Chapitre 26

Variables aléatoires sur un univers fini

Sommaire

Souvent, lors d'une expérience aléatoire, on ne s'intéresse pas vraiment à l'ensemble des résultats possibles, mais un aspect particulier du résultat, par exemple : la somme obtenue lors d'un lancer de deux dés, le temps d'attente du premier pile dans un lancer de pièce etc.

I NOTION DE VARIABLE ALÉATOIRE

1) Définition

Définition 26.1

*Soit Ω un univers fini. Toute application $X: \Omega \to E$ est appelée **variable aléatoire**, lorsque $E = \mathbb{R}$, on dit que X est une **variable aléatoire réelle** (notée VAR). Lorsque X est constante, on parle de VA constante ou de variable aléatoire **certaine**.*

Remarque 26.1 –

- *Notons qu'une variable aléatoire n'est une pas une variable en réalité, mais une application, et n'a rien d'aléatoire !*
- *L'ensemble des images $X(\Omega)$ est un ensemble fini qu'on note parfois $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.*

☞**Exemples** :

- Expérience : on lance deux dés, on note X la somme des chiffres obtenus.
  Univers : $\Omega = [\![1;6]\!]$, $X(\Omega) = [\![2;12]\!]$.

- Expérience : on lance n fois une pièce, on note X le numéro du lancer où apparaît un pîle la première fois.
  Univers : $\Omega = \{P,F\}^n$, $X(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$.

Définition 26.2 (variable indicatrice d'un événement)

Soit A *un événement, l'application* $\mathbb{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$ *définie par* $\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ *est la* ***variable indicatrice de*** A.

Remarque 26.2 –

- *L'ensemble des VAR sur* Ω *est* $\mathscr{F}(\Omega,\mathbb{R})$ *qui a une structure de* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et d'anneau pour les lois usuelles.*
- *Si* $X : \Omega \to E$ *est une VA et* $u : E \to F$ *est une application, alors* $u \circ X$ *est une VA sur* Ω*, elle est généralement notée* $u(X)$.

Événements liés à une VA

- Si $X : \Omega \to E$ est une VA, si A est une partie de E alors $X^{-1}(A)$ est un événement, on le note généralement $(X \in A)$, on a donc $(X \in A) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in A\}$.
- Plus généralement, si $P(x)$ désigne une propriété définie sur E, l'événement $\{\omega \in \Omega \ / \ P(X(\omega))\}$ est noté (X vérifie P).
- Dans le cas particulier d'une VAR, on écrit pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(X \leqslant x) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leqslant x\}$; $(X \geqslant x) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \geqslant x\}$; etc. En particulier $(X \leqslant x) = (X < x) \cup (X = x)$.

2) Loi d'une VA

Théorème 26.1

Si X *est une VA sur* $(\Omega,\mathbb{P})$*, l'application* $\mathbb{P}_X : \mathscr{P}(X(\Omega)) \to [0;1]$ *définie par* $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$ *pour toute partie* A *de* $X(\Omega)$*, est une probabilité sur* $X(\Omega)$*, on l'appelle* ***loi de*** X.

Preuve : On a $\mathbb{P}_X(X(\Omega)) = \mathbb{P}(X \in X(\Omega)) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. Soient A et B deux parties disjointes de $X(\Omega)$ alors $X^{-1}(A)$ et $X^{-1}(B)$ sont deux événements incompatibles de Ω, donc $\mathbb{P}_X(A \cup B) = \mathbb{P}(X^{-1}(A \cup B)) = \mathbb{P}(X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) + \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}_X(A) + \mathbb{P}_X(B)$. □

Remarque 26.3 – *Si* A *est une partie de* $X(\Omega)$ *alors* $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}_X(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}_X(\{x\}) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$.

À retenir

Déterminer la loi de X, c'est déterminer $X(\Omega)$ et pour tout $x \in X(\Omega)$, la probabilité $\mathbb{P}(X = x)$. On remarquera que si X est une VA sur l'univers fini Ω, alors la famille d'événements $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

Il est clair que ces événements sont incompatibles deux à deux et que :

$$\sum_{x \in (\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{x \in X(\Omega)} (X = x)\Big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

Remarque 26.4 – *Parfois on ne connaît pas exactement* $X(\Omega)$ *mais un ensemble* E *contenant* $X(\Omega)$*, dans ce cas, pour* $x \notin X(\Omega)$ *on trouve* $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

★**Exercice 26.1** *On lance un dé deux fois, on note* X *la somme obtenue. Déterminer la loi de* X.

★**Exercice 26.2** *Soit* X *un VAR à valeurs entières, montrer que* $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k-1) = \mathbb{P}(X \geqslant k)) - \mathbb{P}(X \geqslant k+1)$.

3) Image d'une VA par une fonction

Théorème 26.2
Soit X une VA sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et u une fonction définie sur $X(\Omega)$, notons $Y = u \circ X$ et $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors :

$$\forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in u^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x)$$

Preuve : En effet, $(Y = y) = \{\omega \in \Omega \ / \ u \circ X(\omega) = y\} = (X \in u^{-1}(\{y\}))$. □

★**Exercice 26.3** *On lance un dé successivement deux fois, on note X le premier résultat moins le deuxième, déterminer la loi de X, de $|X|$ et de X^2.*

Attention !
Comme on le voit dans l'exemple ci-dessus, deux VA peuvent avoir la même loi sans être égales pour autant !

Remarque 26.5 – *Si X et Y sont deux VA sur $(\Omega, \mathbb{P})$ alors on peut définir les lois de $X+Y$ et de XY :*

$$\mathbb{P}(X+Y=z) = \sum_{(x,y)\in I_z} \mathbb{P}((X=x)\cap(Y=y)) \text{ où } I_z = \{(x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega) \ / \ x+y=z\}$$

$$\mathbb{P}(XY=z) = \sum_{(x,y)\in I_z} \mathbb{P}((X=x)\cap(Y=y)) \text{ où } I_z = \{(x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega) \ / \ xy=z\}$$

II LOIS USUELLES

1) Variables certaines

Définition 26.3
Une VA est dire certaine lorsqu'elle est constante, auquel cas on a $X(\Omega) = \{x_1\}$ et donc $\mathbb{P}(X = x_1) = 1$.

2) Loi uniforme

Définition 26.4
On dit que la VA X suit une loi uniforme sur $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ lorsque $\forall k \in [\![1;n]\!], \mathbb{P}(X = x_k) = \frac{1}{n}$. Ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathscr{U}(X(\Omega))$.

☞**Exemple** : On lance un dé parfait, on note X le chiffre obtenu alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1;6]\!])$.

3) Loi de Bernoulli

Définition 26.5
Soit $p \in [0;1]$ et $q = 1-p$. On dit que la VA X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, lorsque sur $X(\Omega) = \{0,1\}$, $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = q$. Ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

Remarque 26.6 – *Cette loi est utile pour les expériences aléatoires ayant deux issues possibles : succès avec probabilité p ou bien échec avec une probabilité de $1-p$, ce que l'on appelle des épreuves de Bernoulli.*

☞**Exemple** : La variable indicatrice d'un événement A suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(A)$.

Remarque 26.7 – *Si X et Y sont deux VA qui suivent une loi de Bernoulli, alors XY également.*

4) Loi binomiale

Définition 26.6
Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0;1]$ et $q = 1-p$. On dit que la VA X suit une loi binomiale de paramètres n et p, lorsque sur $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$, et $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

On vérifie qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité sur $[\![0;n]\!]$.

À retenir

La loi binomiale apparaît quand on considère le nombre X de succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli **mutuellement indépendantes** et dans lesquelles la probabilité du succès est $p \in [0;1]$.

En effet, on a $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et l'événement $(X = k)$ est l'ensemble des n-uplets de 1 ou 0 contenant k fois le nombre 1, il y en a $\binom{n}{k}$, la probabilité de chacun d'eux est $p^k(1-p)^{n-k}$ car les épreuves sont mutuellement indépendantes, d'où $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

☞**Exemples** :

- On effectue n tirages successifs avec remise dans une urne contenant des boules blanches et noires dans des proportions de p et $q = 1-p$. On note X le nombre de boules blanches obtenues, alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.
- Une pièce donne face avec une probabilité p et pile avec une probabilité $q = 1-p$. On effectue n lancers dans les mêmes conditions à chaque fois, on note X le nombre de faces obtenus, alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

III ESPÉRANCE ET VARIANCE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

1) Espérance

Définition 26.7

L'espérance d'une variable aléatoire X est le réel noté $\mathbb{E}(X)$ et défini par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x).$$

Lorsque son espérance est nulle, on dit que la variable aléatoire X est ***centrée****.*

Remarque 26.8 – *Il s'agit de la moyenne pondérée des valeurs prises par X, car la somme des probabilités vaut* 1.

☞**Exemples** :

- On lance un dé équilibré, X est le numéro de la face supérieure, $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} \frac{i}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$.
- Si A est un événement, l'espérance de l'indicatrice de A est $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.
- L'espérance d'une variable certaine est la constante.

Théorème 26.3

Si X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$ alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$.

Preuve : Soit $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_p\}$, soit $A_k = X^{-1}(\{x_k\})$, alors $(A_1, \dots, A_p)$ est un système complet d'événements et $\mathbb{P}(A_k) = \sum_{\omega \in A_k} \mathbb{P}(\{\omega\})$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) &= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{\omega \in A_k} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})\right)\\
&= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{\omega \in A_k} x_k\mathbb{P}(\{\omega\})\right)\\
&= \sum_{k=1}^{p} x_k\left(\sum_{\omega \in A_k} \mathbb{P}(\{\omega\})\right)\\
&= \sum_{k=1}^{p} x_k\mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{p} x_k\mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{E}(X).
\end{aligned}$$

□

Théorème 26.4 (linéarité de l'espérance)
Si X et Y sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$ alors pour tout réel λ :
$$\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Preuve : En utilisant le résultat du théorème précédent, on a :
$$\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \sum_{\omega \in \Omega} [\lambda X(\omega) + Y(\omega)]\mathbb{P}(\{\omega\}) = \lambda \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$
□

À retenir
Si X est une variable aléatoire alors $X - \mathbb{E}(X)$ est une variable aléatoire **centrée**. C'est la variable aléatoire centrée associée à X.

★**Exercice 26.4** *Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, on les tire successivement et sans remise, on dit qu'il y a rencontre au tirage i lorsque la boule tirée est la boule numéro i. Déterminer le nombre moyen de rencontres.*

Théorème 26.5 (positivité de l'espérance)
Si X est une variable aléatoire positive ou nulle sur $(\Omega, \mathbb{P})$ alors :
- $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$ *(positivité).*
- $\mathbb{E}(X) = 0 \iff \mathbb{P}(X = 0) = 1$, *on dit que la variable X est **presque sûrement nulle**.*

Preuve : Le premier point découle de la définition d'espérance $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$, car chaque valeur x_k de X est positive ou nulle et les probabilités aussi. Si cette somme est nulle, alors tous les termes doivent être nuls, X prend donc nécessairement la valeur 0 (sinon $\mathbb{E}(X) > 0$ car les probabilités ne peuvent pas être toutes nulles) et pour $x_k \neq 0$ on a forcément $\mathbb{P}(X = x_k) = 0$), ce qui entraîne que $\mathbb{P}(X = 0) = 1$ puisque la somme des probabilités doit faire 1. La réciproque est immédiate. □

Théorème 26.6 (croissance de l'espérance)
Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$ telles que $X \leqslant Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Preuve : La variable $Z = Y - X$ est positive, donc $\mathbb{E}(Z) \geqslant 0$, la linéarité permet alors d'écrire $\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) \geqslant 0$ ce qui donne le résultat. □

Théorème 26.7 (inégalité de Markov)
Pour tout variable aléatoire positive X on a :
$$\forall a > 0, \mathbb{P}(\{X \geqslant a\}) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Preuve : Notons $A = \{x \in X(\Omega) \ / \ x \geqslant a\}$, $A \subset X(\Omega)$ donc :
$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) \geqslant \sum_{x \in A} x\mathbb{P}(X = x) \geqslant a \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x) = a\mathbb{P}(A)$, d'où $\mathbb{P}(A) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$. □

Remarque 26.9 – *On peut aussi montrer l'inégalité de Markov en remarquant que $\mathbb{1}_{X \geqslant a} \leqslant \frac{X}{a}$ et utiliser la croissance de l'espérance.*

Théorème 26.8 (de transfert)
Si X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et si u est une application de $X(\Omega)$ vers $\mathbb{R}$, alors :
$$\mathbb{E}(u(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} u(x)\mathbb{P}(X = x).$$

Preuve : Posons $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $A_k = X^{-1}(\{x_k\})$, alors $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements de Ω, et on a :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(u(X)) &= \sum_{\omega \in \Omega} u(X(\omega))\mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\omega \in A_k} u(X(\omega))\mathbb{P}(\{\omega\}) \right) = \sum_{k=1}^{n} u(x_k) \left(\sum_{\omega \in A_k} \mathbb{P}(\{\omega\}) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} u(x_k)\mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{n} u(x_k)\mathbb{P}(X = x_k) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} u(x)\mathbb{P}(X = x)
\end{aligned}$$
□

Remarque 26.10 – *La formule de droite proposée dans le théorème n'est autre que l'espérance de la variable aléatoire u sur l'espace probabilisé $(X(\Omega), \mathbb{P}_X)$. Cette formule fait intervenir la loi de probabilité de X mais pas celle de $u(X)$, ce qui fait son interêt.*

★**Exercice 26.5** *Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1;n]\!])$, calculer $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(e^X)$.*

2) Variance et écart-type

Définition 26.8 (moments d'une variable aléatoire)

*Soit X un variable aléatoire réelle et $r \in \mathbb{N}$, on appelle **moment d'ordre r de la variable X** l'espérance de la variable aléatoire X^r, c'est à dire le nombre $\mathbb{E}(X^r) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} x^r \mathbb{P}(X = x)$ (théorème de transfert), on le note parfois $m_r(X)$.*

Remarque 26.11 – *Le moment d'ordre 0 vaut 1, et le moment d'ordre 1 est l'espérance.*

Définition 26.9 (variance, écart-type)

On appelle variance de la variable aléatoire X le réel $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)]^2\right)$, et l'écart-type de X est le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Remarque 26.12 –

- *La définition a bien un sens puisque $X - \mathbb{E}(X)$ est une variable aléatoire. Ces notions permettent de mesurer la dispersion de X autour de sa valeur moyenne.*
- $\mathbb{V}(X) = 0 \iff \mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$, *la variable aléatoire X est presque sûrement constante.*
- *Il résulte du théorème de transfert que $\mathbb{V}(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x)$, mais la formule la plus utilisée est celle du théorème suivant.*

Théorème 26.9 (formule de Kœnig-Huygens)

Si X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$ alors $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

Preuve : En effet :

$(X - \mathbb{E}(X))^2 = X^2 + \mathbb{E}(X)^2 - 2X\mathbb{E}(X)$, l'espérance étant linéaire, on a $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(X)^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

□

★**Exercice 26.6**

1/ *Si $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et $\mathbb{P}(X = k) = ak$. Calculer a, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.*

2/ *Si X est une VAR, déterminer le minimum de la fonction $f : t \mapsto \mathbb{E}([X - t]^2)$ sur $\mathbb{R}$.*

À retenir

Il est parfois judicieux de calculer $\mathbb{E}(X(X-1))$ ou $\mathbb{E}(X(X+1))$ pour en déduire $\mathbb{E}(X^2)$.

Théorème 26.10 (propriétés)

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$ alors :

- $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$ *et* $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.
- ***Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$.*

Preuve :

- Par définition, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2)$ qui est donc un réel positif par positivité de l'espérance.
- On a $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ d'où $[(aX + b) - \mathbb{E}(aX + b)]^2 = a^2[X - \mathbb{E}(X)]^2$ et donc $\mathbb{V}(aX + b) = \mathbb{E}(a^2[X - \mathbb{E}(X)]^2) = a^2\mathbb{V}(X)$. En prenant la racine carrée on obtient $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.
- Soit $Y = [X - \mathbb{E}(X)]^2$, alors $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(Y \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y)}{\varepsilon^2}$ (inégalité de Markov), ce qui donne exactement le résultat.

□

Applications :

- Une variable aléatoire dont l'écart-type vaut 1 est appelée **variable aléatoire réduite**. Si X est une VAR dont la variance est non nulle, alors la variable aléatoire $X^* = \frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire **centrée réduite**, appelée variable centrée réduite associée à X.
- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev apporte réellement un renseignement lorsque $\frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2} \leqslant 1$, mais cette majoration est en général assez grossière et son intérêt est surtout théorique. Elle indique néanmoins que X prend des valeurs proches de sa moyenne avec une grande probabilité. On peut également l'écrire sous la forme : $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|<\varepsilon) \geqslant 1-\frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$.

3) Cas des lois usuelles

Théorème 26.11

- *Si X est une variable certaine de valeur $a \in \mathbb{R}$, alors $\mathbb{E}(X) = a$ et $\mathbb{V}(X) = 0$.*
- *Si X suit la loi uniforme sur $\{x_1, \dots, x_n\}$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$. En particulier si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1;n]\!])$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$.*
- *Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$ alors $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$.*
- *Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.*

Preuve :

- Immédiat.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1;n]\!])$: $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2}$, $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} = \frac{(2n+1)(n+1)}{6}$, d'où $\mathbb{V}(X) = \frac{(2n+1)(n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(X=1) = p$, X^2 suit la même loi que X donc $\mathbb{V}(X) = p - p^2 = p(1-p)$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, il s'agit de calculer $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ (avec $q = 1-p$), cette expression est la dérivée en 1 de la fonction $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^k p^k q^{n-k} = (px+q)^n$, d'où $f'(x) = pn(px+q)^{n-1}$ et donc $f'(1) = np$.

Autre méthode : une pièce donne face avec une probabilité p et pile avec une probabilité $q = 1-p$. On effectue n lancers dans les mêmes conditions à chaque fois, on note X le nombre de faces obtenus, alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Notons X_i la variable aléatoire valant 1 si on a obtenu face au lancer numéro i, 0 sinon, alors $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et $X = X_1 + \dots + X_n$, d'où $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n) = np$.

Pour la variance, on calcule $\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = f''(1)$ avec les notations ci-dessus, or $f''(x) = p^2 n(n-1)(px+q)^{n-2}$ et donc $\mathbb{E}(X(X-1)) = n(n-1)p^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$, d'où $\mathbb{E}(X^2) = n(n-1)p^2 + np = np[np-p+1]$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^n = np[np-p+1] - (np)^2 = np(1-p)$. □

IV COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES

1) Définitions

Définition 26.10

Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$ à valeurs dans E pour X et F pour Y, on appelle couple des variables X et Y, et on note $Z = (X,Y)$, l'application :

$$Z: \begin{array}{ccc} \Omega & \to & E \times F \\ \omega & \mapsto & Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}.$$

Remarque 26.13 – *L'application Z est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$.*

Définition 26.11 (loi conjointe)

Soient $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On appelle ***loi conjointe du couple*** *des variables X et Y, la loi de la variable aléatoire $Z = (X,Y)$, c'est à dire l'application :*

$$\begin{array}{ccc} Z(\Omega) & \to & [0;1] \\ (x,y) & \mapsto & \mathbb{P}([X=x] \cap [Y=y]) \end{array}.$$

Remarque 26.14 – *Déterminer la loi conjointe revient donc à déterminer $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$, puis à calculer les probabilités $p_{ij} = \mathbb{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$ pour $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$. Dans la pratique on présente la loi conjointe sous forme d'un tableau :*

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_p
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1p}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{np}

Définition 26.12 (lois marginales)
Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$, les lois de probabilités de X et de Y sont appelées ***lois marginales*** *du couple.*

À retenir
La loi conjointe permet d'obtenir les lois marginales, car on peut écrire (avec les notations précédentes) :
$$\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \sum_{j=1}^{p} p_{ij}$$
et :
$$\mathbb{P}(Y = x_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$
Notation : on écrit $p_{i\bullet} = \mathbb{P}(X = x_i)$ et $p_{\bullet j} = \mathbb{P}(Y = y_j)$.

★**Exercice 26.7** *On lance 2 dés parfaits, on note X le minimum des deux résultats et Y le maximum. Déterminer la loi conjointe et les lois marginales.*

Attention !
La connaissance des lois marginales ne permet pas en général de retrouver la loi conjointe, comme on peut s'en convaincre sur l'exemple précédent.

Définition 26.13
Soient $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit $y \in Y(\Omega)$, on appelle ***loi conditionnelle de X sachant*** *$(Y = y)$ la loi de X dans l'espace $(\Omega, \mathbb{P}_{(Y=y)})$, c'est à dire l'application :*
$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & \longrightarrow & [0;1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}_{(Y=y)}(X = x) = \frac{\mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y])}{\mathbb{P}(Y=y)} \end{array}.$$
De même, soit $x \in X(\Omega)$, on appelle ***loi conditionnelle de Y sachant*** *$(X = x)$ la loi de Y dans l'espace $(\Omega, \mathbb{P}_{(X=x)})$, c'est à dire l'application :*
$$\begin{array}{rcl} Y(\Omega) & \longrightarrow & [0;1] \\ y & \longmapsto & \mathbb{P}_{(X=x)}(Y = y) = \frac{\mathbb{P}([Y=y]\cap[X=x])}{\mathbb{P}(X=x)} \end{array}.$$

☞**Exemple** : En reprenant l'exercice précédent, la loi de X sachant $(Y = 4)$ est :

x_i	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}_{(Y=4)}(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	0

Plus généralement $\mathbb{P}_{(Y=j)}(X = i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ \frac{1/36}{\frac{2j-1}{36}} = \frac{1}{2j-1} & \text{si } i = j \\ \frac{2/36}{\frac{2j-1}{36}} = \frac{2}{2j-1} & \text{si } i < j \end{cases}$

Il découle de la formule des probabilités totales :

À retenir
Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$, on suppose que pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$, alors :
$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y = y) \times \mathbb{P}_{(Y=y)}(X = x),$$
et :

$$\mathbb{P}(Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)\times\mathbb{P}_{(X=x)}(Y=y),$$

La notion de couple de variables aléatoires se généralise à un n-uplet de variables aléatoires :

Définition 26.14 (généralisation : vecteurs aléatoires)

Soient, $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires sur $(\Omega,\mathbb{P})$ à valeurs dans $E_1,\ldots,E_n$ respectivement, le vecteur aléatoire $Z=(X_1,\ldots,X_n)$ est l'application :

$$\begin{array}{rccl} Z\colon & \Omega & \to & E_1\times\cdots\times E_n \\ & \omega & \mapsto & Z(\omega)=(X_1(\omega),\cdots,X_n(\omega)) \end{array}.$$

La loi conjointe du vecteur Z est la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z=(X_1,\ldots,X_n)$, c'est à dire l'application :

$$\begin{array}{rcl} Z(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & \mathbb{P}([X_1=x_1]\cap\cdots\cap[X_n=x_n]) \end{array}.$$

et les lois des variables aléatoires $X_1,\ldots,X_n$ sont appelées lois marginales du vecteur Z.

2) Indépendance de variables aléatoires

Définition 26.15

Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega,\mathbb{P})$, on dit que X et Y sont indépendantes lorsque :

$$\forall A\subset X(\Omega),\ \forall B\subset Y(\Omega),\ \mathbb{P}([X\in A]\cap[Y\in B])=\mathbb{P}(X\in A)\times\mathbb{P}(Y\in B),$$

c'est à dire les événements $(X\in A)$ et $(Y\in B)$ sont indépendants.

Théorème 26.12

Deux variables aléatoires X et Y sur $(\Omega,\mathbb{P})$ sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega),\ \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y])=\mathbb{P}(X=x)\times\mathbb{P}(Y=y).$$

Preuve : Le sens $\implies$ est évident. Montrons la réciproque : soient A une partie de $X(\Omega)$ et B une partie de $Y(\Omega)$, on a alors $[X\in A]\cap[Y\in B]=\bigcup_{(x,y)\in A\times B}[X=x]\cap[Y=y]$ et ces événements sont incompatibles deux à deux, d'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X\in A]\cap[Y\in B]) &= \sum_{(x,y)\in A\times B}\mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y]) \\
&= \sum_{(x,y)\in A\times B}\mathbb{P}(X=x)\times\mathbb{P}(Y=y)\ \text{(d'après l'hypothèse)} \\
&= \sum_{x\in A}\sum_{y\in B}\mathbb{P}(X=x)\times\mathbb{P}(Y=y) \\
&= \left(\sum_{x\in A}\mathbb{P}(X=x)\right)\times\left(\sum_{y\in B}\mathbb{P}(Y=y)\right) \\
&= \mathbb{P}(X\in A)\times\mathbb{P}(Y\in B)
\end{aligned}$$

donc les deux variables aléatoires sont indépendantes. □

Remarque 26.15 – *Lorsque X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega,\mathbb{P})$, la connaissance des deux lois marginales permet de reconstituer la loi conjointe car $p_{ij}=p_{i\bullet}\times p_{\bullet j}$, et les lois conditionnelles sont égales aux lois marginales.*

☞**Exemple** : Dans l'exercice 7, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

Théorème 26.13 (indépendance de fonctions de variables aléatoires)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega,\mathbb{P})$, si f est une application sur $X(\Omega)$ et g une application sur $Y(\Omega)$, alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Preuve : Soient $a\in\mathrm{Im}(f)$ et $b\in\mathrm{Im}(g)$, soit $A=f^{-1}(\{a\})$ et $B=g^{-1}(\{b\})$, alors :

$$\mathbb{P}([f(X)=a]\cap[g(Y)=b])=\mathbb{P}([X\in A]\cap[Y\in B])=\mathbb{P}(X\in A)\times\mathbb{P}(Y\in B)=\mathbb{P}(f(X)=a)\times\mathbb{P}(g(Y)=b)$$

Les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont donc indépendantes. □

Voici un autre résultat utile :

À retenir

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega,\mathbb{P})$, et $f : X(\Omega)\times Y(\Omega)\to E$, alors :
$$\mathbb{P}(f(X,Y)=z)=\sum_{(x,y)\in f^{-1}(\{z\})}\mathbb{P}(X=x)\times\mathbb{P}(Y=y).$$

En effet, il suffit de remarquer que l'événement $(f(X,Y)=z)$ s'écrit $\bigcup_{(x,y)\in f^{-1}(\{z\})}[X=x]\cap[Y=y]$.

★**Exercice 26.8** *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes sur* $(\Omega,\mathbb{P})$ *suivant la même loi uniforme sur* $[\![1;n]\!]$. *Déterminer les lois de* $X+Y$ *et de* $X-Y$.

Définition 26.16 (généralisation : indépendance de n variables aléatoires)

Soit $(X_1,\dots,X_n)$ *un vecteur aléatoire sur* $(\Omega,\mathbb{P})$ *à valeurs dans* $E_1\times\cdots\times E_n$. *On dit que ces n variables aléatoires sont :*

- ***deux à deux indépendantes*** *: lorsque pour tout couple* $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$, X_i *et* X_j *sont indépendantes;*
- ***mutuellement indépendantes*** *: lorsque pour toute partie* A_1 *de* E_1, A_2 *de* $E_2,\dots,A_n$ *de* E_n, *les événements* $(X_1\in A_1),\dots,(X_n\in A_n)$ *sont mutuellement indépendants.*

Remarque 26.16 – *Comme pour les événements, l'indépendance mutuelle des variables aléatoires entraîne l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fausse.*

En généralisant la preuve du théorème 26.12

Théorème 26.14

Les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ *sur* $(\Omega,\mathbb{P})$ *sont mutuellement indépendantes si et seulement si : pour tout* $(x_1,\dots,x_n)\in X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)$, *les événements* $(X_1=x_1),\dots,(X_n=x_n)$ *sont mutuellement indépendantes.*

De même, on montrerait que $f_1(X_1),\dots,f_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes, avec $f_i : X_i(\Omega)\to F_i$.

Théorème 26.15

On considère des variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ *sur* $(\Omega,\mathbb{P})$ *mutuellement indépendantes.*

- *Soit* $1<p<n$, *les variables aléatoires* $Y=(X_1,\dots,Y_p)$ *et* $Z=(X_{p+1},\dots,X_n)$ *sont indépendantes.*
- *Si f est une fonction à p variables et g à $n-p$ variables, alors* $f(X_1,\dots,X_p)$ *et* $g(X_{p+1},\dots,X_n)$ *sont indépendantes.*

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

Remarque 26.17 – *Le résultat ci-dessus se généralise au cas où on partage l'ensemble des n variables aléatoires en plus de deux parties, on remplace alors « indépendantes » par « mutuellement indépendantes » dans les conclusions. Par exemple, si* X, Y, Z *et* T *sont mutuellement indépendantes, alors* XY *et* ZT *sont indépendantes, les variables aléatoires* X, $Y+Z$ *et* T^2 *sont mutuellement indépendantes etc.*

3) Applications de l'indépendance

Théorème 26.16

Si $X_1,\dots,X_n$ *n variables aléatoires sur* $(\Omega,\mathbb{P})$ *suivent toutes une même loi de Bernoulli de paramètre* $p\in[0;1]$, *et sont mutuellement indépendantes, alors la somme* $X_1+\cdots+X_n$ *suit une loi binomiale de paramètre n et p.*

Preuve : On a $X_i\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$, soit $X=X_1+\cdots+X_n$, alors $X(\Omega)=[\![0;n]\!]$, l'événement $(X=k)$ se réalise si et seulement si k des variables X_i prennent la valeur 1 et les $n-k$ autres la valeur 0, il y a donc $\binom{n}{k}$ cas possibles incompatibles deux à deux, calculons la probabilité d'un cas : notons $X_{i_1},\dots,X_{i_k}$ celles qui prennent la valeur 1 et $X_{i_{k+1}},\dots,X_{i_n}$ les autres alors du fait de l'indépendance, on a :
$$\mathbb{P}([X_{i_1}=1]\cap\cdots\cap[X_{i_k}=1]\cap[X_{i_{k+1}}=0]\cap\cdots\cap[X_{i_n}=0])=$$
$$\mathbb{P}(X_{i_1}=1)\times\cdots\times\mathbb{P}(X_{i_k}=1)\times\mathbb{P}(X_{i_{k+1}}=0)\times\cdots\times\mathbb{P}(X_{i_n}=0)=p^k(1-p)^{n-k}.$$
par conséquent $\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. □

À retenir

Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, alors on peut écrire $X = X_1 + \cdots + X_n$ où les X_i sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p. On a donc $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n) = p + \cdots + p = np$.

★**Exercice 26.9** *Soit $(X_k)_{k\in[\![1;m]\!]}$ m variables aléatoires sur $(\Omega,\mathbb{P})$ qui suivent toutes une loi binomiale de paramètre (n_k,p) (respectivement) avec $p \in [0;1]$, et sont mutuellement indépendantes, alors :*

$$X_1 + \cdots + X_m \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1 + \cdots + n_m, p).$$

Théorème 26.17 (espérance d'un produit)

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega,\mathbb{P})$, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, mais la réciproque est fausse. Le résultat se généralise au produit de n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Preuve : Soit $Z = (X,Y)$ et $u\colon (x,y) \mapsto xy$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(u(Z)) &= \sum_{(x,y)\in Z(\Omega)} u(x,y)\mathbb{P}(Z=(x,y)) \text{ (théorème de transfert)}\\
&= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X=x)\times\mathbb{P}(Y=y)) \text{ (indépendance)}\\
&= \left(\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)\right)\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y=y)\right)\\
&= \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

une récurrence permet ensuite la généralisation. □

★**Exercice 26.10** *Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $\{-1;0;1\}$ et Y la fonction indicatrice de l'événement $(X=0)$. Montrer que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ mais que X et Y ne sont pas indépendantes.*

Théorème 26.18 (variance et indépendance)

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega,\mathbb{P})$, alors $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$. Le résultat se généralise au cas de n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Preuve : D'après la formule de Kœnig-Huygens, $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{E}([X+Y]^2) - [\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)]^2$ avec la linéarité de l'espérance, on a donc $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{E}(X^2)+\mathbb{E}(Y^2)+2\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)^2-\mathbb{E}(Y)^2-2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)$ car les variables aléatoires étant indépendantes, on a $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Une récurrence permet ensuite la généralisation. □

À retenir

Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, alors on peut écrire $X = X_1 + \cdots + X_n$ où les X_i sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p. On a donc $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n) = p(1-p) + \cdots + p(1-p) = np(1-p)$.

4) Covariance

Définition 26.17

*Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\mathbb{P})$. On appelle **covariance de** X **et** Y le réel défini par :*

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}([X-\mathbb{E}(X)][Y-\mathbb{E}(Y)]).$$

Remarque 26.18 – *C'est l'espérance du produit des variables centrées associées à X et Y. Lorsque $Y = X$ on a $\operatorname{cov}(X,X) = \mathbb{V}(X) \geqslant 0$, on dit que la covariance est positive.*

Théorème 26.19 (propriétés de la covariance)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\mathbb{P})$:

- $\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$;
- $\operatorname{cov}(Y,X) = \operatorname{cov}(X,Y)$, *la covariance est symétrique ;*
- *La covariance est bilinéaire :* $\operatorname{cov}(aX+Y,Z) = a\operatorname{cov}(X,Z) + \operatorname{cov}(Y,Z)$ *(même chose sur la deuxième variable) ;*

• $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)$;
• *Si* X *et* Y *sont indépendantes, alors* $\operatorname{cov}(X,Y)=0$ *mais la réciproque est fausse.*

Preuve :
• On a $[X-\mathbb{E}(X)][Y-\mathbb{E}(Y)] = XY-\mathbb{E}(X)Y-\mathbb{E}(Y)X+\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, on applique ensuite la linéarité de l'espérance ce qui donne la formule ;
• immédiat ;
• On utilise la formule ci-dessus et la linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}([aX+Y]Z)-\mathbb{E}(aX+Y)\mathbb{E}(Z) = a\mathbb{E}(XZ)+\mathbb{E}(YZ)-a\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z)-\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) = a\operatorname{cov}(X,Z)+\operatorname{cov}(Y,Z)$. Par symétrie on a la linéarité sur la deuxième variable.
• D'après un calcul fait plus haut : $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{E}([X+Y]^2)-[\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)]^2$ avec la linéarité de l'espérance, on a donc $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{E}(X^2)+\mathbb{E}(Y^2)+2\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)^2-\mathbb{E}(Y)^2-2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)$.
• On sait que si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ ce qui donne $\operatorname{cov}(X,Y)=0$. □

Remarque 26.19 – *La covariance est une forme bilinéaire symétrique et positive, mais ce n'est pas un produit scalaire car* $\mathbb{V}(X)=0$ *n'entraîne pas* $X=0$, *mais seulement* $\mathbb{P}(X=m)=1$. *On peut cependant établir l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce type d'applications, ce qui ce traduit ici par :*

$$\operatorname{cov}(X,Y)^2 \leqslant \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) \text{ ou encore } |\operatorname{cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$$

★**Exercice 26.11** *On lance deux fois un dé équilibré dans les mêmes conditions, on note* S *la somme obtenue et* D *la différence (premier moins deuxième). Calculer* $\operatorname{cov}(S,D)$. *Les variables aléatoires* S *et* S *sont-elles indépendantes ?*

Théorème 26.20
Si $X_1,\dots,X_n$ *sont des variables aléatoires sur* $(\Omega,\mathbb{P})$ *alors :*

$$\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n)=\sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\operatorname{cov}(X_i,Y_j).$$

Si les variables aléatoires X_i *sont* ***deux à deux indépendantes****, alors :*

$$\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n)=\sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i).$$

Preuve : La deuxième formule découle de la première, et la première se montre par récurrence sur n. □

Définition 26.18
Lorsque $\operatorname{cov}(X,Y)=0$ *on sait que les variables aléatoires ne sont pas forcément indépendantes, on dit qu'elles sont* ***non corrélées****.*
Plus généralement, lorsque $\mathbb{V}(X)$ *et* $\mathbb{V}(Y)$ *sont non nuls, on sait que* $\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\in[-1;1]$, *ce nombre est appelé* ***coefficient de corrélation*** *entre* X *et* Y.

★**Exercice 26.12** *On suppose que* $\mathbb{V}(X)$ *et* $\mathbb{V}(Y)$ *sont non nuls et le coefficient de corrélation vaut* ±1. *Montrer qu'il existe deux réels a et b tel que* $\mathbb{P}(Y=aX+b)=1$, *c'est à dire il est presque sûr que* $Y=aX+b$.

★**Exercice 26.13** *Montrer que deux variables de Bernoulli sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées.*

V SOLUTION DES EXERCICES

Solution 26.1 $\Omega=[\![1;6]\!]^2$, $X(\Omega)=[\![2;12]\!]$ *et* $\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(\{(i,j)\in[\![1;6]\!]^2 \ / \ i+j=k\})$. *On doit avoir* $j=k-i\in[\![1;6]\!]$, *d'où* $k-6\leqslant i\leqslant k-1$ *avec* $i\in[\![1;6]\!]$, *d'où la discussion : si* $k\leqslant 6$, *alors* $\mathbb{P}(X=k)=\sum_{i=1}^{k-1}\mathbb{P}(\{(i,k-i)\})=\frac{k-1}{36}$, *et si* $7\leqslant k\leqslant 12$ *alors* $\mathbb{P}(X=k)=\sum_{i=k-6}^{6}\mathbb{P}(\{(i,k-i)\})=\frac{13-k}{36}$.

Solution 26.2 *Il suffit d'écrire que* $(X\leqslant k)=(X=k)\cup(X\leqslant k-1)$ *et que* $(X\geqslant k)=(X=k)\cup(X\geqslant k+1)$ *(réunion d'événements incompatibles).*

Solution 26.3 $X(\Omega)=[\![-5;5]\!]$, *si* $k=i-j$ *alors* $i=k+j\in[\![1;6]\!]$ *d'où* $1-k\leqslant j\leqslant 6-k$, *d'où la discussion, si* $k\leqslant 0$, *alors* $\mathbb{P}(X=k)=\sum_{j=1-k}^{6}\mathbb{P}(\{(k+j,j)\})=\frac{6+k}{36}$, *et si* $k\geqslant 1$, $\mathbb{P}(X=k)=\sum_{j=1}^{6-k}\mathbb{P}(\{(k+j,j)\})=\frac{6-k}{36}$.
$\mathbb{P}(|X|=k)=\mathbb{P}((X=k)\cup(X=-k))=\frac{1}{6}$ *si* $k=0$ *et* $\frac{6-k}{18}$ *si* $k\in[\![1;5]\!]$.
$\mathbb{P}(X^2=k^2)=\mathbb{P}((X=k)\cup(X=-k))=\frac{1}{6}$ *et* $\frac{6-k}{12}$ *si* $k\in[\![1;5]\!]$.

Solution 26.4 *Soit* X *le nombre de rencontres, on demande* $\mathbb{E}(X)$, *notons* X_i *la variable aléatoire qui vaut* 1 *si le* i^e *tirage est une rencontre,* 0 *sinon (variable de Bernoulli), on a alors* $X = X_1 + \cdots + X_n$ *et donc* $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = 1)$. *On peut modéliser l'expérience par le choix équiprobable d'une permutation des n boules, on alors* $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ *(autrement dit* $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(\frac{1}{n})$*) et donc* $\mathbb{E}(X) = 1$.

Solution 26.5 $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{1}{n} = \frac{(2n+1)(n+1)}{6}$, *et* $\mathbb{E}(e^X) = \sum_{k=1}^{n} e^k \frac{1}{n} = \frac{e(e^n-1)}{n(e-1)}$.

Solution 26.6

1/ *On doit avoir* $\sum_{k=1}^{n} ak = 1$ *d'où* $a = \frac{2}{n(n+1)}$. $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} ak^2 = \frac{2}{n(n+1)} \frac{(2n+1)n(n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}$. $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} ak^3 = \frac{n(n+1)}{2}$, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(2n+1)^2}{9} = \frac{(n-1)(n+2)}{18}$.

2/ $f(t) = \mathbb{E}(X^2) - 2t\mathbb{E}(X) + t^2 = (t - \mathbb{E}(X))^2 + \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = (t - \mathbb{E}(X))^2 + \mathbb{V}(X)$, *cette quantité est minimale lorsque* $t = \mathbb{E}(X)$ *et le minimum est* $\mathbb{V}(X)$.

Solution 26.7 *On a* $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1;6]\!]$, *pour* $(i,j) \in [\![1;6]\!]$, *on a* $p_{ij} = 0$ *si* $i > j$, $p_{ii} = \frac{1}{36}$ *et* $p_{ij} = \frac{1}{18}$ *si* $i < j$, *d'où la table :*

X \ Y	1	2	3	4	5	6	$p_{i\bullet}$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{11}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{9}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1 \ 1

Solution 26.8 *Soit* $Z = X + Y$, *alors* $Z(\Omega) = [\![2;2n]\!]$ *et :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{i=\max(k-n,1)}^{\min(k-1,n)} \mathbb{P}(X = i) \times \mathbb{P}(Y = k - i) \\
&= \frac{\min(k-1,n) - \max(k-n,1) + 1}{n^2} = \frac{n - |n+1-k|}{n^2} \\
&= \begin{cases} \frac{k-1}{n^2} & \textit{si } k \leqslant n+1 \\ \frac{2n+1-k}{n^2} & \textit{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

De même, en posant $H = X - Y$, *on montre que* $H(\Omega) = [\![-(n-1);(n-1)]\!]$ *et* $\mathbb{P}(H = k) = \frac{n-|k|}{n^2}$.

Solution 26.9 *Par récurrence sur m, il suffit de montrer le théorème pour* $m = 2$ *: soit* $Z = X_1 + X_2$, *alors* $Z(\Omega) = [\![0;n_1+n_2]\!]$ *et :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = k - i]) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X_1 = i) \times \mathbb{P}(X_2 = k - i) \textit{ (indépendance)} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1-i} \binom{n_2}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n_2-k+i} \textit{ (en convenant que } \binom{n}{k} = 0 \textit{ si } k > n \textit{ ou } k < 0) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1-i} \binom{n_2}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n_2-k+i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{k-i} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \\
&= p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{k-i} \\
&= \binom{n_1+n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \textit{ (formule de Vandermonde)}
\end{aligned}$$

donc $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. *Le passage du rang* n *au rang* $n+1$ *se ramène au rang* 2 *en posant* $X'_2 = X_2 + \cdots + X_{n+1}$.

Solution 26.10 *Ces variables ne sont pas indépendantes, car* $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}([X = 1] \cap [X = 0]) = 0$ *alors que* $\mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{9}$. *D'autre part* $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3}$, *et* $\mathbb{E}(XY) = 0$ *car* XY *est une variable certaine égale à* 0, *on a donc* $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Solution 26.11 *Soit* X *le premier résultat et* Y *le second, alors* $S = X + Y$ *et* $D = X - Y$, *on calcule donc* $\operatorname{cov}(X + Y, X - Y) = \mathbb{V}(X) - \operatorname{cov}(X, Y) + \operatorname{cov}(Y, X) - \mathbb{V}(Y) = 0$ *car* X *et* Y *suivent la même loi uniforme sur* $[\![1\,;6]\!]$. *Les deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes car par exemple* $\mathbb{P}([S = 3] \cap [D = 0]) = 0$ *alors que* $\mathbb{P}(S = 3)$ *et* $\mathbb{P}(D = 0)$ *ne sont pas nulles.*

Solution 26.12 *Reprendre la démonstration du cas d'égalité de Cauchy-Schwarz vue dans les espaces euclidiens en partant de* $\mathbb{V}(\lambda X + Y) \geqslant 0$ *pour tout réel* λ.

Solution 26.13 *Il y a déjà un sens connu : indépendantes implique non corrélées. Supposons* X *et* Y *non corrélées et suivant une loi de Bernoulli de paramètres respectifs* p_1 *et* p_2, *alors* XY *suit une loi de Bernoulli, de paramètre* $p = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = p_1 p_2$, *par conséquent* $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 1)$, *les événements* $(X = 1)$ *et* $(Y = 1)$ *sont indépendants, donc* $(X = 0)$ *et* $(Y = 1)$ *aussi etc. Les deux variables aléatoires sont indépendantes.*