Université Cheikh Anta DIOP
Ecole Supérieure Polytechnique
Departement Genie Informatique
MASTER I

Anne scolaire : 2025-2024

Prof : M. O SARR

Tel : +221 33 824 05 40
E-mail : esp@esp.sn

E-mail :grdcool@gmail.com

I. INTRODUCTION

Lorsqu'on connait la position d'une particule à intervalle de temps réguliers et que l'on souhaite obtenir sa vitesse instantanée .On doit effectuer la dérivée de la position connue seulement en quelques points (discontinues) d'où la nécessité d'une approximation de la dérivée première. On parle de dérivée numérique.
De même l'accélération de cette particule nécessite approximation de la dérivée seconde.

Par contre si on connait la vitesse de la particule à intervalle de temps réguliers et que l'on souhaite connaitre la position on doit intégrer sur un ensemble discontinue d'où la nécessité d'une approximation de l'intégral. On parle d'intégration numérique.

Dans le présent chapitre le problème consiste à chercher une approximation des dérivées et $\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$ d'une fonction f connue en $x_i, i \in \{0; 1; \dots; n\}$ points.

Si la fonction f est connue en $x_i, i \in \{0; 1; \dots; n\}$ alors il existe un polynôme de degré n $P_n(x)$ tel que :

$$f(x) = P_n(x) + E(x)$$

Où

$$E(x) = \frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\varepsilon(x)), \; x_0 \leq \varepsilon \leq x_n$$

Est l'erreur d'interpolation

II. DERIVATION

Sachant que $f(x) = P_n(x) + E(x)$:

$$\Rightarrow f'(x) = P'_n(x) + E'(x)$$

$$\Rightarrow f''(x) = P''_n(x) + E''(x)$$

$$\Rightarrow f'''(x) = P'''_n(x) + E'''(x)$$

.

.

.

$$\Rightarrow f^{(k)}(x) = P^{(k)}{}_n(x) + E^{(k)}(x), \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Donc pour estimer la dérivée de la fonction f il suffit de dériver le polynôme d'interpolation et l'erreur commise est la dérivée de l'erreur d'interpolation.

Remarque

L'erreur d'interpolation est d'ordre $(n+1)$ de même que l'erreur commise en estimant la dérivée est d'ordre $(n+1)$.

1. Dérivée première
   a. Approximation de l'erreur

$$E(x) = \frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(\varepsilon(x))$$

$$\Rightarrow E'(x) = f^{(n+2)}(\varepsilon(x)) \frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!} + \left(\frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!}\right)' f^{(n+1)}(\varepsilon(x))$$

$$= f^{(n+2)}(\varepsilon(x)) \frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!} + \left(\frac{\prod_{i=0, i\neq 0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!} + \frac{\prod_{i=0, i\neq 1}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!} + \frac{\prod_{i=0, i\neq 2}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!} + \cdots + \frac{\prod_{i=0, i\neq n}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!}\right)\left(\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon(x))}{(n+1)!}\right)$$

$$= f^{(n+2)}(\varepsilon(x)) \frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!} + \sum_{i=0}^{n} \prod_{j=0, i\neq j}^{n} (x - x_j)\left(\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon(x))}{(n+1)!}\right)$$

× Pour $x = x_i$

$$E'(x_i) = \prod_{j=0, i\neq j}^{n} (x_i - x_j)\left(\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon_i)}{(n+1)!}\right)$$

× Pour $x_{i+1} - x_i = h \Leftrightarrow x_i = x_j + (i-j)h \Leftrightarrow x_i - x_j = (i-j)h$

$$E'(x_i) = \prod_{j=0, i\neq j}^{n} (i-j)\left(h^n \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon_i)}{(n+1)!}\right)$$

b. Définition

Pour tout $x_i, i \in \{0; 1; \dots; n\}$,

$$f'(x_i) = P'_n(x_i) + E'(x_i)$$

Où $P'_n(x)$ est la dérivée **du polynôme d'interpolation** $P_n(x)$.
L'estimation de $P'_n(x_i)$ dépend de la méthode d'interpolation et du degré du polynôme d'interpolation.

⇒ **Estimation d'ordre un des dérivées premières**

Soient $(x_0, f(x_0))$ **et** $(x_1, f(x_1))$

$$P_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

$$P'_1(x) = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = k$$

$$P'_1(x_0) = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$E'(x_0) = -\frac{h}{2} f''(\varepsilon_0)$$

$$f'(x_0) = P'_1(x_0) + E'(x_0)$$

D'où

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - h\frac{f''(\varepsilon_0)}{2} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - h\frac{f''(\varepsilon_0)}{2}$$

$$P'_1(x_1) = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$E'(x_1) = \frac{h}{2} f''(\varepsilon_1)$$

$$f'(x_1) = P'_1(x_1) + E'(x_1)$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + h\frac{f^2(\varepsilon_1)}{2} = \frac{f(x_1) - f(x_1 - h)}{h} + h\frac{f''(\varepsilon_1)}{2}$$

⇒ **Estimation d'ordre deux des dérivées premières**

Soient $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ **et** $(x_2, f(x_2))$

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$P'_2(x) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2](2x - (x_0 + x_1))$$

$$P'_2(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}(x_0 - x_1)$$

$$= \frac{4f(x_1) - 3f(x_0) - f(x_2)}{2h}$$

$$= \frac{-f(x_0 + 2h) + 4f(x_0 + h) - 3f(x_0)}{2h}$$

D'où

$$f'(x_0) = \frac{-f(x_0 + 2h) + 4f(x_0 + h) - 3f(x_0)}{2h} + h^2 \frac{f'''(\varepsilon_0)}{3}$$

De même

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1 - h)}{2h} - h^2 \frac{f'''(\varepsilon_1)}{6}$$

$$f'(x_2) = \frac{3f(x_2) - 4f(x_2 - h) + f(x_2 - 2h)}{2h} + h^2 \frac{f'''(\varepsilon_2)}{3}$$

c. Expressions des approximations des dérivées premières

On peut convenir de trouver les dérivées numériques premières pour tout élément x seulement dans ce cas on ne peut pas donner l'expression de l'erreur, on ne détermine que son ordre.

× **Dérivée première d'ordre un**

Formules	Appellations
$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$ $f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	Dérivée progressive d'ordre un Ou Différence finie avant d'ordre un
$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$	Dérivée régressive d'ordre un Ou Différence finie arrière d'ordre un

$f'(x) \approx \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$	

× <u>**Dérivée première d'ordre deux**</u>

Formules	Appellations
$f'(x) = \dfrac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} + O(h^2)$ $f'(x) \approx \dfrac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h}$	Dérivée progressive d'ordre deux Ou Différence finie avant d'ordre deux
$f'(x) = \dfrac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)}{2h} + O(h^2)$ $f'(x) \approx \dfrac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)}{2h}$	Dérivée régressive d'ordre deux Ou Différence finie arrière d'ordre deux
$f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = O(h^2)$ $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$	Dérivée centrée d'ordre deux Ou Différence finie centrée d'ordre deux

<u>**Exemple**</u>

Comparons les valeurs approchées et la valeur exacte.

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$ et $f'(0) = 1$

Pour $h = 0,1$

	Dérivée d'ordre un	Dérivée d'ordre deux
Dérivée progressive	$\dfrac{e^{0,1} - e^0}{0,1} = 1,0517$ $E \approx 0,0517 \approx 5.10^{-2}$	$\dfrac{-3e^0 + 4e^{0,1} - e^{0,2}}{0,2} = 0,9964$ $E \approx 0,0036 \approx 4.10^{-3}$
Dérivée régressive	$\dfrac{e^0 - e^{-0,1}}{0,1} = 0,9516$ $E \approx 0,0484 \approx 5.10^{-2}$	$\dfrac{e^{-0,2} - 4e^{-0,1} + 3e^0}{0,2} = 0,9969$ $E \approx 0,0031 \approx 3.10^{-3}$
Dérivée centrée		$\dfrac{e^{0,1} - e^{-0,1}}{0,2} = 1,0017$ $E \approx 0,0017 \approx 2.10^{-3}$

Les dérivées d'ordre deux font les meilleures approximations.

Pour $h = 0,05$

	Dérivée d'ordre un	Dérivée d'ordre deux
Dérivée progressive	$\frac{e^{0,05} - e^{0}}{0,05} = 1,0254$ $E \approx 0,0254 \approx 3.10^{-2}$	$\frac{-3e^{0} + 4e^{0,1} - e^{0,2}}{0,2} = 0,9991$ $E \approx 0,0008 \approx 10^{-3}$
Dérivée régressive	$\frac{e^{0} - e^{-0,05}}{0,05} = 0,9754$ $E \approx 0,0246 \approx 2.10^{-2}$	$\frac{e^{-0,2} - 4e^{-0,1} + 3e^{0}}{0,2} = 0,9992$ $E \approx 0,0008 \approx 10^{-3}$
Dérivée centrée		$\frac{e^{0,1} - e^{-0,1}}{0,2} = 1,0002$ $E \approx 0,0004 \approx 10^{-3}$

Les dérivées d'ordre deux font les meilleures approximations.
Plus h est petit mieux sont les approximations.

2. Dérivée seconde

a. Définition

$$f''(x) = P''_2(x) + E''(x)$$

NB

Pour les dérivées supérieures comme la dérivée seconde on procède de la même manière sauf que dériver plusieurs fois l'erreur s'avère très couteux raison pour laquelle

On utilisera la formule de TAYLOR pour estimer l'erreur.

× Rappel : Formule de TAYLOR

$$f(x) = P_n(x) + E(x)$$

Où

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Et

$$E(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\varepsilon);\ x_0 \leq \varepsilon \leq x$$

b. Estimation de la dérivée seconde et de l'erreur

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$\Rightarrow P''_2(x) = 2\, f[x_0, x_1, x_2] = 2\,\frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2}$$

$$f''(x) \approx P''_2(x)$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0) - 2f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h)}{h^2}$$

Pour $x = x_0 + 2h$

$$f(x_0 + 2h) = f(x_0) + \frac{2h}{1!} f'(x_0) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{(2h)^4}{4!} f^{(4)}(x_0) + \cdots$$

Pour $x = x_0 + h$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x_0) + \cdots$$

$$\frac{f(x_0) - 2f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h)}{h^2} = f''(x_0) - h(-f'''(x_0) - h^3 f^{(4)}(x_0))$$

$$= f''(x_0) - O(h)$$

$$\Rightarrow f''(x_0) = \frac{f(x_0) - 2f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h)}{h^2} + O(h)$$

D

C'est une dérivée seconde progressive d'ordre un.

$$f''(x_2) \approx \frac{f(x_2 - 2h) - 2f(x_2 - h) + f(x_2)}{h^2}$$

En posant $x = x_2 - h$ et $x = x_2 - 2h$.On obtient

On obtient :

$$f''(x_2) = \frac{f(x_2 - 2h) - 2f(x_2 - h) + f(x_2)}{h^2}\ O(h)$$

C'est une dérivée seconde régressive d'ordre un.

$$f''(x_1) \approx \frac{f(x_1 - h) - 2f(x_1) + f(x_1 + h)}{h^2}$$

En posant $x = x_1 + h$ et $x = x_1 - h$.On obtient

On obtient :

$$f''(x_1) = \frac{f(x_1 - h) - 2f(x_1) + f(x_1 + h)}{h^2} + O(h^2)$$

C'est une dérivée seconde centrée d'ordre deux.

c. Expressions des approximations des dérivées secondes

Formules	Appellations
$f''(x) = \frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{h^2} + O(h)$ $f''(x) \approx \frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{h^2}$	Dérivée seconde progressive d'ordre un
$f''(x) = \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} + O(h)$ $f''(x) \approx \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2}$	Dérivée seconde régressive d'ordre un
$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} = O(h^2)$ $f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$	Dérivée second centrée d'ordre deux

d. Instabilité numérique

Le tableau ci-dessous représente des estimations d'ordre deux de la dérivée première et seconde de la fonction définie par :$f(x) = e^x$.

On sait que $f'(0) = f''(0) = 1$.

Instabilité numérique		
h	$f'(x) \simeq \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$	$f''(x) \simeq \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$
10^{-02}	1,000 016 666 749 992 12	1,000 008 333 360 558 05
10^{-03}	1,000 000 166 666 681 34	1,000 000 083 406 504 81
10^{-04}	1,000 000 001 666 889 74	1,000 000 005 024 759 28
10^{-05}	1,000 000 000 012 102 32	0,999 998 972 517 346 26
10^{-06}	0,999 999 999 973 244 40	0,999 977 878 279 878 16
10^{-07}	0,999 999 999 473 643 93	0,999 200 722 162 640 44
10^{-08}	0,999 999 993 922 528 80	0,000 000 000 000 000 00
10^{-09}	1,000 000 027 229 219 55	111,022 302 462 515 597
10^{-10}	1,000 000 082 740 370 78	0,000 000 000 000 000 00
10^{-11}	1,000 000 082 740 370 78	0,000 000 000 000 000 00
10^{-13}	0,999 755 833 674 953 35	−11 102 230 246,251 562
10^{-15}	1,054 711 873 393 898 71	111 022 302 462 515,641
10^{-17}	0,000 000 000 000 000 00	0,000 000 000 000 000 00

Remarque

⇒ **On constate que plus la valeur de h diminue plus les approximations se précisent jusqu'à une certaine valeur où elles commencent à dégénérer.**

⇒ **Cette instabilité est plus visible pour $f''(x)$.**

⇒ **Le choix de h petit est capital pour avoir une meilleure approximation par conte cette valeur ne doit pas est très petite pour éviter la dégénérescence.**