Exercice4 :

EXERCICE 4 : Fonction Caracterisque :

1) Pour un vecteur gaussien X de moyenne b et de matrice de Variance V, montrons que :

$$\phi_X(u) = e^{\langle u, b\rangle - \frac{1}{2}\langle u, Vu\rangle}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire d-dimentionnel de Vecteur moyenne $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix}$ et de matrice de Variance V.

Soit u un Vecteur de $\mathbb{R}^d$ on a :

$$\phi_X(u) = E(e^{i\langle u, X\rangle}) = E(e^{i u^t X}) = E(e^{i(u_1 x_1 + \dots + u_d x_d)}) \quad (*)$$

On pose $Y = u_1 X_1 + \dots + u_d X_d$

On sait que Y est gaussienne car combinaison linéaire des composantes d'un vecteur gaussien.

cherchons ses caractéristiques

$$E(Y) = E(u_1 X_1 + \dots + u_d X_d) = u_1 E(X_1) + \dots + u_d E(X_d)$$

$$E(Y) = u_1 b_1 + u_2 b_2 + \dots + u_d b_d = u^t b = \langle u, b\rangle$$

$$Var(Y) = Var(u_1 X_1 + \dots + u_d X_d) = \sum_{i=1}^{d} u_i^2 Var(x_i) + 2\sum_{i \neq j} u_i u_j cov(x_i, x_j)$$

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{d} u_i^2 Var(x_i) + 2\sum_{i \neq j} u_i u_j cov(x_i, x_j) \quad (a)$$

on sait que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_Y(t) = E(e^{itY}) = e^{itE(Y) - \frac{t^2}{2} Var(Y)}$$

ainsi $\phi_X(u) = E(e^{iY}) = \varphi_Y(1)$ d'après (*).

ainsi $\phi_X(u) = e^{iE(Y) - \frac{1}{2} Var(y)}$

$$= e^{i u^t b - \frac{1}{2} Var(Y)}$$

En calculant $\langle u, Vu \rangle$ on a :

$$\langle u, Vu \rangle = (u_1 \ldots u_d) \begin{pmatrix} Var(X_1) & \cdots & cov(X_1, X_d) \\ \vdots & & \vdots \\ cov(X_d, X_1) & \cdots & Var(X_d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix}$$

$$= (u_1, \ldots u_d) \begin{pmatrix} u_1 Var(X_1) + \ldots + u_d\, cov(X_1, X_d) \\ \vdots \\ u_1 cov(X_d, X_1) + \ldots + u_d Var(X_d) \end{pmatrix}$$

$$\langle u, Vu \rangle = \sum_{i=1}^{d} u_i^2 Var(X_i) + 2 \sum_{i \neq j} u_i u_j \, cov(X_i, X_j) \quad (**)$$

Or on sait

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_Y(t) = E(e^{itY}) = e^{itE(Y) - \frac{t^2}{2} Var(Y)}$$

$$(a) = (**) \Rightarrow Var(Y) = \langle u, Vu \rangle$$

d'où on a : $\varphi_X(u) = e^{i\langle u, b \rangle - \frac{1}{2}\langle u, Vu \rangle}$.

2°) Soit X une variable aléatoire symétrique par rapport à 0.

i.e $P_X = P_{-X}$

on a $\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_{-X}(t) = E(e^{-itX}) = \overline{\varphi_X(t)}$

or X est symétrique $\Rightarrow \varphi_X = \varphi_{-X}$ alors $\varphi_X(t) = \overline{\varphi_X(t)}$

Or un complexe est égale à son conjugué ssi sa partie imaginaire est nulle d'où φ_X est à valeurs réelles.

3°) Ici on part de ce qu'on appelle transformation de Fourier
On suppose que X admet une fonction de densité dans ce cas

$f(x) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi_X(t)\, dt$

$E(|X|^p) < +\infty \Rightarrow x \longmapsto (ix)^p e^{itx} f(x)$ est uniformément intégrable

et d'après la prop de la dérivation sous le signe de l'intégrale,

φ_X est p fois dérivable et $\varphi_X^{(p)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^p e^{itx} f(x)\, dx$

i.e $\forall t \in \mathbb{R}$

$\varphi_X(t) = E\left((ix)^p e^{itx}\right)$

En particulier pour $t = 0$

$\varphi_X^{(p)}(0) = E\left(i^p x^p e^0\right) = E\left(i^p x^p e^0\right)$

$\varphi_X^{(p)}(0) = i^p E(x^p) = i^p E(X^p)$

$\varphi_X^{(p)}(0) = i^p E(X^p)$.