Chapitre 3

Calculs algébriques

Sommaire

I SOMMES ET PRODUITS

On se place dans $\mathbb{C}$. Les sommes et les produits dont on va parler ne contiennent qu'un nombre fini de termes.

1) Définition

Définition 3.1 (somme et produit sur une partie finie)
Soit A *une partie finie de* $\mathbb{C}$*, la somme des éléments de* A *est notée* $\sum_{a\in A} a$ *et le produit des éléments de* A *est noté* $\prod_{a\in A} a$*. Par convention, lorsque* A *est vide, la somme est nulle et le produit vaut* 1*.*

Remarque 3.1 – *Ces opérations étant commutatives dans* $\mathbb{C}$*, l'ordre n'a pas d'importance. Comme elles sont également associatives, il est inutile de préciser un parenthèsage pour la somme ou le produit.*

☞**Exemple** : La somme et le produit des racines n^{es} de l'unité se notent $\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega$ et $\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega$.

Définition 3.2 (somme et produit d'une famille finie)
Soit $(a_k)_{k\in I}$ *une famille de complexes indexée par un ensemble fini* I*. La somme des éléments de la famille est notée* $\sum_{k\in I} a_k$ *et le produit des éléments de la famille est noté* $\prod_{k\in I} a_k$*. Par convention, lorsque* I *est vide, la somme est nulle et le produit vaut* 1*.*

☞**Exemple** : La famille des racines n^{es} de l'unité est $(e^{2ik\pi/n})_{k\in[\![0;n-1]\!]}$, on peut donc écrire la somme et le produit ainsi : $\sum_{k\in[\![0;n-1]\!]} e^{2ik\pi/n}$ et $\prod_{k\in[\![0;n-1]\!]} e^{2ik\pi/n}$.

Définition 3.3 (lorsque I est un intervalle d'entiers)

Soit $(a_k)_{k\in I}$ une famille de complexes indexée par un intervalle d'entiers $I = [\![n;m]\!]$. La somme des éléments de la famille est notée $\sum\limits_{k=n}^{m} a_k$ et le produit des éléments de la famille est noté $\prod\limits_{k=n}^{m} a_k$. Par convention, lorsque $n > m$, la somme est nulle et le produit vaut 1 (car dans ce cas l'intervalle $[\![n;m]\!]$ est vide).

☞**Exemple** : La famille des racines n^{es} de l'unité est $(e^{2ik\pi/n})_{k\in[\![0;n-1]\!]}$, on peut donc écrire la somme et le produit ainsi : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n}$ et $\prod\limits_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n}$.

Attention !

*Dans la notation $\sum\limits_{k=n}^{m} a_k$, il est implicite que **l'indice** k **augmente de** 1 **lorsqu'on passe d'un terme au suivant** (idem pour le produit). Par exemple, la somme des entiers impairs de 1 à 15 ne s'écrit pas $\sum\limits_{k=1}^{15} k$ (qui correspond à la somme de tous les entiers de 1 à 15), mais $\sum\limits_{k=0}^{7} 2k+1$.*

Remarque 3.2 :

- *Le terme a_k est appelé terme général de la somme (ou produit), la valeur n est appelée valeur initiale de l'indice et m la valeur finale.*
- *Dans les formules donnant la somme ou le produit, l'indice est une variable dite **muette**, on peut lui donner le nom que l'on veut, **le résultat ne dépend pas de l'indice**.*

Cas particuliers

- **Terme général constant** : $\sum\limits_{k=n}^{m} \alpha = (m-n+1)\alpha$ et $\prod\limits_{k=n}^{m} \alpha = \alpha^{m-n+1}$ si $n \leqslant m$.
- **Sommes et produits télescopiques** : soit $(a_k)_{k\in[\![n;m+1]\!]}$ une famille de complexes, alors : $\sum\limits_{k=n}^{m} (a_{k+1}-a_k) = a_{m+1}-a_n$ et si aucun terme ne s'annule, alors $\prod\limits_{k=n}^{m} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{m+1}}{a_n}$.
- **Sommes géométriques** : somme de termes consécutifs d'une suite u géométrique de raison $q\in\mathbb{C}$ (*i.e.* $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_{k+1} = u_k\times q$) :

$$\sum_{k=n}^{m} u_k = \begin{cases} \frac{u_n - q\times u_m}{1-q} & \text{si } q\neq 1 \\ (m-n+1)u_p & \text{sinon} \end{cases}$$

  On retiendra la formule $\boxed{S = \dfrac{p-q\times d}{1-q}}$ où p désigne le premier terme de la somme et d le dernier.
- **Sommes arithmétiques** : somme de termes consécutifs d'une suite u arithmétique de raison $r\in\mathbb{C}$ (*i.e.* $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_{k+1} = u_k + r$) :

$$\sum_{k=n}^{m} u_k = \frac{(m-n+1)(u_n+u_m)}{2}$$

  On retiendra la formule $\boxed{S = \dfrac{n(p+d)}{2}}$ où p désigne le premier terme de la somme, d le dernier et n le **nombre de termes**.

★**Exercice 3.1** *Démontrer les deux formules ci-dessus.*

2) Changement d'indice

Cas particuliers

Lorsque l'ensemble des indices est un intervalle d'entiers, les changements qui reviennent le plus souvent dans les sommes $\sum\limits_{k=n}^{m} a_k$ (ou produits) sont les suivants (avec $n \leqslant m$) :

- **translation de l'indice** : soit à calculer $\sum\limits_{k=n}^{m} a_k =$, soit $p\in\mathbb{Z}$, posons un nouvel indice $k' = k+p$ (*i.e.* $k = k'-p$), on a alors :

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \sum_{k'=n+p}^{m+p} a_{k'-p}$$

En effet, $\sum_{k'=n+p}^{m+p} a_{k'-p} = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m = \sum_{k=n}^{m} a_k$.

– **symétrie de l'indice** : soit à calculer $\sum_{k=n}^{m} a_k =$, soit $p \in \mathbb{Z}$, posons un nouvel indice $k' = p - k$ (*i.e.* $k = p - k'$) , on a alors :

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \sum_{k'=p-m}^{p-n} a_{p-k'}$$

En effet, $\sum_{k'=p-m}^{p-n} a_{p-k'} = a_m + a_{m-1} + \cdots + a_n = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m = \sum_{k=n}^{m} a_k$.

Attention !

Le nouvel indice doit également varier de 1 *en* 1*. Considérons par exemple* $S = \sum_{k=1}^{n} 2k = 2+4+6+\cdots+2n$*, alors le changement d'indice* $k' = 2k$ *n'est pas « valable », car* $\sum_{k'=2}^{2n} k' = 2+3+4+5+6+\cdots+2n \neq S$.

Formulation générale

Soit $(a_k)_{k\in I}$ une famille finie de complexes indexée par I non vide, supposons qu'il existe une bijection $f : J \to I$ (où J désigne un autre ensemble), par composition on a ainsi une autre famille, indexée par J, et qui est $(a_{f(k')})_{k'\in J}$. La fonction f **étant bijective** les deux familles comportent exactement les mêmes termes à l'ordre près, par conséquent la somme des termes des deux familles est la même, et le produit aussi (l'addition et la multiplication étant commutatives) :

$$\sum_{k\in I} a_k = \sum_{k'\in J} a_{f(k')} \text{ et } \prod_{k\in I} a_k = \prod_{k'\in J} a_{f(k')}$$

On dit qu'on a fait le changement d'indice $k = f(k')$ avec $k' \in J$.

★**Exercice 3.2** *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $(1-z)^{2n} = (1+z)^{2n}$ *et calculer le produit des solutions* ***non nulles****.*

3) Propriétés

Théorème 3.1

Soient $\alpha, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ *des nombres complexes,* $p \leqslant q \leqslant n$ *des entiers, on a :*

- pour la somme :

$$\sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=q+1}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{n} a_k\,;\ \sum_{k=p}^{n} \alpha \times a_k = \alpha \times \sum_{k=p}^{n} a_k\,;\ \sum_{k=p}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=p}^{n} b_k$$

- pour le produit :

$$\left(\prod_{k=p}^{q} a_k\right) \times \left(\prod_{k=q+1}^{n} a_k\right) = \prod_{k=p}^{n} a_k\,;\ \prod_{k=p}^{n} \alpha \times a_k = \alpha^{n-p+1} \times \prod_{k=p}^{n} a_k\,;\ \prod_{k=p}^{n} (a_k \times b_k) = \left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right) \times \left(\prod_{k=p}^{n} b_k\right)$$

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

4) Sommes doubles

Sur un rectangle

Soit $(a_{k,l})_{(k,l)\in[\![p;q]\!]\times[\![n;m]\!]}$ une famille indexée par $[\![p;q]\!] \times [\![n;m]\!]$ où $p \leqslant q$ et $n \leqslant m$ sont des entiers. La somme de la famille est appelée **somme double** et notée $\sum_{(k,l)\in[\![p;q]\!]\times[\![n;m]\!]} a_{k,l} = \sum_{\substack{p\leqslant k\leqslant q \\ n\leqslant l\leqslant m}} a_{k,l}$.

Disposons ces nombres dans un tableau en indexant les lignes de p et q, et les colonnes de n à m :

$a_{p,n}$	$a_{p,n+1}$	$\cdots$	$a_{p,m}$
$a_{p+1,n}$	$a_{p+1,n+1}$	$\cdots$	$a_{p+1,m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_{q,n}$	$a_{q,n+1}$	$\cdots$	$a_{q,m}$

La somme des nombres figurant sur la ligne k est $S_k = a_{k,n} + a_{k,n+1} + \cdots + a_{k,m} = \sum_{l=n}^{m} a_{k,l}$. Si maintenant nous faisons le total des sommes sur chaque ligne, nous obtenons $S_p + \cdots + S_q = \sum_{k=p}^{q} S_k = \sum_{k=p}^{q}\left(\sum_{l=n}^{m} a_{k,l}\right)$, or ce total représente la somme des nombres de la famille (car l'addition est commutative et associative), d'où :

$$\sum_{\substack{p\leqslant k\leqslant q\\ n\leqslant l\leqslant m}} a_{k,l} = \sum_{k=p}^{q}\left(\sum_{l=n}^{m} a_{k,l}\right)$$

De même, la somme des nombres figurant sur la colonne l est $C_l = a_{p,l} + a_{p+1,l} + \cdots + a_{q,l} = \sum_{k=p}^{q} a_{k,l}$. Si maintenant nous faisons le total des sommes sur chaque colonne, nous obtenons $C_n + \cdots + C_m = \sum_{l=n}^{m} C_l = \sum_{l=n}^{m}\left(\sum_{k=p}^{q} a_{k,l}\right)$, or ce total représente la somme des nombres de la famille (car l'addition est commutative et associative), d'où finalement :

$$\boxed{\sum_{\substack{p\leqslant k\leqslant q\\ n\leqslant l\leqslant m}} a_{k,l} = \sum_{k=p}^{q}\left(\sum_{l=n}^{m} a_{k,l}\right) = \sum_{l=n}^{m}\left(\sum_{k=p}^{q} a_{k,l}\right)}$$

À retenir : produit de deux sommes simples

Soit $(a_k)_{k\in[\![p;q]\!]}$ et $(b_l)_{l\in[\![n;m]\!]}$ deux familles alors :

$$\sum_{\substack{p\leqslant k\leqslant q\\ n\leqslant l\leqslant m}} a_k b_l = \sum_{k=p}^{q}\left(\sum_{l=n}^{m} a_k b_l\right) = \sum_{k=p}^{q}\left(a_k \sum_{l=n}^{m} b_l\right) = \left(\sum_{k=p}^{q} a_k\right)\left(\sum_{l=n}^{m} b_l\right)$$

Sur un triangle

Soit $(a_{k,l})_{(k,l)\in A}$ une famille indexée par $A = \{(k,l) \mid 1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n\}$ où n est un entier. La somme de la famille est notée $\sum_{(k,l)\in A} a_{k,l} = \sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n} a_{k,l}$.

Disposons ces nombres dans un tableau en indexant les lignes de 1 à n :

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,n}$
	$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,2}$
		$\ddots$	$\vdots$
			$a_{n,n}$

La somme des nombres figurant sur la ligne k est $S_k = a_{k,k} + a_{k,k+1} + \cdots + a_{k,n} = \sum_{l=k}^{n} a_{k,l}$. Si maintenant nous faisons le total des sommes sur chaque ligne, nous obtenons $S_1 + \cdots + S_n = \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=k}^{n} a_{k,l}\right)$, or ce total représente la somme des nombres de la famille (car l'addition est commutative et associative), d'où :

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n} a_{k,l} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=k}^{n} a_{k,l}\right)$$

De même, la somme des nombres figurant sur la colonne l est $C_l = a_{1,l} + a_{2,l} + \cdots + a_{l,l} = \sum_{k=1}^{l} a_{k,l}$. Si maintenant nous faisons le total des sommes sur chaque colonne, nous obtenons $C_1 + \cdots + C_n = \sum_{l=1}^{n} C_l = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} a_{k,l}\right)$, or ce total représente la somme des nombres de la famille (car l'addition est commutative et associative), d'où finalement :

$$\boxed{\sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n} a_{k,l} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=k}^{n} a_{k,l}\right) = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} a_{k,l}\right)}$$

II BINÔME DE NEWTON

1) Factorielle

Définition 3.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Par convention, on pose $0! = 1$.

Exemple : $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, …

À retenir

$\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = (n+1) \times n!$

★**Exercice 3.3** *Montrer que* $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, (n+1)! = 1 + \sum_{k=1}^{n} k(k!)$.

2) Coefficients binomiaux

Définition 3.5

Soient n, p deux entiers positifs tels que $p \leqslant n$, on pose $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ (lire p parmi n).

Exemple : $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

En simplifiant dans la formule $n!$ avec $(n-p)!$, il reste :

À retenir : formule pour le calcul pratique

Si $1 \leqslant p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$.

Cette formule pratique permet d'étendre la définition à tout réel x (et $p \in \mathbb{N}$) en posant : $\binom{x}{p} = \frac{x(x-1)\cdots(x-p+1)}{p!}$ et $\binom{x}{0} = 1$.

Attention !

*La fonction factorielle telle que nous l'avons définie, ne s'applique qu'à des **entiers positifs**.*

Théorème 3.2 (propriétés)

Soient $0 \leqslant p \leqslant n$:

- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ *(symétrie).*
- $\binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1}\binom{n}{p}$.
- $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ *(relation de Pascal).*

Preuve : La première formule découle directement de la définition.

$\frac{n+1}{p+1}\binom{n}{p} = \frac{n+1}{p+1}\frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-(p+1))!(p+1)!} = \binom{n+1}{p+1}$.

$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{n!}{(n-p)!p!} + \frac{n!}{(n-p-1)!(p+1)!} = \frac{n!(p+1)+n!(n-p)}{(n-p)(p+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-p)!(p+1)!} = \binom{n+1}{p+1}$. □

Triangle de Pascal

La relation de Pascal permet de calculer les coefficients binomiaux de proche en proche dans un tableau :

$n\backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6+	4 =	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

3) Formule du binôme

Théorème 3.3

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Preuve : Par récurrence sur n : au rang 0 la formule donne 1 ce qui correspond bien à $(a+b)^0$. Si la formule est démontrée au rang n, alors :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = a(a+b)^n + b(a+b)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n}{p-1} a^p b^{n+1-p} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \text{ (changement d'indice } p = k+1 \text{ dans la première somme)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} \text{ (on regroupe les sommes sur } [\![1\,;n]\!]) \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \text{ (relation de Pascal)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \text{ (formule au rang } n+1)
\end{aligned}$$

La formule est donc établie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

☞**Exemples** :
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$.
- Si $n \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n2^{n-1}$.
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\frac{\pi}{3}) = \mathrm{Re}([1+e^{i\pi/3}]^n) = \sqrt{3^n}\cos(n\frac{\pi}{6})$.

III SYSTÈMES LINÉAIRES

1) Définition

Définition 3.6

Un système (S) *linéaire à n équations et p inconnues est un système d'équations de la forme :*

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

*où $x_1,\dots,x_p$ sont des nombres **inconnus**, $b_1,\dots,b_n$ sont des nombres donnés (appelés seconds membres) et la famille de nombres $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ est donnée (ce sont les coefficients, on dit qu'ils forment la matrice du système).*
Résoudre (S) *c'est trouver tous les p-uplets de nombres $(x_1,\dots,x_p)$ vérifiant* (S). *Deux systèmes sont dits équivalents si et seulement si ils ont les mêmes solutions.*

Codage

Les différentes équations d'un système linéaire sont notées du haut vers le bas $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \dots, \mathrm{L}_n$:

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{cccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 & (\mathrm{L}_1) \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n & (\mathrm{L}_n) \end{array}\right.$$

Les différentes colonnes du système sont notées de gauche à droite $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \dots, \mathrm{C}_p$.

2) Interprétation géométrique

Lorsque $p = 2$: si les coefficients $a_{i,1}$ et $a_{1,2}$ ne sont pas nuls simultanément, alors l'équation $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 = b_i$ peut être interprétée comme l'équation d'une droite $\mathscr{D}_i$ dans un plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les solutions étant les coordonnées des points $\mathrm{M}(x_1, x_2)$ de la droite $\mathscr{D}_i$. Résoudre (S) revient alors à chercher un point commun à plusieurs droites, c'est à dire $\mathscr{D}_1 \cap \cdots \cap \mathscr{D}_n$. Dans le cas où $n = 2$, il y a trois cas possibles :

- Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes et alors le système a une unique solution.
- Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont confondus et alors les solutions du système sont les coordonnées des points de $\mathscr{D}_1$.
- Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont strictement parallèles et alors il n'y a pas de solutions au système.

Lorsque $p = 3$: si les coefficients $a_{i,1}$, $a_{1,2}$ et $a_{i,3}$ ne sont pas nuls simultanément, alors l'équation $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + a_{i,3}x_3 = b_i$ peut être interprétée comme l'équation d'un plan $\mathscr{P}_i$ dans un plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, les solutions étant les coordonnées des points $\mathrm{M}(x_1, x_2, x_3)$ du plan $\mathscr{P}_i$. Résoudre (S) revient alors à chercher un point commun à plusieurs plan c'est à dire $\mathscr{P}_1 \cap \cdots \cap \mathscr{P}_n$. Dans le cas où $n = 2$, il y a trois cas possibles :

- Soit $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont confondus et alors les solutions du système sont les coordonnées des points de $\mathscr{P}_1$.
- Soit $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont strictement parallèles et alors il n'y a pas de solutions au système.
- Soit $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ se coupent suivant une droite $\mathscr{D}_{1,2}$. S'il y a une troisième équation, il s'agit ensuite d'étudier l'intersection $\mathscr{D}_{1,2} \cap \mathscr{P}_3$, il y a plusieurs cas :
  - Soit la droite coupe le plan en un point I et ses coordonnées forment l'unique solution du système.
  - Soit la droite est incluse dans le plan et l'intersection est la droite.
  - Soit la droite est strictement parallèle au plan et il n'y a pas de solution.

3) Méthode du pivot de Gauss

Systèmes triangulaires

Un système linéaire (S) est dit triangulaire lorsque les coefficients situés sous la diagonale principale (les coefficients $a_{i,j}$ avec $i > j$) sont nuls. **Lorsqu'un système triangulaire a ses coefficients diagonaux non nuls, on le résout par substitutions remontantes**. Exemple :

$$\left\{\begin{array}{r} x+2y-z+t=1 \\ y-z+2t=0 \\ z+t=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} x+2y-z+t=1 \\ y-z+2t=0 \\ z=1-t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+2y-z+t=1 \\ \qquad y=z-2t=1-3t \\ \qquad z=1-t \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=1-2y+z-t=4t \\ y=1-3t \\ z=1-t \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est donc $\{(4t, 1-3t, 1-t, t) \mid \in \mathbb{R}\}$. Sur cet exemple, on voit que l'inconnue t peut-être quelconque et que les autres s'écrivent en fonction de t. On dit que t est une inconnue **auxiliaire** et que x, y, z sont les inconnues **principales**.

Opérations élémentaires

Les opérations élémentaires de la méthode de Gauss sont :

- L'échange de deux équations L_i et L_j avec $i \neq j$, notée $L_i \leftrightarrow L_j$, elle transforme le système en un système équivalent car le connecteur « et » est commutatif.
- L'échange de deux colonnes C_i et C_j avec $i \neq j$, notée $C_i \leftrightarrow C_j$, elle transforme le système en un système équivalent car l'addition est commutative.
- Multiplier une ligne L_i par un nombre α **non nul**, notée $L_i \leftarrow \alpha L_i$, elle transforme le système en un système équivalent car la nouvelle équation L_i est équivalente à l'ancienne puisque $\alpha \neq 0$.
- Ajouter à une ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j $(i \neq j)$, elle notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, elle transforme le système en un système équivalent car l'opération $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$ nous permet de revenir à l'ancien système.

À retenir

La méthode du pivot de Gauss consiste à transformer, avec des opérations élémentaires, le système linéaire initial (S) en un système équivalent triangulaire dont les coefficients diagonaux sont non nuls.

La méthode est une succession d'étapes, voici le descriptif de l'étape k, celle-ci se déroule en trois temps :

1. On choisit un coefficient **non nul** dans les lignes L_k à L_n et les colonnes C_k à C_p. Ce coefficient sera appelé le pivot de l'étape k (noté p_k), pour les calculs à la main on essaie de choisir si possible un coefficient égal à 1 ou -1.
2. On amène le pivot p_k **à sa place**, c'est à dire ligne L_k et colonne C_k, il peut être nécessaire pour cela d'échanger deux lignes et/ou deux colonnes.
3. On « élimine » les coefficients situés sous le pivot dans les lignes L_{k+1} à L_n avec des opérations du type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$, c'est à dire qu'à chaque ligne (sous celle du pivot) on ajoute un certain nombre de fois la ligne du pivot pour faire disparaître le coefficient qui est dans la colonne du pivot, ceci est possible en faisant $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,k}}{p_k} L_k$ si $a_{i,k}$ est le coefficient de la ligne i et colonne k.

À l'issue de l'étape k on obtient un système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{cccccccc}
p_1x_1+ & a_{1,2}x_2+ & \cdots & & \cdots & \cdots & +a_{1,p}x_p & = & b_1 \\
 & p_2x_2+ & \cdots & & \cdots & \cdots & +a_{2,p}x_p & = & b_2 \\
 & \ddots & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & p_kx_k+ & \cdots & \cdots & +a_{k,p}x_p & = & b_k \\
 & & & & a_{k+1,k+1}x_{k+1}+ & \cdots & +a_{k+1,p}x_p & = & b_{k+1} \\
 & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & a_{n,k+1}x_{k+1}+ & \cdots & +a_{n,p}x_p & = & b_n
\end{array}\right. ,$$

La méthode s'arrête à l'issue de l'étape k lorsqu'on est arrivé à la dernière ligne, ou bien lorsqu'il n'est plus possible de trouver un pivot parce que tous les coefficients des lignes L_{k+1} à L_n et des colonnes C_{k+1} à C_p sont nuls. On peut alors procéder aux substitutions remontantes.

Exemple :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl}
\boxed{2x_1} + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 & = & 1 \\
3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 9x_5 & = & 0 \\
7x_1 + 18x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 7x_5 & = & 2 \\
2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 & = & -1
\end{array}\right.$$

Étape 1 :

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll}
\boxed{2x_1} + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 & = & 1 & \\
3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 12x_5 & = & -3 & L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\
15x_2 + 17x_3 - 14x_4 & = & -3 & L_3 \leftarrow 2L_3 - 7L_1 \\
x_2 + x_3 - x_4 - x_5 & = & -2 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1
\end{array}\right.$$

Étape 2 ($L_2 \leftrightarrow L_4$) :

$$\iff \begin{cases} \boxed{2x_1}+3x_2-3x_3+4x_4+2x_5 &= 1 \\ \boxed{x_2}+x_3-x_4-x_5 &= -2 \quad L_2 \leftarrow L_4 \\ 15x_2+17x_3-14x_4 &= -3 \\ 3x_2+5x_3-2x_4+12x_5 &= -3 \quad L_4 \leftarrow L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{2x_1}+3x_2-3x_3+4x_4+2x_5 &= 1 \\ \boxed{x_2}+x_3-x_4-x_5 &= -2 \\ 2x_3+x_4+15x_5 &= 27 \quad L_3 \leftarrow L_3-15L_2 \\ 2x_3+x_4+15x_5 &= 3 \quad L_4 \leftarrow L_4-3L_2 \end{cases}$$

Étape 3 :

$$\iff \begin{cases} \boxed{2x_1}+3x_2-3x_3+4x_4+2x_5 &= 1 \\ \boxed{x_2}+x_3-x_4-x_5 &= -2 \\ \boxed{2x_3}+x_4+15x_5 &= 27 \\ 0 &= -24 \quad L_4 \leftarrow L_4-L_3 \end{cases}$$

On voit donc que le système n'a pas de solution.

★**Exercice 3.4** *Résoudre en fonction du paramètre* λ *le système* $\begin{cases} (1-\lambda)x-y+z=0 \\ -x+(1-\lambda)y-z=0 \\ x-y+(1-\lambda)z=0 \end{cases}$.

IV SOLUTION DES EXERCICES

Solution 3.1

1/ Pour la suite arithmétique de raison r, si le premier terme est p, alors le suivant est $p+r$, puis $p+2r$, etc, et le dernier est $d=p+(n-1)r$, la somme s'écrit alors $S=np+r\times(1+2+\cdots+(n-1))$, or $1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$ (cela peut se vérifier par récurrence), d'où $S=np+\frac{nr(n-1)}{2}=\frac{n(2p+r(n-1)}{2}=\frac{n(p+d)}{2}$.

2/ Pour la suite géométrique de raison q, si le premier terme est p, alors le suivant est pq, puis pq^2, etc, et le dernier est $d=pq^{n-1}$, la somme s'écrit alors $S=p\times(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})$, or $(1-q)\times(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})=1-q^n$ après simplifications, donc si $q\neq1$ alors $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$ et donc $S=\frac{p-qd}{1-q}$, par contre, si $q=1$, alors tous les termes de la somme sont égaux à p et dans ce cas, $S=np$.

Solution 3.2 *L'équation équivaut à $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n}=1$, ou encore $\frac{1+z}{1-z}=e^{i\frac{k\pi}{n}}$ avec $k\in[\![0;2n-1]\!]$, ce qui donne $z=\frac{e^{i\frac{k\pi}{n}}-1}{e^{i\frac{k\pi}{n}}+1}$ ou encore $z=i\tan(\frac{k\pi}{2n})$ avec $k\in[\![0;n-1]\!]\cup[\![n+1;2n-1]\!]$.*

Le produit des solutions non nulles est $P=\prod_{k=1}^{n-1} i\tan(\frac{k\pi}{2n})\times\prod_{k=n+1}^{2n-1} i\tan(\frac{k\pi}{2n})$, en posant $q=k-n$ dans le deuxième produit, on obtient $P=\prod_{k=1}^{n-1} i\tan(\frac{k\pi}{2n})\times\prod_{q=1}^{n-1}-\frac{i}{\tan(\frac{q\pi}{2n})}$, d'où $P=i^{n-1}\times(-1)^{n-1}\times i^{n-1}=1$.

Solution 3.3 *C'est une récurrence sur n. Pour $n=1$ la somme vaut $1+1=2$ qui est bien $(1+1)!$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons la propriété vraie au rang n, alors $1+\sum_{k=1}^{n+1}k(k!)=1+\sum_{k=1}^{n}k(k!)+(n+1)((n+1)!)=(n+1)!+(n+1)(n+1)!=(n+1)![1+n+1]=(n+2)!$, la relation est donc vérifiée au rang $n+1$.*

Solution 3.4 *Notons (S_λ) le système $\begin{cases} (1-\lambda)x-y+z=0 \\ -x+(1-\lambda)y-z=0 \\ x-y+(1-\lambda)z=0 \end{cases}$, alors :*

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} \boxed{z}-y+(1-\lambda)x=0 \\ -z+(1-\lambda)y-x=0 \\ (1-\lambda)z-y+x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{z}-y+(1-\lambda)x=0 \\ -\lambda y-\lambda x=0 \quad L_2\leftarrow L_2+L_1 \\ -\lambda y+\lambda(2-\lambda)x=0 \quad L_3\leftarrow L_3+(\lambda-1)L_1 \end{cases}$$

Si $\lambda=0$: le système se réduit à une équation $z-y+x=0$ d'où $y=z+x$ avec z et x quelconques.

Lorsque $\lambda\neq0$: $(S_\lambda) \iff \begin{cases} z-y+(1-\lambda)x=0 \\ y+x=0 \\ y+(\lambda-2)x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z-y+(1-\lambda)x=0 \\ y+x=0 \\ (\lambda-3)x=0 \quad L_3\leftarrow L_3-L_2 \end{cases}$

Si $\lambda \notin \{0;3\}$ *alors l'unique solution est* $(0,0,0)$.
Si $\lambda = 3$ *: alors* x *est quelconque,* $y = -x$ *et* $z = y + 2x = x$.