuído com sua parte na despesa, o total colocado sobre a mesa era de R$ 160,00, apenas, formados por uma nota de R$ 100,00, uma de R$ 20,00 e quatro de R$ 10,00. Seguiram-se, então, as seguintes declarações, todas verdadeiras:

Antônio: — Basílio pagou. Eu vi quando ele pagou.
Danton: — Carlos também pagou, mas do Basílio não sei dizer.
Eduardo: — Só sei que alguém pagou com quatro notas de R$ 10,00.
Basílio: — Aquela nota de R$ 100,00 ali foi o Antônio quem colocou, eu vi quando ele pegou seus R$ 60,00 de troco.
Carlos: — Sim, e nos R$ 60,00 que ele retirou, estava a nota de R$ 50,00 que o Eduardo colocou na mesa.

Imediatamente após essas falas, o garçom, que ouvira atentamente o que fora dito e conhecia todos do grupo, dirigiu-se exatamente àquele que ainda não havia contribuído para a despesa e disse: — O senhor pretende usar seu cartão e ficar com o troco em espécie? Com base nas informações do texto, o garçom fez a pergunta a
(A) Antônio.
(B) Basílio.
(C) Carlos.
(D) Danton.
(E) Eduardo.

07. (ESAF - 2012 - Auditor Fiscal da Receita Federal) Parte superior do formulário
Caso ou compro uma bicicleta. Viajo ou não caso. Vou morar em Passárgada ou não compro uma bicicleta. Ora, não vou morar em Passárgada. Assim,
(A) não viajo e caso.
(B) viajo e caso.
(C) não vou morar em Passárgada e não viajo.
(D) compro uma bicicleta e não viajo.
(E) compro uma bicicleta e viajo.

08. (FCC - 2012 - TST - Técnico Judiciário) Parte superior do formulário
A declaração abaixo foi feita pelo gerente de recursos humanos da empresa X durante uma feira de recrutamento em uma faculdade: “Todo funcionário de nossa empresa possui plano de saúde e ganha mais de R$ 3.000,00 por mês”. Mais tarde, consultando seus arquivos, o diretor percebeu que havia se enganado em sua declaração. Dessa forma, conclui-se que, necessariamente,
(A) dentre todos os funcionários da empresa X, há um grupo que não possui plano de saúde.
(B) o funcionário com o maior salário da empresa X ganha, no máximo, R$ 3.000,00 por mês.
(C) um funcionário da empresa X não tem plano de saúde ou ganha até R$ 3.000,00 por mês.
(D) nenhum funcionário da empresa X tem plano de saúde ou todos ganham até R$ 3.000,00 por mês.
(E) alguns funcionários da empresa X não têm plano de saúde e ganham, no máximo, R$ 3.000,00 por mês.

09. (CESGRANRIO - 2012 - Chesf - Analista de Sistemas) Parte superior do formulário
Se hoje for uma segunda ou uma quarta-feira, Pedro terá aula de futebol ou natação. Quando Pedro tem aula de futebol ou natação, Jane o leva até a escolinha esportiva. Ao levar Pedro até a escolinha, Jane deixa de fazer o almoço e, se Jane não faz o almoço, Carlos não almoça em casa. Considerando-se a sequência de implicações lógicas acima apresentadas textualmente, se Carlos almoçou em casa hoje, então hoje
(A) é terça, ou quinta ou sexta-feira, ou Jane não fez o almoço.
(B) Pedro não teve aula de natação e não é segunda-feira.
(C) Carlos levou Pedro até a escolinha para Jane fazer o almoço.
(D) não é segunda, nem quarta, mas Pedro teve aula de apenas uma das modalidades esportivas.
(E) não é segunda, Pedro não teve aulas, e Jane não fez o almoço.

10. (VUNESP - 2011 - TJM-SP) Parte superior do formulário
Se afino as cordas, então o instrumento soa bem. Se o instrumento soa bem, então toco muito bem. Ou não toco muito bem ou sonho acordado. Afirmo ser verdadeira a frase: não sonho acordado. Dessa forma, conclui-se que
(A) sonho dormindo.
(B) o instrumento afinado não soa bem.
(C) as cordas não foram afinadas.
(D) mesmo afinado o instrumento não soa bem.
(E) toco bem acordado e dormindo.

Respostas

01.
(P1) Se Iara não fala italiano, então Ana fala alemão.
(P2) Se Iara fala italiano, então ou Ching fala chinês ou Débora fala dinamarquês.
(P3) Se Débora fala dinamarquês, Elton fala espanhol.
(P4) Mas Elton fala espanhol se e somente se não for verdade que Francisco não fala francês.
(P5) Ora, Francisco não fala francês e Ching não fala chinês.

Ao todo são cinco premissas, formadas pelos mais diversos conectivos (Se então, Ou, Se e somente se, E). Mas o que importa para resolver este tipo de argumento lógico é que ele só será válido quando todas as premissas forem verdadeiras, a conclusão também for verdadeira. Uma boa dica é sempre começar pela premissa formada com o conectivo e.

Na premissa 5 tem-se: Francisco não fala francês e Ching não fala chinês. Logo para esta proposição composta pelo conectivo e ser verdadeira as premissas simples que a compõe deverão ser verdadeiras, ou seja, sabemos que:

Francisco não fala francês
Ching não fala chinês

Na premissa 4 temos: Elton fala espanhol se e somente se não for verdade que Francisco não fala francês. Temos uma proposição composta formada pelo se e somente se, neste caso, esta premissa será verdadeira se as proposições que a formarem forem de mesmo valor lógico, ou ambas verdadeiras ou ambas falsas, ou seja, como se deseja que não seja verdade que Francisco não fala francês e ele fala, isto já é falso e o antecedente do se e somente se também terá que ser falso, ou seja: Elton não fala espanhol.

Da premissa 3 tem-se: Se Débora fala dinamarquês, Elton fala espanhol. Uma premissa composta formada por outras duas simples conectadas pelo se então (veja que a vírgula subentende que existe o então), pois é, a regra do se então é que ele só vai ser falso se o seu antecedente for verdadeiro e o seu consequente for falso, da premissa 4 sabemos que Elton não fala espanhol, logo, para que a premissa seja verdadeira só poderemos aceitar um valor lógico possível para o antecedente, ou seja, ele deverá ser falso, pois F Î F = V, logo: Débora não fala dinamarquês.

Da premissa 2 temos: Se Iara fala italiano, então ou Ching fala chinês ou Débora fala dinamarquês. Vamos analisar o consequente do se então, observe: ou Ching fala chinês ou Débora fala dinamarquês. (temos um ou exclusivo, cuja regra é, o ou exclusivo, só vai ser falso se ambas forem verdadeiras, ou ambas falsas), no caso como Ching não fala chinês e Débora não fala dinamarquês, temos: F ou exclusivo F = F. Se o consequente deu falso, então o antecedente também deverá ser falso para que a premissa seja verdadeira, logo: Iara não fala italiano.

Da premissa 1 tem-se: Se Iara não fala italiano, então Ana fala alemão. Ora ocorreu o antecedente, vamos reparar no consequente... Só será verdadeiro quando V Î V = V pois se o primeiro ocorrer e o segundo não teremos o Falso na premissa que é indesejado, desse modo: Ana fala alemão.

Observe que ao analisar todas as premissas, e tornarmos todas verdadeiras obtivemos as seguintes afirmações:
Francisco não fala francês
Ching não fala chinês
Elton não fala espanhol
Débora não fala dinamarquês
Iara não fala italiano
Ana fala alemão.

A única conclusão verdadeira quando todas as premissas foram verdadeiras é a da alternativa (A), resposta do problema.
02. Resposta "B".
O número que não é primo é denominado número composto. O número 4 é um número composto. Todo número composto pode ser escrito como uma combinação de números primos, veja: 70 é um número composto formado pela combinação: 2 x 5 x 7, onde 2, 5 e 7 são números primos. O problema informou que um número primo tem com certeza 3 divisores quando puder ser escrito da forma: 1 p p^2, onde p é um número primo.

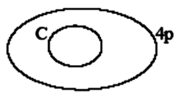
Observe os seguintes números:
1 2 2^2 (4)
1 3 3^2 (9)
1 5 5^2 (25)
1 7 7^2 (49)
1 11 11^2 (121)

Veja que 4 têm apenas três divisores (1, 2 e ele mesmo) e o mesmo ocorre com os demais números 9, 25, 49 e 121 (mas este último já é maior que 100) portanto a soma dos números inteiros positivos menores do que 100, que têm exatamente três divisores positivos é dada por: 4 + 9 + 25 + 49 = 87.

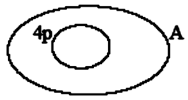
03. Resposta "B".
O Argumento é uma sequência finita de proposições lógicas iniciais (Premissas) e uma proposição final (conclusão). A validade de um argumento independe se a premissa é verdadeira ou falsa, observe a seguir:

Todo cavalo tem 4 patas (P1)
Todo animal de 4 patas tem asas (P2)
Logo: Todo cavalo tem asas (C)

Observe que se tem um argumento com duas premissas, P1 (verdadeira) e P2 (falsa) e uma conclusão C. Veja que este argumento é válido, pois se as premissas se verificarem a conclusão também se verifica: (P1) Todo cavalo tem 4 patas. Indica que se é cavalo então tem 4 patas, ou seja, posso afirmar que o conjunto dos cavalos é um subconjunto do conjunto de animais de 4 patas.

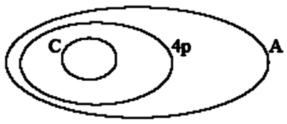


(P2) Todo animal de 4 patas tem asas. Indica que se tem 4 patas então o animal tem asas, ou seja, posso afirmar que o conjunto dos animais de 4 patas é um subconjunto do conjunto de animais que tem asas.



(C) Todo cavalo tem asas. Indica que se é cavalo então tem asas, ou seja, posso afirmar que o conjunto de cavalos é um subconjunto do conjunto de animais que tem asas.

Observe que ao unir as premissas, a conclusão sempre se verifica. Toda vez que fizermos as premissas serem verdadeiras, a conclusão também for verdadeira, estaremos diante de um argumento válido. Observe:



Desse modo, o conjunto de cavalos é subconjunto do conjunto dos animais de 4 patas e este por sua vez é subconjunto dos animais que tem asas. Dessa forma, a conclusão se verifica, ou seja, todo cavalo tem asas. Agora na questão temos duas premissas e a conclusão é uma das alternativas, logo temos um argumento. O que se pergunta é qual das conclusões possíveis sempre será verdadeira dadas as premissas sendo verdadeiras, ou seja, qual a conclusão que torna o argumento válido. Vejamos:
Ou Lógica é fácil, ou Artur não gosta de Lógica (P1)
Se Geografia não é difícil, então Lógica é difícil. (P2)
Artur gosta de Lógica (P3)

Observe que deveremos fazer as três premissas serem verdadeiras, inicie sua análise pela premissa mais fácil, ou seja, aquela que já vai lhe informar algo que deseja, observe a premissa três, veja que para ela ser verdadeira, Artur gosta de Lógica. Com esta informação vamos até a premissa um, onde temos a presença do "ou exclusivo" um ou especial que não aceita ao mesmo tempo que as duas premissas sejam verdadeiras ou falsas. Observe a tabela verdade do "ou exclusivo" abaixo:

p	q	p V q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Sendo as proposições:
p: Lógica é fácil
q: Artur não gosta de Lógica
p v q = Ou Lógica é fácil, ou Artur não gosta de Lógica (P1)

Observe que só nos interessa os resultados que possam tornar a premissa verdadeira, ou seja, as linhas 2 e 3 da tabela verdade. Mas já sabemos que Artur gosta de Lógica, ou seja, a premissa q é falsa, só nos restando a linha 2, quer dizer que para P1 ser verdadeira, p também será verdadeira, ou seja, Lógica é fácil. Sabendo que Lógica é fácil, vamos para a P2, temos um se então.

Se Geografia não é difícil, então Lógica é difícil. Do se então já sabemos que:

Geografia não é difícil - é o antecedente do se então.
Lógica é difícil - é o consequente do se então.

Chamando:

r: Geografia é difícil
~r: Geografia não é difícil (ou Geografia é fácil)
p: Lógica é fácil
(não p) ~p: Lógica é difícil

~r → ~p (lê-se se não r então não p) sempre que se verificar o se então tem-se também que a negação do consequente gera a negação do antecedente, ou seja: ~(~p) → ~(~r), ou seja, p → r ou Se Lógica é fácil então Geografia é difícil.

De todo o encadeamento lógico (dada as premissas verdadeiras) sabemos que:
Artur gosta de Lógica
Lógica é fácil
Geografia é difícil

Vamos agora analisar as alternativas, em qual delas a conclusão é verdadeira:

a) Se Geografia é difícil, então Lógica é difícil. (V → F = F) a regra do "se então" é só ser falso se o antecedente for verdadeiro e o consequente for falso, nas demais possibilidades ele será sempre verdadeiro.
b) Lógica é fácil e Geografia é difícil. (V ^ V = V) a regra do "e" é que só será verdadeiro se as proposições que o formarem forem verdadeiras.
c) Lógica é fácil e Geografia é fácil. (V ^ F = F)
d) Lógica é difícil e Geografia é difícil. (F ^ V = F)
e) Lógica é difícil ou Geografia é fácil. (F v F = F) a regra do "ou" é que só é falso quando as proposições que o formarem forem falsas.

04. Alternativa “A”.

Com os dados fazemos a tabela:

Camisa azul	Camisa Branca	Camisa Preta
“eu sou culpado”	“sim, ele (de camisa azul) é o culpado”	“Eu roubei o colar da rainha; o culpado sou eu”

Sabe-se que um e apenas um dos suspeitos é culpado e que o culpado às vezes fala a verdade e às vezes mente. Sabe-se, também, que dos outros dois (isto é, dos suspeitos que são inocentes), um sempre diz a verdade e o outro sempre mente.

I) Primeira hipótese: Se o inocente que fala verdade é o de camisa azul, não teríamos resposta, pois o de azul fala que é culpado e então estaria mentindo.

II) Segunda hipótese: Se o inocente que fala a verdade é o de camisa preta, também não teríamos resposta, observem: Se ele fala a verdade e declara que roubou ele é o culpado e não inocente.

III) Terceira hipótese: Se o inocente que fala a verdade é o de camisa branca achamos a resposta, observem: Ele é inocente e afirma que o de camisa branca é culpado, ele é o inocente que sempre fala a verdade. O de camisa branca é o culpado que ora fala a verdade e ora mente (no problema ele está dizendo a verdade). O de camisa preta é inocente e afirma que roubou, logo ele é o inocente que está sempre mentindo.

O resultado obtido pelo sábio aluno deverá ser: O culpado é o de camisa azul e o de camisa preta sempre mente (Alternativa A).

05. Resposta “C”.

Uma questão de lógica argumentativa, que trata do uso do conectivo “se então” também representado por “→”. Vamos a um exemplo:

Se o duque sair do castelo então o rei foi à caça. Aqui estamos tratando de uma proposição composta (Se o duque sair do castelo então o rei foi à caça) formada por duas proposições simples (duque sair do castelo) (rei ir à caça), ligadas pela presença do conectivo (→) “se então”. O conectivo “se então” liga duas proposições simples da seguinte forma: Se p então q, ou seja:

→ p será uma proposição simples que por estar antes do então é também conhecida como antecedente.

→ q será uma proposição simples que por estar depois do então é também conhecida como consequente.

→ Se p então q também pode ser lido como p implica em q.

→ p é conhecida como condição suficiente para que q ocorra, ou seja, basta que p ocorra para q ocorrer.

→ q é conhecida como condição necessária para que p ocorra, ou seja, se q não ocorrer então p também não irá ocorrer.

Vamos às informações do problema:

1) O rei ir à caça é condição necessária para o duque sair do castelo. Chamando A (proposição rei ir à caça) e B (proposição duque sair do castelo) podemos escrever que se B então A ou B → A. Lembre-se de que ser condição necessária é ser consequente no “se então”.

2) O rei ir à caça é condição suficiente para a duquesa ir ao jardim. Chamando A (proposição rei ir à caça) e C (proposição duquesa ir ao jardim) podemos escrever que se A então C ou A → C. Lembre-se de que ser condição suficiente é ser antecedente no “se então”.

3) O conde encontrar a princesa é condição necessária e suficiente para o barão sorrir. Chamando D (proposição conde encontrar a princesa) e E (proposição barão sorrir) podemos escrever que D se e somente se E ou D ↔ E (conhecemos este conectivo como um bicondicional, um conectivo onde tanto o antecedente quanto o consequente são condição necessária e suficiente ao mesmo tempo), onde poderíamos também escrever E se e somente se D ou E → D.

4) O conde encontrar a princesa é condição necessária para a duquesa ir ao jardim. Chamando D (proposição conde encontrar a princesa) e C (proposição duquesa ir ao jardim) podemos escrever que se C então D ou C → D. Lembre-se de que ser condição necessária é ser consequente no “se então”.

A única informação claramente dada é que o barão não sorriu, ora chamamos de E (proposição barão sorriu). Logo barão não sorriu = ~E (lê-se não E).

Dado que ~E se verifica e D ↔ E, ao negar a condição necessária nego a condição suficiente: esse modo ~E → ~D (então o conde não encontrou a princesa).

Se ~D se verifica e C → D, ao negar a condição necessária nego a condição suficiente: ~D → ~C (a duquesa não foi ao jardim).

Se ~C se verifica e A → C, ao negar a condição necessária nego a condição suficiente: ~C → ~A (então o rei não foi à caça).

Se ~A se verifica e B → A, ao negar a condição necessária nego a condição suficiente: ~A → ~B (então o duque não saiu do castelo).

Observe entre as alternativas, que a única que afirma uma proposição logicamente correta é a alternativa C, pois realmente deduziu-se que o rei não foi à caça e o conde não encontrou a princesa.

06. Resposta "D".

Como todas as informações dadas são verdadeiras, então podemos concluir que:

1 - Basílio pagou;

2 - Carlos pagou;

3 - Antônio pagou, justamente, com os R$ 100,00 e pegou os R$ 60,00 de troco que, segundo Carlos, estavam os R$ 50,00 pagos por Eduardo, então...

4 - Eduardo pagou com a nota de R$ 50,00.

O único que escapa das afirmações é o Danton.

Outra forma: 5 amigos: A,B,C,D, e E.

Antônio: - Basílio pagou. Restam A, D, C e E.

Danton: - Carlos também pagou. Restam A, D, e E.

Eduardo: - Só sei que alguém pagou com quatro notas de R$ 10,00. Restam A, D, e E.

Basílio: - Aquela nota de R$ 100,00 ali foi o Antônio. Restam D, e E.

Carlos: - Sim, e nos R$ 60,00 que ele retirou, estava a nota de R$ 50,00 que o Eduardo colocou. Resta somente D (Dalton) a pagar.

07. Resposta "B".

Parte inferior do formulário

1°: separar a informação que a questão forneceu: "não vou morar em passárgada".

2°: lembrando-se que a regra do ou diz que: para ser verdadeiro tem de haver pelo menos uma proposição verdadeira.

3°: destacando-se as informações seguintes:

- caso ou compro uma bicicleta.
- viajo ou não caso.
- vou morar em passárgada ou não compro uma bicicleta.

Logo:

- vou morar em pasárgada (F)
- não compro uma bicicleta (V)
- caso (V)
- compro uma bicicleta (F)
- viajo (V)
- não caso (F)

Conclusão: viajo, caso, não compro uma bicicleta.

Outra forma:

c = casar

b = comprar bicicleta

v = viajar

p = morar em Passárgada

Temos as verdades:
c ou b
v ou ~c
p ou ~b

Transformando em implicações:
$\sim c \rightarrow b = \sim b \rightarrow c$
$\sim v \rightarrow \sim c = c \rightarrow v$
$\sim p \rightarrow \sim b$

Assim:
$\sim p \rightarrow \sim b$
$\sim b \rightarrow c$
$c \rightarrow v$

Por transitividade:
$\sim p \rightarrow c$
$\sim p \rightarrow v$

Não morar em passárgada implica casar. Não morar em passárgada implica viajar.

08. Resposta "C".

A declaração dizia:
"Todo funcionário de nossa empresa possui plano de saúde e ganha mais de R$ 3.000,00 por mês". Porém, o diretor percebeu que havia se enganado, portanto, basta que um funcionário não tenha plano de saúde ou ganhe até R$ 3.000,00 para invalidar, negar a declaração, tornando-a desse modo FALSA. Logo, necessariamente, um funcionário da empresa X não tem plano de saúde ou ganha até R$ 3.000,00 por mês.

Proposição composta no conectivo "e" - "Todo funcionário de nossa empresa possui plano de saúde e ganha mais de R$ 3.000,00 por mês". Logo: basta que uma das proposições seja falsa para a declaração ser falsa.

1ª Proposição: Todo funcionário de nossa empresa possui plano de saúde.
2ª Proposição: ganha mais de R$ 3.000,00 por mês.

Lembre-se que no enunciado não fala onde foi o erro da declaração do gerente, ou seja, pode ser na primeira proposição e não na segunda ou na segunda e não na primeira ou nas duas que o resultado será falso.

Na alternativa C a banca fez a negação da primeira proposição e fez a da segunda e as ligaram no conectivo "ou", pois no conectivo "ou" tanto faz a primeira ser verdadeira ou a segunda ser verdadeira, desde que haja uma verdadeira para o resultado ser verdadeiro.

Atenção: A alternativa "E" está igualzinha, só muda o conectivo que é o "e", que obrigaria que o erro da declaração fosse nas duas.

A questão pede a negação da afirmação: Todo funcionário de nossa empresa possui plano de saúde "e" ganha mais de R$ 3.000,00 por mês.

Essa fica assim $\sim(p \wedge q)$.

A negação dela $\sim p \vee \sim q$

$\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ (negação todas "e" vira "ou")

A 1ª proposição tem um Todo que é quantificador universal, para negá-lo utilizamos um quantificador existencial. Pode ser: um, existe um, pelo menos, existem...

No caso da questão ficou assim: Um funcionário da empresa não possui plano de saúde "ou" ganha até R$ 3.000,00 por mês. A negação de ganha mais de 3.000,00 por mês, é ganha até 3.000,00.

09. Resposta "B".

Sendo:
Segunda = S e Quarta = Q,
Pedro tem aula de Natação = PN e
Pedro tem aula de Futebol = PF.

V = conectivo ou e → = conectivo Se, ... então, temos:
S V Q → PF V PN

Sendo Je = Jane leva Pedro para a escolinha e ~Je = a negação, ou seja Jane não leva Pedro a escolinha. Ainda temos que ~Ja = Jane deixa de fazer o almoço e C = Carlos almoça em Casa e ~C = Carlos não almoça em casa, temos:

PF V PN → Je
Je → ~Ja
~Ja → ~C

Em questões de raciocínio lógico devemos admitir que todas as proposições compostas são verdadeiras. Ora, o enunciado diz que Carlos almoçou em casa, logo a proposição ~C é Falsa.

~Ja → ~C

Para a proposição composta ~Ja → ~C ser verdadeira, então ~Ja também é falsa.
~Ja → ~C

Na proposição acima desta temos que Je → ~Ja, contudo já sabemos que ~Ja é falsa. Pela mesma regra do conectivo Se, ... então, temos que admitir que Je também é falsa para que a proposição composta seja verdadeira.

Na proposição acima temos que PF V PN → Je, tratando PF V PN como uma proposição individual e sabendo que Je é falsa, para esta proposição composta ser verdadeira PF V PN tem que ser falsa.

Ora, na primeira proposição composta da questão, temos que S V Q → PF V PN e pela mesma regra já citada, para esta ser verdadeira S V Q tem que ser falsa. Bem, agora analisando individualmente S V Q como falsa, esta só pode ser falsa se as duas premissas simples forem falsas. E da mesma maneira tratamos PF V PN.

Representação lógica de todas as proposições:

S V Q → PF V PN
(f) (f) (f) (f)
F F

PF V PN → Je
F F

Je → ~Ja
F F

~Ja → ~C
F F

Conclusão: Carlos almoçou em casa hoje, Jane fez o almoço e não levou Pedro à escolinha esportiva, Pedro não teve aula de futebol nem de natação e também não é segunda nem quarta. Agora é só marcar a questão cuja alternativa se encaixa nesse esquema.

10. Resposta “C”.

Dê nome:
A = AFINO as cordas;
I = INSTRUMENTO soa bem;
T = TOCO bem;
S = SONHO acordado.

Montando as proposições:
1° - A → I
2° - I → T
3° - ~T V S (ou exclusivo)

Como S = FALSO; ~T = VERDADEIRO, pois um dos termos deve ser verdadeiro (equivale ao nosso “ou isso ou aquilo, escolha UM”).
~T = V
T = F
I → T
(F)

Em muitos casos, é um macete que funciona nos exercícios “lotados de condicionais”, sendo assim o F passa para trás.
Assim: I = F
Novamente: A → I
(F)

O FALSO passa para trás. Com isso, A = FALSO. ~A = Verdadeiro = As cordas não foram afinadas.
Outra forma: partimos da premissa afirmativa ou de conclusão; última frase:
Não sonho acordado será VERDADE
Admita todas as frases como VERDADE
Ficando assim de baixo para cima

Ou não toco muito bem (V) ou sonho acordado (F) = V
Se o instrumento soa bem (F) então toco muito bem (F) = V
Se afino as cordas (F), então o instrumento soa bem (F) = V

A dica é trabalhar com as exceções: na condicional só dá falso quando a primeira V e a segunda F. Na disjunção exclusiva (ou... ou) as divergentes se atraem o que dá verdade. Extraindo as conclusões temos que:
Não toco muito bem, não sonho acordado como verdade.
Se afino as corda deu falso, então não afino as cordas.
Se o instrumento soa bem deu falso, então o instrumento não soa bem.

Joga nas alternativas:
(A) sonho dormindo (você não tem garantia de que sonha dormindo, só temos como verdade que não sonho acordado, pode ser que você nem sonhe).
(B) o instrumento afinado não soa bem deu que: Não afino as cordas.
(C) Verdadeira: as cordas não foram afinadas.
(D) mesmo afinado (Falso deu que não afino as cordas) o instrumento não soa bem.
(E) toco bem acordado e dormindo, absurdo. Deu não toco muito bem e não sonho acordado.

Contradições

Contradição é uma proposição cujo valor lógico é sempre falso. Exemplo: A proposição (p Λ q) Λ (p Λ q) é uma contradição, pois o seu valor lógico é sempre F conforme a tabela-verdade. Que significa que uma proposição não pode ser falsa e verdadeira ao mesmo tempo, isto é, o principio da não contradição.

p	*~p*	$p \wedge (\sim p)$
V	*F*	*F*
F	*V*	*F*

Diz-se que há contradição quando se afirma e se nega simultaneamente algo sobre a mesma coisa. O princípio da contradição informa que duas proposições contraditórias não podem ser ambas falsas ou ambas verdadeiras ao mesmo tempo. Existe relação de simetria, não podem ter o mesmo valor de verdade. Dessa forma, ocorre uma contradição quando uma afirmação é falsa e a outra é verdadeira. Se forem ambas verdadeiras ou falsas, não existe contradição.

Por exemplo, imaginando-se que se tem um conjunto de bolas, a afirmação “Toda Bola é Vermelha” e a afirmação “Alguma Bola não é Vermelha” formam uma contradição, visto que:

- se “Toda Bola é Vermelha” for verdadeira, “Alguma Bola não é Vermelha” tem que ser falsa;
- se “Toda Bola é Vermelha” for falsa, “Alguma Bola não é Vermelha” tem que ser verdadeira;
- se “Alguma Bola não é Vermelha” for verdadeira, “Toda Bola é Vermelha” tem que ser falsa; e
- se “Alguma Bola não é Vermelha” for falsa, “Toda Bola é Vermelha” tem que ser verdadeira.

Por outro lado, a afirmação “Toda Bola é Vermelha” e a afirmação “Nenhuma Bola é Vermelha” não formam uma contradição, visto que:

- se “Toda Bola é Vermelha” for verdadeira, “Nenhuma Bola é Vermelha” tem que ser falsa; mas
- se “Toda Bola é Vermelha” for falsa, “Nenhuma Bola é Vermelha” pode tanto ser verdadeira quanto falsa; e
- se “Nenhuma Bola é Vermelha” for verdadeira, “Toda Bola é Vermelha” tem que ser falsa; mas
- se “Nenhuma Bola é Vermelha” for falsa, “Toda Bola é Vermelha” pode tanto ser verdadeira quanto falsa.

E, sendo uma negação total (em nível da quantidade e da qualidade), a contraditória da afirmação “As contraditórias das grandes verdades são grandes verdades” seria: “Algumas contraditórias das grandes verdades não são grandes verdades”. A palavra significa: contra + dicção, ou seja, que diz contra algo, no caso, contra si mesma. Dessa forma, está relacionada dentro do campo da oratória também, da fala, do discurso. A linguagem, como veículo e universo específico, é paralógica ao raciocínio convencional humano.

O conceito estende-se por áreas onde possivelmente não encontraria suporte, mas apenas no momento em que entra em confronto com a avaliação mental humana, já que, conforme a psicanálise lacaniana enuncia, o “inconsciente é estruturado como linguagem” (Lacan) e suas figuras correspondem ao real humano. Por esse motivo, com rigor filosófico, a palavra é frágil em aplicações matemáticas e físicas, por exemplo. Se um elétron, em sua definição probabilística, pode comportar-se como onda ou partícula, isso poderia ser uma contradição, pois o que é, é, em termos do senso comum. Não se podem ser duas coisas distintas ao mesmo tempo. Mas, no universo quântico e astronômico, além da física newtoniana, as contradições são matematicamente reais e viáveis. Então pode-se dizer que: Uma coisa é o que é e não se confunde com nenhuma outra.

Para completar, vamos ver mais dois conceitos ligados à matéria:

Tautologia é uma proposição cujo valor lógico é sempre verdadeiro. Exemplo: A proposição $p \vee (\sim p)$ é uma tautologia, pois o seu valor lógico é sempre V, conforme a tabela-verdade.

p	*~p*	$p \vee p$
V	*F*	*V*
F	***V***	*V*

Exemplo: A proposição $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ é uma tautologia, pois a última coluna da tabela-verdade só possui V.

p	*q*	$q \wedge q$	$p \leftrightarrow q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$
V	***V***	***V***	***V***	*V*
V	*F*	*F*	*F*	*V*
F	***V***	*F*	*F*	*V*
F	*F*	*F*	***V***	*V*

Contingência: Quando uma proposição não é tautológica nem contra válida, a chamamos de *contingência* ou *proposição contingente* ou *proposição indeterminada*.

Afirmação e Negação

Dada uma proposição, por exemplo *"O carro é verde"*, todos sabemos, na linguagem corrente, negá-la; no exemplo considerado seria *"O carro não é verde"*. Se a proposição *"O carro é verde"* for verdadeira, então *"O carro não é verde"* é falsa; se *"O carro é verde"* for falsa, então *"O carro não é verde"* é verdadeira.

Somos então levados a introduzir, na nossa linguagem matemática, além da ***afirmação*** a chamada operação de ***negação***. Seja *p* uma proposição qualquer; chamaremos negação de *p* a uma nova proposição, designada por *~p* (leia-se "não *p*"), cujo valor lógico é diferente do de *p*. Assim, se *p* for verdadeira, *~p* é falsa; se p for falsa, *~p* é verdadeira. A tabela do valor lógico da negação é, portanto muito simples:

p	***~p***
V	***F***
F	***V***

Por exemplo, são verdadeiras as proposições $\sim 2 < 1$, $\sim (2 + 3)^2 = 2^2 + 3^2$, $\sim 5^2\, 5^3 = 5^6$, são falsas as proposições $\sim 4^2 = 16$, $\sim {}^2\sqrt{-27} = -3$, $\sim (5^2)^3 = 5^6$.

Voltemos a um diálogo... *"O nosso Governo não é bom"* afirma, convicto, o Antero Gatinho, da oposição, sorvendo lentamente a sua *"bica pingada"*; *"Não é verdade que o nosso Governo não seja bom"* riposta, pressurosa, a Manuela Ferrada Lamas (afeta ao partido do Governo) entre dois golos da sua "italiana". Não narrarei, por pudor, a continuação da história (nem o destino final da "bica pingada" e da "italiana"), mas gostaria de chamar a atenção para a frase da Manuela Ferrada Lamas; consiste ela na negação da frase do Antero Gatinho, frase essa que, por sua vez, era a negação de "O nosso Governo é bom".

Vemos assim que, na linguagem corrente (mesmo em situações menos dramáticas do que a descrita) utilizamos por vezes a negação de uma negação. Em termos matemáticos, e sendo *p* uma proposição qualquer, a negação da negação de *p* escreve-se ~ *(~p)*.

Qual o valor lógico desta proposição? É muito fácil determiná-lo: *~p* tem valor lógico contrário a p, ~ *(~p)* tem valor lógico contrário a *~p*, logo ~ *(~p)* e *p* têm o mesmo valor lógico.

Podemos portanto afirmar que **~ *(~p)* ⇔ *p*** (1)

Claro que a propriedade (1) poderia ter sido deduzida de uma tabela de verdade conveniente:

p	***~p***	***~(~p)***
V	***F***	***V***
F	***V***	***F***

A propriedade (1) pode ser generalizada para mais do que duas negações. Tem-se, por exemplo,

~ (~ (~ p)) ⇔ ~ p,
~ (~ (~ (~ p))) ⇔ p.

Podemos agora pensar nas propriedades que ligam a negação com as operações já estudadas. Da análise das tabelas de verdade para a equivalência (⇔) e para a não equivalência (⇔) é imediato ver que a negação de uma equivalência é uma não equivalência e vice-versa. Por outras palavras, quaisquer que sejam as proposições *p* e *q*, são verdadeiras as proposições seguintes:

(~ (p ⇔ q)) ⇔ (p ⇔ q) (2)
(~ (p ⇔ q)) ⇔ (p ⇔ q) (3)

Algo de análogo se passa com os símbolos de igualdade (=) e de desigualdade (≠); assim, sendo *a* e *b* dois entes quaisquer, são verdadeiras as seguintes proposições:

$(\sim a = b) \Leftrightarrow (a \neq b)$ (4)
$(\sim a \neq b) \Leftrightarrow (a = b)$ (5)

De uma forma geral, qualquer que seja o símbolo matemático usado para construir uma certa proposição, uma barra "/" sobre esse símbolo corresponde à negação dessa proposição.

Vejamos agora as interligações entre a negação e as operações de conjunção e de disjunção. Mais especificamente, qual o valor lógico da negação de uma conjunção? E de uma disjunção? Suponhamos que eu digo: "Hoje vou ao cinema e ao teatro"; intuitivamente, negar esta frase é dizer que "Hoje não vou ao cinema ou não vou ao teatro". A intuição diz-nos que a negação de uma conjunção é a disjunção das negações. De forma análoga, a negação de "Hoje como sopa ou carne", é "Hoje não como sopa nem como carne"; a intuição sugere-nos que a negação de uma disjunção é a conjunção das negações.

O que acabamos de dizer leva-nos a considerar duas proposições *p* e *q* quaisquer e a tentar demonstrar rigorosamente as propriedades

$(\sim (p \wedge q)) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$ (6)
$(\sim (p \vee q)) \Leftrightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q))$ (7)

Claro que uma demonstração de (6) e (7) deverá ser feita à custa de tabelas de verdade convenientes:

p	*q*	*~p*	*~q*	*p ∧ q*	*~ (p ∧ q)*	*(~p) ∨ (~q)*
V	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*
V	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*
F	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*
F	*F*	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*

p	q	~p	~q	p ∨ q	~ (p ∨ q)	(~p) ∧ (~q)
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

As propriedades (6) e (7) são usualmente conhecidas com o nome de primeiras leis de De Morgan.

Questões

01. Dê a negação lógica de cada sentença:
a) Nenhum aluno gosta de geometria.
b) Tudo o que é bom engorda.
c) Existe um país de língua portuguesa na Europa.
d) Comprei um CD e um livro.

02. Considere as afirmações seguintes:

(I) Se um político tem muito dinheiro, então ele pode ganhar as eleições.
(II) Se um político não tem muito dinheiro, então ele não pode ganhar as eleições.
(III) Se um político pode ganhar as eleições, então ele tem muito dinheiro.
(IV) Se um político não pode ganhar as eleições, então ele não tem muito dinheiro.
(V) Um político não pode ganhar as eleições, se ele não tem muito dinheiro.

a) Assumindo que (I) é verdadeira, quais das outras afirmações são verdadeiras?
b) Qual é a negação de (I)?
c) A afirmação (I) é do tipo $p \rightarrow q$. Como ficaria a afirmação $q \rightarrow p$, chamada ***recíproca*** de (I)?
d) Como ficaria a afirmação $\sim q \rightarrow \sim p$, chamada ***contra positiva*** de (I)?

03. Escreva a negação das seguintes proposições numa sentença o mais simples possível.
a) É falso que não está frio ou que está chovendo.
b) Se as ações caem aumenta o desemprego.
c) Ele tem cabelos louros se e somente se tem olhos azuis.
d) A condição necessária para ser um bom matemático é saber lógica.
e) Jorge estuda física mas não estuda química.
(Expressões da forma "p mas q" devem ser vistas como "p e q")

04. (ESAF AFC-STN) A afirmação "Alda é alta, ou Bino não é baixo, ou Ciro é calvo" é falsa. Segue-se, pois, que é verdade que:
a) se Bino é baixo, Alda é alta, e se Bino não é baixo, Ciro não é calvo.
b) se Alda é alta, Bino é baixo, e se Bino é baixo, Ciro é calvo.
c) se Alda é alta, Bino é baixo, e se Bino não é baixo, Ciro não é calvo.
d) se Bino não é baixo, Alda é alta, e se Bino é baixo, Ciro é calvo.
e) se Alda não é alta, Bino não é baixo, e se Ciro é calvo, Bino não é baixo.

05. Dê a negação das seguintes proposições:
a) $(x \in A; p(x)) \wedge (\exists x \in A; q(x))$
b) $(\exists x \in A; P(X)) \rightarrow (X \in A; \neg q(x))$
c) Existem pessoas inteligentes que não sabem ler nem escrever.
d) Toda pessoa culta é sábia se, e somente se, for inteligente.
e) Para todo número primo, a condição suficiente para ser par é ser igual a 2.

06. Dizer que a afirmação "todos os economistas são médicos" é falsa, do ponto de vista lógico, equivale a dizer que a seguinte afirmação é verdadeira:
a) pelo menos um economista não é médico
b) nenhum economista é médico
c) nenhum médico é economista
d) pelo menos um médico não é economista
e) todos os não médicos são não economistas

07. A negação da afirmação condicional "se estiver chovendo, eu levo o guarda-chuva" é:
a) se não estiver chovendo, eu levo o guarda-chuva.
b) não está chovendo e eu levo o guarda-chuva.
c) não está chovendo e eu não levo o guarda-chuva.
d) se estiver chovendo, eu não levo o guarda-chuva.
e) está chovendo e eu não levo o guarda-chuva.

08. Se Carlos é mais velho do que Pedro, então Maria e Julia tem a mesma idade. Se Maria e Julia tem a mesma idade, então João é mais moço do que Pedro. Se João é mais moço do que Pedro, então Carlos é mais velho do que Maria. Ora, Carlos não é mais velho do que Maria. Então:
a) Carlos não é mais velho do que Leila, e João é mais moço do que Pedro.
b) Carlos é mais velho que Pedro, e Maria e Julia tem a mesma idade.
c) Carlos e João são mais moços do que Pedro.
d) Carlos é mais velho do que Pedro, e João é mais moço do que Pedro.
e) Carlos não é mais velho do que Pedro, e Maria e Julia não tem a mesma idade.

09. José quer ir ao cinema assistir ao filme "Fogo Contra Fogo", mas não tem certeza se o mesmo está sendo exibido. Seus amigos, Maria, Luís e Júlio têm opiniões discordantes sobre se o filme está ou não em cartaz. Se Maria estiver certa, então Júlio está enganado. Se Júlio estiver enganado, então Luís está enganado. Se Luís estiver enganado, então o filme não está sendo exibido. Ora, ou o filme "Fogo contra Fogo" está sendo exibido, ou José não ira ao cinema. Verificou - se que Maria está certa. Logo,
a) O filme "Fogo contra Fogo" está sendo exibido.
b) Luís e Júlio não estão enganados.
c) Júlio está enganado, mas Luís não.
d) Luís está enganado, mas Júlio não.
e) José não irá ao cinema.

10. Sejam as declarações: Se ele me ama então ele casa comigo. Se ele casa comigo então não vou trabalhar. Ora, se vou ter que trabalhar podemos concluir que:

a) Ele é pobre, mas me ama.
b) Ele é rico, mas é pão duro.
c) Ele não me ama e eu gosto de trabalhar.
d) Ele não casa comigo e não vou trabalhar.
e) Ele não me ama e não casa comigo.

Respostas:

01.
a) p: Nenhum aluno gosta de geometria.
~p: Existe algum aluno que gosta de geometria.

b) p: Tudo o que é bom engorda.
~p: Existe algo que é bom e não engorda.

c) p: Existe um país de língua portuguesa na Europa.
~p: Qualquer país na Europa não é de língua portuguesa.

d) p: Comprei um CD e um livro.
~p: Não comprei um CD ou não comprei um livro.

02. Sejam:
p: Um político tem muito dinheiro;
q: Ele pode ganhar as eleições.

As afirmações dadas podem ser então escritas na maneira seguinte:
(I) $p \rightarrow q$
(II) $\sim p \rightarrow \sim q$
(III) $q \rightarrow p$
(IV) $\sim q \rightarrow \sim p$
(V) $\sim p \rightarrow \sim q$

a) Assumindo que (I) é verdadeira, apenas a afirmação (IV) é verdadeira.

Para verificar esse fato, vamos examinar as tabelas-verdade:

p	***q***	***~p***	***~q***	***p → q***	***~p → ~q***	***q → p***	***~q → ~p***	***~p → ~q***
V	*V*	*F*	*F*	***V***	*V*	*V*	***V***	*V*
V	*F*	*F*	*V*	***F***	*V*	*V*	***F***	*V*
F	*V*	*V*	*F*	***V***	*F*	*F*	***V***	*F*
F	*F*	*V*	*V*	***V***	*V*	*V*	***V***	*V*

Observe que as duas únicas colunas iguais são aquelas em negrito.

b) A negação de (I) é $\sim(p \rightarrow q)$:
"Não é verdade que se um político tem muito dinheiro então ele pode ganhar as eleições".
Podemos observar essa resolução com um pouco mais de detalhe.
Vejamos: a afirmação $p \rightarrow q$ é equivalente a $\sim p \vee q$.

Logo, a afirmação ~ ($p \rightarrow q$) é equivalente a ~ ($\sim p \vee q$) que, por sua vez, é equivalente a $p \wedge \sim q$. Vamos verificar essa última equivalência através da tabela-verdade:

p	*q*	*~p*	*~q*	$\sim p \vee q$	$\sim(\sim p \vee q)$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	F	V	**F**	**F**
V	F	F	V	F	**V**	**V**
F	V	V	F	V	**F**	**F**
F	F	V	V	V	**F**	**F**

Logo a equivalência entre ~ ($p \rightarrow q$) e $p \wedge \sim q$ nos permite dizer que:
"Existe um político que tem muito dinheiro e que não ganha às eleições".

c) A afirmação ***recíproca*** de (I), $q \rightarrow p$, é a seguinte:
Se ele pode ganhar as eleições, então ele tem muito dinheiro.

d) A afirmação ***contra positiva*** de (I), $\sim q \rightarrow \sim p$, é a seguinte:
Se ele não pode ganhar as eleições, então ele não tem muito dinheiro.

03.
a) "Não está frio ou está chovendo".
b) "As ações caem e não aumenta o desemprego".
c) "Ele tem cabelos louros e não tem olhos azuis ou ele tem olhos azuis e não tem cabelos louros".
d) A proposição é equivalente a "Se é um bom matemático então sabe lógica".
e) "Jorge não estuda lógica ou estuda química".

04. Resposta "C".
A questão exige do candidato apenas conhecimentos das operações lógicas fundamentais. Vamos representar as proposições simples:
p: Alda é alta
q: Bino é baixo
r: Ciro é calvo

Escrevendo o enunciado em linguagem simbólica: $p \vee \sim q \vee r$

A afirmação dita no enunciado, representada por $p \vee \sim q \vee r$, é falsa. Sabemos que na disjunção entre duas (ou mais) proposições p e q, seu valor lógico será Falsidade somente quando p e q forem ambas falsas (ver tabela-verdade do "ou" que foi apresentada em tópicos anteriores). Na questão, temos não duas, mas três proposições. Então p, q e ~r têm valores lógicos falsidade. Entenderam? De uma outra maneira dizemos: para que a proposição $p \vee \sim q \vee r$ seja considerada falsa, temos que ter a combinação $F \vee F \vee F$ na respectiva tabela-verdade:

p	***q***	***r***	***~q***	$p \vee \sim q \vee r$
V	V	V	F	V
V	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V
F	V	***F***	***F***	***F***
V	F	V	V	V
F	F	F	V	V

Com isso, descobrimos que "Alda não é alta", "Bino é baixo" e "Ciro não é calvo". A questão pede uma proposição composta com valor lógico verdade, a partir dos valores lógicos de p, q e r. Escrevendo cada item em linguagem simbólica temos:

a)
q → p ^ ~q → ~r
V → F ^ F → V
F ^ V
Falsidade

b)
p → q ^ q → r
F → V ^ V → F
V ^ F
Falsidade

c)
p → q ^ ~q → ~r
F → V ^ F → V
V ^ V
Verdade

d)
~q → p ^ q → r
F → F ^ V → F
V ^ F
Falsidade

e)
~p → ~q ^ r → ~q
V → F ^ F → F
F ^ v
Falsidade
05.
a) (∃ x ϵ A; ~p(x)) ∨ (x ϵ A; ~q(x)
b) (∃ x ϵ A; P(X)) ^ (∃ x ϵ A; q(x))
c) “Todas as pessoas inteligentes sabem ler ou escrever”
d) “Existe pessoa culta que é sábia e não é inteligente ou que é inteligente e não é sábia”
e) “Existe um número primo que é igual a 2 e não é par”

06. Aprendemos que a palavra TODOS é negada por PELO MENOS UM (=ALGUM). Daí, se o enunciado diz que é FALSA a sentença “Todos os economistas são médicos”, o que ela quer na verdade é que façamos a NEGAÇÃO desta frase! Ora, se é mentira que todos os economistas são médicos, é fácil concluirmos que pelo menos um economista não é médico! Alternativa “A”.

07. Resposta “E”. O que a questão pede é a negação de uma condicional. Ora, já aprendemos como se faz isso: mantém-se a primeira parte E nega-se a segunda. Daí, concluiremos o seguinte: “se estiver chovendo, eu levo o guarda-chuva” é igual a: “está chovendo E eu não levo o guarda-chuva”.

08. Se Carlos não é mais velho do que Maria, então João não é mais moço que Pedro Se João não é mais moço que Pedro, então Maria e Julia não tem a mesma idade Se Maria e Julia não tem a mesma idade, então Carlos não é mais velho que Pedro. Logo, a única opção correta é: e) Carlos não é mais velho do que Pedro, e Maria e Julia não tem a mesma idade.

09. Se Maria está certa, então Júlio está enganado. Se Júlio está enganado, então Luís está enganado. Se Luís estiver enganado, então O Filme não está sendo exibido. Ora, ou o filme está sendo exibido ou José não irá ao cinema. Logo, concluímos que: José não irá ao cinema. Resposta “E”.

10. Resposta “E”. Vou trabalhar, então, ele não casou comigo. Ele não casou comigo, então, não me ama. Logo, ele não me ama e não casa comigo.

LÓGICA MATEMÁTICA QUALITATIVA, SEQUÊNCIAS LÓGICAS ENVOLVENDO NÚMEROS, LETRAS E FIGURAS.

Lógica Sequencial

O Raciocínio é uma operação lógica, discursiva e mental. Neste, o intelecto humano utiliza uma ou mais proposições, para concluir através de mecanismos de comparações e abstrações, quais são os dados que levam às respostas verdadeiras, falsas ou prováveis. Foi pelo processo do raciocínio que ocorreu o desenvolvimento do método matemático, este considerado instrumento puramente teórico e dedutivo, que prescinde de dados empíricos. Logo, resumidamente o raciocínio pode ser considerado também um dos integrantes dos mecanismos dos processos cognitivos superiores da formação de conceitos e da solução de problemas, sendo parte do pensamento.

Sequências Lógicas

As sequências podem ser formadas por números, letras, pessoas, figuras, etc. Existem várias formas de se estabelecer uma sequência, o importante é que existam pelo menos três elementos que caracterize a lógica de sua formação, entretanto algumas séries necessitam de mais elementos para definir sua lógica. Algumas sequências são bastante conhecidas e todo aluno que estuda lógica deve conhecê-las, tais como as progressões aritméticas e geométricas, a série de Fibonacci, os números primos e os quadrados perfeitos.

Sequência de Números

Progressão Aritmética: Soma-se constantemente um mesmo número.

$$2 \xrightarrow{+3} 5 \xrightarrow{+3} 8 \xrightarrow{+3} 11 \xrightarrow{+3} 14 \xrightarrow{+3} 17$$

Progressão Geométrica: Multiplica-se constantemente um mesmo número.

$$2 \xrightarrow{\times 3} 6 \xrightarrow{\times 3} 18 \xrightarrow{\times 3} 54 \xrightarrow{\times 3} 162 \xrightarrow{\times 3} 486$$

Incremento em Progressão: O valor somado é que está em progressão.

$$1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{+4} 11 \xrightarrow{+5} 16$$

Série de Fibonacci: Cada termo é igual a soma dos dois anteriores.

1 1 2 3 5 8 13

Números Primos: Naturais que possuem apenas dois divisores naturais.

2 3 5 7 11 13 17

Quadrados Perfeitos: Números naturais cujas raízes são naturais.

1 4 9 16 25 36 49

Sequência de Letras

As sequências de letras podem estar associadas a uma série de números ou não. Em geral, devemos escrever todo o alfabeto (observando se deve, ou não, contar com k, y e w) e circular as letras dadas para entender a lógica proposta.

A C F J O U

Observe que foram saltadas 1, 2, 3, 4 e 5 letras e esses números estão em progressão.

A *B* ***C*** *D E* ***F*** *G H I* ***J*** *K L M N* ***O*** *P Q R S T* ***U***

B1 2F H4 8L N16 32R T64

Nesse caso, associou-se letras e números (potências de 2), alternando a ordem. As letras saltam 1, 3, 1, 3, 1, 3 e 1 posições.

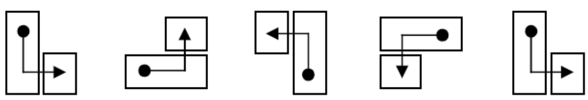
A ***B*** *C D E* ***F*** *G* ***H*** *I J K* ***L*** *M* ***N*** *O P Q* ***R*** *S* ***T***

Sequência de Pessoas

Na série a seguir, temos sempre um homem seguido de duas mulheres, ou seja, aqueles que estão em uma posição múltipla de três (3º, 6º, 9º, 12º,...) serão mulheres e a posição dos braços sempre alterna, ficando para cima em uma posição múltipla de dois (2º, 4º, 6º, 8º,...). Sendo assim, a sequência se repete a cada seis termos, tornando possível determinar quem estará em qualquer posição.

Sequência de Figuras

Esse tipo de sequência pode seguir o mesmo padrão visto na sequência de pessoas ou simplesmente sofrer rotações, como nos exemplos a seguir.

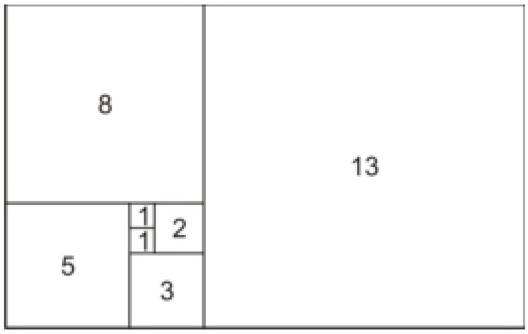


Sequência de Fibonacci

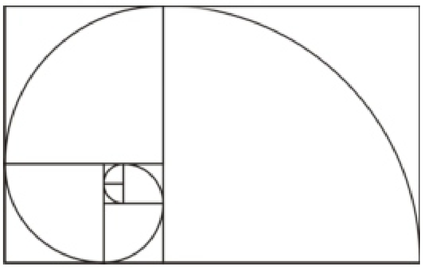
O matemático Leonardo Pisa, conhecido como Fibonacci, propôs no século XIII, a sequência numérica abaixo:

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …). Essa sequência tem uma lei de formação simples: cada elemento, a partir do terceiro, é obtido somando-se os dois anteriores. Veja: 1+1=2, 2+1=3, 3+2=5 e assim por diante. Desde o século XIII, muitos matemáticos, além do próprio Fibonacci, dedicaram-se ao estudo da sequência que foi proposta, e foram encontradas inúmeras aplicações para ela no desenvolvimento de modelos explicativos de fenômenos naturais.

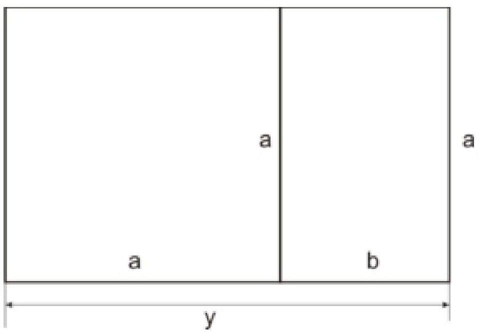
Veja algumas exemplos das aplicação da sequência de Fibonacci e entenda por que ela é conhecida como uma das maravilhas da Matemática. A partir de dois quadrados de lado 1, podemos obter um retângulo de lados 2 e 1. se adicionarmos a esse retângulo um quadrado de lado 2, obtemos um novo retângulo 3×2. Se adicionarmos agora um quadrado de lado 3, obtemos um retângulo 5×3. Observe a figura a seguir e veja que os lados dos quadrados que adicionamos para determinar os retângulos formam a sequência de Fibonacci.



Se utilizarmos um compasso e traçarmos o quarto de circunferência inscrito em cada quadrado, encontraremos uma espiral formada pela concordância de arcos cujos raios são os elemento da sequência de Fibonacci.



O Partenon que foi construído em Atenas pelo celebre arquiteto grego Fidias. A fachada principal do edifício, hoje em ruínas, era um retângulo que continha um quadrado de lado igual à altura. Essa forma sempre foi considerada satisfatória do ponto de vista estético por suas proporções sendo chamada retângulo áureo ou retângulo de ouro.



$\frac{y}{a}=\frac{a}{b} \quad (1)$ângulos indicados na figura são semelhantes temos:

Como:

$b=y-a \quad (2)$

$y^2-ay-a^2=0$) temos:

$y=\frac{a(1\pm\sqrt{5})}{2}$ *em que* $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0\right)$ *não convem.*

Logo:

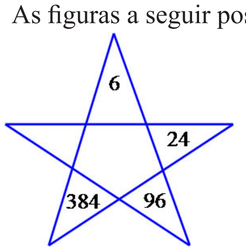
$$\frac{y}{a} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} = 1,61803398875$$

Esse número é conhecido como número de ouro e pode ser representado por:

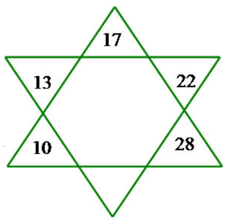
$$\phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$$

Todo retângulo e que a razão entre o maior e o menor lado for igual a Φ é chamado retângulo áureo como o caso da fachada do Partenon.

As figuras a seguir possuem números que representam uma sequência lógica. Complete com o número que está faltando.

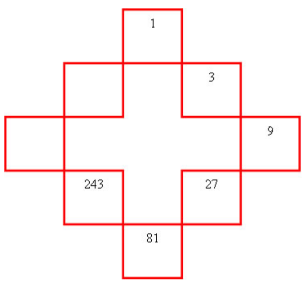


A sequência numérica proposta envolve multiplicações por 4.
6 x 4 = 24
24 x 4 = 96
96 x 4 = 384
384 x 4 = 1536



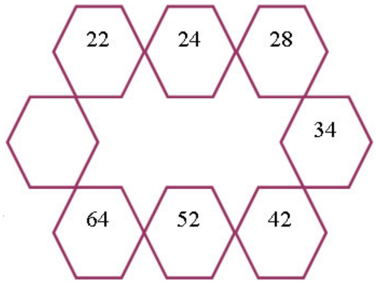
A diferença entre os números vai aumentando 1 unidade.
13 – 10 = 3
17 – 13 = 4
22 – 17 = 5
28 – 22 = 6
35 – 28 = 7

Exemplo 3



Multiplicar os números sempre por 3.
1 x 3 = 3

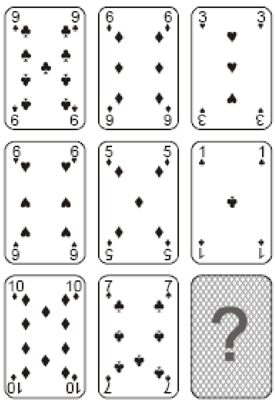
3 x 3 = 9



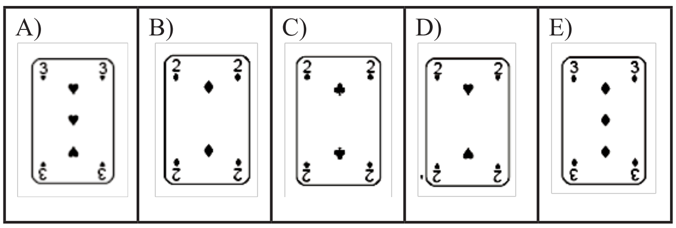
A diferença entre os números vai aumentando 2 unidades.
24 – 22 = 2
28 – 24 = 4
34 – 28 = 6
42 – 34 = 8
52 – 42 = 10
64 – 52 = 12
78 – 64 = 14

Questões

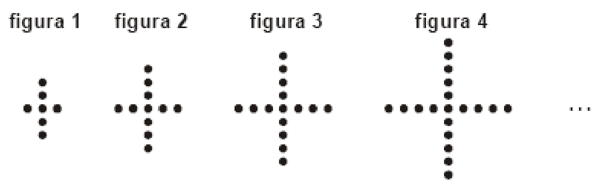
01. Observe atentamente a disposição das cartas em cada linha do esquema seguinte:



A carta que esta oculta é:



02. Considere que a sequência de figuras foi construída segundo um certo critério.



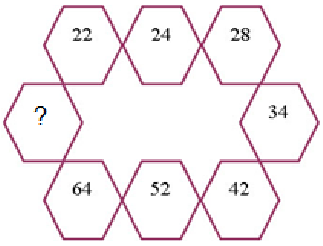
Se tal critério for mantido, para obter as figuras subsequentes, o total de pontos da figura de número 15 deverá ser:

(A) 69
(B) 67
(C) 65
(D) 63
(E) 61

03. O próximo número dessa sequência lógica é: *1000, 990, 970, 940, 900, 850, ...*

(A) 800
(B) 790
(C) 780
(D) 770

04. Na sequência lógica de números representados nos hexágonos, da figura abaixo, observa-se a ausência de um deles que pode ser:



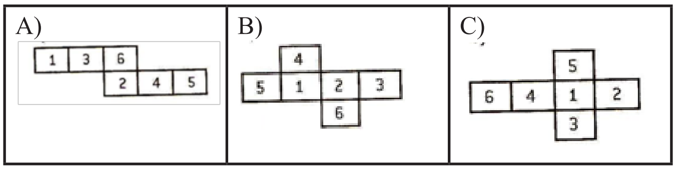
(A) 76
(B) 10
(C) 20
(D) 78

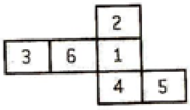
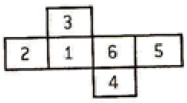
05. Uma criança brincando com uma caixa de palitos de fósforo constrói uma sequência de quadrados conforme indicado abaixo:

Quantos palitos ele utilizou para construir a 7ª figura?

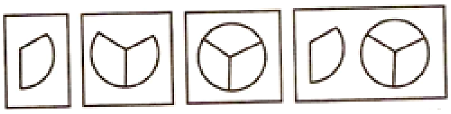
(A) 20 palitos
(B) 25 palitos
(C) 28 palitos
(D) 22 palitos

06. Ana fez diversas planificações de um cubo e escreveu em cada um, números de 1 a 6. Ao montar o cubo, ela deseja que a soma dos números marcados nas faces opostas seja 7. A única alternativa cuja figura representa a planificação desse cubo tal como deseja Ana é:



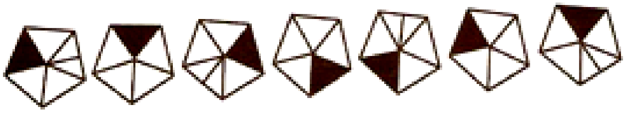
D)	E)
	

07. As figuras da sequência dada são formadas por partes iguais de um círculo.

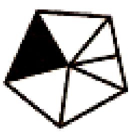
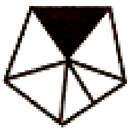
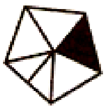
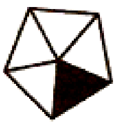
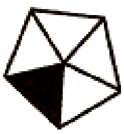


Continuando essa sequência, obtém-se exatamente 16 círculos completos na:
(A) 36ª figura
(B) 48ª figura
(C) 72ª figura
(D) 80ª figura
(E) 96ª figura

08. Analise a sequência a seguir:



Admitindo-se que a regra de formação das figuras seguintes permaneça a mesma, pode-se afirmar que a figura que ocuparia a 277ª posição dessa sequência é:

A)	B)	C)
		
D)	E)	
		

09. Observe a sequência: *2, 10, 12, 16, 17, 18, 19*, ... Qual é o próximo número?
(A) 20
(B) 21
(C) 100
(D) 200

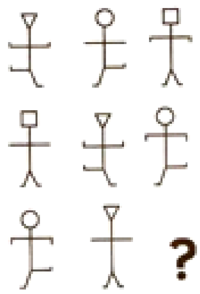
10. Observe a sequência: *3,13, 30,* ... Qual é o próximo número?
(A) 4
(B) 20
(C) 31
(D) 21

11. Os dois pares de palavras abaixo foram formados segundo determinado critério.

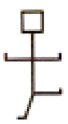
LACRAÇÃO → cal
AMOSTRA → soma
LAVRAR → ?

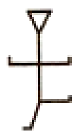
Segundo o mesmo critério, a palavra que deverá ocupar o lugar do ponto de interrogação é:
(A) alar
(B) rala
(C) ralar
(D) larva
(E) arval

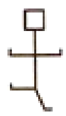
12. Observe que as figuras abaixo foram dispostas, linha a linha, segundo determinado padrão.

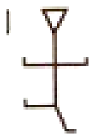


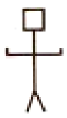
Segundo o padrão estabelecido, a figura que substitui corretamente o ponto de interrogação é:

A)


B)


C)


D)


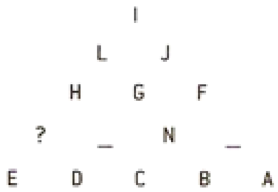
E)


13. Observe que na sucessão seguinte os números foram colocados obedecendo a uma lei de formação.

4	8	5	X	7	14	11
4	12	10	Y	28	84	82

Os números X e Y, obtidos segundo essa lei, são tais que $X + Y$ é igual a:
(A) 40
(B) 42
(C) 44
(D) 46
(E) 48

14. A figura abaixo representa algumas letras dispostas em forma de triângulo, segundo determinado critério.



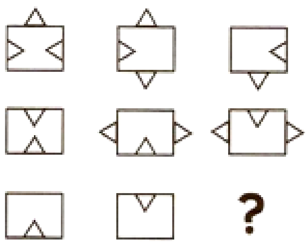
Considerando que na ordem alfabética usada são excluídas as letra *"K", "W"* e *"Y"*, a letra que substitui corretamente o ponto de interrogação é:
(A) P
(B) O
(C) N
(D) M
(E) L

15. Considere que a sequência seguinte é formada pela sucessão natural dos números inteiros e positivos, sem que os algarismos sejam separados.

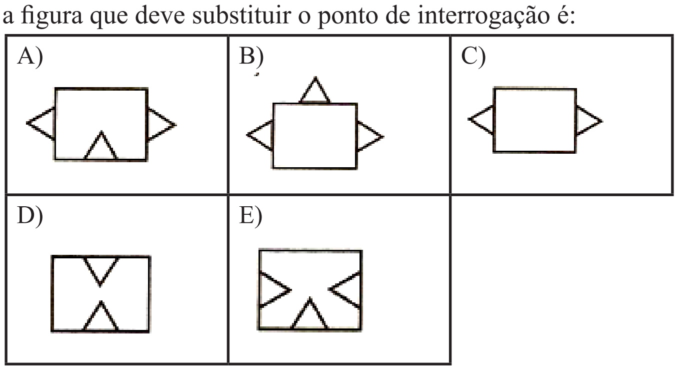
1234567891011121314151617181920...

O algarismo que deve aparecer na 276ª posição dessa sequência é:
(A) 9
(B) 8
(C) 6
(D) 3
(E) 1

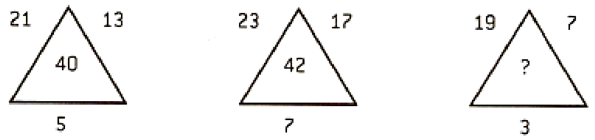
16. Em cada linha abaixo, as três figuras foram desenhadas de acordo com determinado padrão.



Segundo esse mesmo padrão, a figura que deve substituir o ponto de interrogação é:



17. Observe que, na sucessão de figuras abaixo, os números que foram colocados nos dois primeiros triângulos obedecem a um mesmo critério.



Para que o mesmo critério seja mantido no triângulo da direita, o número que deverá substituir o ponto de interrogação é:

(A) 32
(B) 36
(C) 38
(D) 42
(E) 46

18. Considere a seguinte sequência infinita de números: *3, 12, 27, __, 75, 108,...* O número que preenche adequadamente a quarta posição dessa sequência é:

(A) 36,
(B) 40,
(C) 42,
(D) 44,
(E) 48

19. Observando a sequência (1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$, ...) o próximo numero será:

a) $\frac{1}{24}$
b) $\frac{1}{30}$
c) $\frac{1}{36}$
d) $\frac{1}{40}$

20. Considere a sequência abaixo:

BBB	*BXB*	*XXB*
XBX	*XBX*	*XBX*
BBB	*BXB*	*BXX*

O padrão que completa a sequência é:

(A)	(B)	(C)
XXX	*XXB*	*XXX*
XXX	*XBX*	*XXX*
XXX	*BXX*	*XXB*

(D)	(E)
XXX	*XXX*
XBX	*XBX*
XXX	*BXX*

21. Na série de Fibonacci, cada termo a partir do terceiro é igual à soma de seus dois termos precedentes. Sabendo-se que os dois primeiros termos, por definição, são 0 e 1, o sexto termo da série é:
(A) 2
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 6

22. Nosso código secreto usa o alfabeto *A B C D E F G H I J L M N O P Q R S T U V X Z*. Do seguinte modo: cada letra é substituída pela letra que ocupa a quarta posição depois dela. Então, o *"A"* vira *"E"*, o *"B"* vira *"F"*, o *"C"* vira *"G"* e assim por diante. O código é "circular", de modo que o *"U"* vira *"A"* e assim por diante. Recebi uma mensagem em código que dizia: BSA HI EDAP. Decifrei o código e li:

(A) FAZ AS DUAS;
(B) DIA DO LOBO;
(C) RIO ME QUER;
(D) VIM DA LOJA;
(E) VOU DE AZUL.

23. A sentença "*Social está para laicos assim como 231678 está para...*" é melhor completada por:

(A) 326187;
(B) 876132;
(C) 286731;
(D) 827361;
(E) 218763.

24. A sentença "*Salta está para Atlas assim como 25435 está para...*" é melhor completada pelo seguinte número:

(A) 53452;
(B) 23455;
(C) 34552;
(D) 43525;
(E) 53542.

25. Repare que com um número de 5 algarismos, respeitada a ordem dada, podem-se criar 4 números de dois algarismos. Por exemplo: de 34.712, podem-se criar o 34, o 47, o 71 e o 12. Procura-se um número de 5 algarismos formado pelos algarismos 4, 5, 6, 7 e 8, sem repetição. Veja abaixo alguns números desse tipo e, ao lado de cada um deles, a quantidade de números de dois algarismos que esse número tem em comum com o número procurado.

Número dado	***Quantidade de números de 2 algarismos em comum***
48.765	1
86.547	0
87.465	2
48.675	1

O número procurado é:

(A) 87456
(B) 68745
(C) 56874
(D) 58746
(E) 46875

26. Considere que os símbolos ♦ e ♣ que aparecem no quadro seguinte, substituem as operações que devem ser efetuadas em cada linha, a fim de se obter o resultado correspondente, que se encontra na coluna da extrema direita.

36	♦	4	♣	5	=	14
48	♦	6	♣	9	=	17
54	♦	9	♣	7	=	?

Para que o resultado da terceira linha seja o correto, o ponto de interrogação deverá ser substituído pelo número:

(A) 16
(B) 15
(C) 14
(D) 13
(E) 12

27. Segundo determinado critério, foi construída a sucessão seguinte, em que cada termo é composto de um número seguido de uma letra: A1 – E2 – B3 – F4 – C5 – G6 – .... Considerando que no alfabeto usado são excluídas as letras K, Y e W, então, de acordo com o critério estabelecido, a letra que deverá anteceder o número 12 é:

(A) J
(B) L
(C) M
(D) N
(E) O

28. Os nomes de quatro animais – MARÁ, PERU, TATU e URSO – devem ser escritos nas linhas da tabela abaixo, de modo que cada uma das suas respectivas letras ocupe um quadrinho e, na diagonal sombreada, possa ser lido o nome de um novo animal.

Excluídas do alfabeto as letras K, W e Y e fazendo cada letra restante corresponder ordenadamente aos números inteiros de 1 a 23 (ou seja, A = 1, B = 2, C = 3,..., Z = 23), a soma dos números que correspondem às letras que compõem o nome do animal é:
(A) 37
(B) 39
(C) 45
(D) 49
(E) 51

Nas questões ***29*** e ***30***, observe que há uma relação entre o primeiro e o segundo grupos de letras. A mesma relação deverá existir entre o terceiro grupo e um dos cinco grupos que aparecem nas alternativas, ou seja, aquele que substitui corretamente o ponto de interrogação. Considere que a ordem alfabética adotada é a oficial e exclui as letras K, W e Y.

29. CASA: LATA: LOBO: ?
(A) SOCO
(B) TOCO
(C) TOMO
(D) VOLO
(E) VOTO

30. ABCA: DEFD: HIJH: ?
(A) IJLI
(B) JLMJ
(C) LMNL
(D) FGHF
(E) EFGE

31. Os termos da sucessão seguinte foram obtidos considerando uma lei de formação (*0, 1, 3, 4, 12, 123,...*). Segundo essa lei, o décimo terceiro termo dessa sequência é um número:

(A) Menor que 200.
(B) Compreendido entre 200 e 400.
(C) Compreendido entre 500 e 700.
(D) Compreendido entre 700 e 1.000.
(E) Maior que 1.000.

Para responder às questões de números ***32*** e ***33***, você deve observar que, em cada um dos dois primeiros pares de palavras dadas, a palavra da direita foi obtida da palavra da esquerda segundo determinado critério. Você deve descobrir esse critério e usá-lo para encontrar a palavra que deve ser colocada no lugar do ponto de interrogação.

32. Ardoroso → rodo
Dinamizar → mina
Maratona → ?
(A) mana
(B) toma
(C) tona
(D) tora
(E) rato

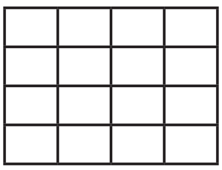
33. Arborizado → azar
Asteróide → dias
Articular → ?
(A) luar
(B) arar
(C) lira
(D) luta
(E) rara

34. Preste atenção nesta sequência lógica e identifique quais os números que estão faltando: *1, 1, 2, __, 5, 8, __,21, 34, 55, __, 144, __...*

35. Uma lesma encontra-se no fundo de um poço seco de 10 metros de profundidade e quer sair de lá. Durante o dia, ela consegue subir 2 metros pela parede; mas à noite, enquanto dorme, escorrega 1 metro. Depois de quantos dias ela consegue chegar à saída do poço?

36. Quantas vezes você usa o algarismo 9 para numerar as páginas de um livro de 100 páginas?

37. Quantos quadrados existem na figura abaixo?



38. Retire três palitos e obtenha apenas três quadrados.

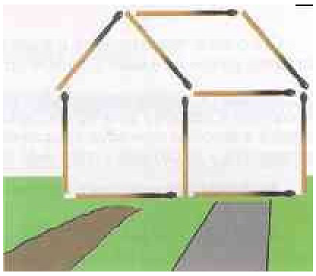
39. Qual será o próximo símbolo da sequência abaixo?

40. Reposicione dois palitos e obtenha uma figura com cinco quadrados iguais.

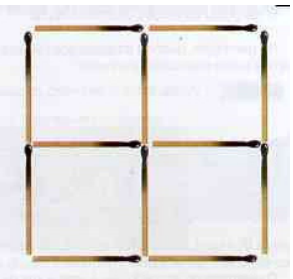
41. Observe as multiplicações a seguir:
12.345.679 × 18 = 222.222.222
12.345.679 × 27 = 333.333.333
... ...
12.345.679 × 54 = 666.666.666

Para obter *999.999.999* devemos multiplicar *12.345.679* por quanto?

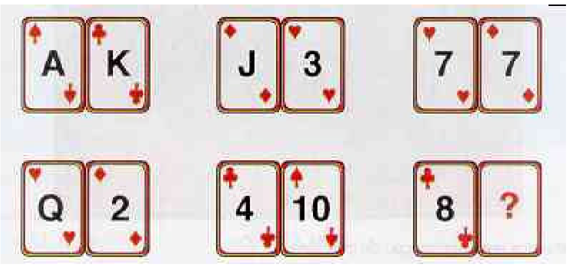
42. Esta casinha está de frente para a estrada de terra. Mova dois palitos e faça com que fique de frente para a estrada asfaltada.



43. Remova dois palitos e deixe a figura com dois quadrados.

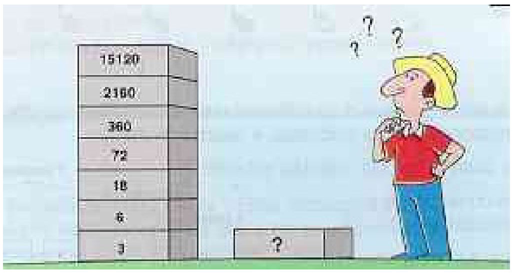


44. As cartas de um baralho foram agrupadas em pares, segundo uma relação lógica. Qual é a carta que está faltando, sabendo que K vale 13, Q vale 12, J vale 11 e A vale 1?



45. Mova um palito e obtenha um quadrado perfeito.

46. Qual o valor da pedra que deve ser colocada em cima de todas estas para completar a sequência abaixo?

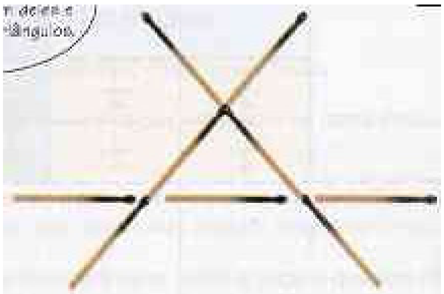


47. Mova três palitos nesta figura para obter cinco triângulos.

48. Tente dispor 6 moedas em 3 fileiras de modo que em cada fileira fiquem apenas 3 moedas.

49. Reposicione três palitos e obtenha cinco quadrados.

50. Mude a posição de quatro palitos e obtenha cinco triângulos.



Respostas

01. Resposta: "A".

A diferença entre os números estampados nas cartas 1 e 2, em cada linha, tem como resultado o valor da 3ª carta e, além disso, o naipe não se repete. Assim, a 3ª carta, dentro das opções dadas só pode ser a da opção (A).

02. Resposta "D".

Observe que, tomando o eixo vertical como eixo de simetria, tem-se:
Na figura 1: 01 ponto de cada lado ⇒ 02 pontos no total.
Na figura 2: 02 pontos de cada lado ⇒ 04 pontos no total.
Na figura 3: 03 pontos de cada lado ⇒ 06 pontos no total.
Na figura 4: 04 pontos de cada lado ⇒ 08 pontos no total.
Na figura n: n pontos de cada lado ⇒ 2.n pontos no total.

Em particular:
Na figura 15: 15 pontos de cada lado ⇒ 30 pontos no total.

Agora, tomando o eixo horizontal como eixo de simetria, tem-se:
Na figura 1: 02 pontos acima e abaixo ⇒ 04 pontos no total.
Na figura 2: 03 pontos acima e abaixo ⇒ 06 pontos no total.
Na figura 3: 04 pontos acima e abaixo ⇒ 08 pontos no total.
Na figura 4: 05 pontos acima e abaixo ⇒ 10 pontos no total.
Na figura n: (n+1) pontos acima e abaixo ⇒ 2.(n+1) pontos no total.

Em particular:

Na figura 15: 16 pontos acima e abaixo ⇒ 32 pontos no total. Incluindo o ponto central, que ainda não foi considerado, temos para total de pontos da figura 15: Total de pontos = 30 + 32 + 1 = 63 pontos.

03. Resposta "B".

Nessa sequência, observamos que a diferença: entre 1000 e 990 é 10, entre 990 e 970 é 20, entre o 970 e 940 é 30, entre 940 e 900 é 40, entre 900 e 850 é 50, portanto entre 850 e o próximo número é 60, dessa forma concluímos que o próximo número é 790, pois: 850 – 790 = 60.

04. Resposta "D"

Nessa sequência lógica, observamos que a diferença: entre 24 e 22 é 2, entre 28 e 24 é 4, entre 34 e 28 é 6, entre 42 e 34 é 8, entre 52 e 42 é 10, entre 64 e 52 é 12, portanto entre o próximo número e 64 é 14, dessa forma concluímos que o próximo número é 78, pois: 76 – 64 = 14.

05. Resposta "D".

Observe a tabela:

Figuras	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª
N° de Palitos	4	7	10	13	16	19	22

Temos de forma direta, pela contagem, a quantidade de palitos das três primeiras figuras. Feito isto, basta perceber que cada figura a partir da segunda tem a quantidade de palitos da figura anterior acrescida de 3 palitos. Desta forma, fica fácil preencher o restante da tabela e determinar a quantidade de palitos da 7ª figura.

06. Resposta "A".

Na figura apresentada na letra "B", não é possível obter a planificação de um lado, pois o 4 estaria do lado oposto ao 6, somando 10 unidades. Na figura apresentada na letra "C", da mesma forma, o 5 estaria em face oposta ao 3, somando 8, não formando um lado. Na figura da letra "D", o 2 estaria em face oposta ao 4, não determinando um lado. Já na figura apresentada na letra "E", o 1 não estaria em face oposta ao número 6, impossibilitando, portanto, a obtenção de um lado. Logo, podemos concluir que a planificação apresentada na letra "A" é a única para representar um lado.

07. Resposta "B".

Como na 3ª figura completou-se um círculo, para completar 16 círculos é suficiente multiplicar 3 por 16 : 3 . 16 = 48. Portanto, na 48ª figura existirão 16 círculos.

08. Resposta "B".

A sequência das figuras completa-se na 5ª figura. Assim, continua-se a sequência de 5 em 5 elementos. A figura de número 277 ocupa, então, a mesma posição das figuras que representam número 5n + 2, com *n* *N*. Ou seja, a 277ª figura corresponde à 2ª figura, que é representada pela letra "B".

09. Resposta "D".

A regularidade que obedece a sequência acima não se dá por padrões numéricos e sim pela letra que inicia cada número. "Dois, Dez, Doze, Dezesseis, Dezessete, Dezoito, Dezenove, ... Enfim, o próximo só pode iniciar também com "D": Duzentos.

10. Resposta "C".

Esta sequência é regida pela inicial de cada número. Três, Treze, Trinta,... O próximo só pode ser o número Trinta e um, pois ele inicia com a letra "T".

11. Resposta "E".

Na 1ª linha, a palavra CAL foi retirada das 3 primeiras letras da palavra LACRAÇÃO, mas na ordem invertida. Da mesma forma, na 2ª linha, a palavra SOMA é retirada da palavra AMOSTRA, pelas 4 primeira letras invertidas. Com isso, da palavra LAVRAR, ao se retirarem as 5 primeiras letras, na ordem invertida, obtém-se ARVAL.

12. Resposta "C".

Em cada linha apresentada, as cabeças são formadas por quadrado, triângulo e círculo. Na 3ª linha já há cabeças com círculo e com triângulo. Portanto, a cabeça da figura que está faltando é um quadrado. As mãos das figuras estão levantadas, em linha reta ou abaixadas. Assim, a figura que falta deve ter as mãos levantadas (é o que ocorre em todas as alternativas). As figuras apresentam as 2 pernas ou abaixadas, ou 1 perna levantada para a esquerda ou 1 levantada para a direita. Nesse caso, a figura que está faltando na 3ª linha deve ter 1 perna levantada para a esquerda. Logo, a figura tem a cabeça quadrada, as mãos levantadas e a perna erguida para a esquerda.

13. Resposta "A".

Existem duas leis distintas para a formação: uma para a parte superior e outra para a parte inferior. Na parte superior, tem-se que: do 1º termo para o 2º termo, ocorreu uma multiplicação por 2; já do 2º termo para o 3º, houve uma subtração de 3 unidades. Com isso, X é igual a 5 multiplicado por 2, ou seja, $X = 10$. Na parte inferior, tem-se: do 1º termo para o 2º termo ocorreu uma multiplicação por 3; já do 2º termo para o 3º, houve uma subtração de 2 unidades. Assim, Y é igual a 10 multiplicado por 3, isto é, $Y = 30$. Logo, $X + Y = 10 + 30 = 40$.

14. Resposta "A".

A sequência do alfabeto inicia-se na extremidade direita do triângulo, pela letra "A"; aumenta a direita para a esquerda; continua pela 3ª e 5ª linhas; e volta para as linhas pares na ordem inversa – pela 4ª linha até a 2ª linha. Na 2ª linha, então, as letras são, da direita para a esquerda, "M", "N", "O", e a letra que substitui corretamente o ponto de interrogação é a letra "P".

15. Resposta "B".

A sequência de números apresentada representa a lista dos números naturais. Mas essa lista contém todos os algarismos dos números, sem ocorrer a separação. Por exemplo: ***101112*** representam os números 10, 11 e 12. Com isso, do número 1 até o número 9 existem 9 algarismos. Do número 10 até o número 99 existem: 2 x 90 = 180 algarismos. Do número 100 até o número 124 existem: 3 x 25 = 75 algarismos. E do número 124 até o número 128 existem mais 12 algarismos. Somando todos os valores, tem-se: 9 + 180 + 75 + 12 = 276 algarismos. Logo, conclui-se que o algarismo que ocupa a 276ª posição é o número 8, que aparece no número 128.

16. Resposta "D".

Na 1ª linha, internamente, a 1ª figura possui 2 "orelhas", a 2ª figura possui 1 "orelha" no lado esquerdo e a 3ª figura possui 1 "orelha" no lado direito. Esse fato acontece, também, na 2ª linha, mas na parte de cima e na parte de baixo, internamente em relação às figuras. Assim, na 3ª linha ocorrerá essa regra, mas em ordem inversa: é a 3ª figura da 3ª linha que terá 2 "orelhas" internas, uma em cima e outra em baixo. Como as 2 primeiras figuras da 3ª linha não possuem "orelhas" externas, a 3ª figura também não terá orelhas externas. Portanto, a figura que deve substituir o ponto de interrogação é a 4ª.

17. Resposta "B".

No 1º triângulo, o número que está no interior do triângulo dividido pelo número que está abaixo é igual à diferença entre o número que está à direita e o número que está à esquerda do triângulo: 40 5 21 13 8.

A mesma regra acontece no 2º triângulo: 42 7 23 17 6.

Assim, a mesma regra deve existir no 3º triângulo:

? 3 19 7

? 3 12

? 12 x 3 36.

18. Resposta "E".

Verifique os intervalos entre os números que foram fornecidos. Dado os números 3, 12, 27, __, 75, 108, obteve-se os seguintes 9, 15, __, __, 33 intervalos. Observe que 3x3, 3x5, 3x7, 3x9, 3x11. Logo 3x7 = 21 e 3x 9 = 27. Então: 21 + 27 = 48.

19. Resposta "B".

Observe que o numerador é fixo, mas o denominador é formado pela sequência:

Primeiro	*Segundo*	*Terceiro*	*Quarto*	*Quinto*	*Sexto*
1	1 x 2 = 2	2 x 3 = 6	3 x 4 = 12	4 x 5 = 20	5 x 6 = 30

20. Resposta "D".

O que de início devemos observar nesta questão é a quantidade de *B* e de *X* em cada figura. Vejamos:

BBB	*BXB*	*XXB*
XBX	*XBX*	*XBX*
BBB	*BXB*	*BXX*
7B e 2X	***5B e 4X***	***3B e 6X***

Vê-se, que os *"B"* estão diminuindo de 2 em 2 e que os *"X"* estão aumentando de 2 em 2; notem também que os *"B"* estão sendo retirados um na parte de cima e um na parte de baixo e os *"X"* da mesma forma, só que não estão sendo retirados, estão, sim, sendo colocados. Logo a 4ª figura é:

XXX
XBX
XXX
1B e 8X

21. Resposta "D".

Montando a série de Fibonacci temos: *0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...* A resposta da questão é a alternativa *"D"*, pois como a questão nos diz, cada termo a partir do terceiro é igual à soma de seus dois termos precedentes. 2 + 3 = 5

22. Resposta "E".

A questão nos informa que ao se escrever alguma mensagem, cada letra será substituída pela letra que ocupa a quarta posição, além disso, nos informa que o código é "circular", de modo que a letra *"U"* vira *"A"*. Para decifrarmos, temos que perceber a posição do emissor e do receptor. O emissor ao escrever a mensagem conta quatro letras à frente para representar a letra que realmente deseja, enquanto que o receptor, deve fazer o contrário, contar quatro letras atrás para decifrar cada letra do código. No caso, nos foi dada a frase para ser decifrada, vê-se, pois, que, na questão, ocupamos a posição de receptores. Vejamos a mensagem: BSA HI EDAP. Cada letra da mensagem representa a quarta letra anterior de modo que:

VxzaB: B na verdade é V;
OpqrS: S na verdade é O;
UvxzA: A na verdade é U;
DefgH: H na verdade é D;
EfghI: I na verdade é E;
AbcdE: E na verdade é A;
ZabcD: D na verdade é Z;
UvxaA: A na verdade é U;
LmnoP: P na verdade é L;

23. Resposta "B".

A questão nos traz duas palavras que têm relação uma com a outra e, em seguida, nos traz uma sequência numérica. É perguntado qual sequência numérica tem a mesma ralação com a sequência numérica fornecida, de maneira que, a relação entre as palavras e a sequência numérica é a mesma. Observando as duas palavras dadas, podemos perceber facilmente que têm cada uma 6 letras e que as letras de uma se repete na outra em uma ordem diferente. Tal ordem, nada mais é, do que a primeira palavra de trás para frente, de maneira que SOCIAL vira LAICOS. Fazendo o mesmo com a sequência numérica fornecida, temos: 231678 viram 876132, sendo esta a resposta.

24. Resposta "A".

A questão nos traz duas palavras que têm relação uma com a outra, e em seguida, nos traz uma sequência numérica. Foi perguntado qual a sequência numérica que tem relação com a já dada de maneira que a relação entre as palavras e a sequência numérica é a mesma. Observando as duas palavras dadas podemos perceber facilmente que tem cada uma 6 letras e que as letras de uma se repete na outra em uma ordem diferente. Essa ordem diferente nada mais é, do que a primeira palavra de trás para frente, de maneira que SALTA vira ATLAS. Fazendo o mesmo com a sequência numérica fornecida temos: 25435 vira 53452, sendo esta a resposta.

25. Resposta "E".

Pelo número 86.547, tem-se que 86, 65, 54 e 47 não acontecem no número procurado. Do número 48.675, as opções 48, 86 e 67 não estão em nenhum dos números apresentados nas alternativas. Portanto, nesse número a coincidência se dá no número 75. Como o único número apresentado nas alternativas que possui a sequência 75 é 46.875, tem-se, então, o número procurado.

26. Resposta "D".

O primeiro símbolo representa a divisão e o 2º símbolo representa a soma. Portanto, na 1ª linha, tem-se: $36 \div 4 + 5 = 9 + 5 = 14$. Na 2ª linha, tem-se: $48 \div 6 + 9 = 8 + 9 = 17$. Com isso, na 3ª linha, ter-se-á: $54 \div 9 + 7 = 6 + 7 = 13$. Logo, podemos concluir então que o ponto de interrogação deverá ser substituído pelo número 13.

27. Resposta "A".

As letras que acompanham os números ímpares formam a sequência normal do alfabeto. Já a sequência que acompanha os números pares inicia-se pela letra *"E"*, e continua de acordo com a sequência normal do alfabeto: 2ª letra: E, 4ª letra: F, 6ª letra: G, 8ª letra: H, 10ª letra: I e 12ª letra: J.

28. Resposta "D".

Escrevendo os nomes dos animais apresentados na lista – MARÁ, PERU, TATU e URSO, na seguinte ordem: PERU, MARÁ, TATU e URSO, obtém-se na tabela:

P	E	R	U
M	A	R	A
T	A	T	U
U	R	S	O

O nome do animal é PATO. Considerando a ordem do alfabeto, tem-se: P = 15, A = 1, T = 19 e 0 = 14. Somando esses valores, obtém-se: 15 + 1 + 19 + 14 = 49.

29. Resposta "B".

Na 1ª e na 2ª sequências, as vogais são as mesmas: letra "A". Portanto, as vogais da 4ª sequência de letras deverão ser as mesmas da 3ª sequência de letras: "O". A 3ª letra da 2ª sequência é a próxima letra do alfabeto depois da 3ª letra da 1ª sequência de letras. Portanto, na 4ª sequência de letras, a 3ª letra é a próxima letra depois de "B", ou seja, a letra "C". Em relação à primeira letra, tem-se uma diferença de 7 letras entre a 1ª letra da 1ª sequência e a 1ª letra da 2ª sequência. Portanto, entre a 1ª letra da 3ª sequência e a 1ª letra da 4ª sequência, deve ocorrer o mesmo fato. Com isso, a 1ª letra da 4ª sequência é a letra "T". Logo, a 4ª sequência de letras é: T, O, C, O, ou seja, TOCO.

30. Resposta "C".

Na 1ª sequência de letras, ocorrem as 3 primeiras letras do alfabeto e, em seguida, volta-se para a 1ª letra da sequência. Na 2ª sequência, continua-se da 3ª letra da sequência anterior, formando-se DEF, voltando-se novamente, para a 1ª letra desta sequência: D. Com isto, na 3ª sequência, têm-se as letras HIJ, voltando-se para a 1ª letra desta sequência: H. Com isto, a 4ª sequência iniciará pela letra L, continuando por M e N, voltando para a letra L. Logo, a 4ª sequência da letra é: LMNL.

31. Resposta "E".

Do 1º termo para o 2º termo, ocorreu um acréscimo de 1 unidade. Do 2º termo para o 3º termo, ocorreu a multiplicação do termo anterior por 3. E assim por diante, até que para o 7º termo temos 13 . 3 = 39. 8º termo = 39 + 1 = 40. 9º termo = 40 . 3 = 120. 10º termo = 120 + 1 = 121. 11º termo = 121 . 3 = 363. 12º termo = 363 + 1 = 364. 13º termo = 364 . 3 = 1.092. Portanto, podemos concluir que o 13º termo da sequência é um número maior que 1.000.

32. Resposta "D".

Da palavra "*ardoroso*", retiram-se as sílabas "*do*" e "*ro*" e inverteu-se a ordem, definindo-se a palavra "rodo". Da mesma forma, da palavra "*dinamizar*", retiram-se as sílabas "*na*" e "*mi*", definindo-se a palavra "*mina*". Com isso, podemos concluir que da palavra "*maratona*". Deve-se retirar as sílabas "*ra*" e "*to*", criando-se a palavra "*tora*".

33. Resposta "A".

Na primeira sequência, a palavra "*azar*" é obtida pelas letras "*a*" e "*z*" em sequência, mas em ordem invertida. Já as letras "*a*" e "*r*" são as 2 primeiras letras da palavra "*arborizado*". A palavra "*dias*" foi obtida da mesma forma: As letras "*d*" e "*i*" são obtidas em sequência, mas em ordem invertida. As letras "*a*" e "*s*" são as 2 primeiras letras da palavra "*asteroides*". Com isso, para a palavras "*articula*r", considerando as letras "*i*" e "*u*", que estão na ordem invertida, e as 2 primeiras letras, obtém-se a palavra "*luar*".

34. O nome da sequência é Sequência de Fibonacci. O número que vem é sempre a soma dos dois números imediatamente atrás dele. A sequência correta é: *1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...*

35.

Dia	*Subida*	*Descida*
1º	2m	1m
2º	3m	2m
3º	4m	3m
4º	5m	4m
5º	6m	5m
6º	7m	6m

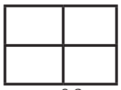
7º	8m	7m
8º	9m	8m
9º	10m	----

Portanto, depois de 9 dias ela chegará na saída do poço.

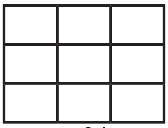
36. 09 – 19 – 29 – 39 – 49 – 59 – 69 – 79 – 89 – 90 – 91 – 92 – 93 – 94 – 95 – 96 – 97 – 98 – 99. Portanto, são necessários 20 algarismos.

37.

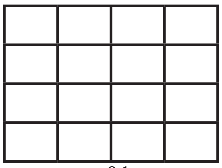
= 16



= 09

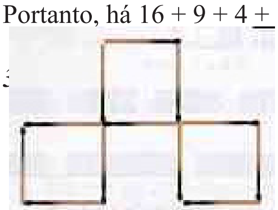


= 04



=01

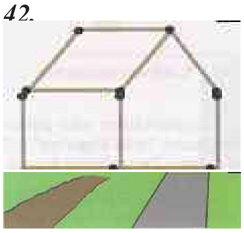
Portanto, há 16 + 9 + 4 + 1 = 30 quadrados.



39. Os símbolos são como números em frente ao espelho. Assim, o próximo símbolo será **88**.

41.
12.345.679 × (2×9) = 222.222.222
12.345.679 × (3×9) = 333.333.333
... ...
12.345.679 × (4×9) = 666.666.666
Portanto, para obter 999.999.999 devemos multiplicar 12.345.679 por (9x9) = 81

42.



43.

44. Sendo *A = 1, J = 11, Q = 12* e *K = 13*, a soma de cada par de cartas é igual a 14 e o naipe de paus sempre forma par com o naipe de espadas. Portanto, a carta que está faltando é o 6 de espadas.

45.

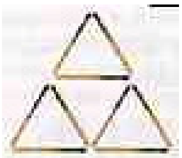
46. Observe que:

3	*6*	*18*	*72*	*360*	*2160*	*15120*

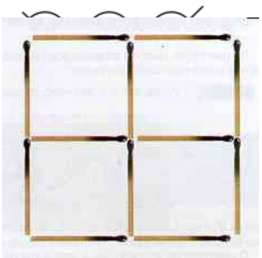
x2 x3 x4 x5 x6 x7

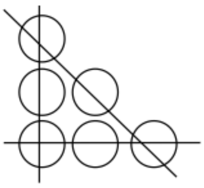
Portanto, a próxima pedra terá que ter o valor: 15.120 x 8 = 120.960

47.

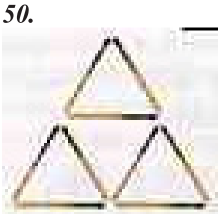


48.





50.



GEOMETRIA BÁSICA.

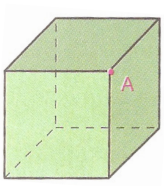
Geometria Plana

A Geometria é a parte da matemática que estuda as figuras e suas propriedades. A geometria estuda figuras abstratas, de uma perfeição não existente na realidade. Apesar disso, podemos ter uma boa idéia das figuras geométricas, observando objetos reais, como o aro da cesta de basquete que sugere uma circunferência, as portas e janelas que sugerem retângulos e o dado que sugere um cubo.

As Figuras Básicas

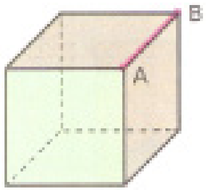
Aproveitaremos o cubo, figura bastante conhecida de todos, para mencionar três figuras básicas da geometria: o ponto, a reta e o plano.

No cubo seguinte, três faces são visíveis, e três não. As três faces visíveis têm em comum apenas o ponto A.



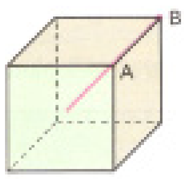
Os matemáticos consideram que os pontos são tão pequenos que não chegam a ter tamanho algum. Para representar um ponto fazemos uma marca bem pequena no papel e para nomeá-lo usamos uma letra maiúscula: A, B, C, etc.

Considere agora a face superior do cubo e a face que vemos à direita. Estas faces têm em comum o segmento de reta AB, com extremidades nos pontos A e B.

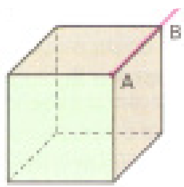


O segmento AB ("tem começo e fim")

Nas próximas figuras, indicamos a semi-reta AB, de origem $\vec{A}$, e a semi-reta BA, de origem $\vec{B}$.

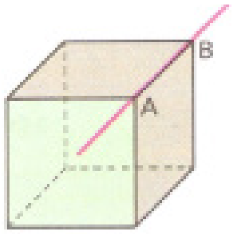


A semi-reta $\overrightarrow{AB}$ (sua origem é A e "ela não tem fim")



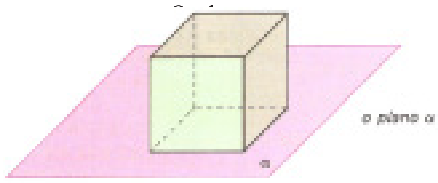
A semi-reta $\overrightarrow{BA}$ (sua origem é B e "ela não tem fim")

A seguir, indicamos a reta $\overleftrightarrow{AB}$



A reta $\overleftrightarrow{AB}$ ("não tem começo nem fim")

Os matemáticos consideram que as retas não têm largura. Para nomeá-las, além de anotações como $\overleftrightarrow{AB}$, é muito comum o uso de letras minúsculas: r, s, t, etc. Prolongando indefinidamente uma face de um cubo em todas as direções, como indica a próxima figura, temos um plano.



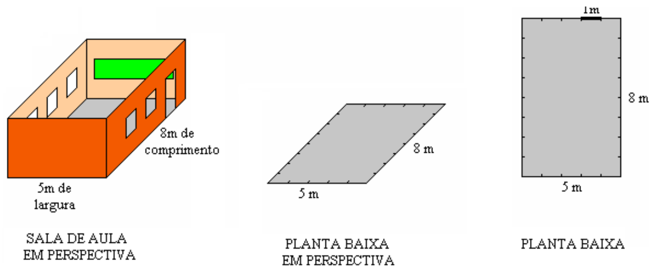
Os planos não têm espessura. Para nomeá-los, usamos letras gregas, principalmente as três primeiras α (alfa), β (beta) e γ (gama).

Perímetro

Entendendo o que é perímetro.

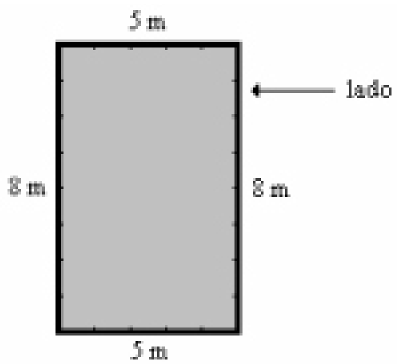
Imagine uma sala de aula de 5m de largura por 8m de comprimento.

Quantos metros lineares serão necessários para colocar rodapé nesta sala, sabendo que a porta mede 1m de largura e que nela não se coloca rodapé?



A conta que faríamos seria somar todos os lados da sala, menos 1m da largura da porta, ou seja:

P = (5 + 5 + 8 + 8) – 1



Colocaríamos 25m de rodapé.

A soma de todos os lados da planta baixa se chama Perímetro.

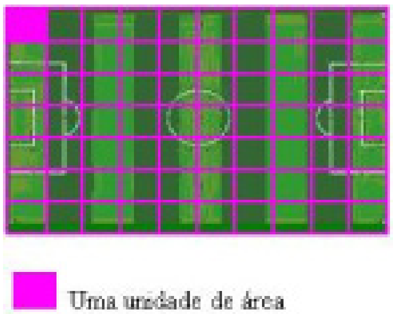
Portanto, Perímetro é a soma dos lados de uma figura plana.

Área

Área é a medida de uma superfície.

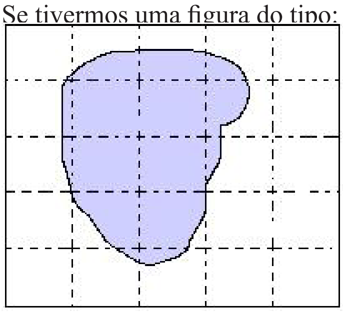
A área do campo de futebol é a medida de sua superfície (gramado).

Se pegarmos outro campo de futebol e colocarmos em uma malha quadriculada, a sua área será equivalente à quantidade de quadradinho. Se cada quadrado for uma unidade de área:



Veremos que a área do campo de futebol é 70 unidades de área.

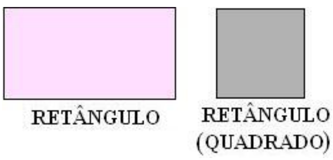
A unidade de medida da área é: m² (metros quadrados), cm² (centímetros quadrados), e outros.
Se tivermos uma figura do tipo:



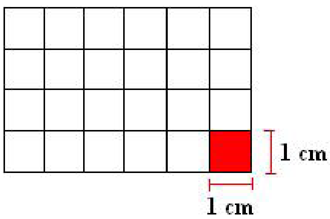
Sua área será um valor aproximado. Cada  é uma unidade, então a área aproximada dessa figura será de 4 unidades.
No estudo da matemática calculamos áreas de figuras planas e para cada figura há uma fórmula pra calcular a sua área.

Área do Retângulo

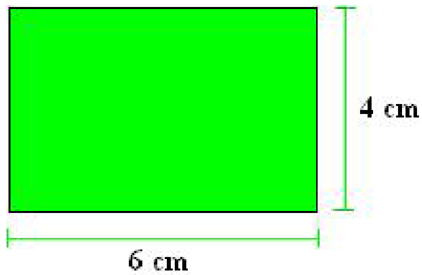
Existe dois tipos de retângulos: com lados todos iguais (quadrado) e com os lados diferentes.



No cálculo de qualquer retângulo podemos seguir o raciocínio:



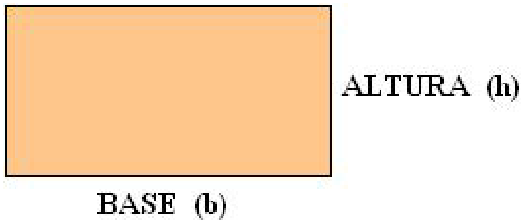
Pegamos um retângulo e colocamos em uma malha quadriculada onde cada quadrado tem dimensões de 1 cm. Se contarmos, veremos que há 24 quadrados de 1 cm de dimensões no retângulo. Como sabemos que a área é a medida da superfície de uma figuras podemos dizer que 24 quadrados de 1 cm de dimensões é a área do retângulo.



O retângulo acima tem as mesmas dimensões que o outro, só que representado de forma diferente. O cálculo da área do retângulo pode ficar também da seguinte forma:

$A = 6 . 4$ $\qquad$ $A = 24\ cm^2$

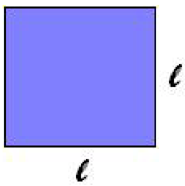
Podemos concluir que a área de qualquer retângulo é:



$$A = b . h$$

Quadrado

É um tipo de retângulo específico, pois tem todos os lados iguais. Sua área também é calculada com o produto da base pela altura. Mas podemos resumir essa fórmula:



Como todos os lados são iguais, podemos dizer que base é igual a e a altura igual a , então, substituindo na fórmula A = b . h, temos:

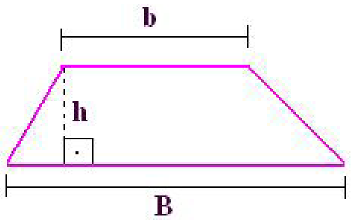
$$A = \ell . \ell$$
$$A = \ell^2$$

Área do Trapézio

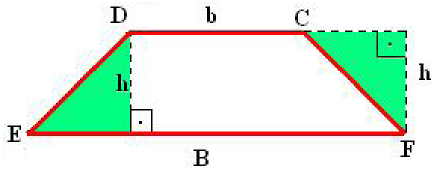
A área do trapézio está relacionada com a área do triângulo que é calculada utilizando a seguinte fórmula:

$A = \frac{b . h}{2}$ (b = base e h = altura).

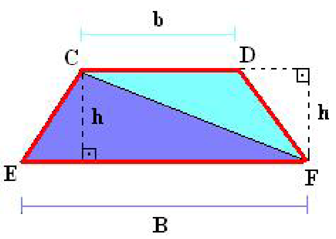
Observe o desenho de um trapézio e os seus elementos mais importantes (elementos utilizados no cálculo da sua área):



Um trapézio é formado por uma base maior (B), por uma base menor (b) e por uma altura (h).
Para fazermos o cálculo da área do trapézio é preciso dividi-lo em dois triângulos, veja como:
Primeiro: completamos as alturas no trapézio:



Segundo: o dividimos em dois triângulos:



A área desse trapézio pode ser calculada somando as áreas dos dois triângulos (ΔCFD e ΔCEF).
Antes de fazer o cálculo da área de cada triângulo separadamente observamos que eles possuem bases diferentes e alturas iguais.

Cálculo da área do ΔCEF:

$$A\Delta 1 = \frac{B \cdot h}{2}$$

Cálculo da área do ΔCFD:

$$A\Delta 2 = \frac{b \cdot h}{2}$$

Somando as duas áreas encontradas, teremos o cálculo da área de um trapézio qualquer:
AT = AΔ1 + AΔ2

$$AT = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2}$$

$$AT = \frac{B \cdot h + b \cdot h}{2}$$ - Colocar a altura (h) em evidência, pois é um temo comum aos dois fatores

$$AT = \frac{h(B+b)}{2}$$

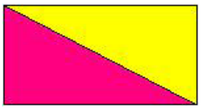
Portanto, no cálculo da área de um trapézio qualquer utilizamos a seguinte fórmula:

$$A = \frac{h(B+b)}{2}$$

h = altura
B = base maior do trapézio
b = base menor do trapézio

Área do Triângulo

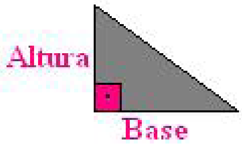
Observe o retângulo abaixo, ele está dividido ao meio pela diagonal:



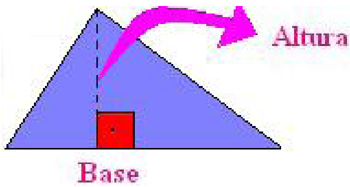
A área do retângulo é A = b. h, a medida da área de cada metade será a área do retângulo dividida por dois. Cada parte dividida do retângulo é um triângulo, assim podemos concluir que a área do triangulo será:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Mas como veremos a altura no triângulo? A altura deve ser sempre perpendicular à base do triângulo.

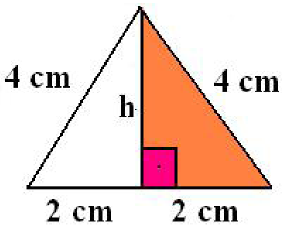


No triângulo retângulo é fácil ver a altura, pois é o próprio lado do triângulo, e forma com a base um ângulo de 90° (ângulo reto).

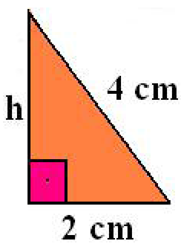


Quando a altura não coincide com o lado do triângulo, devemos traçar uma reta perpendicular à base (formando um ângulo de 90º com a base) que será a altura do triângulo.

Exemplo: Observe o triângulo eqüilátero (todos os lados iguais). Calcule a sua área.



Como o valor da altura não está indicado, devemos calcular o seu valor, para isso utilizaremos o teorema de Pitágoras no triângulo:



42 = h2 + 22

16 = h2 + 4

$16 – 4 = h^2$

$12 = h^2$

$h = \sqrt{12}$
$h = 2\sqrt{3}$ cm
Com o valor da altura, basta substituir na fórmula $A = \frac{h\,(B + b)}{2}$ o valor da base e da altura.

$A = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2}$

$A = 2 \cdot 2\sqrt{3}$
$A = 4\sqrt{3}$ cm2

Exercícios

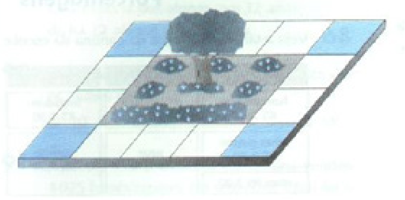
1. Um retângulo de base 7cm e altura 4cm qual o perímetro e a área respectivamente:
a) 28 – 22
b) 11 – 22
c) 22 – 11
d) 22 – 28
e) 24 – 28

2. Um paralelogramo de altura 4 cm e base 2cm tem área igual a:
a) 12 cm²
b) 8 cm²
c) 16 cm²
d) 16 cm
e) 12 cm

3. Um losango tem 4 lados qual o perímetro de um losango de lado 8 cm:
a) 16
b) 24
c) 32
d) 40
e) 48

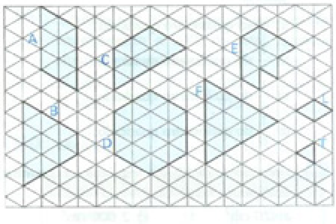
4. Um quadrado de lado 3 cm tem um volume igual a:
a) 27cm³
b) 9cm³
c) 28cm³
d) 18cm³
e) 6cm³

5. Numa praça, os canteiros retangulares são cobertos com relva e estão cercados por lajes quadradas de 1 m de lado, como se vê na figura. Quantas lajes vão cercar o relvado de 3 m por 5m?

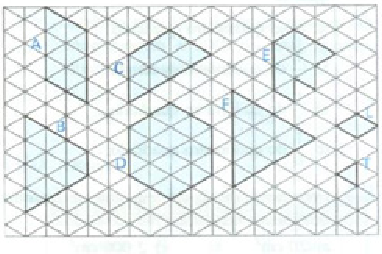


(A) 20
(B) 18
(C) 16
(D) 14

6. Sobre os polígonos A e E, é verdade que eles têm:

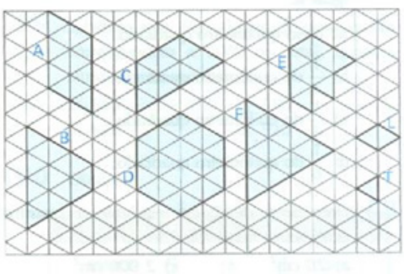


(A) áreas e perímetros iguais.
(B) perímetros iguais e áreas diferentes.
(C) áreas iguais e perímetros diferentes.
(D) áreas diferentes e perímetros diferentes.
7. A área do polígono de maior área é igual a:



(A) 15
(B) 18
(C) 21
(D) 24

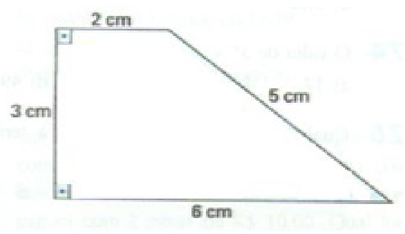
8. Se a área de um polígono é 15 T, mudando a unidade para L, ela será:



(A) 30
(B) 10
(C) 7,5
(D) 5

9. Um terreno retangular tem uma área de 450 m2. O comprimento do terreno é 25 m. Qual é o perímetro do terreno?
(A) 18 m.
(B) 43 m.
(C) 86 m.
(D) 94 m.

10. Qual é a área da figura em centímetros quadrados?



(A) 12
(B) 14
(C) 17
(D) 41

Gabarito: 01-D / 02-B / 03-C / 04-A / 05-A / 06-B / 07-D / 08-C / 09-C / 10-A

ÁLGEBRA BÁSICA E SISTEMAS LINEARES.

O estudo dos sistemas de equações lineares é de fundamental importância em Matemática e nas ciências em geral. Você provavelmente já resolveu sistemas do primeiro grau, mais precisamente aqueles com duas equações e duas incógnitas.

Vamos ampliar esse conhecimento desenvolvendo métodos que permitam resolver, quando possível, sistemas de equações do primeiro grau com qualquer número de equações e incógnitas. Esses métodos nos permitirão não só resolver sistemas, mas também classificá-los quanto ao número de soluções.

Equações Lineares

Equação linear é toda equação do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... a_nx_n = b$, onde $a_1, a_2, a_3,.., a_n$ e b são números reais e $x_1, x_2, x_3,.., x_n$ são as incógnitas.

Os números reais $a_1, a_2, a_3,.., a_n$ são chamados de coeficientes e b é o termo independente.

Exemplos

- São equações lineares:

$x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 3$
$2x – y\ 2z = 1$
$0x + 0y + 0z = 2$
$0x + 0y + 0z = 0$

- Não são equações lineares:

$x^3-2y+z = 3$
(x^3 é o impedimento)
$2x_1 – 3x_1x_2 + x_3 = -1$
($-3x_1x_2$ é o impedimento)

$2x_1 – 3\ \frac{3}{x_2} + x_3 = 0$

($\frac{3}{x_2}$ é o impedimento)

Observação: Uma equação é linear quando os expoentes das incógnitas forem iguais a l e em cada termo da equação existir uma única incógnita.

Solução de ama Equação Linear

Uma solução de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... a_nx_n = b$, é um conjunto ordenado de números reais $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,..., \alpha_n$ para o qual a sentença $a_1\{\alpha_1) + a_2\{\alpha a_2) + a_3(\alpha_3) + ... + a_n(\alpha_n) = b$ é verdadeira.

Exemplos

- A terna (2, 3, 1) é solução da equação:

$x_1 – 2x_2 + 3x_3 = -1$ pois:

(2) – 2.((3) + 3.(1) = -1

- A quadra (5, 2, 7, 4) é solução da equação:

$0x_1 - 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$ pois:

0.(5) + 0.(2) + 0.(7) + 0.(4) = 0

Conjunto Solução

Chamamos de conjunto solução de uma equação linear o conjunto formado por todas as suas soluções.

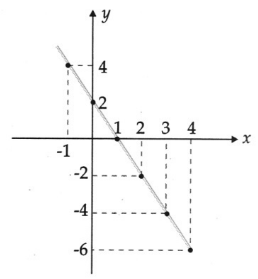
Observação: Em uma equação linear com 2 incógnitas, o conjunto solução pode ser representado graficamente pelos pontos de uma reta do plano cartesiano.

Assim, por exemplo, na equação

2x + y = 2

Algumas soluções são (1, 0), (2, -2), (3, -4), (4, -6), (0, 2), (-1,4), etc.

Representando todos os pares ordenados que são soluções da equação dada, temos:



Equação Linear Homogênea

Uma equação linear é chamada homogênea quando o seu termo independente for nulo.

Exemplo

$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 0$

Observação: Toda equação homogênea admite como solução o conjunto ordenado de “zeros” que chamamos solução nula ou solução trivial.

Exemplo

(0, 0, 0) é solução de 3x + y - z – 0

Equações Lineares Especiais

Dada a equação:

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ...a_nx_n = b$, temos:

- Se $a_1 = a_2 = a_3 = ... = na = b = 0$, ficamos com:

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + ... + 0x_n$, e, neste caso, qualquer seqüências ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$) será solução da equação dada.

- Se $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = 0$ e $b \neq 0$, ficamos com:

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + ... + 0x_n = b \neq 0$, e, neste caso, não existe seqüências de reais ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$) que seja solução da equação dada.

Sistema Linear 2 x 2

Chamamos de sistema linear 2 x 2 o conjunto de equações lineares a duas incógnitas, consideradas simultaneamente.

Todo sistema linear 2 x 2 admite a forma geral abaixo:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2 + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Um par (α_1, α_2) é solução do sistema linear 2 x 2 se, e somente se, for solução das duas equações do sistema.

Exemplo
(3, 4) é solução do sistema

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

pois é solução de suas 2 equações:
(3)-(4) = -1 e 2.(3) + (4) = 10

Resolução de um Sistema 2 x 2
Resolver um sistema linear 2 x 2 significa obter o conjunto solução do sistema.
Os dois métodos mais utilizados para a resolução de um sistema linear 2x2 são o método da substituição e o método da adi**ção.**
Para exemplificar, vamos resolver o sistema 2 x 2 abaixo usando os dois métodos citados.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

1. M**étodo da Substituição:**

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 & (I) \\ x - y \quad = -1 & (II) \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos x = y -1, que substituímos na equação (I)
2(y- 1) +3y = 8 ➔ 5y = 10 ➔ y = 2

Fazendo y = 2 na equação (I), por exemplo, obtemos:
Assim: S = {(1,2)}

2. Método da Adição:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 & (I) \\ x - y = -1 & (II) \end{cases}$$

Multiplicamos a equação II por 3 e a adicionamos, membro a membro, com a equação I.

$$\begin{cases} \quad 2x + 3y = 8 \\ \quad \underline{3x - 3y = -3} \\ 5x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{5} = 1 \end{cases}$$

Fazendo x = 1 na equação (I), por exemplo, obtemos:
Assim: S = {(1,2)}

Sistema Linear 2 x 2 com infinitas soluções

Quando uma equação de um sistema linear 2 x 2 puder ser obtida multiplicando-se a outra por um número real, ao tentarmos resolver esse sistema, chegamos numa igualdade que é sempre verdadeira, independente das incógnitas. Nesse caso, existem infinitos pares ordenados que são soluções do sistema.

Exemplo

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8(I) \\ -4x - 6y = -16(II) \end{cases}$$

Note que multiplicando-se a equação (I) por (-2) obtemos a equação (II).
Resolvendo o sistema pelo método da substituição temos:

Da equação (I), obtemos y = $\frac{8-2x}{3}$, que substituímos na equação (II).

$-4x-6.\left(\frac{8-2x}{3}\right)=-16 \rightarrow -4x-2(8-2x)=-16$

$-4x-16+4x=-16 \rightarrow -16=-16$
- 16= -16 é uma igualdade verdadeira e existem infinitos pares ordenados que são soluções do sistema.

Entre outros, (1, 2), (4, 0), $\left(\frac{5}{2},1\right)$ e $\left(0,\frac{8}{3}\right)$ são soluções do sistema.
Sendo a, um número real qualquer, dizemos que $\left(\alpha,\frac{8-2\alpha}{3}\right)$ é solução do sistema.

(Obtemos $\frac{8-2\alpha}{3}$ substituindo x =α na equação (I)).

Sistema Linear 2 x 2 com nenhuma solução

Quando duas equações lineares têm os mesmos coeficientes, porém os termos independentes são diferentes, dizemos que não existe solução comum para as duas equações, pois substituindo uma na outra, obtemos uma igualdade sempre falsa.

Exemplo
2x+3y=6(I) e 2x+3y=5(II)

Substituindo 2x+3y da equação (I) na equação (II) obtemos:
6=5 que é uma igualdade falsa. Se num sistema 2x2 existir um número real que, multiplicado por uma das equações, resulta uma equação com os mesmos coeficientes da outra equação do sistema, porém com termos independentes diferentes, dizemos que não existe par ordenado que seja solução do sistema.

Exemplo

$$\begin{cases} x+2y=5(I) \\ 2x+4y=7(II) \end{cases}$$

Multiplicando-se equação (I) por 2 obtemos:
2x+4y=10

Que tem os mesmo coeficientes da equação (II), porém os termos independentes são diferentes.
Se tentarmos resolver o sistema dado pelo método de substituição, obtemos uma igualdade que é sempre falsa, independente das incógnitas.

$$\begin{cases} x+2y=5(I) \\ 2x+4y=7(II) \end{cases}$$

Da equação (I), obtemos ,$\left(y=\frac{5-x}{2}\right)$ que substituímos na equação (II)

2x- 4.$\left(\frac{5-x}{2}\right)$=7→2x+2(5-x)=7

2x+10-2x=7→10=7
10=7 é uma igualdade falsa e não existe par ordenado que seja solução do sistema.

Classificação
De acordo com o número de soluções, um sistema linear 2x2 pode ser classificado em:
- Sistema Impossíveis ou Incompatíveis: são os sistemas que não possuem solução alguma.
- Sistemas Possíveis ou compatíveis: são os sistemas que apresentam pelo menos uma solução.

- Sistemas Possíveis Determinados: se possuem uma única solução.
- Sistemas Possíveis Indeterminados: se possuem infinitas soluções.

Sistema Linear m x n

Chamamos de sistema linear M x n ao conjunto de m equações a n incógnitas, consideradas simultaneamente, que podem ser escrito na forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Onde:

$X_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são as incógnitas;

a_{ij}, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq n$, são os coeficientes das incógnitas; b_i, com $1 \leq i \leq m$, são os termos independentes.

Exemplos

1.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ x + y - z + 2 \end{cases}$$

(sistema 2 x 3)

2.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

(sistema 3 x 4)

3.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 4 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

(sistema 3 x 2)

Matriz Incompleta

Chamamos de matriz incompleta do sistema linear a matriz formada pelos coeficientes das incógnitas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

No sistema:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + \quad\quad z = 0 \\ -x + y \quad = 5 \end{cases}$$

A matriz incompleta é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma Matricial

Consideremos o sistema linear M x n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sendo A a Matriz incompleta do sistema chamamos, respectivamente, as matrizes

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

de matriz incógnita e matriz termos independentes.
E dizemos que a forma matricial do sistema é A.X=B, ou seja:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares – Escalonamento (I)

Resolução de um Sistema por Substituição

Resolvemos um sistema linear *m* x *n* por substituição, do mesmo modo que fazemos num sistema linear 2 x 2. Assim, observemos os exemplos a seguir.

Exemplos
- Resolver o sistema pelo método da substituição.

$$\begin{cases} x+2y-z=-1 \quad (I) \\ 2x-y+z=5 \quad (II) \\ x+3y-2z=-4 (III) \end{cases}$$

Resolução
Isolando a incógnita *x* na equação (I) e substituindo nas equações (II) e (III), temos:
$x + 2y – z - 1 \rightarrow x = -2y + z - 1$
Na equação (II)
$2(-2y + z - 1) – y + z = 5 \rightarrow -5y + 3z = 7$ (IV)
Na equação (III)
$(-2y + z - 1) + 3y - 2z = -4 \rightarrow y – z = -3$ (V)
Tomando agora o sistema formado pelas equações (IV) e (V):

$$\begin{cases} -5y+3z=7 \quad (IV) \\ \quad y-z=-3 \quad (V) \end{cases}$$

Isolando a incógnita *y* na equação (V) e substituindo na equação (IV), temos:
$y – z = -3 \rightarrow y = z - 3$
$-5 (z - 3) + 3z = 7 \rightarrow z = 4$

Substituindo $z = 4$ na equação (V)
$y – 4 = -3 \rightarrow y = 1$
Substituindo $y = 1$ e $z = 4$ na equação (I)
$x + 2 (1) - (4) = -1 \rightarrow x = 1$
Assim:
$S=\{(1, 1, 4)\}$

2º) Resolver o sistema pelo método da substituição:

$$\begin{cases} x+3y-z=1 \quad (I) \\ \quad y+2z=10 \quad (II) \\ \qquad 3z=12 \quad (III) \end{cases}$$

Resolução
Isolando a incógnita *x* na equação (I) e substituindo nas equações (II) e (III), temos:

$x + 2y – z = -1 \rightarrow x = -2y + z - 1$

Na equação (II)
$2(-2y + z - 1) – y + z = 5 \rightarrow 5y + 3z = 7$ (IV)

Na equação (III)
(-2y + z - 1) + 3y - 2z = -4 → y – z = -3 (V)

Tomando agora o sistema formado pelas equações (IV) e (V):

$$\begin{cases} -5y+3z=7 \quad (IV) \\ y-z=-3 \quad (V) \end{cases}$$

Isolando a incógnita y na equação (V) e substituindo na equação (IV), temos:

$y - z = -3 \rightarrow y = z - 3$
$-5(z - 3) + 3z = 7 \rightarrow z = 4$

Substituindo $z = 4$ na equação (V)
$y - 4 = -3 \rightarrow y = 1$

Substituindo $y = 1$ e $z = 4$ na equação (I)
$x + 2(1) - (4) = -1 \rightarrow x = 1$

Assim:
$S=\{(1, 1, 4)\}$

2º) Resolver o sistema pelo método da substituição:

$$\begin{cases} x+3y-z=1 \quad (I) \\ y+2z=10 \quad (II) \\ 3z=12 \quad (III) \end{cases}$$

Resolução
Na equação (III), obtemos:
$3z = 12 \rightarrow z = 4$
Substituindo $z = 4$ na equação (II), obtemos:
$y + 2 . 4 = 10 \rightarrow y = 2$
Substituindo $z = 4$ e $y = 2$ na equação (I), obtemos:
$x + 3 . 2 – 4 = 1 \rightarrow x = -1$
Assim:
$S\{(-1, 2, 4)\}$

Observação: Podemos observar que a resolução de sistemas pelo método da substituição pode ser demasiadamente longa e trabalhosa, quando os sistemas não apresentam alguma forma simplificada como no primeiro exemplo. No entanto, quando o sistema apresenta a forma simples do segundo exemplo, que denominamos “forma escalonada”, a resolução pelo método da substituição é rápida e fácil.

Veremos, a seguir, como transformar um sistema linear m x n qualquer em um **sistema equivalente** na “forma escalonada”.

Sistemas Lineares Escalonados

Dizemos que um sistema linear é um **sistema escalonado** quando:

- Em cada equação existe pelo menos um coeficiente não-nulo;
- O número de coeficiente nulos, antes do primeiro coeficiente não-nulo, cresce “da esquerda para a direita, de equação para equação”.

Exemplos

1º) $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ \quad 2y + 3z = 2 \end{cases}$

2º) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ \quad y + 2z = 3 \\ \quad\quad z = 1 \end{cases}$

3º) $\begin{cases} x + y + z + t = 5 \\ \quad y - t = 2 \end{cases}$

4º) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ \quad x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ \quad\quad 3x_4 = 5 \end{cases}$

Existem dois tipos de sistemas escalonados:

Tipo: número de equações **igual** ao número de incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad a_{33}x_{33} + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \text{...} \\ \quad\quad\quad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Notamos que os sistemas deste tipo podem ser analisados pelo método de Cramer, pois são sistemas *n* x *n.* Assim, sendo *D* o determinante da matriz dos coeficientes (incompleta), temos:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1n} \\ 0 \quad a_{22}a_{23}\cdots a_{2n} \\ 0 \quad 0 \quad a_{33}\cdots a_{3n} \\ \text{.................} \\ 0 \quad 0 \quad 0\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = D = a_{11}.a_{22}.a_{33}.\cdots.a_{nn} \neq 0$$

Como $D \neq 0$, os sistemas deste tipo são possíveis e determinados e, para obtermos a solução única, partimos da n-ésima equação que nos dá o valor de x_n; por substituição nas equações anteriores, obtemos sucessivamente os valores de $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_3, x_2$ e x_1.

Exemplo

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z + t = 5(I) \\ y + z + 3t = 9(II) \\ 2z - t = 0(III) \\ 3t = 6(IV) \end{cases}$$

Resolução

Na equação (IV), temos:
$3t = 6 \rightarrow t = 2$
Substituindo $t = 2$ na equação (III), temos:
$2z - 2 = 0 \rightarrow z = 1$
Substituindo $t = 2$ e $z = 1$ na equação (II), temos:
$y + 1 + 3 \cdot 2 = 9 \rightarrow y = 2$
Substituindo $t = 2$, $z = 1$ e $y = 2$, na equação (I), temos:
$2x + 2 - 1 + 2 = 5 \rightarrow x = 1$
Assim:
$S \{(1, 2, 1, 2)\}$

Tipo: número de equações **menor** que o número de incógnitas.

Para resolvermos os sistemas lineares deste tipo, devemos transformá-los em sistemas do 1º tipo, do seguinte modo:
- As incógnitas que não aparecem no inicio de nenhuma das equações do sistema, chamadas **variáveis livres,** devem ser "passadas" para os segundos membros das equações. Obtemos, assim, um sistema em que consideramos incógnitas apenas as equações que "sobraram" nos primeiros membros.

- Atribuímos às variáveis livres valores literais, na verdade "valores variáveis", e resolvemos o sistema por substituição.

Exemplo

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2y - z = 2 \end{cases}$$

Resolução

A variável z é uma "*variável livre*" no sistema.
Então:

$$\begin{cases} x + y = 1 - 2z \\ 2y = 2 + z \end{cases}$$

Fazendo $z = \alpha$, temos:

$$\begin{cases} x + y = 1 - 2\alpha \\ 2y = 2 + \alpha \end{cases}$$

$$2y = 2 + \alpha \rightarrow y = \frac{2 + \alpha}{2}$$

Substituindo y = $\frac{2+\alpha}{2}$ na 1ª equação, temos:

$$x+\frac{2+\alpha}{2}=1-2\alpha$$

Agora para continuar fazemos o mmc de 2, e teremos:

2x + 2α = 2(1-2α)
2x + 2α = 2 - 4α
4α + 2x + 2 + α - 2 = 0
5α + 2x = 0
2x = -5α
x = $\frac{-5\alpha}{2}$

Assim:

$$S=\left\{\left(\frac{5\alpha}{2},\ \frac{2+\alpha}{2},\alpha\right),\alpha\in R\right\}$$

Observações: Para cada valor real atribuído a α, encontramos uma solução do sistema, o que permite concluir que o sistema é **possível** e **indeterminado**.

- A quantidade de variáveis livres que um sistema apresenta é chamada de **grau de liberdade** ou **grau de indeterminação** do sistema.

Sistema Lineares – Escalonamento (II)

Escalonamento de um Sistema

Todo sistema linear possível pode ser transformado num sistema linear escalonado equivalente, através das **transformações elementares** a seguir.

- Trocar a ordem em que as equações aparecem no sistema.

Exemplo

$$(S)=\begin{cases}x+3y=2\\2x-y=5\end{cases}\sim(S_1)\begin{cases}2x-y=5\\x+3y=2\end{cases}$$

- Inverter a ordem em que as incógnitas aparecem nas equações.

Exemplo

$$(S)=\begin{cases}x+2y+z=5\\ \quad x+2z=1\\ \quad\quad 3x=5\end{cases}\sim(S_1)\begin{cases}2y+z+x=5\\ \quad 2z+x=1\\ \quad\quad 3x=5\end{cases}$$

- Multiplicar (ou dividir) uma equação por um número real não-nulo.

Exemplo

$$(S)\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-y=1 \end{cases} \sim (S_1)\begin{cases} x+2y=3 \\ 6x-2y=3 \end{cases}$$

Multiplicamos a 2ª equação de *S* por 2, para obtermos S_1.
- Adicionar a uma equação uma outra equação do sistema, previamente multiplicada por um número real não-nulo.

Exemplo

$$(S)=\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+y=3 \end{cases} \sim (S_1)\begin{cases} x+3y=5 \\ -5y=-7 \end{cases}$$

Multiplicamos a 1ª equação do *S* por -2 e a adicionamos à 2ª equação para obtermos s_1.

Para transformarmos um sistema linear (*S*) em outro, **equivalente** e escalonado (S_1), seguimos os seguintes passos.

- Usando os recursos das três primeiras transformações elementares, devemos obter um sistema em que a 1ª equação tem a 1ª incógnita com o coeficiente igual a 1.

- Usando a quarta transformação elementar, devemos "zerar" todos os coeficientes da 1ª incógnita em todas as equações restantes.

- "Abandonamos"a 1ª equação e repetimos os dois primeiros passos com as equações restantes, e assim por diante, até a penúltima equação do sistema.

Exemplos

1º) Escalonar e classificar o sistema:

$$\begin{cases} 2x+y+z=5 \\ 3x-y2z=-2 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 3x-y-2z=-2 \\ 2x+y+z=5 \end{cases} \Bigg\langle \sim \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 3x-y-2z=-2 & \leftarrow -3 \\ 2x+y+z=5 & \leftarrow -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=1 \\ -7y+z=-5 \\ -3y+3z=3: \quad -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y-z=-1 \\ -7y+z=5 \\ y-z=-1 \end{cases} \Bigg\langle \sim \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y-z=-1 \\ -7y+z=-5 & \leftarrow 7 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y-z=-1 \\ -6z=-12 \end{cases}$$

O sistema obtido está escalonado e é do 1º tipo (nº de equações igual ao nº de incógnitas), portanto, é um sistema possível e determinado.

2º) Escalonar e classificar o sistema:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = 5 \\ 8x + y + z = 11 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} 3x + y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = 5 \\ 8x + y + z = 11 \end{cases} \sim \begin{cases} y + 3x - z = 3 \\ -y + 2x + 3z = 5 & \leftarrow 1 \\ y + 8x + z = 11 & \leftarrow -1 \end{cases} \sim \begin{cases} y + 3x - z = 3 \\ 5x + 2z = 8 \\ 5x + 2z = 8(*) \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} y + 3x - z = 3 \\ 5x + 2z = 8 \end{cases}$$

O sistema obtido está escalonado e é do 2º tipo (nº de equações menor que o nº de incógnitas), portanto, é um sistema possível e indeterminado.

(*) A terceira equação foi eliminada do sistema, visto que ela é equivalente à segunda equação. Se nós não tivéssemos percebido essa equivalência, no passo seguinte obteríamos na terceira equação: $0x+0z=0$, que é uma equação satisfeita para todos os valores reais de x e z.

3º) Escalonar e classificar o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 5y + z = 5 \\ x + 2y - z = 3 \\ 4x + 9y - z = 8 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} 2x + 5y + z = 5 \\ x + 2y - z = 3 \\ 4x + 9y - z = 8 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 5y + z = 5 & \leftarrow -2 \\ 4x + 9y - z = 8 & \leftarrow -4 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ y + 3z = -1 \\ y + 3z = -4 & \leftarrow -1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ y + 3z = -1 \\ 0y + 0z = -3 & \leftarrow -1 \end{cases}$$

O sistema obtido é impossível, pois a terceira equação nunca será verificada para valores reais de y e z.

Observação

Dado um sistema linear, sempre podemos "tentar" o seu escalonamento. Caso ele seja impossível, isto ficará evidente pela presença de uma equação que não é satisfeita por valores reais (exemplo: $0x + 0y = 3$). No entanto, se o sistema é possível, nós sempre conseguimos um sistema escalonado equivalente, que terá nº de equações igual ao nº de incógnitas (possível e determinado), ou então o nº de equações será menor que o nº de incógnitas (possível e indeterminado).

Este tratamento dado a um sistema linear para a sua resolução é chamado de **método de eliminação de Gauss.**

Sistemas Lineares – Discussão (I)

Discutir um sistema linear é determinar; quando ele é:

- Possível e determinado (solução única);
- Possível e indeterminado (infinitas soluções);
- Impossível (nenhuma solução), em função de um ou mais **parâmetros** presentes no sistema.

Estudaremos as técnicas de discussão de sistemas com o auxilio de exemplos.

Sistemas com Número de Equações Igual ao Número de Incógnitas

Quando o sistema linear apresenta nº de equações igual ao nº de incógnitas, para discutirmos o sistema, inicialmente calculamos o determinante D da matriz dos coeficientes (incompleta), e:

1º) Se $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado.

2º) Se $D = 0$, o sistema é possível e indeterminado ou impossível.

Para identificarmos se o sistema é possível, indeterminado ou impossível, devemos conseguir um sistema escalonado equivalente pelo método de eliminação de Gauss.

Exemplos

01 – Discutir, em função de a, o sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + ay = 1 \end{cases}$$

Resolução

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a - 6$$

$$D = 0 \Rightarrow a - 6 = 0 \Rightarrow a = 6$$

Assim, para $a \neq 6$, o sistema é possível e determinado.

Para $a \neq 6$, temos:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 6y = 1 \quad \leftarrow -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 0x + 0y = -9 \end{cases}$$

que é um sistema impossível.

Assim, temos:

$a \neq 6 \rightarrow SPD$ (Sistema possível e determinado)

$a = 6 \rightarrow SI$ (Sistema impossível)

02 – Discutir, em função de a, o sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

Resolução

$$D \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} = 9 + a - 2a + 3 - 6 - a^2$$

D=0 → $-a^2-a+6=0$ → $a=-3$ ou $a=2$

Assim, para $a\neq-3$ e $a\neq2$, o sistema é possível e determinado.

Para a=-3, temos:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y-3z=3 & \leftarrow -2 \\ x-3y+3z=2 & \leftarrow -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-z=1 \\ -4y+4z=1 & \leftarrow 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-z=1 \\ y+z=5 & sistema \quad impossível \end{cases}$$

Para a=2, temos:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+2z=3 & \leftarrow -2 \\ x+2y+3z=2 & \leftarrow -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+4z=1 \\ y+4z=1 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+4z=1 & sistema \quad possível \quad indeterminado \end{cases}$$

Assim, temos:

$a\neq-3$ e $a \neq 2$ →SPD
a=-3 → SI
a=2 → SPI
03 – Discutir, em função de m e k, o sistema:

$$\begin{cases} mx+y=k \\ x+my=k^2 \end{cases}$$

Resolução

$$D=\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix}=m^2-1$$

D=0 → $m^2-1=0$→ m=+1 ou m=-1

Assim, para $m\neq+1$ e $m\neq-1$, o sistema é possível e determinado.
Para m=1, temos:

$$\begin{cases} x+y=K \\ x+y=K^2 & \leftarrow -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y=K \\ 0x+0y=-K+K^2 \end{cases}$$

Se $-k + k^2=0$, ou seja, k=0 ou k=1, o sistema é possível e indeterminado.

Se $-K+k^2\neq0$, ou seja, $k\neq0$ ou $k\neq1$, o sistema é impossível.

Para m=-1, temos:

$$\begin{cases} -x+y=K \\ x-y=k^2 \end{cases} \sim \begin{cases} x-y=K^2 \\ -x+y=K & \leftarrow 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x-y=k^2 \\ Ox+Oy=k^2+k \end{cases}$$

Se $k^2+k=0$, ou seja, k=0 k=-1, o sistema é possível e indeterminado.
Se $k^2+k\neq0$, ou seja, $k\neq0$ $k\neq-1$, o sistema é indeterminado.

Assim, temos:

$$\left.\begin{array}{l} m=+1 \quad e \quad k=0 \quad ou \quad k=1 \\ ou \\ m=-1 \quad e \quad k=0 \quad ou \quad k=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow SPI$$

$$\left.\begin{array}{l} m=+1 \quad e \quad k\neq 0 \quad ou \quad k\neq 1 \\ ou \\ m=-1 \quad e \quad k\neq 0 \quad ou \quad k\neq -1 \end{array}\right\} \Rightarrow SI$$

Sistemas com Número de Equações Diferente do Número de Incógnitas

Quando o sistema linear apresenta número de equações diferente do número de incógnitas, para discuti-lo, devemos obter um sistema escalonado equivalente pelo método de eliminar de Gauss.

Exemplos

01 – Discutir, em função de *m*, o sistema:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=8 \\ x-my=3 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2z+3y=8 \quad \rightarrow -2 \\ x-my=3 \quad \rightarrow -1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x+y=3 \\ y=2 \\ (-1-m)y=0 \quad \rightarrow 1+m \end{cases} \sim \begin{cases} x+y=3 \\ y=2 \\ 0y=2+2m \end{cases}$$

$2+2m=0 \rightarrow m=-1$

Assim, temos:

$m\neq -1 \rightarrow$ SI
$m=-1 \rightarrow$ SPD

02 – Discutir, em função de k, o sistema:

$$\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 2x+5y+3z=12 \\ 3x+7y-2z=17 \\ 5x+12y+kz=29 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 2x+5y+3z=12 & \leftarrow -2 \\ 3x+7y-2z=17 & \leftarrow -3 \\ 5x+12y+kz=29 & \leftarrow -5 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=5 \\ y+z=2 \\ y+5z=2 & \leftarrow -1 \\ 2y+(5+K)z=4 & \leftarrow -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=5 \\ y+z=2 \\ 4z=0 & +4 \\ (3+K)z=0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+2y-z=5 \\ y+z=2 \\ z=0 & -3-K \\ (3+K)z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=5 \\ y+z=2 \\ z=0 \\ 0z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=5 \\ y+z=2 \\ z=0 \end{cases}$$

Assim, para $\forall k \in R$, o sistema é possível e determinado.

Sistemas Lineares – Discussão (II)
Sistema Linear Homogêneo
Já sabemos que sistema linear homogêneo é todo sistema cujas equações têm todos os termos independentes iguais a zero.
São homogêneos os sistemas:

01 $\begin{cases} 3x+4y=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$

02 $\begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 3x-y+z=0 \\ 5x+3y-7z=0 \end{cases}$

Observe que a dupla (0,0) é solução do sistema 01 e a terna (0,0,0) é solução do sistema 02.

Todo sistema linear homogêneo admite como solução uma seqüência de zero, chamada **solução nula** ou **solução trivial**. Observamos também que todo sistema homogênea é sempre **possível** podendo, eventualmente, apresentar outras soluções além da solução trivial, que são chamadas soluções **próprias.**

Discussão e Resolução

Lembre-se que: todo sistema linear homogêneo tem ao menos a solução trivial, portanto será sempre possível.

Vejamos alguns exemplos:

01 – Classifique e resolva o sistema:

$$\begin{cases} 3x+y+z=0 \\ x+5y-z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$$

Resolução

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-12$$

Como $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado admitindo só a solução trivial, logo:

02 – Classifique e resolva o sistema:

$$\begin{cases} a+b+2c=0 \\ a-3b-2c=0 \\ 2a-b+c=0 \end{cases}$$

Resolução

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Como D=0, o sistema homogêneo é indeterminado.
Fazendo o escalonamento temos:

$$\begin{cases} a+\quad b+2c=0 \\ a-3b+-2c=0 \\ 2a-\quad b+c=0 \end{cases} \sim \begin{cases} a+\quad b+2c=0 \\ 0-4b-4c=0 \\ 0-\quad 3b-3c=0 \end{cases} \sim \begin{cases} a+b+2c=0 \\ 0+b+4c=0 \\ 0+0+0=0 \end{cases}$$

Teremos, então:

$$\begin{cases} a+b+2c=0 \\ \quad b+c=0 \end{cases}$$

Fazendo $c=t$, teremos:
$=-c \rightarrow b=-t$
$a-t+2t=0 \rightarrow a=-t$

Portanto:

$$S=\{(-t,-t,t),t \in R\}$$

Note que variando t obteremos várias soluções, inclusive a trivial para t=0.

03 – Determine **K** de modo que o sistema abaixo tenha solução diferente da trivial.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-ky+z=0 \\ kx-y-z=0 \end{cases}$$

Resolução
O sistema é homogêneo e, para apresentar soluções diferentes da trivial, devemos ter D=0

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ k & -1 & -1 \end{vmatrix}=k^2+2k+1=(k+1)^2=0 \Rightarrow k=-1$$

Resposta: k=-1

Exercícios

1. Resolver e classificar o sistema: $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$

2. Determinar *m* real, para que o sistema seja possível e determinado: $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+my=2 \end{cases}$

3. Resolver e classificar o sistema: $\begin{cases} 3x-y+z=5 \\ x+3y=7 \\ 2x+y-2z=-4 \end{cases}$

4. Determinar *m* real para que o sistema seja possível e determinado. $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x-y+2z=5 \\ 3x+y+mz+0 \end{cases}$

5. Se o terno ordenado (2, 5, p) é solução da equação linear 6x - 7y + 2z = 5, qual o valor de p?

6. Escreva a solução genérica para a equação linear 5x - 2y + z = 14, sabendo que o terno ordenado (α, β, γ) é solução.

7. Determine o valor de m de modo que o sistema de equações abaixo,
2x - my = 10
3x + 5y = 8, seja impossível.

8. **Se os sistemas:**
S_1: x + y = 1 e S_2: ax – by = 5
X – 2y = -5 ay – bx = -1

São equivalentes, então o valor de $a^2 + b^2$ é igual a:
a) 1
b) 4
c) 5
d) 9
e) 10

9. Resolva o seguinte sistema usando a regra de Cramer:
x + 3y - 2z = 3
2x - y + z = 12
4x + 3y - 5z = 6

10. **Resolver o sistema** $\begin{cases} 2x-y=7 \\ x+5y=-2 \end{cases}$.

Respostas

1) Resposta "*S*= {(1, 2)}".
Solução: Calculemos inicialmente D, D_x e D_y:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-4-9=-13$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -16 + 3 = 13$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 24 = -26$$

Como D =-13 ≠ 0, o sistema é possível e determinado e:

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-13}{-13} = 1$ e $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-26}{-13} = 2$

Assim: S= {(1, 2)} e o sistema são possíveis e determinados.

2) Resposta "$\left\{ m \in R / m \neq \frac{3}{2} \right\}$".

Solução: Segundo a regra de Cramer, devemos ter $D \neq 0$, em que:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{vmatrix} = 2m - 3$$

Assim: $2m$ -3 ≠ 0 → m ≠ $\frac{3}{2}$

Então, os valores reais de m, para que o sistema seja possível e determinado, são dados pelos elementos do conjunto:

$$\left\{ m \in R / m \neq \frac{3}{2} \right\}$$

3) Resposta " S = {(1, 2, 4)}".
Solução: Calculemos inicialmente D, D_x, D_y e D_z

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -18 + 0 + 1 - 6 - 0 - 2 = -25$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -30 + 0 + 7 + 12 - 0 - 14 = -25$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -42 + 0 - 4 - 14 - 0 + 10 = -50$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -36 - 14 + 5 - 30 - 21 - 4 = -100$$

Como D= -25 ≠ 0, o sistema é possível e determinado e:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-25}{-25} = 1; y = \frac{D_y}{D} = \frac{-50}{-25} = 2; z = \frac{D_z}{D} = \frac{100}{-25} = 4$$

Assim: $S = \{(1, 2, 4)\}$ e o sistema são possíveis e determinados.

4) Resposta "$\{m \in R / m \neq 3\}$".

Solução: Segundo a regra de Cramer, devemos ter $D \neq 0$.
Assim:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & m \end{vmatrix} = -m + 12 + 2 + 3 - 2 - 4m$$

$D = -5m + 15$
Assim: $-5m + 15 \neq 0 \rightarrow m \neq 3$
Então, os valores reais de m, para que o sistema seja possível e determinado, são dados pelos elementos do conjunto:

$\{m \in R / m \neq 3\}$

5) Resposta "14".
Solução:
Teremos por simples substituição, observando que x = 2, y = 5 e z = p, 6 . 2 – 7 . 5 + 2 . p = 5.

Logo, 12 - 35 + 2p = 5.

Daí vem imediatamente que 2p = 28 e, portanto, p = 14.

6) Solução:
Podemos escrever: 5 α- 2 β + γ = 14. Daí, tiramos: γ = 14 - 5 α + 2 β. Portanto, a solução genérica será o terno ordenado (α,β, 14 - 5 α + 2 β).
Observe que se arbitrando os valores para α e β, a terceira variável ficará determinada em função desses valores.
Por exemplo, fazendo-se α = 1, β= 3, teremos:
γ = 14 - 5 α+ 2 β = 14 – 5 . 1 + 2 . 3 = 15,
ou seja, o terno (1, 3, 15) é solução, e assim, sucessivamente.

Verificamos, pois que existem infinitas soluções para a equação linear dada, sendo o terno ordenado (α, β, 14 - 5 α + 2β) a solução genérica.

7) Solução:
Teremos, expressando x em função de m, na primeira equação:
x = (10 + my) / 2

Substituindo o valor de x na segunda equação, vem:
3[(10+my) / 2] + 5y = 8

Multiplicando ambos os membros por 2, desenvolvendo e simplificando, vem:
3(10+my) + 10y = 16
30 + 3my + 10y = 16
(3m + 10)y = -14

y = -14 / (3m + 10)

Ora, para que não exista o valor de y e, em consequência não exista o valor de x, deveremos ter o denominador igual a zero, já que , como sabemos, não existe divisão por zero.

Portanto, 3m + 10 = 0, de onde se conclui m = -10/3, para que o sistema seja impossível, ou seja, não possua solução.

8) Resposta "E".
Solução: Como os sistemas são equivalentes, eles possuem a mesma solução. Vamos resolver o sistema:
S_1: x + y = 1
x - 2y = -5

Subtraindo membro a membro, vem: x - x + y - (-2y) = 1 - (-5).
Logo, 3y = 6 \ y = 2.
Portanto, como x + y = 1, vem, substituindo: x + 2 = 1 \ x = -1.
O conjunto solução é, portanto S = {(-1, 2)}.

Como os sistemas são equivalentes, a solução acima é também solução do sistema S_2.
Logo, substituindo em S_2 os valores de x e y encontrados para o sistema S_1, vem:

a(-1) - b(2) = 5 → - a - 2b = 5
a(2) - b (-1) = -1 → 2 a + b = -1

Multiplicando ambos os membros da primeira equação por 2, fica:
-2 a - 4b = 10
Somando membro a membro esta equação obtida com a segunda equação, fica:
-3b = 9 \ b = - 3

Substituindo o valor encontrado para b na equação em vermelho acima (poderia ser também na outra equação em azul), teremos:

2 a + (-3) = -1 \ a = 1.
Portanto, $a^2 + b^2 = 1^2 + (-3)^2 = 1 + 9 = 10$.

9) Resposta "S = {(5, 2, 4)}".
Solução: Teremos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 24$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 12 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 120$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 12 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 96$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \\ 4 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 48$$

Portanto, pela regra de Cramer, teremos:

$x_1 = D\, x_1 / D = 120 / 24 = 5$
$x_2 = D\, x_2 / D = 48 / 24 = 2$
$x_3 = D\, x_3 / D = 96 / 24 = 4$

Logo, o conjunto solução do sistema dado é S = {(5, 2, 4)}.

10) Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 11$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_1 = 33$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_2 = -11$$

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{33}{11} = 3$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-11}{11} = -1$$

Resposta: S={(3,-1)}

CALENDÁRIOS.

Alguma matemática nos calendários

Como situação de Matemática Recreativa poder-se-ia pedir a um interlocutor para escolher três números seguidos, em linha ou em coluna, existentes num calendário, tipo o que se evidencia a seguir:

JULHO

D	S	T	Q	Q	S	S
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

De seguida poder-se-ia pedir que pesquisasse como é que é possível descobrirem-se rapidamente esses três números.

Em situação de sala de aula esta situação seria muito interessante ser analisada, pois só exige que se conheça se os números selecionados pertencem a uma mesma semana ou a semanas consecutivas. O que há a fazer é dividir a sua soma por três para se obter o valor central. Depois, no caso de os números pertencerem à mesma semana, facilmente se ficam a conhecer os dois números restantes, pois trata-se do antecessor e do sucessor desse valor central. No caso de os números pertencerem a semanas consecutivas, para se descobrir o menor dos três valores somente há que se subtrair sete unidades ao valor central. Por sua vez, adicionando-se sete unidades a esse valor central descobre-se o maior dos três números selecionados. Trata-se de um desafio envolvendo explicitamente o conceito de média aritmética.

O caso dos calendários permite muitas outras explorações matemáticas, como por exemplo pedir para os alunos selecionarem um conjunto de dezesseis números, formando um quadrado de quatro por quatro e descobrirem muito rapidamente a sua soma. Quer dar uma sugestão de possível resolução?

Em primeiro lugar, observe atentamente a seguinte operação com as potências.

$2^5 \times 9^2 = 2592$

É muito interessante, pois os números das bases e expoentes das potências que estão sendo multiplicadas são os mesmos dos resultados na mesma ordem posicional. Existem milhares destas coincidências na matemática, ou melhor, em matemática, coincidências realmente não existem, mas sim, características particulares de cada operação embasadas em lemas e demonstrações criteriosas. Neste caso de multiplicação de potências de números naturais. Vamos ver um exemplo mais elaborado, que além de interessante pode ser usado em vários ramos da matemática.

O quadrado mágico do calendário.

Vamos supor que eu lhe peça para escolher nove dias quaisquer de um determinado mês. Podemos usar como exemplo o mês de junho de 2010. Veja que temos nove dias destacados no calendário abaixo:

Mês de Junho de 2010.

10 de junho de 2010						
D	S	T	Q	Q	S	S
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

Agora vou lhe perguntar qual é a menor data, ou seja, o número de menor valor encontrado entre as nove datas que você escolheu. (É claro, supondo que você tenha escolhido o quadrado 1,2,3,8,9,10,15,16,17 do exemplo dado).No exemplo temos que Terça-Feira, o dia 1º é a menor data, pois corresponde ao número um. Agora vem o truque que é muito legal.

Vou descobrir o total da soma de todos os valores que estão neste quadrado supostamente escolhido por você. Neste momento você faz cara de espanto dizendo – Não acredito! Sem mostrar para você, faço minhas contas que na verdade são muito fáceis.

Veja abaixo:

Pego o menor valor que você já me disse. 1, e somo com 8. Que dá o valor 9. Multiplico o valor encontrado por 9 que dá 81.

(1+8).9 =81 . Vamos conferir?

(1+2+3)+(8+9+10)+(15+16+17) = 81

6+27+48=81. Confere!

É fácil e muito divertido testar estes truques da matemática. Vamos ver outro fato interessante com calendários e potências. No livro Aritmética Recreativa do escritor espanhol Yakov I. Perelman, encontramos muitos destes truques, e um me chamou a atenção por tratar exatamente de calendários e potências. Na verdade é mais uma característica daquelas que citei no começo do artigo.

O Número 365.

É impressionante, principalmente porque ele representa o total de dias do ano. Além disso, a divisão deste número por módulo 7 dá resto 1. Por ser um resto tão insignificante, esta propriedade do número 365 adquire grande significado para nosso calendário com sete dias na semana. Outra propriedade interessante do número 365 que está intimamente relacionada ao nosso calendário é:

365= 10.10+11.11+12.12 . É fácil notar que o número 365 é igual a soma dos quadrados dos valores que representam os 3 últimos meses consecutivos, ou seja, $10^2+11^2 12^2= 100+121+144=365$.

Também podemos notar que a soma de $13^2+14^2=365$. Podemos encontrar esta propriedade destacada na tela intitulada "problema difícil" do pintor Bogdánov-Bielsky.

NUMERAÇÃO.

Números Inteiros

Definimos o conjunto dos números inteiros como a reunião do conjunto dos números naturais (N = {0, 1, 2, 3, 4,..., n,...}, o conjunto dos opostos dos números naturais e o zero. Este conjunto é denotado pela letra *Z* (Zahlen=número em alemão). Este conjunto pode ser escrito por: Z = {..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}

O conjunto dos números inteiros possui alguns subconjuntos notáveis:

- O conjunto dos números inteiros **não nulos**:
Z* = {..., -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4,...};
Z* = Z – {0}

- O conjunto dos números inteiros **não negativos**:
Z_+ = {0, 1, 2, 3, 4,...}
Z_+ é o próprio conjunto dos números naturais: Z_+ = N

- O conjunto dos números inteiros **positivos**:
Z^*_+ = {1, 2, 3, 4,...}

- O conjunto dos números inteiros **não positivos**:
Z_ = {..., -5, -4, -3, -2, -1, 0}

- O conjunto dos números inteiros **negativos**:
Z*_ = {..., -5, -4, -3, -2, -1}

Módulo: chama-se módulo de um número inteiro a distância ou afastamento desse número até o zero, na reta numérica inteira. Representa-se o módulo por | |.

O módulo de 0 é 0 e indica-se |0| = 0

O módulo de +7 é 7 e indica-se |+7| = 7

O módulo de –9 é 9 e indica-se |–9| = 9

O módulo de qualquer número inteiro, diferente de zero, é sempre positivo.

Números Opostos: Dois números inteiros são ditos opostos um do outro quando apresentam soma zero; assim, os pontos que os representam distam igualmente da origem.

Exemplo: O oposto do número 2 é -2, e o oposto de -2 é 2, pois 2 + (-2) = (-2) + 2 = 0

No geral, dizemos que o oposto, ou simétrico, de *a* é – *a*, e vice-versa; particularmente o oposto de zero é o próprio zero.

Adição de Números Inteiros

Para melhor entendimento desta operação, associaremos aos números inteiros positivos a idéia de ganhar e aos números inteiros negativos a idéia de perder.

Ganhar 5 + ganhar 3 = ganhar 8 (+5) + (+3) = (+8)
Perder 3 + perder 4 = perder 7 (-3) + (-4) = (-7)
Ganhar 8 + perder 5 = ganhar 3 (+8) + (-5) = (+3)
Perder 8 + ganhar 5 = perder 3 (-8) + (+5) = (-3)

O sinal (+) antes do número positivo pode ser dispensado, mas o sinal (–) antes do número negativo nunca pode ser dispensado.

Propriedades da adição de números inteiros: O conjunto *Z* é fechado para a adição, isto é, a soma de dois números inteiros ainda é um número inteiro.

Associativa: Para todos *a*,*b*,*c* em *Z*:
a + (b + c) = (a + b) + c
2 + (3 + 7) = (2 + 3) + 7

Comutativa: Para todos *a*,*b* em *Z*:
a + b = b + a
3 + 7 = 7 + 3

Elemento Neutro: Existe 0 em *Z*, que adicionado a cada *z* em *Z*, proporciona o próprio *z*, isto é:
z + 0 = z
7 + 0 = 7

Elemento Oposto: Para todo *z* em *Z*, existe (-z) em *Z*, tal que
z + (–z) = 0
9 + (–9) = 0

Subtração de Números Inteiros

A subtração é empregada quando:
- Precisamos tirar uma quantidade de outra quantidade;
- Temos duas quantidades e queremos saber quanto uma delas tem a mais que a outra;
- Temos duas quantidades e queremos saber quanto falta a uma delas para atingir a outra.

A subtração é a operação inversa da adição.

Observe que: 9 – 5 = 4 4 + 5 = 9

4 → diferença
5 → subtraendo
9 → minuendo

Considere as seguintes situações:

1- Na segunda-feira, a temperatura de Monte Sião passou de +3 graus para +6 graus. Qual foi a variação da temperatura?

Esse fato pode ser representado pela subtração: (+6) – (+3) = +3

2- Na terça-feira, a temperatura de Monte Sião, durante o dia, era de +6 graus. À Noite, a temperatura baixou de 3 graus. Qual a temperatura registrada na noite de terça-feira?

Esse fato pode ser representado pela adição: (+6) + (–3) = +3

Se compararmos as duas igualdades, verificamos que (+6) – (+3) é o mesmo que (+5) + (–3).

Temos:
(+6) – (+3) = (+6) + (–3) = +3
(+3) – (+6) = (+3) + (–6) = –3
(–6) – (–3) = (–6) + (+3) = –3

Daí podemos afirmar: Subtrair dois números inteiros é o mesmo que adicionar o primeiro com o oposto do segundo.

Multiplicação de Números Inteiros

A multiplicação funciona como uma forma simplificada de uma adição quando os números são repetidos. Poderíamos analisar tal situação como o fato de estarmos ganhando repetidamente alguma quantidade, como por exemplo, ganhar 1 objeto por 30 vezes consecutivas, significa ganhar 30 objetos e esta repetição pode ser indicada por um **x**, isto é: 1 + 1 + 1 ... + 1 + 1 = 30 x 1 = 30

Se trocarmos o número 1 pelo número 2, obteremos: 2 + 2 + 2 + ... + 2 + 2 = 30 x 2 = 60

Se trocarmos o número 2 pelo número -2, obteremos: (–2) + (–2) + ... + (–2) = 30 x (-2) = –60

Observamos que a multiplicação é um caso particular da adição onde os valores são repetidos.

Na multiplicação o produto dos números *a* e *b*, pode ser indicado por ***a* x *b***, ***a* . *b*** ou ainda ***ab*** sem nenhum sinal entre as letras.

Para realizar a multiplicação de números inteiros, devemos obedecer à seguinte regra de sinais:
(+1) x (+1) = (+1)
(+1) x (-1) = (-1)
(-1) x (+1) = (-1)
(-1) x (-1) = (+1)

Com o uso das regras acima, podemos concluir que:

Sinais dos números	Resultado do produto
Iguais	Positivo
Diferentes	Negativo

Propriedades da multiplicação de números inteiros: O conjunto *Z* é fechado para a multiplicação, isto é, a multiplicação de dois números inteiros ainda é um número inteiro.

Associativa: Para todos a,b,c em *Z*:
a x (b x c) = (a x b) x c
2 x (3 x 7) = (2 x 3) x 7

Comutativa: Para todos a,b em *Z*:
a x b = b x a
3 x 7 = 7 x 3

Elemento neutro: Existe 1 em *Z*, que multiplicado por todo *z* em *Z*, proporciona o próprio *z*, isto é:
z x 1 = z
7 x 1 = 7

Elemento inverso: Para todo inteiro *z* diferente de zero, existe um inverso z^{-1}=1/z em *Z*, tal que
z x z^{-1} = z x (1/z) = 1
9 x 9^{-1} = 9 x (1/9) = 1

Distributiva: Para todos *a*,*b*,*c* em *Z*:
a x (b + c) = (a x b) + (a x c)
3 x (4+5) = (3 x 4) + (3 x 5)

Divisão de Números Inteiros

Dividendo |divisor dividendo: Divisor = quociente 0 Quociente . divisor = dividendo

Sabemos que na divisão exata dos números naturais:

40 : 5 = 8, pois 5 . 8 = 40
36 : 9 = 4, pois 9 . 4 = 36
Vamos aplicar esses conhecimentos para estudar a divisão exata de números inteiros. Veja o cálculo:

(–20) : (+5) = q ⇨ (+5) . q = (–20) ⇨ q = (–4)

Logo: (–20) : (+5) = +4

Considerando os exemplos dados, concluímos que, para efetuar a divisão exata de um número inteiro por outro número inteiro, diferente de zero, dividimos o módulo do dividendo pelo módulo do divisor. Daí:

- Quando o dividendo e o divisor têm o mesmo sinal, o quociente é um número inteiro positivo.
- Quando o dividendo e o divisor têm sinais diferentes, o quociente é um número inteiro negativo.
- A divisão nem sempre pode ser realizada no conjunto *Z*. Por exemplo, (+7) : (–2) ou (–19) : (–5) são divisões que não podem ser realizadas em *Z*, pois o resultado não é um número inteiro.
- No conjunto *Z*, a divisão não é comutativa, não é associativa e não tem a propriedade da existência do elemento neutro.

1- Não existe divisão por zero.
Exemplo: (–15) : 0 não tem significado, pois não existe um número inteiro cujo produto por zero seja igual a –15.
2- Zero dividido por qualquer número inteiro, diferente de zero, é zero, pois o produto de qualquer número inteiro por zero é igual a zero.

Exemplos: a) 0 : (–10) = 0   b) 0 : (+6) = 0   c) 0 : (–1) = 0

Potenciação de Números Inteiros

A potência a^n do número inteiro *a*, é definida como um produto de *n* fatores iguais. O número a é denominado a *base* e o número *n* é o *expoente*.
a^n = a x a x a x a x ... x a
a é multiplicado por *a n* vezes

Exemplos:
3^3 = (3) x (3) x (3) = 27
$(-5)^5$ = (-5) x (-5) x (-5) x (-5) x (-5) = -3125
$(-7)^2$ = (-7) x (-7) = 49
$(+9)^2$ = (+9) x (+9) = 81

- Toda potência de **base positiva** é um número **inteiro positivo**.
Exemplo: $(+3)^2$ = (+3) . (+3) = +9

- Toda potência de **base negativa** e **expoente par** é um número **inteiro positivo**.
Exemplo: $(-8)^2$ = (–8) . (–8) = +64
- Toda potência de **base negativa** e **expoente ímpar** é um número **inteiro negativo**.
Exemplo: $(-5)^3$ = (–5) . (–5) . (–5) = –125

Propriedades da Potenciação:

Produtos de Potências com bases iguais: Conserva-se a base e somam-se os expoentes. $(-7)^3 \cdot (-7)^6 = (-7)^{3+6} = (-7)^9$

Quocientes de Potências com bases iguais: Conserva-se a base e subtraem-se os expoentes. $(+13)^8 : (+13)^6 = (+13)^{8-6} = (+13)^2$
Potência de Potência: Conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes. $[(+4)^5]^2 = (+4)^{5 \cdot 2} = (+4)^{10}$

Potência de expoente 1: É sempre igual à base. $(+9)^1 = +9$ $(-13)^1 = -13$

Potência de expoente zero e base diferente de zero: É igual a 1. Exemplo: $(+14)^0 = 1$ $(-35)^0 = 1$

Radiciação de Números Inteiros

A raiz n-ésima (de ordem *n*) de um número inteiro *a* é a operação que resulta em outro número inteiro *não negativo b* que elevado à potência *n* fornece o número *a*. O número *n* é o índice da raiz enquanto que o número *a* é o radicando (que fica sob o sinal do radical).
A raiz quadrada (de ordem 2) de um número inteiro *a* é a operação que resulta em outro número inteiro *não negativo* que elevado ao quadrado coincide com o número *a*.

Observação: Não existe a raiz quadrada de um número inteiro negativo no conjunto dos números inteiros.

Erro comum: Frequentemente lemos em materiais didáticos e até mesmo ocorre em algumas aulas aparecimento de:
$\sqrt{9} = \pm 3$
mas isto está errado. O certo é:
$\sqrt{9} = +3$

Observamos que não existe um número inteiro não negativo que multiplicado por ele mesmo resulte em um número negativo.

A raiz cúbica (de ordem 3) de um número inteiro *a* é a operação que resulta em outro número inteiro que elevado ao cubo seja igual ao número *a*. Aqui não restringimos os nossos cálculos somente aos números não negativos.

Exemplos

(a) $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$.
(b) $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$.
(c) $\sqrt[3]{27} = 3$, pois $3^3 = 27$.
(d) $\sqrt[3]{-27} = -3$, pois $(-3)^3 = -27$.

Observação: Ao obedecer à regra dos sinais para o produto de números inteiros, concluímos que:
(a) Se o índice da raiz for par, não existe raiz de número inteiro negativo.
(b) Se o índice da raiz for ímpar, é possível extrair a raiz de qualquer número inteiro.

Exercícios

1. Qual é o maior quadrado perfeito que se escreve com dois algarismos?

2. Um número inteiro é expresso por (53 – 38 + 40) – 51 + (90 – 7 + 82) + 101. Qual é esse número inteiro?
3. Calcule:
a) (+12) + (–40)
b) (+12) – (–40)
c) (+5) + (–16) – (+9) – (–20)
d) (–3) – (–6) – (+4) + (–2) + (–15)

4. Determine o valor de *x* de modo a tornar as sentenças verdadeiras:

a) x + (–12) = –5
b) x + (+9) = 0
c) x – (–2) = 6
d) x + (–9) = –12
e) –32 + x = –50
f) 0 – x = 8

5. Qual a diferença prevista entre as temperaturas no Piauí e no Rio Grande do Sul, num determinado dia, segundo as informações?
Tempo no Brasil: Instável a ensolarado no Sul.
Mínima prevista -3º no Rio Grande do Sul.
Máxima prevista 37° no Piauí.

6. Qual é o produto de três números inteiros consecutivos em que o maior deles é –10?

7. Três números inteiros são consecutivos e o menor deles é +99. Determine o produto desses três números.

8. Copie as igualdades substituindo o x por números inteiros de modo que elas se mantenham:
a) (–140) : x = –20
b) 144 : x = –4
c) (–147) : x = +21
d) x : (+13) = +12
e) x : (–93) = +45
f) x : (–12) = –36

9. Adicionando –846 a um número inteiro e multiplicando a soma por –3, obtém-se +324. Que número é esse?

10. Numa adição com duas parcelas, se somarmos 8 à primeira parcela, e subtrairmos 5 da segunda parcela, o que ocorrerá com o total?

Respostas

1) Resposta "9^2".
Solução: Basta identificar os quadrados perfeitos.
Os números quadrados perfeitos são:
$1^2 = 1$ (menor que dois algarismos)
$2^2 = 4$
$3^2 = 9$
$4^2 = 16$ (dois algarismos)
$5^2 = 25$
$6^2 = 36$
$7^2 = 49$
$8^2 = 64$
$9^2 = 81$
$10^2 = 100$ (mais que dois algarismos)

Logo, o maior quadrado perfeito é o $9^2 = 81$
2) Resposta "270".
Solução:
(53 – 38 + 40) – 51 + (90 – 7 + 82) + 101
55 – 51 + 165 + 101 = 270

Portanto, o número inteiro é 270.

3) Solução:

a) (+12) + (–40) = 12 – 40 = -28
b) (+12) – (–40) = 12 + 40 = 52
c) (+5) + (–16) – (+9) – (–20) = +5 -16 – 9 + 20 = 25 – 25 = 0
d) (–3) – (–6) – (+4) + (–2) + (–15) = -3 + 6 – 4 – 2 – 15 = 6 – 24 = -18

4) Solução:
a) x + (–12) = –5 → x = -5 + 12 → x = 7
b) x + (+9) = 0 → x = -9
c) x – (–2) = 6 → x = 6 – 2 → x = 4
d) x + (–9) = –12 → x = -12 + 9 → x = -3
e) –32 + x = –50 → x = -50 + 32 → x = -18
f) 0 – x = 8 → x = -8

5) Resposta “40°”.
Solução:
A diferença está entre -3º e +37º. Se formos ver... -3º, -2º, -1º, 0º, 1º, 2º, 3º, 4º, 5º, 6º, 7º... será +40º.

6) Resposta “-1320”.
Solução:
(x) . (x+1) . (x+2) = ?

x+2 = -10
x= -10 -2
x = -12

(-12) . (-12+1) . (-12+2) =
-12 . -11 . -10 = - 1320

7) Resposta “999900”.
Solução:
(x) . (x+1) . (x+2) = ?

x= 99

(99) . (99+1) . (99+2) =
99 . 100 . 101 = 999900
8) Solução:
a) (–140) : x = –20
-20x = -140
x = 7

b) 144 : x = –4
-4x = 144
x = -36

c) (–147) : x = +21
21x = -147
x = -7

d) x : (+13) = +12
x = 12 . 13
x = 156
e) x : (–93) = +45
x = 45 . -93

x = -4185

f) x : (–12) = –36
x = -36 . -12
x = 432

9) Resposta “738”.
Solução:
x + (-846) . -3 = 324
x – 846 . -3 = 324
-3 (x – 846) = 324
-3x + 2538 = 324
3x = 2538 – 324
3x = 2214

$x = \frac{2214}{3}$

x = 738

10) Resposta “3”.
Solução: Seja *t* o total da adição inicial.
Ao somarmos 8 a uma parcela qualquer, o total é acrescido de 8 unidades: t + 8
Ao subtrairmos 5 de uma parcela qualquer, o total é reduzido de 5 unidades: Temos:

t + 8 - 5 = t + 3

Portanto o total ficará acrescido de 3 unidades.

Números Racionais - Q

Um número racional é o que pode ser escrito na forma $\frac{m}{n}$, onde *m* e *n* são números inteiros, sendo que *n* deve ser diferente de zero. Frequentemente usamos *m/n* para significar a divisão de *m* por *n*.

Como podemos observar, números racionais podem ser obtidos através da razão entre dois números inteiros, razão pela qual, o conjunto de todos os números racionais é denotado por *Q*. Assim, é comum encontrarmos na literatura a notação:

Q = { $\frac{m}{n}$ *: m e n em Z, n diferente de zero}*

No conjunto *Q* destacamos os seguintes subconjuntos:

- Q^* = conjunto dos racionais *não nulos*;
- Q_+ = conjunto dos racionais *não negativos*;
- Q^*_+ = conjunto dos racionais *positivos*;
- Q_- = conjunto dos racionais *não positivos*;
- Q^*_- = conjunto dos racionais *negativos*.

Representação Decimal das Frações

Tomemos um número racional $\frac{p}{q}$, tal que *p* não seja múltiplo de *q*. Para escrevê-lo na forma decimal, basta efetuar a divisão do numerador pelo denominador.

Nessa divisão podem ocorrer dois casos:

1º) O numeral decimal obtido possui, após a vírgula, um número finito de algarismos. Decimais Exatos:

$\frac{2}{5} = 0,4$

$\frac{1}{4} = 0,25$

$\frac{35}{4} = 8,75$

$\frac{153}{50} = 3,06$

2º) O numeral decimal obtido possui, após a vírgula, infinitos algarismos (nem todos nulos), repetindo-se periodicamente. Decimais Periódicos ou Dízimas Periódicas:

$\frac{1}{3} = 0,333...$

$\frac{1}{22} = 0,04545...$

$\frac{167}{66} = 2,53030...$

Representação Fracionária dos Números Decimais

Trata-se do problema inverso: estando o número racional escrito na forma decimal, procuremos escrevê-lo na forma de fração. Temos dois casos:

1º) Transformamos o número em uma fração cujo numerador é o número decimal sem a vírgula e o denominador é composto pelo numeral 1, seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais do número decimal dado:

$0,9 = \frac{9}{10}$

$5,7 = \frac{57}{10}$

$0,76 = \frac{76}{100}$

$3,48 = \frac{348}{100}$

$0,005 = \frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$

2º) Devemos achar a fração geratriz da dízima dada; para tanto, vamos apresentar o procedimento através de alguns exemplos:

Exemplo 1

Seja a dízima 0, 333... .

Façamos x = 0,333... e multipliquemos ambos os membros por 10: 10x = 0,333
Subtraindo, membro a membro, a primeira igualdade da segunda:
$10x – x = 3,333... – 0,333... \Rightarrow 9x = 3 \Rightarrow x = 3/9$
Assim, a geratriz de 0,333... é a fração $\frac{3}{9}$.

Exemplo 2

Seja a dízima 5, 1717...

Façamos x = 5,1717... e 100x = 517,1717... .
Subtraindo membro a membro, temos:
$99x = 512 \Rightarrow x = 512/99$

Assim, a geratriz de 5,1717... é a fração $\frac{512}{99}$.

Exemplo 3

Seja a dízima 1, 23434...

Façamos x = 1,23434...   10x = 12,3434...   1000x = 1234,34... .
Subtraindo membro a membro, temos:

$990x = 1234,34... - 12,34... \Rightarrow 990x = 1222 \Rightarrow x = 1222/990$

Simplificando, obtemos $x = \frac{611}{495}$, a fração geratriz da dízima 1, 23434...

Módulo ou valor absoluto: É a distância do ponto que representa esse número ao ponto de abscissa zero.

Exemplo: Módulo de $-\frac{3}{2}$ é $\frac{3}{2}$. Indica-se $\left|-\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3}{2}\right|$

Módulo de $+\frac{3}{2}$ é $\frac{3}{2}$. Indica-se $\left|+\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3}{2}\right|$

Números Opostos: Dizemos que $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$ são números racionais opostos ou simétricos e cada um deles é o oposto do outro. As distâncias dos pontos $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$ ao ponto zero da reta são iguais.

Soma (Adição) de Números Racionais

Como todo número racional é uma fração ou pode ser escrito na forma de uma fração, definimos a adição entre os números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, da mesma forma que a soma de frações, através de:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Propriedades da Adição de Números Racionais

O conjunto Q é fechado para a operação de adição, isto é, a soma de dois números racionais ainda é um número racional.
- Associativa: Para todos a, b, c em Q: $a + (b + c) = (a + b) + c$
- Comutativa: Para todos a, b em Q: $a + b = b + a$
- Elemento neutro: Existe 0 em Q, que adicionado a todo q em Q, proporciona o próprio q, isto é: $q + 0 = q$
- Elemento oposto: Para todo q em Q, existe -q em Q, tal que $q + (-q) = 0$

Subtração de Números Racionais

A subtração de dois números racionais p e q é a própria operação de adição do número p com o oposto de q, isto é: $p - q = p + (-q)$

Multiplicação (Produto) de Números Racionais

Como todo número racional é uma fração ou pode ser escrito na forma de uma fração, definimos o produto de dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, da mesma forma que o produto de frações, através de:

$$\frac{a}{b} \text{ x } \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

O produto dos números racionais a e b também pode ser indicado por $a \times b$, axb, $a.b$ ou ainda ab sem nenhum sinal entre as letras.
Para realizar a multiplicação de números racionais, devemos obedecer à mesma regra de sinais que vale em toda a Matemática:
$(+1) \times (+1) = (+1)$
$(+1) \times (-1) = (-1)$
$(-1) \times (+1) = (-1)$
$(-1) \times (-1) = (+1)$

Podemos assim concluir que o produto de dois números com o mesmo sinal é positivo, mas o produto de dois números com sinais diferentes é negativo.

Propriedades da Multiplicação de Números Racionais

O conjunto Q é fechado para a multiplicação, isto é, o produto de dois números racionais ainda é um número racional.
- Associativa: Para todos a, b, c em Q: $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
- Comutativa: Para todos a, b em Q: $a \times b = b \times a$
- Elemento neutro: Existe 1 em Q, que multiplicado por todo q em Q, proporciona o próprio q, isto é: $q \times 1 = q$

- Elemento inverso: Para todo $q = \frac{a}{b}$ em Q, q diferente de zero, existe $q^{-1} = \frac{b}{a}$ em Q: $q \times q^{-1} = 1$ $\qquad \frac{a}{b} x \frac{b}{a} = 1$

- Distributiva: Para todos a, b, c em Q: $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Divisão de Números Racionais

A divisão de dois números racionais p e q é a própria operação de multiplicação do número p pelo inverso de q, isto é: $p \div q = p \times q^{-1}$

Potenciação de Números Racionais

A potência q^n do número racional q é um produto de n fatores iguais. O número q é denominado a base e o número n é o expoente.
$q^n = q \times q \times q \times q \times ... \times q$, ($q$ aparece n vezes)

Exemplos:

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right).\left(\frac{2}{5}\right).\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{8}{125}$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$

c) $(-5)^2 = (-5) . (-5) = 25$

d) $(+5)^2 = (+5) . (+5) = 25$

Propriedades da Potenciação: Toda potência com expoente 0 é igual a 1.

$$\left(+\frac{2}{5}\right)^0 = 1$$

- Toda potência com expoente 1 é igual à própria base.

$$\left(-\frac{9}{4}\right)^1 = -\frac{9}{4}$$

- Toda potência com expoente negativo de um número racional diferente de zero é igual a outra potência que tem a base igual ao inverso da base anterior e o expoente igual ao oposto do expoente anterior.

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2} . \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

- Toda potência com expoente ímpar tem o mesmo sinal da base.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$$

- Toda potência com expoente par é um número positivo.

$$\left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \left(-\frac{1}{5}\right).\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{25}$$

- Produto de potências de mesma base. Para reduzir um produto de potências de mesma base a uma só potência, conservamos a base e somamos os expoentes.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 . \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}.\frac{2}{5}\right).\left(\frac{2}{5}.\frac{2}{5}.\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)^{2+3} = \left(\frac{2}{5}\right)^5$$

- Quociente de potências de mesma base. Para reduzir um quociente de potências de mesma base a uma só potência, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^5 . \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{\frac{3}{2}.\frac{3}{2}.\frac{3}{2}.\frac{3}{2}.\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}.\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{5-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

- Potência de Potência. Para reduzir uma potência de potência a uma potência de um só expoente, conservamos a base e multiplicamos os expoentes

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2+2+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3 \cdot 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

Radiciação de Números Racionais

Se um número representa um produto de dois ou mais fatores iguais, então cada fator é chamado raiz do número. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1

4 Representa o produto 2 . 2 ou 2^2. Logo, 2 é a raiz quadrada de 4. Indica-se $\sqrt{4} = 2$.

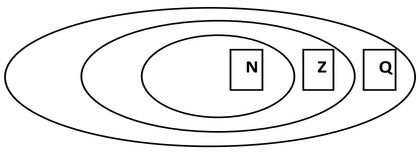
Exemplo 2

$\frac{1}{9}$ Representa o produto $\frac{1}{3} . \frac{1}{3}$ ou $\left(\frac{1}{3}\right)^2$. Logo, $\frac{1}{3}$ **é a raiz quadrada de** $\frac{1}{9}$ .Indica-se $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

Exemplo 3

0,216 Representa o produto 0,6 . 0,6 . 0,6 ou $(0,6)^3$. Logo, 0,6 é a raiz cúbica de 0,216. Indica-se $\sqrt[3]{0,216} = 0,6$.

Assim, podemos construir o diagrama:



Um número racional, quando elevado ao quadrado, dá o número zero ou um número racional positivo. Logo, os números racionais negativos não têm raiz quadrada em Q.

O número $\frac{-100}{9}$ não tem raiz quadrada em Q, pois tanto $\frac{-10}{3}$ como $\frac{+10}{3}$, quando elevados ao quadrado, dão $\frac{100}{9}$.

Um número racional positivo só tem raiz quadrada no conjunto dos números racionais se ele for um quadrado perfeito.

O número $\frac{2}{3}$ não tem raiz quadrada em Q, pois não existe número racional que elevado ao quadrado dê $\frac{2}{3}$.

Exercícios

1. Calcule o valor das expressões numéricas:

a) $\frac{7}{24}-\left[\left(\frac{5}{12}-\frac{1}{8}\right)-\left(-\frac{7}{6}+\frac{3}{4}\right)\right]$

b) $\left[\left(+\frac{3}{16}\right):\left(-\frac{1}{12}\right)+\frac{5}{2}\right]-\left(\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\right)$

2. Escreva o produto $\left(+\frac{2}{3}\right)^3.\left(+\frac{2}{3}\right)^7$ como uma só potência.

3. Escreva o quociente $\left(-\frac{16}{25}\right)^{12}:\left(-\frac{16}{25}\right)^4$ como uma só potência.

4. Qual é o valor da expressão $-\frac{13}{24}\left(-\frac{1}{2}\right)^3:\left(+\frac{3}{4}\right)$?

5. Para encher um álbum de figurinhas, Karina contribuiu com $\frac{1}{6}$ das figurinhas, enquanto Cristina contribuiu com das figurinhas $\frac{3}{4}$. Com que fração das figurinhas as duas juntas contribuíram?

6. Ana está lendo um livro. Em um dia ela leu $\frac{1}{4}$ do livro e no dia seguinte leu $\frac{1}{6}$ do livro. Então calcule:

a) A fração do livro que ela já leu.
b) A fração do livro que falta para ela terminar a leitura.

7. Em um pacote há $\frac{4}{5}$ de 1 Kg de açúcar. Em outro pacote há $\frac{1}{3}$. Quantos quilos de açúcar o primeiro pacote tem a mais que o segundo?

8. A rua onde Cláudia mora está sendo asfaltada. Os $\frac{5}{9}$ da rua já foram asfaltados. Que fração da rua ainda resta asfaltar?

9. No dia do lançamento de um prédio de apartamentos, $\frac{1}{3}$ desses apartamentos foi vendido e $\frac{1}{6}$ foi reservado. Assim:

a) Qual a fração dos apartamentos que foi vendida e reservada?
b) Qual a fração que corresponde aos apartamentos que não foram vendidos ou reservados?

10. Transforme em fração:
a) 2,08
b) 1,4
c) 0,017
d) 32,17

Respostas

1) Solução

a) $\frac{7}{24}-\left[\left(\frac{5}{12}-\frac{1}{8}\right)-\left(-\frac{7}{6}+\frac{3}{4}\right)\right]=\frac{7}{24}-\left[\left(\frac{10-3}{24}\right)-\left(\frac{-14+9}{12}\right)\right]$

$$\frac{7}{24}-\left(\frac{7}{24}+\frac{5}{12}\right)=\frac{7}{24}-\left(\frac{7+10}{24}\right)=\frac{7}{24}-\frac{17}{24}=-\frac{10}{24}=-\frac{5}{12}$$

b) $\left[\left(+\frac{3}{16}\right):\left(-\frac{1}{12}\right)+\frac{5}{2}\right]-\left(\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\right)$

$$\left[\frac{\frac{3}{16}}{-\frac{1}{12}}+\frac{5}{2}\right]-\left(\frac{9-14}{4}\right)=\left(\frac{36}{16}-\frac{5}{2}\right)-\left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$-\frac{9}{4}+\frac{5}{2}+\frac{5}{4}=\frac{-9+10+5}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

mmc:(4;2)=4

2) Solução:

$\left(+\frac{2}{3}\right)^{10}$

3) Solução:

$\left(-\frac{16}{25}\right)^{8}$

4) Solução:

$$-\frac{13}{24}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}:\left(+\frac{3}{4}\right)-\frac{13}{24}-\frac{1}{8}:\frac{3}{4}$$
$$-\frac{13}{24}+\frac{4}{24}=\frac{-13+4}{24}=-\frac{9}{24}=-\frac{3}{8}$$

5) Resposta $\frac{11}{12}$
Solução:

$\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=\frac{2}{12}+\frac{9}{12}=\frac{11}{12}$

6) Solução:

a) $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{5}{12}$

b) $1-\frac{5}{12}=\frac{12}{12}-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$

7) Respostas $\frac{7}{15}$
Solução:

$\frac{4}{5}-\frac{1}{3}=\frac{12}{15}-\frac{5}{15}=\frac{7}{15}$

8) Resposta $\frac{4}{9}$
Solução:

$1-\frac{5}{9}=\frac{9}{9}-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$

9) Solução:

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b) $1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

10) Solução:

a) $2{,}08 \rightarrow \frac{208}{100} = \frac{52}{25}$

b) $1{,}4 \rightarrow \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

c) $0{,}017 \rightarrow \frac{17}{1000}$

d) $32{,}17 \rightarrow \frac{3217}{100}$

Números Irracionais

Os números racionais, aqueles que podem ser escritos na forma de uma fração a/b onde *a* e *b* são dois números inteiros, com a condição de que *b* seja diferente de zero, uma vez que sabemos da impossibilidade matemática da divisão por zero.

Vimos também, que todo número racional pode ser escrito na forma de um número decimal periódico, também conhecido como dízima periódica.

Vejam os exemplos de números racionais a seguir:
3 / 4 = 0,75 = 0, 750000...
- 2 / 3 = - 0, 666666...
1 / 3 = 0, 333333...
2 / 1 = 2 = 2, 0000...
4 / 3 = 1, 333333...
- 3 / 2 = - 1,5 = - 1, 50000...
0 = 0, 000...

Existe, entretanto, outra classe de números que não podem ser escritos na forma de fração a/b, conhecidos como números irracionais.

Exemplo

O número real abaixo é um número irracional, embora pareça uma dízima periódica: x = 0,10100100010000100000...

Observe que o número de zeros após o algarismo 1 aumenta a cada passo. Existem infinitos números reais que não são dízimas periódicas e dois números irracionais muito importantes, são:

e = 2,718281828459045...,
Pi (π) = 3,14159265358979323846264 3...

Que são utilizados nas mais diversas aplicações práticas como: cálculos de áreas, volumes, centros de gravidade, previsão populacional, etc.

Classificação dos Números Irracionais

Existem dois tipos de números irracionais:

- Números reais algébricos irracionais: são raízes de polinômios com coeficientes inteiros. Todo número real que pode ser representado através de uma quantidade finita de somas, subtrações, multiplicações, divisões e raízes de grau inteiro a partir dos núm $\sqrt{2}\sqrt[3]{\frac{42}{5}-\sqrt[5]{7}}$ n número algébrico, por exemplo,

A recíproca não é verdadeira: existem números algébricos que não podem ser expressos através de radicais, conforme o teorema de Abel-Ruffini.

- Números reais transcendentes: não são raízes de polinômios com coeficientes inteiros. Várias constantes matemáticas são transcendentes, como pi (π) e o número de Euler (e). Pode-se dizer que existem *mais* números transcendentes do que números algébricos (a comparação entre conjuntos infinitos pode ser feita na teoria dos conjuntos).

A definição mais genérica de números algébricos e transcendentes é feita usando-se números complexos.

Identificação de números irracionais

Fundamentado nas explanações anteriores, podemos afirmar que:

- Todas as dízimas periódicas são números racionais.
- Todos os números inteiros são racionais.
- Todas as frações ordinárias são números racionais.
- Todas as dízimas não periódicas são números irracionais.
- Todas as raízes inexatas são números irracionais.
- A soma de um número racional com um número irracional é sempre um número irracional.
- A diferença de dois números irracionais, pode ser um número racional.

Exemplo: $\sqrt{5} - \sqrt{5} = 0$ e 0 é um número racional.

- O quociente de dois números irracionais, pode ser um número racional.

Exemplo: $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$ e 2 é um número racional.

- O produto de dois números irracionais, pode ser um número racional.

Exemplo: $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{25} = 5$ e 5 é um número racional.

- A união do conjunto dos números irracionais com o conjunto dos números racionais, resulta num conjunto denominado **conjunto *R* dos números reais**.

- A interseção do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais, não possui elementos comuns e, portanto, é igual ao conjunto vazio (∅).

Simbolicamente, teremos:

$\mathbf{Q \cup I = \mathit{R}}$

$\mathbf{Q \cap I = \varnothing}$

RAZÕES ESPECIAIS.

Razão

Sejam dois números reais *a* e *b*, com *b ≠ 0*. Chama-se razão entre *a* e *b* (nessa ordem) o quociente a ÷ b, ou $\frac{a}{b}$.

A razão é representada por um número racional, mas é lida de modo diferente.

Exemplos

a) A fração $\frac{3}{5}$ lê-se: “três quintos”.

b) A razão $\frac{3}{5}$ lê-se: “3 para 5”.

Os termos da razão recebem nomes especiais.

a) Na fração $\frac{3}{5}$ O número 3 é **numerador**; O número 5 é **denominador**

a) Na razão $\frac{3}{5}$ O número 3 é **antecedente**; O número 5 é **consequente**

Exemplo 1

A razão entre 20 e 50 é $\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$; já a razão entre 50 e 20 é $\frac{50}{20}=\frac{5}{2}$.

Exemplo 2

Numa classe de 42 alunos há 18 rapazes e 24 moças. A razão entre o número de rapazes e o número de moças é $\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$, o que significa que para “cada 3 rapazes há 4 moças”. Por outro lado, a razão entre o número de rapazes e o total de alunos é dada por $\frac{18}{42}=\frac{3}{7}$, o que equivale a dizer que “de cada 7 alunos na classe, 3 são rapazes”.

Razão entre grandezas de mesma espécie

A razão entre duas grandezas de mesma espécie é o quociente dos números que expressam as medidas dessas grandezas numa mesma unidade.

Exemplo

Uma sala tem 18 m^2. Um tapete que ocupar o centro dessa sala mede 384 dm^2. Vamos calcular a razão entre a área do tapete e a área da sala.

Primeiro, devemos transformar as duas grandezas em uma mesma unidade:

Área da sala: 18 m^2 = 1 800 dm^2

Área do tapete: 384 dm^2

Estando as duas áreas na mesma unidade, podemos escrever a razão:

$$\frac{384dm^2}{1800dm^2}=\frac{384}{1800}=\frac{16}{75}$$

Razão entre grandezas de espécies diferentes

Exemplo 1

Considere um carro que às 9 horas passa pelo quilômetro 30 de uma estrada e, às 11 horas, pelo quilômetro 170.

Distância percorrida: 170 km – 30 km = 140 km

Tempo gasto: 11h – 9h = 2h

Calculamos a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto para isso:

$$\frac{140km}{2h} = 70km/h$$

A esse tipo de razão dá-se o nome de **velocidade média**.

Observe que:
- as grandezas “quilômetro e hora” são de naturezas diferentes;
- a notação km/h (lê-se: “quilômetros por hora”) deve acompanhar a razão.

Exemplo 2

A Região Sudeste (Espírito Santo, Minas Gerais, Rio de Janeiro e São Paulo) tem uma área aproximada de 927 286 km^2 e uma população de 66 288 000 habitantes, aproximadamente, segundo estimativas projetadas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) para o ano de 1995.

Dividindo-se o número de habitantes pela área, obteremos o número de habitantes por km^2 (hab./km^2):

$$\frac{6628000}{927286} \cong 71{,}5hab./km^2$$

A esse tipo de razão dá-se o nome de **densidade demográfica**.
A notação hab./km^2 (lê-se: ”habitantes por quilômetro quadrado”) deve acompanhar a razão.

Exemplo 3

Um carro percorreu, na cidade, 83,76 km com 8 L de gasolina. Dividindo-se o número de quilômetros percorridos pelo número de litros de combustível consumidos, teremos o número de quilômetros que esse carro percorre com um litro de gasolina:

$$\frac{83{,}76km}{8l} \cong 10{,}47km/l$$

A esse tipo de razão dá-se o nome de **consumo médio**.
A notação km/l (lê-se: “quilômetro por litro”) deve acompanhar a razão.

Exemplo 4
Uma sala tem 8 m de comprimento. Esse comprimento é representado num desenho por 20 cm. Qual é a escala do desenho?

$$Escala = \frac{comprimento \bullet no \bullet desenho}{comprimento \bullet real} = \frac{20cm}{8m} = \frac{20cm}{800cm} = \frac{1}{40} ou 1:40$$

A razão entre um comprimento no desenho e o correspondente comprimento real, chama-se **Escala.**

Proporção

A igualdade entre duas razões recebe o nome de **proporção**.
Na proporção $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ (lê-se: “3 está para 5 assim como 6 está para 10”), os números 3 e 10 são chamados extremos, e os números 5 e 6 são chamados meios.

Observemos que o produto 3 x 10 = 30 é igual ao produto 5 x 6 = 30, o que caracteriza a propriedade fundamental das proporções:

“Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos”.

Exemplo 1

Na proporção $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$, temos 2 x 9 = 3 x 6 = 18;

e em $\frac{1}{4}=\frac{4}{16}$, temos 4 x 4 = 1 x 16 = 16.

Exemplo 2

Na bula de um remédio pediátrico recomenda-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg do "peso" da criança.

Se uma criança tem 12 kg, a dosagem correta *x* é dada por:

$$\frac{5gotas}{2kg}=\frac{x}{12kg}\rightarrow x=30gotas$$

Por outro lado, se soubermos que foram corretamente ministradas 20 gotas a uma criança, podemos concluir que seu "peso" é 8 kg, pois:

$$\frac{5gotas}{2kg}=20gotas/p\rightarrow p=8kg$$

(nota: o procedimento utilizado nesse exemplo é comumente chamado de regra de três simples.)

Propriedades da Proporção

O produto dos extremos é igual ao produto dos meios: essa propriedade possibilita reconhecer quando duas razões formam ou não uma proporção.

$\frac{4}{3}e\frac{12}{9}$ formam uma proporção, pois

Produtos dos extremos $\leftarrow \underbrace{4.9}_{36}=\underbrace{3.12}_{36}\rightarrow$ Produtos dos meios.

A soma dos dois primeiros termos está para o primeiro (ou para o segundo termo) assim como a soma dos dois últimos está para o terceiro (ou para o quarto termo).

$$\frac{5}{2}=\frac{10}{4}\Rightarrow\left\{\frac{5+2}{5}=\frac{10+4}{10}\Rightarrow\frac{7}{5}=\frac{14}{10}\right.$$

ou

$$\frac{5}{2}=\frac{10}{4}\Rightarrow\left\{\frac{5+2}{2}=\frac{10+4}{4}\Rightarrow\frac{7}{2}=\frac{14}{4}\right.$$

A diferença entre os dois primeiros termos está para o primeiro (ou para o segundo termo) assim como a diferença entre os dois últimos está para o terceiro (ou para o quarto termo).

$$\frac{4}{3}=\frac{8}{6}\Rightarrow\left\{\frac{4-3}{4}=\frac{8-6}{8}\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{2}{8}\right.$$

ou

$$\frac{4}{3}=\frac{8}{6}\Rightarrow\left\{\frac{4-3}{3}=\frac{8-6}{6}\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{2}{6}\right.$$

A soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes assim como cada antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{12}{8}=\frac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{12+3}{8+2}=\frac{12}{8}\Rightarrow\frac{15}{10}=\frac{12}{8}\end{cases}$$

ou

$$\frac{12}{8}=\frac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{12+3}{8+2}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{15}{10}=\frac{3}{2}\end{cases}$$

A diferença dos antecedentes está para a diferença dos consequentes assim como cada antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{3}{15}=\frac{1}{5}\Rightarrow\begin{cases}\frac{3-1}{15-5}=\frac{3}{15}\Rightarrow\frac{2}{10}=\frac{3}{15}\end{cases}$$

ou

$$\frac{3}{15}=\frac{1}{5}\Rightarrow\begin{cases}\frac{3-1}{15-5}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{2}{10}=\frac{1}{5}\end{cases}$$

Exercícios

1. Em um mapa verifica-se que a escala é 1 : 22 000 000. Duas cidades estão distantes de São Paulo, respectivamente, 4 e 6 cm. Se fosse feita uma estrada ligando as três cidades, qual seria o mínimo de extensão que ela teria?

2. Em um mapa, a distância em linha reta entre Brasília e Palmas, no Tocantins é de 10 cm. Sabendo que a distância real entre as duas cidades é de 700 km, qual a escala utilizada na confecção do mapa?

3. Uma estátua de bronze tem 140 kg de massa e seu volume é de 16 dm³. Qual é a sua densidade?

4. Um trem percorreu 453 km em 6 horas. Qual a velocidade média do trem nesse percurso?

5. O estado de Tocantins ocupada uma área aproximada de 278 500 km². De acordo com o Censo/2000 o Tocantins tinha uma população de aproximadamente 1 156 000 habitantes. Qual é a densidade demográfica do estado de Tocantins?

6. A diferença entre a idade de Ângela e a idade de Vera é 12 anos. Sabendo-se que suas idades estão uma para a outra assim como $\frac{5}{2}$, determine a idade de cada uma.

7. Um segmento de 78 cm de comprimento é dividido em duas partes na razão de $\frac{4}{9}$. Determine o comprimento de cada uma das partes.

8. Sabe-se que as casas do braço de um violão diminuem de largura seguindo uma mesma proporção. Se a primeira casa do braço de um violão tem 4 cm de largura e a segunda casa, 3 cm, calcule a largura da quarta casa.

9. Água e tinta estão misturadas na razão de 9 para 5. Sabendo-se que há 81 litros de água na mistura, o volume total em litros é de:

a) 45
b) 81
c) 85
d) 181
e) 126

10. A diferença entre dois números é 65. Sabe-se que o primeiro está para 9 assim como o segundo está para 4. Calcule esses números.

Respostas

1) Resposta “1320 km”.
Solução: 1cm (no mapa) = 22.000.000cm (na realidade)

*SP ---------------------- cidade A ------------------------ cidade B
4cm 6cm

O mínimo de extensão será a da cidade mais longe (6cm)
22.000.000 x 6 = 132.000.000 cm = 1320 km.

Logo, o mínimo de extensão que ela teria corresponde à 1320 km.

2) Resposta “1: 7 000 000”.
Solução: Dados:
Comprimento do desenho: 10 cm
Comprimento no real: 700 km = (700 . 100 000) cm = 70 000 000 cm

$$Escala = \frac{comprimentododesenho}{comprimentoreal} = \frac{10}{70000000} = \frac{1}{7000000} ou 1:7000000$$

A escala de 1: 7 000 000 significa que:
- 1 cm no desenho corresponde a 7 000 000 cm no real;
- 1 cm no desenho corresponde a 70 000 m no real;
- 1 cm no desenho corresponde a 70 km no real.

3) Resposta “8,75 kg/dm³”.
Solução: De acordo com os dados do problema, temos:

$$densidade = \frac{140kg}{16dm^3} = 8,75kg/dm^3$$

Logo, a densidade da estátua é de 8,75 kg/dm³, que lemos como: 8,75 quilogramas por decímetro cúbico.

4) Resposta “75,5 km/h”.

Solução: De acordo com que o enunciado nos oferece, temos:

$$velocidademédia = \frac{453km}{6h} = 75,5km/h$$

Logo, a velocidade média do trem, nesse percurso, foi de 75,5 km/h, que lemos: 75,5 quilômetros por hora.

5) Resposta “4,15 hab./km²

Solução: O problema nos oferece os seguintes dados:

$$Densidadedemográfica = \frac{1156000hab.}{278500km^2} = 4,15hab./km^2$$

6) Resposta “Ângela 20; Vera 8”.

Solução:
A – V = 12 anos
A = 12 + V

$$\frac{A}{V} = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{12+V}{V} = \frac{5}{2}$$

2 (12+V) = 5V
24 + 2V = 5V
5V – 2V = 24
3V = 24
V = $\frac{24}{3}$
V (Vera) = 8
A – 8 = 12
A = 12 + 8
A (Ângela) = 20

7) Resposta "24 cm; 54 cm".

Solução:
x + y = 78 cm
x = 78 - y
$\frac{x}{y} = \frac{4}{9} \rightarrow \frac{78-y}{y} = \frac{4}{9}$
9 (78 - y) = 4y
702 – 9y = 4y
702 = 4y + 9y
13y = 702
y = $\frac{702}{13}$
y = 54cm

x + 54 = 78
x = 78 - 54
x = 24 cm

8) Resposta "$\frac{27}{16}cm$".

Solução: Caso a proporção entre a 2ª e a 1ª casa se mantenha constante nas demais, é só determinar qual é esta proporção existente entre elas: no caso, $\frac{3}{4}$ = 0,75, ou seja, a largura da 2ª casa é 75% a largura da 1ª; Portanto a largura da 3ª casa é (3 . 0,75) = 2,25 cm. Logo, a largura da 4ª casa é de (2,25 . 0,75) = 1,69 cm.

Portanto a sequência seria: (4...3...$\frac{9}{4}$...$\frac{27}{16}$...) e assim por diante.

Onde a razão de proporção é $\frac{3}{4}$... e pode ser representada pela expressão:
T_i . P elevado à (n - 1)

Onde:

T_i = termo inicial, neste caso: 4
P = proporção entre T_i e o seguinte (razão), neste caso: $\frac{3}{4}$
n = número sequencial do termo que se busca, neste caso: 4

Teremos:

(T_i = 4; P = $\frac{3}{4}$; n – 1 = 3)

$4 \cdot \frac{3^3}{4} = \frac{27}{16}$

9) Resposta "E".
Solução:
A = 81 litros

$$\frac{A}{T}=\frac{9}{5}\rightarrow\frac{81}{T}=\frac{9}{5}$$

9T = 405
T = $\frac{405}{9}$

T = 45
A + T = ?
81 + 45 = 126 litros

10) Resposta "117 e 52".
Solução:
x – y = 65
x = 65 + y

$$\frac{x}{y}=\frac{9}{4}\rightarrow\frac{65+y}{y}=\frac{9}{4}$$

9y = 4 (65 + y)
9y = 260 + 4y
9y – 4y = 260
5y = 260
y = $\frac{260}{5}$

y = 52

x – 52 = 65
x = 65 + 52
x = 117

ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE.

Análise Combinatória

Análise combinatória é uma parte da matemática que estuda, ou melhor, calcula o número de possibilidades, e estuda os métodos de contagem que existem em acertar algum número em jogos de azar. Esse tipo de cálculo nasceu no século XVI, pelo matemático italiano Niccollo Fontana (1500-1557), chamado também de Tartaglia. Depois, apareceram os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662). A análise desenvolve métodos que permitem contar, indiretamente, o número de elementos de um conjunto. Por exemplo, se quiser saber quantos números de quatro algarismos são formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 9, é preciso aplicar as propriedades da análise combinatória. Veja quais propriedades existem:

- Princípio fundamental da contagem
- Fatorial
- Arranjos simples
- Permutação simples
- Combinação
- Permutação com elementos repetidos

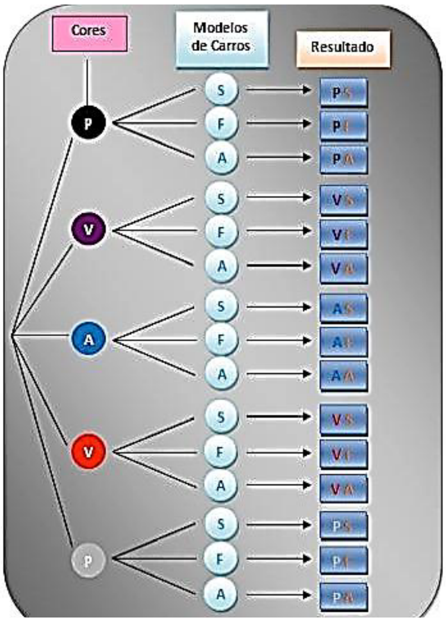
Princípio fundamental da contagem: é o mesmo que a Regra do Produto, um princípio combinatório que indica quantas vezes e as diferentes formas que um acontecimento pode ocorrer. O acontecimento é formado por dois estágios caracterizados como sucessivos e independentes:

- O **primeiro estágio** pode ocorrer de m modos distintos.
- O **segundo estágio** pode ocorrer de n modos distintos.

Desse modo, podemos dizer que o número de formas diferente que pode ocorrer em um acontecimento é igual ao produto **m . n**

Exemplo: Alice decidiu comprar um carro novo, e inicialmente ela quer se decidir qual o modelo e a cor do seu novo veículo. Na concessionária onde Alice foi há 3 tipos de modelos que são do interesse dela: Siena, Fox e Astra, sendo que para cada carro há 5 opções de cores: preto, vinho, azul, vermelho e prata. Qual é o número total de opções que Alice poderá fazer?

Resolução: Segundo o Principio Fundamental da Contagem, Alice tem 3×5 opções para fazer, ou seja,ela poderá optar por 15 carros diferentes. Vamos representar as 15 opções na árvore de possibilidades:



Generalizações: Um acontecimento é formado por k estágios sucessivos e independentes, com $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ possibilidades para cada. O total de maneiras distintas de ocorrer este acontecimento é $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$

Técnicas de contagem: Na Técnica de contagem não importa a ordem.

Considere A = {a; b; c; d; …; j} um conjunto formado por 10 elementos diferentes, e os agrupamentos **ab, ac e ca**”.

ab e ac são agrupamentos sempre distintos, pois se diferenciam pela natureza de um dos elemento.
ac e ca são agrupamentos que podem ser considerados distintos ou não distintos pois se diferenciam somente pela ordem dos elementos.

Quando os elementos de um determinado conjunto A forem algarismos, A = {0, 1, 2, 3, …, 9}, e com estes algarismos pretendemos obter números, neste caso, os agrupamentos de 13 e 31 são considerados distintos, pois indicam números diferentes.

Quando os elementos de um determi $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ e $\overleftrightarrow{A_2A_1}$ A forem pontos, $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \dots, A_9\}$, e com estes pontos pretendemos obter retas, neste caso os agrupamentos são iguais, pois indicam a mesma reta.

Conclusão: Os agrupamentos...

1. Em alguns problemas de contagem, quando os agrupamentos se diferirem pela natureza de pelo menos um de seus elementos, os agrupamentos serão considerados distintos.

ac = ca, neste caso os agrupamentos são denominados combinações.

Pode ocorrer: O conjunto A é formado por pontos e o problema é saber quantas retas esses pontos determinam.

2. Quando se diferir tanto pela natureza quanto pela ordem de seus elementos, os problemas de contagem serão agrupados e considerados distintos.

ac ≠ ca, neste caso os agrupamentos são denominados arranjos.

Pode ocorrer: O conjunto A é formado por algarismos e o problema é contar os números por eles determinados.

Fatorial: Na matemática, o fatorial de um número natural n, representado por n!, é o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n. A notação n! foi introduzida por Christian Kramp em 1808. A função fatorial é normalmente definida por:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \qquad \forall n \in N$$

Por exemplo, 5! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120

Note que esta definição implica em particular que 0! = 1, porque o produto vazio, isto é, o produto de nenhum número é 1. Deve-se prestar atenção neste valor, pois este faz com que a função recursiva (n + 1)! = n! . (n + 1) funcione para n = 0.

Os fatoriais são importantes em análise combinatória. Por exemplo, existem n! caminhos diferentes de arranjar n objetos distintos numa sequência. (Os arranjos são chamados permutações) E o número de opções que podem ser escolhidos é dado pelo coeficiente binomial.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Arranjos simples: são agrupamentos sem repetições em que um grupo se torna diferente do outro pela ordem ou pela natureza dos elementos componentes. Seja A um conjunto com n elementos e k um natural menor ou igual a n. Os arranjos simples k a k dos n elementos de A, são os agrupamentos, de k elementos distintos cada, que diferem entre si ou pela natureza ou pela ordem de seus elementos.

Cálculos do número de arranjos simples:

Na formação de todos os arranjos simples dos n elementos de A, tomados k a k:

n → possibilidades na escolha do 1º elemento.
n - 1 → possibilidades na escolha do 2º elemento, pois um deles já foi usado.
n - 2 → possibilidades na escolha do 3º elemento, pois dois deles já foi usado.
.
.
.
n - (k - 1) → possibilidades na escolha do kº elemento, pois l-1 deles já foi usado.

No Princípio Fundamental da Contagem ($A_{n,\,k}$), o número total de arranjos simples dos n elementos de A (tomados k a k), temos:

$$A_{n,k} = n\,(n - 1) . (n - 2) . ... . (n – k + 1)$$

(é o produto de k fatores)

Multiplicando e dividindo por (n – k)!

$$A_{n,k} = \frac{n(n-1).(n-2).\ldots.(n-k+1).(n-k)!}{(n-k)!}$$

Note que n (n – 1) . (n – 2). ... .(n – k + 1) . (n – k)! = n!

Podemos também escrever $A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$

Permutações: Considere A como um conjunto com n elementos. Os arranjos simples n a n dos elementos de A, são denominados permutações simples de n elementos. De acordo com a definição, as permutações têm os mesmos elementos. São os n elementos de A. As duas permutações diferem entre si somente pela ordem de seus elementos.

Cálculo do número de permutação simples:

O número total de permutações simples de n elementos indicado por Pn, e fazendo k = n na fórmula $A_{n,k}$ = n (n – 1) (n – 2) . … . (n – k + 1), temos:

$P_n = A_{n,n}$ = n (n – 1) (n – 2) . … . (n – n + 1) = (n – 1) (n – 2) . … .1 = n!

Portanto: P_n = n!

Combinações Simples: são agrupamentos formados com os elementos de um conjunto que se diferenciam somente pela natureza de seus elementos. Considere A como um conjunto com n elementos k um natural menor ou igual a n. Os agrupamentos de k elementos distintos cada um, que diferem entre si apenas pela natureza de seus elementos são denominados combinações simples k a k, dos n elementos de A.

Exemplo: Considere A = {a, b, c, d} um conjunto com elementos distintos. Com os elementos de A podemos formar 4 combinações de três elementos cada uma: abc – abd – acd – bcd

Se trocarmos ps 3 elementos de uma delas:

Exemplo: abc, obteremos P_3 = 6 arranjos disdintos.

abc	abd	acd	bcd
acb			
bac			
bca			
cab			
cba			

Se trocarmos os 3 elementos das 4 combinações obtemos todos os arranjos 3 a 3:

abc	abd	acd	bcd
acb	adb	adc	bdc
bac	bad	cad	cbd
bca	bda	cda	cdb
cab	dab	dac	dbc
cba	dba	dca	dcb

(4 combinações) x (6 permutações) = 24 arranjos

Logo: $C_{4,3} \,.\, P_3 = A_{4,3}$

Cálculo do número de combinações simples: O número total de combinações simples dos n elementos de A representados por $C_{n,k}$, tomados k a k, analogicamente ao exemplo apresentado, temos:

a) Trocando os k elementos de uma combinação k a k, obtemos P_k arranjos distintos.
b) Trocando os k elementos das $C_{n,k} \,.\, P_k$ arranjos distintos.

Portanto: $C_{n,k} \,.\, P_k = A_{n,k}$ ou

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k}$$

Lembrando que:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}, P_k = \frac{A_{n,k}}{P_k} e \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k!}$$

Também pode ser escrito assim:

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Arranjos Completos: Arranjos completos de n elementos, de k a k são os arranjos de k elementos não necessariamente distintos. Em vista disso, quando vamos calcular os arranjos completos, deve-se levar em consideração os arranjos com elementos distintos (arranjos simples) e os elementos repetidos. O total de arranjos completos de n elementos, de k a k, é indicado simbolicamente por $A^*_{n,k}$ dado por: $A^*_{n,k} = n^k$

Permutações com elementos repetidos

Considerando:

α elementos iguais a a,
β elementos iguais a b,
γ elementos iguais a c, …,
λ elementos iguais a l,

Totalizando em $\alpha + \beta + \gamma + \ldots \lambda = n$ elementos.

Simbolicamente representado por $P_n^{\alpha}, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ o número de permutações distintas que é possível formarmos com os n elementos:

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\lambda} = \frac{n!}{\alpha!\,.\,\beta!\,.\,\gamma!\,.\,\ldots\,.\,\lambda!}$$

Combinações Completas: Combinações completas de n elementos, de k a k, são combinações de k elementos não necessariamente distintos. Em vista disso, quando vamos calcular as combinações completas devemos levar em consideração as combinações com elementos distintos (combinações simples) e as combinações com elementos repetidos. O total de combinações completas de n elementos, de k a k, indicado por $C^*_{n,k}$

$$C^*_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

Questões

01. Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 7 e 8?

02. Organiza-se um campeonato de futebol com 14 clubes, sendo a disputa feita em dois turnos, para que cada clube enfrente o outro no seu campo e no campo deste. O número total de jogos a serem realizados é:
(A)182
(B) 91
(C)169
(D)196
(E)160

03. Deseja-se criar uma senha para os usuários de um sistema, começando por três letras escolhidas entre as cinco A, B, C, D e E, seguidas de quatro algarismos escolhidos entre 0, 2, 4, 6 e 8. Se entre as letras puder haver repetição, mas se os algarismos forem todos distintos, o número total de senhas possíveis é:
(A) 78.125
(B) 7.200
(C) 15.000
(D) 6.420
(E) 50

04. (UFTM) – João pediu que Cláudia fizesse cartões com todas as permutações da palavra AVIAÇÃO. Cláudia executou a tarefa considerando as letras A e Ã como diferentes, contudo, João queria que elas fossem consideradas como mesma letra. A diferença entre o número de cartões feitos por Cláudia e o número de cartões esperados por João é igual a
(A) 720
(B) 1.680
(C) 2.420
(D) 3.360
(E) 4.320

05. (UNIFESP) – As permutações das letras da palavra PROVA foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de cinco letras em um dicionário. A 73ª palavra nessa lista é
(A) PROVA.
(B) VAPOR.
(C) RAPOV.
(D) ROVAP.
(E) RAOPV.

06. (MACKENZIE) – Numa empresa existem 10 diretores, dos quais 6 estão sob suspeita de corrupção. Para que se analisem as suspeitas, será formada uma comissão especial com 5 diretores, na qual os suspeitos não sejam maioria. O número de possíveis comissões é:
(A) 66
(B) 72
(C) 90
(D) 120
(E) 124

07. (ESPCEX) – A equipe de professores de uma escola possui um banco de questões de matemática composto de 5 questões sobre parábolas, 4 sobre circunferências e 4 sobre retas. De quantas maneiras distintas a equipe pode montar uma prova com 8 questões, sendo 3 de parábolas, 2 de circunferências e 3 de retas?
(A) 80
(B) 96
(C) 240
(D) 640
(E) 1.280

08. Numa clínica hospitalar, as cirurgias são sempre assistidas por 3 dos seus 5 enfermeiros, sendo que, para uma eventualidade qualquer, dois particulares enfermeiros, por serem os mais experientes, nunca são escalados para trabalharem juntos. Sabendo-se que em todos os grupos participa um dos dois enfermeiros mais experientes, quantos grupos distintos de 3 enfermeiros podem ser formados?

(A) 06
(B) 10
(C) 12
(D) 15
(E) 20

09. Seis pessoas serão distribuídas em duas equipes para concorrer a uma gincana. O número de maneiras diferentes de formar duas equipes é

(A) 10
(B) 15
(C) 20
(D) 25
(E) 30

10. Considere os números de quatro algarismos do sistema decimal de numeração. Calcule:

a) quantos são no total;
b) quantos não possuem o algarismo 2;
c) em quantos deles o algarismo 2 aparece ao menos uma vez;
d) quantos têm os algarismos distintos;
e) quantos têm pelo menos dois algarismos iguais.

Resoluções

01. $A_{7,3} \dfrac{7!}{(7-3)!} = \dfrac{7!}{4!} = \dfrac{7.6.5.4!}{4!} = 7.6.5 = 210$

02. O número total de jogos a serem realizados é $A_{14,2}$ = 14 . 13 = 182.

03.

$$\underbrace{\square\,\square\,\square}_{\text{Algarismos}}$$

$$\underbrace{\square\,\square\,\square\,\square}_{\text{Letras}}$$

As três letras poderão ser escolhidas de 5 . 5 . 5 =125 maneiras.
Os quatro algarismos poderão ser escolhidos de 5 . 4 . 3 . 2 = 120 maneiras.
O número total de senhas distintas, portanto, é igual a 125 . 120 = 15.000.

04.
I) O número de cartões feitos por Cláudia foi

$$P_7^2 = \frac{7!}{2!} = 7.6.5.4.3 = 2520$$

II) O número de cartões esperados por João era

$$P_7^3 = \frac{7!}{3!} = 7.6.5.4 = 840$$

Assim, a diferença obtida foi 2.520 – 840 = 1.680

05. Se as permutações das letras da palavra PROVA forem listadas em ordem alfabética, então teremos:
P_4 = 24 que começam por A
P_4 = 24 que começam por O
P_4 = 24 que começam por P

A 73.ª palavra nessa lista é a primeira permutação que começa por R. Ela é RAOPV.

06. Se, do total de 10 diretores, 6 estão sob suspeita de corrupção, 4 não estão. Assim, para formar uma comissão de 5 diretores na qual os suspeitos não sejam maioria, podem ser escolhidos, no máximo, 2 suspeitos. Portanto, o número de possíveis comissões é

$$C_{6,1}.C_{4,4}+C_{6,2}.C_{4,3}=\binom{6}{1}.\binom{4}{4}+\binom{6}{2}.\binom{4}{3}=$$

$$6.1+15.4=6+60=66$$

07. $C_{5,3} . C_{4,2} . C_{4,3} = 10 . 6 . 4 = 240$

08.
I) Existem 5 enfermeiros disponíveis: 2 mais experientes e outros 3.
II) Para formar grupos com 3 enfermeiros, conforme o enunciado, devemos escolher 1 entre os 2 mais experientes e 2 entre os 3 restantes.
III) O número de possibilidades para se escolher 1 entre os 2 mais experientes é

$$C_{2,1}=\binom{2}{1}=2$$

IV) O número de possibilidades para se escolher 2 entre 3 restantes é

$$C_{3,2}=\binom{3}{2}=\frac{3!}{2!.1!}=\frac{3.2!}{2!.1}=3$$

V) Assim, o número total de grupos que podem ser formados é 2 . 3 = 6

09. $\frac{C_{6,3}}{2}=\frac{20}{2}=10$

10.
a) $9 . A^*_{10,3} = 9 . 10^3 = 9 . 10 . 10 . 10 = 9000$
b) $8 . A^*_{9,3} = 8 . 9^3 = 8 . 9 . 9 . 9 = 5832$
c) (a) – (b): 9000 – 5832 = 3168
d) $9 . A_{9,3} = 9 . 9 . 8 . 7 = 4536$
e) (a) – (d): 9000 – 4536 = 4464

Probabilidade

Ponto Amostral, Espaço Amostral e Evento

Em uma tentativa com um número limitado de resultados, todos com chances iguais, devemos considerar:
Ponto Amostral: Corresponde a qualquer um dos resultados possíveis.
Espaço Amostral: Corresponde ao conjunto dos resultados possíveis; será representado por S e o número de elementos do espaço amostra por n(S).
Evento: Corresponde a qualquer subconjunto do espaço amostral; será representado por A e o número de elementos do evento por n(A).

Os conjuntos S e Ø também são subconjuntos de S, portanto são eventos.
Ø = evento impossível.
S = evento certo.

Conceito de Probabilidade

As probabilidades têm a função de mostrar a chance de ocorrência de um evento. A probabilidade de ocorrer um determinado evento A, que é simbolizada por P(A), de um espaço amostral S ≠ Ø, é dada pelo quociente entre o número de elementos A e o número de elemento S. Representando:

$$P(A) = \frac{n(A)}{N(S)}$$

Exemplo: Ao lançar um dado de seis lados, numerados de 1 a 6, e observar o lado virado para cima, temos:
- um espaço amostral, que seria o conjunto S {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
- um evento número par, que seria o conjunto A1 = {2, 4, 6} C S.
- o número de elementos do evento número par é $n(A_1) = 3$.
- a probabilidade do evento número par é 1/2, pois

$$P(A) = \frac{n(A_1)}{N(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Propriedades de um Espaço Amostral Finito e Não Vazio

- Em um evento impossível a probabilidade é igual a zero. Em um evento certo S a probabilidade é igual a 1. Simbolicamente: P(Ø) = 0 e P(S) = 1.
- Se A for um evento qualquer de S, neste caso: 0 ≤ P(A) ≤ 1.
- Se A for o complemento de A em S, neste caso: P(A) = 1 - P(A).

Demonstração das Propriedades

Considerando S como um espaço finito e não vazio, temos:

$$\begin{cases} n(\emptyset) = 0 \rightarrow P(\emptyset) = \dfrac{0}{n(S)} \rightarrow P(\emptyset) = 0 \\ \quad P(S) = \dfrac{n(S)}{n(S)} \rightarrow P(S) = 1 \end{cases}$$

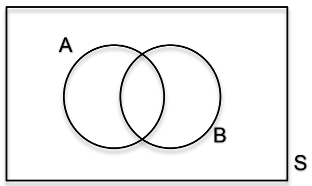
$$\begin{cases} \quad \emptyset \subset A \subset A \leftrightarrow n(\emptyset) \leq n(A) \leq n(S) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \dfrac{n(\emptyset)}{n(S)} \leq \dfrac{n(A)}{n(S)} \leq \dfrac{n(S)}{n(S)} \leftrightarrow 0 \leq P(A) \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \cup \overline{A} = S \\ A \cap \overline{A} = \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} \leftrightarrow n(A) + n(\overline{A}) = n(S) \leftrightarrow \dfrac{n(A)}{n(S)} + \dfrac{n(\overline{A})}{n(S)} = \dfrac{n(S)}{n(S)} \leftrightarrow \\ \quad \leftrightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1 \leftrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A) \end{cases}$$

União de Eventos

Considere A e B como dois eventos de um espaço amostral S, finito e não vazio, temos:

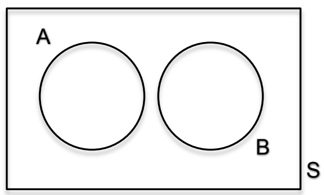


$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

Logo: P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)

Eventos Mutuamente Exclusivos

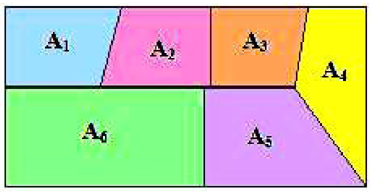


Considerando que A ∩ B, nesse caso A e B serão denominados mutuamente exclusivos. Observe que A ∩ B = 0, portanto: P(A ∪ B) = P(A) + P(B). Quando os eventos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ de S forem, de dois em dois, sempre mutuamente exclusivos, nesse caso temos, analogicamente:

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... + P(A_n)$

Eventos Exaustivos

Quando os eventos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ de S forem, de dois em dois, mutuamente exclusivos, estes serão denominados exaustivos se $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = S$



Então, logo:

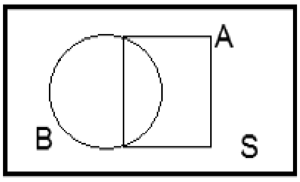
$$\begin{cases} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \\ P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n) = P(S) = 1 \end{cases}$$

Portanto: $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... + P(A_n) = 1$

Probabilidade Condicionada

Considere dois eventos A e B de um espaço amostral S, finito e não vazio. A probabilidade de B condicionada a A é dada pela probabilidade de ocorrência de B sabendo que já ocorreu A. É representada por P(B/A).

Veja: $P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$



Eventos Independentes

Considere dois eventos A e B de um espaço amostral S, finito e não vazio. Estes serão independentes somente quando:

P(A/N) = P(A)   P(B/A) = P(B)

Intersecção de Eventos

Considerando A e B como dois eventos de um espaço amostral S, finito e não vazio, logo:

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{n(A \cap B) + n(S)}{n(A) + n(S)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(A \cap B) + n(S)}{n(B) + n(S)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Assim sendo:

P(A ∩ B) = P(A) . P(B/A)
P(A ∩ B) = P(B) . P(A/B)

Considerando A e B como eventos independentes, logo P(B/A) = P(B), P(A/B) = P(A), sendo assim: P(A ∩ B) = P(A) . P(B). Para saber se os eventos A e B são independentes, podemos utilizar a definição ou calcular a probabilidade de A ∩ B. Veja a representação:

A e B independentes ↔ P(A/B) = P(A) ou
A e B independentes ↔ P(A ∩ B) = P(A) . P(B)

Lei Binominal de Probabilidade

Considere uma experiência sendo realizada diversas vezes, dentro das mesmas condições, de maneira que os resultados de cada experiência sejam independentes. Sendo que, em cada tentativa ocorre, obrigatoriamente, um evento A cuja probabilidade é p ou o complemento A cuja probabilidade é 1 – p.

Problema: Realizando-se a experiência descrita exatamente n vezes, qual é a probabilidade de ocorrer o evento A só k vezes?

Resolução:

- Se num total de n experiências, ocorrer somente k vezes o evento A, nesse caso será necessário ocorrer exatamente n – k vezes o evento A.

- Se a probabilidade de ocorrer o evento A é p e do evento A é 1 – p, nesse caso a probabilidade de ocorrer k vezes o evento A e n – k vezes o evento A, ordenadamente, é:

$$\underbrace{p.p.p\ldots..p}_{k\,fatores}.\underbrace{(1-p).(1-p)\ldots..(1-p)}_{(n-k)fatores}$$
$$= p^k.(1-p)^{n-k}$$

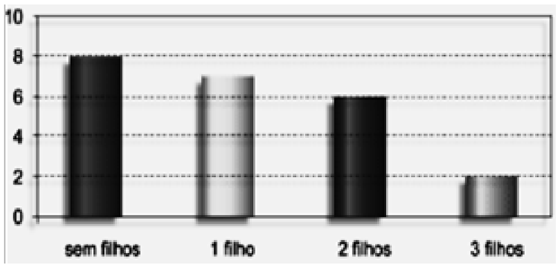
- As k vezes em que ocorre o evento A são quaisquer entre as n vezes possíveis. O número de maneiras de escolher k vezes o evento A é, portanto $C_{n,k}$.
- Sendo assim, há $C_{n,k}$ eventos distintos, mas que possuem a mesma probabilidade $p^k . (1 – p)^{n-k}$, e portanto a probabilidade desejada é: $C_{n,k} . p^k . (1 – p)^{n-k}$

Questões

01. A probabilidade de uma bola branca aparecer ao se retirar uma única bola de uma urna que contém, exatamente, 4 bolas brancas, 3 vermelhas e 5 azuis é:

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{12}$ (E) $\frac{1}{8}$

02. As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico abaixo. Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é



(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{7}{15}$ (D) $\frac{7}{23}$ (E) $\frac{7}{25}$

03. Retirando uma carta de um baralho comum de 52 cartas, qual a probabilidade de se obter um rei ou uma dama?

04. Jogam-se dois dados “honestos” de seis faces, numeradas de 1 a 6, e lê-se o número de cada uma das duas faces voltadas para cima. Calcular a probabilidade de serem obtidos dois números ímpares ou dois números iguais?

05. Uma urna contém 500 bolas, numeradas de 1 a 500. Uma bola dessa urna é escolhida ao acaso. A probabilidade de que seja escolhida uma bola com um número de três algarismos ou múltiplo de 10 é
(A) 10%
(B) 12%
(C) 64%
(D) 82%
(E) 86%

06. Uma urna contém 4 bolas amarelas, 2 brancas e 3 bolas vermelhas. Retirando-se uma bola ao acaso, qual a probabilidade de ela ser amarela ou branca?

07. Duas pessoas A e B atiram num alvo com probabilidade 40% e 30%, respectivamente, de acertar. Nestas condições, a probabilidade de apenas uma delas acertar o alvo é:
(A) 42%
(B) 45%

(C) 46%
(D) 48%
(E) 50%

08. Num espaço amostral, dois eventos independentes A e B são tais que P(A U B) = 0,8 e P(A) = 0,3. Podemos concluir que o valor de P(B) é:
(A) 0,5
(B) 5/7
(C) 0,6
(D) 7/15
(E) 0,7

09. Uma urna contém 6 bolas: duas brancas e quatro pretas. Retiram-se quatro bolas, sempre com reposição de cada bola antes de retirar a seguinte. A probabilidade de só a primeira e a terceira serem brancas é:

(A) $\frac{1}{81}$ (B) $\frac{16}{81}$ (C) $\frac{4}{81}$ (D) $\frac{24}{81}$ (E) $\frac{2}{81}$

10. Uma lanchonete prepara sucos de 3 sabores: laranja, abacaxi e limão. Para fazer um suco de laranja, são utilizadas 3 laranjas e a probabilidade de um cliente pedir esse suco é de 1/3. Se na lanchonete, há 25 laranjas, então a probabilidade de que, para o décimo cliente, não haja mais laranjas suficientes para fazer o suco dessa fruta é:

(A) 1 (B) $\frac{1}{3^9}$ (C) $\frac{1}{3^8}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{2}{3^7}$

Respostas

01. $P(branca) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

02.
A partir da distribuição apresentada no gráfico:
08 mulheres sem filhos.
07 mulheres com 1 filho.
06 mulheres com 2 filhos.
02 mulheres com 3 filhos.

Comoas 23 mulheres têm um total de 25 filhos, a probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é igual a P = 7/25.

03. P(dama ou rei) = P(dama) + P(rei) = $\frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$

04. No lançamento de dois dados de 6 faces, numeradas de 1 a 6, são 36 casos possíveis. Considerando os eventos A (dois números ímpares) e B (dois números iguais), a probabilidade pedida é: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{36} + \frac{6}{36} - \frac{3}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

05. Sendo Ω, o conjunto espaço amostral, temos n(Ω) = 500

A: o número sorteado é formado por 3 algarismos;
A = {100, 101, 102, ..., 499, 500}, n(A) = 401 e p(A) = 401/500

B: o número sorteado é múltiplo de 10;
B = {10, 20, ..., 500}.

Para encontrarmos n(B) recorremos à fórmula do termo geral da P.A., em que
$a_1 = 10$
$a_n = 500$
r = 10
Temos $a_n = a_1 + (n – 1) . r \rightarrow 500 = 10 + (n – 1) . 10 \rightarrow n = 50$

Dessa forma, p(B) = 50/500.

A Ω B: o número tem 3 algarismos e é múltiplo de 10;
A Ω B = {100, 110, ..., 500}.
De $a_n = a_1 + (n – 1) . r$, temos: $500 = 100 + (n – 1) . 10 \rightarrow n = 41$ e $p(A \cap B) = 41/500$

Por fim, p(A.B) = $\frac{401}{500}+\frac{50}{500}-\frac{41}{500}=\frac{41}{50}=82\%$

06.
Sejam A_1, A_2, A_3, A_4 as bolas amarelas, B_1, B_2 as brancas e V_1, V_2, V_3 as vermelhas.
Temos $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4, V_1, V_2, V_3\ B_1, B_2\} \rightarrow n(S) = 9$
A: retirada de bola amarela = $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, n(A) = 4
B: retirada de bola branca = $\{B_1, B_2\}$, n(B) = 2

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)} \rightarrow P(A)=\frac{4}{9} \cong 44{,}4\%$$
$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)} \rightarrow P(B)=\frac{2}{9} \cong 22{,}2\%$$

Como $A \cap B = \emptyset$, A e B são eventos mutuamente exclusivos;
Logo: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{9}+\frac{2}{9}=\frac{6}{9} \rightarrow P(A \cup B)=\frac{2}{9} \cong 67{,}0\%$

07.
Se apenas um deve acertar o alvo, então podem ocorrer os seguintes eventos:
(A) “A” acerta e “B” erra; ou
(B) “A” erra e “B” acerta.

Assim, temos:
P (A B) = P (A) + P (B)
P (A B) = 40% . 70% + 60% . 30%
P (A B) = 0,40 . 0,70 + 0,60 . 0,30
P (A B) = 0,28 + 0,18
P (A B) = 0,46
P (A B) = 46%

08.
Sendo A e B eventos independentes, $P(A \cap B) = P(A) . P(B)$ e como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$. Temos:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A) . P(B)$
0,8 = 0,3 + P(B) – 0,3 . P(B)
0,7 . (PB) = 0,5
P(B) = 5/7.

09. Representando por $P(B_1 \cap P_2 \cap B_3 \cap P_4)$ a probabilidade pedida, temos:
$P(B_1 \cap P_2 \cap B_3 \cap P_4) =$
$P(B_1).P(P_2).P(B_3).P(P_4) =$

$$\frac{2}{6}.\frac{4}{6}.\frac{2}{6}.\frac{4}{6}=\left(\frac{2}{6}\right)^2.\left(\frac{4}{6}\right)^2=\frac{4}{81}$$

10. Supondo que a lanchonete só forneça estes três tipos de sucos e que os nove primeiros clientes foram servidos com apenas um desses sucos, então:

I- Como cada suco de laranja utiliza três laranjas, não é possível fornecer sucos de laranjas para os nove primeiros clientes, pois seriam necessárias 27 laranjas.

II- Para que não haja laranjas suficientes para o próximo cliente, é necessário que, entre os nove primeiros, oito tenham pedido sucos de laranjas, e um deles tenha pedido outro suco.

A probabilidade de isso ocorrer é:

$$C_{9,8}.\left(\frac{1}{3}\right)^8.\left(\frac{2}{3}\right)^1=9.\frac{1}{3^8}.\frac{2}{3}=\frac{2}{3^7}$$

PROGRESSÕES ARITMÉTICA E GEOMÉTRICA.

Progressão Aritmética (PA)

Podemos, no nosso dia a dia, estabelecer diversas sequências como, por exemplo, a sucessão de cidades que temos numa viagem de automóvel entre Brasília e São Paulo ou a sucessão das datas de aniversário dos alunos de uma determinada escola.

Podemos, também, adotar para essas sequências uma ordem numérica, ou seja, adotando a_1 para o 1º termo, a_2 para o 2º termo até a_n para o n-ésimo termo. Dizemos que o termo a_n é também chamado termo geral das sequências, em que *n* é um número natural diferente de zero. Evidentemente, daremos atenção ao estudo das sequências numéricas.

As sequências podem ser finitas, quando apresentam um último termo, ou, infinitas, quando não apresentam um último termo. As sequências infinitas são indicadas por reticências no final.

Exemplos:

- Sequência dos números primos positivos: (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...). Notemos que esta é uma sequência infinita com $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_3 = 5$; $a_4 = 7$; $a_5 = 11$; $a_6 = 13$ etc.
- Sequência dos números ímpares positivos: (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...). Notemos que esta é uma sequência infinita com $a_1 = 1$; $a_2 = 3$; $a_3 = 5$; $a_4 = 7$; $a_5 = 9$; $a_6 = 11$ etc.
- Sequência dos algarismos do sistema decimal de numeração: (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Notemos que esta é uma sequência finita com $a_1 = 0$; $a_2 = 1$; $a_3 = 2$; $a_4 = 3$; $a_5 = 4$; $a_6 = 5$; $a_7 = 6$; $a_8 = 7$; $a_9 = 8$; $a_{10} = 9$.

1. Igualdade

As sequências são apresentadas com os seus termos entre parênteses colocados de forma ordenada. Sucessões que apresentarem os mesmos termos em ordem diferente serão consideradas sucessões diferentes.

Duas sequências só poderão ser consideradas iguais se, e somente se, apresentarem os mesmos termos, na mesma ordem.

Exemplo

A sequência (x, y, z, t) poderá ser considerada igual à sequência (5, 8, 15, 17) se, e somente se, x = 5; y = 8; z = 15; e t = 17.

Notemos que as sequências (0, 1, 2, 3, 4, 5) e (5, 4, 3, 2, 1) são diferentes, pois, embora apresentem os mesmos elementos, eles estão em ordem diferente.

2. Formula Termo Geral

Podemos apresentar uma sequência através de uma determina o valor de cada termo a_n em função do valor de *n*, ou seja, dependendo da posição do termo. Esta formula que determina o valor do termo a_n e chamada formula do termo geral da sucessão.

Exemplos

- Determinar os cincos primeiros termos da sequência cujo termo geral e igual a:

$a_n = n – 2n$,com n € N* ⇨

Teremos:
$A_1 = 1^2 – 2 . 1$ ⇨ $a_1 = 1$
$A_2 = 2^2 – 2 . 2$ ⇨ $a_2 = 0$
$A_3 = 3^2 – 2 . 3$ ⇨ $a_3 = 3$
$A_4 = 4^2 – 4 . 2$ ⇨ $a_4 = 8$
$A_5 = 5^5 – 5 . 2$ ⇨ $a_5 = 15$

- Determinar os cinco primeiros termos da seqüência cujo termo geral é igual a:
$a_n = 3 . n + 2$, com n € N*.
$a_1 = 3 . 1 + 2$ ⇨ $a_1 = 5$
$a_2 = 3 . 2 + 2$ ⇨ $a_2 = 8$
$a_3 = 3 . 3 + 2$ ⇨ $a_3 = 11$
$a_4 = 3 . 4 + 2$ ⇨ $a_4 = 14$
$a_5 = 3 . 5 + 2$ ⇨ $a_5 = 17$

- Determinar os termos a_{12} e a_{23} da sequência cujo termo geral é igual a:
$a_n = 45 – 4 + n$, com n € N*.

Teremos:
$a_{12} = 45 – 4 . 12$ ⇨ $a_{12} = -3$
$a_{23} = 45 – 4 . 23$ ⇨ $a_{23} = -47$

3. Lei de Recorrências

Uma sequência pode ser definida quando oferecemos o valor do primeiro termo e um “caminho” (uma formula) que permite a determinação de cada termo conhecendo-se o seu antecedente. Essa forma de apresentação de uma sucessão é dita de recorrências.

Exemplos

- Escrever os cinco primeiros termos de uma sequência em que:
$a_1 = 3$ e $a_{n+1} = 2 . a_n - 4$, em que n € N*.
Teremos:
$a_1 = 3$
$a_2 = 2 . a_1 – 4$ ⇨ $a_2 = 2 . 3 – 4$ ⇨ $a_2 = 2$
$a_3 = 2 . a_2 – 4$ ⇨ $a_3 = 2 . 2 - 4$ ⇨ $a_3 = 0$
$a_4 = 2 . a_3 – 4$ ⇨ $a_4 = 2 . 0 - 4$ ⇨ $a_4 = -4$
$a_5 = 2 . a_4 – 4$ ⇨ $a_5 = 2 .(-4) – 4$ ⇨ $a_5 = -12$

- Determinar o termo a_5 de uma sequência em que:
$a_1 = 12$ e $a_{n+1} = a_n – 2$, em que n € N*.

$a_2 = a_1 – 2 \rightarrow a_2 = 12 – 2 \rightarrow a_2 = 10$
$a_3 = a_2 – 2 \rightarrow a_3 = 10 – 2 \rightarrow a_3 = 8$
$a_4 = a_3 – 2 \rightarrow a_4 = 8 – 2 \rightarrow a_4 = 6$
$a_5 = a_4 – 2 \rightarrow a_5 = 6 – 2 \rightarrow a_5 = 4$

Observação 1

Devemos observar que a apresentação de uma sequência através do termo geral é mais pratica, visto que podemos determinar um termo no “meio” da sequência sem a necessidade de determinarmos os termos intermediários, como ocorre na apresentação da sequência através da lei de recorrências.

Observação 2

Algumas sequências não podem, pela sua forma “desorganizada” de se apresentarem, ser definidas nem pela lei das recorrências, nem pela formula do termo geral. Um exemplo de uma sequência como esta é a sucessão de números naturais primos que já “destruiu” todas as tentativas de se encontrar uma formula geral para seus termos.

4. Artifícios de Resolução

Em diversas situações, quando fazemos uso de apenas alguns elementos da PA, é possível, através de artifícios de resolução, tornar o procedimento mais simples:
PA com três termos: (a – r), a e (a + r), razão igual a r.
PA com quatro termos: (a – 3r), (a – r), (a + r) e (a + 3r), razão igual a 2r.
PA com cinco termos: (a – 2r), (a – r), a, (a + r) e (a + 2r), razão igual a r.

Exemplo

- Determinar os números a, b e c cuja soma é, igual a 15, o produto é igual a 105 e formam uma PA crescente.
Teremos:
Fazendo a = (b – r) e c = (b + r) e sendo a + b + c = 15, teremos:
$(b – r) + b + (b + r) = 15 \rightarrow 3b = 15 \rightarrow b = 5$.

Assim, um dos números, o termo médio da PA, já é conhecido.
Dessa forma a sequência passa a ser:
(5 – r), 5 e (5 + r), cujo produto é igual a 105, ou seja:

$(5 – r) .5 . (5 + r) = 105 \rightarrow 5^2 – r^2 = 21$
$r^2 = 4 \rightarrow 2$ ou $r = -2$.
Sendo a PA crescente, ficaremos apenas com r= 2.
Finalmente, teremos a = 3, b = 5 e c= 7.

5. Propriedades

P_1: para três termos consecutivos de uma PA, o termo médio é a media aritmética dos outros dois termos.

Exemplo

Vamos considerar três termos consecutivos de uma PA: a_{n-1}, a_n e a_{n+1}. Podemos afirmar que:
I - $a_n = a_{n-1} + r$
II - $a_n = a_{n+1} – r$

Fazendo I + II, obteremos:
$2a_n = a_{n-1} + r + a_n +1 - r$
$2a_n = a_{n-1+} a_n + 1$

Logo: $a_n = a_n\text{-}1 + \dfrac{an+1}{2}$

Portanto, para três termos consecutivos de uma PA o termo médio é a media aritmética dos outros dois termos.

6. Termos Equidistantes dos Extremos

Numa sequência finita, dizemos que dois termos são equidistantes dos extremos se a quantidade de termos que precederem o primeiro deles for igual à quantidade de termos que sucederem ao outro termo. Assim, na sucessão:
$(a_1, a_2, a_3, a_4,..., a_p,..., a_k,..., a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, temos:

a_2 e a_{n-1} são termos equidistantes dos extremos;
a_3 e a_{n-2} são termos equidistantes dos extremos;
a_4 a_{n-3} são termos equidistantes dos extremos.

Notemos que sempre que dois termos são equidistantes dos extremos, a soma dos seus índices é igual ao valor de n + 1. Assim sendo, podemos generalizar que, se os termos a_p e a_k são equidistantes dos extremos, então: p + k = n+1.

Propriedade

Numa PA com *n* termos, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma destes extremos.

Exemplo

Sejam, numa PA de n termos, a_p e a_k termos equidistantes dos extremos.
Teremos, então:
I - $a_p = a_1 + (p – 1) . r \Rightarrow ap = a_1 + p . r – r$
II - $a_k = a_1 + (k – 1) . r \Rightarrow ak = a_1 + k . r – r$
Fazendo I + II, teremos:
$A_p + a_k = a_1 + p . r – r + a_1 + k . r – r$
$A_p + a_k = a_1 + a_1 + (p + k – 1 – 1) . r$

Considerando que p + k = n + 1, ficamos com:
$a_p + a_k = a_1 + a_1 + (n + 1 – 1) . r$
$a_p + a_k = a_1 + a_1 + (n – 1) . r$
$a_p + a_k = a_1 + a_n$

Portanto numa PA com *n* termos, em que *n* é um numero ímpar, o termo médios (a_m) é a media aritmética dos extremos.

$$A_m = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

7. Soma dos *n* Primeiros Termos de uma PA

Vamos considerar a PA (a_1, a_2, a_3,…,a_{n-2}, a_{n-1},a_n) e representar por Sn a soma dos seus n termos, ou seja:
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$
(igualdade I)

Podemos escrever também:
$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$
(igualdade II)

Somando-se I e II, temos:
$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$

Considerando que todas estas parcelas, colocadas entre parênteses, são formadas por termos equidistantes dos extremos e que a soma destes termos é igual à soma dos extremos, temos:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) +$
$+\ldots + (a_1 + a_n) \rightarrow 2S_n = (a_1 + a_n) . n$
E, assim, finalmente:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Exemplo

- Achar a soma dos sessenta primeiros termos da PA (2 , 5, 8,...).

Dados: $a_1 = 2$
$r = 5 – 2 = 3$

Calculo de a_{60}:
$A_{60} = a_1 + 59r \rightarrow a_{60} = 2 + 59 . 3$
$a_{60} = 2 + 177$
$a_{60} = 179$

Calculo da soma:

$$Sn = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \rightarrow S60 = \frac{(a_1 + a_{60}).60}{2}$$

$$S_{60} = \frac{(2+179).60}{2}$$
$S_{60} = 5430$

Resposta: 5430

Progressão Geométrica (PG)

PG é uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é o anterior multiplicado por uma constante q chamada razão da PG.
$a_{n+1} = a_n . q$
Com a_1 conhecido e n € N*

Exemplos
- (3, 6, 12, 24, 48,...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = 3$ e razão q = 2.

- (-36, -18, -9, $\frac{-9}{2}$, $\frac{-9}{4}$,...) é uma PG de primeiro termo a_1= -36 e razão q = $\frac{1}{2}$.
- (15, 5, $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{9}$,...) é uma PG de primeiro termo a_1 = 15 e razão q = $\frac{1}{3}$.
- (-2, -6, -18, -54, ...) é uma PG de primeiro termo a_1 = -2 e razão q = 3.
- (1, -3, 9, -27, 81, -243, ...) é uma PG de primeiro termo a_1 = 1 e razão q = -3.
- (5, 5, 5, 5, 5, 5,...) é uma PG de primeiro termo a_1 = 5 e razão q = 1.
- (7, 0, 0, 0, 0, 0,...) é uma PG de primeiro termo a_1 = 7 e razão q = 0.
- (0, 0, 0, 0, 0, 0,...) é uma PG de primeiro termo a_1 = 0 e razão q qualquer.

Observação: Para determinar a razão de uma PG, basta efetuar o quociente entre dois termos consecutivos: o posterior dividido pelo anterior.

$$q = \frac{a_n + 1}{a_n} (a_n \neq 0)$$

Classificação

As classificações geométricas são classificadas assim:

- Crescente: Quando cada termo é maior que o anterior. Isto ocorre quando $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou quando $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.
- Decrescente: Quando cada termo é menor que o anterior. Isto ocorre quando $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou quando $a_1 < 0$ e $q > 1$.

- Alternante: Quando cada termo apresenta sinal contrario ao do anterior. Isto ocorre quando $q < 0$.
- Constante: Quando todos os termos são iguais. Isto ocorre quando $q = 1$. Uma PG constante é também uma PA de razão $r = 0$. A PG constante é também chamada de PG estacionaria.
- Singular: Quando zero é um dos seus termos. Isto ocorre quando $a_1 = 0$ ou $q = 0$.

Formula do Termo Geral

A definição de PG está sendo apresentada por meio de uma lei de recorrências, e nos já aprendemos nos módulos anteriores que a formula do termo geral é mais pratica. Por isso, estaremos, neste item, procurando estabelecer, a partir da lei de recorrências, a fórmula do termo geral da progressão geométrica.

Vamos considerar uma PG de primeiro termo a1 e razão q. Assim, teremos:

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$

$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$

$a_5 = a_4 \cdot q = a_1 \cdot q^4$

. .

. .

. .

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Exemplos

- Numa PG de primeiro termo $a_1 = 2$ e razão $q = 3$, temos o termo geral na igual a:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

Assim, se quisermos determinar o termo a_5 desta PG, faremos:

$A_5 = 2 \cdot 3^4 \rightarrow a^5 = 162$

- Numa PG de termo $a_1 = 15$ e razão q = , temos o termo geral na igual a:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow a_n = 15 \cdot {}^{n-1}$

Assim, se quisermos determinar o termo a_6 desta PG, faremos:

$A_6 = 15 \cdot \frac{(1).5}{2} \rightarrow a_6 = \frac{5}{81}$

- Numa PG de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão = -3 temos o termo geral na igual a:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow a_n = 1 \cdot (-3)^{n-1}$

Assim, se quisermos determinar o termo a_4 desta PG, faremos:

$A_4 = 1 \cdot (-3)^3 \rightarrow a_4 = -27$

Artifícios de Resolução

Em diversas situações, quando fazemos uso de apenas alguns elementos da PG, é possível através de alguns elementos de resolução, tornar o procedimento mais simples.

PG com três termos:

$\frac{a}{q}$ a; aq

PG com quatro termos:

$\frac{a}{q^3}; \frac{q}{q}$; aq; aq^3

PG com cinco termos:

$\frac{a}{q^2}; \frac{q}{q}$; a; aq; aq^2

Exemplo

Considere uma PG crescente formada de três números. Determine esta PG sabendo que a soma destes números é 13 e o produto é 27.

Vamos considerar a PG em questão formada pelos termos a, b e c, onde a = e c = b . q.

Assim,

$\frac{b}{q}$. b . bq = 27 → b^3 = 27 → b = 3.

Temos:

$\frac{3}{q}$ + 3 +3q = 13 → $3q^2$ – 10q + 3 = 0 ⇨

q = 3 ou q = $\frac{1}{3}$

Sendo a PG crescente, consideramos apenas q = 3. E, assim, a nossa PG é dada pelos números: 1, 3 e 9.

Propriedades

P_1**:** Para três termos consecutivos de uma PG, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos outros dois.

Exemplo

Vamos considerar três termos consecutivos de uma PG: a_{n-1}, a_n e a_{n+1}. Podemos afirmar que:

I – $a_n = a_{n-1} . q$ e

II – $a_n = \frac{a_{n+1}}{q}$

Fazendo I . II, obteremos:

$(a_n)^2 = (a_{n-1} . q). (\frac{a_{n+1}}{q})$ ⇨ $(a_n)^2 = a_{n-1} . a_{n+1}$

Logo: $(a_n)^2 = a_{n-1} . a_{n+1}$

Observação: Se a PG for positive, o termo médio será a media geométrica dos outros dois:

$a_n = \sqrt{a_{n-1} . a_{n+1}}$

P_2**:** Numa PG, com n termos, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto destes extremos.

Exemplo

Sejam, numa PG de n termos, a_p e a_k dois termos equidistantes dos extremos.

Teremos, então:

I – $a_p = a_1 . q^{p-1}$

II – $a_k = a_1 . q^{k-1}$

Multiplicando I por II, ficaremos com:

$a_p . a_k = a_1 . q^{p-1} . a_1 . q^{k-1}$

$a_p . a_k = a_1 . a_1 . q^{p-1+k-1}$

Considerando que p + k = n + 1, ficamos com:
$a_p \cdot a_k = a_1 \cdot a_n$
Portanto, numa PG, com n termos, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto destes extremos.
Observação**:** Numa PG positiva, com *n* termos, onde *n* é um numero impar, o termo médio (a_m) é a media geométrica dos extremos ou de 2 termos equidistantes dos extremos.

$a_m = \sqrt{a_1 \cdot a_n}$

Soma dos termos de uma PG

Soma dos *n* Primeiros Termos de uma PG

Vamos considerar a PG (a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n), com q diferente de 1 e representar por Sn a soma dos seus n termos, ou seja:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...+a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$
(igualdade I)

Podemos escrever, multiplicando-se, membro a membro, a igualdade (I) por q:

$q \cdot S_n = q \cdot a_1 + q \cdot a_2 + q \cdot a_3 + ...+ q \cdot a_{n-2} +$
$+ q \cdot a_{n-1} + q \cdot a_n$

Utilizando a formula do termo geral da PG, ou seja, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, teremos:
$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_{n} {}_{+a1} \cdot q^n$
(igualdade II)

Subtraindo-se a equação I da equação II, teremos:

$q \cdot S_n – S_n = a_1 \cdot q^n – a_1 \rightarrow s_n \cdot (q – 1) =$
$= a_1 \cdot (q^n – 1)$

E assim: $S_n = \dfrac{a_1.(q^n-1)}{q-1}$

Se tivéssemos efetuado a subtração das equações em ordem inversa, a fórmula da soma dos termos da PG ficaria:

$S_n = \dfrac{a_1.(1+q^n)}{1-q}$

Evidentemente que por qualquer um dos “caminhos” o resultado final é o mesmo. É somente uma questão de forma de apresentação.

Observação: Para q = 1, teremos $s_n = n \cdot a_1$

Série Convergente – PG Convergente

Dada a sequência (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n), chamamos de serie a sequência S_1, S_2, S_3, S_4, S_5,..., S_{n-2}, s_{n-1}, s_n,tal que:

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$
.
.
.

$S_{n-2} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_{n-2}$
$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_{n-2} + a_{n-1}$
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

Vamos observar como exemplo, numa PG com primeiro termo $a_1 = 4$ e razão q = , à série que ela vai gerar.
Os termos que vão determinar a progressão geométrica são: (4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}$ ...)

E, portanto, a série correspondente será:

$S_1 = 4$
$S_2 = 4 + 2 = 6$
$S_3 = 4 + 2 + 1 = 7$

$$S_4 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$$

$$S_5 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{31}{4} = 7,75$$

$$S_6 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{63}{8} = 7,875$$

$$S_7 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{127}{16} = 7,9375$$

$$S_8 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{255}{32} = 7,96875$$

$$S_9 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{511}{64} = 7,984375$$

$$S_{10} = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} = \frac{1023}{128} = 7,9921875$$

Devemos notar que a cada novo termo calculado, na PG, o seu valor numérico cada vez mais se aproxima de zero. Dizemos que esta é uma progressão geométrica convergente.

Por outro lado, na serie, é cada vez menor a parcela que se acrescenta. Desta forma, o ultimo termos da serie vai tendendo a um valor que parece ser o limite para a série em estudo. No exemplo numérico, estudado anteriormente, nota-se claramente que este valor limite é o numero 8.

Bem, vamos dar a esta discussão um caráter matemático.

É claro que, para a PG ser convergente, é necessário que cada termo seja, um valor absoluto, inferior ao anterior a ele. Assim, temos que:

PG convergente → $| q | < 1$
ou
PG convergente → $-1 < 1$

Resta estabelecermos o limite da serie, que é o S_n para quando *n* tende ao infinito, ou seja, estabelecermos a soma dos infinitos termos da PG convergente.

Vamos partir da soma dos *n* primeiros termos da PG:

$$S_n = \frac{a_1.(1+q^n)}{1-q}$$

Estando q entre os números -1e 1 e, sendo n um expoente que tende a um valor muito grande, pois estamos somando os infinitos termos desta PG, é fácil deduzir que q^n vai apresentando um valor cada vez mais próximo de zero. Para valores extremamente grandes de *n* não constitui erro considerar que q^n é igual a zero. E, assim, teremos:

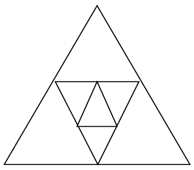
$$S = \frac{a^1}{1-q}$$

Observação: Quando a PG é não singular (sequência com termos não nulos) e a razão q é de tal forma que q | ≥ 1, a serie é divergente. Séries divergentes não apresentam soma finita.

Exemplos

- A medida do lado de um triângulo equilátero é 10. Unindo-se os pontos médios de seus lados, obtém-se o segundo triângulo equilátero. Unindo-se os pontos médios dos lados deste novo triangulo equilátero, obtém-se um terceiro, e assim por diante, indefinidamente. Calcule a soma dos perímetros de todos esses triângulos.

Solução:



Temos: perímetro do 1º triangulo = 30
perímetro do 2º triangulo = 15
perímetro do 3º triangulo = $\frac{15}{2}$

Logo, devemos calcular a soma dos termos da PG infinita 30, 15, $\frac{15}{2}$,... na qual a_1 = 30 e q =. $\frac{1}{2}$

$$S = \underline{a}_1 \rightarrow s = \frac{30}{1-q} = \frac{30}{1-\frac{1}{2}} = 60.$$

Exercícios

1. Uma progressão aritmética e uma progressão geométrica têm, ambas, o primeiro termo igual a 4, sendo que os seus terceiros termos são estritamente positivos e coincidem. Sabe-se ainda que o segundo termo da progressão aritmética excede o segundo termo da progressão geométrica em 2. Então, o terceiro termo das progressões é:
a) 10
b) 12
c) 14
d) 16
e) 18

2. O valor de n que torna a sequência (2 + 3n; –5n; 1 – 4n) uma progressão aritmética pertence ao intervalo:
a) [– 2, –1]
b) [– 1, 0]
c) [0, 1]
d) [1, 2]
e) [2, 3]

3. Os termos da sequência (10; 8; 11; 9; 12; 10; 13; …) obedecem a uma lei de formação. Se a_n, em que *n* pertence a N*, é o termo de ordem *n* dessa sequência, então $a_{30} + a_{55}$ é igual a:
a) 58

b) 59
c) 60
d) 61
e) 62

4. A soma dos elementos da sequência numérica infinita (3; 0,9; 0,09; 0,009; …) é:
a) 3,1
b) 3,9
c) 3,99
d) 3, 999
e) 4

5. A soma dos vinte primeiros termos de uma progressão aritmética é -15. A soma do sexto termo dessa PA., com o décimo quinto termo, vale:
a) 3,0
b) 1,0
c) 1,5
d) -1,5
e) -3,0

6. Os números que expressam os ângulos de um quadrilátero, estão em progressão geométrica de razão 2. Um desses ângulos mede:
a) 28°
b) 32°
c) 36°
d) 48°
e) 50°

7. Sabe-se que S = 9 + 99 + 999 + 9999 + ... + 999...9 onde a última parcela contém n algarismos. Nestas condições, o valor de 10n+1 - 9(S + n) é:
a) 1
b) 10
c) 100
d) -1
e) -10

8. Se a soma dos três primeiros termos de uma PG decrescente é 39 e o seu produto é 729, então sendo a, b e c os três primeiros termos, pede-se calcular o valor de a2 + b2 + c2.

9. O limite da expressão $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}}}$ onde x é positivo, quando o número de radicais aumenta indefinidamente é igual a:
a) 1/x
b) x
c) 2x
d) n.x
e) 1978x

10. Quantos números inteiros existem, de 1000 a 10000, que não são divisíveis nem por 5 nem por 7 ?

Respostas

1) Resposta “D”.
Solução:
Sejam (a_1, a_2, a_3,…) a PA de r e (g_1, g_2, g_3, …) a PG de razão *q*. Temos como condições iniciais:
1 - $a_1 = g_1 = 4$
2 - $a_3 > 0$, $g_3 > 0$ e $a_3 = g_3$
3 - $a_2 = g_2 + 2$

Reescrevendo (2) e (3) utilizando as fórmulas gerais dos termos de uma PA e de uma PG e (1) obtemos o seguinte sistema de equações:
4 - $a_3 = a_1 + 2r$ e $g_3 = g_1 . q^{2} \rightarrow 4 + 2r = 4q^2$
5 - $a_2 = a_1 + r$ e $g_2 = g_1 . q \rightarrow 4 + r = 4q + 2$

Expressando, a partir da equação (5), o valor de *r* em função de ***q*** e substituindo ***r*** em (4) vem:
5 - $r = 4q + 2 – 4 \rightarrow r = 4q – 2$
4 - $4 + 2(4q – 2) = 4q^2 \rightarrow 4 + 8q – 4 = 4q^2 \rightarrow 4q^2 – 8q = 0$
$\rightarrow q(4q – 8) = 0 \rightarrow q = 0$ ou $4q – 8 = 0 \rightarrow q = 2$

Como g3 > 0, *q* não pode ser zero e então q = 2. Para obter *r* basta substituir *q* na equação (5):
$r = 4q – 2 \rightarrow r = 8 – 2 = 6$
Para concluir calculamos a_3 e g_3:
$a_3 = a_1 + 2r \rightarrow a_3 = 4 + 12 = 16$
$g_3 = g_1.q^2 \rightarrow g_3 = 4.4 = 16$

2) Resposta “B”.
Solução: Para que a sequência se torne uma PA de razão *r* é necessário que seus três termos satisfaçam as igualdades (aplicação da definição de PA):
(1) $-5n = 2 + 3n + r$
(2) $1 – 4n = -5n + r$

Determinando o valor de **r** em (1) e substituindo em (2):
(1) $\rightarrow r = -5n – 2 – 3n = -8n – 2$
(2) $\rightarrow 1 – 4n = -5n – 8n – 2 \rightarrow 1 – 4n = -13n – 2$
$\rightarrow 13n – 4n = -2 – 1 \rightarrow 9n = -3 \rightarrow n = -3/9 = -1/3$

Ou seja, $-1 < n < 0$ e, portanto, a resposta correta é a b.

3) Resposta “B”.
Solução: Primeiro, observe que os termos ímpares da sequência é uma PA de razão 1 e primeiro termo 10 - (10; 11; 12; 13; …). Da mesma forma os termos pares é uma PA de razão 1 e primeiro termo igual a 8 - (8; 9; 10; 11; …).
Assim, as duas PA têm como termo geral o seguinte formato:
(1) ai = a1 + (i - 1).1 = a1 + i – 1

Para determinar $a_{30} + a_{55}$ precisamos estabelecer a regra geral de formação da sequência, que está intrinsecamente relacionada às duas progressões da seguinte forma:
- Se n (índice da sucessão) é impar temos que n = 2i - 1, ou seja, i = (n + 1)/2;
- Se n é par temos n = 2i ou i = n/2.
Daqui e de (1) obtemos que:
$a_n = 10 + [(n + 1)/2] - 1$ se n é ímpar
$a_n = 8 + (n/2) - 1$ se n é par
Logo:
$a_{30} = 8 + (30/2) - 1 = 8 + 15 - 1 = 22$ e
$a_{55} = 10 + [(55 + 1)/2] - 1 = 37$

E, portanto:
$a_{30} + a_{55} = 22 + 37 = 59$.

4) Resposta “E”.
Solução: Sejam S as somas dos elementos da sequência e S_1 a soma da PG infinita (0,9; 0,09; 0,009;…) de razão q = 10 - 1 = 0,1. Assim:
$S = 3 + S_1$
Como $-1 < q < 1$ podemos aplicar a fórmula da soma de uma PG infinita para obter S_1:
$S_1 = 0{,}9/(1 - 0{,}1) = 0{,}9/0{,}9 = 1 \rightarrow S = 3 + 1 = 4$

5) Resposta “D”.
Solução: Aplicando a fórmula da soma dos 20 primeiros termos da PA:
$S_{20} = 20(a_1 + a_{20})/2 = -15$
Na PA finita de 20 termos, o sexto e o décimo quinto são equidistantes dos extremos, uma vez que:
15 + 6 = 20 + 1 = 21
E, portanto:
$a_6 + a_{15} = a_1 + a_{20}$

Substituindo este valor na primeira igualdade vem:
$20(a_6 + a_{15})/2 = -15 \rightarrow 10(a6 + a15) = -15 \rightarrow a_6 + a_{15} = -15/10 = -1{,}5$.

6) Resposta “D”.
Solução: Seja x o menor ângulo interno do quadrilátero em questão. Como os ângulos estão em Progressão Geométrica de razão 2, podemos escrever a PG de 4 termos:
(**x, 2x, 4x, 8x**).
Ora, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero vale 360º.

Logo,
x + 2x + 4x + 8x = 360º
15.x = 360º

Portanto, **x = 24º**. Os ângulos do quadrilátero são, portanto: **24º, 48º, 96º e 192º.**
O problema pede um dos ângulos. Logo, alternativa **D**.
7) Resposta “B”.
Solução: Observe que podemos escrever a soma S como:
$S = (10 – 1) + (100 – 1) + (1000 – 1) + (10000 – 1) + ... + (10^n – 1)$
$S = (10 – 1) + (10^2 – 1) + (10^3 – 1) + (10^4 – 1) + ... + (10^n – 1)$
Como existem n parcelas, observe que o número (– 1) é somado n vezes, resultando em n(-1) = **- n.**

Logo, poderemos escrever:
S = (10 + 102 + 103 + 104 + ... + 10n) – n

Vamos calcular a soma $S_n = 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + ... + 10^n$, que é uma PG de primeiro termo $a_1 = 10$, razão q = 10 e último termo $a_n = 10^n$.
Teremos:
$S_n = (a_n.q – a_1) / (q –1) = (10^n . 10 – 10) / (10 – 1) = (10^{n+1} – 10) / 9$

Substituindo em S, vem:
$S = [(10^{n+1} – 10) / 9] – n$

Deseja-se calcular o valor de $10^{n+1} - 9(S + n)$
Temos que $S + n = [(10^{n+1} – 10) / 9] – n + n = (10^{n+1} – 10) / 9$

Substituindo o valor de S + n encontrado acima, fica:

$10^{n+1} – 9(S + n) = 10^{n+1} – 9(10^{n+1} – 10) / 9 = 10^{n+1} – (10^{n+1} – 10) =$ **10.**

8) Resposta "819".
Solução: Sendo q a razão da PG, poderemos escrever a sua forma genérica: (x/q, x, xq).
Como o produto dos 3 termos vale 729, vem:
x/q . x . xq = 729 de onde concluímos que: $x^3 = 729 = 3^6 = 3^3 . 3^3 = 9^3$, logo, x = 9.

Portanto a PG é do tipo: 9/q, 9, 9q
É dado que a soma dos 3 termos vale 39, logo:
9/q + 9 + 9q = 39 de onde vem: 9/q + 9q – 30 = 0

Multiplicando ambos os membros por q, fica: $9 + 9q^2 – 30q = 0$
Dividindo por 3 e ordenando, fica: $3q^2 – 10q + 3 = 0$, que é uma equação do segundo grau.
Resolvendo a equação do segundo grau acima encontraremos q = 3 ou q = 1/3.
Como é dito que a PG é decrescente, devemos considerar apenas o valor
q = 1/3, já que para q = 3, a PG seria crescente.

Portanto, a PG é: 9/q, 9, 9q, ou substituindo o valor de q vem: 27, 9, 3.
O problema pede a soma dos quadrados, logo:
$a^2 + b^2 + c^2 = 27^2 + 9^2 + 3^2 = 729 + 81 + 9 =$ **819.**

9) Resposta "B".
Solução: Observe que a expressão dada pode ser escrita como:

$x^{1/2}. x^{1/4} . x^{1/8} . x^{1/16} . ... = x^{1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ...}$
O expoente é a soma dos termos de uma PG infinita de primeiro termo a_1 = 1 /2 e razão q = 1 /2.

Logo, a soma valerá:
$S = a_1 / (1 – q) = (1 /2) / 1 – (1 /2) = 1$
Então, $x^{1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ...} = x^1 =$ **x**

10) Resposta "6171".
Solução: Dados:
M(5) = 1000, 1005, ..., 9995, 10000.
M(7) = 1001, 1008, ..., 9996.
M(35) = 1015, 1050, ... , 9975.
M(1) = 1, 2, ..., 10000.

Para múltiplos de 5, temos: a_n = a1+ (n-1).r → 10000 = 1000 + (n - 1). 5 → n = 9005/5 → n = 1801.
Para múltiplos de 7, temos: a_n = a1+ (n-1).r → 9996 = 1001 + (n - 1). 7 → n = 9002/7 → n = 1286.
Para múltiplos de 35, temos: a_n = a1 + (n - 1).r → 9975 = 1015 + (n - 1).35 → n = 8995/35 → n = 257.
Para múltiplos de 1, temos: a_n = a1 = (n -1).r → 10000 = 1000 + (n - 1).1 → n = 9001.

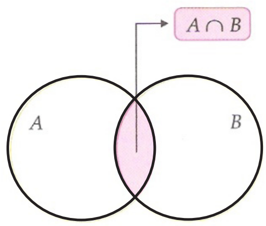
Sabemos que os múltiplos de 35 são múltiplos comuns de 5 e 7, isto é, eles aparecem no conjunto dos múltiplos de 5 e no conjunto dos múltiplos de 7 (daí adicionarmos uma vez tal conjunto de múltiplos).

Total = M(1) - M(5) - M(7) + M(35).
Total = 9001 - 1801 - 1286 + 257 = 6171

CONJUNTOS; AS RELAÇÕES DE PERTINÊNCIA, INCLUSÃO E IGUALDADE; OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS, UNIÃO, INTERSEÇÃO E DIFERENÇA. COMPARAÇÕES.

Número de Elementos da União e da Intersecção de Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, como vemos na figura abaixo, podemos estabelecer uma relação entre os respectivos números de elementos.

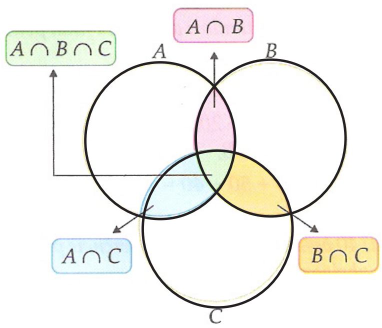


$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Note que ao subtrairmos os elementos comuns ($n(A \cap B)$) evitamos que eles sejam contados duas vezes.

Observações:

a) Se os conjuntos A e B forem disjuntos ou se mesmo um deles estiver contido no outro, ainda assim a relação dada será verdadeira.
b) Podemos ampliar a relação do número de elementos para três ou mais conjuntos com a mesma eficiência.



$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) -$$
$$- N(A \cap C) - n(B \cap C) + N(A \cap B \cap C)$$

Observe o diagrama e comprove.

Conjuntos

Conjuntos Primitivos

Os conceitos de conjunto, elemento e pertinência são primitivos, ou seja, não são definidos.
Um cacho de bananas, um cardume de peixes ou uma porção de livros são todos exemplos de conjuntos.
Conjuntos, como usualmente são concebidos, têm elementos. Um elemento de um conjunto pode ser uma banana, um peixe ou

um livro. Convém frisar que um conjunto pode ele mesmo ser elemento de algum outro conjunto.
Por exemplo, uma reta é um conjunto de pontos; um feixe de retas é um conjunto onde cada elemento (reta) é também conjunto (de pontos).
Em geral indicaremos os conjuntos pelas letras maiúsculas A, B, C, ..., X, e os elementos pelas letras minúsculas a, b, c, ..., x, y, ..., embora não exista essa obrigatoriedade.
Em Geometria, por exemplo, os pontos são indicados por letras maiúsculas e as retas (que são conjuntos de pontos) por letras minúsculas.
Outro conceito fundamental é o de relação de pertinência que nos dá um relacionamento entre um elemento e um conjunto.

Se x é um elemento de um conjunto A, escreveremos $x \in A$
Lê-se: x é elemento de A ou x pertence a A.

Se x não é um elemento de um conjunto A, escreveremos $x \notin A$
Lê-se x não é elemento de A ou x não pertence a A.

Como representar um conjunto

Pela designação de seus elementos: Escrevemos os elementos entre chaves, separando os por vírgula.

Exemplos

- {3, 6, 7, 8} indica o conjunto formado pelos elementos 3, 6, 7 e 8.
{a; b; m} indica o conjunto constituído pelos elementos a, b e m.
{1; {2; 3}; {3}} indica o conjunto cujos elementos são 1, {2; 3} e {3}.

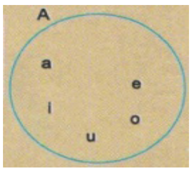
Pela propriedade de seus elementos: Conhecida uma propriedade P que caracteriza os elementos de um conjunto A, este fica bem determinado.
P termo "propriedade P que caracteriza os elementos de um conjunto A" significa que, dado um elemento x qualquer temos:
Assim sendo, o conjunto dos elementos x que possuem a propriedade P é0 indicado por:
{x, tal que x tem a propriedade P}

Uma vez que "tal que" pode ser denotado por t.q. ou | ou ainda :, podemos indicar o mesmo conjunto por:
{x, t . q . x tem a propriedade P} ou, ainda,
{x : x tem a propriedade P}

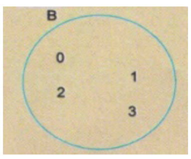
Exemplos

- { x, t.q. x é vogal } é o mesmo que {a, e, i, o, u}
- {x | x é um número natural menor que 4 } é o mesmo que {0, 1, 2, 3}
- {x : x em um número inteiro e x2 = x } é o mesmo que {0, 1}

Pelo diagrama de Venn-Euler: O diagrama de Venn-Euler consiste em representar o conjunto através de um "círculo" de tal forma que seus elementos e somente eles estejam no "círculo".
Exemplos
- Se A = {a, e, i, o, u} então



- Se B = {0, 1, 2, 3 }, então



Conjunto Vazio

Conjunto vazio é aquele que não possui elementos. Representa-se pela letra do alfabeto norueguês $\varnothing$ ou, simplesmente { }.
Simbolicamente: $\forall x, x \notin \varnothing$

Exemplos

- $\varnothing = \{x : x$ é um número inteiro e $3x = 1\}$
- $\varnothing = \{x \mid x$ é um número natural e $3 - x = 4\}$
- $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$

Subconjunto

Sejam A e B dois conjuntos. Se todo elemento de A é também elemento de B, dizemos que A é um subconjunto de B ou A é a parte de B ou, ainda, A está contido em B e indicamos por $A \subset B$.
Simbolicamente: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in \forall \Rightarrow x \in B)$

Portanto, $A \not\subset B$ significa que A não é um subconjunto de B ou A não é parte de B ou, ainda, A não está contido em B.
Por outro lado, $A \not\subset B$ se, e somente se, existe, pelo menos, um elemento de A que não é elemento de B.
Simbolicamente: $A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A$ e $x \notin B)$

Exemplos

- $\{2 . 4\} \subset \{2, 3, 4\}$, pois $2 \in \{2, 3, 4\}$ e $4 \in \{2, 3, 4\}$
- $\{2, 3, 4\} \not\subset \{2, 4\}$, pois $3 \notin \{2, 4\}$
- $\{5, 6\} \subset \{5, 6\}$, pois $5 \in \{5, 6\}$ e $6 \in \{5, 6\}$

Inclusão e pertinência

A definição de subconjunto estabelece um relacionamento entre dois conjuntos e recebe o nome de relação de inclusão ($\subset$).
A relação de pertinência ($\in$) estabelece um relacionamento entre um elemento e um conjunto e, portanto, é diferente da relação de inclusão.
Simbolicamente
$x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subset A$
$x \notin A \Leftrightarrow \{x\} \not\subset A$

Igualdade

Sejam A e B dois conjuntos. Dizemos que A é igual a B e indicamos por A = B se, e somente se, A é subconjunto de B e B é também subconjunto de A.
Simbolicamente: $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ e $B \subset A$
Demonstrar que dois conjuntos A e B são iguais equivale, segundo a definição, a demonstrar que $A \subset B$ e $B \subset A$.
Segue da definição que dois conjuntos são iguais se, e somente se, possuem os mesmos elementos.
Portanto $A \neq B$ significa que A é diferente de B. Portanto $A \neq B$ se, e somente se, A não é subconjunto de B ou B não é subconjunto de A. Simbolicamente: $A \neq B \Leftrightarrow A \not\subset B$ ou $B \not\subset A$

Exemplos

- $\{2,4\} = \{4,2\}$, pois $\{2,4\} \subset \{4,2\}$ e $\{4,2\} \subset \{2,4\}$. Isto nos mostra que a ordem dos elementos de um conjunto não deve ser levada em consideração. Em outras palavras, um conjunto fica determinado pelos elementos que o mesmo possui e não pela ordem em que esses elementos são descritos.
- $\{2,2,2,4\} = \{2,4\}$, pois $\{2,2,2,4\} \subset \{2,4\}$ e $\{2,4\} \subset \{2,2,2,4\}$. Isto nos mostra que a repetição de elementos é desnecessária.
- $\{a,a\} = \{a\}$
- $\{a,b = \{a\} \Leftrightarrow a= b$
- $\{1,2\} = \{x,y\} \Leftrightarrow (x = 1$ e $y = 2)$ ou $(x = 2$ e $y = 1)$

Conjunto das partes

Dado um conjunto A podemos construir um novo conjunto formado por todos os subconjuntos (partes) de A. Esse novo conjunto chama-se conjunto dos subconjuntos (ou das partes) de A e é indicado por P(A).
Simbolicamente: $P(A)=\{X \mid X \subset A\}$ ou $X \subset P(A) \Leftrightarrow X \subset A$

Exemplos

a) = {2, 4, 6}
P(A) = {∅, {2}, {4}, {6}, {2,4}, {2,6}, {4,6}, A}

b) = {3,5}
P(B) = {∅, {3}, {5}, B}

c) = {8}
P(C) = {∅, C}

d) = ∅
P(D) = {∅}

Propriedades

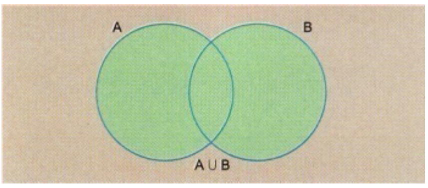
Seja A um conjunto qualquer e ∅ o conjunto vazio. Valem as seguintes propriedades

$Y \neq (Y)$	$Y \notin Y$	$Y \subset Y$	$Y \in \{Y\}$
$Y \subset A \Leftrightarrow Y \in P(A)$		$A \subset A \Leftrightarrow A \in P(A)$	

Se A tem *n* elementos então *A* possui 2^n subconjuntos e, portanto, P(A) possui 2^n elementos.

União de conjuntos

A união (ou reunião) dos conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B. Representa-se por **A ∪ B.**
Simbolicamente: $A \cup B = \{X \mid X \in A \text{ ou } X \in B\}$

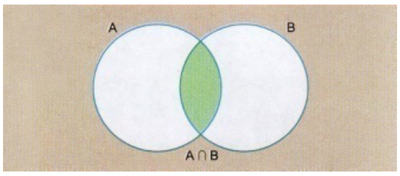


Exemplos

- {2,3} ∪ {4,5,6}={2,3,4,5,6}
- {2,3,4} ∪ {3,4,5}={2,3,4,5}
- {2,3} ∪ {1,2,3,4}={1,2,3,4}
- {a,b} ∪ Y {a,b}

Intersecção de conjuntos

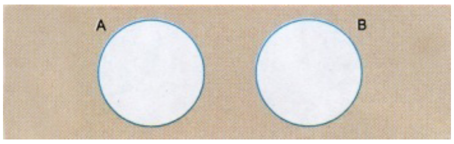
A intersecção dos conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem, simultaneamente, a A e a B. Representa-se por A ∩ B. Simbolicamente: $A \cap B = \{X \mid X \in A \text{ ou } X \in B\}$



Exemplos

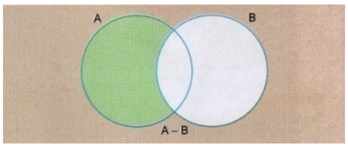
- {2,3,4} ∩ {3,5}={3}
- {1,2,3} ∩ {2,3,4}={2,3}
- {2,3} ∩ {1,2,3,5}={2,3}
- {2,4} ∩ {3,5,7}= Y

Observação: Se A ∩ B= Y, dizemos que A e B são conjuntos disjuntos.



Subtração

A diferença entre os conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A e não pertencem a B. Representa-se por A – B. Simbolicamente: A – B = {X | X ∈ A e X ∉ B}



O conjunto A – B é também chamado de conjunto complementar de B em relação a A, representado por C_AB.
Simbolicamente: C_AB = A - B{X | X ∈ A e X ∉ B}

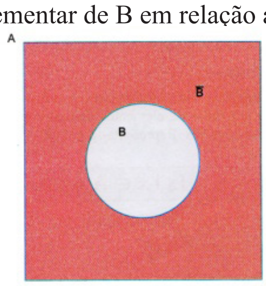
Exemplos

- A = {0, 1, 2, 3} e B = {0, 2}
  C_AB = A – B = {1,3} e C_BA = B – A = ϕ

- A = {1, 2, 3} e B = {2, 3, 4}
  C_AB = A – B = {1} e C_BA = B – A = {14}

- A = {0, 2, 4} e B = {1 ,3 ,5}
  C_AB = A – B = {0,2,4} e C_BA = B – A = {1,3,5}

Observações: Alguns autores preferem utilizar o conceito de completar de B em relação a A somente nos casos em que B ⊂ A.
- Se B ⊂ A representa-se por $\overline{B}$ o conjunto complementar de B em relação a A. Simbolicamente: B ⊂ A ⇔ $\overline{B}$ = A – B = C_AB`



Exemplos

Seja S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Então:
a) A = {2, 3, 4} ⇒ $\overline{A}$ = {0, 1, 5, 6}
b) B = {3, 4, 5, 6 } ⇒ $\overline{B}$ = {0, 1, 2}
c) C = Y ⇒ $\overline{C}$ = S

Número de elementos de um conjunto

Sendo X um conjunto com um número finito de elementos, representa-se por n(X) o número de elementos de X. Sendo, ainda, A e B dois conjuntos quaisquer, com número finito de elementos temos:
n(A∪B)=n(A)+n(B)-n(A∩B)
A∩B= Y ⇒n(A∪B)=n(A)+n(B)
n(A -B)=n(A)-n(A∩B)
B⊂A⇒n(A-B)=n(A)-n(B)

Exercícios

1. Assinale a alternativa a Falsa:
a) Y ⊂ {3}
b) (3) ⊂ {3}
c) Y ∉ {3}
d) 3 ∈ {3}
e) 3 = {3}

2. Seja o conjunto A = {1, 2, 3, {3}, {4}, {2, 5}}. Classifique as afirmações em verdadeiras (V) ou falsas (F).
a) 2 ∈ A
b) (2) ∈ A
c) 3 ∈ A
d) (3) ∈ A
e) 4 ∈ A

3. Um conjunto A possui 5 elementos . Quantos subconjuntos (partes) possuem o conjunto A?

4. Sabendo-se que um conjunto A possui 1024 subconjuntos, quantos elementos possui o conjunto A?

5. 12 - Dados os conjuntos A = {1; 3; 4; 6}, B = {3; 4 ; 5; 7} e C = {4; 5; 6; 8 } pede-se:
a) A ∪ B
b) A ∩ B
c) A ∪ C
d) A ∩ C

6. Considere os conjuntos: S = {1,2,3,4,5} e *A*={2,4}. Determine o conjunto X de tal forma que: X∩A= Y e X∪A = S.

7. Seja A e X conjuntos. Sabendo-se que A⊂X e A∪X={2,3,4}, determine o conjunto X.

8. Dados três conjuntos finitos A, B e C, determinar o número de elementos de A ∩ (B∪C), sabendo-se:
a) A∩B tem 26 elementos
b) A∩C tem 10 elementos
c) A∩B∩C tem 7 elementos.

9. Numa escola mista existem 42 meninas, 24 crianças ruivas, 13 meninos não ruivos e 9 meninas ruivas. Pergunta-se
a) quantas crianças existem na escola?
b) quantas crianças são meninas ou são ruivas?

10. USP-SP - Depois de n dias de férias, um estudante observa que:
- Choveu 7 vezes, de manhã ou à tarde;
- Quando chove de manhã não chove à tarde;
- Houve 5 tardes sem chuva;
- Houve 6 manhãs sem chuva.

Podemos afirmar então que n é igual a:
a)7
b)8
c)9
d)10
e)11

Respostas

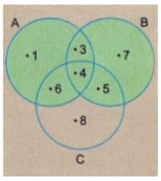
1) Resposta "E".
Solução: A ligação entre elemento e conjunto é estabelecida pela relação de pertinência ($\in$) e não pela relação de igualdade (=). Assim sendo, $3\in\{3\}$ e $3\neq\{3\}$. De um modo geral, $x \neq \{x\}$, $\forall x$.

2) Solução:
a) Verdadeira, pois 2 é elemento de A.
b) Falsa, pois {2} não é elemento de A.
c) Verdadeira, pois 3 é elemento de A.
d) Verdadeira, pois {3} é elemento de A.
e) Falsa, pois 4 não é elemento de A.

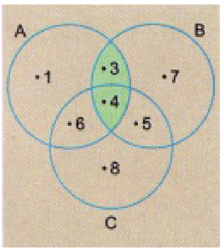
3) Resposta "32".
Solução: Lembrando que: "Se A possui k elementos, então A possui 2^k subconjuntos", concluímos que o conjunto A, de 5 elementos, tem $2^5 = 32$ subconjuntos.

4) Resposta "10".
Solução: Se k é o número de elementos do conjunto A, então 2^k é o número de subconjuntos de A.
Assim sendo: $2^k=1024 \Leftrightarrow 2^k=2^{10} \Leftrightarrow k=10$.

5) Solução: Representando os conjuntos A, B e C através do diagrama de Venn-Euler, temos:
a)

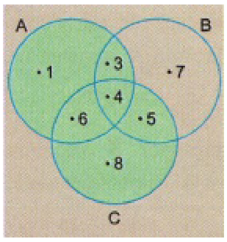


$A\cup B=\{1,3,4,5,6,7\}$
b)



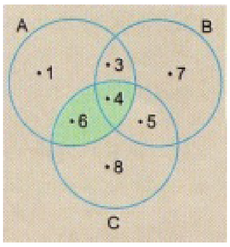
$A\cap B=\{3,4\}$

c)



$A \cup C = \{1,3,4,5,6,8\}$

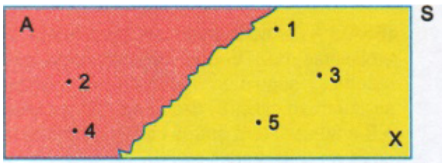
d)



$A \cap C = \{4,6\}$

6) Resposta "X={1;3;5}".

Solução: Como $X \cap \mathbf{A} = Y$ e $X \cup A = S$, então $X = \overline{A} = S - A = C_s A \Rightarrow X = \{1;3;5\}$

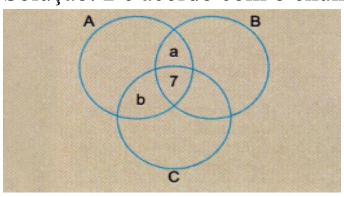


7) Resposta "X = {2;3;4}

Solução: Como $A \subset X$, então $A \cup X = X = \{2;3;4\}$.

8) Resposta "A".

Solução: De acordo com o enunciado, temos:

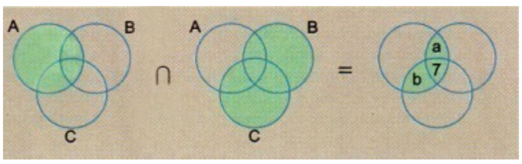


$n(A \cap B \cap C) = 7$

$n(A \cap B) = a + 7 = 26 \Rightarrow a = 19$

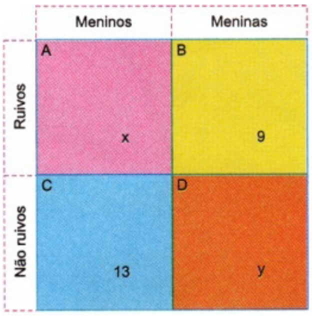
$n(A \cap C) = b + 7 = 10 \Rightarrow b = 3$

Assim sendo:



e portanto $n[A \cap (B \cup C)] = a + 7 + b = 19 + 7 + 3$
Logo: $n[A \cap (B \cup C)] = 29$.

9) Solução:



Sejam:
A o conjunto dos meninos ruivos e n(A) = x
B o conjunto das meninas ruivas e n(B) = 9
C o conjunto dos meninos não-ruivos e n(C) = 13
D o conjunto das meninas não-ruivas e n(D) = y
De acordo com o enunciado temos:

$$\begin{cases} n(B \cup D) = n(B) + n(D) = 9 + Y = 42 \Leftrightarrow y = 23 \\ n(A \cup D) = n(A) + n(B) = x + 9 = 24 \Leftrightarrow x = 15 \end{cases}$$

Assim sendo
a) O número total de crianças da escola é:

$$n(A \cup B \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) = 15 + 9 + 13 + 33 = 70$$

b) O número de crianças que são meninas ou são ruivas é:

$$n[(A \cup B) \cup (B \cup D)] = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) = 15 + 9 + 33 = 57$$

10) Resposta "C".
Solução:

Seja M, o conjunto dos dias que choveu pela manhã e T o conjunto dos dias que choveu à tarde. Chamando de M' e T' os conjuntos complementares de M e T respectivamente, temos:

n(T') = 5 (cinco tardes sem chuva)
n(M') = 6 (seis manhãs sem chuva)
n(M Ç T) = 0 (pois quando chove pela manhã, não chove à tarde)
Daí:
n(M È T) = n(M) + n(T) – n(M Ç T)
7 = n(M) + n(T) – 0
Podemos escrever também:
n(M\`) + n(T\`) = 5 + 6 = 11

Temos então o seguinte sistema:
n(M\`) + n(T\`) = 11
n(M) + N(T) = 7

Somando membro a membro as duas igualdades, vem:

$n(M) + n(M`) + n(T) + n(T`) = 11 + 7 = 18$

Observe que $n(M) + n(M`)$ = total dos dias de férias = n
Analogamente, $n(T) + n(T`)$ = total dos dias de férias = n

Portanto, substituindo vem:
$n + n = 18$
$2n = 18$
$n = 9$

Logo, foram nove dias de férias, ou seja, n = 9 dias.

ANOTAÇÕES