Limited Area Stream-Potential Decomposition
有限区域势流分解

张航

2021 年 9 月 9 日

问题背景

- 在使用二维流速场数据时，我们时常会遇到难以进行有效进行分析和可视化的问题。因此，将二维 u、v 矢量场分解为更具物理意义且便于分析理解的流函数与势函数（旋转分量与辐散分量）是一种十分有效的方法，可提高对中尺度系统动力结构的认识[1]。
- 因此问题可以表达为：将有限矩形网格的二维矢量场分解为一对流函数与势函数表示的矢量场之和的形式。

霍姆赫兹定理

唯一性定理

对于一个被封闭边界 S 包围的有限区域矢量场 $\vec{V}$，可以由其散度场 D、旋度场 ξ 和边界 S 上的法向分量 $\vec{V}_n$、切向分量 $\vec{V}_t$ 唯一确定。(但矢量场 $\vec{V}$ 不一定存在)

分解定理

任意一个满足唯一性定理的矢量场 $\vec{V}$，都可以分解成无旋的 $\vec{V}_\chi$ 和无散的 $\vec{V}_\psi$ 两部分 (但分解不唯一)。

特别地，对于二维矢量场，可以引入 χ 和 ψ:

$$\begin{cases} \vec{V}_\chi = \nabla\chi \\ \vec{V}_\psi = \nabla\psi \times \vec{k} \end{cases} \tag{1}$$

则有:

$$\vec{V} = \vec{V}_\chi + \vec{V}_\psi = \nabla\chi + \nabla\psi \times \vec{k} \tag{2}$$

即二维矢量场 $\vec{V}$ 都可以用一对势函数 χ 和流函数 ψ 的叠加来表示。关于，这种矢量场的拆分没有一个统一的名称，下面称之为势流分解。

势流分解基本原理

基本方程

$$\begin{cases} \Delta\chi = \mathcal{D} \\ \Delta\psi = -\xi \end{cases} \tag{3}$$

边界条件

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\chi}{\partial n} + \dfrac{\partial\psi}{\partial s} = V_n \qquad (x, y) \in S \\ \dfrac{\partial\chi}{\partial s} - \dfrac{\partial\psi}{\partial n} = V_t \qquad (x, y) \in S \end{cases} \tag{4}$$

等式右侧都可以通过 $\vec{V}$ 直接求出。因此已知矢量场的势流分解问题可以转化为一个耦合边界条件的泊松方程求解问题。

Poisson 方程的求解

形如 $\Delta p = f$ 的方程被称为 Poisson 方程。其常见的求解方法包括以下几种:

1. 松弛迭代法 (求解 PDE 的一般方法)
2. 有限元法 (求解 PDE 的一般方法)
3. 正余弦变换法 (等距矩形网格)

虽然方法 3 在使用条件上有一定限制，但由于等距网格数据的使用十分普遍，加上非迭代方法能够计算精确解，还有类似于快速傅里叶变换的加速算法，相比与其他两种方法具有高精度和高效率的优势。

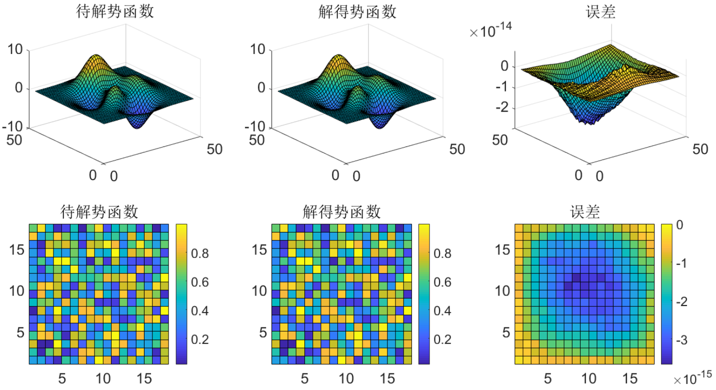

图 1: 正弦变换法 (DST) 的高精度优势

边界条件解耦

- 考虑到该问题的解并不唯一，因此可以考虑对 χ 或 ψ 设定一个有物理意义的边界条件，来进行求解。之后在原矢量场 $\vec{V}$ 中剔除该分量所表示的部分（$\vec{V}_\chi$ 或 $\vec{V}_\psi$），这样边界条件中该分量的部分就已经被去除。从而达到解耦合的目的，再使用求解 Poisson 方程的一般方法求解另一个分量即可。
- 结合海洋和大气的大中尺度运动中流函数往往在流速中占更主要的成分，且往往不关心辐散场与区域外的关系。因此在对大中尺度的流速场进行分解时假设零边界的势函数（即流速的辐散分量垂直于边界）往往具有较强的鲁棒性。

误差来源

网格错位导致的误差

由于第一步通过 χ 或 ψ 计算得到的流速场实际与与原始流场在离散表达上无法对应导致的误差。该误差大小取决于原数据在网格上的平滑程度（见图 2），是引起误差的主要原因。

边界处法向偏导数的近似导致的误差

在边界处的散度以及流速的都需要边界以外的数据进行计算，因此只能使用内部数据来近似计算边界处的偏导数，从而导致误差的出现。该误差在只在边界附近有一定影响，对于整体影响不大。

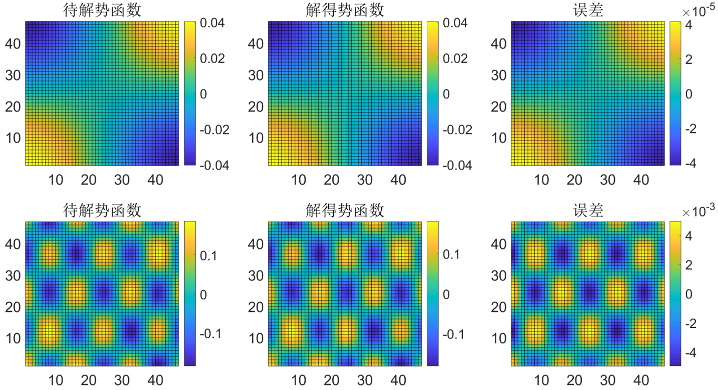

图 2: 网格错位误差 (图片中的两行为求解平滑程度不同的场的计算结果，可以看出当数据平滑性较差时（第二行）误差会显著提升)

结果与应用

下图为西太平洋深海模式流速数据及其对应的分解结果:

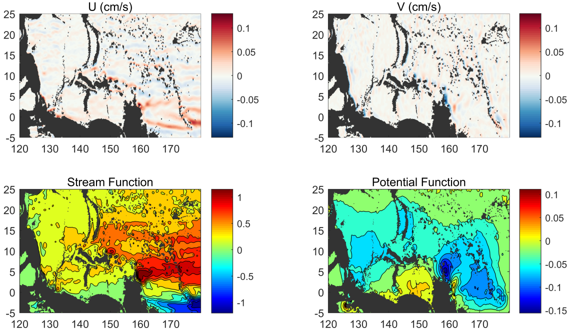

图 3: 西太平洋 2800m 深流速场(左上: 纬向流速; 右上: 经向流速; 左下: 流函数分解结果; 右下: 势函数分解结果)

结果与应用

图三是使用该方法对流速矢量场进行分解的结果。这个方法的优势有包括但不限于以下几点:

1. 可以更直观的从流函数与是势函数中挖掘流速的信息，通过观察流函数就可以很清楚的掌握整个区域的流速场信息（从图中 colorbar 可以看出，流函数富集了超过 90% 的流速特征)。
2. 流函数场和势函数场在观察中尺度涡旋（流函数极值区）与垂向运动（势函数极值区）有无可比拟的优势。

讨论与思考

通过自己的研究与理解，我尝试在前人论文[2] [3] 的方法中加入一些自己的思考与理解。

1. 前人认为使用余弦变换（DCT）具有更好的性质，误差更小[1]。但 DCT 使用第二类边界条件求解泊松方程时在全场的平均不为 0 时存在无解的问题，需要将这部分舍去才能求解，这也许有可能会引入系统误差。而在使用正弦变换（DST）解决了这个问题，DST 使用的第一类边界调节对于任意的场都是有解的。
2. DST 所使用的第一类边界在边界条件处理上有方法优势。DST 一般情况下也可以不用引入复杂边界函数单独求解边界条件[2]，将第一类边界条件减在区域边界上也可以求解非 0 的第一类边界条件泊松问题。所以，对势函数（流函数）设定一个相对合理的第一类边界条件并求解，将解出的流速场从原始场中减去，之后使用边界环路积分得到的流函数（势函数）的第一类边界条件求解。并且第一步已经扣除散度场（旋度场），发现实践中也可以保证边界环路积分为 0（小于 $1e^{-10}$）。

讨论与思考

3. 在使用 DST 时使用恰当的实现可以在不进行迭代（一次分解）的情况下也可以达到超过 95% 解释方差，其准确性足以适用于一般问题。考虑到该误差来源主要来组与网格错位问题，因此该误差具有局域性。不会因为某一处平滑性较差，而导致全场的分解结果受到影响（从图 2 也可以看出，误差基本于待解场分布一致）。因此上述误差造成的实际影响还要更小。误差问题不是十分严重。

上述方法的 matlab 代码实现如下：

`https://github.com/FattyZH/Stream-Potential-Decomposition`

参考文献

[1] 周玉淑, 曹洁. 有限区域风场的分解和重建[J]. 物理学报, 2010, 59(4):2898-2906.

[2] CHEN Q S, KUO Y H. A Harmonic-Sine Series Expansion and its Application to Partitioning and Reconstruction Problems in a Limited Area[J]. Monthly Weather Review, 1992, 120(1): 91-112.

[3] CHEN Q S, KUO Y H. A Consistency Condition for Wind-Field Reconstruction in a Limited Area and a Harmonic-Cosine Series Expansion[J]. Monthly Weather Review, 1992, 120(11):2653-2670.