TD2- File d'attente

Exercice 1. Organisme public

Un organisme public est ouvert, chaque jour ouvrable, de 9h à 17h sans interruption. Il accueille, en moyenne, 64 usagers par jour; un guichet unique sert à traiter le dossier de chaque usager, ceci en un temps moyen de 2,5 minutes. Les usagers si nécessaires, font la queue dans l'ordre de leur arrivée; même si la queue est importante, on ne refuse aucun usager. Une étude statistique a permis de conclure que la durée aléatoire des services suit une loi exponentielle et que le régime des arrivées des usagers forme un processus de Poisson.

1. Donner la notation de Kendall de cette file.
2. Donner l'expression de la probabilité invariante, π_k, donner la justification de son existence.
3. Quel sont les passés : à attendre dans la file ? dans l'organisme par chaque usager ?
4. Quelles sont les probabilités qu'il n'arrive aucun client entre 15H et 16H? Que 6 clients arrivent entre 16H et 17H?
5. Quelle est, en moyenne et par heure, la durée pendant laquelle l'employé du guichet ne s'occupe pas des usagers ?
6. Quelle est la probabilité d'observer une file d'attente de 4 usagers, derrière celui en cours de service ?

Exercice 2. Maternité

Une importante maternité accueille des femmes enceintes qui sont arrivées à terme et viennent accoucher et donner naissance à leur bébé. L'occupation moyenne d'une salle de travail est de 6 heures pour un accouchement.

Un statisticien a déterminé que la loi d'arrivée des futures mamans dans une maternité pour y accoucher, peut être approximée de façon satisfaisante, par une loi de Poisson, (il se présente en moyenne 24 femmes par jour) et que celle de l'occupation de la salle de travail peut l'être par une loi exponentielle.

Leurs taux respectifs valent ¸ $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\mu}$.

Le but est de déterminer le nombre N de salles de travail (et, par conséquent le nombre minimal de sages femmes devant se trouver dans la maternité), de telle sorte que la probabilité pour que toute les salles soient occupées soit inférieure à un centième : une femme qui arriverait dans ce cas serait dirigée vers une autre maternité, ce que l'on désire éviter 'a l'extrême

1. Donner la valeur numérique de ¸ $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\mu}$.
2. Montrer que le système d'attente est un processus de naissance et de mort, comportant N+1 états, numérotés de 0 à N. A quoi correspondent, ici une naissance et une mort ? Donner la signification de l'état k, exprimer ¸ $\boldsymbol{\lambda}_k$ en fonction de $\boldsymbol{\lambda}$ ¸ et $\boldsymbol{\mu}_k$ en fonction de $\boldsymbol{\mu}$.
3. La probabilité pour que le système soit, en régime permanent, dans l'état k est notée π_k. Calculer π_k en fonction de π_0,
4. Quel est l'état pour lequel toutes les salles sont occupées; quelle est sa probabilité? Trouver le nombre de salles de travail que devra comporter la clinique, de sorte que la probabilité pour qu'elles soient toutes occupées soit inférieure à 0,01.

Exercice 3. FileM/M/c

On s'intéresse à une file d'attente avec c >1 serveurs, mais les arrivées et les services restent des processus de Poisson, de paramètres respectifs¸ **λ** et **µ**. Dans ce contexte, on définit la charge du système par r= **λ/µ**¸ et le taux d'utilisation par **ρ** =r /c.

1. Donner le graphe de la chaîne induite.
2. Donner et démontrer la condition de stabilité de la file.
3. Calculer la distribution stationnaire.
4. Déterminer Lq le nombre moyen de personne en attente dans le système.
5. déterminer le temps d'attente moyenne Wq des personnes dans le système.
6. Donner la probabilité d'être servi immédiatement à l'arrivée dans la file.