POLITEKNIK ELEKTRONIKA NEGERI SURABAYA
DEPARTEMEN TEKNIK INFORMATIKA DAN KOMPUTER
PROGRAM STUDI TEKNIK INFORMATIKA

Interpolasi

Metode Numerik

Zulhaydar Fairozal Akbar

zfakbar@pens.ac.id

2017

TOPIK

- Pengenalan Interpolasi
- Jenis Interpolasi
- Interpolasi Linier
- Interpolasi Kuadrat
- Intepolasi Lagrange
- Interpolasi Newton

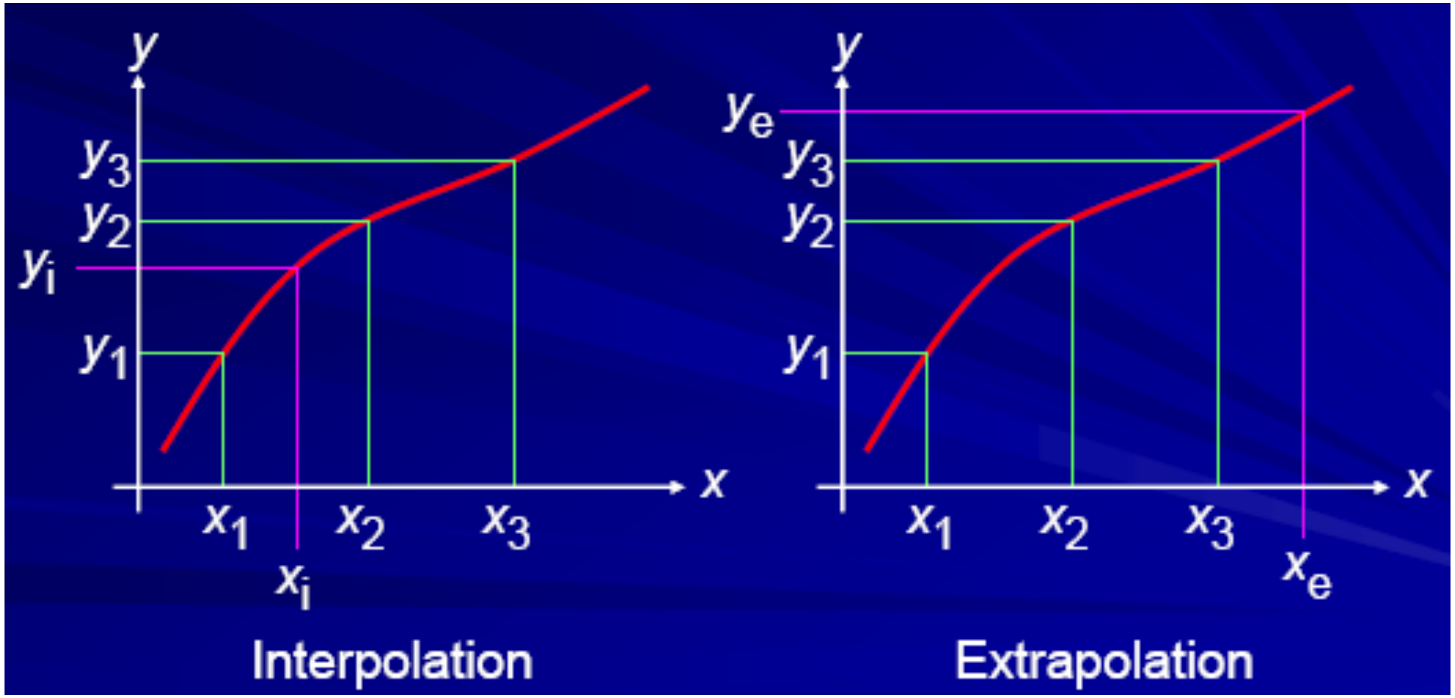
Pengenalan

- Teknik mencari harga suatu fungsi pada suatu titik diantara 2 titik yang nilai fungsi pada ke-2 titik tersebut sudah diketahui.
- Cara menentukan harga fungsi f dititik $x^* \in [x_0, x_n]$ dengan menggunakan informasi dari seluruh atau sebagian titik-titik yang diketahui $(x_0, x_1, \dots, x_n)$

x	x_0	x_1	x_2	…….	x_n
f(x)	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…….	$f(x_n)$

Interpolasi vs Ekstrapolasi

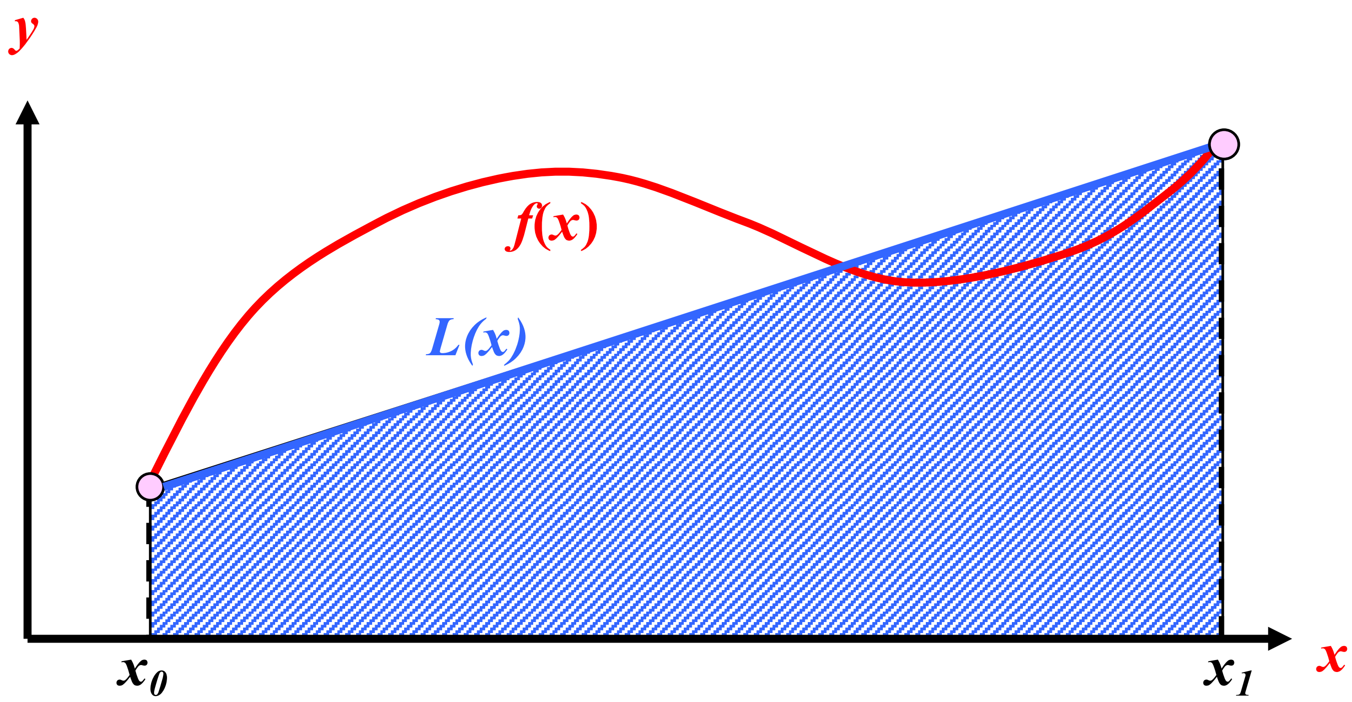
- Ekstrapolasi : prediksi terhadap titik-titik yang akan muncul dimana adanya perluasan data di luar data yg tersedia.



Jenis Interpolasi

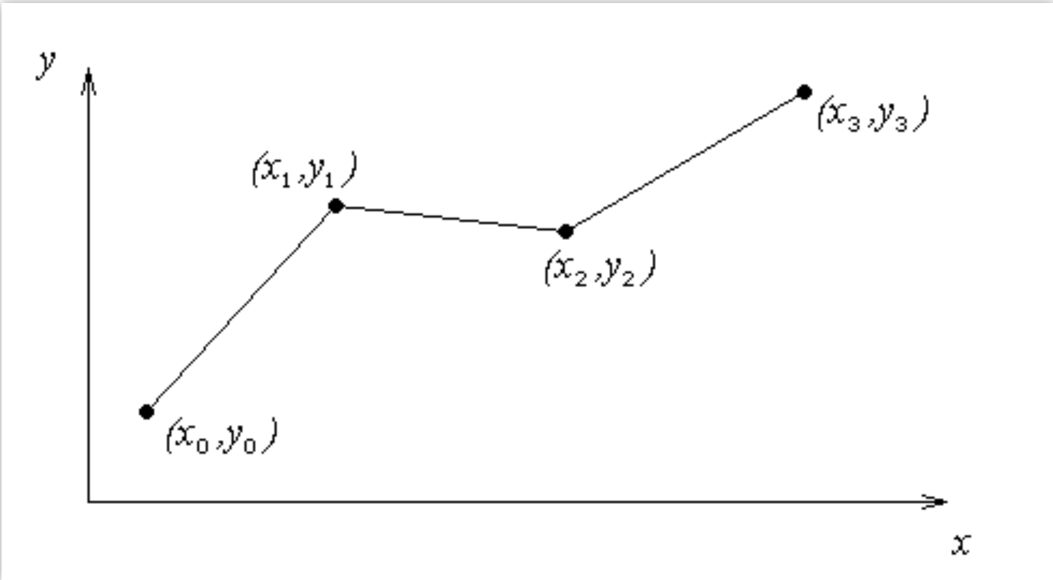
- Interpolasi Linier
- Interpolasi Kuadrat
- Interpolasi Lagrange
- Interpolasi Newton

Interpolasi Linier



Interpolasi Linier

- Ide dasar : pada saat data dalam bentuk tabel tidak begitu bervariasi, sehingga memungkinkan untuk dilakukan pendekatan dengan menggunakan sebuah garis lurus di antara dua titik yang berdekatan.



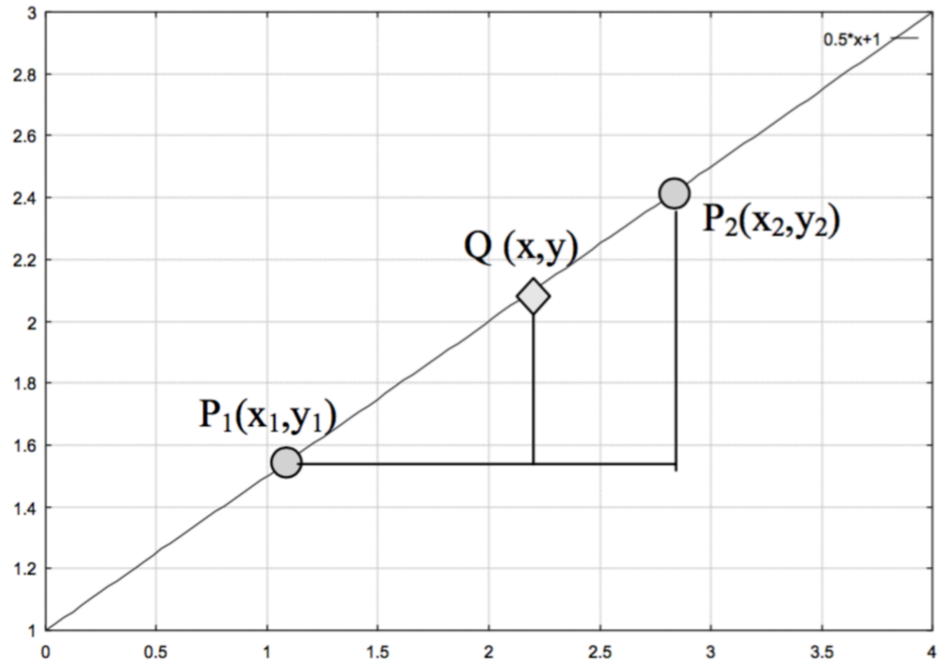
Interpolasi Linier

- Menentukan titik – titik antara dari 2 buah titik dengan menggunakan garis lurus.
- Persamaan garis lurus yang melalui 2 titik $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$ dapat dituliskan dengan :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

- Persamaan Interpolasi Linier :

$$\boxed{y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1}$$



Contoh Interpolasi Linier (1)

- Diketahui data sebagai berikut :

x_1 x_2

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	49

y_1 y_2

6.5	x
?	y

Tentukan harga y pada $\boldsymbol{x = 6.5}$?

$x = 6.5$ terletak antara $x = 6$ dan $x = 7$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

$$y = \frac{49 - 36}{7 - 6}(6.5 - 6) + 36 = \boxed{\mathbf{42.5}}$$

Contoh Interpolasi (1)

- Alternatif 2 :
- $x = 6.5$ terletak di antara $x = 1$ & $x = 7$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

$$y = \frac{49 - 1}{7 - 1}(6.5 - 1) + 1$$

$$y = \frac{48}{6}(48) + 1$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = 45}}$$

Contoh Interpolasi (1)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	49

- Bandingkan hasil kedua jawaban tersebut .
- Mana yang mendekati jawaban yang sesungguhnya ?
- Jika kita lihat persamaan fungsi sumbu y , $f(x) = x^2$, maka untuk harga $x = 6.5$ di dapat $y = (6.5)^2 =$ $\mathbf{42.25}$
- Kesalahan mutlak (E) = | 42.5 – 42.25 | = $\mathbf{0.25}$

Contoh Interpolasi (1)

- Kesalahan mutlak (E), untuk :

$$y = 42.5 \longrightarrow |\,42.5 - 42.25\,| = \mathbf{0.25 = 25\%}$$

- Sedangkan untuk :

$$y = 45 \longrightarrow |\,45 - 42.25\,| = \mathbf{3.25 = 325\%}$$

Contoh Interpolasi (2)

- Jarak yang dibutuhkan sebuah kendaran untuk berhenti adalah fungsi kecepatan. Data percobaan berikut ini menunjukkan hubungan antara kecepatan dan jarak yang dibutuhkan untuk menghentikan kendaraan.

Kecepatan (mil/jam)	10	20	30	40	50	60	70
Jarak henti (feet)	12	21	46	65	90	111	148

- Perkiraan jarak hentik yang dibutuhkan bagi sebuah kendaraan yang melaju dengan kecepatan 45 mil/jam.

Contoh Interpolasi (2)

- Maka untuk mencari nilai $x = 45$,

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

$$y = \frac{90 - 65}{50 - 40}(45 - 40) + 65$$

$$y = \frac{25}{10}(5) + 65$$

$$y = 12.5 + 65$$

$$y = 12.5 + 65 = \boxed{\mathbf{77.5\ feet}}$$

Interpolasi Linier

- Algoritma Interpolasi Linier :
  1. Tentukan dua titik P_1 dan P_2 dengan koordinatnya masing-masing (x_1, y_1) dan (x_2, y_2).
  2. Tentukan nilai x dari titik yang akan dicari.
  3. Hitung nilai y dengan :
  4. Tampilkan nilai titik yang baru $Q(x, y)$

$$\boxed{y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1}$$

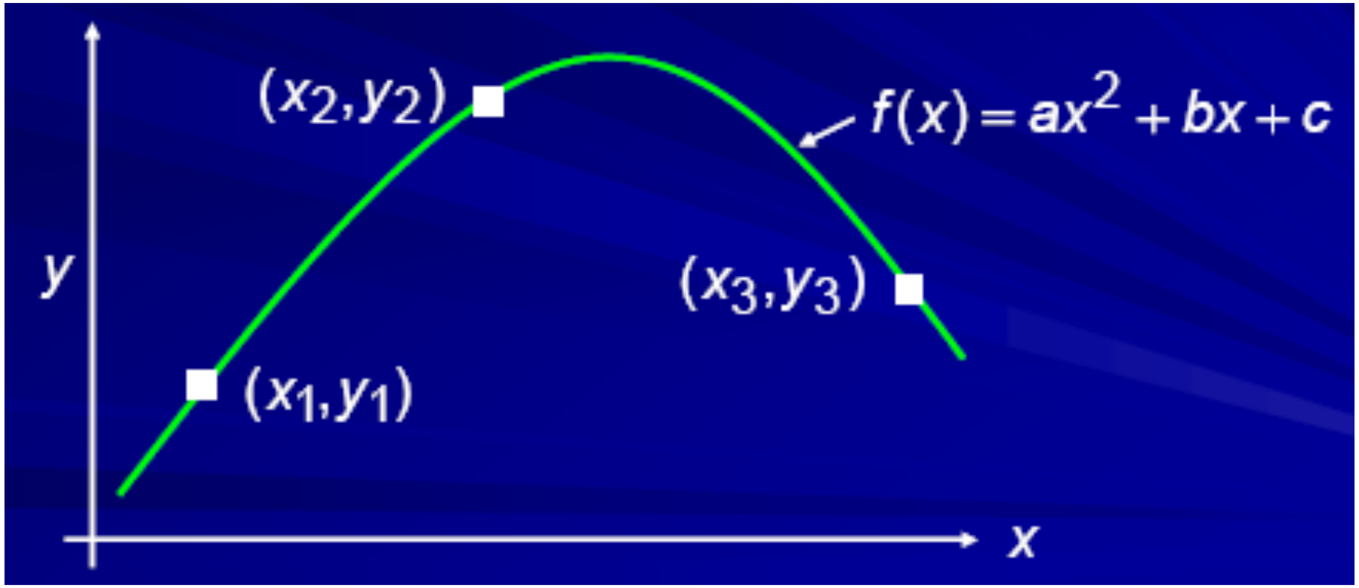
Interpolasi Linier

- Pendekatan interpolasi dengan derajat 1, pada kenyataannya sama dengan mendekati suatu harga tertentu melalui garis lurus.
- Untuk memperbaiki kondisi tersebut dilakukan sebuah interpolasi dengan membuat garis yang menghubungkan titik yaitu melalui orde 2, orde 3, orde 4, dst, yang sering juga disebut interpolasi kuadratik, kubik, dst.

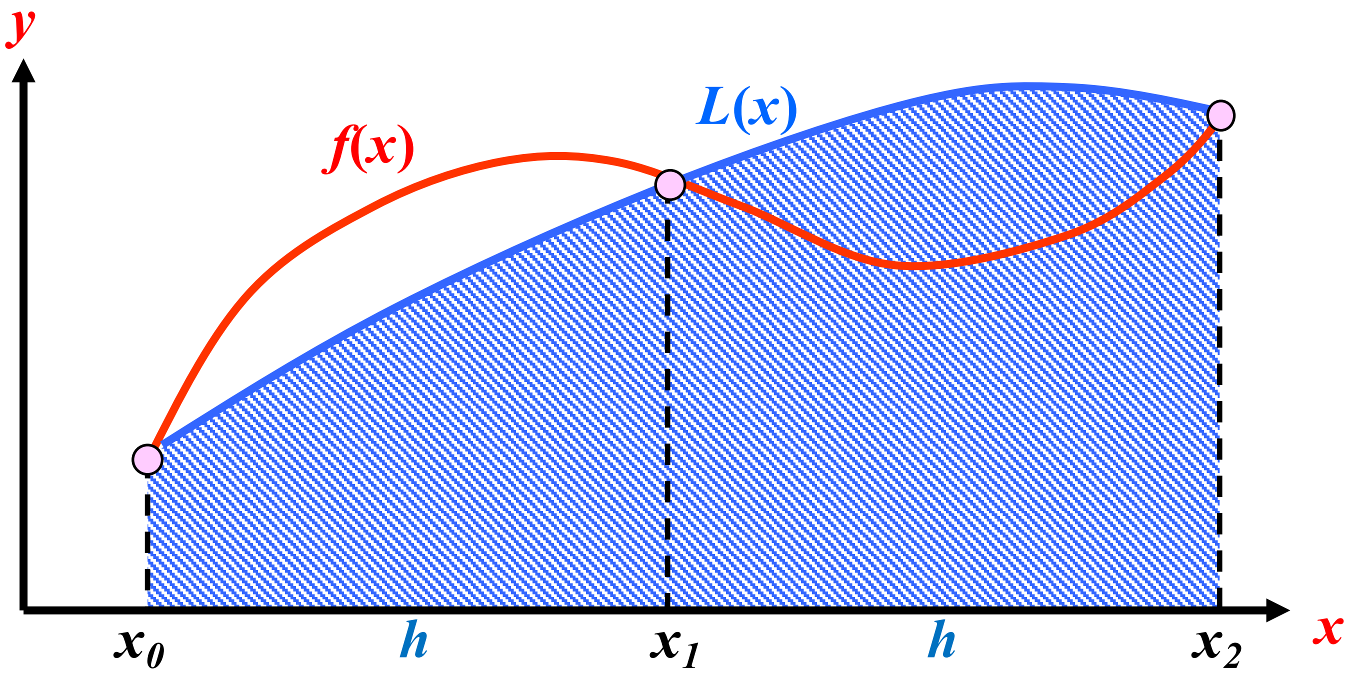
Interpolasi Kuadrat

- Interpolasi orde 2 sering disebut sebagai interpolasi kuadratik, memerlukan 3 titik data.
- Bentuk polinomial orde ini adalah :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



Interpolasi Kuadrat



Interpolasi Kuadrat

- Titik – titik data (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2)

$$y_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 {x_0}^2$$

$$y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 {x_1}^2$$

$$y_2 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 {x_2}^2$$

- Hitung a_0, a_1, dan a_2 dari sistem persamaan tersebut dengan metode eliminasi Gauss
- Hitung dengan rumus interpolasi kuadratik :

$$\boxed{y = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}}$$

Contoh Soal Interpolasi Kuadrat (1)

- Diberikan titik $\ln(8.0) = 2.0794$, $\ln(9.0) = 2.1972$, dan $\ln(9.5) = 2.2513$. Tentukan nilai $\ln(9.2)$ dengan interpolasi kuadratik.

  Diketahui : $x_0 = 8.0$, $y_0 = 2.0794$, $x_1 = 9.0$, $y_1 = 2.1972$, $x_2 = 9.5$, $y_2 = 2.2513$

  Ditanya : Nilai $\ln(9.2)$ = ?

  Sistem persamaan yang terbentuk adalah :

  $a_0 + 8.0\, a_1 + 64.0\, a_2 = 2.0794$
  $a_0 + 9.0\, a_1 + 81.0\, a_2 = 2.1972$
  $a_0 + 9.5\, a_1 + 90.25\, a_2 = 2.2513$

Contoh Soal Interpolasi Kuadrat (1)

- Perhitungan secara manual, diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss :

$$
\begin{aligned}
a_0 + 8.0\, a_1 + 64.0\, a_2 &= 2.0794 \\
a_0 + 9.0\, a_1 + 81.0\, a_2 &= 2.1972 \\
a_0 + 9.5\, a_1 + 90.25\, a_2 &= 2.2513
\end{aligned}
\qquad
\begin{pmatrix} 1 & 8 & 64 & 2.0794 \\ 1 & 9 & 81 & 2.1972 \\ 1 & 9.5 & 90.25 & 2.2513 \end{pmatrix}
\qquad
\begin{array}{c} R21(-1) \\ R31(-1) \end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 8 & 64 & 2.0794 \\ 0 & 1 & 17 & 0.1178 \\ 0 & 1.5 & 26.25 & 0.1719 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{c} R12(-8) \\ R32(-1.5) \end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -72 & 1.137 \\ 0 & 1 & 17 & 0.1178 \\ 0 & 0 & 0.75 & -0.0048 \end{pmatrix}
\qquad
R31\left(\tfrac{1}{0.75}\right)
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -72 & 1.137 \\ 0 & 1 & 17 & 0.1178 \\ 0 & 0 & 1 & -0.0064 \end{pmatrix}
\qquad
\begin{array}{c} R13(72) \\ R23(-17) \end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.6762 \\ 0 & 1 & 0 & 0.2266 \\ 0 & 0 & 1 & -0.0064 \end{pmatrix}
$$

Menggunakan metode Eliminasi gauss menghasilkan

$a_0 = 0.6762,\ a_1 = 0.2266, a_2 = -0.0064$.

Polinom kuadratnya adalah: $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$p_2(9.2) = 0.6762 + 0.2266.(9.2) + -0.0064.(9.2)^2 \qquad \boxed{p_2(9.2) = 2.2192}$$

Contoh Soal Interpolasi Kuadrat (1)

- Perhitungan menggunakan rumus interpolasi kuadratik :

$$y = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Diketahui : $x_1 = 8.0,\ y_1 = 2.0794,\ x_2 = 9.0,\ y_2 = 2.1972\ ,\ x_3 = 9.5,\ y_3 = 2.2513$

$x = 9.2\ , y = ?$

$$y = 2.0794 \frac{(9.2 - 9)(9.2 - 9.5)}{(8 - 9)(8 - 9.5)} + 2.1972 \frac{(9.2 - 8)(9.2 - 9.5)}{(9 - 8)(9 - 9.5)} + 2.2513 \frac{(9.2 - 8)(9.2 - 9)}{(9.5 - 8)(9.5 - 9)}$$

$$y = -0.0831 + 1.581984 + 0.720416$$

$$\boxed{= \mathbf{2.2193}}$$

Interpolasi Kuadrat

- Algoritma Interpolasi Kuadrat:
  1. Tentukan tiga titik $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ da $P_3(x_3, y_3)$.
  2. Tentukan nilai x dari titik yang akan dicari.
  3. Hitung nilai y dengan rumus interpolasi kuadratik :

$$\boxed{y = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}}$$

  4. Tampilkan nilai x dan y

Soal Interpolasi Linier

- Perkiraan atau prediksi jumlah penduduk Gunungsari pada tahun 2005 berdasarkan data tabulasi berikut :

Tahun	2000	2010
Jumlah Penduduk	179.300	203.200

Soal Interpolasi Kuadrat

- Dalam suatu eksperimen fisika pergerakan sebuah benda padat berbentuk parabola. Dengan data sebagai berikut :

t (detik)	Y(m)
5	2.01
6.5	2.443
8	2.897

- Dengan menggunakan interpolasi kuadratik perkirakan ketinggian bola pada saat t=7 detik.

Jawaban

Dipunyai: $x_0 = 2000$, $x_1 = 2010$, $y_0 = 179.300$, $y_1 = 203.200$.

Ditanya: Prediksi jumlah penduduk gunungsari pada tahun 2005.

$$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)(x - x_0)}{x_1 - x_0}$$

Misalkan $x = 2005$

$$p_1(2005) = 179.300 + \frac{(203.200 - 179.300)(2005 - 2000)}{2010 - 2000}$$

$$p_1(2005) = 191.250$$

Jadi, diperkirakan jumlah penduduk gunungsari pada tahun 2005 adalah 191.250 orang.

Jawaban

- Sistem persamaan lanjar yang terbentuk adalah:

$$a_0 + 5{,}0\ a_1 + 25{,}00\ a_2 = 2{,}01$$
$$a_0 + 6{,}5\ a_1 + 42{,}25\ a_2 = 2{,}443$$
$$a_0 + 8{,}0\ a_1 + 64{,}00\ a_2 = 2{,}897$$

Penyelesaian sistem persamaan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 25 & 2{,}01 \\ 1 & 6{,}5 & 42{,}25 & 2{,}443 \\ 1 & 8 & 64 & 2{,}897 \end{bmatrix} \begin{matrix} R2, R1(-1) \\ R3, R1(-1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 25 & 2{,}01 \\ 0 & 1{,}5 & 17{,}25 & 0{,}443 \\ 0 & 3 & 39 & 0{,}887 \end{bmatrix} R2\left(\frac{1}{1{,}5}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 25 & 2{,}01 \\ 0 & 1 & 11{,}5 & 0{,}28867 \\ 0 & 3 & 39 & 0{,}887 \end{bmatrix} \begin{matrix} R1, R2(-5) \\ R3, R2(-3) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -32{,}5 & 0{,}56667 \\ 0 & 1 & 11{,}5 & 0{,}28867 \\ 1 & 0 & 4{,}5 & 0{,}021 \end{bmatrix} R3\left(\frac{1}{4{,}5}\right)$$

Jawaban

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -32{,}5 & 0{,}56667 \\ 0 & 1 & 11{,}5 & 0{,}28867 \\ 1 & 0 & 1 & 0{,}00467 \end{bmatrix} \begin{matrix} R1, R3(32{,}5) \\ R2, R3(11{,}5) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}71733 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}235 \\ 1 & 0 & 1 & 0{,}00467 \end{bmatrix}$$

Diperoleh : $a_0 = 0{,}71733,\ a_1 = 0{,}235,\ a_2 = 0{,}00467$

Sehingga Polinom Kuadratnya adalah:

$$p_2(x) = 0{,}71733 + 0{,}235x + 0{,}00467\,x^2$$

Sehingga $p_2\,(7) = 2{,}588$

Jadi,diprediksi, pada t = 7 detik tinggi bola 2,588 m.

Interpolasi Lain

- Secara umum, penentuan polinomial dengan cara tersebut kurang disukai, karena mempunyai kemungkinan yang jelek terutama untuk derajat polinomial yang semakin tinggi.
- Terdapat beberapa metode polinom interpolasi :
  - Polinom Lagrange
  - Polinom Newton

Interpolasi Lain

- Secara umum, penentuan polinomial dengan cara tersebut kurang disukai, karena mempunyai kemungkinan yang jelek terutama untuk derajat polinomial yang semakin tinggi.
- Terdapat beberapa metode polinom interpolasi :
  - Polinom Lagrange
  - Polinom Newton

Interpolasi Lagrange

- Polinom berderajat satu : $p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)(x - x_0)}{x_1 - x_0}$
- Dapat diatur kembali sedemikian rupa sehingga menjadi :

$$p_1(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{(x - x_0)}{x_1 - x_0}$$

- Atau dapat dinyatakan dalam bentuk (*)

$$p_1(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x)$$

- Dimana :

$$a_0 = y_0 \qquad a_1 = y_1$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{x_0 - x_1} \qquad L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{x_1 - x_0}$$

- Persamaan * dinamakan Polinom Lagrange derajat 1.

Interpolasi Lagrange

- Pendekatan orde ke-1.

$$f_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \qquad\qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f(x_1)$$

Interpolasi Lagrange

- Pendekatan orde ke-2.

$$f_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

$$\underset{\substack{i=0\\ n=2\\ j\neq i}}{L_0(x)} = \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\right) \quad \underset{\substack{i=1\\ n=2\\ j\neq i}}{L_1(x)} = \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right) \quad \underset{\substack{i=2\\ n=2\\ j\neq i}}{L_2(x)} = \left(\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)$$

$$f_2(x) = \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\right)f(x_0) + \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)f(x_1) + \left(\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)f(x_2)$$

Interpolasi Lagrange

- Pendekatan orde ke-3.

$$f_3(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3)$$

$$f_3(x) = \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\right)\left(\frac{x-x_3}{x_0-x_3}\right)f(x_0) + \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)\left(\frac{x-x_3}{x_1-x_3}\right)f(x_1) +$$

$$\left(\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)\left(\frac{x-x_3}{x_2-x_3}\right)f(x_2) + \left(\frac{x-x_0}{x_3-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_3-x_2}\right)f(x_3)$$

Interpolasi Lagrange

- Algoritma Interpolasi Lagrange:
  1. Tentukan jumlah titik (N) yang diketahui.
  2. Memasukkan titik-titik yang diketahui $P_i = (x_i, y_i)$ untuk $i = 1,2,3, \dots, N$
  3. Tentukan x dari titik yang dicari.
  4. Hitung nilai y dari titik yang dicari dengan formulasi interpolasi lagrange.

$$y = \sum_{i=1}^{N} y_i \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

  5. Tampilkan nilai (x, y)

Contoh Interpolasi Lagrange

- Berapa nilai distribusi t pada $\alpha = 4\%$?

$\alpha = 2.5\% \rightarrow x_0 = 2.5 \rightarrow f(x_0) = 2.571$

$\alpha = 5\% \rightarrow x_1 = 5 \rightarrow f(x_1) = 2.015$

$\alpha = 10\% \rightarrow x_2 = 10 \rightarrow f(x_2) = 1.476$

Contoh Interpolasi Lagrange

- Pendekatan orde ke-1

$x_0 = 2.5 \rightarrow f(x_0) = 2.571 \quad x = 4 \rightarrow f(x) = ?$

$x_1 = 5 \rightarrow f(x_1) = 2.015$

$x_2 = 10 \rightarrow f(x_2) = 1.476$

$$f_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$f_1(x) = \frac{4 - 5}{2.5 - 5} 2.571 + \frac{4 - 2.5}{5 - 2.5} 2.015$$

$$f_1(x) = 2.237$$

Contoh Interpolasi Lagrange

- Pendekatan orde ke-2

$x_0 = 2.5 \rightarrow f(x_0) = 2.571$ $\quad x = 4 \rightarrow f(x) = ?$

$x_1 = 5 \rightarrow f(x_1) = 2.015$

$x_2 = 10 \rightarrow f(x_2) = 1.476$

$$f_2(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2)$$

$$f_2(x) = \left(\frac{4-5}{2.5-5}\right)\left(\frac{4-10}{2.5-10}\right)2.571 + \left(\frac{4-2.5}{5-2.5}\right)\left(\frac{4-10}{5-10}\right)2.015 + \left(\frac{4-2.5}{10-2.5}\right)\left(\frac{4-5}{10-5}\right)1.476$$

$$f_2(x) = 2.214$$

Interpolasi Newton

- Polinom Lagrange kurang disukai dalam praktek:
  - Jumlah komputasi yang dibutuhkan untuk satu kali interpolasi adalah besar. Interpolasi untuk nilai x yang lain memerlukan jumlah komputasi yang sama karena tidak ada bagian komputasi sebelumnya yang dapat digunakan.
  - Bila jumlah titik data meningkat atau menurun, hasil komputasi sebelumnya tidak dapat digunakan. Karena tidak ada hubungannya antara pada $p_{n-1}(x)$ dan $p_n(x)$ polinom Lagrange.
- Polinom Newton bisa mengatasi hal ini, dimana polinom yang dibentuk sebelumnya dapat digunakan untuk membentuk polinom derajat yang lebih tinggi.

Interpolasi Newton

- Persamaan Polinom Linier $p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_x - x_0}(x - x_0)$
- Bentuk pers. Ini dapat ditulis : $p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$
- Yang dalam hal ini $a_0 = y_0 = f(x_0)$ (1)
- Dan $a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_x - x_0}$ (2)
- Persamaan ini merupakan bentuk selisih terbagi (divided-difference)

$$a_1 = f[x_1, x_0]$$

Interpolasi Newton

- Polinom Kuadratik

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Interpolasi Newton

- Jadi tahapan pembentukan polinom Newton :

$$p_1(x) = p_0(x) + a_1(x - x_0)$$

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_3(x) = p_2(x) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$p_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Interpolasi Newton

- Nilai konstanta $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n,$ merupakan nilai selisih terbagi (ST), dengan nilai

  $a_0 = f(x_0)$

  $a_1 = f[x_1, x_0]$

  $a_2 = f[x_2, x_1, x_0]$

  $a_n = f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$

- Yang dalam hal ini

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f(x_i, x_j) - f(x_j, x_k)}{x_i - x_k}$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1) - f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1, x_0)}{x_n - x_0}$$

Interpolasi Newton

Tabel Selisih Terbagi

i	xi	$y_i = f(x_i)$	ST-1	ST-2	ST-3
0	x_0	$f[x_0]$	$f[x_1,x_0]$	$f[x_2,x_1,x_0]$	$f[x_3,x_2,x_1,x_0]$
1	x_1	$f[x_1]$	$f[x_2,x_1]$	$f[x_3,x_2,x_1]$	
2	x_2	$f[x_2]$	$f[x_3,x_2]$		
3	x_3	$f[x_3]$			

$$p_n(x) = f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1) +$$
$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)(x - x_{n-1})$$

Contoh Soal Interpolasi Newton

Bentuklah polinom Newton derajat satu, dua, tiga dan empat yang menghampiri f(x)=cos(x) dalam range [0,4] dan antar titik adalah 1.0. Lalu taksirlah f(x) dengan x=2.5 dengan Polinom Newton derajat 3.

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	ST-1	ST-2	ST-3	ST-4
x_0	0	1	-0.4597	-0.2484	0.1466	-0.0147
x_1	1	0.5403	-0.9564	0.1913	0.0880	
x_2	2	-0.4161	-0.5739	0.4551		
x_3	3	-0.99	0.3363			
x_4	4	-0.6536				

Contoh Soal Interpolasi Newton

Cara menghitung nilai selisih terbagi pada tabel :

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{0.5403 - 1}{1 - 0} = -0.4597$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{-0.4161 - 0.5493}{2 - 1} = -0.9564$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f(x_2, x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0} = \frac{-0.9564 - (-0.4597)}{2 - 0} = -0.2484$$

Contoh Soal Interpolasi Newton

Maka polinom newton derajat 1, 2, dan 3 dengan x_0 = 0 sebagai titik pertama :

$$\cos(x) \approx p_1(x) = 1 - 0.4597(x-0)$$

$$\cos(x) \approx p_2(x) = 1 - 0.4597(x-0) - 0.2484(x-0)(x-1)$$

$$\cos(x) \approx p_3(x) = 1 - 0.4597(x-0) - 0.2484(x-0)(x-1) + 0.1466(x-0)(x-1)(x-2)$$

$$\cos(x) \approx p_4(x) = 1 - 0.4597(x-0) - 0.2484(x-0)(x-1) + 0.1466(x-0)(x-1)(x-2) - 0.0147(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)$$

Contoh Soal Interpolasi Newton

- Nilai fungsi di x=2.5 dengan polinom derajat 3 adalah :

$$\cos(2.5) \approx p_3(2.5) = 1.0 - 0.4597(2.5-0) - 0.2484(2.5-0)(2.5-1) + 0.1466(2.5-0)(2.5-1)(2.5-2)$$

$$= -0.8056$$

- Nilai eksak f(2.5) adalah

$$f(2.5) = \cos(2.5) = -0.8011$$

- Jadi solusi hampiran mempunyai error :

$$-0.8011 - (-0.8056) = 0.0045$$

Soal Interpolasi Newton

- Diberikan pasangan nilai x_0=1, f(x_0)=0; x_1=4, f(x_1)=1.3862944; x2=6, f(x2)=1.7917595; x3=5, f(x3)=1.6094379.
- Buat tabel beda terbagi dari data tersebut
- Gunakan tabel beda terbagi diatas dalam menerapkan rumus interpolasi beda terbagi newton dengan x=2.

Soal Interpolasi Lagrange

- Dicari nilai ln(2) dengan metode interpolasi polinomial Lagrange order satu dan dua berdasar data ln(1)=0 dan data ln(6)=1.7917595. Hitung juga nilai tersebut berdasar data ln(1) dan data ln(4)=1.3862944. Untuk membandingkan hasil yang diperoleh, hitung pula besar error (nilai eksak ln(2) = 0.6931471)

Praktikum Lagrange

- Cari nilai x = 0,5 ; x = 0.7 ; x = 0.9 ; x = 1, dengan polinom derajat 3.
- Hitung nilai error dari masing-masing x.

X	Y
0	1
0.4	0.921061
0.8	0.696707
1.2	0.362358

$$f(x) = \cos x$$

Praktikum Newton

- Fungsi Awal : $f(x) = \cos(x) + x$
- Bentuklah polinom Newton derajat satu, dua, tiga, empat dan lima yang menghampiri $f(x) = \cos(x) + x$ dalam range [-5,-2.5] dan antar titik adalah 0.5. Lalu buat grafik polinom newton masing-masing derajat.