Chapitre 24

Déterminants

Sommaire

I LE GROUPE SYMÉTRIQUE

1) Décomposition des permutations

Définition 24.1

Soit $E_n = [\![1;n]\!]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de E_n, c'est à dire l'ensemble des bijections de E_n vers lui-même. On rappelle que $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe de cardinal $n!$ (non abélien dès que $n \geqslant 3$), ce groupe est appelé ***groupe symétrique de type*** *n.*

Représentation d'une permutation :

On adoptera la notation suivante : soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, la deuxième ligne étant les images de la première par σ (dans le même ordre).

Définition 24.2 (notion de cycle)

*Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on dit que σ est un **cycle** lorsqu'il existe k entiers distincts dans $[\![1;n]\!]$: $i_1,\ldots,i_k$ $(k>1)$ tels que $\sigma(i_1)=i_2,\ldots,\sigma(i_{k-1})=i_k$, $\sigma(i_k)=i_1$, les autres entiers de E_n **étant fixes** par σ. Dans ce cas, on notera $\sigma=(i_1\ i_2\ldots i_k)$. Le nombre k est appelé **longueur du cycle**, et un cycle de longueur 2 est appelé **une transposition**. L'ensemble $\{i_1,\ldots,i_k\}$ est appelé **support du cycle** σ. On convient que l'identité de E_n est un cycle de longueur nulle et à support vide.*

★**Exercice 24.1**

1/ Décrire tous les cycles de $\mathfrak{S}_3$.

2/ Combien y-a-t'il de cycles de longueur k dans $\mathfrak{S}_n$?

3/ Si σ est un cycle dans $\mathfrak{S}_n$, déterminer σ^{-1}.

4/ Si σ est un cycle de longueur p dans $\mathfrak{S}_n$, montrer que $\sigma^p=\mathrm{id}$ et que $\sigma^i\neq\mathrm{id}$ si $i<p$. En déduire que si a est un élément du support de σ, alors $\sigma=(a\ \ \sigma(a)\ldots\sigma^{p-1}(a))$.

Théorème 24.1 (admis)

*Toute permutation de E_n est un produit (pour la loi $\circ$) de cycles **à supports disjoints**, cette décomposition est unique à l'ordre près.*

☞**Exemple** : Soit $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&2&1&6&4&5\end{pmatrix}$, alors $\sigma=(1\ 3)\circ(4\ 6\ 5)$.

★**Exercice 24.2** *Montrer que deux cycles à supports disjoints commutent. Et si les supports sont non disjoints ?*

Théorème 24.2

Toute permutation est un produit de transpositions.

Preuve : Il suffit de le prouver pour un cycle, soit $\sigma=(i_1\ \ldots\ i_k)$, il est facile de vérifier que $\sigma=(i_1\ i_2)(i_2\ i_3)\cdots(i_{k-1}\ i_k)$. On remarquera que les supports des transpositions ne sont pas disjoints deux à deux, et que le nombre de transpositions dans la décomposition est égal à $k-1$. □

2) Signature

Définition 24.3 (inversion)

Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, on appelle inversion de σ tout couple d'entiers $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$ tel que $i<j$ et $\sigma(i)>\sigma(j)$. Le nombre d'inversions de σ est noté I_σ.

Théorème 24.3 (Nombre d'inversions d'une transposition)

Soit $\sigma=(a\ b)$ une transposition de $\mathfrak{S}_n$ avec $a<b$, alors $\mathrm{I}_\sigma=2(b-a)-1$.

Preuve : En effet, soit $i<j$ deux entiers de E_n :
- Si $i,j\notin\{a,b\}$, alors i et j sont fixes, donc (i,j) n'est pas une inversion de σ.
- Si $i=a$ et $j=b$, alors (i,j) est une inversion.
- Si $i=a$ et $j\neq b$, alors (i,j) est une inversion ssi $j\in[\![a+1;b-1]\!]$.
- Si $i\neq a$ et $j=b$, alors (i,j) est une inversion ssi $i\in[\![a+1;b-1]\!]$.

Ce qui nous fait au total $2(b-a)-1$ inversions pour la transposition $(a\ b)$. □

Définition 24.4 (signature d'une permutation)

*Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, on appelle **signature** de σ le nombre noté $\varepsilon(\sigma)$ et défini par $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{\mathrm{I}_\sigma}$.*

On peut vérifier que $\varepsilon(\sigma)=\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$.

☞**Exemple** : Signature d'une transposition, si $\sigma=(a\ b)$ avec $a<b\in\mathrm{E}_n$, alors $\mathrm{I}_\sigma=2(b-a)-1$, donc $\varepsilon(\sigma)=-1$.

Théorème 24.4 (admis)

L'application signature $\varepsilon : (\mathfrak{S}_n, \circ) \to (\{\pm 1\}, \times)$, est un morphisme de groupes, c'est à dire :
$$\forall\, \sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n, \varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\sigma').$$

Application – Calcul de la signature d'une permutation. Pour calculer la signature d'une permutation σ, il suffit de connaître sa décomposition en produit de transpositions : $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$, on a alors $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau_1) \times \ldots \varepsilon(\tau_k) = (-1)^k$.

☞**Exemples** :
- Calculer la signature d'un cycle de longueur $p \geqslant 1$.
- Calculer la signature de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

II APPLICATIONS N-LINÉAIRES

1) Définition

Définition 24.5

Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* $f : \mathrm{E}^n \to \mathrm{F}$ *une application. On dit que* f *est* n*-linéaire lorsque* f *est* ***linéaire par rapport à chacune de ses variables*** *(les autres étant fixes), c'est à dire :* $\forall\, x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{E}, \forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$*, l'application* $f_i : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *définie par :*
$$f_i(x) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) \text{ est linéaire.}$$

☞**Exemples** :
- L'application $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(u, v) = u_1 v_1 + u_2 v_2$ (avec $u = (u_1, u_2,)$ et $v = (v_1, v_2)$), est bilinéaire, plus précisément, c'est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$.
- L'application $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1$ (avec $u = (u_1, u_2,)$ et $v = (v_1, v_2)$), est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$.
- Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $f : \mathrm{E}^3 \to \mathrm{E}$ définie par $f(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) = \mathrm{A} \times \mathrm{B} \times \mathrm{C}$, est trilinéaire.
- Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([a;b], \mathbb{R})$. L'application $f : \mathrm{E}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(u, v) = \int_a^b u(t)v(t)\,dt$, est une forme bilinéaire sur E.

Définition 24.6

Soit $f : \mathrm{E}^n \to \mathrm{F}$ *une application* n*-linéaire, on dit que* f *est :*
- ***symétrique*** *: lorsque* $\forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall\, x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{E}$, $f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)$*, autrement dit, changer l'ordre des vecteurs ne change pas le résultat.*
- ***antisymétrique*** *: lorsque* $\forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall\, x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{E}$, $f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma).f(x_1, \ldots, x_n)$*, autrement dit, échanger deux vecteurs change le signe du résultat.*
- ***alternée*** *: lorsque* $\forall\, x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{E}$*, s'il existe* $i, j \in [\![1\,;n]\!]$ *tels que* $i \neq j$ *et* $x_i = x_j$*, alors* $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$*, autrement dit, si deux des vecteurs sont égaux alors le résultat est nul.*

Notation : soit $f : \mathrm{E}^n \to \mathrm{F}$ une application n-linéaire, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on pose $f_\sigma : \mathrm{E}^n \to \mathrm{F}$ définie par $f_\sigma(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$. On remarquera que f_σ est également n-linéaire.

☞**Exemple** : En reprenant les exemples ci-dessus, la première application et la quatrième sont symétriques, la deuxième est antisymétrique et alternée, la troisième est ni symétrique, ni antisymétrique, ni alternée.

Théorème 24.5

Il y a équivalence entre antisymétrique et alternée.

Preuve : Si $f : \mathrm{E}^n \to \mathrm{F}$ est n-linéaire alternée, soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{E}$, soit $\tau = (i\ j)$ avec $i, j \in [\![1\,;n]\!]$, posons $x'_i = x'_j = x_i + x_j$, et $\mathrm{S} = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x'_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, comme f est alternée, $\mathrm{S} = 0$, mais $\mathrm{S} = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots,$ $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ (en développant par rapport à la i^{e} variable puis par rapport à la j^{e}), ce qui donne $f_\tau = -f = \varepsilon(\tau).f$, mais comme toute permutation est un produit de transpositions, on en déduit que $\forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $f_\sigma = \varepsilon(\sigma).f$ c'est à dire f est antisymétrique.

Si f est antisymétrique : supposons $x_i = x_j$ avec $i \neq j$, alors soit $\tau = (i\ j)$, on a $f(x_1, \ldots, x_n) = f_\tau(x_1, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_n)$, donc $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, *i.e.* f est alternée. □

Théorème 24.6
L'ensemble des applications n-linéaires de E^n vers F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (s.e.v. de $\mathscr{F}(E^n, F)$).
L'ensemble des applications n-linéaires alternées de E^n vers F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (s.e.v. de $\mathscr{F}(E^n, F)$).

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

2) Développement suivant une base

Soit E de dimension p, soit $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, soit $S = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E et soit $A = \mathscr{P}_{\mathfrak{B},S} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ la matrice de la famille S dans la base $\mathfrak{B}$. Soit $u = f(x_1, \dots, x_n)$, en développant par rapport à la première variable, on obtient :

$$u = \sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant p} a_{j_1,1} f(e_{j_1}, x_2, \dots, x_n)$$

Puis on développe chacun de ces termes par rapport à la deuxième variable x_2, ce qui donne

$$u = \sum_{1 \leqslant j_1, j_2 \leqslant p} a_{j_1,1} a_{j_2,2} f(e_{j_1}, e_{j_2}, x_3, \dots, x_n)$$

etc..., ce qui donne à la fin :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leqslant j_1, \dots, j_n \leqslant p} a_{j_1,1} \cdots a_{j_n,n} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$$

C'est le développement de $f(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathfrak{B}$, on voit ainsi qu'une application n-linéaire $f : E^n \to F$ est entièrement déterminée par la donnée des vecteurs $f(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$.

III DÉTERMINANT DANS UNE BASE

1) Formes n-linéaires en dimension n

Avec les notations précédentes, supposons que la dimension de E soit égale à n, soit $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et f une forme n-linéaire alternée sur E, d'après ce qui précède, on a :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leqslant j_1, \dots, j_n \leqslant n} a_{j_1,1} \cdots a_{j_n,n} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$$

comme f est alternée, dès que deux indices sont égaux, le terme correspondant est nul, il reste donc :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leqslant j_1, \dots, j_n \leqslant n, \text{distincts}} a_{j_1,1} \cdots a_{j_n,n} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$$

Lorsque les indices sont distincts deux à deux, on a forcément, $\{j_1, \dots, j_n\} = [\![1 ; n]\!]$, en posant $\sigma(k) = j_k$ on définit une permutation des entiers de 1 à n et on peut alors écrire :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

Or, $f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma).f(e_1, \dots, e_n)$ (f est antisymétrique), finalement on a la formule :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \right) f(e_1, \dots, e_n)$$

Donc si f est une forme n-linéaire alternée sur E, alors il existe un scalaire α tel que :

$$\forall\, x_1, \dots, x_n \in E, f(x_1, \dots, x_n) = \alpha \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

Avec $\alpha = f(e_1, \dots, e_n)$ (ce qui détermine entièrement f), et les scalaires $a_{i,j}$ étant les coefficients de la matrice de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathfrak{B}$.

Si σ parcourt $\mathfrak{S}_n$, alors σ^{-1} aussi, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \forall x_1, \dots, x_n \in E, f(x_1, \dots, x_n) &= \alpha \sum_{\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma^{-1}(1)} a_{2,\sigma^{-1}(2)} \dots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \\ &= \alpha \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}. \end{aligned}$$

Théorème 24.7
On pose pour $x_1,\dots,x_n\in E$, $f_1(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\dots a_{n,\sigma(n)}$, alors f_1 est une forme n-linéaire alternée sur E et $f_1(e_1,\dots,e_n)=1$ (en particulier f_1 est non nulle).

Preuve : On note c_i la forme linéaire qui à tout vecteur x de E associe sa coordonnée sur e_i.

On note alors $f(x_1,\dots,x_n)=c_1(x_1)c_2(x_2)\cdots c_n(x_n)$, on vérifie que f ainsi définie, est n-linéaire de E^n vers $\mathbb{K}$. On pose $g(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})$, on sait que g est n-linéaire (combinaison linéaire de formes n-linéaires), soit τ une transposition de E_n, alors $g(x_{\tau(1)},\dots,x_{\tau(n)})=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)f(x_{\tau(\sigma(1))},\dots,x_{\tau(\sigma(n))})$, on effectue un changement d'indice en posant $\sigma'=\tau\circ\sigma$ (σ' parcourt $\mathfrak{S}_n$ une et seule fois lorsque σ parcourt $\mathfrak{S}_n$), on a $\varepsilon(\sigma')=-\varepsilon(\sigma)$, d'où $g(x_{\tau(1)},\dots,x_{\tau(n)})=-\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma')f(x_{\sigma'(1)},\dots,x_{\sigma'(n)})=-g(x_1,\dots,x_n)$, donc g est alternée.

En revenant à la définition de f, et en posant $x_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}e_i$, on a :

$$g(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}\times\cdots\times a_{n\sigma(n)}=f_1(x_1,\dots,x_n)$$

Lorsqu'on calcule $f_1(e_1,\dots,e_n)$, tous les a_{ij} sont nuls sauf ceux de la diagonale qui valent 1, il reste seulement le terme correspondant à l'identité de E_n, ce qui donne $f_1(e_1,\dots,e_n)=a_{11}\times\cdots\times a_{nn}=1$. □

Théorème 24.8
Si $\dim(E)=n$, alors l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 (droite vectorielle), dont une base est l'application f_1 ci-dessus.

Preuve : D'après le début de ce paragraphe, toute forme f, n-linéaire alternée sur E, est du type $f=\alpha f_1$ avec $\alpha\in\mathbb{K}$. □

2) Déterminants de n vecteurs dans une base

Définition 24.7
*L'application f_1 définie ci-dessus est appelée **déterminant dans la base** $\mathfrak{B}$, elle est notée $\det_{\mathfrak{B}}$. C'est donc une forme n-linéaire alternée sur E, qui constitue une base de l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E, plus précisément, c'est l'unique forme n-linéaire alternée sur E qui vérifie :* $\det_{\mathfrak{B}}(e_1,\dots,e_n)=1$.

Expression du déterminant : soit $\mathfrak{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de n vecteurs de E, et soit $A=(a_{i,j})\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de cette famille dans la base $\mathfrak{B}$, on a l'expression suivante :

$$\det_{\mathfrak{B}}(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\dots a_{n,\sigma(n)}$$

☞**Exemples** :
- Soit $E=\mathbb{K}^2,\mathfrak{B}=(i,j)$, la base canonique, soient $u=(u_1,u_2),v=(v_1,v_2)\in E$, alors $\det_{\mathfrak{B}}(u,v)=a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1}=u_1v_2-u_2v_1$.
- Soit $E=\mathbb{K}^3,\mathfrak{B}=(i,j,k)$, la base canonique, soient $u=(u_1,u_2,u_3)$, $v=(v_1,v_2,v_3)$ et $w=(w_1,w_2,w_3)\in E$, alors $\det_{\mathfrak{B}}(u,v,w)=u_1v_2w_3-u_2v_1w_3-u_3v_2w_1-u_1v_3w_2+u_3v_1w_2+u_2v_3w_1$.
- Si $\dim(E)=n,\mathfrak{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E, $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de E telle que la matrice A du système dans la base $\mathfrak{B}$ soit triangulaire supérieure, alors : $\det_{\mathfrak{B}}(x_1,\dots,x_n)=a_{1,1}\dots a_{n,n}$, produit des coefficients diagonaux de la matrice.
  En effet, pour que $a_{1,\sigma(1)}\dots a_{n,\sigma(n)}$ ait une chance d'être non nul, il faut que $1\leqslant\sigma(1),\dots,n\leqslant\sigma(n)$, ce qui ne donne qu'une seule possibilité : $\sigma=\mathrm{id}$.

3) Propriétés du déterminant

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathfrak{B}=(e_1;\dots,e_n)$ une base de E.
- L'application $\boxed{\det_{\mathfrak{B}}\text{ est une forme } n\text{-linéaire alternée}}$, donc :
  - elle est linéaire par rapport à chaque variable, par exemple :
    $\det_{\mathfrak{B}}(\alpha x_1+\beta x_1',x_2,\dots,x_n)=\alpha\det_{\mathfrak{B}}(x_1,x_2,\dots,x_n)+\beta\det_{\mathfrak{B}}(x_1',x_2,\dots,x_n)$.

- si on échange deux vecteurs dans le déterminant, alors le résultat change de signe. Par exemple : $\det_{\mathfrak{B}}(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n) = -\det_{\mathfrak{B}}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Plus généralement :

$$\forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n, \det_{\mathfrak{B}}(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det_{\mathfrak{B}}(x_1, \ldots, x_n).$$

- Si deux des vecteurs de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ sont égaux, alors $\det_{\mathfrak{B}}(x_1, \ldots, x_n) = 0$. On en déduit si l'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres (*i.e.* la famille est liée), alors le déterminant est nul, on en déduit également qu'ajouter à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres, ne change pas le déterminant, par conséquent on peut calculer un déterminant avec la méthode de Gauss (pour obtenir un système de vecteurs dont la matrice dans la base $\mathfrak{B}$ est triangulaire supérieure).

– $\boxed{\det_{\mathfrak{B}}(e_1, \ldots, e_n) = 1}$, ce que l'on note $\det_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}) = 1$, c'est l'unique forme n-linéaire alternée sur E qui vérifie cette égalité.

– Si $\mathfrak{B}'$ est une autre base de E, alors $\boxed{\det_{\mathfrak{B}'} = \det_{\mathfrak{B}'}(\mathfrak{B}).\det_{\mathfrak{B}}}$. On en déduit que $\det_{\mathfrak{B}'}(\mathfrak{B}) \det_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}') = 1$.

Preuve : L'ensemble des forme n-linéaires alternées est une droite vectorielle engendrée par $\det_{\mathfrak{B}}$, donc il existe un scalaire α tel que $\det_{\mathfrak{B}'} = \alpha.\det_{\mathfrak{B}}$, pour obtenir α, il suffit d'appliquer cette égalité sur les vecteurs de $\mathfrak{B}$. □

– $\boxed{\text{La famille } (x_1, \ldots, x_n) \text{ est une base de E ssi } \det_{\mathfrak{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0}$.

Preuve : Soit $\mathfrak{B}' = (x_1, \ldots, x_n)$, si $\mathfrak{B}'$ est une base de E, alors l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est une droite engendrée par $\det_{\mathfrak{B}'}$ et $\det_{\mathfrak{B}} = \det_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}').\det_{\mathfrak{B}'}$, or $\det_{\mathfrak{B}}$ n'est pas l'application nulle, donc $\det_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}') \neq 0$.
Réciproquement, si $\det_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}') \neq 0$, alors la famille $\mathfrak{B}'$ est libre, car si elle était liée, l'un de ses vecteurs serait combinaison linéaire des autres et donc le déterminant dans la base $\mathfrak{B}$ serait nul, ce qui est absurde. Donc $\mathfrak{B}'$ est une famille libre de n vecteurs en dimension n, c'est donc une base de E. □

IV DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

1) Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathfrak{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E, et soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, on note f la forme n-linéaire alternée définie par :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathfrak{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_n))$$

On sait qu'il existe un scalaire α tel que $f = \alpha \det_{\mathfrak{B}'}$, avec $\alpha = f(e'_1, \ldots, e'_n)$, or $\det_{\mathfrak{B}} = \det_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}') \det_{\mathfrak{B}'}$, d'où $\alpha = \det_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}') \det_{\mathfrak{B}'}(u(e'_1), \ldots, u(e'_n))$. En calculant $f(e_1, \ldots, e_n)$, on obtient :

$$\boxed{\det_{\mathfrak{B}}(u(e_1), \ldots, u(e_n)) = \alpha \det_{\mathfrak{B}'}(\mathfrak{B}) = \det_{\mathfrak{B}'}(u(e'_1), \ldots, u(e'_n))}$$

car $\det_{\mathfrak{B}'}(\mathfrak{B}) \det_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}') = 1$.

Définition 24.8

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et soit* $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E*, soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$*, on appelle déterminant de* u *le scalaire, noté* $\det(u)$ *et défini par :* $\det(u) = \det_{\mathfrak{B}}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$*. Ce scalaire est* ***indépendant de la base*** $\mathfrak{B}$ ***choisie****.*

☞**Exemple** : Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $u(x, y) = (x + y; 2x - y)$, notons $\mathfrak{B} = (i, j)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors $\det(u) = \det_{\mathfrak{B}}(i + 2j, i - j) = \det_{\mathfrak{B}}(3i, i - j) = \det_{\mathfrak{B}}(3i, -j) = -3 \det_{\mathfrak{B}}(i, j) = -3$.

Expression du déterminant : soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et soit $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, la matrice du système $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est en fait la matrice de u dans la base $\mathfrak{B}$, posons $\mathrm{A} = (a_{i,j}) = \operatorname{mat}_{\mathfrak{B}}(u)$, alors on peut écrire :

$$\det(u) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

2) Propriétés du déterminant

– Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, soit $\mathfrak{B}$ une base de E, alors :

$$\boxed{\forall\, x_1,\ldots,x_n \in E, \det_{\mathfrak{B}}(u(x_1),\ldots,u(x_n)) = \det(u)\det_{\mathfrak{B}}(x_1,\ldots,x_n)}$$

Preuve : L'application f définie par $f(x_1,\ldots,x_n) = \det_{\mathfrak{B}}(u(x_1),\ldots,u(x_n))$ est n-linéaire alternée, donc il existe un scalaire α tel que $f = \alpha \det_{\mathfrak{B}}$, ce scalaire vaut $\alpha = f(e_1,\ldots,e_n)$ (en posant $\mathfrak{B} = (e_1,\ldots,e_n)$), donc $\alpha = \det(u)$ d'après la définition. □

– Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$, on a $\boxed{\det(u \circ v) = \det(v \circ u) = \det(u)\det(v)}$.
Preuve : Soit $\mathfrak{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de E, alors :

$$\det(u \circ v) = \det_{\mathfrak{B}}(u(v(e_1)),\ldots,u(v(e_n))) = \det(u)\det_{\mathfrak{B}}(v(e_1),\ldots,v(e_n)) = \det(u)\det(v),$$

de même, on obtient $\det(v \circ u) = \det(v)\det(u)$, ce qui donne l'égalité. □

– Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit $\mathfrak{B}$ une base de E, alors $\boxed{u \in GL(E) \text{ ssi } \det(u) \neq 0}$, et si c'est le cas, alors $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$.
Preuve : Si $u \in GL(E)$, alors $\det(u)\det(u^{-1}) = \det(u \circ u^{-1}) = \det(\mathrm{id}_E) = 1$, donc $\det(u) \neq 0$, et on a la formule.
Réciproquement, si $\det(u) \neq 0$, alors la famille $(u(e_1),\ldots,u(e_n))$ est libre, donc u est bien un automorphisme de E. □

V DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉE

1) Définition

Définition 24.9
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, on appelle déterminant de A le déterminant de u et on pose :

$$\det(A) = \det(u) = \det_{\mathfrak{B}}(C_1(A),\ldots,C_n(A)),$$

où $\mathfrak{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Expression du déterminant : A est la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, donc d'après le paragraphe précédent, on a :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

Notation : on écrit $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$

☞**Exemples** :

– Cas d'une matrice carrée de taille 2 : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

– Cas d'une matrice triangulaire : si A est triangulaire, alors $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$ (produit des éléments diagonaux).

2) Propriétés du déterminant d'une matrice carrée

– Une matrice carrée A et sa transposée, ont le même déterminant. On en déduit que si $\mathfrak{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors $\det(A) = \det_{\mathfrak{B}}(C_1(A),\ldots,C_n(A)) = \det_{\mathfrak{B}}(L_1(A),\ldots,L_n(A))$.
Preuve : En effet, on a $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = \det({}^tA)$. □

– Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, et soit $\mathfrak{B}$ une base quelconque de E, si $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u) = A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det(u) = \det(A)$. On en déduit en particulier que si $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $\det(P^{-1} \times A \times P) = \det(A)$.
– Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det(A \times B) = \det(A)\det(B)$, en particulier, on a $\det(A \times B) = \det(B \times A)$.
– Une matrice carrée est inversible ssi son déterminant est non nul, si c'est le cas, alors $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

– Utilisation de la méthode de *Gauss* : on utilise celle-ci pour se ramener au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire, plus précisément :
  - L'opération $L_i \leftrightarrow L_j$, change le signe du déterminant (idem avec les colonnes).
  - L'opération $L_i \leftarrow \alpha L_i$ $(\alpha \neq 0)$, multiplie le déterminant par α (idem avec les colonnes).
  - L'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, ne change pas le déterminant (idem avec les colonnes).

☞**Exemple** : Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det(A) \overset{C_1 \leftrightarrow C_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

★**Exercice 24.3** *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, *montrer que* $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

3) Développement suivant une ligne ou une colonne

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, soit $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, notons $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de A, pour $j \in [\![1;n]\!]$, on a $C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$, par linéarité par rapport à la j^e variable, on peut écrire :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \det_{\mathfrak{B}}(C_1, \dots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \dots, C_n).$$

En posant $\gamma_{i,j}(A) = \det_{\mathfrak{B}}(C_1, \dots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \dots, C_n)$, on a alors $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \gamma_{i,j}(A)$, c'est le développement de det(A) suivant la colonne j.

Définition 24.10
*Le scalaire $\gamma_{i,j}(A)$ est appelé **cofacteur** $(i\ j)$ de la matrice A, c'est le déterminant de la matrice A dans laquelle la colonne j a été remplacée par le i^e vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$.*

Calcul de $\gamma_{i,j}(A)$:

On a $\gamma_{i,j}(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$, on échange les colonnes C_{j+1} et C_j, puis C_{j+1} et C_{j+2}, …etc, pour amener la colonne j en dernière position, **sans changer l'ordre sur les autres colonnes**, le déterminant est multiplié par $(-1)^{n-j}$. De le même façon, on amène la ligne i en dernière position sans changer l'ordre des autres lignes, le déterminant est multiplié par $(-1)^{n-i}$. On obtient alors :

$$\gamma_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} & 0 \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} & 1 \end{vmatrix},$$

notons $b_{i,j}$ les coefficients de la matrice à l'intérieur de ce déterminant, on a

$$\gamma_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(n),n},$$

on remarque que lorsque $\sigma(n) \neq n$, alors $b_{\sigma(n),n} = 0$, on peut donc ne retenir que les permutations ayant n comme point fixe, c'est à dire en fait les éléments de $\mathfrak{S}_{n-1}$, et comme $b_{n,n} = 1$, on a alors :

$$\gamma_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(n-1),n-1}.$$

C'est le déterminant de la matrice extraite de A par suppression de la ligne i et de la colonne j, multiplié par $(-1)^{i+j}$.

Définition 24.11

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle ***mineur*** *$(i\ j)$ de la matrice A, le déterminant $\Delta_{i,j}(A)$ de la matrice $A_{i,j}$ obtenue par suppression de ligne i et de la colonne j de A. Le lien entre cofacteur et mineur est : $\gamma_{i,j}(A) = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)$.*

Le développement de det(A) suivant la colonne j s'écrit donc :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A).$$

$\Delta_{i,j}(A)$ est un déterminant d'ordre $n-1$, c'est donc une formule **récurrente**.

☞**Exemple** : En développant suivant la deuxième colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(-3) - 9 = -3.$$

Développement suivant la ligne j : comme une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ a le même déterminant que sa transposée, développer det(A) suivant la ligne j revient à développer $\det({}^tA)$ suivant la colonne j, ce qui donne $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tA)_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}({}^tA)$, mais $\Delta_{i,j}({}^tA) = \Delta_{j,i}(A)$, ce qui donne finalement :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{j,i}(-1)^{i+j}\Delta_{j,i}(A)$$

Un exemple classique : le déterminant de Vandermonde[1]

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix}$, où $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, soit $V_n = \det(A)$, alors on a le résultat suivant :

$$V_n = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Preuve : Si deux des scalaires sont égaux, le résultat est évident. Supposons les α_i distincts deux à deux. On peut vérifier que pour $n = 2$ le résultat est vrai. Supposons le vrai au rang n, et remplaçons dans V_{n+1} la dernière ligne par $(1\ X\ X^2 \ldots X^{n+1})$, le déterminant obtenu en développant suivant la dernière ligne, est un polynôme $P(X)$ de degré au plus $n+1$, dont les racines sont $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$, de plus son coefficient dominant est V_n, par conséquent on a $P(X) = V_n \prod_{i=0}^{n}(X - \alpha_i)$, d'où $V_{n+1} = V_n \prod_{i=0}^{n}(\alpha_{n+1} - \alpha_i) = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n+1}(\alpha_j - \alpha_i)$. □

4) Comatrice

Définition 24.12

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle comatrice de A la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont les cofacteurs $\gamma_{i,j}(A)$. Notation $\mathrm{Com}(A) = (\gamma_{i,j}(A))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

☞**Exemple** : Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

1. VANDERMONDE Alexandre (1735 – 1796) : mathématicien français qui fut le premier à étudier les déterminants.

Théorème 24.9 (relation fondamentale)

$$\forall\, A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ A \times {}^t\mathrm{Com}(A) = {}^t\mathrm{Com}(A) \times A = \det(A) I_n$$

Preuve : Soit $B = A \times {}^t\mathrm{Com}(A)$, alors $b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{j+k}\Delta_{jk}(A)$, qui est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans A, la ligne j par la ligne i, d'où $b_{i,j} = \det(A)\delta_{i,j}$.

Posons $C = {}^t\mathrm{Com}(A) \times A$, alors $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}(-1)^{i+k}\Delta_{k,i}(A)$, qui est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans A, la colonne i par la colonne j, on a donc $c_{i,j} = \det(A)\delta_{i,j}$. □

Application – Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}{}^t\mathrm{Com}(A)$$

VI APPLICATIONS

1) Géométrie

Soit E un espace de dimension n et $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, soit H un hyperplan de E et $(u_1, \dots, u_{n-1})$ une base de H. On a alors :

$$\begin{aligned}
v(x_1,\dots,x_n) \in H &\iff (u_1,\dots,u_{n-1},v) \text{ est liée}\\
&\iff \det\mathfrak{B}(u_1,\dots,u_{n-1},v) = 0\\
&\iff \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & x_1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & x_n\end{vmatrix} = 0\\
&\iff (-1)^{n+1}\Delta_{1n}x_1 + \cdots + (-1)^{n+n}\Delta_{nn}x_n = 0 \text{ (développement suivant la colonne } n)\\
&\iff \boxed{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0} \quad \text{c'est une équation cartésienne de l'hyperplan H}
\end{aligned}$$

2) Orientation d'un espace vectoriel réel

Soient $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, E, soit P la matrice de passage, alors P est une matrice inversible, donc $\det(P) \neq 0$, on a alors soit $\det(P) > 0$, soit $\det(P) < 0$.

Définition 24.13

On dit que la base $\mathfrak{B}$ est en relation avec la base $\mathfrak{B}'$ lorsque la matrice de passage a un déterminant strictement positif, on note alors $\mathfrak{B}\mathscr{R}\mathfrak{B}'$.

☞**Exemple** : Une base $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est en relation avec elle-même, mais pas avec $\mathfrak{B}' = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Théorème 24.10

La relation $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence, et il n'y a que deux classes d'équivalence.

Preuve : La réflexivité est évidente. La symétrie découle de la formule $P_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'} = P^{-1}_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}}$. La transitivité découle de la formule : $P_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}''} = P_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'} \times P_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}''}$.

D'après l'exemple ci-dessus, il y a au moins deux classes d'équivalence, soit $\mathfrak{B}''$ une troisième base, supposons que $\mathfrak{B}$ ne soit pas en relation avec $\mathfrak{B}''$, alors $P_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}''} = P_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}} \times P_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}''}$, d'où $\det(P_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}''}) = \det(P_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}}) \times \det(P_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}''}) > 0$, car ces deux déterminants sont négatifs, par conséquent $\mathfrak{B}''\mathscr{R}\mathfrak{B}'$, et donc la classe de $\mathfrak{B}''$ et égale à celle de $\mathfrak{B}'$. □

Définition 24.14

Orienter l'espace vectoriel E *c'est choisir une des deux classes d'équivalence, que l'on appelle* ***classe des bases directes****, l'autre étant alors appelée* ***classe des bases indirectes****. Il n'y a donc que deux orientations possibles.*

À retenir

Le déterminant de la matrice de passage entre deux bases directes (ou deux bases indirectes) est strictement positif. Le déterminant de la matrice de passage entre une base directe et une base indirecte est strictement négatif.

3) Systèmes linéaires

C'est un système de la forme (S) $\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1p}x_p & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{np}x_p & = & b_n \end{cases}$, où les scalaires $x_1,\ldots,x_p$ sont les inconnues.

Le système (S) peut s'interpréter de plusieurs façons :

- Interprétation géométrique : chaque équation de (S) peut être vue comme l'équation d'un hyperplan de $\mathbb{K}^p$ (lorsque les coefficients ne sont pas tous nuls). Les solutions de (S) sont les coordonnées des points de l'intersection de n hyperplans.
- Sous forme matricielle : (S) $\iff$ AX = B où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, et $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$, A est la **matrice du système**. Le rang de la matrice A est appelé le rang du système S, il peut être vu comme le nombre maximal d'équations indépendantes du système.
- Sous forme linéaire : soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A, soit $x \in \mathbb{K}^p$ le vecteur de coordonnées $(x_1,\ldots,x_p)$ dans la base canonique, et soit b le vecteur de $\mathbb{K}^n$ de coordonnées $(b_1,\ldots,b_n)$, on a alors (S) $\iff u(x) = b$.
- Sous forme vectorielle : soient $v_1,\ldots,v_p$ les vecteurs colonnes de A, on a (S) $\iff x_1v_1+\ldots+x_pv_p = b$, c'est une équation vectorielle dans $\mathbb{K}^n$.

Définition 24.15 (Systèmes de Cramer)

*C'est un système linéaire **carré possédant une unique solution**, ce qui revient à dire que la matrice du système est carrée inversible.*

Formules de Cramer[2] : on a ici $n = p$, notons $C_1,\ldots,C_n$ les colonnes de A ,on a $B = x_1C_1+\ldots+x_nC_n$, soit D_i la matrice obtenue en remplaçant dans A la colonne i par la colonne B, on a :

$$\det(D_i) = \sum_{k=1}^{n} x_k \det(C_1,\ldots,C_{i-1},C_k,C_{i+1},\ldots,C_n)$$

ce qui donne $\det(D_i) = x_i\det(A)$, d'où les formules :

$$\forall\, i \in [\![1;n]\!], x_i = \frac{\det(C_1,\ldots,C_{i-1},B,C_{i+1},\ldots,C_n)}{\det(A)}$$

☞**Exemple** : Si $ad-bc \neq 0$, alors le système (S) $\begin{cases} ax+by & = u \\ cx+dy & = v \end{cases}$, possède une unique solution :

$$\begin{cases} x & = \frac{ud-vb}{ad-bc} \\ y & = \frac{av-cu}{ad-bc} \end{cases}$$

VII SOLUTION DES EXERCICES

Solution 24.1

***1/** Cycles de* $\mathfrak{S}_3$: id_{E_3}, (1 2), (1 3), (2 3), (1 2 3) *et* (1 3 2).

2. *CRAMER Gabriel* (1704 – 1752) : mathématicien français qui s'est intéressé aux systèmes linéaires et à la théorie des déterminants.

2/ *Pour faire un cycle de longueur* k*, on prend* k *entiers parmi* n *pour faire le support,* $\binom{n}{k}$ *choix, puis il faut faire un cycle avec ces* k *entiers, c'est comme placer* k *convives autour d'un table ronde, il y a* $(k-1)!$ *façons de faire. Soit au total* $(k-1)!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k}$ *cycles de longueur* k*.*

3/ *Si* $\sigma = (i_1\ i_2\ \ldots\ i_p)$ *alors* $\sigma^{-1} = (i_p\ i_{p-1}\ \cdots\ i_1)$.

4/ *Si* $\sigma = (j_0\ j_1\ \ldots\ j_{p-1})$, *alors on peut vérifier que* $\sigma(j_k) = j_{k+1 \pmod p}$, *on en déduit que* $\sigma^i(j_k) = j_{k+i \pmod p}$ *(les autres entiers étant fixes). On a donc bien* $\sigma^p = \mathrm{id}$ *et si* $i < p$ *alors* $\sigma^i(j_k) = j_{k+i \pmod p} \neq j_k$ *donc* $\sigma^i \neq \mathrm{id}$. *Si* a *est un élément du support de* σ, *alors on a* $a = j_k$*, si* $\sigma^i(a) = \sigma^s(a)$ *alors* $j_{k+i \pmod p} = j_{k+s \pmod p}$ *et donc* $i \equiv s \pmod p$, *donc les entiers* $a, \sigma(a), \ldots, \sigma^{p-1}(a)$ *sont distincts et* $\sigma^p(a) = a$*, d'où* $\sigma = (a\ \ \sigma(a)\ldots\sigma^{p-1}(a))$.

Solution 24.2

1/ *Si* $c = (i_1\ i_2\ \ldots\ i_p)$ *et* $c' = (j_1\ j_2\ \ldots\ j_k)$ *deux cycles à support disjoints, si* k *est un entier, en distinguant trois cas :* $k \in \{i_1, \ldots, i_p\}$, $k \in \{j_1, \ldots, j_k\}$ *et* $k \notin \{i_1, \ldots, i_p\} \cup \{j_1, \ldots, j_k\}$, *on vérifie que* $c \circ c'(k) = c' \circ c(k)$.

2/ *Les cycles à support non disjoints ne commutent pas, par exemple :* $(1\ 2) \circ (2\ 3) = (1\ 2\ 3)$ *alors que* $(2\ 3) \circ (1\ 2) = (1\ 3\ 2)$.

Solution 24.3 *Par linéarité sur chaque vecteur colonne, on peut sortir le coefficient* λ *de chaque colonne.*