Chapitre 20

La dimension finie

Sommaire

I ESPACES DE DIMENSION FINIE

1) Familles génératrices

Définition 20.1

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-e.v, et soit* A *une famille de vecteurs de* E*, on dit que la famille* A *est une famille génératrice de* E *lorsque* $E = \text{Vect}[A]$*. Ce qui signifie que tout vecteur de* E *est combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de* A*.*

Exemples :

- Soit $E = \mathbb{K}^n$, pour $i \in [\![1;n]\!]$, on pose $e_i = (\delta_{i,1}, \ldots, \delta_{i,n})$, alors la famille $A = (e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E, car $(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.
- Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$, la famille $A = (X^i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille génératrice de E.
- Soit $E = \mathbb{K}[X]$, la famille $A = (X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille génératrice de E.
- Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la famille $A = (f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ où $f_k : x \mapsto e^{kx}$, n'est pas une famille génératrice de E. Si elle l'était, il existerait des réels a_k tels que $\sin = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k f_k$, en posant $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, on aurait alors pour tout réel x, $\sin(x) = P(e^x)$, la fonction sin s'annulant une infinité de fois et la fonction exp étant injective, on voit que P possède une infinité de racines, donc $P = 0$ *i.e.* tous les réels a_k sont nuls et donc la fonction sin est nulle, ce qui est absurde.

Théorème 20.1 (premières propriétés)

Soit A *une famille génératrice de* E *:*

- *Toute sur-famille de* A *est génératrice, i.e. si* B *est une famille de vecteurs de* E *telle que* $A \subset B$*, alors* B *est génératrice.*

– *Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, alors $\mathrm{B} = (f(x))_{x\in\mathrm{A}}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.*
– *Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, alors f est surjective si et seulement si $f(\mathrm{A})$ est une famille génératrice de F.*

Preuve : Le premier point est évident. Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = y$, mais A est génératrice de E, donc il existe $x_1,\dots,x_n \in \mathrm{A}$ et des scalaires $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{b} \alpha_i x_i$, f étant linéaire, on a alors $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$, ce qui prouve que B est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Le troisième point en découle. □

★**Exercice 20.1** *Les familles suivantes sont-elles génératrices dans $\mathbb{K}^3$?*
– $\mathrm{A} = \{(1,1,1);(-1,0,2);(1,2,3)\}$.
– $\mathrm{A} = \{(1,1,1),(1,2,3)\}$.

Définition 20.2 (espace de dimension finie)
*Soit E un $\mathbb{K}$-e.v, on dit que E est de dimension finie lorsque E possède une famille génératrice **finie**, c'est à dire lorsqu'il existe des vecteurs $x_1,\dots,x_n \in \mathrm{E}$ tels que $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}[x_1,\dots,x_n]$. Si ce n'est pas le cas, on dit que E est de dimension infinie.*

☞**Exemples** :
– $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie.
– $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ est de dimension finie.
– $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est de dimension infinie. En effet : sinon, il existerait une famille de polynômes $\mathrm{P}_1,\dots,\mathrm{P}_n$ telle que $\mathbb{K}[\mathrm{X}] = \mathrm{Vect}[\mathrm{P}_1,\dots,\mathrm{P}_n]$, donc tout polynôme a un degré inférieur ou égal à $\max(\deg(\mathrm{P}_1),\dots,\deg(\mathrm{P}_n))$, ce qui est absurde. Nous verrons plus loin que $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est également de dimension infinie.

Théorème 20.2
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie :
– *Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, alors $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie. En particulier lorsque f est **surjective**, F est de dimension finie.*
– *Si F est de dimension finie, alors $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ est de dimension finie également.*

Preuve : Le premier point découle directement du théorème précédent. Si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille génératrice de E et si $(y_1,\dots,y_p)$ est une famille génératrice de F, alors pour $(x,y) \in \mathrm{E}\times\mathrm{F}$, on a :

$$(x,y) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{k=1}^{p} \beta_k y_k) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \alpha_i(x_i,0_{\mathrm{F}}) + \sum_{1\leqslant k\leqslant p} \beta_k(0_{\mathrm{E}},y_k),$$

ce qui prouve que la famille $((x_i,0_{\mathrm{F}});(0_{\mathrm{E}},y_k))_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant k\leqslant n}$ est une famille génératrice finie de $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$. □

2) Familles libres, familles liées

Définition 20.3
Soit $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v E, on dit que :
– *La famille est libre lorsque la seule combinaison linéaire de la famille qui donne le vecteur nul est celle pour laquelle tous les coefficients sont nuls (on dit aussi que les vecteurs sont linéairement indépendants), c'est à dire :*

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} \alpha_i x_i = 0_{\mathrm{E}} \implies \forall\ i \in \mathrm{I}, \alpha_i = 0.$$

– *La famille est dite liée lorsqu'elle n'est pas libre (on dit aussi que les vecteurs sont linéairement dépendants), ce qui signifie qu'il existe une famille de scalaires à support fini $(\alpha_i)_{i\in\mathrm{I}}$ **non tous nuls** tels que :*

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} \alpha_i x_i = 0_{\mathrm{E}}.$$

Théorème 20.3 (caractérisation des familles liées)
La famille $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est liée si et seulement si un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres.

Preuve : Supposons $x_k = \sum_{i\in I\setminus\{k\}} \alpha_i x_i$, on a alors $x_k - \sum_{i\in I\setminus\{k\}} \alpha_i x_i = 0_E$ avec le coefficient de x_k qui est non nul, donc la famille est liée.

Réciproquement : si la famille est liée, il existe une famille à support fini de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ non tous nuls tels que $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E$, supposons que $\lambda_{i_0} \neq 0$, on a alors $x_{i_0} = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \frac{-\lambda_i}{\lambda_{i_0}} x_i$. □

Remarque 20.1 – *Soient $x, y \in E$, alors la famille (x, y) est liée si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires.*

☞**Exemples** :
- $E = \mathbb{K}^n$, la famille $A = (e_1, \ldots, e_n)$ avec $e_i = (\delta_{i,1}, \ldots, \delta_{i,n})$ est une famille libre.
- $E = \mathbb{K}_n[X]$, la famille $A = (X^i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre.
- $E = \mathbb{K}[X]$, la famille $A = (X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.
- $E = \mathscr{C}^0([a;b], \mathbb{C})$, pour $k \in [\![0;n]\!]$ on pose $f_k : x \mapsto e^{kx}$, alors la famille $A = (f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.
- $E = \mathbb{K}^2$, soit $i = (1,1)$, $j = (1,2)$ et $k = (4,3)$, la famille $A = (i, j, k)$ est une famille liée.

★**Exercice 20.2** *Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour $k \in [\![1;n]\!]$ on pose $f_k : x \mapsto \sin(kx)$. Montrer par récurrence sur n que la famille $A = (f_k)_{k\geqslant 1}$ est libre.*

Théorème 20.4 (propriétés des familles libres et des familles liées)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v
- *Si $x \in E$, alors la famille (x) est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.*
- *Toute famille contenant le vecteur nul est liée.*
- *Toute partie d'une famille libre est une famille libre.*
- *Toute famille contenant une famille liée est une famille liée.*
- *L'image d'une famille liée par une application linéaire est une famille liée.*
- *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F.*
- *La famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si $\forall\, x \in \mathrm{Vect}[(x_i)_{i\in I}]$, x s'écrit* ***de manière unique*** *comme combinaison linéaire des vecteurs $(x_i)_{i\in I}$.*
- *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille libre, alors $\forall\, x \in E, x \in \mathrm{Vect}[(x_i)_{i\in I}] \iff \{x, (x_i)_{i\in I}\}$ est liée.*

Preuve : Démontrons les trois derniers points, il suffit de les démontrer pour toute famille finie :

Si f est injective et si $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre dans E, supposons que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) = 0_F$, alors $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in \ker(f)$, donc $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0_E$, mais cette famille étant libre, les coefficients α_k sont tous nuls.

Si f transforme une famille libre en une famille libre : si $x \in \ker(f)$ et si $x \neq 0_E$, alors (x) est libre, donc $(f(x))$ est libre *i.e.* $f(x) \neq 0_F$ ce qui est absurde, donc $x = 0_E$ et f est injective.

Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre et si $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k$, alors $\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k) x_k = 0_E$ et donc, la famille étant libre, $\alpha_k = \beta_k$ pour $k \in [\![1;n]\!]$.

Réciproquement, si l'écriture est unique alors $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0_E \implies \forall\, k \in [\![1;n]\!], \alpha_k = 0$, *i.e.* la famille est libre.

Si $x \in \mathrm{Vect}[x_1, \ldots, x_n]$, alors $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ ce qui prouve que la famille $(x_1, \ldots, x_n, x)$ est liée.

Réciproque : si $(x_1, \ldots, x_n, x)$ est liée, alors il existe des scalaires α_k pour $k \in [\![1;n+1]\!]$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + \alpha_{n+1} x = 0_E$, si $\alpha_{n+1} = 0$, alors il reste $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0_E$ donc tous les scalaires α_k sont nuls, ce qui est contradictoire, d'où $\alpha_{n+1} \neq 0$, ce qui entraîne $x = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\alpha_{n+1}} x_k$. □

3) Familles libres et familles liées en dimension finie

Théorème 20.5 (fondamental de la dimension finie)

Si E est de dimension finie et si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille génératrice de E, alors toute famille de cardinal supérieur ou égal à $n+1$ est une famille liée.

Preuve : Par récurrence sur n : pour $n = 1$ on a $E = \mathrm{Vect}[x_1]$ soit $x, y \in E$, $x = \alpha x_1$ et $y = \beta x_1$. Si $\alpha = 0$ alors $x = 0_E$ et la famille (x, y) est liée, sinon on a $y = \frac{\beta}{\alpha} x$ et donc la famille (x, y) est liée.

Supposons le théorème vrai au rang n et soit $(x_1,\dots,x_{n+1})$ une famille génératrice de E, soit $(y_1,\dots,y_{n+2})$ une famille de vecteurs de E, on pose $F=\text{Vect}[x_1,\dots,x_n]$. Si tous les vecteurs y_i sont dans F alors on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et la famille $(y_1,\dots,y_{n+2})$ est liée, dans le cas contraire, supposons $y_{n+2}\notin F$, pour tout $j\in[\![1;n+2]\!]$ il existe un scalaire λ_j et un vecteur u_j de F tels que $y_j=u_j+\lambda_j x_{n+1}$, on a donc $\lambda_{n+2}\neq 0$, on en déduit x_{n+1} en fonction de u_{n+2} et y_{n+2}, d'où pour $j\in[\![1;n+1]\!]$: $y_j=u_j-\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+2}}u_{n+2}+\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+2}}y_{n+2}$, mais la famille $(u_j-\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+2}}u_{n+2})_{j\in[\![1;n+1]\!]}$ est liée dans F (hypothèse de récurrence), donc la famille $(y_j-\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+2}}y_{n+2})_{j\in[\![1;n+1]\!]}$ est liée dans E, ce qui entraîne que la famille $(y_1,\dots,y_{n+2})$ est liée dans E. □

☞**Exemples** :

- $E=\mathbb{K}^n$, pour $i\in[\![1;n]\!]$, on pose $e_i=(\delta_{i,1},\dots,\delta_{i,n})$, on a vu en exemple que la famille $A=(e_1,\dots,e_n)$ est génératrice, donc dans $\mathbb{K}^n$, toute famille de $n+1$ vecteurs (ou plus) est liée.
- $E=\mathbb{K}_n[X]$, on sait que la famille $A=(X^0,\dots,X^n)$ est génératrice, donc dans $\mathbb{K}_n[X]$ toute famille de $n+2$ vecteurs (ou plus) est liée.
- $E=\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est de dimension infinie, sinon il existe une famille génératrice finie $A=(f_1,\dots,f_n)$, mais alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée, or la famille $(g_0,\dots,g_n)$ où $g_k:x\mapsto e^{kx}$, est une famille libre, on a donc une contradiction, ce qui prouve que E est de dimension infinie.

Théorème 20.6
Si E est de dimension finie et si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille libre, alors toute famille génératrice de E contient au moins n vecteurs.

Preuve : Soit $(y_1,\dots,y_m)$ une famille génératrice de E, si $n>m$, alors d'après le théorème fondamental, la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est liée, ce qui est contradictoire, donc $m\geqslant n$. □

II PROPRIÉTÉS DE LA DIMENSION FINIE

1) Bases, coordonnées

Définition 20.4
*Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et soit $B=(e_1,\dots,e_n)$ une famille de vecteurs de E, on dit que B est une base de E lorsque B est à la fois **libre et génératrice** de E. Si c'est le cas, alors $\forall\ x\in E, \exists!(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$, tel que $x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k$. Par définition $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ sont **les coordonnées** de x dans la base B, et on pose $\text{Coord}_B(x)=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ (on fera attention à l'ordre sur les vecteurs de la base B, λ_i est la coordonnée de x sur le vecteur e_i).*

☞**Exemples** :

- $E=\mathbb{K}^n$, la famille $B=(e_1,\dots,e_n)$ où $e_i=(\delta_{i,1},\dots,\delta_{i,n})$ pour $i\in[\![1;n]\!]$, est une famille libre et génératrice de $\mathbb{K}^n$, c'est donc une base, on l'appelle **base canonique** de $\mathbb{K}^n$. Si $u=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$, alors on sait que $u=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k$, donc $\text{Coord}_B(u)=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, c'est à dire : dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ les coordonnées d'un vecteur u sont les composantes de u.
- $E=\mathbb{K}_n[X]$, on sait que la famille $B=(X^0,\dots,X^n)$ est libre et génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$, on l'appelle **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$. Si $P=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k X^k\in\mathbb{K}_n[X]$, alors $\text{Coord}_B(P)=(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$, c'est à dire : dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, les coordonnées d'un polynôme P sont les coefficients de P.
- Dans $\mathbb{K}_n[X]$, soit $a\in\mathbb{K}$, d'après la formule de *Taylor* en a, la famille $B=((X-a)^k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une famille libre et génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$, c'est donc une base. Pour $P\in\mathbb{K}_n[X]$, on sait que $P=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$, donc $\text{Coord}_B(P)=(P(a),P'(a),\dots,\frac{P^{(n)}(a)}{n!})$.

★**Exercice 20.3** $E=\mathbb{K}^2$, *on pose* $i=(1,1)$ *et* $j=(1,2)$, *montrer que* $B=(i,j)$ *est une base de* E, *et pour* $u=(x,y)\in E$, *calculer* $\text{Coord}_B(u)$.

Théorème 20.7 (existence de bases)
Tout $\mathbb{K}$-e.v non réduit au vecteur nul et de dimension finie, possède des bases. Plus précisément, toute famille génératrice contient une base.

Preuve : Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille génératrice de E, si tous ces vecteurs sont nuls, alors $\mathrm{E} = \{0_\mathrm{E}\}$ ce qui est exclu, donc au moins un des vecteurs de la famille est non nul, on peut donc considérer les sous-familles de $(x_1, \ldots, x_n)$ qui sont libres et en prendre une de **cardinal maximal** : $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$. Posons $y_j = x_{i_j}$ pour $j \in [\![1;r]\!]$, lorsque $k \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$ on a $(y_1, \ldots, y_r, x_k)$ est liée (maximalité de r), donc $x_k \in \mathrm{Vect}[y_1, \ldots, y_r]$, mais alors $\mathrm{Vect}[x_1, \ldots, x_n] \subset \mathrm{Vect}[y_1, \ldots, y_r]$, ce qui entraîne que $(y_1, \ldots, y_r)$ est une famille génératrice de E, comme elle est libre, c'est une base de E. □

Théorème 20.8 (propriété fondamentale des bases en dimension finie)
Si E *est un* $\mathbb{K}$*-e.v de dimension finie, alors toutes les bases de* E *ont le même cardinal. Ce cardinal est appelé* ***dimension de*** E *et noté* $\dim(\mathrm{E})$ *ou* $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{E})$. *Par convention* $\{0_\mathrm{E}\}$ *est de dimension* 0.

Preuve : Soit $\mathrm{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, cette famille est libre, donc toute famille génératrice possède au minimum n vecteurs, mais cette famille est également génératrice, donc toute famille libre contient au maximum n vecteurs, finalement, toute base de E, étant à la fois libre et génératrice, contient exactement n vecteurs. □

☞**Exemples** :
- La base canonique de $\mathbb{K}^n$ contient n vecteurs, donc $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$.
- La base canonique de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ contient $n+1$ vecteurs, donc $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]) = n+1$.
- $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ donc $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$, mais $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$.
- Une droite vectorielle est un espace de dimension 1 et un plan vectoriel est un espace de dimension 2.

Théorème 20.9 (application)
Si E *est de dimension* $n \geqslant 1$ *et si* B *est une famille de vecteurs de* E *alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) B *est une base de* E.

b) B *est libre de cardinal* n *(on dit aussi libre maximale).*

c) B *est génératrice de cardinal* n *(on dit aussi génératrice minimale).*

Preuve : On a évidemment $a) \implies b)$ et $a) \implies c)$.

Montrons $b) \implies c)$: si B est libre de cardinal n : $\mathrm{B} = (y_1, \ldots, y_n)$, alors pour tout $x \in \mathrm{E}$, la famille $(y_1, \ldots, y_n, x)$ est liée (car de cardinal $n+1$ et E possède une base de cardinal n), ce qui entraîne que $x \in \mathrm{Vect}[y_1, \ldots, y_n]$, ce qui prouve que B est génératrice.

Montrons $c) \implies a)$: si B est génératrice de cardinal n, on peut extraire de B une famille libre de cardinal maximal, cette famille sera alors une base de E, elle est donc de cardinal n, mais B est de cardinal n, donc cette famille extraite ne peut être que B elle-même, c'est à dire B est une base de E. □

★**Exercice 20.4** *Montrer que dans* $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$, *la famille* $\mathrm{B} = (\mathrm{X}^k(1-\mathrm{X})^{n-k})_{k \in [\![0;n]\!]}$ *est une base.*

On remarquera au passage la puissance du théorème précédent, car le fait que cette famille B soit génératrice n'est pas du tout évident à démontrer « à la main ».

Théorème 20.10
Soit $\mathrm{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E*, l'application :*

$$\mathrm{Coord}_\mathrm{B} : \begin{array}{rcl} \mathrm{E} & \to & \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto & \mathrm{Coord}_\mathrm{B}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme entre E *et* $\mathbb{K}^n$.

Preuve : En exercice. □

Remarque 20.2 – *Ce théorème permet de calculer facilement les coordonnées d'une combinaison linéaire de vecteurs connaissant les coordonnées de chacun d'eux.*

Théorème 20.11

Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-e.v, soit* $B = (e_1, \dots, e_n)$ *une base de* E*, toute application linéaire de* E *vers* F *est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs de la base* B*, plus précisément, si on se donne* $y_1, \dots, y_n \in F$*, alors il existe une unique application linéaire* $f : E \to F$ *telle que* $\forall\ i \in [\![1;n]\!]$*,* $f(e_i) = y_i$*, de plus :*

– f *est injective si et seulement si* $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ *est libre dans* F.
– f *est surjective si et seulement si* $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ *est génératrice de* F.
– f *est bijective si et seulement si* $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ *est une base de* F.

Preuve : Soit $x \in E$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{Coord}_B(x)$, on définit $f : E \to F$ en posant $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k$. Il est facile de vérifier que f est linéaire et que c'est la seule qui vérifie $f(e_k) = y_k$ pour $k \in [\![1;n]\!]$.

Les deux équivalences suivantes sont simples à démontrer et la troisième est la conjonction des deux précédentes. On retient la troisième en disant que f est un isomorphisme de E vers F si et seulement si f transforme une base de E en une base de F. □

À retenir

Il en découle que deux applications linéaires de E vers F qui coïncident sur une base de E sont égales.

Théorème 20.12 (de la base incomplète)

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ *une base de* E *et soit* $(y_1, \dots, y_r)$ *une famille libre de* E *avec* $r < n$ *alors il existe des vecteurs* $e_{i_{r+1}}, \dots, e_{i_n}$ *de* B *tels que la famille* $(y_1, \dots, y_r, e_{i_{r+1}}, \dots, e_{i_n})$ *soit une base de* E.

Preuve : Comme $r < n$ la famille $(y_1, \dots, y_r)$ n'est pas génératrice de E, donc il existe au moins un vecteur e_k tel que $(y_1, \dots, y_r, e_k)$ soit libre. Posons $A = (y_1, \dots, y_r, e_1, \dots, e_n)$ alors A est une famille génératrice de E. La famille A contient des familles libres et parmi celles-ci il y en a qui contiennent les vecteurs $y_1, \dots, y_r$, on peut donc considérer une sous-famille libre de A qui contient ces vecteurs et qui soit de **cardinal maximal** : $C = (y_1, \dots, y_r, e_{i_{r+1}}, \dots, e_{i_s})$, si $k \notin \{i_{r+1}, \dots, i_s\}$ alors la famille $(y_1, \dots, y_r, e_{i_{r+1}}, \dots, e_{i_s}, e_k)$ est liée (maximalité de C), donc $e_k \in \text{Vect}[C]$ ce qui entraîne que C est une famille génératrice de E, or C est libre donc C est une base de E, ce qui entraîne également que $s = n$ car toutes les bases de E ont n vecteurs. □

☞**Exemple** : Soit $E = \mathbb{K}^3$ et $B = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$, soit $u = (1, 1, 1)$. La famille (u) est libre, on peut donc compléter cette famille en une base de E avec deux vecteurs de la base canonique. Les vecteurs i et u sont non colinéaires, donc (u, i) est libre. On a $j \notin \text{Vect}[u, i]$ donc (u, i, j) est libre, c'est donc une base de $\mathbb{K}^3$. On remarquera que (u, i, k) et (u, j, k) conviennent également.

2) Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Théorème 20.13

Si E *est de dimension finie, alors tout s.e.v* F *de* E *est de dimension finie et* $\dim(F) \leqslant \dim(E)$*. De plus, si* $\dim(F) = \dim(E)$ *alors* $F = E$.

Preuve : Si $\dim(E) = 0$ il n'y a rien à démontrer. On suppose donc $\dim(E) = n \geqslant 1$, si $F = \{0_E\}$ alors il n'y a rien à démontrer, on suppose donc $F \neq \{0_E\}$, mais alors F contient des familles libres et elles ont toute un cardinal inférieur ou égal à n, on peut donc considérer une famille $\mathscr{C}$ libre de F de **cardinal maximal**, on a alors $\forall\ x \in F, \mathscr{C} \cup (x)$ est liée, donc $x \in \text{Vect}[\mathscr{C}]$ ce qui prouve que $\mathscr{C}$ est une base de F, et le premier point est démontré. Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $\text{card}(\mathscr{C}) = n$, donc $\mathscr{C}$ est également une base de E, d'où $E = F$. □

Théorème 20.14

Si E *est de dimension finie, alors tout s.e.v* F *de* E *admet au moins un supplémentaire* G *dans* E.

Preuve : On écarte les trois cas triviaux : $E = \{0_E\}$, $F = E$, $F = \{0_E\}$. Dans le cas général, soit $(y_1, \dots, y_p)$ une base de F alors on peut compléter cette famille en une base de E : $(y_1, \dots, y_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$, on pose alors $G = \text{Vect}\left[e_{p+1}, \dots, e_n\right]$ et on vérifie que G est un supplémentaire de F dans E. □

Théorème 20.15

Soient F *et* G *deux s.e.v d'un* $\mathbb{K}$*-e.v* E *de dimension finie, les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) F *et* G *sont supplémentaires.*

ii) La somme $F+G$ *est directe et* $\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)$.

iii) $E=F+G$ *et* $\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)$.

Preuve : Il est clair que $i) \implies ii)$.

Supposons $ii)$: soit $B=(y_1,\ldots,y_p)$ une base de F, alors $\dim(G)=n-p$ (où $n=\dim(E)$), soit $B'=(y_{p+1},\ldots,y_n)$ une base de G, il est facile de vérifier que $F\cap G=\{0_E\} \implies B\cup B'$ est libre, or $\text{card}(B\cup B')=n$, c'est donc une famille génératrice de E, ce qui entraîne $E=F+G$, donc $ii) \implies iii)$.

Supposons $iii)$: avec les notations précédentes, l'hypothèse $E=F+G$ implique que $B\cup B'$ est génératrice de E, mais elle est de cardinal n, c'est donc une famille libre ce qui entraîne ue la somme $F+G$ est directe et donc $E=F\oplus G$, donc $iii) \implies i)$. □

Théorème 20.16

Si E *est de dimension finie et si* F *et* G *sont deux s.e.v de* E*, alors (formule de Grassmann*[1]*) :*

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G).$$

Preuve : Soit H un supplémentaire de $F\cap G$ dans F : $F=H\oplus(F\cap G)$, on a donc d'après la propriété précédente, $\dim(H)=\dim(F)-\dim(F\cap G)$. On vérifie ensuite que $F+G=H\oplus G$, on en déduit alors que $\dim(F+G)=\dim(H)+\dim(G)$, ce qui donne la formule. □

Théorème 20.17

Si E *et* F *sont deux* $\mathbb{K}$*-e.v de dimension finie, alors* $E\times F$ *est de dimension finie et :*

$$\dim(E\times F)=\dim(E)+\dim(F).$$

Preuve : Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E et $(y_1,\ldots,y_p)$ une base de F, alors on a déjà montré que la famille :

$B=((e_1,0_F),\ldots,(e_n,0_F),(0_E,y_1),\ldots,(0_E,y_p))$ est un famille génératrice de $E\times F$, on peut vérifier alors que c'est aussi une famille libre, ce qui donne le résultat. □

☞**Exemple** : Si $\dim(E)=3$, décrire les s.e.v de E et étudier les positions relatives (intersection de deux s.e.v de E).

3) Applications linéaires et dimension finie

Théorème 20.18 (dimension de $\mathscr{L}(E,F)$)

Si $\dim(E)=n$ *et* $\dim(F)=p$*, alors* $\mathscr{L}(E,F)$ *est de dimension finie et* $\dim(\mathscr{L}(E,F))=np$*. En particulier,* $\dim(\mathscr{L}(E))=n^2$.

Preuve : Ce théorème sera établi dans le chapître sur les matrices. □

☞**Exemples** :

- $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^p)$ est de dimension np.
- Si $\dim(E)=n$, alors $\dim(E^*)=n$ (dual de E).

Théorème 20.19 (comparaison des dimensions)

Si E *et* F *sont de dimension finie et si* $f\in\mathscr{L}(E,F)$ *:*

- f *injective* $\implies \dim(E)\leqslant\dim(F)$.
- f *surjective* $\implies \dim(E)\geqslant\dim(F)$.
- f *bijective (isomorphisme)* $\implies \dim(E)=\dim(F)$.

Preuve : Soit $B=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E et $B'=(y_1,\ldots,y_p)$ une base de F.

Si f est injective, alors la famille $(f(e_1),\ldots,f(e_n))$ est libre dans F donc $n\leqslant p=\dim(F)$.

Si f est surjective, alors la famille $(f(e_1),\ldots,f(e_n))$ est génératrice de F donc $n\geqslant p=\dim(F)$.

Si f est un isomorphisme, alors la famille $(f(e_1),\ldots,f(e_n))$ est une base de F donc $n=p=\dim(F)$. □

1. *Hermann Günter GRASSMANN* (1809 – 1877) : mathématicien allemand qui a développé les notions fondamentales de l'algèbre linéaire.

Remarque 20.3 –

- *Tout* $\mathbb{K}$*-e.v de dimension* n *est isomorphe à* $\mathbb{K}^n$.
- *Si* E *est de dimension finie, alors* E *est isomorphe à* E^**, son dual.*

Théorème 20.20 (caractérisations des isomorphismes)

Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-e.v de dimension finie tels que* $\dim(E) = \dim(F)$*, et soit* $f \in \mathscr{L}(E,F)$*, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) f *est injective.*

b) f *est surjective.*

c) f *est bijective.*

d) $\exists\, g \in \mathscr{L}(F,E), f \circ g = \mathrm{id}_F$.

e) $\exists\, h \in \mathscr{L}(F,E), h \circ f = \mathrm{id}_E$.

Preuve : Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

a) $\Longrightarrow$ *b)* : si f est injective alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre de cardinal n dans F, or $\dim(F) = \dim(E) = n$, c'est une famille génératrice de F, et donc f est surjective.

b) $\Longrightarrow$ *c)* : f est surjective, donc la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est génératrice de F de cardinal dim(F), c'est donc une base de F, ce qui signifie que f est un isomorphisme.

c) $\Longrightarrow$ *d)* : f est bijective, il suffit donc de prendre $g = f^{-1}$.

d) $\Longrightarrow$ *e)* : on a $f \circ g = \mathrm{id}_F$ donc f est surjective, ce qui entraîne que f est bijective, on a donc $g = f^{-1}$ et il suffit alors de prendre $h = g$.

e) $\Longrightarrow$ *a)* : on a $h \circ f = \mathrm{id}_E$, donc f est injective. □

Remarque 20.4 –

- *Lorsque* $\dim(E) = \dim(F)$ *l'égalité* $f \circ g = \mathrm{id}_F$ *entraîne automatiquement* $g \circ f = \mathrm{id}_E$*, ce qui est tout à fait remarquable puisqu'en général la loi* $\circ$ *n'est pas commutative.*
- *Le théorème précédent est faux en dimension infinie comme le montre les exemples suivants :* $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ *définie par* $f(P) = P'$ *(surjective non injective) et* $g : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ *définie par* $g(P) = XP$ *(injective non surjective).*

☞**Exemples** :

- Polynômes d'endomorphismes : si $\dim(E) = n$ alors $\dim(\mathscr{L}(E)) = n^2$, donc si $u \in \mathscr{L}(E)$, alors la famille $(id, u, \ldots, u^{n^2})$ est liée, donc il existe un polynôme $P = \sum \lambda_k X^k$ non nul de degré $\leqslant n^2$ tel que $P(u) = 0$. Si $P(0) \neq 0$, alors $\lambda_0 \neq 0$ d'où $\mathrm{id}_E = -\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{\lambda_k}{\lambda_0} u^k$, ou encore :
$$\mathrm{id}_E = u \circ \left[-\sum_{k\geqslant 1} \frac{\lambda_k}{\lambda_0} u^{k-1}\right].$$
Ce qui prouve que $u \in GL(E)$ et $u^{-1} = -\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{\lambda_k}{\lambda_0} u^{k-1}$.
- Polynôme d'interpolation de Lagrange : soient $a_0, \ldots, a_n$ $n+1$ scalaires distincts, on note $f : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$ définie par $f(P) = (P(a_0), \ldots, P(a_n))$. Il est facile de vérifier que f est linéaire et injective, comme $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$, f est un **isomorphisme**, par conséquent pour $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall\, i \in [\![0; n]\!], P(a_i) = \alpha_i$. Soit $B = (e_0, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$, on note L_i l'unique polynôme de degré $\leqslant n$ tel que $f(L_i) = e_i$. On vérifie facilement que :
$$L_i(X) = \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}.$$
C'est le i^{e} polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $(a_0, \ldots, a_n)$, on en déduit que :
$$f^{-1}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k(X).$$

★**Exercice 20.5** *Soit* E *de dimension finie, soit* $u \in \mathscr{L}(E)$*, et soit* F *un s.e.v de* E *stable par* u*, on appelle* v *la restriction de* u *à* F*, c'est à dire* $v : F \to F$ *définie par* $v(x) = u(x)$.

1/ *Montrer que si* $u \in GL(E)$*, alors* $v \in GL(F)$.

2/ *Montrer que si* $\ker(u) + F$ *est directe, alors* $v \in GL(F)$.

III NOTION DE RANG

1) Rang d'une application linéaire

Définition 20.5

Soit E *un espace vectoriel de dimension finie et* $f \in \mathscr{L}(E,F)$, *on sait que* $\mathrm{Im}(f)$ *est de dimension finie, par définition, on appelle* **rang** *de* f *la dimension de* $\mathrm{Im}(f)$.
Notation : $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

Remarque 20.5 –

- *Si* $B = (e_1, \dots, e_n)$ *est une base de* E *alors on sait que* $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ *est une famille génératrice de* $\mathrm{Im}(f)$ *donc* $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant n$, *c'est à dire :*
$$\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(E).$$
- *Si de plus* F *est de dimension finie, alors* $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(F)$, *donc :*
$$\mathrm{rg}(f) \leqslant \min(\dim(E), \dim(F)).$$
- f *est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = F$, *donc :*
$$f \text{ est surjective} \iff \mathrm{rg}(f) = \dim(F).$$

Théorème 20.21 (théorème du rang)

Si E *et de dimension finie et si* $f \in \mathscr{L}(E,F)$ *alors* $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$.

Preuve : Soit G un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E : $E = \ker(f) \oplus G$. Il est facile de vérifier que l'application linéaire $v\colon G \to \mathrm{Im}(f)$ définie par $v(x) = f(x)$ est un isomorphisme, ce qui entraîne que $\dim(G) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f)$, or $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(G)$, d'où le résultat. □

Conséquences : Soit $f\colon E \to F$ linéaire,si E de dimension finie, alors f est injective $\iff \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.

☞**Exemples** :

- Soit $u\colon \mathbb{K}_{n+1}[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ définie par $u(P) = P(X+1) - P(X)$. Il est clair que u est linéaire, on vérifie que $\ker(u) = \mathbb{K}$, le théorème du rang nous dit alors que $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathbb{K}_{n+1}[X]) - \dim(\ker(u)) = n+2-1 = n+1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$, ce qui prouve que u est surjective.
- Soient F et G deux s.e.v de E, on considère l'application $\varphi\colon F \times G \to E$ définie par $\varphi(x,y) = x+y$, on vérifie que φ est linéaire et que $\ker(\varphi) = \{(x,-x) \mid x \in F \cap G\}$. On voit que $\ker(\varphi)$ est isomorphe à $F \cap G$ et que $\mathrm{Im}(\varphi) = F + G$, le théorème du rang nous dit alors que $\dim(F \times G) = \dim(F \cap G) + \dim(F+G)$, d'où $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$, on retrouve ainsi la formule de *Grassmann*.

★**Exercice 20.6** *Soit* $B = (i,j,k)$ *une base de* $\mathbb{K}^3$, *on considère* $u\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^4$ *définie par* $\begin{cases} u(i) = (1,2,-1,0) \\ u(j) = (-1,0,1,-2) \\ u(k) = (1,4,-1,-2) \end{cases}$. *Calculer le rang de* u.

Théorème 20.22 (propriétés du rang)

Soient E, F, G *trois* $\mathbb{K}$*-e.v, soit* $f \in \mathscr{L}(E,F)$ *et* $g \in \mathscr{L}(F,G)$, *on a* $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f))$.
De plus, si f *est surjective, alors* $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$, *et si* g *est injective, alors* $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

Preuve : Soit $h\colon \mathrm{Im}(f) \to G$ définie par $h(x) = g(x)$, alors h est linéaire et $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$, on a donc $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(h) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f))$ d'après le théorème du rang, de plus l'inclusion ci-dessus prouve que $\mathrm{rg}(h) \leqslant \mathrm{rg}(g)$, d'où le résultat.

Si f est surjective, alors $\mathrm{Im}(f) = F$ et donc $h = g$, d'où $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$.
Si g est injective, alors h est injective, donc $\mathrm{rg}(h) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f)$. □

★**Exercice 20.7** *Soient* E, F *deux* $\mathbb{K}$*-e.v de dimension finie et soit* $u, v \in \mathscr{L}(E,F)$, *montrer que :*
$$|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v).$$

2) Rang d'une famille de vecteurs

Définition 20.6

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-.v E. On appelle rang de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ la dimension du s.e.v engendré par cette famille.
Notation : $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n) = \dim(\mathrm{Vect}[x_1, \dots, x_n])$.

Remarque 20.6 –

- *La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de $F = \mathrm{Vect}[x_1, \dots, x_n]$, donc son rang est inférieur ou égal à n. De plus on sait que l'on peut extraire de cette famille une base de F en prenant une sous-famille libre de **cardinal maximal**, ce cardinal maximal est donc le rang de la famille.*
- *La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si et seulement si c'est une base de $F = \mathrm{Vect}[x_1, \dots, x_n]$ ce qui équivaut à $\dim(F) = n$, ce qui équivaut encore à : le rang de la famille est égal à n, donc :*

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ libre} \iff \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n) = n.$$

- *Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors :*

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Vect}\left[f(e_1), \dots, f(e_n)\right]) = \mathrm{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

☞**Exemples** :

- Dans $\mathbb{K}^3$ calculons le rang de la famille (i, j, k) avec $i = (1, 1, 1)$, $j = (-1, 2, 5)$ et $k = (3, 0, -3)$. La famille (i) est libre, j est non colinéaire à i donc (i, j) est libre, mais $k = 2i - j$ donc la famille (i, j, k) est liée, par conséquent (i, j) est libre maximale d'où $\mathrm{rg}(i, j, k) = 2$ et $\mathrm{Vect}\left[i, j, k\right] = \mathrm{Vect}\left[i, j\right]$.

3) Propriétés du rang d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, on considère une famille de vecteurs de E, $(x_1, \dots, x_p)$. On a les propriétés suivantes :

- Si $x_p = 0_E$, alors $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_{p-1})$. Autrement dit, si l'un des vecteurs de la famille est nul, on peut le retirer de la famille, cela ne change pas le rang (en fait cela ne change pas le s.e.v engendré).
- Si $\alpha \in \mathbb{K}^*$, alors $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = \mathrm{rg}(\alpha x_1, x_2, \dots, x_p)$, autrement dit, multiplier l'un des vecteurs par un scalaire non nul ne change pas le rang.
- Si $\lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$, alors $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = \mathrm{rg}(x_1 + \sum\limits_{k=2}^{p} \lambda_k x_k, x_2, \dots, x_p)$. Autrement dit, ajouter à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres ne change pas le rang.

À retenir

Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, on étudie la liberté de la famille. Si elle est libre, son rang est son cardinal, si elle est liée, un des vecteurs est combinaison linéaire des autres, on le retire alors de la famille et on recommence.

IV COMPLÉMENTS : HYPERPLANS EN DIMENSION FINIE

Théorème 20.23

Soit E un espace de dimension n et H un s.e.v. de E, soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) H *est un hyperplan de* E.

*b) Il existe des scalaires $(a_1, \dots, a_n)$ **non tous nuls** tels que :*

$$H = \{x \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E \ / \ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\} \text{ (on a une équation cartésienne de } H\text{).}$$

c) $\dim(H) = n - 1$.

Preuve : Montrons $i \implies ii$: H est le noyau d'un forme linéaire f sur E, non nulle. Posons $f(e_i) = a_i$, alors au moins un des a_i est non nul. Soit x de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base B, alors $f(x) = a_1 f(e_1) + \cdots + a_n f(e_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$. Le résultat en découle.

Montrons que $ii \implies iii$: supposons $a_1 \neq 0$, quitte à tout diviser par a_1 on peut suppose $a_1 = 1$, l'équation de H équivaut alors à $x_1 = -a_2x_2 - \cdots - a_nx_n$, on en déduit que $x \in \mathrm{H} \iff x = x_2[-a_2e_1 + e_2] + \cdots x_n[-a_ne_1 + e_n]$, par conséquent $\mathrm{H} = \mathrm{Vect}\,[-a_2e_1 + e_2; \ldots; -a_ne_1 + e_n]$, on a une famille génératrice de H, on vérifie qu'elle est libre, c'est donc une base de H et donc $\dim(\mathrm{H}) = n-1$.

Montrons que $iii \implies i$: soit $(h_1, \ldots, h_{n-1})$ une base de H, c'est une famille libre, on peut la compléter en une base de E : $(h_1, \ldots, h_{n-1}, h_n)$, soit f la forme linéaire sur E définie par $f(h_i) = 0$ si $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et $f(h_n) = 1$. Alors f est non nulle, et on vérifie que $\ker(f) = \mathrm{H}$, donc H est un hyperplan. □

Théorème 20.24 (égalité de deux hyperplans)

Soient $\mathrm{H}_1 = \ker(f_1)$ *et* $\mathrm{H}_2 = \ker(f_2)$ *deux hyperplans de* E*, alors* $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2 \iff (f_1, f_2)$ *est liée.*

Preuve : Si (f_1, f_2) est liée, il existe un scalaire a tel que $f_1 = af_2$ (car f_2 est non nulle), comme f_1 est non nulle, on a $a \neq 0$, par conséquent $\forall x \in \mathrm{E}, f_1(x) = 0 \iff f_2(x) = 0$, on en déduit que $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2$.

Si $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2$, soit $(h_1, \ldots, h_{n-1})$ une base de H_1, que l'on complète en une base de E : $(h_1, \ldots, h_{n-1}, h_n)$, h_n étant ni dans H_1 ni dans H_2, on a $f_1(h_n)$ et $f_2(h_n)$ non nuls, il existe donc un scalaire a tel que $f_1(h_n) = af_2(h_n)$, on vérifie alors que pour i dans $[\![1;n]\!]$, on a $f_1(h_i) = af_2(h_i)$ et donc $f_1 = af_2$, la famille (f_1, f_2) est liée. □

★**Exercice 20.8**

1/ *Montrer que les deux équations* $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ *et* $b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0$ *dans une base* B *sont équivalentes si et seulement si* $(a_1, \ldots, a_n)$ *et* $(b_1, \ldots, b_n)$ *sont colinéaires dans* $\mathbb{K}^n$.

2/ *Soient* H_1 *et* H_2 *deux hyperplans distincts, montrer que* $\dim(\mathrm{H}_1 \cap \mathrm{H}_2) = n-2$ *si* $n = \dim(\mathrm{E})$.

Théorème 20.25

• *Si* $\mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_p$ *sont des hyperplans de* E*, alors* $\dim(\mathrm{H}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{H}_p) \geqslant n-p$.

• *Tout s.e.v. de* E *de dimension* $n-p$ *est l'intersection de* p *hyperplans de* E.

Preuve :

• On écrit $\mathrm{H}_i = \ker(f_i)$ où les f_i sont des formes linéaires non nulles sur E. L'application $g\colon \mathrm{E} \to \mathbb{K}^p$ définie par $g(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$ est linéaire, son noyau est l'intersection $\mathrm{H}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{H}_p$ et son rang est inférieure ou égale à p. Le théorème du rang donne le résultat.

• Soit $(e_1, \ldots, e_{n-p})$ une base de ce s.e.v., on complète en une base de E : $\mathrm{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, soit f_i la forme linéaire définie par $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ pour $i \in [\![n-p+1;n]\!]$. On vérifie que $\ker(f_i)$ est l'ensemble des vecteurs sont la coordonnée dans la base B sur e_i est nulle, on en déduit que $\mathrm{Vect}\left[e_1, \ldots, e_{n-p}\right] = \ker(f_{n-p+1}) \cap \cdots \cap \ker(f_n)$. □

V SOLUTION DES EXERCICES

Solution 20.1

1/ *Soit* $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$*, on résout le système* $x(1,1,1)+y(-1,0,2)+z(1,2,3) = (a,b,c)$ *ce qui donne* $\left\{\begin{aligned} -y+x+z &= a \\ x+2z &= b \\ -z &= c+2a-3b \end{aligned}\right.$, *ce système a une (unique) solution* (x,y,z)*, donc la famille* A *est génératrice de* $\mathbb{K}^3$.

2/ $\mathrm{Vect}\,[\mathrm{A}]$ *est un plan vectoriel, c'est le plan d'équation* $x - 2y + z = 0$*, il ne contient pas le triplet* $(-1,0,2)$ *par exemple, donc* A *n'est pas une famille génératrice de* $\mathbb{K}^3$.

Solution 20.2 *Il est clair que* (f_1) *est libre, supposons que* $(f_1, \ldots, f_{n-1})$ *soit libre et supposons que* $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = 0$*, on a donc pour tout réel* x *de* $[a;b]$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \sin(kx) = 0$*, en dérivant deux fois cette relation, on obtient* $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\alpha_k \sin(kx) = 0$*, en lui retranchant* n^2 *fois la première, on obtient* $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (k^2 - n^2)\alpha_k f_k = 0$*, de l'hypothèse de récurrence on déduit que* $\alpha_k = 0$ *pour* $k \in [\![1;n-1]\!]$*, il reste alors* $\alpha_n f_n = 0$ *et donc* $\alpha_n = 0$.

Solution 20.3 *La famille* $\mathrm{B} = (i,j)$ *est libre et pour tout* $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ *on a* $(a,b) = (2a-b)i + (b-a)j$*, donc la famille est génératrice de* $\mathbb{K}^2$*, c'est donc une base de* $\mathbb{K}^2$ *et* $\mathrm{Coord}_{\mathrm{B}}(a,b) = (2a-b, b-a)$.

Solution 20.4 *La base canonique de* $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ *possède* $n+1$ *vecteurs et* $\mathrm{card}(\mathrm{B}) = n+1$*, il suffit donc de démontrer que* B *est libre : si on a* $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{X}^k(1-\mathrm{X})^{n-k} = 0$*, en évaluant en* 1*, il reste* $\alpha_n = 0$*, donc* $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k \mathrm{X}^k(1-\mathrm{X})^{n-k} = 0$*, c'est à dire*

$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k (1-X)^{n-1-k} = 0$, *on peut terminer par récurrence sur* n *pour montrer que* B *est libre, la propriété étant évidente pour* $n = 0$. B *est donc une base de* $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

Solution 20.5

1/ *On a* $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F})$ *et* F *est de dimension finie, il suffit donc de vérifier que* v *est injective, or* $v(x) = 0 \implies u(x) = 0 \implies x = 0$ *car* u *est injective (*$u \in \mathrm{GL}(\mathrm{F})$*), donc* v *est bien injective ce qui entraîne ici que* $v \in \mathrm{GL}(\mathrm{F})$.

2/ $x \in \ker(v) \iff x \in \mathrm{F}$ *et* $x \in \ker(u)$, *donc* $\ker(v) = \mathrm{F} \cap \ker(u)$. *Si* $\ker(u) + \mathrm{F}$ *est directe, alors* $\mathrm{F} \cap \ker(u) = \{0\}$ *et donc* $\ker(v) = \{0\}$, v *est donc injective, d'où* $v \in \mathrm{GL}(\mathrm{F})$ *(car* F *est de dimension finie).*

Solution 20.6 $x = ai + bj + ck \in \ker(u) \iff \begin{cases} b = -c \\ a = -2c \end{cases}$, *on en déduit que* $\ker(u) = \mathrm{Vect}\left[2i + j - k\right]$, *d'où* $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathbb{K}^3) - 1 = 2$, *donc* $\mathrm{Im}(u)$ *est un plan vectoriel, comme* $u(i)$ *et* $u(j)$ *sont non colinéaires, on a* $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\left[u(i), u(j)\right]$.

Solution 20.7 $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ *donc en prenant les dimensions,* $\mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - \dim(\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

En écrivant $u = (u+v) - v$ *et en appliquant ce qui précède, on a* $\mathrm{rg}(u) \leqslant \mathrm{rg}(u+v) + \mathrm{rg}(-v)$, *or* $\mathrm{rg}(-v) = \mathrm{rg}(v)$ *(car* $\mathrm{Im}(-v) = \mathrm{Im}(v)$*), d'où* $\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v) \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$. *En échangeant les rôles de* u *et* v *on a* $\mathrm{rg}(v) - \mathrm{rg}(u) \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$ *et donc* $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$.

Solution 20.8

1/ *C'est une application directe du théorème ci-dessus.*

2/ *Il existe au moins un vecteur de* H_2 *qui n'est pas dans* H_1, *donc* $\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2$ *contient une base de* E, *par conséquent* $\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2 = \mathrm{E}$, *en appliquant la formule de Grassmann on obtient le résultat.*