Chapitre 13

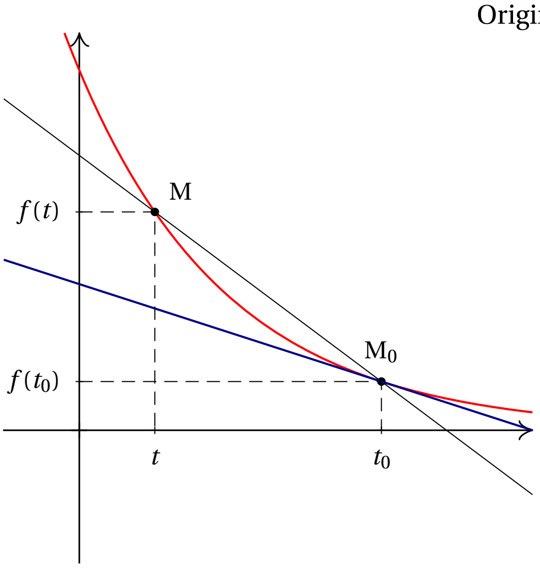
Dérivation

Sommaire

I DÉRIVÉE PREMIÈRE

1) Définition

Origine géométrique :



La droite qui joint les points $M(t, f(t))$ et $M_0(t_0, f(t_0))$ (sécante) a pour équation :

$$y = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}(x - t_0) + f(t_0)$$

Lorsque l'on rapproche t de t_0, cette droite pivote autour du point M_0 et, lorsque la courbe est régulière, semble se rapprocher d'une position « limite » qui nous définirons comme la tangente au point M_0. Le coefficient directeur de cette droite « limite » doit être la limite lorsque t tend vers t_0 du coefficient directeur de la sécante, c'est dire $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$.

Définition 13.1

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $t_0 \in \mathrm{I}$, on dit que f est ***dérivable en*** *t_0 lorsque la fonction : $t \mapsto \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ admet une limite* ***finie*** *en t_0. Si c'est le cas, cette limite est notée $f'(t_0)$ et appelée* ***nombre dérivé de*** *f* ***en*** *t_0. Lorsque f est dérivable en tout point de I on dit que f est dérivable sur I et la fonction de I vers $\mathbb{R}$ qui à t associe $f'(t)$ est appelée* ***dérivée de*** *f* ***sur*** *I, on la note f' ou bien $\frac{df}{dt}$. L'ensemble des fonctions dérivables sur I est noté $\mathscr{D}(\mathrm{I},\mathbb{R})$. Si le plan est muni d'un repère orthonormé et si f est dérivable en t_0, la droite d'équation $y = f'(t_0)(x-t_0)+f(t_0)$ est appelée tangente à la courbe au point d'abscisse t_0. Si le taux d'accroissement de f en t_0 a une limite infinie et si f est continue en t_0, alors on dit que la courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse t_0, d'équation $x = t_0$.*

Remarque 13.1 – *Les fonctions trigonométriques, logarithme, exponentielle, polynomiales et rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition. Mais :*

Attention !

La fonction valeur absolue et la fonction $x \mapsto x^{\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$, ne sont pas dérivables en 0. La fonction partie entière n'est pas dérivable aux points entiers relatifs (pas continue).

Théorème 13.1 (définition équivalente)

$$f \text{ est dérivable en } t_0 \text{ et } f'(t_0) = a \text{ si et seulement si } f(t) = f(t_0) + a(t-t_0) + (t-t_0)\underset{t_0}{o}(1).$$

On dit alors que f admet un développement limité d'ordre 1 en t_0.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

2) Théorème généraux

Théorème 13.2 (Dérivabilité et continuité)

Si f est dérivable en t_0, alors f est continue en t_0 mais la réciproque est fausse.

Preuve : Il suffit d'appliquer la définition équivalente ci-dessus pour voir que $\lim\limits_{t_0} f = f(t_0)$. Pour la réciproque, on a par exemple la fonction $t \mapsto |t|$ qui est continue en 0 mais non dérivable. □

Théorème 13.3 (Théorèmes généraux)

• Si f et g sont dérivables sur I et si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors les fonctions $f+g$, $f \times g$ et αf sont dérivables sur I avec les formules :

- $(f+g)' = f'+g'$.
- $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.
- $(\alpha f)' = \alpha f'$.

• Si f est dérivable sur I et ***ne s'annule pas*** *alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur et $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$.*

• Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J avec $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{J}$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times [g' \circ f]$.

Preuve : Les deux premiers points ne posent pas de difficultés, passons au troisième : soit $x_0 = f(t_0)$, posons :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} & \text{si } x \neq x_0 \\ g'(x_0) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

alors h est continue en x_0 et pour $t \neq t_0$ on a $\frac{g(f(t))-g(f(t_0))}{t-t_0} = h[f(t)] \times \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$, même si $f(t) = f(t_0)$, comme f est continue en t_0, on a $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{g(f(t))-g(f(t_0))}{t-t_0} = h(x_0) \times f'(t_0) = f'(t_0) \times g'(f(t_0))$. □

Du troisième point découlent les formules de dérivation usuelles :

Fonction	Dérivée
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
$\tan(u)$	$u'(1+\tan(u)^2) = \frac{u'}{\cos(u)^2}$
$\operatorname{sh}(u)$	$u'\operatorname{ch}(u)$
$\operatorname{ch}(u)$	$u'\operatorname{sh}(u)$
$\operatorname{th}(u)$	$u'(1-\operatorname{th}(u)^2) = \frac{u'}{\operatorname{ch}(u)^2}$
e^u	$u'e^u$
$\ln(\lvert u\rvert)$	$\frac{u'}{u}$
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1}$

Remarque 13.2 – *Il découle des théorèmes généraux que pour les opérations usuelles sur les fonctions $\mathscr{D}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ est un anneau et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

★**Exercice 13.1** *Soit* $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1/ Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2/ Montrer que f' n'est pas continue en 0.

3) Dérivabilité à gauche et à droite

Définition 13.2

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $t_0 \in \mathrm{I}$:

• Si $t_0 \neq \inf(\mathrm{I})$: on dit que f est dérivable à gauche en t_0 lorsque le taux d'accroissement de f a une limite finie à gauche en t_0. Si c'est le cas, cette limite est notée $f'_g(t_0)$ et la demi-droite d'équation $\begin{cases} y = f'_g(t_0)(x-t_0)+f(t_0) \\ x \leqslant t_0 \end{cases}$*, est appelée demi-tangente à la courbe au point d'abscisse t_0.*

• Si $t_0 \neq \sup(\mathrm{I})$: on dit que f est dérivable à droite en t_0 lorsque le taux d'accroissement de f a une limite finie à droite en t_0. Si c'est le cas, cette limite est notée $f'_d(t_0)$ et la demi-droite d'équation $\begin{cases} y = f'_d(t_0)(x-t_0)+f(t_0) \\ x \geqslant t_0 \end{cases}$*, est appelée demi-tangente à la courbe au point d'abscisse t_0.*

☞**Exemples** :

- La fonction valeur absolue est dérivable à gauche en 0, et $f'_g(0) = -1$, elle est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$, mais elle n'est pas dérivable en 0 car $-1 \neq 1$, on dit que le point de la courbe d'abscisse 0 est **un point anguleux**.
- La fonction $f(t) = \sqrt{|t|}$ n'est pas dérivable en 0, le taux d'accroissement tend vers $+\infty$ en 0^+ et vers $-\infty$ en 0^-, on dit que le point de la courbe d'abscisse 0 est un point **de rebroussement de première espèce**.

Théorème 13.4

Soit t_0 un point intérieur à I, f est dérivable en t_0 ssi f est dérivable à gauche et à droite en t_0 avec $f'_g(t_0) = f'_d(t_0)$.

Preuve : Cela découle des propriétés des limites. □

4) Dérivée d'une bijection réciproque

Théorème 13.5

Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue strictement monotone, alors f induit une bijection de I sur $\mathrm{J} = \mathrm{Im}(f)$. Soit $y_0 = f(t_0) \in \mathrm{J}$ ($t_0 \in \mathrm{I}$), si f est dérivable en t_0 et si $f'(t_0) \neq 0$, alors la bijection réciproque, ϕ, est dérivable en y_0 et $\phi'(y_0) = \frac{1}{f'(t_0)} = \frac{1}{f'\circ\phi(y_0)}$. Si f est dérivable en t_0 et $f'(t_0) = 0$, alors ϕ n'est pas *dérivable en y_0 mais la courbe représentative de ϕ admet une tangente verticale au point d'abscisse y_0.*

Preuve : Soit $t_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 = f(t_0)$, pour $y \in \mathrm{J} \setminus \{y_0\}$, on a $\frac{\phi(y)-\phi(y_0)}{y-y_0} = \frac{t-t_0}{f(t)-f(t_0)}$ en posant $t = \phi(y)$, ϕ étant continue, lorsque $y \to y_0$, on a $t \to t_0$ et donc $\frac{t-t_0}{f(t)-f(t_0)} \to \frac{1}{f'(t_0)}$ car $f'(t_0) \neq 0$. Ce qui prouve le premier résultat.

Si $f'(t_0) = 0$, comme f est monotone la fraction $\frac{t-t_0}{f(t)-f(t_0)}$ garde un signe constant, donc sa limite lorsque $y \to y_0$ est infinie, ce qui prouve le second résultat. □

Remarque 13.3 –

- *Si $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ est bijective, continue, dérivable et si f' ne s'annule pas sur I, alors d'après le théorème précédent, f^{-1} est dérivable sur J et on a la formule :*

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

- *Si f n'est pas dérivable en t_0 mais si sa courbe a une tangente verticale en ce point, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(t_0)$ et $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = 0$ (car le taux d'accroissement de f en t_0 a une limite infinie en t_0).*

☞**Exemples** :

- La fonction $\ln :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue, strictement croissante, dérivable et sa dérivée ne s'annule pas. Sa bijection réciproque, la fonction exponentielle, est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \exp(x)' = \frac{1}{\ln' \circ \exp(x)} = \exp(x).$$

- La fonction $f : [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \to [-1;1]$ définie par $f(x) = \sin(x)$ est bijective, continue, dérivable et sa dérivée ($f'(x) = \cos(x)$) ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, donc la bijection réciproque arcsin, est dérivable sur $]-1;1[$ et :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{f'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

  Par contre la fonction arcsin n'est pas dérivable en ± 1 (une tangente verticale en ces points).
- La fonction $f : [0;\pi] \to [-1;1]$ définie par $f(x) = \cos(x)$ est bijective, continue, dérivable et sa dérivée ($f'(x) = -\sin(x)$) ne s'annule pas sur $]0;\pi[$, donc la bijection réciproque arccos, est dérivable sur $]-1;1[$ et :

$$\arccos'(x) = \frac{1}{f'(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

  Par contre la fonction arccos n'est pas dérivable en ± 1 (une tangente verticale en ces points).
- La fonction $f :]-\pi/2;\pi/2[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan(x)$ est bijective, continue, dérivable et sa dérivée ($f'(x) = 1 + \tan(x)^2$) ne s'annule pas, donc la bijection réciproque arctan, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{f'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

II APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION

1) Théorème de Rolle

Théorème 13.6

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $]a;b[$ et soit $t_0 \in]a;b[$. Si f admet un extremum local en t_0, alors $f'(t_0) = 0$, mais la réciproque est fausse.

Preuve : Supposons que f présente un maximum local en t_0, alors à gauche en t_0 on a $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \geqslant 0$, d'où par passage à la limite en t_0 : $f'(t_0) \geqslant 0$. À droite en t_0 on a : $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \leqslant 0$, d'où par passage à la limite en t_0 : $f'(t_0) \leqslant 0$, par conséquent $f'(t_0) = 0$. Pour la réciproque il suffit de considérer la fonction $x \mapsto x^3$ en 0. □

Remarque 13.4 – *Dans le théorème ci-dessus, il est essentiel que t_0 ne soit pas une borne de l'intervalle. Par exemple la fonction $f(t) = 1 + t$ admet un maximum sur $[0;1]$ en $t_0 = 1$ mais $f'(t_0) \neq 0$.*

Théorème 13.7 (de Rolle [1])

Si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et si $f(a) = f(b)$, alors :

$$\text{il existe } c \in]a;b[, f'(c) = 0.$$

Preuve : Si f est constante alors il n'y a rien à montrer. Si f n'est pas constante, $\mathrm{Im}(f) = [m;M]$ (f est continue sur le segment $[a;b]$) avec $m < M$. Supposons $f(a) \neq M$, alors $f(b) \neq M$ or il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = M$ donc $c \in]a;b[$, d'après la proposition précédente (maximum global en c) on a $f'(c) = 0$. Si $f(a) = M$ alors $f(a) \neq m$ et le même raisonnement s'applique avec le minimum. □

Remarque 13.5 –
- *Ce théorème est faux si f n'est pas continue en a ou en b (prendre $f(x) = x$ sur $[0;1[$ et $f(1) = 0$).*
- *Ce théorème est faux si f est à valeurs complexes, par exemple $f(t) = e^{it}$, on a $f(0) = f(2\pi)$ mais $f'(t) = ie^{it}$ ne s'annule jamais.*

★**Exercice 13.2** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui admet n racines distinctes, alors f' admet au moins $n-1$ racines distinctes.*

2) Les accroissements finis

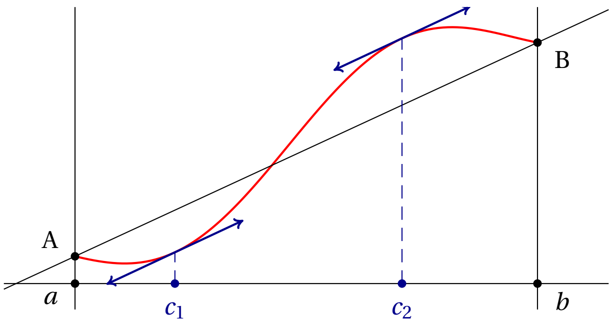
Théorème 13.8 (égalité de accroissements finis)

Si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ alors :

$$\exists c \in]a;b[, f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

Preuve : Soit $\phi(t) = t\big(f(b) - f(a)\big) - (b-a)f(t)$, la fonction ϕ est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$, de plus $\phi(a) = af(b) - bf(a) = \phi(b)$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a;b[$ tel que $\phi'(c) = 0$, ce qui donne la relation. □

Remarque 13.6 –
- *De même, si f et g sont continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$, il existe $c \in]a;b[$ tel que :*
$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$
- *L'égalité s'écrit aussi : $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ce qui signifie géométriquement qu'il existe un point de la courbe (d'abscisse c) où la tangente est parallèle à la corde définie par le point d'abscisse a et le point d'abscisse b.*
- *Autre preuve : soit g la fonction affine prenant la même valeur que f en a et b, $g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$. On a $f(a) - g(a) = f(b) - g(b)$, d'après le théorème de Rolle il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = g'(c)$ ce qui donne $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*



Théorème 13.9 (inégalité des accroissements finis)

Si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et s'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in]a;b[, m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors :

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

Preuve : Celle-ci découle directement de l'égalité des accroissement finis. □

1. *ROLLE Michel* (1652 – 1719) : mathématicien français.

À retenir

Si $\forall\ t \in]a;b[, |f'(t)| \leqslant \mathrm{M}$, alors $|f(b)-f(a)| \leqslant \mathrm{M}(b-a)$, et plus généralement :

$$\forall\ x, y \in [a;b], |f(x)-f(y)| \leqslant \mathrm{M}|x-y|,$$ la fonction f est M-lipschitzienne.

Réciproquement, si f est M-lipschitzienne sur un intervalle I, alors tous les taux d'accroissements sont majorés en valeur absolue par M, et donc par passage à la limite, $|f'| \leqslant \mathrm{M}$.

★**Exercice 13.3** *Soit $f\colon [a;b] \to [a;b]$ continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ telle que $|f'| \leqslant k < 1$, on considère la suite définie par $u_0 \in [a;b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.*

1/ *Montrer que f admet au moins un point fixe ℓ et que celui-ci est unique.*

2/ *Montrer la suite u converge vers ℓ.*

☞**Exemples** :

– Pour tout réel x, $\sin'(x) = \cos(x)$ et donc $|\sin'(x)| \leqslant 1$, on en déduit (IAF) que pour tous réels x et y on a $|\sin(x)-\sin(y)| \leqslant |x-y|$. De la même façon, on montre que $|\cos(x)-\cos(y)| \leqslant |x-y|$.

– Pour tout x, y de $[1;+\infty[$, on a $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$.

– $\forall x > 0$, $\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1)-\ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

Théorème 13.10 (limite de la dérivée)

Soit $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $[a;b[$. Si f' admet une limite ℓ en b, alors :

• Si $\ell \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en b et $f'(b) = \ell$.

• Si $\ell = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable en b, mais il y a une tangente verticale pour la courbe réprésentative.

Preuve : D'après l'égalité des accroissements finis, pour $t \in [a;b[$, il existe $c_t \in]t;b[$ tel que $f(b)-f(t) = (b-t)f'(c_t) = (b-t)f'(c_t)$, d'où $\frac{f(t)-f(b)}{t-b} = f'(c_t)$, mais si t tend vers b, alors c_t tend vers b et donc $f'(c_t)$ tend vers ℓ, d'où : $\lim\limits_{t\to b} \frac{f(t)-f(b)}{t-b} = \ell$, ce qui termine la preuve. □

Remarque 13.7 – *Si f' n'a pas de limite en b, on ne peut rien dire en général.*

On a un résultat analogue pour $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b]$, avec $\lim\limits_{t\to a} f'(t) = \ell$.

☞**Exemple** : La fonction arcsin est dérivable sur $]-1;1[$ et $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, cette dérivée a pour limite $+\infty$ quand $x \to 1$. On retrouve ainsi que arcsin n'est pas dérivable en 1 et qu'il y a une tangente verticale en ce point pour la courbe.

3) Sens de variation

Théorème 13.11

Soit $f\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I, et dérivable sur I privé des ses bornes (noté $\mathring{\mathrm{I}}$, intérieur de I), on a les résultats suivants :

• f est croissante si et seulement si $\forall\ t \in \mathring{\mathrm{I}}, f'(t) \geqslant 0$.

• f est décroissante si et seulement si $\forall\ t \in \mathring{\mathrm{I}}, f'(t) \leqslant 0$.

• f est constante si et seulement si $\forall\ t \in \mathring{\mathrm{I}}, f'(t) = 0$.

• f est strictement croissante si et seulement si $\forall\ t \in \mathring{\mathrm{I}}, f'(t) \geqslant 0$ et il n'existe aucun intervalle ouvert non vide inclus dans I sur lequel f' est constamment nulle.

• f est strictement décroissante si et seulement si $\forall\ t \in \mathring{\mathrm{I}}, f'(t) \leqslant 0$ et il n'existe aucun intervalle ouvert non vide inclus dans I sur lequel f' est constamment nulle.

Preuve : Si f est croissante sur I, soit $t_0 \in \mathring{\mathrm{I}}$, le taux d'accroissement de f en t_0 est toujours positif, donc par passage à la limite, on a $f'(t_0) \geqslant 0$. Réciproquement, si $f' \geqslant 0$ sur $\mathring{\mathrm{I}}$, soit $t < t'$ deux éléments de I, d'après l'égalité des accroissements finis, il existe c compris entre t et t' (strictement) tel que $f(t)-f(t') = f'(c)(t-t') \leqslant 0$, donc $f(t) \leqslant f(t')$ *i.e.* f est croissante. Pour f décroissante on applique ce qui précède à $-f$. Pour f constante, il suffit de dire que f est à la fois croissante et décroissante.

Si f est strictement croissante, alors on sait que $f' \geqslant 0$ sur $\mathring{\mathrm{I}}$. Si f' est nulle sur un intervalle $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, alors f est constante sur J, ce qui est absurde. Réciproquement, si $\forall\ t \in \mathring{\mathrm{I}}, f'(t) \geqslant 0$ et il n'existe aucun intervalle ouvert non vide inclus dans I sur lequel f' est constamment nulle, soit $t < t'$ deux éléments de I, on sait que $f(t) \leqslant f(t')$, si on avait

$f(t) = f(t')$ alors $\forall\ c \in [t;t'], f(t) = f(c) = f(t')$, donc f est constante sur $[t;t']$, ce qui entraîne que f' est nulle sur $]t;t'[$: absurde, donc $f(t) < f(t')$ *i.e.* f est strictement croissante. □

Remarque 13.8 – *Ce théorème est faux si* I *n'est pas intervalle, par exemple la fonction* $f(t) = \frac{1}{t}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *avec* $f' < 0$*, mais* f *n'est pas monotone sur* $\mathbb{R}^*$.

III DÉRIVÉES SUCCESSIVES

1) Classe d'une application

Définition 13.3

Soit $f\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *une fonction et soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On dit que* f *est de classe* $\mathscr{C}^n$ *sur* I *lorsque* f *est* n *fois dérivable sur* I *et que la dérivée* n^e *de* f *est continue sur* I. *L'ensemble des fonctions de classe* $\mathscr{C}^n$ *sur* I *est noté* $\mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathbb{R})$. *La dérivée* n^e *de* f *est notée* $f^{(n)}$ *où* $\frac{d^n f}{dt^n}$. *Par convention, on pose* $f^{(0)} = f$*, on a alors* $\forall\ n \in \mathbb{N}, f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.

Remarque 13.9 –

- $\mathscr{C}^{n+1}(\mathrm{I},\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathbb{R})$.
- *Si* $f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathbb{R})$ *avec* $n \geqslant 1$*, alors* $\forall\ k \in [\![0;n]\!], f^{(k)} \in \mathscr{C}^{n-k}(\mathrm{I},\mathbb{R})$.

☞**Exemples :**

- $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $f\colon t \mapsto e^t$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, et $f^{(n)}(t) = e^t$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $f\colon t \mapsto t^n$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\mathbb{R}$, et $f^{(p)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ \frac{n!}{(n-p)!}x^{n-p} & \text{sinon} \end{cases}$.
- $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $f\colon t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}^*$, et $f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{t^{n+1}}$.
- $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $f\colon t \mapsto \ln(t)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $]0;+\infty[$, et pour $n \geqslant 1$, $f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{t^n}$.
- $\forall\ n \in \mathbb{N}$, cos et sin sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $\cos^{(n)}(t) = \cos(t + n\frac{\pi}{2})$, $\sin^{(n)}(t) = \sin(t + n\frac{\pi}{2})$.

★**Exercice 13.4**

1/ *Soit* $a \in \mathbb{R}$, *et* $f\colon x \mapsto \frac{1}{x-a}$, *montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^n$ *sur* $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *et calculer* $f^{(n)}(x)$.

2/ *Soit* $f\colon x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$, *montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^n$ *sur* $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ *pour tout* n, *et calculer* $f^{(n)}(x)$.

Définition 13.4

Lorsque f *est de classe* $\mathscr{C}^n$ *pour tout entier* n*, on dit que* f *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$*, l'ensemble des ces fonctions est noté* $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I},\mathbb{R})$*, et on a donc* $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I},\mathbb{R}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathbb{R})$.

Remarque 13.10 –

- $\forall\ n \in \mathbb{N}, \mathscr{C}^\infty(\mathrm{I},\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathbb{R})$.
- *Dire que* f *est* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* I *revient à dire que* f *est dérivable autant de fois que l'on veut (infiniment dérivable), autrement dit* $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I},\mathbb{R}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{D}^n(\mathrm{I},\mathbb{R})$.

☞**Exemples :**

- Toute fonction polynomiale est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (car la dérivée d'un polynôme est un polynôme).
- Toute fonction rationnelle est $\mathscr{C}^\infty$ sur son ensemble de définition (car la dérivée d'une fonction rationnelle est une fonction rationnelle).
- Les fonctions $\ln, \exp, \cos, \sin$ et $\tan$ sont $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.

★**Exercice 13.5** *Étudier la classe sur* $\mathbb{R}$ *de la fonction* $f\colon x \mapsto x^2|x|$.

Théorème 13.12 (prolongement de classe $\mathscr{C}^n$)

Soit $f\colon [a;b[\to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^n$ *sur* $[a;b[$ *telle que toutes ses dérivées* k^e *ont une limite finie en* b : $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\exists \ell_k \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to b} f^{(k)}(x) = \ell_k$. *Alors le prolongement de* f *obtenu en posant* $f(b) = \ell_0$*, est un prolongement de classe* $\mathscr{C}^n$ *sur* $[a;b]$*, et on a* $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $f^{(k)}(b) = \ell_k$.

Preuve : Par récurrence sur n. Pour $n=0$, c'est un prolongement par continuité de f en b. Supposons le théorème établi au rang n et que f vérifie les hypothèses au rang $n+1$, en appliquant (HR), le prolongement de f obtenu en posant $f(b)=\ell_0$, est un prolongement de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a;b]$, et on a $\forall k\in[\![0;n]\!]$, $f^{(k)}(b)=\ell_k$. Soit $g=f^{(n)}$, alors g est continue sur $[a;b]$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b[$ et $\lim\limits_{x\to b} g'(x)=\ell_{n+1}\in\mathbb{R}$, on en déduit que g est dérivable en b (théorème sur la limite de la dérivée) et que $g'(b)=\ell_{n+1}$, ce qui entraîne que g' est continue en b. Finalement le prolongement de f est bien de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a;b]$, et $f^{(k)}(b)=\ell_k$ pour $k\in[\![0;n+1]\!]$. □

2) Formule de Leibniz

Théorème 13.13 (généraux)
Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I alors :
- *$f+g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $(f+g)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)}$.*
- *$\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda.f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $(\lambda.f)^{(n)}=\lambda.f^{(n)}$.*
- *$f\times g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et on a la formule (de Leibniz) : $\left(f\times g\right)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}\times g^{(n-k)}$.*

Preuve : Pour le dernier point : pour $n=0$ le résultat est vrai. Supposons le dernier point démontré au rang $n\geqslant 0$ avec la formule de Leibniz, et supposons que f et g sont de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. En particulier f et g sont $\mathscr{C}^n$, donc $f\times g$ aussi et $\left(f\times g\right)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}\times g^{(n-k)}$, on en déduit donc que $\left(f\times g\right)^{(n)}$ est dérivable sur I (somme de produits de fonctions dérivables) et sa dérivée est $\left(f\times g\right)^{(n+1)}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k+1)}\times g^{(n-k)}+\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}\times g^{(n+1-k)}$, ce qui donne $f^{(n+1)}\times g+f\times g^{(n+1)}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)f^{(k)}\times g^{(n+1-k)}$, c'est à dire $\sum\limits_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}\times g^{(n+1-k)}$, ce qui donne la formule au rang $n+1$, de plus cette somme est une somme de fonctions continues, ce qui prouve que $f\times g$ est bien de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. □

Théorème 13.14
$\forall\ n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, $\mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un anneau.

Preuve : Cela découle du théorème précédent (s.e.v et sous-anneau de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$). □

★**Exercice 13.6** *Calculer de deux façons la dérivée n^e en 0 de la fonction $x\mapsto(1-x^2)^n$. Quelle relation obtient-on ?*

3) Classe d'une composée

Théorème 13.15
Soient $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathrm{J}\to\mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ avec $\mathrm{Im}(f)\subset\mathrm{J}$, alors $g\circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. En particulier, si f et g sont $\mathscr{C}^\infty$ alors $g\circ f$ aussi.

Preuve : Le théorème est vrai pour $n=0$ (composée de deux fonctions continues), supposons le vrai au rang $n\geqslant 0$ et supposons f et g de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, comme $n+1\geqslant 1$, f et g sont dérivables, donc $g\circ f$ est dérivable avec la formule $(g\circ f)'=f'\times g'\circ f$, d'après l'hypothèse de récurrence, $g'\circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ (car g' et f sont de classe $\mathscr{C}^n$), or f' est également de classe $\mathscr{C}^n$, par conséquent $f'\times g'\circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$, ce qui signifie que $g\circ f$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. □

Remarque 13.11 –
- *Il existe une formule qui exprime $(g\circ f)'$ en fonction des dérivées de f et de g, mais ce n'est pas une formule simple.*
- *La fonction inverse $g:x\mapsto\frac{1}{x}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, si $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ qui ne s'annule, alors la composée, i.e. la fonction $\frac{1}{f}$, est de classe $\mathscr{C}^n$ (même si $n=\infty$).*
- *On retrouve donc les mêmes théorèmes généraux que pour la continuité et la dérivabilité.*

4) Classe d'une réciproque

Théorème 13.16
Soit $f:\mathrm{I}\to\mathrm{J}$ une bijection de I sur $\mathrm{J}=\mathrm{Im}(f)$, de classe $\mathscr{C}^n$ avec $n\in\mathbb{N}^*\cup\{\infty\}$. Si f' ne s'annule pas sur I, alors la bijection réciproque f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J (i.e. de même classe que f).

Preuve : On sait déjà que f^{-1} est dérivable sur J et que $(f^{-1})' = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}$, on voit alors que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J, le théorème est donc vrai pour $n = 1$, supposons le vrai au rang $n \geqslant 1$ et supposons que f est $\mathscr{C}^{n+1}$, par hypothèse de récurrence f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$, mais alors $f'\circ f^{-1}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ qui ne s'annule pas, donc son inverse est de classe $\mathscr{C}^n$, *i.e.* $(f^{-1})'$ est $\mathscr{C}^n$, ce qui signifie que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur J. □

☞**Exemples** :
- Les fonctions arcsin et arccos sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;1[$.
- La fonction arctan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

IV EXTENSION AUX FONCTIONS À VALEURS COMPLEXES

1) Définition

On adopte la même définition que dans le cas réel :

Définition 13.5

On dira que $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ est dérivable en $t_0 \in \mathrm{I}$ si et seulement si la fonction $t \mapsto \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ définie sur $\mathrm{I}\setminus\{t_0\}$, admet une limite finie (dans $\mathbb{C}$) en t_0. Si celle-ci existe, elle est notée $f'(t_0)$. L'ensemble des fonctions dérivables sur I est noté $\mathscr{D}(\mathrm{I},\mathbb{C})$.

2) Propriétés

Théorème 13.17 (caractérisation)

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction, soit $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$, alors f est dérivable en $t_0 \in \mathrm{I}$ si et seulement si u et v sont dérivables en t_0. Si tel est le cas, alors $f'(t_0) = u'(t_0) + iv'(t_0)$.

Preuve : Il suffit d'écrire que :

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0} + i\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$$

avec $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$. □

À retenir

Il découle de ce théorème, que lorsque f est dérivable sur I, on a : $\mathrm{Re}(f') = \mathrm{Re}(f)'$ et $\mathrm{Im}(f') = \mathrm{Im}(f)'$.

Comme la caractérisation nous ramène aux fonctions à valeurs réelles, on peut déduire les propriétés des fonctions dérivables à valeurs complexes :

- On retrouve les mêmes théorèmes généraux, à savoir :
  - Toute fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ dérivable est continue (réciproque fausse).
  - Si $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ sont dérivables, alors $f+g$, $f\times g$ et λf ($\lambda \in \mathbb{C}$) sont dérivables avec les formules : $(f+g)' = f'+g'$, $(f\times g)' = f'\times g + f\times g'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$.
  - Si $g : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ est dérivable et ne s'annule pas, alors $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et $(\frac{1}{g})' = -\frac{g'}{g^2}$. On en déduit que si f est également dérivable sur I alors $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\times g - f\times g'}{g^2}$.
  - Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{J} \to \mathbb{C}$ sont dérivables avec $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{J}$, alors $g\circ f$ est dérivable sur I et $(g\circ f)' = f'\times g'\circ f$.
  - Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ est dérivable alors $\exp(f)$ est dérivable sur I et $[\exp(f)]' = f'\times\exp(f)$.
- Cependant, le théorème de Rolle n'est plus valable, par exemple la fonction $f(t) = \exp(it)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(t) = i\exp(it)$, on a $f(0) = f(2\pi)$ mais f' ne s'annule pas. Par conséquent l'égalité des accroissements finis n'est plus valable non plus, mais on conserve les inégalités.

Théorème 13.18 (inégalité des accroissements finis généralisée)

Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ est une fonction $\mathscr{C}^1$ sur I, et si $\forall\, t \in \mathrm{I}, |f'(t)| \leqslant g'(t)$ où $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est une fonction $\mathscr{C}^1$ sur I, alors :

$$\forall a, b \in \mathrm{I}, |f(b) - f(a)| \leqslant |g(b) - g(a)|.$$

Remarque 13.12 –

– *Si* $\forall\ t\in \mathrm{I}, |f'(t)|\leqslant \mathrm{M}$, *alors en prenant la fonction* $g(t)=\mathrm{M}t$, *et en appliquant le théorème ci-dessus, on obtient* $\forall a,b\in\mathrm{I}, |f(b)-f(a)|\leqslant \mathrm{M}|b-a|$.

☞**Exemple** : Avec $f(t)=\exp(\alpha t)$ où $\alpha=a+ib\in\mathbb{C}$ avec $a\neq 0$, on a $|f'(t)|=|\alpha|\exp(at)=g'(t)$, par conséquent :

$$\forall\ t,t'\in\mathbb{R}, |\exp(\alpha t)-\exp(\alpha t')|\leqslant\frac{|\alpha|}{|a|}|\exp(at)-\exp(at')|.$$

3) Classe d'une fonction

On donne la même définition avec les mêmes notations que pour les fonctions à valeurs réelles, à savoir : $f\colon \mathrm{I}\to\mathbb{C}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ ssi f est n fois dérivable et $f^{(n)}$ est continue sur I, ce qui revient à dire que les parties réelle et imaginaire de f sont de classe $\mathscr{C}^n$. L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I est noté $\mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathbb{C})$, et on pose $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I},\mathbb{C})=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathbb{C})$: ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.

On retrouve les mêmes théorèmes généraux : $\mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathbb{C})$ est une $\mathbb{C}$-algèbre ($n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$). La formule de Leibniz reste valable, et la composée de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ est également de classe $\mathscr{C}^n$.

★**Exercice 13.7** *Soit* $f(t)=\cos(t)\exp(t\sqrt{3})$, *calculer* $f^{(n)}(t)$.

V SOLUTION DES EXERCICES

Solution 13.1

1/ Les théorèmes généraux s'appliquent sur $\mathbb{R}^*$. *Le taux d'accroissement en* 0 *s'écrit* $x\sin(\frac{1}{x})$ *qui tend vers* 0 *en* 0, *donc* f *est dérivable en* 0 *et* $f'(0)=0$.

2/ Pour $x\neq 0$, $f'(x)=2x\sin(\frac1x)-\cos(\frac1x)$, *or si on pose* $u_n=\frac{1}{n\pi}$, *alors* $u_n\to 0$ *et* $\cos(\frac{1}{u_n})=(-1)^n$ *n'a pas de limite. Donc la fonction* $x\mapsto\cos(\frac1x)$ *n'a pas de limite en* 0, *et comme la fonction* $x\mapsto 2x\sin(\frac1x)$ *tend vers* 0 *en* 0, *cela entraîne que* $f'(x)$ *ne peut pas avoir de limite en* 0.

Solution 13.2 *Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction* f *entre deux racines consécutives. On montre ainsi qu'entre deux racines de* f *il y a toujours une racine de* f'.

Solution 13.3

1/ On montre que la fonction $g\colon x\mapsto f(x)-x$ *s'annule en un point* ℓ *car elle est continue et change de signe puisque* $g(a)=f(a)-a\geqslant 0$ *et* $g(b)=f(b)-b\leqslant 0$. *Si* ℓ *et* ℓ' *sont deux points de* f *dans* $[a;b]$, *alors en appliquant l'inégalité des AF, on* $|\ell-\ell'|=[f(\ell)-f(\ell')|\leqslant k|\ell-\ell'|$, *or* $k<1$, *ce qui entraîne* $|\ell-\ell'|=0$ *et donc* $\ell=\ell'$.

2/ Par récurrence tous les termes u_n *existent dans* $[a;b]$. *On a alors (IAF)* $|u_{n+1}-\ell|=|f(u_n)-f(\ell)|\leqslant k|u_n-\ell|$, *on en déduit par récurrence que* $|u_n-\ell|\leqslant k^n|u_0-\ell|$, *or* $k^n\to 0$ *car* $|k|<1$, *et donc* $u_n\to\ell$ *(c'est le théorème du point fixe).*

Solution 13.4

Solution 13.5 *On vérifie que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *avec* $f'(x)=3x^2$ *si* $x>0$, $f'(x)=-3x^2$ *si* $x<0$ *et* $f'(0)=0$. *On peut écrire* $f'(x)=3x|x|$ *pour tout* x, *et donc* f' *est continue sur* $\mathbb{R}$, f *est donc au moins de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.

De même, on vérifie que f' *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *avec* $f''(x)=6x$ *si* $x>0$, $f'(x)=-6x$ *si* $x<0$ *et* $f''(0)=0$. *On peut écrire* $f''(x)=6|x|$ *pour tout* x, *et donc* f'' *est continue sur* $\mathbb{R}$, f' *est donc au moins de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$, *c'est à dire* f *est au moins de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$.

Par contre, on peut vérifier que f'' *n'est pas dérivable en* 0, *et donc* f *n'est pas de classe* $\mathscr{C}^3$ *sur* $\mathbb{R}$.

Solution 13.6 *On a* $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{2k}$ *(Newton) et donc* $f^{(n)}(x)=\sum\limits_{\frac n2\leqslant k\leqslant n} n\binom{n}{k}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2k-n)!}x^{2k-n}$ *et donc* $f^{(n)}(0)=0$ *si n est impair, et* $f^{(n)}(0)=(-1)^{\frac n2}\binom{n}{\frac n2}n!$.

On a $f(x)=(1-x)^n\times(1+x)^n$, *et donc* $f^{(n)}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}(1-x)^{n-k}\frac{n!}{k!}(1+x)^k$ *(Leibniz), d'où* $f^{(n)}(x)=n!\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(-1)^k(1-x)^{n-k}(1+x)^k$ *et donc* $f^{(n)}(0)=n!\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(-1)^k$. *En égalant les deux résultats, on en déduit que :* $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(-1)^k=(-1)^{\frac n2}\binom{n}{\frac n2}$ *si n est pair, et* 0 *sinon.*

Solution 13.7 *On a* $f(t)=\mathrm{Re}(g(t))$ *avec* $g(t)=\exp(t(i+\sqrt3))=\exp(\alpha t)$ *en posant* $\alpha=\sqrt3+i=2\exp(i\frac\pi6)$. *On a donc* $g^{(n)}(t)=\alpha^n\exp(\alpha t)$ *et* $f(t)=\mathrm{Re}(\alpha^n\exp(\alpha t))=2^n\cos(t+n\frac\pi6)\exp(t\sqrt3)$.