Chapitre 6

Équations différentielles

Sommaire

I FONCTIONS À VALEURS COMPLEXES (ET VARIABLE RÉELLE)

1) Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.

Pour $t \in \mathrm{I}$, on pose $u(t) = \mathrm{Re}(f(t))$ et $v(t) = \mathrm{Im}(f(t))$, on définit ainsi deux fonctions u et v à **valeurs réelles** telles que $\forall\ t \in \mathrm{I}, f(t) = u(t) + iv(t)$.

Définition 6.1

- *La fonction u est appelée* ***partie réelle*** *de f et la fonction v est appelée* ***partie imaginaire*** *de f.*
- *La fonction $\overline{f} = u - iv$ est appelée fonction conjuguée de f.*
- *La fonction $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$ est appelée fonction module de f.*
- *f est bornée si et seulement si $\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathrm{I}, |f(t)| \leqslant \mathrm{M}$ (i.e. les images sont dans le disque de centre l'origine et de rayon M).*

☞**Exemples** :

- Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{it}$, on a $\mathrm{Re}(f) = \cos$ et $\mathrm{Im}(f) = \sin$, elle est bornée.
- Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{t^2}{1+it}$, on a $\mathrm{Re}(f) : t \mapsto \frac{t^2}{1+t^2}$ et $\mathrm{Im}(f) : t \mapsto \frac{-t^3}{1+t^2}$, elle n'est pas bornée.

2) Continuité, dérivation

Définition 6.2 (Continuité)

• *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction, soit u sa partie réelle et v sa partie imaginaire, on dit que f est continue en $t_0 \in \mathrm{I}$ lorsque* ***les fonctions u et v sont continues en** t_0.*

• *On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I et l'ensemble des fonctions continues sur I est noté $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{C})$.*

À retenir

• Les théorèmes généraux sont les mêmes que pour les fonctions continues à valeurs réelles.
• Le théorème des valeurs intermédiaires ne s'applique pas pour les fonctions continues complexes.
• Si f est continue sur le segment $[a;b]$, alors $|f|$ possède un maximum et un minimum.

Définition 6.3

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction, soit u sa partie réelle et v sa partie imaginaire, on dit que f est dérivable en t_0 lorsque les fonctions u **et** *v sont dérivables en t_0. Si c'est le cas, alors on pose $f'(t_0) = u'(t_0) + i\,v'(t_0)$. On remarquera que si f est dérivable sur I, alors $\mathrm{Re}(f') = \big(\mathrm{Re}(f)\big)'$ et $\mathrm{Im}(f') = \big(\mathrm{Im}(f)\big)'$.*

Les résultats suivants sont identiques au cas réel :

À retenir

- Si f est dérivable en t_0 alors f est continue en t_0 (réciproque fausse).
- Une fonction dérivable f sur un intervalle I est constante si et seulement si sa dérivée est nulle sur I.
- La somme, le produit et la composée de deux fonctions dérivables sont dérivables. Si f est dérivable et ne s'annule pas alors $\frac{1}{f}$ est dérivable (théorèmes généraux de la continuité).
- Formules de dérivation pour les opérations algébriques ($\lambda \in \mathbb{C}$) :

$$(f+g)' = f' + g' \,;\, (\lambda f)' = \lambda f' \,;\, (fg)' = f'g + fg' \,;\, \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$$

- Dérivation d'une composée : si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, si $g : \mathrm{J} \to \mathbb{C}$ est dérivable sur J et si $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f \text{ (ou encore } [g(f)]' = f' \times g'(f)).$$

☞**Exemple** : La fonction f définie par $f(t) = \frac{1}{1+it}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(t) = \frac{-i}{(1+it)^2}$.

Remarque 6.1 :

– *On remarquera que les formules de dérivation sont les mêmes pour les fonctions à valeurs complexes que pour les fonctions à valeurs réelles.*
– *Si f et g sont dérivables et que g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.*

Théorème 6.1

Soit $f : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction dérivable, alors la fonction $t \to e^{f(t)}$ est dérivable sur I (exponentielle complexe de $f(t)$) et :

$$\left(e^{f(t)}\right)' = f'(t)e^{f(t)}$$

Preuve : On pose $f(t) = a(t) + ib(t)$ sous forme algébrique. $e^{f(t)} = e^{a(t)} \times [\cos(b(t)) + i\sin(b(t))]$, la partie réelle est donc $g(t) = e^{a(t)}\cos(b(t))$ et sa partie imaginaire est $h(t) = e^{a(t)}\sin(b(t))$. Ces fonctions sont dérivables sur I, donc e^f est dérivable sur I et sa dérivée est $g'(t) + ih'(t)$, il suffit alors de comparer $g'(t) + ih'(t)$ avec $f'(t)e^{f(t)}$ pour constater l'égalité. □

3) Primitives, intégrales

Définition 6.4

Soit $\mathrm{F}, f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ deux fonctions, on dit que F est une ***primitive*** *de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $\mathrm{F}' = f$.*

★**Exercice 6.1** *Calculer une primitive de :* $h(t) = e^{\alpha t}$ *où* $\alpha \in \mathbb{C}^*$ *;* $f(t) = \frac{1}{1+it}$ *et de* $g(t) = e^t \cos(t)$*.*

Les propriétés des primitives citées dans le cas réel restent valables. La définition de l'intégrale à partir d'une primitive est également la même et on retrouve les propriétés qui ne font pas intervenir la notion de signe : linéarité, relation de Chasles, majoration en module. En particulier la linéarité permet d'écrire que si $f = u + iv$ (forme algébrique de f), alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$.

★**Exercice 6.2** *Montrer que* $\left|\int_0^\pi e^{(1+i)t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant e^\pi - 1$.

Les deux outils fondamentaux pour le calcul d'intégrales sont encore valables : le théorème de l'intégration par parties et le théorème du changement de variable.

Dans la suite de ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou bien l'ensemble $\mathbb{C}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), et les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

II ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction $y : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ intervenant sous forme dérivée (première ou supérieure). On rencontre ce genre d'équations en mécanique (lois de Newton), en électricité (circuits RLC), ... etc.

1) Définitions

Définition 6.5

Une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 1 est une équation différentielle de la forme :

$$(\mathrm{E}) : \forall t \in \mathrm{I},\ a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t), \text{ notée plus simplement : } a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

où $a, b, c : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ *sont trois fonctions définies continues sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et* $y : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ *une fonction dérivable* ***inconnue****. On suppose de plus que la fonction* a *n'est pas la fonction nulle. On appelle* ***équation homogène associée*** *à* (E) *l'équation différentielle :*

$$(\mathrm{H}) : \forall t \in \mathrm{I},\ a(t)y' + b(t)y = 0.$$

La fonction c *est souvent appelée* ***second membre*** *de l'équation* (E).

Dans la pratique on a souvent en plus une condition sur la fonction inconnue y du type : $y(t_0) = \alpha$ où t_0 et α sont des données. Cette condition est appelée **condition initiale**, et on appelle **problème de** Cauchy[1] le système :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathrm{I},\ a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = \alpha \end{cases}.$$

☞**Exemple** : L'équation différentielle : $y' - y = 0$ avec $y(0) = 1$ est utilisée en terminale pour introduire l'exponentielle.

2) Étude de l'équation homogène

Théorème 6.2

Soit $\mathrm{S_I(H)}$ *l'ensemble des solutions sur* I *de l'équation homogène* (H)*, alors on a les propriétés :*
- $0 \in \mathrm{S_I(H)}$ *(la fonction nulle est dans* $\mathrm{S_I(H)}$*).*
- $\forall\ f, g \in \mathrm{S_I(H)}, f + g \in \mathrm{S_I(H)}$.
- $\forall\ \alpha \in \mathbb{K}, \forall\ f \in \mathrm{S_I(H)}, \alpha f \in \mathrm{S_I(H)}$.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

1. CAUCHY Augustin-Louis (1789 – 1857) : un des plus grands mathématiciens français.

Résolution de (H)

On se place sur un intervalle I où la fonction a **ne s'annule pas**, on a alors $\forall\ t \in \mathrm{I}, y' = -\frac{b}{a}y$. Soit F une primitive de la fonction $-\frac{b}{a}$ sur I, on a alors :

$$y \in \mathrm{S_I(H)} \iff y' = \mathrm{F}'y \iff y'e^{-\mathrm{F}} - \mathrm{F}'e^{-\mathrm{F}}y = 0 \iff \frac{d}{dt}\left(ye^{-\mathrm{F}}\right) = 0 \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K}, \forall\ t \in \mathrm{I}, y(t) = \lambda e^{\mathrm{F}(t)}.$$

On peut donc énoncer :

Théorème 6.3
Lorsque la fonction a ne s'annule pas sur l'intervalle I *alors les solutions de* (H) *sont les fonctions :*

$$y\colon t \mapsto \lambda e^{\mathrm{F}(t)},$$

où F *désigne une primitive de la fonction* $-\frac{b}{a}$ *sur* I*, et* λ *un élément quelconque de* $\mathbb{K}$*.*

À retenir

Si la fonction a ne s'annule pas sur I :
- Le problème de Cauchy pour l'équation (H) a une unique solution. Car la condition initiale détermine complètement la constante λ.
- L'unique solution sur I qui s'annule en un point donné est la fonction nulle. Par conséquent toutes les autres solutions ne s'annulent jamais sur I, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ elles ont toutes un signe constant (car elles sont continues).

☞**Exemples** :
- $y' + \omega y = 0$ où $\omega \in \mathbb{K}$ est une constante : les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = \lambda e^{-\omega t}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ quelconque.
- $ty' = y$ sur $\mathbb{R}$: on se place d'abord sur $\mathrm{I} =]0;+\infty[$, sur cet intervalle on a $y' = \frac{1}{t}y$ d'où $y(t) = \alpha t$ ($\alpha \in \mathbb{K}$ quelconque). Puis on se place sur $\mathrm{J} =]-\infty;0[$, sur cet intervalle on a encore $y' = \frac{1}{t}y$ d'où $y(t) = \lambda|t| = \beta t$ ($\beta = -\lambda \in \mathbb{K}$ quelconque). Soit maintenant y une solution sur $\mathbb{R}$, alors y est en particulier solution sur I donc il existe α tel que $\forall\ t > 0, y(t) = \alpha t$, de même y est solution sur J, donc il existe β tel que $\forall t < 0, y(t) = \beta t$, mais y doit être dérivable en 0, ce qui entraîne $\alpha = \beta$, finalement $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \alpha t$. On vérifie pour terminer que cette fonction est bien solution.

3) Étude de l'équation avec second membre

On revient au cas général : (E) : $a(t)y' + b(t)y = c(t)$.

Théorème 6.4 (structure des solutions)
Si l'ensemble des solutions de (E) *n'est pas vide, et si* y_1 *est une solution de* (E)*, alors les solutions de* (E) *sont les fonctions s'écrivant comme somme de* y_1 *avec une solution de* (H)*, c'est à dire les fonctions de la forme :* $y\colon t \mapsto y_1(t) + y_\mathrm{H}(t)$ *avec* y_H *solution quelconque de* (H).

Preuve : Soit y une solution de (E), posons $f = y - y_1$, alors $af' + bf = ay' - ay_1' + by - by_1 = c - c = 0$ donc $f \in \mathrm{S_I(H)}$. Réciproquement, soit $f \in \mathrm{S_I(H)}$ et soit $y = y_1 + f$, alors $ay' + by = ay_1' + af + by_1 + bf = 0 + c = c$, donc $y \in \mathrm{S_I(E)}$. □

Pour déterminer toutes les solutions de (E) on est donc ramené à résoudre l'équation homogène puis à trouver une solution particulière de (E).

Recherche d'une solution particulière : on se place de nouveau sur un intervalle I **où la fonction a ne s'annule pas et on applique la méthode de la variation de la constante** :

Soit F une primitive de $-\frac{b}{a}$ sur I, on cherche une solution particulière sous la forme $y = \lambda e^{\mathrm{F}}$ où λ est **une fonction dérivable sur** I. La fonction y est solution de (E) si et seulement si $a[\lambda' e^{\mathrm{F}} + \lambda \mathrm{F}' e^{\mathrm{F}}] + b\lambda e^{\mathrm{F}} = c$, ce qui équivaut à $a\lambda' e^{\mathrm{F}} + \lambda[a\mathrm{F}'e^{\mathrm{F}} + be^{\mathrm{F}}] = c$ ou encore $\lambda' = \frac{c}{a}e^{-\mathrm{F}}$, car e^{F} est solution de (H). Donc λ doit être une primitive de la fonction $\frac{c}{a}e^{-\mathrm{F}}$, celle-ci est continue sur l'intervalle I, elle admet donc des primitives sur cet I, ce qui prouve l'existence de λ. Une solution de (E) est donc :

$$y_1 = \lambda e^{\mathrm{F}} \text{ avec } \lambda(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{c(s)}{a(s)} e^{-\mathrm{F}(s)}\, ds \text{ et } \mathrm{F}(t) = \int_{t_0}^{t} -\frac{b(s)}{a(s)}\, ds,$$

et les solutions de (E) sont les fonctions :

$$y = y_1 + \alpha e^{F} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{K} \text{ quelconque [et } y(t_0) = \alpha].$$

À retenir

Lorsque la fonction a ne s'annule pas sur l'intervalle I, le problème de Cauchy a une unique solution.

☞**Exemples** :

- $ty' + y = \sin(t)$ sur $\mathbb{R}$: sur l'intervalle $I =]0;+\infty[$ les solutions de (H) sont les fonctions $y = \frac{\lambda}{t}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ quelconque. On cherche une solution particulière de la forme $y = \frac{\lambda}{t}$ avec λ dérivable sur I ce qui donne $\lambda' = \sin(t)$, une solution particulière est donc $y_1 = -\frac{\cos(t)}{t}$, et les solutions de (E) sur I sont les fonctions $y = \frac{\lambda - \cos(t)}{t}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ quelconque. On se place ensuite sur l'intervalle $J =]-\infty;0[$ où le raisonnement est le même. On vérifie ensuite que la seule solution sur $\mathbb{R}$ est la fonction :
$$y : t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t} \text{ avec } y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = \frac{1}{2}.$$
- $\cos(t)y' - \sin(t)y = t^2$ sur $I =]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$: les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y = \frac{\lambda}{\cos(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ quelconque. On cherche une solution particulière sous la forme $y = \frac{\lambda}{\cos(t)}$ avec λ dérivable sur I, ce qui donne $\lambda' = t^2$. On peut donc prendre comme solution particulière $y_1 = \frac{t^3}{3\cos(t)}$, et les solutions de (E) sont les fonctions :
$$y : t \mapsto \frac{\lambda + t^3}{3\cos(t)} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Remarque 6.2 – *Résoudre de telles équations différentielles revient donc à calculer des intégrales, d'où les expressions que l'on rencontre parfois comme : « intégrer une équation différentielle », ou « solution intégrale d'une équation différentielle ».*

★**Exercice 6.3** *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x^3y' - (3x^2+2)y = x^3$.*

III ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE

On s'intéressera uniquement au cas où les coefficients sont des constantes, c'est à dire aux équations différentielles de la forme : $ay'' + by' + cy = f$ où $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue (second membre). L'équation homogène associée est (H) : $ay'' + by' + cy = 0$.

Pour de telles équations, le problème de Cauchy est : $\begin{cases} ay'' + by' + cy = f \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \beta \end{cases}$, où t_0, α et β sont des données.

1) Étude de l'équation homogène

Théorème 6.5

Soit $S_I(H)$ l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène (H), alors on a les propriétés :
- $0 \in S_I(H)$ *(fonction nulle).*
- $\forall f, g \in S_I(H), f + g \in S_I(H)$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall f \in S_I(H), \alpha f \in S_I(H)$.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

Résolution de (H)

On cherche les solutions de la forme $y = e^{\lambda t}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, on obtient alors $y \in S_{\mathbb{R}}(H) \iff a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, λ doit donc être solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, que l'on appelle **équation caractéristique** de (H). Il faut donc distinguer plusieurs cas :

- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

- Si $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$: il y a deux solutions distinctes à l'équation caractéristique : λ_1 et λ_2. On pose $\phi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$. Soit y deux fois dérivable, posons $z = \frac{y}{\phi_1}$, on a alors $y = z\phi_1$, en remplaçant dans l'équation on obtient que y est solution de (H) si et seulement si $az'' + (2a\lambda_1 + b)z' + (a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)z = 0$, c'est à dire $az'' + (2a\lambda_1 + b)z' = 0$ car λ_1 est racine de l'équation caractéristique. En posant $Z = z'$ on a une équation différentielle linéaire homogène en Z, dont les solutions sont $Z(t) = z'(t) = \gamma e^{-(2\lambda_1 + b/a)t} = \gamma e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$, ce qui équivaut à $z(t) = \beta e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \alpha$, et donc $y(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ des constantes quelconques.
- Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$: alors il y a une solution double à l'équation caractéristique : λ. Posons $\phi_1(t) = e^{\lambda t}$ et $z = \frac{y}{\phi_1}$ *i.e.* $y = z\phi_1$. Le calcul précédent montre que $y \in S(H) \iff z'' = 0$ c'est à dire il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $z(t) = \beta t + \alpha$, ce qui donne $y(t) = (\alpha + \beta t)e^{\lambda t}$.

– $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$) : la démarche est la même, on cherche les solutions de l'équation caractéristique, d'où la discussion :
  - Si $\Delta > 0$: deux racines distinctes λ_1 et λ_2, comme dans le cas complexe, on montre que les solutions de H sont les fonctions $y : t \mapsto \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
  - Si $\Delta = 0$: une racine double λ, comme dans le cas complexe, on montre que les solutions de H sont les fonctions $y : t \mapsto (\alpha + \beta t)e^{\lambda t}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
  - Si $\Delta < 0$: deux racines complexes **non réelles** conjuguées $\lambda = r + i\omega$ et $\overline{\lambda}$. Les solutions **complexes** de (H) sont les fonctions $y(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\overline{\lambda} t}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, une telle solution est réelle ssi $y(t) = \overline{y}(t) = \overline{\alpha} e^{\overline{\lambda} t} + \overline{\beta} e^{\lambda t}$, ce qui équivaut à $\overline{\alpha} = \beta$. Les solutions réelles sont donc les fonctions $y(t) = \alpha e^{\lambda t} + \overline{\alpha} e^{\overline{\lambda} t} = 2\mathrm{Re}(\alpha e^{\lambda t}) = e^{rt}[u\cos(\omega t) + v\sin(\omega t)]$, avec $u = \mathrm{Re}(\alpha)/2$ et $v = -\mathrm{Im}(\alpha)/2$ réels quelconques (car α est un complexe quelconque). On a encore que les solutions de (H) sont les fonctions $y = u\phi_1 + v\phi_2$ avec $u, v \in \mathbb{R}$ et $\phi_1(t) = e^{rt}\cos(\omega t)$ et $\phi_2(t) = e^{rt}\sin(\omega t)$.

À retenir : solutions de l'équation homogène

Soit $x^2 + ax + b = 0$ l'équation caractéristique et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant :

– Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (a, b et c sont complexes avec $a \neq 0$) :
  - Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique à deux solutions distinctes : λ_1 et λ_2. Les solutions sont les fonctions : $t \mapsto \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
  - Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique à une solution double : $\lambda_1 = \lambda_2$. Les solutions sont les fonctions : $t \mapsto (\alpha + \beta t)e^{\lambda_1 t}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

– Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (a, b et c sont **réels** avec $a \neq 0$) :
  - Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique à deux solutions distinctes : λ_1 et λ_2. Les solutions sont les fonctions : $t \mapsto \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
  - Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique à une solution double : $\lambda_1 = \lambda_2$. Les solutions sont les fonctions : $t \mapsto (\alpha + \beta t)e^{\lambda_1 t}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
  - Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions complexes non réelles et conjuguées : λ et $\overline{\lambda}$, en posant $\lambda = r + i\omega$ (forme algébrique), les solutions sont les fonctions :

$$t \mapsto (\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t))e^{rt} = A\cos(\omega t + \varphi)e^{rt} \text{ avec } \alpha, \beta, A, \varphi \in \mathbb{R}$$

Théorème 6.6

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, les solutions réelles de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ sont les parties réelles des solutions complexes.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

2) Étude de l'équation avec second membre

Théorème 6.7 (structure des solutions)

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue, alors l'équation (E) : $ay'' + by' + cy = f$ admet des solutions sur I. Si y_1 est une solution de (E), alors les solutions de (E) sont les fonctions définies sur I par $y : t \mapsto y_1(t) + y_H(t)$ avec y_H solution quelconque de (H). De plus, le problème de Cauchy a une unique solution.

Preuve : L'existence dans le cas général d'une solution particulière est admise. Soit y_1 une solution de (E), soit $g \in S_I(H)$, il est facile de vérifier que $y_1 + g$ est solution de (E), réciproquement, si g est solution de (E), il est facile de vérifier que $g - y_1$ est solution de (H). Les solutions au problème de Cauchy sont les fonctions de la forme $y = y_1 + \alpha\phi_1 + \beta\phi_2$ vérifiant $y(t_0) = c_1$ et $y'(t_0) = c_2$. Ce qui donne le système :

$$\begin{cases} \alpha\phi_1(t_0) + \beta\phi_2(t_0) & = c_1 - y_1(t_0) \\ \alpha\phi_1'(t_0) + \beta\phi_2'(t_0) & = c_2 - y_1'(t_0) \end{cases}.$$

Lorsque $\phi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ et $\phi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ avec λ_1 et λ_2 les racines distinctes de l'équation caractéristique, le déterminant du système est $D = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)t_0} \neq 0$. Lorsque les deux racines sont confondues, alors $\phi_1(t) = e^{\lambda t}$ et $\phi_2(t) = t\phi_1(t)$, dans ce cas, le déterminant du système est $D = e^{2\lambda t_0} \neq 0$, dans les deux cas, le système a une unique solution. □

Remarque 6.3 – *Dans le cas réel avec $\Delta < 0$, l'unique solution complexe au problème de Cauchy est une solution réelle.*

Dans la suite on s'intéressera seulement au cas où le second membre est de la forme $f(t) = \alpha e^{\lambda t}$ où α et λ sont des constantes dans $\mathbb{K}$.

Théorème 6.8

L'équation $ay'' + by' + cy = \alpha e^{\lambda t}$ admet une solution particulière de la forme $y_1(t) = \beta e^{\lambda t}$ ($\beta \in \mathbb{K}$) si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique, de la forme $y_1(t) = \beta t e^{\lambda t}$ si λ est racine simple de l'équation caractéristique ($\Delta \neq 0$), et de la forme $y_1(t) = \beta t^2 e^{\lambda t}$ si λ est racine double de l'équation caractéristique ($\Delta = 0$),

Preuve : On pose $y(t) = Q(t)e^{\lambda t}$, y est solution si et seulement si $aQ''(t) + (2a\lambda + b)Q'(t) + (a\lambda^2 + b\lambda + c)Q(t) = \alpha$, d'où la discussion :

- Si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique : on voit que la constante $Q(t) = \frac{\alpha}{a\lambda^2+b\lambda+c}$ convient.
- Si λ est solution simple de l'équation caractéristique ($2a\lambda + b \neq 0$) : alors $Q(t) = \frac{\alpha t}{2a+\lambda}$.
- Si λ est solution double de l'équation caractéristique ($2a\lambda + b = 0$) : on a $Q(t) = \frac{\alpha t^2}{2a}$ convient.

□

Théorème 6.9

• Lorsque le second membre est de la forme $f(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t}$, on cherche une solution particulière y_i à l'équation $ay'' + by' + cy = \alpha_i e^{\lambda_i t}$ pour i allant de 1 à n, la fonction $y = y_1 + \cdots + y_n$ est une solution particulière de $ay'' + by' + cy = f$, c'est le ***principe de superposition****.*
• Si a, b, c sont réels et si y_0 est solution de $ay'' + by' + cy = f(t)$ alors $\mathrm{Re}(y_0)$ est solution de $ay'' + by' + cy = \mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(y_0)$ est solution de $ay'' + by' + cy = \mathrm{Im}(f)$

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

☞**Exemples** :

- $y'' + \omega^2 y = 1$ avec $\omega \in \mathbb{R}^*$, ici $\lambda = 0$, il y a une solution particulière évidente qui est $y_1 : t \mapsto \frac{1}{\omega^2}$ Les solutions réelles de l'équation homogène sont les fonctions $y_H : t \mapsto \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, et les solutions de l'équation sont donc les fonctions $y : t \mapsto \frac{1}{\omega^2} + \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$.
- $y'' - 4y' + 4y = 3(1 + \sin(t) + e^{2t})$ sur $\mathbb{R}$: l'équation caractéristique est $x^2 - 4x + 4 = 0 = (x-2)^2$, il y a une solution double 2, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y(t) = (\alpha + \beta t)e^{2t}$. Cherchons une solution particulière en prenant comme second membre :
  – $f_1(t) = 3$: il y a une solution particulière constante $y_1(t) = \frac{3}{4}$.
  – $f_2(t) = 3e^{2t}$: on chercher une solution particulière de la forme $y = Q(t)e^{2t}$, ce qui donne $Q''(t) = 3$ et donc on peut prendre $y_2(t) = \frac{3}{2}t^2e^{2t}$.
  – $f_3(t) = 3\sin(t)$: on prend en fait $f_3(t) = 3e^{it}$ puis on prendra la partie imaginaire d'une solution particulière. On cherche y sous la forme $y(t) = Q(t)e^{it}$ ce qui donne $Q''(t) + (2i-4)Q'(t) + (3-4i)Q(t) = 3$, d'où $Q(t) = \frac{3}{3-4i} = 3\frac{3+4i}{25}$. Une solution particulière est donc $y_3(t) = \mathrm{Im}(3\frac{3+4i}{25}e^{it}) = \frac{9}{25}\sin(t) + \frac{12}{25}\cos(t)$.
  Les solutions sont donc les fonctions :

$$y(t) = \frac{3}{4} + \frac{9}{25}\sin(t) + \frac{12}{25}\cos(t) + (\alpha + \beta t + \frac{3}{2}t^2)e^{2t}.$$

★**Exercice 6.4** *Résoudre $y'' - y' - 6y = 10e^{3x} + e^{-2x}$.*

IV COMPLÉMENTS

1) Changement de variable

Il arrive que pour certaines équations différentielles qui n'entrent pas dans le cadre étudié précédemment, un changement de variable (et non pas de fonction inconnue) permette de s'y ramener. En voici un exemple, soit à résoudre (E) $x^2y''-xy'+y=x$ pour $x>0$, en faisant le changement de variable $x=e^t$ avec $t\in\mathbb{R}$. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathrm{I}=]0;+\infty[$, pour $t\in\mathbb{R}$ posons $g(t)=y(e^t)$ $[=y(x)]$, alors g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $g'(t)=e^ty'(e^t)$, et $g''(t)=e^ty'(e^t)+e^{2t}y''(t)$, d'où :

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}) &\iff \forall x>0,\ x^2y''(x)-xy'(x)+y(x)=x\\ &\iff \forall t\in\mathbb{R},\ e^{2t}y''(e^t)-e^ty'(e^t)+y(e^t)=e^t\\ &\iff \forall t\in\mathbb{R},\ g''(t)-2g'(t)+g(t)=e^t \quad (\mathrm{E}')\end{aligned}$$

La fonction g vérifie donc une EDL2 à coefficients constants, l'équation caractéristique est $\mathrm{X}^2-2\mathrm{X}+1=0$ qui admet 1 comme racine double, les solutions de l'équation homogène sont les fonction $g_{\mathrm{H}}\colon t\to(a+bt)e^t$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. D'après le cours, il existe une solution particulière g_0 de la forme $g_0(t)=ct^2e^t$, d'où $g_0'(t)=ce^t(t^2+2t)$ et $g_0''(t)=ce^t(t^2+4t+2)$, en reportant dans l'équation on obtient $ce^t[t^2+4t+2-2t^2-4t+t^2]=e^t$ ce qui donne $c=\frac{1}{2}$ et donc $g_(t)=\frac{t^2}{2}e^t$, les solutions générales de (E′) sont les fonctions $g\colon t\mapsto(a+bt+\frac{t^2}{2})e^t$, et donc les solutions de (E) sont les fonctions $y\colon x\mapsto(a+b\ln(x)+\frac{\ln^2(x)}{2})x$ car $g(t)=y(x)$ avec $t=\ln(x)$.

2) Équations à variables séparées

Définition 6.6

Une équation différentielle à variables séparées est une équation de la forme : $y'b(y)=a(t)$ où a,b sont deux fonctions continues données.

À retenir : méthode de résolution

Si a est continue sur un intervalle I et b sur un intervalle J, on peut considérer une primitive A de a sur I et une primitive B de b sur J, dans ce cas l'équation équivaut à : $\frac{d}{dt}[\mathrm{B}(y)]=\mathrm{A}'(t)$, et donc $\mathrm{B}(y)=\mathrm{A}(t)+\lambda$ où λ désigne une constante. On regarde ensuite si la fonction B est localement ou globalement bijective, auquel cas on pourra écrire $y(t)=\mathrm{B}^{-1}(\mathrm{A}(t)+\lambda)$.

☞**Exemple** : $t^3y'+y^3=0$ avec $y(1)=-1$, y ne doit pas être constamment nulle, si une telle solution existe, il doit exister un intervalle I sur lequel y ne s'annule pas, un tel intervalle ne peut pas contenir 0 et sur I l'équation est équivalente à : $\frac{y'}{y^3}=\frac{-1}{t^3}$, c'est une équation à variable séparée. Elle est équivalente à : $-\frac{1}{y^2}=\frac{1}{t^2}+\lambda$, ce qui donne $y^2=-\frac{t^2}{1+\lambda t^2}$, on voit que la condition initiale donne la constante $\lambda=-2$. Comme y ne s'annule pas sur I, y garde un signe constant et donc $\forall\ t\in\mathrm{I}, y(t)=-\sqrt{\frac{t^2}{2t^2-1}}$. Cette solution est définie sur l'intervalle $]\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty[$.

3) Équation de Bernoulli

Définition 6.7

Une équation de Bernoulli[2] *est une équation différentielle de la forme $y'=a(t)y^\lambda+b(t)y$ où a et b sont deux fonctions continues sur un intervalle* I, *et* $\lambda\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$.

À retenir : méthode de résolution

La fonction nulle est solution. S'il existe une solution y non constamment nulle, alors il doit exister un intervalle J sur lequel y ne s'annule pas, sur un tel intervalle y est de signe constant, on peut donc faire le changement de fonction $y=\varepsilon z^\alpha$ avec $\varepsilon=\pm1$ suivant le signe de y, l'équation devient alors :

2. BERNOULLI Jakob (1654 – 1705) : c'est le plus illustre d'une grande famille de mathématiciens suisses.

$\alpha z' = b(t)z + a(t)z^{\alpha(\lambda-1)+1}$, en prenant $\alpha = \frac{1}{1-\lambda}$, on a une équation différentielle linéaire du premier ordre, on sait donc la résoudre.

☞**Exemple** : $t^2y' + y + y^2 = 0$ avec $y(1) = 1$: y est une solution non constamment nulle, on pose $z = \frac{1}{y}$ ce qui donne : $z' = \frac{1}{t^2}z + \frac{1}{t^2}$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $z(t) = \lambda e^{-\frac{1}{t}}$ et une solution particulière est $z_1(t) = -1$, les solutions générales sont donc les fonctions $z(t) = -1 + \lambda e^{-\frac{1}{t}}$, la condition initiale donne $\lambda = 2e$ d'où $y(t) = \frac{1}{2e^{1-\frac{1}{t}}-1}$. Cette solution est définie sur l'intervalle $]\frac{1}{1+\ln(2)};+\infty[$.

★**Exercice 6.5** *Résoudre $y' = xy^2 + y$ avec $y(0) = 1$.*

V SOLUTION DES EXERCICES

Solution 6.1

1/ *Une primitive de h est $\mathrm{H}: t \mapsto \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}$.*

2/ *$f(t) = \frac{1-it}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} + i\frac{-t}{1+t^2}$, donc une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est définie par $\mathrm{F}(t) = \arctan(t) - \frac{i}{2}\ln(1+t^2)$.*

3/ *$g(t)$ est la partie réelle de $h(t) = e^te^{it} = e^{at}$ avec $a = 1+i$. Une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $\mathrm{H}(t) = \frac{1}{a}e^{at} = e^t\frac{e^{it}}{1+i}$. Une primitive G de g sur $\mathbb{R}$ est définie par $\mathrm{G}(t) = \mathrm{Re}(\mathrm{H}(t)) = e^t\mathrm{Re}(\frac{e^{it}(1-i)}{2}) = \frac{1}{2}e^t(\cos(t)+\sin(t))$.*

Solution 6.2 $\left|\int_0^\pi e^{(1+i)t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^\pi \left|e^{(1+i)t}\right|\mathrm{d}t$ *(majoration en module), or $e^{(1+i)t} = e^te^{it}$ donc $|e^{(1+i)t}| = e^t$, d'où $\left|\int_0^\pi e^{(1+i)t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^\pi e^t\,\mathrm{d}t = e^\pi - 1$.*

Solution 6.3 *Équation différentielle linéaire d'ordre 1, le coefficient de y' s'annule en 0.*

- *Résolution sur $]-\infty;0[$: $(\mathrm{H}) \iff y' = (\frac{3}{x} + \frac{2}{x^3})y \iff y = \lambda e^{3\ln(|x|)-\frac{1}{x^2}} = \alpha\varphi(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varphi(x) = x^3e^{-\frac{1}{x^2}}$.*
  La méthode de la variation de la constante donne $\lambda' = \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}$, on peut donc prendre $\lambda = -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x^2}}$ ce qui donne la solution particulière $y_1(x) = -\frac{x^3}{2}$. Les solutions générales sur cet intervalle sont les fonctions $y : x \mapsto -\frac{x^3}{2} + \lambda x^3e^{-\frac{1}{x^2}}$.
- *Sur $]0;+\infty[$: mêmes résultats.*
- *Sur $\mathbb{R}$: y est solution sur $\mathbb{R}$ ssi* $\boxed{\begin{cases} y(x) = -\frac{x^3}{2} + \lambda x^3e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x < 0 \\ y(x) = 0 & \text{si } x = 0 \\ y(x) = -\frac{x^3}{2} + \alpha x^3e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$ *avec $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$, on vérifie qu'une telle fonction est bien dérivable en 0.*

Solution 6.4 *Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation caractéristique est $x^2 - x - 6 = 0$ et ses racines sont 3 et -2, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y : x \mapsto \alpha e^{3x}\beta e^{-2x}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Cherchons une solution particulière en prenant comme second membre :*

- *$10e^{3x}$, en posant $y_1(x) = axe^{3x}$ où a est une constante. On obtient la condition $5a = 10$, et donc $y_1(x) = 2xe^{3x}$.*
- *e^{-2x}, en posant $y_2(x) = axe^{-2x}$. On obtient la condition $-5a = 1$, et donc $y_2(x) = -\frac{x}{5})e^{-2x}$.*

Les solutions générales sont les fonctions $y : x \mapsto (\alpha + 2x)e^{3x} + (\beta - \frac{x^2}{10} - \frac{x}{5})e^{-2x}$ (principe de superposition).

Solution 6.5 *Équation de Bernoulli, on cherche une solution y qui ne s'annule par sur un intervalle I contenant 0. On pose $z = \frac{1}{y}$ ce qui donne $-\frac{z'}{z^2} = \frac{x}{z^2} + \frac{1}{z}$ ou encore $z' = -z + x$ avec la condition $z(0) = 1$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $z : x \mapsto \lambda e^{-x}$ et la fonction $z_1 : x \mapsto 1 - x$ est solution particulière. Les solutions générales sont les fonctions $z : x \mapsto 1 - x + \lambda e^{-x}$, la condition $z(0) = 1$ donne $\lambda = 0$, d'où $z(x) = 1 - x$ et donc $y : x \mapsto \frac{1}{1-x}$, définie sur $\mathrm{I} =]-\infty;1[$.*