Chapitre 18

Espaces vectoriels

Sommaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

I GÉNÉRALITÉS

1) Définition

Définition 18.1

Soit E *un ensemble non vide, on dit que* E *est un* $\mathbb{K}$ *- espace vectoriel (ou* $\mathbb{K}$*-e.v.) lorsque* E *possède une addition et un produit par les scalaires (loi de composition externe, notée « . », c'est une application :* $\begin{array}{ccc}\mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x\end{array}$*), avec les propriétés suivantes :*

– $(E,+)$ *est un groupe abélien (l'élément neutre est noté* 0_E *ou* $\overrightarrow{0_E}$ *et appelé* **vecteur nul** *de* E*).*
– *La loi . (ou produit par les scalaires) doit vérifier :* $\forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{K}, \forall\ x,y\in E$ *:*
  - $1.x = x$
  - $\lambda.(x+y) = \lambda.x+\lambda.y$
  - $(\lambda+\mu).x = \lambda.x+\mu.x$
  - $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que $(\mathrm{E},+,.)$ *est un* $\mathbb{K}$ *- e.v., les éléments de* $\mathbb{K}$ *sont appelés* ***les scalaires*** *et les éléments de* E *sont appelés* ***vecteurs*** *(parfois notés avec une flèche).*

2) Exemples de référence

☞**Exemples** :

- Un corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-e.v..
- $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-e.v., $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{Q}$-e.v., $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-e.v. Plus généralement si $\mathbb{K}$ est corps inclus dans un autre corps $\mathbb{L}$, alors $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-e.v..
- L'ensemble $\mathbb{K}^n$ muni des opérations suivantes :

$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n) \text{ et } \lambda.(x_1,\dots,x_n)=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n),$$

  est un $\mathbb{K}$-e.v., le vecteur nul est le n-uplet : $(0,\dots,0)$.
- Si I est un ensemble non vide, alors l'ensemble des applications de I vers $\mathbb{K}$: $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{K})$, pour les opérations usuelles (addition de deux fonctions et produit par un scalaire) est un $\mathbb{K}$-e.v., le vecteur nul étant l'application nulle. En particulier $(\mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathbb{K}),+,.)$ sont des $\mathbb{K}$-e.v., ainsi que l'espace des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  Plus généralement, si E est un $\mathbb{K}$-e.v., l'ensemble des applications de I vers E : $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathrm{E})$, pour les opérations usuelles sur les fonctions, est un $\mathbb{K}$-e.v..
- $(\mathbb{K}[\mathrm{X}],+,.)$, $(\mathbb{K}(\mathrm{X}),+,.)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
- Espace produit : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v., on définit sur $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ l'addition : $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$, et un produit par les scalaires : $\lambda.(x,y)=(\lambda.x,\lambda.y)$. On peut vérifier alors que $(\mathrm{E}\times\mathrm{F},+,.)$ est un $\mathbb{K}$-e.v., le vecteur nul étant $(0_\mathrm{E},0_\mathrm{F})$. Cela se généralise au produit cartésien d'un nombre fini de $\mathbb{K}$-e.v.

3) Règles de calculs

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.

- $\forall\ \vec{x}\in\mathrm{E}, 0.\vec{x}=\vec{0}$, et $\forall\ \lambda\in\mathbb{K}, \lambda.\vec{0}=\vec{0}$.
- $\forall\ \vec{x}\in\mathrm{E}, \forall\ \lambda\in\mathbb{K}, -(\lambda.\vec{x})=(-\lambda).\vec{x}=\lambda.(-\vec{x})$.
- $\forall\ \vec{x}\in\mathrm{E}, \forall\ \lambda\in\mathbb{K}, \lambda.\vec{x}=\vec{0} \implies \lambda=0$ ou $\vec{x}=\vec{0}$.

4) Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel

Définition 18.2

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-e.v. et soit* H *un ensemble, on dit que* H *est un sous-espace vectoriel de* E *(ou s.e.v de* E*) lorsque :*

- $\mathrm{H}\subset\mathrm{E}, \mathrm{H}\neq\varnothing$.
- $\forall\ x,y\in\mathrm{H}, x+y\in\mathrm{H}$ *(*H *est stable pour l'addition).*
- $\forall\ x\in\mathrm{H}, \forall\ \lambda\in\mathbb{K}, \lambda.x\in\mathrm{H}$ *(*H *est stable pour la loi .).*

Si c'est le cas, alors il est facile de vérifier que $(\mathrm{H},+,.)$ *est lui-même un* $\mathbb{K}$*-e.v.*

☞**Exemples** :

- $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est un s.e.v. de $\mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.
- L'ensemble des fonctions paires (respectivement impaires, bornées, T-périodiques, lipschitziennes) définies sur $\mathbb{R}$ est un s.e.v. de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- L'ensemble $(\mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathbb{C}),+,.)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{C}),+,.)$.
- L'ensemble $(\mathbb{K}_n[\mathrm{X}],+,.)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}[\mathrm{X}],+,.)$.
- L'ensemble des suites complexes de limite nulle et un s.e.v de l'espace des suites complexes convergentes, qui est lui-même un s.e.v de l'espace de suites complexes bornées, qui est lui-même un s.e.v de l'espace des suites complexes.
- Soient $a,b,c\in\mathbb{K}$, $\mathrm{F}=\{(x,y,z)\in\mathbb{K}^3\ /\ ax+by+cz=0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{K}^3$.

Théorème 18.1 (intersection de sous-espaces vectoriels)
Soit $(H_i)_{i\in I}$ *une famille de s.e.v de* E *(*I *est un ensemble d'indices), alors* $\bigcap_{i\in I} H_i$ *est un s.e.v de* E.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

II APPLICATIONS LINÉAIRES

1) Définition, noyau

Définition 18.3
Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-e.v. et soit* $f : E \to F$ *une application, on dit que* f *est une application linéaire (ou morphisme de* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels), lorsque :*

$$\forall\ x, y \in E, \forall\ \lambda \in \mathbb{K}, f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(\lambda.x) = \lambda.f(x).$$

Si de plus, f *est bijective, alors on dit que* f *est un isomorphisme (d'espaces vectoriels). L'ensemble des applications linéaires de* E *vers* F *est noté* $\mathscr{L}(E,F)$.

Remarque 18.1 – *Les applications linéaires de* $\mathbb{K}$ *dans* $\mathbb{K}$ *sont les applications de la forme* $f(x) = ax$ $(a \in \mathbb{K})$*, car* $f(x) = xf(1)$.

Exemples :
- L'application nulle (notée 0) de E vers F est linéaire.
- L'application identité de E : $\mathrm{id}_E : E \to E$ définie par $\mathrm{id}_E(x) = x$, est linéaire bijective (et $(\mathrm{id}_E)^{-1} = \mathrm{id}_E$).
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, l'homothétie de rapport λ : $h_\lambda : E \to E$, définie par $h_\lambda(x) = \lambda.x$, est linéaire et bijective. Sa réciproque est l'homothétie de rapport $1/\lambda$. L'ensemble des homothéties de E est un groupe pour la loi $\circ$ car c'est un sous-groupe du groupe des permutations de E.
- L'application $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ définie par $f(x,y) = (x;-y)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^2$ sur lui-même.

À retenir
$f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors $f(0_E) = 0_F$ et $\forall x \in E$, $f(-x) = -f(x)$.

Définition 18.4 (vocabulaire)
- *Une application linéaire de* E *vers* E *est appelée un endomorphisme de* E*. L'ensemble des endomorphismes de* E *est noté* $\mathscr{L}(E)$ *(on a donc* $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,E)$*).*
- *Un isomorphisme de* E *vers* E *est appelé un automorphisme de* E*. L'ensemble des automorphismes de* E *est noté* $GL(E)$ *et appelé groupe linéaire de* E.
- *Une application linéaire de* E *vers* $\mathbb{K}$ *est appelée une forme linéaire sur* E*. L'ensemble des formes linéaires sur* E *est noté* E^* *et appelé dual de* E *(on a donc* $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$*).*

Exemples :
- $\mathrm{id}_E \in GL(E), \forall\ \lambda \in \mathbb{K}^*, h_\lambda \in GL(E)$.
- Soit $E = \mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ et $\phi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$, alors ϕ est une forme linéaire sur E.
- Soit $E = \{u \in \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})\ /\ (u_n) \text{ converge}\}$ est un $\mathbb{C}$-e.v. et l'application $\phi : E \to \mathbb{C}$ définie par $\phi(u) = \lim u_n$, est une forme linéaire sur E.
- Soient $a,b,c \in \mathbb{K}$, l'application $\phi : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$ définie par $\phi(x,y,z) = ax+by+cz$, est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^3$. En exercice, montrer la réciproque, c'est à dire que toutes les formes linéaires sur $\mathbb{K}^3$ sont de ce type.

Définition 18.5 (Noyau d'une application linéaire)
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$*, on appelle noyau de* f *l'ensemble noté* $\ker(f)$ *et défini par :*

$$\ker(f) = \left\{x \in E\ /\ f(x) = 0_F\right\}$$

Le noyau de f *contient toujours* 0_E.

Exemples :

- Le noyau d'une application linéaire bijective est $\{0_E\}$.
- Le noyau de l'application linéaire $d\colon \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[x]$ définie par $d(P) = P'$ est $\ker(d) = \mathbb{K}$.
- Le noyau de l'application linéaire $f\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x+y+z, x-2y-z)$ est $\ker(f) = \{(x,2x,-3x) \ / \ x \in \mathbb{K}\}$.

2) Propriétés

Il est facile de vérifier les propriétés suivantes :

- $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.
- La composée de deux applications linéaires est linéaire. On en déduit que GL(E) est stable pour la loi $\circ$.
- Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$. On en déduit que GL(E) est stable par symétrisation, *i.e.* si $f \in GL(E)$, alors $f^{-1} \in GL(E)$.
- $(GL(E), \circ)$ est un groupe (non abélien en général), c'est en fait un sous-groupe du groupe des permutations de E : $(S_E, \circ)$.
- Si $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f+g$ et $\lambda.f$ sont linéaires. On en déduit que $(\mathscr{L}(E,F), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. (s.e.v. de $\mathscr{F}(E,F)$).
- $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau, la loi $\circ$ jouant le rôle d'une multiplication.

Remarque 18.2 –

- *En général, l'anneau $\mathscr{L}(E)$ n'est pas commutatif. Le groupe des inversibles de cet anneau est* GL(E).
- *La loi $\circ$ jouant le rôle d'une multiplication, on adopte les notations usuelles des anneaux pour les puissances, i.e. si $u \in \mathscr{L}(E)$ et si n est entier, alors :*

$$u^n = \begin{cases} \mathrm{id}_E & \textit{si } n = 0 \\ u \circ \cdots \circ u & n \textit{ fois si } n > 0 \\ u^{-1} \circ \cdots \circ u^{-1} & -n \textit{ fois si } u \textit{ est inversible et } n < 0 \end{cases},$$

de plus si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ commutent (i.e. $u \circ v = v \circ u$), alors on peut utiliser le binôme de Newton :

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k}$$

- *Soit $E = \mathbb{K}^2$ et $f : (x;y) \mapsto (y;0)$, on vérifie facilement que $f \in \mathscr{L}(E)$ et que $f^2 = 0$ (application nulle), pourtant $f \neq 0$. Cet exemple montre qu'en général $\mathscr{L}(E)$ n'est pas un anneau intègre.*

3) S.e.v. et applications linéaires

Théorème 18.2 **(noyau et image d'une application linéaire)**
Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors $\ker(f)$ est un s.e.v de E et $\mathrm{Im}(f)$ est un s.e.v de F.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

À retenir
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors f est un isomorphisme si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}(f) = F$.

Théorème 18.3 **(image d'un s.e.v par une application linéaire)**
Soit H un s.e.v de E et $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $f(H)$ (ensemble des images par f des éléments de H) est un s.e.v de F.

Preuve : Il suffit de considérer la restriction de f à H : $g : H \to F$ définie par $\forall\, x \in H, g(x) = f(x)$, il est clair que g est linéaire et que $f(H) = \mathrm{Im}(g)$, on peut appliquer alors le théorème précédent. □

Théorème 18.4 **(image réciproque d'un s.e.v par une application linéaire)**
Soit H un s.e.v de F et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors $f^{-1}(H)$ (ensemble des antécédents des éléments de H par f) est un s.e.v de E.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

Exemples :
- $H = \{f \in \mathscr{C}^0([a;b],\mathbb{R}) \;/\; \int_0^b f = 0\}$ est un s.e.v de $\mathscr{C}^0([a;b],\mathbb{R})$, car c'est le noyau de la forme linéaire $\phi : f \mapsto \int_0^b f$.
- $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \;/\; ax+by+cz = 0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{K}^3$ car c'est le noyau de la forme linéaire $\phi : (x,y,z) \mapsto ax+by+cz$.
- $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \;/\; 2x+y-z = 0 \text{ et } 3x-2z = 0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{K}^3$ car c'est l'intersection des noyaux des deux formes linéaires : $\phi_1 : (x,y,z) \mapsto 2x+y-z$ et $\phi_2 : (x,y,z) \mapsto 3x-2z$.

Théorème 18.5

Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors : $v \circ u = 0 \iff \mathrm{Im}(u) \subset \ker(v)$.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

Définition 18.6 (hyperplan)

Soit H un s.e.v de E, on dit que H est un hyperplan de E lorsqu'il existe une forme linéaire ϕ sur E, non identiquement nulle, telle que $H = \ker(\phi)$.

III S.E.V. D'UN ESPACE VECTORIEL

1) Sous-espace engendré

Définition 18.7 (combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et soit $x_1,\dots,x_n$ des vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, tout vecteur x de E pour lequel il existe des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est noté $\mathrm{Vect}[x_1,\dots,x_n]$.
Deux vecteurs x et y de E sont dits colinéaires lorsque l'un des deux est combinaison linéaire de l'autre, i.e. $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}, x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

Théorème 18.6 (sous-espace engendré)

Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E, $\mathrm{Vect}[x_1,\dots,x_n]$ est un s.e.v de E. C'est même le plus petit (pour l'inclusion) s.e.v de E qui contient tous les vecteurs de cette famille. On l'appelle s.e.v engendré par $(x_1,\dots,x_n)$.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

Exemples :
- $\mathrm{Vect}[0_E] = \{0_E\}$.
- Si $x \in E \setminus \{0_E\}$, alors $\mathrm{Vect}[x] = \{\lambda x \;/\; \lambda \in \mathbb{K}\}$, c'est un s.e.v de E appelé droite vectorielle engendrée par x. On dit que x est un vecteur directeur de cette droite. Les autres vecteurs directeurs sont les vecteurs de la forme λx avec $\lambda \neq 0$.
- Soient $x, y \in E$ deux vecteurs non nuls, si les deux vecteurs sont colinéaires, alors $\mathrm{Vect}[x,y] = \mathrm{Vect}[x] = \mathrm{Vect}[y]$ (droite vectorielle). Si ces deux vecteurs sont non colinéaires, alors :

$$\mathrm{Vect}[x,y] = \{\alpha x + \beta y \;/\; \alpha,\beta \in \mathbb{K}\}$$

  c'est un s.e.v de E, on l'appelle plan vectoriel engendré par x et y, il contient (strictement) les deux droites engendrées par x et y.
- Dans $\mathbb{K}^3$ déterminer une équation cartésienne du plan vectoriel engendré par les vecteurs $x = (1,1,1)$ et $y = (0,-1,1)$.

Remarque 18.3 – *Un s.e.v. de E est stable par combinaisons linéaires.*

Théorème 18.7 (image d'une combinaison linéaire par une application linéaire)
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-e.v et soit* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *une famille de vecteurs de* E*. Soit* $f\in\mathscr{L}(E,F)$*, alors l'image par* f *d'une combinaison linéaire de la famille* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *est une combinaison linéaire de la famille* $(f(x_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ *(dans* F*) avec les mêmes coefficients.*

Preuve : Par récurrence sur n : pour $n=1$ il n'y a rien à démontrer. Supposons le théorème vrai au rang n, et soit $x=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_{n+1}x_{n+1}$, f étant linéaire, on peut écrire $f(x)=f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)+\lambda_{n+1}.f(x_{n+1})$, on applique alors l'hypothèse de récurrence pour conclure. □

☞**Exemples** :
- Soit $E=\mathbb{K}^n$ pour $i\in[\![1;n]\!]$ on pose $e_i=(\delta_{i,1},\ldots,\delta_{i,n})$, on a alors $E=\text{Vect}[e_1,\ldots,e_n]$.
- Soit $H=\{u\in\mathbb{K}^3 \;/\; \exists\,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{K}, u=(\alpha-\beta,2\alpha-2\beta+\gamma,-\alpha+\beta+2\gamma)\}$. Posons $e_1=(1,2,-1)$, $e_2=(-1,-2,1)$ et $e_3=(0,1,2)$, on a alors $H=\text{Vect}[e_1,e_2,e_3]$, ce qui prouve que H est un s.e.v de $\mathbb{K}^3$. On remarque que $e_2=-e_1$, donc finalement $H=\text{Vect}[e_1,e_3]$, et comme e_1 et e_3 ne sont pas colinéaires, H est un plan vectoriel.
- Soit $E=\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les deux fonctions $\text{id}_{\mathbb{R}}$ et 1 sont non colinéaires, donc elles engendrent un plan vectoriel dans E : $P=\text{Vect}[\text{id}_{\mathbb{R}},1]$. $f\in P$ équivaut à $\exists\,a,b\in\mathbb{R}, f=a.\text{id}_{\mathbb{R}}+b.1$, et donc $f:x\mapsto ax+b$, P est donc l'ensemble des applications affines.

2) Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 18.8 (somme de s.e.v)
Soient F *et* G *deux s.e.v de* E*, on appelle somme de* F *et* G *l'ensemble noté* F + G *et défini par :*

$$F+G=\{x\in E \;/\; \exists\,u\in F, v\in G, x=u+v\}.$$

Théorème 18.8
Une somme de s.e.v de E *est un s.e.v de* E*.*

Preuve : F + G est inclus dans E et contient le vecteur nul puisque celui-ci est dans F et dans G. Si x et y sont dans F + G alors on peut écrire $x=x_F+x_G$ et $y=y_F+y_G$ avec $x_F,y_F\in F$ et $X_G,y_G\in G$, on a $x+y=(x_F+y_F)+(x_G+y_G)$ et $\lambda x=\lambda x_F+\lambda x_G$, comme F et G sont stables pour l'addition et le produit par les scalaires, on voit que $x+y$ et λx sont dans F + G. □

Remarque 18.4 – F + G *est un s.e.v. de* E *qui contient à la fois* F *et* G.

☞**Exemples** :
- Dans $\mathbb{K}^3$, posons $i=(1,0,0)$, $j=(0,1,0)$, $k=(0,0,1)$, on peut vérifier que $\mathbb{K}^3=\text{Vect}[i]+\text{Vect}[j,k]=\text{Vect}[i,j]+\text{Vect}[k]=\text{Vect}[i,k]+\text{Vect}[j]$.
- Soient $x,y\in E$ deux vecteurs, on a $\text{Vect}[x]+\text{Vect}[y]=\text{Vect}[x,y]$. Plus généralement, on peut remplacer x et y par deux familles de vecteurs de E.

3) Sommes directes

Définition 18.9 (somme directe)
Soient F, G *deux s.e.v de* E*, on dit que la somme* F + G *est directe lorsque tout vecteur* x *de cette somme s'écrit* ***de manière unique*** *sous la forme* $x=x_F+x_G$ *avec* $x_F\in F$*, et* $x_G\in G$*. Si c'est le cas, la somme est notée* $F\oplus G$*.*

Théorème 18.9 (caractérisation des sommes directes)
Soient F *et* G *deux s.e.v de* E*, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *la somme* F + G *est directe.*

b) $\forall\,(x_F,x_G)\in F\times G$, *si* $x_F+x_G=0_E$ *alors* $x_F=x_G=0_E$.

c) $F\cap G=\{0_E\}$.

d) *l'application linéaire* $\phi: F\times G\to E$ *définie par* $\phi(x_F,x_G)=x_F+x_G$ *est injective.*

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

☞**Exemples** :
- Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le s.e.v des fonctions paires et le s.e.v des fonctions impaires sont en somme directe.
- Dans $\mathbb{K}^3$ le plan P d'équation $x+y+z=0$ et la droite engendrée par le vecteur $i=(1,1,1)$ sont en somme directe, mais P n'est pas en somme directe avec le plan P′ engendré par i et $j=(1,-1,1)$.

4) S.e.v. supplémentaires

Définition 18.10 (s.e.v supplémentaires)
Soient F *et* G *deux s.e.v de* E *, on dit que* F *et* G *sont supplémentaires lorsque* $F\oplus G=E$. *Ce qui signifie que* $E=F+G$ *et la somme* $F+G$ *est directe, ou encore : tout vecteur de* E *s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de* F *et d'un vecteur de* G.

☞**Exemples** :
- Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le s.e.v des fonctions paires et le s.e.v des fonctions impaires sont supplémentaires.
- Dans $E=\mathscr{C}^0([a;b],\mathbb{R})$ le s.e.v $H=\{f\in E\ /\ \int_a^b f=0\}$ et le s.e.v $G=\mathrm{Vect}\,[\mathrm{id}_{\mathbb{R}}]$ sont supplémentaires.

Théorème 18.10 (caractérisations des hyperplans)
Soit H *un s.e.v de* E*, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) H *est un hyperplan de* E *(i.e. le noyau d'une forme linéaire sur* E *non nulle).*

b) $\forall\ x_0\in E\setminus H, H\oplus\mathrm{Vect}\,[x_0]=E$.

c) $\exists\ x_0\in E\setminus H$ *tel que* $H\oplus\mathrm{Vect}\,[x_0]=E$.

Preuve : Montrons que *a)* $\implies$ *b)* : soit $x_0\in E\setminus H$, comme x_0 n'est pas dans H, il est facile de voir que H et $\mathrm{Vect}\,[x_0]$ sont en somme directe. Soit ϕ une forme linéaire (non nulle) telle que $\ker(\phi)=H$, on a $\phi(x_0)=\alpha\neq0$, soit $x\in E$ et $\lambda=\phi(x)$, posons $y=x-\frac{\lambda}{\alpha}x_0$, on a $\phi(y)=0$, donc $y\in H$ et de plus $x=y+\frac{\lambda}{\alpha}x_0$, ce qui prouve que $E=H+\mathrm{Vect}\,[x_0]$.

Montrons que *b)* $\implies$ *c)* : rien à faire.

Montrons que *c)* $\implies$ *a)* : Pour $x\in E$, il existe $y\in H$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, **uniques** tels que $x=y+\lambda x_0$. Posons $\phi(x)=\lambda$. On définit ainsi une application non nulle de E vers $\mathbb{K}$, on peut vérifier ensuite que ϕ est bien linéaire (laissé en exercice), $x\in\ker(\phi)\iff\lambda=0\iff x=y\iff x\in H$, donc $\ker(\phi)=H$, ce qui prouve que H est un hyperplan. □

IV PROJECTIONS, SYMÉTRIES

1) Projecteurs

Définition 18.11
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-e.v, une projection dans* E *(ou un projecteur de* E*) est un endomorphisme* p *de* E *tel que* $p^2=p$ *(i.e.* $p\circ p=p$*).*

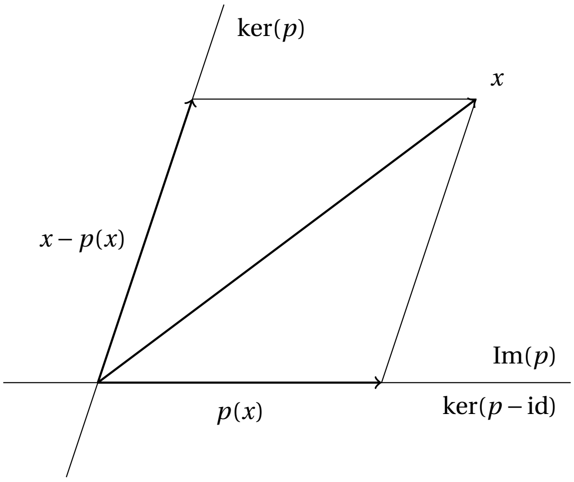
☞**Exemples** :
- $E=\mathbb{K}^2$ et $p(x,y)=(x,0)$.
- $E=\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et p qui à $f\in E$ associe $p(f):x\mapsto\frac{f(x)+f(-x)}{2}$.

Remarque 18.5 – *Invariants d'un endomorphisme : si* $f\in\mathscr{L}(E)$*, alors* $x\in E$ *est invariant par* f *(ou un point fixe de* f*) si et seulement si* $f(x)=x$*, ce qui équivaut à* $(f-\mathrm{id}_E)(x)=0_E$*, ou encore* $x\in\ker(f-\mathrm{id}_E)$*. L'ensemble des points fixes de* f *est donc le s.e.v* $\ker(f-\mathrm{id}_E)$.

Théorème 18.11 (caractérisation des projections)
$p\in\mathscr{L}(E)$ *est un projecteur* $\iff E=\ker(p)\oplus\ker(p-\mathrm{id}_E)$*. Si c'est le cas, alors* $\mathrm{Im}(p)=\ker(p-\mathrm{id}_E)$ *et on dit que* p *est la projection sur* $\mathrm{Im}(p)$ *parallèlement à* $\ker(p)$*. Tout vecteur* x *de* E *se décompose de la manière suivante :* $x=(x-p(x))+p(x)$*, avec* $x-p(x)\in\ker(p)$ *et* $p(x)\in\ker(p-\mathrm{id}_E)$.

Preuve : Si p est un projecteur, soit $x\in\ker(p)\cap\ker(p-\mathrm{id}_E)$, alors $p(x)=0_E=x$, donc la somme est directe. Soit $x\in E$, alors $p(x-p(x))=p(x)-p^2(x)=0_E$, donc $x-p(x)\in\ker(p)$, on a alors $x=(x-p(x))+p(x)$ et $p(x)\in\ker(p-\mathrm{id}_E)$, donc $E=\ker(p)\oplus\ker(p-\mathrm{id}_E)$. De la définition, il découle que $\mathrm{Im}(p)\subset\ker(p-\mathrm{id}_E)$, l'inclusion étant évidente, on a $\mathrm{Im}(p)=\ker(p-id_E)$.

Réciproque : si $E=\ker(p)\oplus\ker(p-\mathrm{id}_E)$, soit $x\in E$, alors $x=y+z$ avec $y\in\ker(p)$ et $z\in\ker(p-\mathrm{id}_E)$, d'où $p(x)=p(y)+p(z)=p(z)=z$, et donc $p^2(x)=p(z)=z=p(x)$, ce qui prouve que p est un projecteur. □



☞**Exemples** :

– Dans le premier exemple, p est la projection sur la droite $\mathrm{Vect}[(1,0)]$ et parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}[(0,1)]$.

– Dans le deuxième exemple, p est la projection sur le s.e.v des fonctions paires, parallèlement au s.e.v des fonctions impaires.

Théorème 18.12 (projection associée à une décomposition)

Si F *et* G *sont deux s.e.v de* E *supplémentaires* ($\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$), *alors il existe une unique projection* p *telle que* $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{F}$ *et* $\ker(p) = \mathrm{G}$, *i.e. qui soit la projection sur* F *parallèlement à* G.

Preuve : Pour $x \in \mathrm{E}$, il existe $x_\mathrm{F} \in \mathrm{F}$ et $x_\mathrm{G} \in \mathrm{G}$, **uniques** tels que $x = x_\mathrm{F} + x_\mathrm{G}$, on pose alors $p(x) = x_\mathrm{F}$, ce qui définit une application de E dans E. On vérifie facilement que p est linéaire, et comme $x_\mathrm{F} \in \mathrm{F}$, on a par définition même de p, que $p^2(x) = x_\mathrm{F} = p(x)$, donc p est bien un projecteur. On a $p(x) = 0_\mathrm{E} \iff x_\mathrm{F} = 0_\mathrm{E} \iff x = x_\mathrm{G} \iff x \in \mathrm{G}$, donc $\ker(p) = \mathrm{G}$, d'autre part, $p(x) = x \iff x = x_\mathrm{F} \iff x \in \mathrm{F}$, donc $\ker(p - \mathrm{id}_\mathrm{E}) = \mathrm{F}$, ce qui termine la preuve. □

★**Exercice 18.1**

1/ *Soit* $\mathrm{E} = \mathbb{K}^3$, $\mathrm{F} = \{(x,y,z) \in \mathrm{E} \ / \ z = 0\}$ *et* $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}[(1,1,1)]$. *Montrer que* F *et* G *sont supplémentaires, et déterminer l'expression analytique de la projection sur* F *parallèlement à* G.

2/ *Soit* p *un projecteur de* E, *montrer que* $q = \mathrm{id}_\mathrm{E} - p$ *est un projecteur, préciser ses éléments caractéristiques.*

2) Symétries

Définition 18.12

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-e.v, une symétrie de* E *est un endomorphisme* s *tel que* $s^2 = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ *(involution linéaire).*

☞**Exemples** :

– Dans $\mathrm{E} = \mathbb{K}^2$, l'application s définie par $s(x,y) = (y,x)$ est une symétrie.

– Dans $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'application s définie par $s(f)$ est la fonction qui à $s(f) : x \mapsto f(-x)$, est une symétrie.

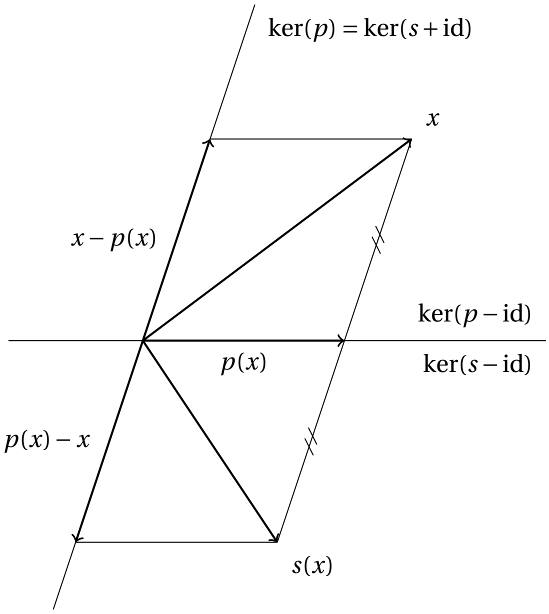
Théorème 18.13 (caractérisation des symétries)

Soit $s \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, s *est une symétrie* $\iff \mathrm{E} = \ker(s - \mathrm{id}_\mathrm{E}) \oplus \ker(s + \mathrm{id}_\mathrm{E})$. *Ce qui revient à dire que l'application* $p = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_\mathrm{E} + s)$ *est une projection. Si c'est le cas, on dit que* s *est la symétrie par rapport à* $\ker(s - \mathrm{id}_\mathrm{E})$ *(ensemble des invariants) et parallèlement à* $\ker(s + \mathrm{id}_\mathrm{E})$, *et on dit que* p *est la projection associée à* s. *Tout vecteur* x *de* E *se décompose de la manière suivante :*

$$x = \tfrac{1}{2}(x + s(x)) + \tfrac{1}{2}(x - s(x)),$$

avec $\frac{1}{2}(x + s(x)) \in \ker(s - \mathrm{id}_\mathrm{E})$ *et* $\frac{1}{2}(x - s(x)) \in \ker(s + \mathrm{id}_\mathrm{E})$.

Preuve : Posons $p = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_\mathrm{E} + s)$, s est une symétrie équivaut à $s^2 = \mathrm{id}_\mathrm{E}$, c'est à dire $(2p - \mathrm{id}_\mathrm{E})^2 = \mathrm{id}_\mathrm{E}$, ou encore $p^2 = p$, ce qui équivaut à dire que $\mathrm{E} = \ker(p) \oplus \ker(p - \mathrm{id}_\mathrm{E})$, et donc $\mathrm{E} = \ker(s + \mathrm{id}_\mathrm{E}) \oplus \ker(s - \mathrm{id}_\mathrm{E})$. □



Théorème 18.14 (symétrie associée à une décomposition)
Si F *et* G *sont deux s.e.v de* E *supplémentaires* ($\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$)*, alors il existe une unique symétrie* s *telle que* $\ker(s - \mathrm{id_E}) = \mathrm{F}$ *et* $\ker(s + \mathrm{id_E}) = \mathrm{G}$*, i.e. qui soit la symétrie par rapport à* F *et parallèlement à* G.

Preuve : Soit p la projection sur F parallèlement à G, posons $s = 2p - \mathrm{id_E}$, on sait alors que s est une symétrie et $\ker(s - \mathrm{id_E}) = \ker(p - \mathrm{id_E}) = \mathrm{F}$ et $\ker(s + \mathrm{id_E}) = \ker(p) = \mathrm{G}$, donc s existe. Réciproquement, si s existe, alors la projection associée est nécessairement la projection sur F parallèlement à G, or celle-ci est unique, c'est p, donc s est unique. □

Exemples :
- Dans le premier exemple ci-dessus, s est la symétrie par rapport à la droite $\mathrm{Vect}[(1,1)]$ et parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}[(1,-1)]$.
- Dans le deuxième exemple, s est la symétrie par rapport au s.e.v des fonctions paires, et parallèlement au s.e.v des fonctions impaires.

V GÉNÉRALISATION

1) Sous espace engendré

Définition 18.13 (généralisation)
Soit $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de vecteurs de* E. *On appelle combinaison linéaire de la famille, tout vecteur de* E *pouvant s'écrire comme combinaison linéaire d'un* ***nombre fini*** *de vecteurs de la famille. Notation :*
$$\mathrm{Vect}[(x_i)_{i\in\mathrm{I}}] = \left\{\sum_{j\in\mathrm{J}} \alpha_j x_j \ /\ \mathrm{J} \text{ partie finie de } \mathrm{I} \text{ et } \forall j \in \mathrm{J}, \alpha_j \in \mathbb{K}\right\}.$$

Remarque 18.6 – *Si* X *est une partie de* E*, on notera* Vect [X] *l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de* X*. On peut écrire :*
$$\mathrm{Vect}[\mathrm{X}] = \left\{\sum_{x\in\mathrm{X}} \alpha_x x \ /\ (\alpha_x)_{x\in\mathrm{X}} \text{ est une famille de scalaires tous nuls sauf un nombre fini}\right\}.$$
De telles familles de scalaires sont appelées ***familles à support fini****. Le théorème 18.7 se généralise alors ainsi :*

$\boxed{\text{Si } f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) \text{ alors } f\left(\sum_{x\in\mathrm{X}} \alpha_x x\right) = \sum_{x\in\mathrm{X}} \alpha_x f(x), \text{ pour toute famille de scalaires } (\alpha_x)_{x\in\mathrm{X}} \text{ à support fini.}}$

Théorème 18.15 (sous-espace engendré)
Soit $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de vecteurs de* E, $\mathrm{Vect}[(x_i)_{i\in\mathrm{I}}]$ *est un s.e.v de* E*. C'est même le plus petit (pour l'inclusion) s.e.v de* E *qui contient tous les vecteurs de cette famille. On l'appelle s.e.v engendré par* $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

Exemple : $\mathbb{K}[\mathrm{X}] = \mathrm{Vect}[(\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}]$.

2) Sommes de s.e.v.

Définition 18.14 (somme de s.e.v)
Si $F_1, \dots, F_p$ sont des s.e.v. de E, la somme de ces s.e.v. est :
$$F_1 + \cdots + F_p = \{x \in E \;/\; \exists\, u_1 \in F_1, \dots, u_p \in F_p, x = u_1 + \cdots + u_p\}.$$

Théorème 18.16
Une somme de s.e.v de E est un s.e.v de E.

Preuve : $F_1, \dots, F_p$ sont des s.e.v de E , donc ce sont en particulier des $\mathbb{K}$-e.v, par conséquent le produit cartésien $F_1 \times \cdots \times F_p$ est lui-même un $\mathbb{K}$-e.v. On considère alors l'application $f : F_1 \times \cdots \times F_p \to E$ définie par $f(u_1, \dots, u_p) = u_1 + \cdots + u_p$. On vérifie facilement que f est linéaire, il est clair d'après la définition que $F_1 + \cdots + F_p = \mathrm{Im}(f)$, et donc c'est un s.e.v de E. □

☞**Exemple** : $\mathbb{K}^3 = \mathrm{Vect}[(1,0,0)] + \mathrm{Vect}[(0,1,0)] + \mathrm{Vect}[(0,0,1)]$.

Définition 18.15 (somme directe)
Soient $F_1, \dots, F_p$ des s.e.v de E, on dit que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe lorsque tout vecteur de cette somme s'écrit ***de manière unique*** *sous la forme $u_1 + \cdots + u_p$ avec $u_i \in F_i$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Si c'est le cas, la somme est notée $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.*

Théorème 18.17 (caractérisation des sommes directes)
Soient $F_1, \dots, F_p$ des s.e.v de E, les assertions suivantes sont équivalentes :

a) la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe.

b) $\forall\, (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$, si $x_1 + \cdots + x_p = 0_E$ alors $x_1 = \cdots = x_p = 0_E$.

c) $\forall\, i \in [\![1;p]\!]$, l'intersection entre F_i et ***la somme des autres s.e.v.*** *est réduite à $\{0_E\}$.*

d) l'application linéaire $\phi : F_1 \times \cdots \times F_p \to E$ définie par $\phi(x_1, \dots, x_p) = x_1 + \cdots + x_p$ est injective.

Preuve : Montrons *a)* $\implies$ *b)* : soient $x_i \in F_i$ tels que $\sum_{i=1}^{p} x_i = 0_E$, alors $\sum_{i=1}^{p} x_i = \sum_{i=1}^{p} 0_E$, or 0_E est dans chaque F_i, l'unicité permet de conclure que $x_i = 0_E$.

Montrons que *b)* $\implies$ *c)* : soient $x_1 \in F_1 \cap (F_2 + \cdots + F_p)$ alors il existe $x_2 \in F_2, \dots, x_p \in F_p$ tels que $x_1 = x_2 + \cdots + x_p$, alors $x_1 - x_2 - \cdots - x_p = 0_E$ avec $-x_i \in F_i$, et donc chacun de ces vecteurs est nul, en particulier x_1. Le raisonnement est le même si on permute les indices.

Montrons *c)* $\implies$ *d)* : si $(x_1, \dots, x_p) \in \ker(\phi)$ alors $x_1 + \cdots + x_p = 0_E$ et donc $x_1 = -x_2 - \cdots - x_p$, or ce vecteur est dans $F_2 + \cdots + F_p$, donc $x_1 = 0_E$, le même façon on montre que les autres sont nuls et donc que ϕ est injective.

Montrons que *d)* $\implies$ *a)* : Si $x_1 + \cdots + x_p = y_1 + \cdots + y_p$ avec $x_i, y_i \in F_i$, alors $(x_1 - y_1) + \cdots + (x_p - y_p) = 0_E$, donc $(x_1 - y_1, \dots, x_p - y_p) \in \ker(\phi)$ (car $x_i - y_i \in F_i$), ϕ étant injective il vient que $x_i - y_i = 0_E$ d'où l'unicité de la décomposition, la somme est donc directe. □

Attention !
Si $F_i \cap F_j = \{0_E\}$, pour $i \neq j$ dans $[\![1;p]\!]$, cela ne prouve pas que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe. Par exemple, soit $F_1 = \mathrm{Vect}[(1,0,0)]$, $F_2 = \mathrm{Vect}[(0,1,0)]$ et $F_3 = \mathrm{Vect}[(1,1,0)]$, alors $F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_3 = F_1 \cap F_3 = \{0_E\}$, mais la somme $F_1 + F_2 + F_3$ n'est pas directe puisque $F_1 + F_2 = F_3$.

☞**Exemple** : $\mathbb{K}[X] = F_0 \oplus F_1 \oplus F_2$ avec $F_i = \mathrm{Vect}\left[(X^{3n+i})_{n \in \mathbb{N}}\right]$, $i \in [\![0;2]\!]$.

VI SOLUTION DES EXERCICES

Solution 18.1

1/ *Soit $(x,y,z) \in E$, alors $(x,y,z) = (z,z,z) + (x-z, y-z, 0)$, le premier triplet est dans G, et le second dans F, donc $E = G + F$. Si $(x,y,z) \in F \cap G$ alors $x = y = z$ et $z = 0$ donc $F \cap G = \{(0,0,0)\}$ d'où $E = F \oplus G$ et le projeté de (x,y,z) sur F parallèlement à G est $p(x,y,z) = (x-z, x-z, 0)$ (composante sur F dans la décomposition).*

2/ *On sait que p est la projection sur $F = \mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{id}_E)$ et parallèlement à $G = \ker(p)$, on a $E = F \oplus G$ et pour tout x de E, $x = p(x) + x - p(x)$ avec $x - p(x) \in G$ et $p(x) \in F$, donc par définition, $x - p(x)$ est le projeté de x sur G parallèlement à F, autrement dit, $q = \mathrm{id}_E - p$ est la projection sur G parallèlement à F.*