Stream-Potential Decomposition

张航

July-27-2020

霍姆赫兹定理

唯一性定理

对于一个被封闭边界 S 包围的有限区域矢量场 $\vec{V}$，可以由其散度场 D、旋度场 ξ 和边界 S 上的法向分量 $\vec{V}_n$、切向分量 $\vec{V}_t$ 唯一确定。(但矢量场 $\vec{V}$ 不一定存在)

分解定理

任意一个满足唯一性定理的矢量场 $\vec{V}$，都可以分解成无旋的 $\vec{V}_\chi$ 和无散的 $\vec{V}_\psi$ 两部分 (但分解不唯一)。

特别地，对于二维矢量场，可以引入 χ 和 ψ：

$$\begin{cases} \vec{V}_\chi = \nabla\chi \\ \vec{V}_\psi = \nabla\psi \times \vec{k} \end{cases} \tag{1}$$

则有：

$$\vec{V} = \vec{V}_\chi + \vec{V}_\psi = \nabla\chi + \nabla\psi \times \vec{k} \tag{2}$$

即二维矢量场 $\vec{V}$ 都可以用一对势函数 χ 和流函数 ψ 的叠加来表示。关于，这种矢量场的拆分没有一个统一的名称，下面称之为势流分解。

势流分解基本原理

基本方程

$$\begin{cases} \Delta\chi = D \\ \Delta\psi = -\xi \end{cases} \tag{3}$$

边界条件

$$\begin{cases} \frac{\partial\chi}{\partial n} + \frac{\partial\psi}{\partial s} = V_n & (x,y) \in S \\ \frac{\partial\chi}{\partial s} - \frac{\partial\psi}{\partial n} = V_t & (x,y) \in S \end{cases} \tag{4}$$

等式右侧都可以通过 $\vec{V}$ 直接求出。因此已知矢量场的势流分解问题可以转化为一个耦合边界条件的泊松方程求解问题。

Poisson 方程的求解

形如 $\Delta p = f$ 的方程被称为 Poisson 方程。其常见的求解方法包括以下几种:

1、松弛迭代法 (求解 PDE 的一般方法)
2、有限元法 (求解 PDE 的一般方法)
3、正余弦变换法 (等距矩形网格)

虽然方法三在使用条件上有一定限制，但由于是非迭代方法能够计算精确解，还有类似于快速傅里叶变换的加速算法，相比与其他两种方法具有高精度和高效率的优势。

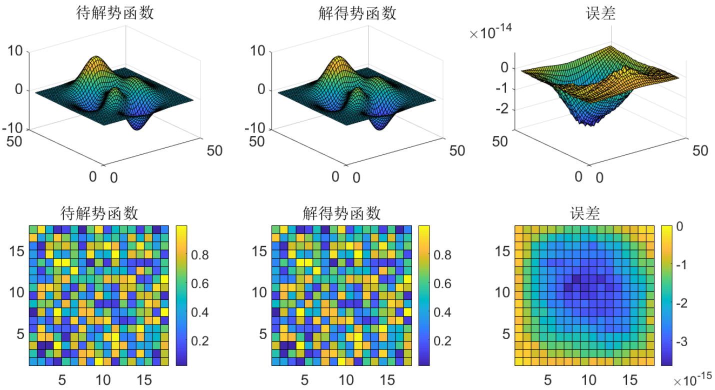

图: DST 的高精度优势

边界条件解耦

考虑到该问题的解并不唯一，因此可以考虑对 χ 或 ψ 任意设定一个有效的边界条件，进行试解。之后在原矢量场 $\vec{V}$ 中剔除该分量所表示的部分（$\vec{V}_\chi$ 或 $\vec{V}_\psi$），这样边界条件中该分量的部分就已经被去除。从而达到解耦合的目的，再使用求解 Poisson 方程的一般方法求解另一个分量即可。

误差来源

网格错位导致的误差

由于第一步通过 χ 或 ψ 计算得到的流速场实际与与原始流场在离散表达上无法对应导致的误差。（当数据在网格上足够平滑时可以忽略）

边界处法向偏导数的近似导致的误差

在边界处的散度以及流速的都需要边界以外的数据进行计算，因此只能使用内部数据来近似计算边界处的偏导数，从而导致误差的出现。

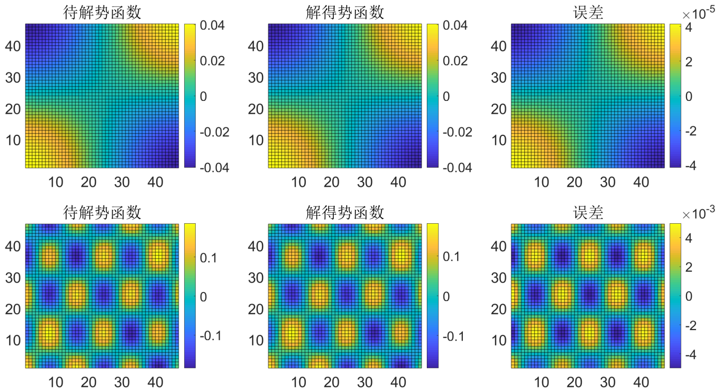
待解势函数
解得势函数
误差
$\times 10^{-5}$
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
4
2
0
-2
-4
10
20
30
40
待解势函数
解得势函数
误差
$\times 10^{-3}$
0.1
0
-0.1

图: 网格错位误差