

Chapitre 8

Nombres réels

Sommaire

I	L'ensemble des réels	75
1)	Rappels sur les rationnels	75
2)	Opérations et ordre sur les réels	76
II	Borne inférieure, borne supérieure	76
1)	Propriété fondamentale de l'ensemble des réels	76
2)	Intervalles	78
3)	La droite numérique achevée	78
4)	Voisinages	79
III	Approximation d'un réel	79
1)	Valeur absolue	79
2)	Partie entière	80
3)	Approximations décimales	82
IV	Solution des exercices	83

L'existence des ensembles \mathbb{Q} et \mathbb{R} est admise.

I L'ENSEMBLE DES RÉELS

1) Rappels sur les rationnels

Un rationnel est un réel de la forme pq^{-1} (ou $\frac{p}{q}$) où p et q sont deux entiers avec $q \neq 0$. L'ensemble des rationnels est noté \mathbb{Q} . Tout rationnel peut s'écrire de différentes manières sous forme de fractions, par exemple : $\frac{p}{q} = \frac{2p}{2q} = \frac{-p}{-q}$. Mais tout nombre rationnel s'écrit de manière **unique** sous forme de fraction **irréductible**, c'est à dire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et avec p et q **premiers entre eux** (i.e. sans autres diviseurs communs que 1 et -1).

Opérations sur les rationnels

On rappelle que : $\frac{p}{q} + \frac{a}{b} = \frac{aq+bp}{bq}$ et $\frac{p}{q} \times \frac{a}{b} = \frac{ap}{bq}$. L'addition et la multiplication sont donc des lois de composition internes dans \mathbb{Q} , on vérifie que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un **corps commutatif**. On vérifie également que $(\mathbb{Q}, +)$, (\mathbb{Q}^*, \times) et $(\mathbb{Q}^{*+}, \times)$ sont des groupes commutatifs.

L'ensemble des rationnels est insuffisant

En termes d'approximations numériques, \mathbb{Q} peut paraître suffisant en sciences appliquées. Le problème se pose lorsqu'on a besoin de connaître la **valeur exacte** de certaines grandeurs. Par exemple, peut-on mesurer dans \mathbb{Q} la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ? D'après le théorème de *Pythagore*¹, cela revient à se demander s'il existe un rationnel dont le carré est égal à 2, or nous avons déjà établi que la réponse est négative ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Cette lacune de \mathbb{Q} avait été remarquée par les Pythagoriciens, ce qui a conduit les mathématiciens à introduire de nouveaux nombres, les **irrationnels**, en concevant un ensemble plus vaste que \mathbb{Q} , l'ensemble des nombres réels noté \mathbb{R} .

1. *PYTHAGORE De Samos* (569 av J.-C. – 500 av J.-C. (environ)) : mathématicien et philosophe grec dont la vie et l'œuvre restent entourées de mystères.

2) Opérations et ordre sur les réels

L'ensemble \mathbb{R} contient \mathbb{Q} et possède une addition et une multiplication (qui prolongent celles de \mathbb{Q}) qui font que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif. On admettra également qu'il existe deux parties de \mathbb{R} que l'on note A et B et qui vérifient :

- A et B sont stables pour l'addition.
- $\mathbb{Q}^+ \subset A$ et $\mathbb{Q}^- \subset B$.
- $\mathbb{R} = A \cup B$.
- $A \cap B = \{0\}$.
- Si $x, y \in A$ alors $xy \in A$, si $x, y \in B$ alors $xy \in A$ et si $x \in A$ et $y \in B$, alors $xy \in B$ (règle des signes).

On définit alors une relation \mathcal{R} dans \mathbb{R} en posant : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} y \iff x - y \in B$. Cette relation est :

- Réflexive : $\forall x \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} x$.
- Antisymétrique : si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$ alors $x = y$.
- Transitive : si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$, alors $x \mathcal{R} z$.

Le relation \mathcal{R} est donc une relation **d'ordre** sur \mathbb{R} . On la notera désormais \leq , c'est à dire que $x \mathcal{R} y$ sera noté $x \leq y$ (i.e. $x - y \in B$).

On remarquera que $x \leq 0$ signifie que $x \in B$, et que $0 \leq x$ signifie que $-x \in B$ et donc $x \in A$ car $x = (-1)(-x)$: produit de deux éléments de B . D'autre part, si $x \in A$ et $y \in B$, alors $x \leq y$ car $y - x = y + (-x)$: somme de deux éléments de B .

Si x et y sont deux réels quelconques, on a $x - y \in A$ ou $x - y \in B$, c'est à dire $x - y \in B$ ou $y - x \in B$, c'est à dire encore $x \leq y$ ou $y \leq x$. Deux réels sont donc toujours comparables, l'ordre est **total**.

Notation : On pose $A = \mathbb{R}^+$ et $B = \mathbb{R}^-$.



Théorème 8.1

La relation d'ordre \leq est :

- Compatible avec l'addition, c'est à dire :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \text{ si } x \leq y \text{ alors } x + z \leq y + z.$$

- Compatible avec la multiplication par un réel positif :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \text{ si } 0 \leq z \text{ et } x \leq y, \text{ alors } xz \leq yz.$$

Preuve : Si $x \leq y$, alors $x - y \in \mathbb{R}^-$, mais $(x + z) - (y + z) = x - y$, donc $(x + z) - (y + z) \in \mathbb{R}^-$ i.e. $x + z \leq y + z$. Si $0 \leq z$ et $x \leq y$, alors $x - y \in \mathbb{R}^-$ donc $z(x - y) \in \mathbb{R}^-$, i.e. $zx \leq zy$. On remarquera que si $z \leq 0$ alors $z(x - y) \in \mathbb{R}^+$ donc $zy \leq zx$, l'inégalité change de sens. \square

Conséquences

- Si $x \leq y$ et $a \leq b$, alors $x + a \leq y + b$.
- Si $0 \leq x \leq y$ et $0 \leq a \leq b$ alors $0 \leq ax \leq by$.

II BORNE INFÉRIEURE, BORNE SUPÉRIEURE

1) Propriété fondamentale de l'ensemble des réels

Soit I une partie non vide de \mathbb{R} et soit a un réel, on dit que :

- I est majorée par a (ou a est un majorant de I), lorsque tout élément de I est inférieur ou égal à a : $\forall x \in I, x \leq a$.
- I est minorée par a (ou a est un minorant de I), lorsque tout élément de I est supérieur ou égal à a : $\forall x \in I, x \geq a$.
- I est bornée, lorsque I est à la fois minorée et majorée : $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, m \leq x \leq M$.

Exemples :

- L'ensemble $I = \{\frac{x^2}{1+x^2} / x \in \mathbb{R}\}$ est borné (minoré par 0 et majoré par 1).
- L'ensemble $I = \{\frac{x^2}{1+|x|} / x \in \mathbb{R}\}$ est minoré par 0, mais non majoré.

Remarque 8.1 -

- I est non majoré équivaut à : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, x > M$.
- I est non minoré équivaut à : $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in I, x < m$.
- I est borné équivaut à : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |x| \leq M$.

**Définition 8.1**

Soit I une partie non vide de \mathbb{R} . Si l'ensemble des majorants de I n'est pas vide et s'il admet un plus petit élément, alors celui-ci est appelé **borne supérieure** de I et noté $\sup(I)$. La borne supérieure (lorsqu'elle existe) est donc **le plus petit des majorants**.

Si l'ensemble des minorants de I n'est pas vide et s'il admet un plus grand élément, alors celui-ci est appelé **borne inférieure** de I et noté $\inf(I)$. La borne inférieure (lorsqu'elle existe) est donc **le plus grand des minorants**.

Exemples :

- $I =]0; 1]$, l'ensemble des majorants est $[1; +\infty[$, celui-ci admet un plus petit élément qui est 1, donc $\sup(I) = 1$. L'ensemble des minorants de I est $] -\infty; 0]$ qui admet un plus grand élément : 0, donc $\inf(I) = 0$.
- $I =]1; +\infty[$, l'ensemble des majorants est vide donc I **n'a pas de borne supérieure**. L'ensemble des minorants est $] -\infty; 1]$, celui-ci admet un plus grand élément : 1, donc $\inf(I) = 1$.

**Attention!**

On remarquera qu'une borne inférieure (ou supérieure) d'un ensemble I n'a aucune raison d'appartenir à I .

Voici le lien entre minimum et borne inférieure (ou maximum et borne supérieure) :

**Théorème 8.2**

Soit I une partie non vide de \mathbb{R} et soit a un réel :

- $a = \min(I)$ ssi $a \in I$ et $a = \inf(I)$.
- $a = \max(I)$ ssi $a \in I$ et $a = \sup(I)$.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

Il découle de la définition :

**Théorème 8.3**

Soit I une partie non vide de \mathbb{R} et soit m un réel, alors :

$$\begin{aligned} m = \sup(I) &\iff \begin{cases} m \text{ majore } I \\ \forall \varepsilon > 0, m - \varepsilon \text{ ne majore pas } I, \text{ i.e. } \exists x \in I, m - \varepsilon < x \end{cases} \\ m = \inf(I) &\iff \begin{cases} m \text{ minore } I \\ \forall \varepsilon > 0, m + \varepsilon \text{ ne minore pas } I, \text{ i.e. } \exists x \in I, x < m + \varepsilon \end{cases} \end{aligned}$$

**Théorème 8.4 (Propriété fondamentale de \mathbb{R} (admise))**

Toute partie de \mathbb{R} **non vide et majorée** admet une borne supérieure.

Conséquence : il en découle que toute partie de \mathbb{R} non vide et minorée admet une borne inférieure.

Preuve : Soit A une partie de \mathbb{R} non vide et minorée par un réel m , alors l'ensemble $-A = \{-a / a \in A\}$ est une partie de \mathbb{R} non vide et majorée par le réel $-m$. D'après le théorème précédent, $-A$ admet une borne supérieure M et donc l'ensemble des majorants de $-A$ est $[M, +\infty[$, on en déduit que l'ensemble des minorants de A est $] -\infty; -M]$ et donc A admet une borne inférieure qui est $-M$, c'est à dire $\inf(A) = -\sup(-A)$. □

Exemples :

- Soit a un réel positif, on pose $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq a\}$. A est une partie non vide de \mathbb{R} car $0 \in A$, d'autre part A est majoré par $a + 1$ car $x > a + 1 \implies x^2 > a^2 + 2a + 1 > a$. L'ensemble A admet donc une borne supérieure M . En raisonnant par l'absurde on peut montrer que $M^2 = a$, par conséquent $M = \sqrt{a}$, c'est une définition possible de la fonction racine carrée.
- Soient A et B deux parties de \mathbb{R} non vides et bornées telles que $A \subset B$. Montrer que $\inf(B) \leq \inf(A)$ et $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Réponse : $\inf(B)$ est un minorant de B donc un minorant de A , par conséquent $\inf(B) \leq \inf(A)$ car $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A . De même, $\sup(B)$ majore B , donc majore A également, d'où $\sup(A) \leq \sup(B)$ car $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A .

- Soient A et B deux parties de \mathbb{R} non vides et majorées, on pose $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Réponse : $\sup(A) + \sup(B)$ majore $A + B$, donc $A + B$ admet une borne sup. et $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$. Soient $a \in A$ et $b \in B$, $a + b \leq \sup(A + B)$, donc $a \leq \sup(A + B) - b$, ce qui signifie que A est majoré par $\sup(A + B) - b$, d'où $\sup(A) \leq \sup(A + B) - b$, mais alors $b \leq \sup(A + B) - \sup(A)$, donc B est majoré par $\sup(A + B) - \sup(A)$, d'où $\sup(B) \leq \sup(A + B) - \sup(A)$ et finalement $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A + B)$ ce qui prouve bien l'égalité.

2) Intervalles



Définition 8.2

Soit I une partie non vide de \mathbb{R} , on dit que I est un intervalle lorsque : **tout réel compris entre deux éléments de I est lui-même élément de I** , c'est à dire :

$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, x \leq z \leq y \implies z \in I.$$

Par convention, \emptyset est un intervalle de \mathbb{R} .



Théorème 8.5

Si I est un intervalle non vide de \mathbb{R} alors on a :

- soit $I = \mathbb{R}$,
- soit $I = [a; +\infty[$ ou $I =]a; +\infty[$,
- soit $I =]-\infty; b]$ ou $I =]-\infty; b[$,
- soit $I =]a; b[$ ou $I = [a; b]$ ou $I = [a; b[$ ou $I =]a; b]$.

Preuve : Le premier correspond à I non borné, le deuxième à I minoré et non majoré, le troisième à I non minoré et majoré, le quatrième à I borné. \square

☞ **Exemple :** \mathbb{Z} n'est pas un intervalle de \mathbb{R} car $1, 2 \in \mathbb{Z}$ mais pas $\frac{3}{2}$. \mathbb{Q} n'est pas un intervalle de \mathbb{R} .



Théorème 8.6

On a les propriétés suivantes :

- L'intersection de deux intervalles de \mathbb{R} est un intervalle de \mathbb{R} .
- La réunion de deux intervalles de \mathbb{R} **non disjoints** est un intervalle de \mathbb{R} .

Preuve : Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} , posons $K = I \cap J$. Si K est vide, alors c'est un intervalle. Si K n'est pas vide, alors soit $x, y \in K$ et soit z un réel tel que $x \leq z \leq y$. Comme I est un intervalle contenant x et y , I contient z , de même J contient z , finalement $z \in K$ et donc K est un intervalle de \mathbb{R} .

Supposons I et J non disjoints et soit $K = I \cup J$. K est non vide, soit $x, y \in K$ et soit z un réel tel que $x \leq z \leq y$. Si x et y sont dans I , alors z est dans I et donc dans K , de même si x et y sont dans J . Si x est dans I et y dans J , soit $t \in I \cap J$, si $z \leq t$, alors z est compris entre x et t qui sont éléments de I , donc $z \in I$. Si $t \leq z$, alors z est compris entre t et y qui sont éléments de J , donc z est élément de J . Dans les deux cas on a bien $z \in K$ et donc K est un intervalle de \mathbb{R} . \square

3) La droite numérique achevée

On ajoute à l'ensemble \mathbb{R} deux éléments non réels (par exemple i et $-i$), l'un de ces deux éléments est noté $-\infty$ et l'autre $+\infty$.



Définition 8.3

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est noté $\overline{\mathbb{R}}$ et appelé **droite numérique achevée**.

On prolonge la relation d'ordre de \mathbb{R} à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant pour tout réel x : $-\infty < x < +\infty$. L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ devient ainsi un ensemble totalement ordonné, de plus il possède un maximum ($+\infty$) et un minimum ($-\infty$).

Pour tout réel x on pose :

- $(+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty$.
- $(-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty$.
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
- Si $x > 0$: $x(+\infty) = (+\infty)x = +\infty$ et $(-\infty)x = x(-\infty) = -\infty$.
- si $x < 0$: $x(+\infty) = (+\infty)x = -\infty$ et $(-\infty)x = x(-\infty) = +\infty$.
- $(+\infty)(+\infty) = +\infty$, $(-\infty)(-\infty) = +\infty$ et $(-\infty)(+\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$.

Remarque 8.2 – On prendra garde au fait que nous n'avons pas défini de loi de composition interne dans $\overline{\mathbb{R}}$ puisque nous n'avons pas défini $0 \times (\pm\infty)$ ni $(-\infty) + (+\infty)$. Les règles de calculs définies ci-dessus auront leur utilité dans le chapitre sur les limites.



Théorème 8.7

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} , alors A admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Preuve : Soit A une partie non vide de \mathbb{R} . Si A est majorée dans \mathbb{R} alors admet une borne supérieure réelle (propriété fondamentale de \mathbb{R}). Si A n'est pas majorée dans \mathbb{R} , alors dans $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble des majorants est $\{+\infty\}$, donc il y a une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui est $+\infty$ (le plus petit majorant). Le raisonnement est le même pour la borne inférieure. \square

4) Voisinages



Définition 8.4

Soit $x \in \mathbb{R}$, tout intervalle de la forme $]x - \varepsilon; x + \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$ est appelé **voisinage** de x .
 Tout intervalle ouvert de la forme $]a; +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$) est appelé **voisinage** de $+\infty$.
 Tout intervalle ouvert de la forme $] -\infty; a[$ ($a \in \mathbb{R}$) est appelé **voisinage** de $-\infty$.



Théorème 8.8

Soit V_1, V_2 deux voisinages de $x \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $V_1 \cap V_2$ est un voisinage de x . Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, si $a < b$ alors il existe un voisinage V de a et un voisinage V' de b tels que $\forall x \in V$ et $\forall y \in V'$, $x < y$.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. \square



Définition 8.5

Soit $P(x)$ une proposition dépendante de $x \in \mathbb{R}$, et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on dit que la propriété P est **vraie au voisinage de a** lorsqu'il existe au moins un voisinage V de a tel que :

$$\forall x \in V, P(x) \text{ est vraie.}$$

Exemple : Soit $f(x) = x^2 + x - 1$, alors au voisinage de 0 on a $f(x) < 0$, et au voisinage de $+\infty$, $f(x) > 0$. En effet, le trinôme $x^2 + x - 1$ admet deux racines réelles : $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$, posons $\varepsilon = \min(|x_1|, |x_2|)$, si $x \in]0 - \varepsilon; 0 + \varepsilon[$ alors $x \in]x_1; x_2[$ et donc $x^2 + x - 1 < 0$, $V =]0 - \varepsilon; 0 + \varepsilon[$ est donc un voisinage de 0 et sur ce voisinage on a bien $f(x) < 0$. Posons $W =]x_2; +\infty[$, alors W est un voisinage de $+\infty$ et sur ce voisinage on a bien $f(x) > 0$.

III APPROXIMATION D'UN RÉEL

1) Valeur absolue

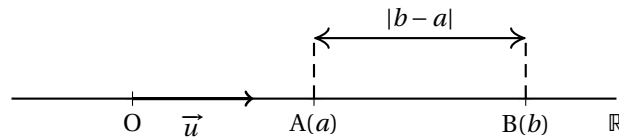
Soit x un réel, les deux nombres x et $-x$ sont comparables puisque l'ordre est total, ce qui donne un sens à la définition suivante :



Définition 8.6

Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle **valeur absolue** de x le réel noté $|x|$ et défini par : $|x| = \max(x, -x)$. On a donc $|x| = x$ lorsque $0 \leq x$, et $|x| = -x$ lorsque $x \leq 0$.

L'ensemble \mathbb{R} peut être assimilé à une droite graduée (i.e. munie d'un repère (O, \vec{u})), les réels sont alors les abscisses des points de cette droite. Si $A(a)$ et $B(b)$ sont deux points de cette droite, alors le réel positif $|b - a|$ représente la **distance** de A à B , en particulier $|x|$ représente la distance de l'origine au point d'abscisse x .

**Théorème 8.9**

Soient x, y des réels :

- $|x| \in \mathbb{R}^+$, $|x| = |-x|$, $x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$.
- $|x| = 0 \iff x = 0$.
- $|xy| = |x||y|$ et si $x \neq 0$ alors $|\frac{1}{x}| = \frac{1}{|x|}$. On en déduit que $|\frac{1}{x}| = \frac{1}{|x|}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x^n| = |x|^n$.
- $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$ (**inégalité triangulaire**).

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

**À retenir**

Soient a, b, x trois réels avec b positif :

- $|a| \leq b \iff a \leq b$ et $-a \leq b \iff -b \leq a \leq b$.
- $|a| \geq b \iff a \geq b$ ou $-a \geq b$.
- $|a - x| \leq b \iff -b \leq a - x \leq b \iff a - b \leq x \leq a + b$.
- $|a - x| \geq b \iff x \geq a + b$ ou $x \leq a - b$.

Ces inégalités sont importantes, et peuvent se retrouver en raisonnant en termes de distance.

**Définition 8.7**

Soit a un réel et $\epsilon > 0$, on appelle intervalle **ouvert** de **centre** a et de **rayon** ϵ , l'intervalle $]a - \epsilon; a + \epsilon[$. C'est l'ensemble des réels x tels que $|x - a| < \epsilon$. On définit de la même façon l'intervalle fermé de centre a et de rayon ϵ .

On rappelle qu'un intervalle ouvert est un intervalle de la forme : $]a; b[$ ou $]a; +\infty[$ ou $]-\infty; b[$. L'ensemble vide et \mathbb{R} sont des intervalles ouverts.

**Théorème 8.10**

Soit I un intervalle ouvert non vide, pour tout élément a de I il existe au moins un voisinage de a inclus dans I : $\forall a \in I, \exists \epsilon > 0,]a - \epsilon; a + \epsilon[\subset I$.

Preuve : Il suffit de passer en revue les différents cas pour I . Par exemple, si $I =]\alpha; \beta[$ avec $\alpha < \beta$ (sinon I est vide), on peut prendre $\epsilon = \min(a - \alpha, \beta - a)$. On remarquera que l'on peut remplacer intervalle ouvert de centre a par intervalle fermé de centre a . □

2) Partie entière**Théorème 8.11**

L'ensemble \mathbb{R} est **archimédien**, c'est à dire : $\forall x, y \in \mathbb{R}^{*+}, \exists n \in \mathbb{N}, x \leq ny$.

Preuve : Par l'absurde, supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, x > ny$. Soit $A = \{ny / n \in \mathbb{N}\}$, A est non vide (contient y) et majoré par x , donc A admet une borne supérieure. Soit $b = \sup(A)$, on a $b - y < b$ donc il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $b - y < n_0 y$, d'où $b < (n_0 + 1)y$ ce qui est absurde car $(n_0 + 1)y \in A$. □

**Théorème 8.12 (et définition)**

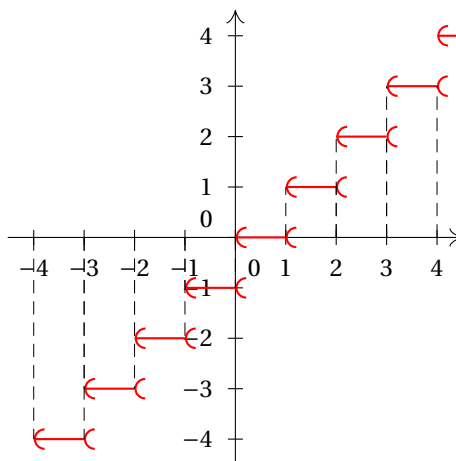
Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un **unique** entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$, celui-ci est appelé **partie entière** de x , noté $\lfloor x \rfloor$ (ou $E(x)$).

Preuve : Montrons l'existence : si $x = 0$ il suffit de prendre $n = 0$. Supposons x non nul et soit $A = \{n \in \mathbb{Z} / x < n + 1\}$, on vérifie que A est non vide (si $x < 0$ alors $0 \in A$ et si $x > 0$ on utilise que \mathbb{R} est archimédien), de plus A est minoré par $x - 1$, cet ensemble admet donc une borne inférieure c . On a $c < c + \frac{1}{2}$ donc le réel $c + \frac{1}{2}$ ne minore pas A donc il existe un entier $n_0 \in A$ tel que $c \leq n_0 < c + \frac{1}{2}$, si $c < n_0$, alors n_0 ne minore pas A , donc il existe $n_1 \in A$ tel que $c \leq n_1 < n_0 < c + \frac{1}{2}$ ce qui est absurde car n_0 et n_1 sont deux entiers distincts dans un intervalle de longueur $\frac{1}{2}$. On en déduit que $c = n_0 \in A$ d'où $n_0 = \min(A)$, mais alors $n_0 - 1 \notin A$, c'est à dire $x \geq n_0 - 1 + 1$, par conséquent on a $n_0 \leq x < n_0 + 1$.

Montrons l'unicité : soient $n, n' \in \mathbb{Z}$ tels que $n \leq x < n + 1$ et $n' \leq x < n' + 1$, alors $|n - n'| = |(x - n) - (x - n')| < 1$ car $x - n$ et $x - n'$ sont dans l'intervalle $[0; 1[$, comme n et n' sont entiers, on en déduit que $|n - n'| = 0$ i.e. $n = n'$. \square

Propriétés

- a) La fonction partie entière est une fonction croissante sur \mathbb{R} et elle est constante sur tout intervalle de la forme $[n; n + 1[$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$.



- b) La fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, elle est continue à droite mais pas à gauche en n .
- c) Pour tout réel x et tout entier n , on a $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
- d) La fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est une fonction 1-périodique.
- e) La partie entière de x est entièrement caractérisée par :
$$\begin{cases} \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \end{cases}$$



Théorème 8.13

Tout intervalle de la forme $]a; b[$ où $a < b$ contient au moins un rationnel, on dit que \mathbb{Q} est **dense** dans \mathbb{R} .

Preuve : Il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q(b - a) > 1$ (prendre $q = 1 + \lfloor \frac{1}{b-a} \rfloor$), l'intervalle $]qa; qb[$ a donc une longueur supérieure à 1, il contient donc au moins un entier p (prendre $p = qb - 1$ si qb est entier, prendre $p = \lfloor qb \rfloor$ sinon). On a alors $qa < p < qb$ d'où $a < \frac{p}{q} < b$ et $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. \square

Remarque 8.3 – Ce théorème traduit que aussi près que l'on veut de n'importe quel réel, on peut trouver des rationnels. De plus la démonstration fournit une méthode de construction de $\frac{p}{q}$.

Par exemple, avec $x = \sqrt{2}$ et $\varepsilon = 10^{-3}$, on peut prendre $q = 1000$ et $p = \lfloor 1000\sqrt{2} \rfloor = 1414$ (car $1414^2 \leq 2 \cdot 10^6 < 1415^2$), d'où $\frac{p}{q} = 1,414$ et $|\sqrt{2} - 1,414| < 10^{-3}$.



Théorème 8.14

Tout intervalle $]a; b[$ où $a < b$ contient au moins un irrationnel, donc l'ensemble des irrationnels, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, est dense dans \mathbb{R} .

Preuve : D'après la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , il existe un rationnel $r \in]a - \sqrt{2}; b - \sqrt{2}[$, ce qui donne $r + \sqrt{2} \in]a; b[$, et on montre par l'absurde que $r + \sqrt{2}$ est irrationnel. \square



Définition 8.8 (Généralisation)

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} , on dit que A est dense dans \mathbb{R} lorsque tout intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} contient au moins un élément de A , ce qui équivaut à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, |x - a| < \varepsilon.$$

Remarque 8.4 –

- Ce qui signifie qu'aussi près que l'on veut de tout réel x , on peut trouver des éléments de A . Voici une autre définition équivalente (et très utile) :
- A est dense dans \mathbb{R} ssi pour tout réel x il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x .

3) Approximations décimales**Définition 8.9**

Soient a, x, ε trois réels avec $\varepsilon > 0$, on dit que a est une **valeur approchée** de x à ε près lorsque la distance entre a et x est inférieure ou égale à ε : $|a - x| \leq \varepsilon$. On dit que a est une valeur approchée de x par défaut (respectivement par excès) à ε près lorsque $a \leq x \leq a + \varepsilon$ (respectivement $a - \varepsilon \leq x \leq a$).

Propriétés

- Si a est une valeur approchée de x par défaut et b une valeur approchée de x par excès, alors $\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de x à $\frac{b-a}{2}$ près.
- Si a est une valeur approchée de x par défaut à ε près et b une valeur approchée de x par excès à ε près, alors $\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de x à $\frac{\varepsilon}{2}$ près.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\lfloor x10^n \rfloor \leq x10^n < 1 + \lfloor x10^n \rfloor$, en multipliant par 10^{-n} on obtient :

$$\frac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n} + 10^{-n}.$$

Ce qui signifie que $\frac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n}$ est une valeur approchée de x par défaut à 10^{-n} près, et que $\frac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n} + 10^{-n}$ est une valeur approchée de x par excès à 10^{-n} près. Il faut remarquer que ces deux approximations de x sont des **nombres décimaux** (i.e. un entier sur une puissance de dix).

**Définition 8.10**

On appelle **approximation décimale** de x par défaut à 10^{-n} près, le nombre : $\frac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n}$.

Remarque 8.5 – Posons $r_n = \lfloor 10^n x \rfloor$, alors $10r_n \leq 10^{n+1}x < 10r_n + 10$ et donc $10r_n \leq \lfloor 10^{n+1}x \rfloor \leq 10r_n + 9$, i.e. $r_{n+1} \in [10r_n; 10r_n + 9]$.

Exemples :

- Prenons $x = \sqrt{2}$ et posons $a_n = \frac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n}$
 - $1 \leq x^2 < 2^2$, donc $1 \leq x < 2$ et $a_0 = \lfloor x \rfloor = 1$ (partie entière de x).
 - $(10x)^2 = 200$ et $14^2 = 196 \leq (10x)^2 < 15^2 = 225$, donc $14 \leq 10x < 15$ et $a_1 = \lfloor 10x \rfloor / 10 = 14/10 = 1,4$.
 - $(100x)^2 = 20000$ et $141^2 \leq (100x)^2 < 142^2$, donc $141 \leq 100x < 142$ et $a_2 = \lfloor 100x \rfloor / 100 = 141/100 = 1,41...$ etc

Si on continue le processus, on construit la suite (a_n) des approximations décimales de $\sqrt{2}$ à 10^{-n} près par défaut.

Si on pose pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n}$, alors on a l'inégalité $|x - a_n| \leq 10^{-n}$, ce qui prouve que la suite (a_n) converge vers x . On a donc une suite de rationnels qui converge vers x , ce qui est une autre façon de prouver la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} . On remarquera que la suite $(a_n + 10^{-n})$ (valeurs approchées décimales par excès) converge également vers x .

**Théorème 8.15**

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $a_n = \frac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $d_n = 10^n(a_n - a_{n-1})$, alors d_n est un entier compris entre 0 et 9.

Preuve : $10^n a_n = \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < 1 + \lfloor 10^n x \rfloor$, d'autre part $10^n a_{n-1} = 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor \leq 10^n x < 10 + 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor$, d'où $-10 - \lfloor 10^{n-1} x \rfloor < -10^n x \leq -10^n a_{n-1}$, on en déduit que $d_n - 10 < 0 < d_n + 1$, par conséquent $0 \leq d_n < 10$, or d_n est un entier, donc $d_n \leq 9$. \square

**Définition 8.11**

| Pour $n \geq 1$, l'entier $d_n = 10^n(a_n - a_{n-1}) = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor$ est appelé n^{e} **décimale** de x .

Remarquons que $d_n 10^{-n} = a_n - a_{n-1}$, ce qui entraîne que $a_0, d_1 d_2 \dots d_n = a_0 + \sum_{k=1}^n d_k 10^{-k} = a_n$, or la suite (a_n) converge vers x , on écrit alors :

$$x = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k 10^{-k} = a_0, d_1 d_2 \dots \text{ (développement décimal infini de } x \text{)}$$

IV SOLUTION DES EXERCICES