Chapitre 1

Éléments de logique

Sommaire

I NOTIONS ENSEMBLISTES

1) Vocabulaire lié aux ensembles

Nous ne définirons pas rigoureusement la notion d'ensemble, celle-ci sera considérée comme intuitive. Nous nous contenterons de la « définition » suivante :

Définition 1.1

Un ensemble E *est une collection d'objets*[1]*, ceux-ci sont appelés* éléments *de* E*. Si x est un élément de* E *on écrira $x \in \mathrm{E}$ (se lit « x appartient à* E *»), dans le cas contraire on écrira $x \notin \mathrm{E}$. Si* E *n'a pas d'éléments on dira que c'est l'ensemble vide et on le notera $\varnothing$. Deux ensembles* E *et* F *sont dits égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments, on écrira alors $\mathrm{E} = \mathrm{F}$.*

☞**Exemples** :
- Les ensembles de nombres : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
- L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- Ensembles définis en *extension*, comme : $\mathrm{E} = \{1;8;6;2\}$ (éléments non ordonnés et devant apparaître une seule fois dans la liste).
- Ensembles définis en *compréhension*, comme : $\mathrm{E} = \left\{p \in \mathbb{N} \,\middle|\, p \text{ est impair}\right\} = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

1. Cependant toute collection d'objets ne constitue pas forcément un ensemble. Par exemple, le paradoxe de Bertrand Russel a montré que l'ensemble des ensembles ne peut pas exister, sinon, la considération de l'ensemble $y = \{x \mid x \notin x\}$ conduit à une absurdité.

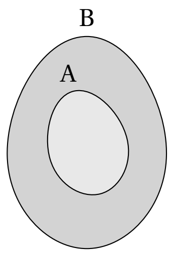
Attention !

L'écriture $\mathrm{E} = \left\{p \in \mathbb{N} \,\middle|\, p \text{ est impair}\right\}$ *ne signifie pas que* E *est un ensemble qui contient un seul élément qui s'appelle* p, *mais que* E *est l'ensemble de* ***tous*** *les entiers naturels* p *tels que* p *est impair, en langage courant on dit plutôt que* E *est l'ensemble de tous les entiers naturels impairs. Dans le langage mathématique, il faut donner un nom à ces entiers (variable muette, ici* p*) pour pouvoir ensuite les manipuler ou les décrire.*

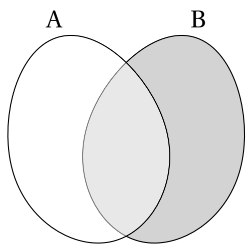
Définition 1.2

Soient A *et* B *deux ensembles :*

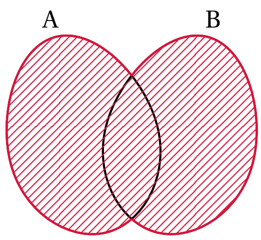
- ***L'inclusion*** *: on dit que* A *est inclus dans* B *tous les éléments de* A *sont également éléments de* B*, notation :* $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$.
- ***Ensemble des parties*** *: si* A *est inclus dans* B*, on dit que* A *est une* ***partie*** *de* B*. L'ensemble des parties de* B *est noté* $\mathscr{P}(\mathrm{B})$*, donc écrire «* $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ *» revient à écrire «* $\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{B})$ *». Par exemple, l'ensemble vide et* B *sont des parties de* B*, donc* $\varnothing \in \mathscr{P}(\mathrm{B})$ *et* $\mathrm{B} \in \mathscr{P}(\mathrm{B})$.
- ***La réunion*** *: on note* $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ *(se lit « A union B »), l'ensemble que l'on obtient en regroupant les éléments de* A *avec ceux de* B*, par exemple* $\{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$.
- ***L'intersection*** *: on note* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ *(se lit « A inter B »), l'ensemble des éléments* ***communs*** *à* A *et* B*. Par exemple* $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}^* = \mathbb{N}^*$*. On dit que deux ensembles sont* ***disjoints*** *lorsque leur intersection est l'ensemble vide.*
- ***La différence*** *: on note* $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$ *(se lit « A moins B »), l'ensemble des éléments qui sont dans* A *mais pas dans* B*. Par exemple,* $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \setminus]-\infty; 0[$.
- ***Le complémentaire d'une partie*** *: lorsque* A *est une* ***partie*** *de* B*, la différence* $\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}$ *est appelé complémentaire de* A *dans* B*, noté* $\complement_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ *(ou bien* $\overline{\mathrm{A}}$*). Par exemple* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *est l'ensemble des irrationnels.*
- ***Le produit cartésien*** *: le produit cartésien de* A *par* B *est l'ensemble des couples* $(x;y)$ *avec* $x \in \mathrm{A}$ *et* $y \in \mathrm{B}$*, on le note* $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$*, c'est à dire* $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \left\{(x;y) \,\middle|\, x \in \mathrm{E},\ y \in \mathrm{F}\right\}$*. On rappelle que* $(x;y) = (a;b)$ *si et seulement si* $x = a$ ***et*** $y = b$*. Attention à ne pas confondre un couple avec une paire (ensemble à deux éléments), par exemple :* $\{1;2\} = \{2;1\}$*, mais* $(1;2) \neq (2;1)$.



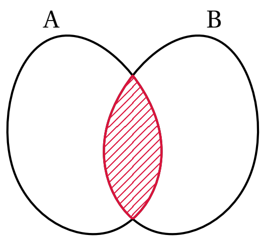
$\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$



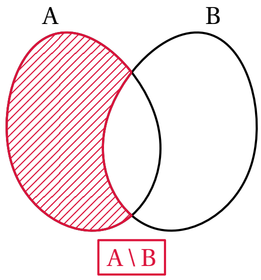
$\mathrm{A} \not\subset \mathrm{B}$

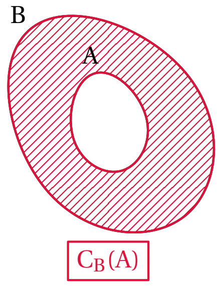


$\boxed{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}$



$\boxed{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}$





★**Exercice 1.1** *Décrire* $\mathscr{P}(E)$ *lorsque* $E = \{1;2;3\}$.

Remarque 1.1 :

- *Dire que deux ensembles* A *et* B *sont égaux, revient à dire que* A *est inclus dans* B*, et que* B *est inclus dans* A*. Donc **démontrer une égalité entre deux ensembles, peut se faire en démontrant une double inclusion**.*
- *Le produit cartésien se généralise à trois ensembles ou plus généralement à n ensembles :*

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n\}$$

Lorsque tous les ensembles sont égaux au même ensemble E*, on note* $E \times \cdots \times E = E^n$ *(ensemble des* n*-listes, ou* n*-uplets d'éléments de* E*).*

2) Propriétés

Théorème 1.1 (Propriétés de la réunion et de l'intersection)
Soient A, B *et* C *trois ensembles, on a* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. *C'est la **distributivité** de la réunion sur l'intersection.*
De même, on a $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. *C'est la **distributivité** de l'intersection sur la réunion.*

Preuve : Ceci sera démontré un peu plus loin. □

Théorème 1.2 (Propriétés du complémentaire)
Si A *et* B *sont deux parties d'un ensemble* E *:*

- $A \cup \complement_E(A) = E$.
- $\complement_E(E) = \varnothing$, $\complement_E(\varnothing) = E$.
- $\complement_E(\complement_E(A)) = A$.
- $\complement_E(A \cup B) = \complement_E(A) \cap \complement_E(B)$ *(loi de De Morgan*[2]*).*
- $\complement_E(A \cap B) = \complement_E(A) \cup \complement_E(B)$ *(2e loi de De Morgan).*

Preuve : Ceci sera démontré un peu plus loin. □

II NOTIONS DE LOGIQUE

1) Propositions

Nous nous contenterons de la « définition » suivante :

Définition 1.3 (Proposition)
Une proposition est une phrase (ou assertion) qui a un sens mathématique et qui est soit vraie soit fausse[3]*. On dira qu'une proposition n'a que deux valeurs de vérité : vraie (notée V) et fausse (notée F).*
Si P *désigne une assertion, on notera* $\neg P$ *sa négation (lire « non* P *»).*

☞**Exemples** :

- « 2 est un entier pair » est une proposition vraie.
- « 3 est un entier pair » est une proposition fausse.

2. *DE MORGAN Augustus* (1806 – 1871) logicien anglais.
3. Il ne doit pas y avoir d'autre alternative selon le principe du tiers exclu.

– « n est un entier pair » n'est pas une proposition car sa valeur de vérité dépend de la valeur de n, un telle phrase est appelée **prédicat** portant sur la variable n à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on pourrait noter ce prédicat $P(n)$ par exemple.
– Si A et B désignent deux ensembles, alors la phrase $A \subset B$ est une proposition (tous les éléments de A sont éléments de B). Sa négation s'écrit $A \not\subset B$ (un élément de A n'est pas forcément un élément de B).
– L'expression « $\mathbb{N} \in \mathbb{R}$ » est une proposition, elle est fausse car $\mathbb{N}$ n'est pas un réel.
– L'expression « $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ » est une proposition, elle est vraie car tout naturel est aussi un réel.

Si P est une proposition, la valeur de vérité de $\neg P$ se déduit de celle de P conformément à la table de vérité suivante :

P	$\neg$P
V	F
F	V

Par convention :

Dans les raisonnements mathématiques on n'écrit que des propositions vraies. Si P est une proposition, au lieu d'écrire « P est vraie », on écrit plus simplement « P », et au lieu d'écrire « P est fausse », on écrit plus simplement « $\neg$P », c'est à dire la négation.

2) Connecteurs logiques

Ceux-ci permettent de relier deux propositions pour en donner une troisième.

Définition 1.4 (conjonction, disjonction inclusive)
Soient P *et* Q *deux propositions. On dit que :*
• la proposition « $P \wedge Q$ » (lire « P et Q ») est vraie lorsque les deux propositions le sont simultanément, sinon on dira qu'elle fausse.
• la proposition « $P \vee Q$ » (lire « P ou Q ») est vraie lorsqu'au moins une des deux propositions est vraie (voire les deux), sinon on dira qu'elle fausse.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Définition 1.5 (implication, équivalence)
Soient P *et* Q *deux propositions. On dit que :*
*• la proposition « $P \implies Q$ » (lire « P implication Q ») est fausse lorsque P **est vraie mais pas** Q.*
*• la proposition « $P \iff Q$ » (lire « P équivalence Q ») est vraie lorsque les deux propositions ont la **même valeur de vérité**.*

P	Q	$P \implies Q$	$P \iff Q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

☞**Exemples** :
– La proposition « (2 est pair) $\implies$ (3 est impair) » est vraie.
– La proposition « (2 est impair) $\implies$ (3 est pair) » est vraie[4].
– La proposition « (2 est pair) $\implies$ (3 est pair) » est fausse.
– La proposition « (2 est impair) $\iff$ (3 est pair) » est vraie.

4. Ceci peut paraître surprenant au premier abord, mais nous verrons qu'en écrivant la négation cela devient évident.

Définition 1.6 (implique, équivaut)

Soient P *et* Q *deux propositions.*
• *Lorsque la proposition «* $P \implies Q$ *» est vraie on dit «* P *implique* Q *» (ou « si* P *alors* Q *»).*
• *Lorsque la proposition «* $P \iff Q$ *» est vraie on dit que «* P *équivaut à* Q *» (ou «* P *est équivalent à* Q *» ou encore «* P *si et seulement si* Q *»).*

Principe de déduction

Soient P et Q deux propositions, si on sait que P implique Q, et que P est vraie, alors on a forcément Q vraie d'après la définition de l'implication. C'est le **principe de déduction**[5].

3) Propriétés

Maintenant que nous savons ce que sont des propositions équivalentes, nous allons pouvoir établir les propriétés suivantes :

Théorème 1.3

Soient P *et* Q *deux propositions :*
– *La proposition «* $\neg\neg P$ *» est équivalente à «* P *».*
– *La proposition «* $\neg(P \wedge Q)$ *» est équivalente à «* $(\neg P) \vee (\neg Q)$ *» (1re loi de De Morgan).*
– *La proposition «* $\neg(P \vee Q)$ *» est équivalente à «* $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ *» (2e loi de De Morgan).*
– *L'implication «* $P \implies Q$ *» est équivalente à «* $(\neg P) \vee Q$ *».*
– *La proposition «* $\neg(P \implies Q)$ *» est équivalente à «* $P \wedge (\neg Q)$ *».*
– *La proposition «* $P \iff Q$ *» est équivalente à «* $(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$ *».*
– *La proposition «* $P \iff Q$ *» est équivalente à «* $(\neg P) \iff (\neg Q)$ *».*

Preuve : La première propriété est évidente. Les autres se montrent avec une table de vérité (à compléter en exercice) :

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$	$\neg(P \vee Q)$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$	$P \implies Q$	$(\neg P) \vee Q$
V	V						
V	F						
F	V						
F	F						

P	Q	$\neg(P \implies Q)$	$P \wedge (\neg Q)$	$P \iff Q$	$(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$	$(\neg P) \iff (\neg Q)$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

□

☞**Exemple** : La négation de la proposition « (2 est impair) $\implies$ (3 est pair) » est équivalente à la proposition « (2 est impair) $\wedge$ (3 est impair) », or celle-ci est fausse, et donc la première est vraie.

★**Exercice 1.2** *Sans utiliser de table de vérité, redémontrer (en utilisant les autres propriétés) que :*
« $\neg(P \implies Q)$ *» est équivalente à «* $P \wedge (\neg Q)$ *».*

Définition 1.7 (réciproque, contraposée)

Soient P *et* Q *deux propositions.*
• *La réciproque de l'implication «* $P \implies Q$ *» est l'implication «* $Q \implies P$ *».*
• *La contraposée de l'implication «* $P \implies Q$ *» est l'implication «* $(\neg Q) \implies (\neg P)$ *».*

Il découle alors du théorème précédent :

Théorème 1.4

Une implication et sa contraposée sont équivalentes.
Deux propositions sont équivalentes si et seulement si les implications dans les deux sens sont vraies.

5. Par contre, si P implique Q, et que P est fausse, alors on ne peut rien dire de Q.

Remarque 1.2 – *Ce résultat est à connaître car très utilisé dans les raisonnements (raisonnements par contraposition, raisonnements par double implication).*

4) Quantificateurs

Les quantificateurs servent à construire des propositions à partir d'un prédicat $\mathrm{P}(x)$, dont la variable x prend ses valeurs dans un certain ensemble E. On rencontre :

- Le quantificateur **universel** : « $\forall x \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(x)$ » (se lit « pour tout x dans E, $\mathrm{P}(x)$ [sous entendu est vraie] »). Par exemple, la proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$ » se lit « pour tout réel x, le carré de x est positif ou nul », ou bien encore « le carré de tout réel est positif ».
- Le quantificateur **existentiel** : « $\exists x \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(x)$ » (se lit « il existe au moins un x de E tel que $\mathrm{P}(x)$ [sous entendu est vraie] »). Par exemple, la proposition « $\exists x \in \mathbb{C}, x^2 = -1$ », se lit « il existe au moins un nombre complexe dont le carré vaut -1 ».

Remarque 1.3 :

- *On rencontre aussi parfois la proposition* « $\exists! x \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(x)$ » *(se lit « il existe un unique x de E tel que $\mathrm{P}(x)$ [sous entendu est vraie] »). Par exemple,* « $\exists! x \in \mathbb{R}^+, x^2 = 2$ ».
- *On peut trouver plusieurs quantificateurs dans une même proposition. Par exemple,* « $\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists! x \in \mathbb{R}^+, x^2 = y$ » *traduit que tout réel positif est le carré d'un unique réel positif.*

Attention !

Les propositions « $\forall x \in \mathrm{A}, \exists y \in \mathrm{B}, \mathrm{P}(x,y)$ » *et* « $\exists y \in \mathrm{B}, \forall x \in \mathrm{A}, \mathrm{P}(x,y)$ »*, n'ont pas le même sens. En effet, dans la première le y **dépend** de x alors que dans la seconde il s'agit du **même** y pour tous les x.*

À retenir : utilisation des quantificateurs

Celle-ci est régie par les règles suivantes :

a) La négation de $\forall$ est $\exists$ (et vice - versa).

b) On peut intervertir deux quantificateurs de même nature.

c) On ne peut pas intervertir deux quantificateurs de nature différente.

☞**Exemples** :

- L'assertion « $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}^+, y^2 = x$ » est vraie, elle traduit que tout réel positif (x) est le carré d'au moins un réel positif (y). Mais l'assertion « $\exists y \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^+, y^2 = x$ » traduit que tout réel positif (x) est le carré d'un **même réel** (y), ce qui est évidemment faux. Sa négation est « $\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}^+, y^2 \neq x$ ».
- On a toujours l'implication suivante : $\big(\exists x \in \mathrm{A}, \forall y \in \mathrm{B}, \mathrm{P}(x,y)\big) \implies \big(\forall y \in \mathrm{B}, \exists x \in \mathrm{A}, \mathrm{P}(x,y)\big)$.
- La négation de « $\forall x \in \mathrm{A}, \exists y \in \mathrm{B}, \mathrm{P}(x,y)$ » est « $\exists x \in \mathrm{A}, \forall y \in \mathrm{B}, \neg(\mathrm{P}(x,y))$ ».

★**Exercice 1.3**

1/ *Traduire dans le langage mathématique : la suite (u_n) est majorée. Écrire la négation. Qu'en est-il de la suite définie par $u_n = n^2$? Justifier.*

2/ *Traduire dans le langage courant les propositions suivantes :*

a) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant y$.

b) $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, y \leqslant x$.

5) Retour sur les ensembles

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

Intersection d'ensembles

Si x désigne un élément de E, démontrer que $x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, c'est démontrer la proposition « $(x \in \mathrm{A})$ et $(x \in \mathrm{B})$ ». On peut donc écrire : $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{x \in \mathrm{E} \mid x \in \mathrm{A} \text{ et } x \in \mathrm{B}\}$.

Réunion d'ensembles

Si x désigne un élément de E, démontrer que $x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, c'est démontrer la proposition « $(x \in \mathrm{A})$ ou $(x \in \mathrm{B})$ ». On peut donc écrire : $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{x \in \mathrm{E} \mid x \in \mathrm{A} \text{ ou } x \in \mathrm{B}\}$.

Complémentaire

Si x désigne un élément de E, démontrer que $x \in \complement_E(A)$, c'est démontrer la proposition « $(x \notin A)$. On peut donc écrire : $\complement_E(A) = \{x \in E \mid x \notin A\}$.

Différence d'ensembles

Si x désigne un élément de E, démontrer que $x \in A \setminus B$, c'est démontrer la proposition « $(x \in A)$ et $(x \notin B)$ ». On peut donc écrire : $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$, il en découle que $A \setminus B = A \cap \complement_E(B)$.

Inclusion d'ensembles

Démontrer que A est inclus dans B, c'est démontrer que les éléments de A sont également des éléments de B, c'est à dire, pour tout élément x de E, on a : $x \in A \implies x \in B$. Pour établir ceci, on prend un élément x **quelconque** de E, et on démontre la proposition $x \in A \implies x \in B$.

Égalité d'ensembles

Démontrer que A est égal à B, c'est démontrer la double inclusion : $A \subset B$ et $B \subset A$, c'est à dire, pour tout élément x de E, on a : $(x \in A \implies x \in B)$ et $(x \in B \implies x \in A)$, ce qui équivaut à : $x \in A \iff x \in B$. Pour établir ceci, on prend un élément x **quelconque** de E, et on démontre la proposition $x \in A \iff x \in B$.

À retenir

Démontrer que $A \subset B$, c'est démontrer : $\forall x \in E, x \in A \implies x \in B$.
Démontrer que $A = B$, c'est démontrer : $\forall x \in E, x \in A \iff x \in B$.

☞**Exemples** :

– Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E, démontrer la distributivité de la réunion sur l'intersection c'est démontrer :

$$\forall x \in E, \big(x \in A \cup (B \cap C)\big) \iff \big(x \in [A \cup B] \cap [A \cup C]\big)$$

On considère un x quelconque dans E, on peut alors montrer l'équivalence avec une table de vérité (à compléter en exercice) :

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in A \cup (B \cap C)$	$x \in [A \cup B] \cap [A \cup C]$
V	V	V		
V	V	F		
V	F	V		
V	F	F		
F	V	V		
F	V	F		
F	F	V		
F	F	F		

– Soient A et B deux parties d'un ensemble E, soit x un élément quelconque de E, alors :

$$\begin{aligned} x \in \complement_E(A \cup B) &\iff \neg(x \in A \cup B) \\ &\iff \neg([x \in A] \vee [x \in B]) \\ &\iff [x \notin A] \wedge [x \notin B] \\ &\iff [x \in \complement_E(A)] \wedge [x \in \complement_E(B)] \\ &\iff x \in \complement_E(A) \cap \complement_E(B) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\complement_E(A \cup B) = \complement_E(A) \cap \complement_E(B)$.

★**Exercice 1.4** *En s'inspirant des deux exemples ci-dessus, démontrer le théorème 1.1 et le théorème 1.2.*

Résoudre une équation

Une équation dans $\mathbb{R}$, d'inconnue x réelle peut toujours se mettre sous la forme $f(x) = 0$. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$ c'est déterminer la partie S de $\mathbb{R}$ telle que « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \iff x \in S$ » (S est appelé l'ensemble des solutions réelles). La définition est la même pour une inéquation dans $\mathbb{R}$.

☞**Exemple** : Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{1}{x} < -1$, on écrit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} < -1 &\iff \frac{1}{x} + 1 < 0\\ &\iff \frac{x+1}{x} < 0\\ &\iff (x+1)x < 0 \text{ et } x \neq 0\\ &\iff x \in]-1\,;0[\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions réelles est donc $]-1\,;0[$.

III LE RAISONNEMENT

1) Raisonnement par l'absurde

Soit P une proposition dont on cherche à démontrer qu'elle est vraie. Raisonner par l'absurde c'est faire l'hypothèse que P est fausse, autrement dit, on suppose non(P), on cherche alors à obtenir une contradiction, c'est à dire une proposition Q dont sait qu'elle est fausse, et telle que non(P) $\Longrightarrow$ Q. Si on n'y parvient, cela veut dire que « Q et non(Q) » est vraie, ce qui est impossible car une telle proposition est toujours fausse : **c'est le principe de non contradiction**. La conclusion est que P est vraie.

☞**Exemple** : montrons que $\sqrt{2}$ est un irrationnel par l'absurde :

On suppose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers strictement positifs et premiers entre eux. En élevant au carré on a $2q^2 = p^2$, ce qui entraîne que p est pair et donc $p = 2a$ avec a entier, d'où $2q^2 = 4a^2$ *i.e.* $q^2 = 2a^2$, donc q est pair lui aussi et par conséquent p et q ne sont pas premiers entre eux : contradiction.

2) Raisonnement par analyse-synthèse

Raisonner par analyse-synthèse lorsque l'on cherche la ou les solutions à un problème, c'est raisonner en deux étapes qui sont :

- **l'analyse** : on suppose que l'on a une solution du problème et on cherche à en déduire toutes les propriétés possibles de cette solution, l'objectif étant d'essayer de l'identifier au mieux,
- **la synthèse** : elle consiste à déterminer parmi tous les objets mathématiques ayant les propriétés requises (obtenues lors de l'analyse), ceux qui sont effectivement solutions du problème.

☞**Exemple** : Montrons que toute fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ est la somme d'une fonction affine et d'une fonction qui s'annule en 0 et en 1.

• **Analyse** : supposons qu'il existe une fonction g qui s'annule en 0 et en 1, ainsi que deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + ax + b$. En évaluant en 0 on doit avoir $f(0) = b$, en évaluant en 1 on doit avoir $f(1) = a + b$, d'où $a = f(1) - b = f(1) - f(0)$. Maintenant que a et b sont connus, on en déduit que g est la fonction $x \mapsto f(x) - ax - b$

• **Synthèse** : posons $b = f(0)$, $a = f(1) - f(0)$ et $g : x \mapsto f(x) - ax - b$. Il est clair que $f(x) = g(x) + ax + b$, d'autre part $g(0) = f(0) - b = 0$ et $g(1) = f(1) - a - b = f(1) - f(1) + f(0) - f(0) = 0$. Donc a, b et g sont bien solution du problème et celle-ci est unique.

3) Démontrer une implication

Par définition, l'implication « P $\Longrightarrow$ Q » est fausse lorsque P est vraie et Q fausse, elle est vraie dans les autres cas. En particulier, si P est fausse, l'implication est nécessairement vraie quelque soit la valeur de vérité de Q. Par contre lorsque P est vraie, tout dépend de Q. Nous savons également que l'implication « P $\Longrightarrow$ Q » est équivalente à sa contraposée « $\neg$Q $\Longrightarrow$ $\neg$P », donc démontrer l'une c'est démontrer l'autre.

À retenir : pour démontrer une implication.

• **Méthode directe** : on suppose que la proposition P est vraie (c'est **l'hypothèse**), on cherche alors à établir que nécessairement la proposition Q est vraie elle aussi.

• **Par l'absurde** : on suppose le contraire de P $\Longrightarrow$ Q, c'est à dire on suppose « P $\wedge$ $\neg$Q » (*i.e.* P est vraie et Q est fausse. On montre alors que ceci conduit à une contradiction, ce qui entraîne que l'hypothèse faite est fausse et par conséquent P $\Longrightarrow$ Q.

• **Par contraposition** : on cherche à établir que $\neg Q \implies \neg P$.

Remarque 1.4 – *Pour démontrer « $P \vee Q$ » : cette proposition est équivalente à « $\neg P \implies Q$ ». Par conséquent, démontrer « $P \vee Q$ » revient à démontrer « $\neg P \implies Q$ ».*

4) L'équivalence

Par définition, l'équivalence « $P \iff Q$ » est vraie lorsque P et Q ont même valeur de vérité. Nous savons qu'elle équivaut à « $(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$ », donc montrer l'équivalence c'est montrer une implication **et** réciproque.

À retenir : pour démontrer une équivalence.

• **Par double implication** : on établit dans un premier temps que $P \implies Q$, puis dans un deuxième temps on établit la réciproque, c'est à dire que $Q \implies P$.
• **Méthode directe** : on suppose que la proposition P est vraie (**hypothèse**) puis on cherche à établir que Q est vraie **en s'assurant à chaque étape du raisonnement que l'équivalence est conservée**[6].

5) La récurrence

À retenir : rappel du principe de récurrence

Soit $P(n)$ un prédicat portant sur une variable $n \in \mathbb{N}$.
Si on a $P(0)$ (initialisation) et si $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \implies P(n+1)$ (hérédité), alors nécessairement $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

Remarque 1.5 :

- *L'initialisation est juste une vérification, mais elle est indispensable.*
  Par exemple, soit le prédicat $P(n)$:« $n = n+1$ », celui-ci vérifie bien l'hérédité ($n = n+1 \implies n+1 = n+2$), mais pour tout n, $P(n)$ est fausse.
- *Démontrer l'hérédité c'est démontrer une implication. En général on le fait par la méthode directe, on fait donc l'hypothèse $P(n)$, c'est ce que l'on appelle **l'hypothèse de récurrence**, et on essaie d'en déduire $P(n+1)$.*

Théorème 1.5 (variantes)

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $P(n)$ un prédicat portant sur une variable $n \in \mathbb{Z}$.
• *Si on a $P(a)$ et si $\forall n \geqslant a, P(n) \implies P(n+1)$, alors on peut conclure que $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geqslant a \implies P(n)$.*
• *Si on a $P(a)$ et si $\forall n \leqslant a, P(n) \implies P(n-1)$, alors on peut conclure que $\forall n \in \mathbb{Z}, n \leqslant a \implies P(n)$ (récurrence descendante).*

Preuve : Pour le premier point, on applique le principe de récurrence au prédicat $Q(n) = P(n+a)$ avec $n \in \mathbb{N}$. Pour le deuxième, on applique le principe de récurrence au prédicat $Q(n) = P(a-n)$ avec $n \in \mathbb{N}$. □

★**Exercice 1.5**

1/ *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2/ *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6}$.

3/ *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Théorème 1.6 (récurrence forte)

Soit $P(n)$ un prédicat portant sur une variable $n \in \mathbb{N}$.
Si on a $P(0)$ (initialisation) et si $\forall \in \mathbb{N}, (P(0) \wedge P(1) \wedge \cdots \wedge P(n)) \implies P(n+1)$ (hérédité), alors nécessairement $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

Preuve : Appliquer la principe de récurrence au prédicat $Q(n) = P(0) \wedge P(1) \wedge \cdots \wedge P(n)$. □

6. Cette méthode n'est pas toujours applicable, mais c'est celle que l'on utilise dans la mesure du possible pour résoudre une équation ou une inéquation.

À retenir

La récurrence forte est utile lorsque le seul fait que $\mathrm{P}(n)$ soit vraie ne suffit pas à en déduire $\mathrm{P}(n+1)$. L'hypothèse de récurrence peut alors s'écrire : « supposons la propriété vraie **jusqu'au** rang n ».

★**Exercice 1.6** *Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (suite de Fibonacci), montrer par récurrence que pour tout n :*

$$u_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

IV SOLUTION DES EXERCICES

Solution 1.1 *Dans l'ensemble* $\{1;2;3\}$ *il y a exactement* 8 *parties, donc :*

$$\mathscr{P}(\mathrm{E}) = \{\varnothing;\{1\};\{2\};\{3\},\{1;2\};\{1;3\};\{2;3\};\{1;2;3\}\}$$

Solution 1.2 *« $\mathrm{P} \implies \mathrm{Q}$ » équivaut à « $(\neg\mathrm{P}) \vee \mathrm{Q}$ », donc « $\neg(\mathrm{P} \implies \mathrm{Q})$ » équivaut à « $\neg((\neg\mathrm{P}) \vee \mathrm{Q})$ », ce qui équivaut encore à « $(\neg\neg\mathrm{P}) \wedge (\neg\mathrm{Q})$ » (loi de De Morgan), soit encore à « $\mathrm{P} \wedge (\neg\mathrm{Q})$ ».*

Solution 1.3

1/ $\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \mathrm{M}$. *La négation est* $\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > \mathrm{M}$. *La suite (n^2) n'est pas majorée, en effet : soit* $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$, *si $n \in \mathbb{N}$ avec $n > \mathrm{M}$, alors $(n+1)^2 > n > \mathrm{M}$.*

2/ *Traduction :*

a) *L'ensemble $\mathbb{R}$ a un maximum, cette proposition est fausse, sa négation s'écrit $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x > y$.*

b) *L'ensemble $\mathbb{N}$ a un minimum, cette proposition est vraie.*

Solution 1.4

1/ *Démontrer la distributivité de la intersection sur la réunion, c'est démontrer :*

$$\forall x \in \mathrm{E}, \big(x \in \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C})\big) \iff \big(x \in [\mathrm{A} \cap \mathrm{B}] \cup [\mathrm{A} \cap \mathrm{C}]\big)$$

On considère un x quelconque dans E, *on peut alors montrer l'équivalence avec une table de vérité :*

$x \in \mathrm{A}$	$x \in \mathrm{B}$	$x \in \mathrm{C}$	$x \in \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C})$	$x \in (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

2/ *Pour le théorème 1.2, les trois premiers résultats sont évidents. Montrons les lois de De Morgan à l'aide d'une table de vérité, soient* A *et* B *deux parties de* E *et x un élément quelconque de* E :

$x \in \mathrm{A}$	$x \in \mathrm{B}$	$x \in \complement_{\mathrm{E}}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$	$x \in \complement_{\mathrm{E}}(\mathrm{A}) \cup \complement_{\mathrm{E}}(\mathrm{B})$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	V	V

On en déduit que $\complement_{\mathrm{E}}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \complement_{\mathrm{E}}(\mathrm{A}) \cup \complement_{\mathrm{E}}(\mathrm{B})$. *On précède de même pour l'autre loi.*

Solution 1.5

1/ *On vérifie la relation pour $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$. On suppose ensuite que la relation est vérifiée pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors au rang suivant :*

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{: c'est la formule au rang } n+1$$

Donc la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2/ *Même méthode.*

3/ *Même méthode.*

Solution 1.6 *Comme la relation de récurrence est à deux pas, on procède à une récurrence forte avec une initialisation pour* $n = 0$ *et* $n = 1$*. Notons* $a = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$, $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ *et* $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$*. On vérifie qu'au rang* $n = 0$ *on a* $ar_1^0 + br_2^0 = a + b = 1 = u_0$*, et que au rang* $n = 1$ *on a* $ar_1^1 + br_2^1 = ar_1 + br_2 = 1 = u_1$*. Pour un entier* $n \geqslant 1$*, on suppose la formule établie pour tous les entiers* $k \in [\![0;n]\!]$ *(hypothèse de récurrence forte), on a* $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$*, comme* n *et* $n-1$ *sont dans* $[\![0;n]\!]$*, l'hypothèse permet d'écrire* $u_{n+1} = ar_1^n + br_2^n + ar_1^{n-1} + br_2^{n-1} = ar_1^{n-1}[r_1+1] + br_2^{n-1}[r_2+1]$*, or on peut vérifier que* $r_1 + 1 = r_1^2$ *(de même pour* r_2*), on en déduit que* $u_{n+1} = ar_1^{n+1} + br_2^{n+1}$*, c'est la formule au rang* $n+1$*. La formule est donc établie pour tout entier* n*.*