Chapitre 21

Séries numériques

Sommaire

I GÉNÉRALITÉS

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On cherche à généraliser la notion de somme d'éléments de $\mathbb{K}$ à un nombre infini de termes.

1) Définitions

Définition 21.1

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. Le nombre S_n est appelé **somme partielle de rang** n (d'ordre n) de la série. La série de terme général u_n est notée $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.*

Exemples :

- $\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$: série géométrique de raison q.
- $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ avec $z\in\mathbb{K}$: série exponentielle.
- $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha\in\mathbb{R}$: séries de Riemann.

Définition 21.2 (convergence d'une série)

• *On dit que la série de terme général u_n est **convergente** lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Si c'est le cas, la limite de la suite des sommes partielles est appelée **somme de la série** et notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$. On a donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. La différence entre la somme*

de la série et la somme partielle S_n est appelée **reste de rang** *n, noté $R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.*
• Une série qui n'est pas convergente, est dite **divergente**.
• Déterminer la nature d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

Attention !
On prendra garde à ne pas confondre la notation $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ qui désigne la série (c'est à dire la suite des sommes partielles), avec la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ qui désigne la somme de la série, **si celle-ci converge** *(c'est la limite des sommes partielles lorsque celle-ci existe dans $\mathbb{K}$).*

☞**Exemples** :
- La série de terme général $u_n = n$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ donc $\lim S_n = +\infty$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n$ est divergente.
- La série de terme général $u_n = (-\frac{1}{3})^n$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-\frac{1}{3})^k = \frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1+\frac{1}{3}}$, or $|-\frac{1}{3}| < 1$ donc $\lim S_n = \frac{3}{4}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-\frac{1}{3})^n$ est convergente et sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} (-\frac{1}{3})^n = \frac{3}{4}$.

★**Exercice 21.1** *Étudier la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n$.*

2) Premières propriétés

Théorème 21.1 (lien suite-série)
Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{K}}$ une suite, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Autrement dit, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la série de terme général u_n.

Preuve : Posons $u_0 = s_0$ et pour $n > 0$, $u_n = s_n - s_{n-1}$, on a alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = s_0 + (s_1 - s_0) + \cdots + (s_n - s_{n-1}) = s_n$. □

Remarque 21.1 – *L'ensemble des séries de $\mathbb{K}$ n'est donc autre que $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$. Pour les opérations usuelles sur les suites, on sait que c'est un $\mathbb{K}$-e.v. Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries, $\lambda \in \mathbb{K}$. Il est facile de voir que la somme des deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n + \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ est la série de terme général $u_n + v_n$, et que la série $\lambda \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est la série de terme général λu_n.*

★**Exercice 21.2** *Montrer que l'application de $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ dans lui-même qui a chaque suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est un automorphisme.*

Théorème 21.2
L'ensemble des séries convergentes de $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. De plus l'application qui à chaque série convergente associe sa somme, est (une forme) linéaire. Plus précisément, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont deux séries convergentes, alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha u_n + \beta v_n$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha u_n + \beta v_n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Preuve : Soit (U_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et (V_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$. Alors $(\alpha U_n + \beta V_n)$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha u_n + \beta v_n$. Le reste découle des propriétés des suites convergentes. □

Attention !
• La somme de deux séries divergentes peut très bien donner une série convergente (prendre deux séries divergentes opposées par exemple).
• La somme d'une série divergente et d'une série convergente est forcément une série divergente (raisonner par l'absurde).

Théorème 21.3 **(convergence d'une série complexe)**
Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à terme complexe, celle-ci est convergente si et seulement si les deux séries réelles $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(v_n)$ sont convergentes, et auquel cas on a : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$.

Preuve : Soit (A_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Re}(u_n)$ et (B_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(v_n)$. Alors $(U_n + iV_n)$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$. Le reste découle des propriétés des suites complexes convergentes. □

Théorème 21.4 **(condition nécessaire de convergence)**
Si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge alors on a nécessairement $\lim u_n = 0$*, mais* ***la réciproque est fausse****.*

Preuve : Soit (S_n) la suite des sommes partielles, alors la suite (S_n) converge vers S_∞ la somme de la série, d'où $\lim U_n - U_{n-1} = S_\infty - S_\infty = 0$, c'est à dire $\lim u_n = 0$.

Pour la réciproque prenons $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$, on en déduit que $S_n \to +\infty$. La série est divergente bien que le terme général u_n tende vers 0. □

Définition 21.3
On dit que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge ***grossièrement*** *lorsque le terme général ne tend pas vers* 0.

☞**Exemples** :
- La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n$ est grossièrement divergente.
- La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ (série harmonique) est divergente (mais pas grossièrement), en effet $S_{2n} - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. Si la série était convergente alors la suite (S_n) convergerait vers la somme S_∞, mais alors $S_{2n} - S_n \to S_\infty - S_\infty = 0$, on aurait donc $0 \geqslant \frac{1}{2}$ ce qui est absurde. La série harmonique est donc divergente.

  Rappel : dans le TD sur les suites, nous avons établi que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

3) Séries géométriques

Théorème 21.5 **(nature des séries géométriques)**
La série géométrique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z^n$ avec $z \in \mathbb{C}$, est convergente si et seulement si $|z| < 1$, auquel cas sa somme est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Preuve : Si $|z| \geqslant 1$ alors $|z^n| \geqslant 1$ et donc la suite (z^n) ne peut pas tendre vers 0, la série est donc grossièrement divergente dans ce cas.

Si $|z| < 1$, alors $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, or $z^{n+1} \to 0$ car $|z| < 1$, il en découle que $S_n \to \frac{1}{1-z}$. □

☞**Exemples** :
- La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-\frac{1}{3})^n$ est convergente et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-\frac{1}{3})^n = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$.
- La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n$ est grossièrement divergente.

Attention !
Pour les séries géométriques convergentes on prendra garde à l'indice du premier terme avant d'appliquer la formule !

II SÉRIES À TERMES POSITIFS

Dans ce paragraphe toutes les séries sont à **termes réels positifs**. Pour ces séries, il faut remarquer que les sommes partielles forment **une suite croissante**. La définition peut s'étendre aux séries dont le terme général est réel positif **à partir d'un certain rang** seulement.

1) Critère de convergence

Théorème 21.6
Une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée dans $\mathbb{R}$.

Preuve : La série converge si et seulement si la suite (S_n) converge, or cette suite est croissante, on sait donc qu'elle converge si et seulement si elle est majorée. La résultat en découle. □

Remarque 21.2 –
• *Lorsque la suite (S_n) des sommes partielles n'est pas majorée, on a $S_n \to +\infty$ puisque cette suite est croissante.*
• *Le critère s'applique aux séries à termes positifs **à partir d'un certain rang**.*

☞**Exemple** : La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ est convergente. En effet, pour $n \geqslant 2$ on a $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, on en déduit que $S_n \leqslant 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 2 - \frac{1}{n}$, et par conséquent $S_n \leqslant 2$.

Attention !
Le critère est en défaut lorsque la série n'est pas à termes positifs. Par exemple la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n$ est divergente alors que ses sommes partielles sont bornées.

2) Théorèmes de comparaison

Théorème 21.7
Soient $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries telles qu'à partir d'un certain rang N on ait $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, alors on a :
• *Si la $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et on a $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} u_n \leqslant \sum\limits_{n=N}^{+\infty} v_n$.*
• *Si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge.*

Preuve : D'après les hypothèses, on a $\sum\limits_{k=N}^{n} u_k \leqslant \sum\limits_{k=N}^{n} v_k$.

• Si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k)$ converge et donc $(\sum\limits_{k=N}^{n} v_k)$ converge, cette suite est donc majorée par un certain réel M, on en déduit que la somme partielle de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est majorée, comme elle est à termes positifs à partir d'un certain rang, elle converge et l'inégalité sur les sommes en découle.

• Si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, alors $(\sum\limits_{k=N}^{n} u_k)$ est croissante divergente, donc de limite $+\infty$, on en déduit que $(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k)$ tend vers $+\infty$, cette suite n'est donc pas majorée, donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ est divergente puisqu'elle est à terme positif à partir d'un certain rang. □

☞**Exemples** :
- La série de terme général $\frac{1}{n^3}$ est convergente car $\frac{1}{n^3} \leqslant \frac{1}{n^2}$ et celle-ci est une série est convergente.
- Si $\alpha < 1$, alors la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est divergente car $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$ et on sait que la série harmonique est divergente.

Théorème 21.8 (utilisation des relations de comparaison)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs (à partir d'un certain rang).
• *Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.*
• *Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge.*
• *Si $u_n \sim v_n$ alors les deux séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.*

Preuve : Si $u_n = O(v_n)$, alors il existe un réel $M > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n \leqslant M v_n$, les deux premiers points en découlent compte tenu du théorème précédent.
Si $u_n \sim v_n$ alors on a à la fois $u_n = O(v_n)$ **et** $v_n = O(u_n)$. Le résultat en découle. □

Remarque 21.3 – *Les deux premiers points du théorème s'appliquent aussi lorsque $u_n = o(v_n)$.*

☞**Exemples** :
- Soit $u_n = \sin(\frac{1}{n})$ alors $u_n \sim \frac{1}{n}$, on en déduit que la série de terme général u_n est à termes positifs pour n assez grand et qu'elle est divergente, car la série harmonique diverge.
- Soit $u_n = 1 - \cos(\frac{1}{n})$, alors $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$, on en déduit que la série de terme général u_n est à termes positifs pour n assez grand et qu'elle est convergente, car la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.

3) Comparaison avec une intégrale

Cette comparaison peut se faire pour les séries dont le terme général est de la forme $u_n = f(n)$ où f est une fonction continue monotone et à valeurs positives sur un intervalle $\mathrm{I} = [\mathrm{A}; +\infty[$.

Théorème 21.9

*Soit $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction **continue**, **monotone** et à **valeurs positives**.*

- *Si f est croissante alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(0) + \int_0^n f(t)\,dt \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} f(k) \leqslant \int_0^{n+1} f(t)\,dt$.*
- *Si f est décroissante alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)\,dt$.*

Preuve : Supposons f croissante, alors sur l'intervalle $[k; k+1]$ on a $f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k+1)$, on en déduit en intégrant sur cet intervalle que $f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k+1)$, on somme alors ces inégalités pour k allant de 0 à n, ce qui donne $\sum\limits_{k=0}^{n} f(k) \leqslant \int_0^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n+1} f(k)$, ce qui donne le premier encadrement. L'autre cas se traite de la même façon. □

☞**Exemple** : On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n\ln(n)}$ pour $n \geqslant 2$. Soit $f(t) = \frac{1}{t\ln(t)}$ sur $[2; +\infty[$, cette fonction est continue, positive et décroissante, on en déduit que $\int_2^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}) \leqslant f(2) + \int_2^n f(t)\,dt$, or $\int_2^n f(t)\,dt = [\ln(\ln(t))]_2^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2) \to +\infty$, la série est donc divergente.

Théorème 21.10 (convergence des séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve : Si $\alpha \leqslant 0$ alors le terme général ne tend pas vers 0, la série est donc grossièrement divergente.

Supposons $\alpha > 0$ et soit $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$, c'est une fonction continue, positive et décroissante sur $[1; +\infty[$, on en déduit que que $\int_1^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant f(1) + \int_1^n f(t)\,dt$. On sait que $\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln(n) & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{sinon} \end{cases}$. Si $\alpha \leqslant 1$ alors $\int_1^n f(t)\,dt \to +\infty$ et donc les sommes partielles tendent vers $+\infty$. Par contre, si $\alpha > 1$ alors $(\int_1^n f(t)dt)$ est convergente, donc majorée, et donc la série (qui est à termes positifs) converge. □

☞**Exemples** :
- Soit $u_n = e^{-\sqrt{n}}$, on sait que $n^2 = o\left(e^{\sqrt{n}}\right)$, on en déduit que $n^2 u_n = o(1)$ et donc $u_n = o(\frac{1}{n^2})$, or la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge, donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} e^{-\sqrt{n}}$ est convergente.
- Soit $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$, $n^\alpha u_n = \frac{n^{\alpha-1/2}}{\ln(n)} \to +\infty$ si on prend $\alpha > \frac{1}{2}$ (théorème des croissances comparées), donc pour n assez grand, on a $\frac{1}{n^\alpha} \leqslant u_n$, en prenant $\alpha \in]\frac{1}{2}; 1[$ on peut en déduire que série de terme général u_n est divergente.
- Soit $u_n = \frac{\ln^2(n)}{n^{3/2}}$, $n^\alpha u_n = n^{\alpha-3/2}\ln(n)^2 \to 0$ si on prend $\alpha < \frac{3}{2}$ (théorème des croissances comparées), donc pour n assez grand, on a $u_n \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$, en prenant $\alpha \in]1; \frac{3}{2}[$ on peut en déduire que série de terme général u_n est convergente.

III SÉRIES À TERMES QUELCONQUES

Les séries considérées sont à termes complexes.

1) Séries absolument convergentes

Définition 21.4

La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est dite ***absolument convergente*** *lorsque la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est convergente.*

Remarque 21.4 – *La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est évidemment à termes positifs.*

☞**Exemple** : La série de terme général $u_n = \frac{e^{in}}{n^3}$ est absolument convergente car $|u_n| = \frac{1}{n^3}$: série de Riemann convergente.

Théorème 21.11

Si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente, alors est elle convergente et on a $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. ***La réciproque est fausse.***

Preuve : Posons $u_n = a_n + ib_n$ avec a_n et b_n réels. Posons $a_n^+ = \max(0, a_n)$ et $a_n^- = \max(0, -a_n)$ (idem pour b_n), alors on a $0 \leqslant a_n^+$, $0 \leqslant a_n^-$, $a_n^+ + a_n^- = |a_n|$ et $a_n^+ - a_n^- = a_n$. On en déduit que $0 \leqslant a_n^+ \leqslant |a_n| \leqslant |u_n|$ et $0 \leqslant a_n^- \leqslant |a_n| \leqslant |u_n|$. On en déduit que les séries à termes positifs a_n^+ et a_n^- sont convergentes, et par conséquent la série de terme général $a_n^+ - a_n^- = a_n$ est convergente. De même on montre que la série de terme général b_n converge et donc la série de terme général $a_n + ib_n = u_n$ est convergente.

L'inégalité triangulaire donne $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k|$, par passage à la limite, on obtient l'inégalité annoncée car on sait que les deux sommes ont une limite. □

Attention !

La réciproque du théorème ci-dessus est fausse, par exemple on montrera que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais on sait que la série de terme général $|u_n| = \frac{1}{n}$ est divergente. Une telle série est dite semi-convergente.

2) Séries alternées

Définition 21.5

Une série alternée est une série dont le terme général est de la forme $(-1)^n a_n$ où (a_n) est une suite réelle positive.

Théorème 21.12 (critère spécial à certaines séries alternées)

Une série alternée $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n a_n$ telle que la suite (a_n) est ***décroissante de limite nulle****, est convergente. De plus on a la majoration du reste d'ordre n : $|R_n| \leqslant a_{n+1}$.*

Preuve : Soit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ les sommes partielles, posons $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$, alors $u_{n+1} - u_n = S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0$ car la suite (a_k) est décroissante, on en déduit que la suite u est décroissante. De même, $v_{n+1} - v_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geqslant 0$, la suite v est donc croissante. Or $u_n - v_n = a_{2n+1} \to 0$, les deux suites sont donc adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ, on a donc $S_{2n} \to \ell$ et $S_{2n+1} \to \ell$, on en déduit que $S_n \to \ell$, la série est donc bien convergente de somme ℓ.

De plus on a l'encadrement $v_n \leqslant \ell \leqslant u_n$, ce qui veut dire que ℓ est compris entre S_n et S_{n+1} pour tout n, par conséquent : $|R_n| = |\ell - S_n| \leqslant |S_{n+1} - S_n| = a_{n+1}$. □

Remarque 21.5 – *Lorsque le critère s'applique, la majoration du reste donne un renseignement sur la vitesse de convergence. Cette majoration est également utile lorsqu'on veut faire un calcul approché de la somme ℓ avec une précision donnée.*

☞**Exemple** : La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, soit S sa somme, on a $|S - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}| \leqslant \frac{1}{n+1}$, à priori la convergence est lente. Nous verrons en exercice que $S = -\ln(2)$. Cette série n'est pas absolument convergente, mais seulement semi-convergente.

★**Exercice 21.3** ***(utilisation d'un développement asymptotique)***

1/ *Nature de la série de terme général $u_n = \sin(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$.*

2/ *Même chose avec $u_n = \ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$.*

Attention!

Sur le deuxième exemple on a $\ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}) \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, *la série de gauche est divergente alors que la série de droite est convergente. Le théorème de comparaison est donc en défaut lorsque les séries ne sont pas à termes de signe constant.*

3) Séries obtenues par une formule de Taylor

Théorème 21.13 (formule de Taylor avec reste intégrale)

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^{n+1}$ *sur l'intervalle* I, *alors on a la formule suivante :*

$$\forall\ a, x \in \mathrm{I}, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Preuve : Celle-ci est laissée en exercice, il s'agit d'une simple récurrence sur n. On en déduit le théorème suivant. □

Théorème 21.14 (inégalité de Taylor-Lagrange [1])

Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ *est de classe* $\mathscr{C}^{n+1}$ *sur* I *et si* $|f^{(n+1)}|$ *est majorée par un réel* M_{n+1}, *alors :*

$$\forall\ x, a \in \mathrm{I}, \left|f(x) - \mathrm{T}_{n,f,a}(x)\right| \leqslant \mathrm{M}_{n+1}\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Applications :

– **La série exponentielle** : soit $z \in \mathbb{C}$, pour $t \in [0;1]$ on pose $f(t) = e^{tz}$, cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0;1]$, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n+1)}(t) = z^{n+1}e^{tz}$, en posant $z = a + ib$, on a $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant |z|^{n+1}e^{ta} \leqslant |z|^{n+1}\mathrm{M}$ où M désigne le maximum de la fonction e^{ta} sur $[0;1]$, appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et 1 à l'ordre n :

$$\left|e^z - \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right| \leqslant \mathrm{M}\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On voit que le majorant tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, car $|z|^n = o(n!)$, par conséquent :

$$\forall\ z \in \mathbb{C}, e^z = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!} \text{ ou encore } \boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}}.$$

– **Développement de** sin **en série** : avec la fonction sin, toutes ses dérivées sont majorées par 1, on a donc pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et x à l'ordre $2n+1$:

$$\left|\sin(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Là encore, on voit que le majorant tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ on en déduit donc que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ ou encore } \boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}.$$

– **Développement de** cos **en série** : de la même façon on montre que

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \text{ ou encore } \boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}}.$$

Remarque 21.6 –

– *On peut aussi déduire le développement en série de* sin *et* cos *en prenant les parties imaginaire et réelle du développement en série de* e^{ix}.

– *Ceci se généralise au cas où* f *est* $\mathscr{C}^\infty$ *et que ses dérivées en module sont* ***toutes majorées par une même constante****, car on sait que* $|x-a|^n = o(n!)$.

1. *LAGRANGE Joseph Louis* (1736 – 1813) : mathématicien qui fut un précurseur dans de nombreux domaines scientifiques.

4) Développement décimal d'un réel

Rappels

Soit $x \in \mathbb{R}$:
• Soit $a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$, la suite (a_n) est la suite de approximations décimales de x par défaut à 10^{-n} près, car $a_n \leqslant x < a_n + 10^{-n}$.
• Pour $n \geqslant 1$, on pose $d_n = 10^n[a_n - a_{n-1}]$, alors d_n est un entier de l'intervalle $[\![0;9]\!]$ (appelé **n^e décimale de** x).

On remarque alors qu'en posant $d_0 = a_0 = \lfloor x \rfloor$, on a $\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k} = a_0 + \sum_{k=0}^{n} a_k - a_{k-1} = a_n \to x$, ce qui signifie que la série de terme général $\frac{d_n}{10^n}$ est convergente et de somme x :

$$\boxed{x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}, \text{ c'est le développement décimal de } x}$$

☞**Exemple** : $\frac{1}{3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{10^n}$, $\frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{10} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{6}{10^n} \cdots$

Théorème 21.15 (Compléments)
• *La suite (d_n) définie ci-dessus ne peut jamais être constante égale à 9 à partir d'un certain rang, c'est ce que l'on appelle le **développement décimal propre** de x.*
• *Tout réel x admet **un unique** développement décimal propre.*
• *La suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ des décimales est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si x est rationnel.*

Remarque 21.7 –
• *Pour toute suite d'entiers (d_n) telle que $\forall n \geqslant 1$, $d_n \in [\![0;9]\!]$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{d_n}{10^n}$ est convergente car positive à partir du rang 1, et majorée par une série géométrique convergente.*
• *Si on n'impose pas la condition « (d_n) ne doit pas être constante égale à 9 à partir d'un certain rang », alors il n'y a plus unicité du développement décimal, car par exemple $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 1$.*

Théorème 21.16 (Une application)
*Il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ (on dit que $\mathbb{R}$ est **non dénombrable**).*

Preuve : Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une application, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n)$ a un unique développement décimal propre $\phi(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_{n,k}}{10^k}$. On définit une suite $(b_k)_{k\geqslant 0}$ en posant $b_k = 0$ si $d_{k,k} \neq 0$ et $b_k = 1$ si $d_{k,k} = 0$, soit $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{10^k}$, s'il existait $m \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(m) = x$ alors on devrait avoir (par unicité) $b_m = d_{m,m}$, ce qui absurde car $\forall k \in \mathbb{N}$, $b_k \neq d_{k,k}$, x n'a donc pas d'antécédent par ϕ, et donc ϕ ne peut pas être surjective. □

Remarque 21.8 – *La méthode utilisée dans la preuve est connue sous le nom de « procédé diagonal de Cantor ».*

IV SOLUTION DES EXERCICES

Solution 21.1 *On vérifie par récurrence que $S_{2n} = 1$ et $S_{2n+1} = 0$, la suite (S_n) est donc divergente et par conséquent la série de terme général u_n aussi.*

Solution 21.2

1/ *On a $\sin(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{6n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, on reconnaît trois séries convergentes : la première par le critère spécial des séries alternées, la deuxième est absolument convergente car en valeur absolue c'est une série de Riemann, et la troisième par comparaison avec une série de Riemann également. On en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.*

2/ *On a pour $n > 1$, $\ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} - \frac{(-1)^n}{3n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, on reconnaît trois séries convergentes : la première par le critère spécial des séries alternées, la troisième est absolument convergente car en valeur absolue c'est une série de Riemann, la quatrième par comparaison avec une série de Riemann également, mais la deuxième est une série de Riemann divergente. On en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.*