Chapitre 23

Dénombrement

Sommaire

I CARDINAL D'UN ENSEMBLE FINI

1) Rappels : injections, surjections, bijections, permutations

a) La composée de deux injections (respectivement surjections) est une injection (respectivement surjection).

b) Si $f: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est injective, alors f **induit** une bijection de E sur $\mathrm{Im}(f)$.

c) Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective.

d) Si $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective.

e) Si $f: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est une application, alors f induit une surjection de E sur $\mathrm{Im}(f)$.

f) Si $f: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est surjective, alors il existe une application $g: \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$.

Définition 23.1

Soit E *un ensemble, on appelle permutation de* E *toute bijection de* E *vers* E. *L'ensemble des permutations de* E *est noté* $\mathscr{S}(\mathrm{E})$.

Théorème 23.1

Soit E *un ensemble non vide, alors* $(\mathscr{S}(\mathrm{E}), \circ)$ *est un groupe (non commutatif en général), appelé groupe des permutations de* E.

Preuve : Celle - ci est simple et laissée en exercice. On vérifie que l'élément neutre est l'application identité de E : id_{E}, et que le symétrique de $f \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ est la bijection réciproque f^{-1}. □

2) Ensembles finis

Définition 23.2

Soit E un ensemble non vide, on dit que E est fini lorsqu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection $\phi : [\![1\,;n]\!] \to \mathrm{E}$. Si c'est le cas, on pose $\mathrm{card}(\mathrm{E}) = n$ (ou $|\mathrm{E}| = n$ ou $\#(\mathrm{E}) = n$), sinon on dit que E est un ensemble infini. Par convention $\varnothing$ est un ensemble fini de cardinal nul.

Remarque 23.1 :

- *Dire que E est fini de cardinal $n \geqslant 1$ revient à dire que l'on peut indexer les éléments de E de 1 à n : $\mathrm{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ (les éléments étant distincts deux à deux).*
- *Si E est fini de cardinal $n+1$ et si $a \in \mathrm{E}$, alors $\mathrm{E} \setminus \{a\}$ est fini de cardinal n.*
  En effet : soit $\phi : [\![1\,;n+1]\!] \to \mathrm{E}$ une bijection, soit τ la permutation de E qui échange $\phi(n+1)$ et a, alors $\tau \circ \phi : [\![1\,;n+1]\!] \to \mathrm{E}$ est une bijection qui envoie $n+1$ en a, elle induit donc une bijection de $[\![1\,;n]\!]$ sur $\mathrm{E} \setminus \{a\}$.
- *Si E est fini de cardinal n et $b \notin \mathrm{E}$, alors $\mathrm{E} \cup \{b\}$ est fini de cardinal $n+1$.*

Théorème 23.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, toute partie de $[\![1\,;n]\!]$ est un ensemble fini de cardinal au plus égal à n. De plus, si $\mathrm{F} \subset [\![1\,;n]\!]$ et si $\mathrm{card}(\mathrm{F}) = n$ alors $\mathrm{F} = [\![1\,;n]\!]$.

Preuve : Par récurrence sur n : pour $n = 1$ c'est évident. Supposons le théorème établi pour un entier $n \geqslant 1$ et soit F une partie de $[\![1\,;n+1]\!]$. Si $n+1 \notin \mathrm{F}$, alors F est une partie de $[\![1\,;n]\!]$ donc (hypothèse de récurrence) F est fini et $\mathrm{card}(\mathrm{F}) \leqslant n < n+1$. Si $n+1 \in \mathrm{F}$, alors $\mathrm{F} \setminus \{n+1\}$ est une partie de $[\![1\,;n]\!]$, donc $\mathrm{F} \setminus \{n+1\}$ est un ensemble fini de cardinal $p \leqslant n$, mais alors F est fini de cardinal $p+1 \leqslant n+1$. Supposons maintenant que $\mathrm{card}(\mathrm{F}) = n+1$, on a nécessairement $n+1 \in \mathrm{F}$, d'où $\mathrm{F} \setminus \{n+1\} \subset [\![1\,;n]\!]$ et $\mathrm{card}(\mathrm{F} \setminus \{n+1\}) = n$, donc $\mathrm{F} \setminus \{n+1\} = [\![1\,;n]\!]$ (hypothèse de récurrence) et finalement $\mathrm{F} = [\![1\,;n+1]\!]$. □

Théorème 23.3

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, et soit $f : [\![1\,;n]\!] \to [\![1\,;p]\!]$ une application :

- *Si f est injective, alors $n \leqslant p$.*
- *Si f est surjective, alors $n \geqslant p$.*
- *Si f est bijective, alors $n = p$.*

Preuve : On remarque que la troisième propriété découle des deux précédentes. Montrons la première : on a $f : [\![1\,;n]\!] \to [\![1\,;p]\!]$ une injection, alors f induit une bijection de $[\![1\,;n]\!]$ sur $\mathrm{Im}(f)$, donc $\mathrm{Im}(f)$ est fini de cardinal n, or $\mathrm{Im}(f)$ est une partie de $[\![1\,;p]\!]$, donc $\mathrm{Im}(f)$ est fini de cardinal au plus p, *i.e.* $n \leqslant p$.

Montrons la deuxième : $f : [\![1\,;n]\!] \to [\![1\,;p]\!]$ est surjective, alors il existe une application $g : [\![1\,;p]\!] \to [\![1\,;n]\!]$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_{[\![1;p]\!]}$, donc g est injective et par conséquent $p \leqslant n$. □

Conséquence : soit E un ensemble fini non vide, il existe un entier $n \geqslant 1$ et une bijection $\phi : [\![1\,;n]\!] \to \mathrm{E}$, s'il existe un autre entier p et une bijection $\psi : [\![1\,;p]\!] \to \mathrm{E}$, alors l'application $\psi^{-1} \circ \phi$ est une bijection de $[\![1\,;n]\!]$ sur $[\![1\,;p]\!]$, donc $n = p$. Ce qui prouve l'unicité du nombre $\mathrm{card}(\mathrm{E})$ et justifie à posteriori la définition.

Théorème 23.4

Soit $n \geqslant 1$, toute application injective (respectivement surjective) de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;n]\!]$ est bijective.

Preuve : Si $f : [\![1\,;n]\!] \to [\![1\,;n]\!]$ est injective, alors f induit une bijection de $[\![1\,;n]\!]$ sur $\mathrm{Im}(f)$, donc $\mathrm{Im}(f)$ est fini de cardinal n, mais $\mathrm{Im}(f) \subset [\![1\,;n]\!]$, donc $\mathrm{Im}(f) = [\![1\,;n]\!]$ *i.e.* f est surjective (et donc bijective).

Supposons maintenant que f est surjective, alors il existe $g : [\![1\,;n]\!] \to [\![1\,;n]\!]$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_{[\![1;n]\!]}$, mais alors g est injective, donc bijective d'après ce qui précède et $f = (f \circ g) \circ g^{-1}$ composée de bijections, donc f est bijective. □

3) Propriétés du cardinal

Théorème 23.5

Soient E et F deux ensembles finis non vides, avec $n = \mathrm{card}(\mathrm{E})$ et $p = \mathrm{card}(\mathrm{F})$ et soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application :

- *Si f est injective alors $n \leqslant p$.*
- *Si f est surjective alors $n \geqslant p$.*
- *Si f est bijective alors $n = p$.*

Preuve : Soient $\phi_1 : [\![1;n]\!] \to \mathrm{E}$ et $\phi_2 : [\![1;p]\!] \to \mathrm{F}$ deux bijections. Si f est injective alors $\phi_2 \circ f \circ \phi_1$ est une injection de $[\![1;n]\!]$ vers $[\![1;p]\!]$, donc $n \leqslant p$. Le raisonnement est le même pour les deux autres points. □

Remarque 23.2 – *Il en découle que si* F *est en bijection avec* E *et si* E *est fini, alors* F *est fini de même cardinal de* E.

Théorème 23.6

Soient E *et* F *deux ensembles finis non vides* ***de même cardinal*** *et soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) f est injective.

b) f est surjective.

c) f est bijective.

Preuve : Soient $\phi : [\![1;n]\!] \to \mathrm{E}$ et $\psi : [\![1;n]\!] \to \mathrm{F}$ deux bijections, alors $g = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$ est une application de $[\![1;n]\!]$ vers lui - même, avec $f = \psi \circ g \circ \phi^{-1}$. Si f est injective, alors g aussi, donc g est bijective et f aussi. Si f est surjective, alors g aussi et donc g est bijective et f aussi. □

☞**Exemple** : Soit A un anneau intègre fini, alors A est nécessairement un corps. En effet, soit a un élément non nul de A, l'application $f : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ définie par $f(x) = a \times x$ est injective (car A est intègre), or A est fini, donc f est bijective, par conséquent il existe $a' \in \mathrm{A}$ tel que $f(a') = 1$ *i.e.* $a \times a' = 1$. De même il existe $a'' \in \mathrm{A}$ tel que $a'' \times a = 1$, mais alors $a'' = a'' \times (a \times a') = (a'' \times a) \times a' = a'$. Finalement, tout élément non nul de A possède un inverse et donc A est un corps.

Théorème 23.7

Si E *est un ensemble fini et si* F *est une partie de* E, *alors* F *est fini. De plus, si* $\mathrm{card}(\mathrm{F}) = \mathrm{card}(\mathrm{E})$, *alors* $\mathrm{F} = \mathrm{E}$.

Preuve : On écarte le cas évident où $\mathrm{E} = \varnothing$. Soit $n = \mathrm{card}(\mathrm{E})$ et $\phi : [\![1;n]\!] \to \mathrm{E}$ une bijection. Notons $i : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ définie par $i(x) = x$, i est une injection donc $g = \phi^{-1} \circ i$ est une injection de F vers $[\![1;n]\!]$ qui induit donc une bijection de F sur $\mathrm{Im}(g)$, or $\mathrm{Im}(g)$ est une partie de $[\![1;n]\!]$, donc $\mathrm{Im}(g)$ est un ensemble fini de cardinal $p \leqslant n$, par conséquent F est fini de cardinal p. Si $n = p$, alors $\mathrm{Im}(g) = [\![1;n]\!]$ donc g est une bijection ce qui entraîne que i est une bijection, donc $\mathrm{Im}(i) = \mathrm{E}$, c'est à dire $\mathrm{F} = \mathrm{E}$. □

Théorème 23.8

Soient E *et* F *deux ensembles finis, l'ensemble* $\mathrm{E} \cup \mathrm{F}$ *est fini et :*

$$\mathrm{card}(\mathrm{E} \cup \mathrm{F}) = \mathrm{card}(\mathrm{E}) + \mathrm{card}(\mathrm{F}) - \mathrm{card}(\mathrm{E} \cap \mathrm{F})$$

Preuve : Si l'un des deux est vide, il n'y a rien à démontrer. Supposons E et F non vides, dans un premier temps on envisage le cas où $\mathrm{E} \cap \mathrm{F} = \varnothing$, soit $f : [\![1;n]\!] \to \mathrm{E}$ et $g : [\![1;p]\!] \to \mathrm{F}$ deux bijections, on considère l'application $\phi : [\![1;n+p]\!] \to \mathrm{E} \cup \mathrm{F}$ définie par $\phi(k) = f(k)$ si $1 \leqslant k \leqslant n$ et $\phi(k) = g(k-n)$ si $n+1 \leqslant k \leqslant n+p$, comme $\mathrm{E} \cap \mathrm{F} = \varnothing$ on voit que ϕ est injective, d'autre part la surjectivité est évidente, donc ϕ est bijective, ce qui montre que $\mathrm{E} \cup \mathrm{F}$ est fini de cardinal $n+p$.

Passons maintenant au cas général : posons $\mathrm{I} = \mathrm{E} \cap \mathrm{F}$, on a $\mathrm{E} \cup \mathrm{F} = \mathrm{E} \cup (\mathrm{F} \setminus \mathrm{E})$ et ces deux ensembles sont disjoints et finis, donc $\mathrm{E} \cup \mathrm{F}$ est fini et $\mathrm{card}(\mathrm{E} \cup \mathrm{F}) = \mathrm{card}(\mathrm{E}) + \mathrm{card}(\mathrm{F} \setminus \mathrm{E})$, d'autre part $\mathrm{F} = \mathrm{I} \cup (\mathrm{F} \setminus \mathrm{E})$ et ces deux ensembles sont disjoints et finis, donc $\mathrm{card}(\mathrm{F}) = \mathrm{card}(\mathrm{I}) + \mathrm{card}(\mathrm{F} \setminus \mathrm{E})$, on a donc$\mathrm{card}(\mathrm{F} \setminus \mathrm{E}) = \mathrm{card}(\mathrm{F}) - \mathrm{card}(\mathrm{I})$, ce qui donne la formule. □

Théorème 23.9

Si E *et* F *sont deux ensembles finis, alors l'ensemble* $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ *est fini et* $\mathrm{card}(\mathrm{E} \times \mathrm{F}) = \mathrm{card}(\mathrm{E}) \times \mathrm{card}(\mathrm{F})$.

Preuve : Si l'un des deux est vide, alors $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ est vide et le résultat est évident. Soit $n = \mathrm{card}(\mathrm{E})$, si $n = 1$ alors $\mathrm{E} = \{e\}$ et l'application $f : \mathrm{F} \to \mathrm{E} \times \mathrm{F}$ définie par $f(x) = (e, x)$ est une bijection, donc $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ est fini de même cardinal que F, le théorème est donc vrai pour $n = 1$.

Supposons le théorème démontré pour un entier $n \geqslant 1$ et supposons $\mathrm{card}(\mathrm{E}) = n+1$, on fixe un élément $e \in \mathrm{E}$ et on pose $\mathrm{E}' = \mathrm{E} \setminus \{e\}$. On a $\mathrm{E} \times \mathrm{F} = (\{e\} \times \mathrm{F}) \cup (\mathrm{E}' \times \mathrm{F})$, ces deux ensembles sont disjoints et finis (hypothèse de récurrence), donc $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ est fini et $\mathrm{card}(\mathrm{E} \times \mathrm{F}) = \mathrm{card}(\{e\} \times \mathrm{F}) + \mathrm{card}(\mathrm{E}' \times \mathrm{F}) = \mathrm{card}(\mathrm{F}) + \mathrm{card}(\mathrm{E}') \times \mathrm{card}(\mathrm{F}) = (n+1) \times \mathrm{card}(\mathrm{F})$. Le théorème est démontré au rang $n+1$. □

Conséquence : si $p \in \mathbb{N}^*$, et si E est fini de cardinal $n \geqslant 1$, alors E^p (ensemble des p - uplets d'éléments de E) est fini et $\mathrm{card}(\mathrm{E}^p) = [\mathrm{card}(\mathrm{E})]^p$.

II DÉNOMBREMENT

1) Préliminaires

Définition 23.3

Dénombrer un ensemble fini E *c'est calculer son cardinal. Dans la pratique, c'est le mettre en bijection avec un ensemble* F *dont on connaît le cardinal.*

La fonction factorielle : elle est définie sur $\mathbb{N}$ par : $n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 1\times\cdots\times n & \text{si } n>0 \end{cases}$. On peut également en donner une définition récurrente : $0! = 1$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1)\times n!$.

Théorème 23.10 (diviser pour mieux compter)

Soient E *un ensemble fini et soient* $A_1, \ldots, A_n$ *n parties de* E *deux à deux disjointes et dont la réunion est égale à* E*, alors :* $\operatorname{card}(E) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{card}(A_k)$.

Preuve : Celle - ci est simple, c'est un raisonnement par récurrence sur n, sachant que la formule est vraie pour $n = 2$. □

Application – Si $f : E \to F$ est une application et si E est fini, alors :

$$\operatorname{card}(E) = \sum_{y \in \operatorname{Im}(f)} \operatorname{card}(f^{-1}(\{y\}))$$

Dans le cas où les éléments de $\operatorname{Im}(f)$ ont tous le même nombre d'antécédents p, alors $\operatorname{card}(E) = p\operatorname{card}(\operatorname{Im}(f))$.

2) Le nombre d'applications

Théorème 23.11

Soit E *et* F *deux ensembles finis avec* $p = \operatorname{card}(E)$ *et* $n = \operatorname{card}(F)$*, l'ensemble des applications de* E *vers* F*,* $\mathscr{F}(E,F)$ *(ou* F^E*), est fini de cardinal* n^p.

Preuve : Posons $E = \{e_1, \ldots, e_p\}$, on vérifie que l'application $\phi : F^E \to F^p$ définie par $\phi(f) = (f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est une bijection. Or F^p est un ensemble fini de cardinal n^p ce qui donne le résultat. □

Remarque 23.3 :

- *Le théorème justifie le raisonnement suivant : pour construire une application de* E *vers* F *on compte pour chaque élément de* E *le nombre de choix possibles pour son image (soit n choix), puis on fait le produit, soit* n^p *constructions possibles.*
- *Le nombre de façons de tirer avec remise p boules parmi n est* n^p.
- *Le nombre de façons de ranger p boules dans n boites est* n^p.

Complément : lorsque $p \leqslant n$, le nombre d'injections de E vers F est $n(n-1)\cdots(n-p+1)$.

3) Le nombre de parties d'un ensemble

Définition 23.4

Soit E *un ensemble et* A *une partie de* E*, on appelle* ***fonction indicatrice*** *de* A *l'application* $\mathbb{1}_A : E \to \{0;1\}$ *définie par* $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Théorème 23.12

Si E *est fini de cardinal n, alors* $\mathscr{P}(E)$*, l'ensemble des parties de* E*, est fini de cardinal* 2^n.

Preuve : Il est facile de vérifier que l'application de $\mathscr{P}(E)$ vers $\mathscr{F}(E,\{0;1\})$ qui à toute partie de E associe sa fonction caractéristique, est une bijection. Or l'ensemble $\mathscr{F}(E,\{0;1\})$ est fini de cardinal 2^n ce qui donne le résultat. □

Remarque 23.4 – *Le théorème justifie le raisonnement suivant : pour construire une partie de* E *il y a deux choix possibles pour chaque élément de* E *(on le prend ou on ne le prend pas), comme il y a n éléments dans* E *cela fait* 2^n *constructions possibles, soit* 2^n *parties.*

4) Le nombre de bijections

Théorème 23.13
Si E *et de* F *sont deux ensembles finis **de même cardinal*** $n>0$*, il y a* $n!$ *bijections de* E *vers* F*. En particulier,* $\operatorname{card}(\mathscr{S}(\mathrm{E}))=n!$ *(groupe des permutations de* E*).*

Preuve : Lorsque $\operatorname{card}(\mathrm{E})=\operatorname{card}(\mathrm{F})=n$, l'ensemble des bijections de E vers F est inclus dans l'ensemble des applications, c'est donc un ensemble fini de cardinal inférieur ou égal à n^n. On montre ensuite la formule par récurrence sur n, le résultat étant immédiat pour $n=1$, supposons le vrai au rang $n-1$. Posons $\mathrm{F}=\{d_1,\dots,d_n\}$, soit $e\in\mathrm{E}$ fixé, on pose $\mathrm{D}_k=\{f\in\operatorname{Bij}(\mathrm{E},\mathrm{F})\ /\ f(e)=d_k\}$ pour $k\in[\![1;n]\!]$. Il est clair que $\operatorname{Bij}=\mathrm{D}_1\cup\ldots\cup\mathrm{D}_n$ et que $\operatorname{card}(\mathrm{D}_k)=\operatorname{card}(\operatorname{Bij}(\mathrm{E}\setminus\{e\},\mathrm{F}\setminus\{d_k\})$, on obtient ainsi que $\operatorname{card}(\operatorname{Bij}(\mathrm{E},\mathrm{F}))=n\times(n-1)!=n!$. □

5) Le nombre de p-parties (ou p-combinaisons)

Définition 23.5
Soit E *un ensemble de cardinal* $n\in\mathbb{N}$ *et soit* $p\in\mathbb{N}$*, on appelle* p *- combinaison d'éléments de* E *(ou* p *- partie) toute partie de* E *de cardinal* p*. L'ensemble des* p *- parties de* E *est noté* $\mathscr{P}_p(\mathrm{E})$*.*

Remarque 23.5 – $\mathscr{P}_p(\mathrm{E})$ *est un ensemble fini car il est inclus dans* $\mathscr{P}(\mathrm{E})$*, et son cardinal est majoré par* 2^n*.*

Cas particuliers :

a) Si $p=0$ la seule partie de E à 0 élément est $\varnothing$, donc $\operatorname{card}(\mathscr{P}_0(\mathrm{E}))=1$.

b) Si $p=n$, la seule partie de E à n éléments est E, donc $\operatorname{card}(\mathscr{P}_n(\mathrm{E}))=1$.

c) Si $p>n$ il n'y a aucune partie de E à p éléments donc dans ce cas, $\operatorname{card}(\mathscr{P}_p(\mathrm{E}))=0$.

Théorème 23.14
Si $n,p\in\mathbb{N}$*, alors* $\operatorname{card}(\mathscr{P}_p(\mathrm{E}))=\frac{\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)}{p!}=\binom{n}{p}$ *(avec la convention que le produit vaut* 1 *lorsque* $p=0$*, et que* $\binom{n}{p}=0$ *si* $p>n$*).*

Preuve : Par récurrence sur n : pour $n=0$ et $n=1$, la vérification est immédiate.

Supposons le théorème vrai pour un entier $n\geqslant 1$ et supposons $\operatorname{card}(\mathrm{E})=n+1$, si $p=0$ la formule est vraie, supposons $p\geqslant 1$, on fixe un élément $a\in\mathrm{E}$, soit A l'ensemble des p - parties de E contenant a et B l'ensemble des p - parties de E ne contenant pas a, alors $\mathscr{P}_p(\mathrm{E})=\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ et $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing$, donc $\operatorname{card}(\mathscr{P}_p(\mathrm{E}))=\operatorname{card}(\mathrm{A})+\operatorname{card}(\mathrm{B})$, or $\operatorname{card}(\mathrm{B})=\frac{\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)}{p!}$ (car B est en bijection avec $\mathscr{P}_p(\mathrm{E}\setminus\{a\})$) et $\operatorname{card}(\mathrm{A})=\frac{\prod_{k=0}^{p-2}(n-k)}{(p-1)!}$ (car A est en bijection avec $\mathscr{P}_{p-1}(\mathrm{E}\setminus\{a\})$), d'où :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(\mathscr{P}_p(\mathrm{E}))&=\frac{n\times\cdots\times(n-p+1)}{p!}+\frac{n\times\cdots\times(n-p+2)}{(p-1)!}\\&=\frac{n\times\cdots(n-p+2)[n-p+1+p]}{p!}\\&=\frac{(n+1)n\times\cdots(n+1-p+1)}{p!}\end{aligned}$$

la formule est donc vraie au rang $n+1$. □

★**Exercice 23.1** *À l'aide d'un raisonnement de dénombrement, retrouver sans calcul les propriétés suivantes :*

1/ *Si* $p\leqslant n$, $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$.

2/ *Si* $0\leqslant p\leqslant n-1$, $\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$.

3/ *Binôme de Newton :* $\forall\ n\in\mathbb{N},\forall\ x,y\in\mathbb{C},(x+y)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$.

4/ *Si* $1\leqslant p\leqslant n$, $\binom{n}{p}=\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

III SOLUTION DES EXERCICES

Solution 23.1

1/ *L'application de* $f : \mathscr{P}_p(\mathrm{E}) \to \mathscr{P}_{n-p}(\mathrm{E})$ *définie par* $f(\mathrm{A}) = \overline{\mathrm{A}}$ *(complémentaire de* A *dans* E*) est bijective.*

2/ *Pour compter le nombre de* $(p+1)$*-parties de* $[\![1 ; n+1]\!]$*, on compte celles qui contiennent* $n+1$ *(il y en a* $\binom{n}{p}$*) et celles qui ne contiennent pas* $n+1$ *(il y en a* $\binom{n}{p+1}$*).*

3/ *Lorsqu'on développe* $(x+y)^n = (x+y) \times \cdots \times (x+y)$ *on obtient une somme de termes* $f_1 \times \cdots \times f_n$ *où* f_i *provient du facteur numéro* i*, on a* $f_i = x$ *ou* y*, par conséquent on a une somme de termes du type* $x^k y^{n-k}$ *avec* $k \in [\![0 ; n]\!]$*, et chacun de ces termes est obtenu* $\binom{n}{k}$ *fois (*k *facteurs parmi* n *égaux à* x *et les autres égaux à* y*).*

4/ *Considérons un ensemble constitué de* p *boules rouges et* $n-p$ *bleues. Le nombre de façons de ranger ces* n *boules dans* n *boites (une par boite) est :* $\binom{n}{p}$ *(*p *boites parmi* n *pour les rouges, celles qui restent sont pour les bleues), imaginons que pour chacun de ces rangements on peint une des boules rouges en blanc, on obtient alors* $p\binom{n}{p}$ *façons de ranger* n *boules dont* 1 *blanche,* $p-1$ *rouges et* $n-p$ *bleues, c'est à dire* $n\binom{n-1}{p-1}$ *(une boite pour la blanche,* $p-1$ *pour les rouges, celles qui restent pour les bleues).*