Chapitre 5

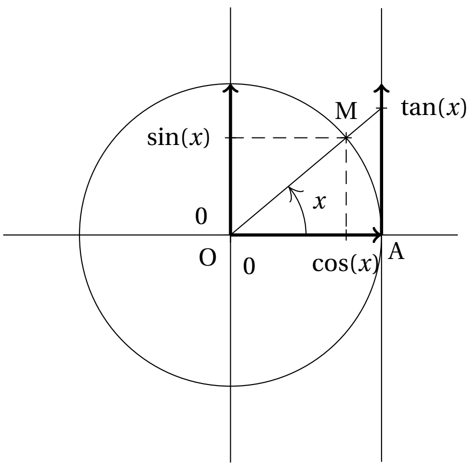
Fonctions usuelles

Sommaire

I FONCTIONS CIRCULAIRES - INVERSIONS

1) Fonctions circulaires : rappels

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit x un réel, et $M(x)$ le point du cercle trigonométrique tel que $(\vec{u},\overrightarrow{OM}) = x \pmod{2\pi}$ alors les coordonnées de $M(x)$ sont $(\cos(x),\sin(x))$, lorsque $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, on pose $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.



Remarque 5.1 – *Le réel x représente également la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AM}$ avec $A(1,0)$, le cercle étant orienté dans le sens direct.*

Quelques propriétés :
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$.
- Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques définies continues dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1;1]$, et on a $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

– La fonction tangente est π-périodique, définie continue dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et on a $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.
– Les fonctions sinus et tangente sont impaires alors que la fonction cosinus est paire.

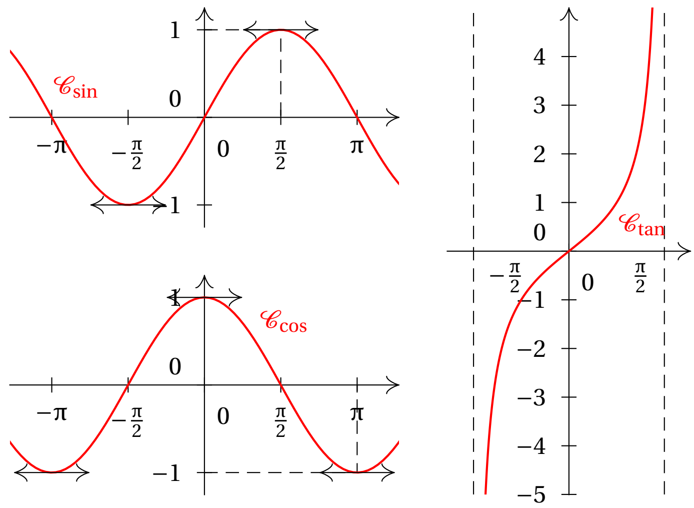
À retenir

Si u est une fonction dérivable alors $\sin(u)$ et $\cos(u)$ sont dérivables avec les formules :

$$[\sin(u)]' = u'\cos(u) \text{ et } [\cos(u)]' = -u'\sin(u)$$

Si de plus la fonction $\cos(u))$ ne s'annule pas, alors la fonction $\tan(u)$ est dérivable et :

$$[\tan(u)]' = u'(1 + \tan^2(u)) = \frac{u'}{\cos^2(u)}$$



– On a les relations $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ et $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$.

– On a les valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

, comme $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ et $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, on peut compléter le tableau avec les valeurs $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$ et π, la parité permet ensuite d'avoir un tableau de −π à π.

– Formules d'addition : $\forall x, y \in \mathbb{R}$ on a :
- $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$. En particulier, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$.
- $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$. En particilier, $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
- $\tan(x + y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$. En particulier, $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$.
- En posant $u = \tan(\frac{x}{2})$, on a $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$ et $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.

★**Exercice 5.1**

1/ *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leqslant |x|, 0 \leqslant 1 - \cos(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$.

2/ *Montrer que* $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, |\tan(x)| \geqslant |x|$.

2) Inversion des fonctions circulaires

La fonction arcsin

La fonction $f : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1]$ définie par $f(x) = \sin(x)$ est continue et strictement croissante sur $\mathrm{I} = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, elle réalise donc une bijection entre I et $f(\mathrm{I}) = \mathrm{J} = [\sin(-\frac{\pi}{2}); \sin(\frac{\pi}{2})] = [-1; 1]$. La bijection réciproque est notée $f^{-1} = \arcsin$ [arcsinus], elle est définie par :

$$\begin{array}{rccl} \arcsin : & [-1;1] & \to & [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ & x & \mapsto & \arcsin(x) = y \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ \sin(y) = x \end{array} \right. \end{array}.$$

☞**Exemple** : $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}, \ldots$

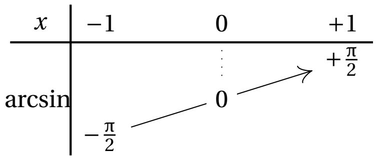
La fonction f étant strictement croissante et continue sur I, la fonction $f^{-1} = \arcsin$ est strictement croissante et continue sur $[-1; 1]$; f est dérivable sur I et sa dérivée s'annule en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, mais pas sur l'intervalle ouvert, la réciproque est donc dérivable sur $]-1;1[$ mais pas en -1 ni en 1 [tangente verticale en ces points], on a la formule suivante :

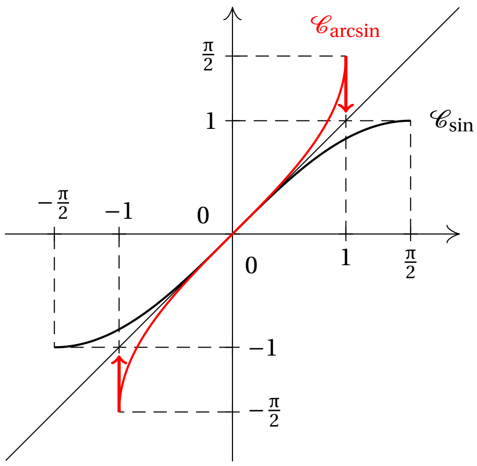
$$\forall x \in]-1;1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Car : $\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1$, c'est à dire $\cos^2(\arcsin(x)) + x^2 = 1$ d'où $\cos(\arcsin(x)) = \pm\sqrt{1-x^2}$, mais ce cosinus est positif car $\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, donc $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

À retenir

Si u est une fonction dérivable à valeurs dans $]-1;1[$ alors la fonction $\arcsin(u)$ est dérivable et : $[\arcsin(u)]' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$





Propriétés :
- $\forall x \in [-1;1], \sin(\arcsin(x)) = x$.
- $\forall x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}], \arcsin(\sin(x)) = x$.
- $\forall x \in [-1;1], \arcsin(-x) = -\arcsin(x)$ [fonction impaire].
- $\forall x \in [-1;1], \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
- $\forall x \in [-\pi;\pi], \arcsin(\cos(x)) = \frac{\pi}{2} - |x|$.

Attention !

La fonction $f : x \mapsto \arcsin(\sin(x))$ n'est pas l'identité, elle est 2π- périodique et impaire, il suffit donc l'étudier sur $[0;\pi]$, mais elle vérifie $f(\pi - x) = f(x)$, la droite $x = \frac{\pi}{2}$ est donc un axe de symétrie et l'étude se réduit à $[0;\frac{\pi}{2}]$, intervalle sur lequel $f(x) = x$.

La fonction arccos

La fonction $f : [0;\pi] \to [-1;1]$ définie par $f(x) = \cos(x)$, est continue et strictement décroissante, elle définit donc une bijection entre $[0;\pi]$ et $f([0;\pi]) = [f(\pi);f(0)] = [-1;1]$. Par définition, la bijection réciproque est notée $f^{-1} = \arccos$ [arccosinus], elle est définie par :

$$\begin{array}{rccl} \arccos : & [-1;1] & \to & [0;\pi] \\ & x & \mapsto & \arccos(x) = y \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{c} y \in [0;\pi] \\ \cos(y) = x \end{array} \right. \end{array}.$$

☞**Exemple** : $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos(1) = 0$, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, $\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$, ...

La fonction f étant strictement décroissante et continue sur $I = [0;\pi]$, la fonction $f^{-1} = \arccos$ est strictement décroissante et continue sur $[-1;1]$; f est dérivable sur I et sa dérivée s'annule en 0 et et π, mais pas sur l'intervalle ouvert, la réciproque est donc dérivable sur $]-1;1[$ mais pas en -1 ni en 1 [tangente verticale en ces points], on a la formule suivante :

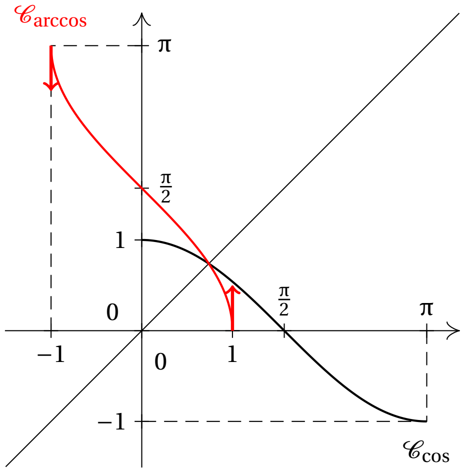
$$\forall x \in]-1;1[, \arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Car : $\sin^2(\arccos(x)) + \cos^2(\arccos(x)) = 1$, c'est à dire $\sin^2(\arccos(x)) + x^2 = 1$ d'où $\sin(\arccos(x)) = \pm\sqrt{1-x^2}$, mais ce sinus est positif car $\arccos(x) \in [0;\pi]$, donc $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

À retenir

Si u est une fonction dérivable à valeurs dans $]-1;1[$ alors la focntion $\arccos(u)$ est dérivable et :
$$[\arccos(u)]' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

x	-1		0		$+1$
arccos	π	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0



Propriétés :

- $\forall x \in [-1;1], \cos(\arccos(x)) = x$.
- $\forall x \in [0;\pi], \arccos(\cos(x)) = x$.
- $\forall x \in [-1;1], \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
- $\forall x \in [-1;1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.
- $\forall x \in [-1;1], \arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$.

Attention !

La fonction $f : x \mapsto \arccos(\cos(x))$ *n'est pas l'identité, elle est* 2π*- périodique et paire, il suffit donc l'étudier sur* $[0;\pi]$ *intervalle sur lequel* $f(x) = x$*.*

La fonction arctan

La fonction $f :]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan(x)$, est continue et strictement croissante, elle réalise donc une bijection entre $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et $f(]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$. Par définition, la bijection réciproque est notée $f^{-1} = \arctan$ [arctangente], elle est définie par :

$$\begin{array}{rccl} \arctan : & \mathbb{R} & \to &]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\\ & x & \mapsto & \arctan(x) = y \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} y \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\\ \tan(y) = x \end{array} \right. \end{array}.$$

☞**Exemple** : $\arctan(0) = 0$, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$, ...

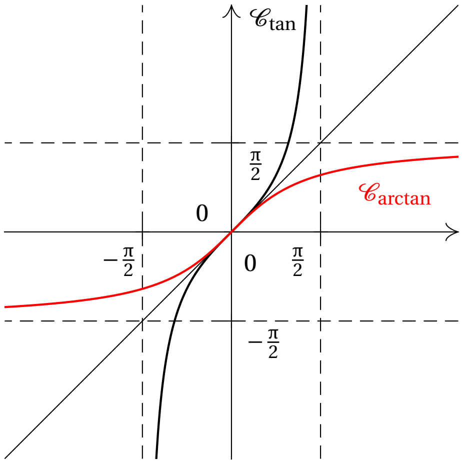
La fonction f étant strictement croissante et continue sur $\mathrm{I} =]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, la fonction $f^{-1} = \arctan$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$; f est dérivable sur I et sa dérivée ne s'annule pas sur I, la réciproque est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

À retenir

Si u désigne un fonction dérivable, alors la fonction $\arctan(u)$ est dérivable et :
$$[\arctan(u)]' = \frac{u'}{1+u^2}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
arctan	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	0 ↗	$\frac{\pi}{2}$



Propriétés :
- $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$.
- $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan(x)) = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan(-x) = -\arctan(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan(x) = \mathrm{Arg}(1 + i x)$.

II FONCTIONS LOGARITHME ET EXPONENTIELLE

1) Logarithme népérien

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$, elle admet une unique primitive qui s'annule en 1.

Définition 5.1

L'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1 est appelée ***logarithme népérien*** *et notée* ln. *On a donc $\forall x > 0, \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$.*

Cette fonction est donc dérivable sur $I]0;+\infty[$ et $\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$, elle est donc strictement croissante sur I.

Soit $y > 0$, la fonction $f : x \mapsto \ln(xy)$ et dérivable sur I et $f'(x) = y\frac{1}{xy} = \frac{1}{x}$, on en déduit que $f(x) = \ln(x) + c$ où c est une constante, on a $\ln(y) = f(1) = \ln(1) + c = c$, par conséquent on obtient :

Théorème 5.1 (Propriété fondamentale du logarithme)

$$\forall x, y > 0, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Conséquences :
- Si u est une fonction dérivable qui ne s'annule pas, alors $[\ln(|u|)]' = \frac{u'}{u}$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \ln(|xy|) = \ln(|x|) + \ln(|y|)$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \ln(|\frac{x}{y}|) = \ln(|x|) - \ln(|y|)$.
- $\forall n \in \mathbb{Z}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*, \ln(|x^n|) = n\ln(|x|)$.

Théorème 5.2 (Limites du logarithme népérien)

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty;\ \lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty;\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0;\ \lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0;\ \lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1.$$

Preuve : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(2^n) = n\ln(2)$ or $\ln(2) > 0$, donc la suite $(\ln(2^n))$ tend vers $+\infty$ ce qui prouve que la fonction ln n'est pas majorée, par conséquent elle tend $+\infty$.

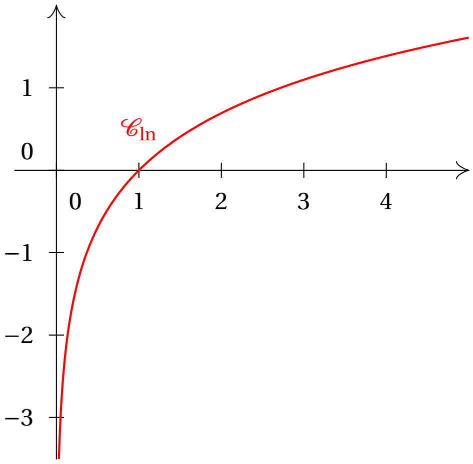
En posant $X = \frac{1}{x}$ on a $\lim\limits_{x\to0^+} X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} -\ln(X) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \ln'(1) = 1$.

Pour $t \geqslant 1$ on a $\sqrt{t} \leqslant t$ et donc pour $x \geqslant 1$ on a $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2[\sqrt{x} - 1]$, le théorème des gendarmes entraîne $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. □

Courbe représentative :

x	0		1		$+\infty$
$\ln'$	‖	$+$		$+$	
$\ln$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Théorème 5.3 (Inégalité de convexité)

$$\forall x > 0, \ln(x) \leqslant x - 1.$$

Preuve : Il suffit d'étudier la fonction $f : x \mapsto \ln(x) - x + 1$. □

2) La fonction exponentielle

La fonction ln est strictement croissante sur $I =]0;+\infty[$, elle définit donc une bijection de I sur $J = \mathrm{Im}(\ln)$, comme elle est continue on a $\mathrm{Im}(\ln) =]\lim_{0} \ln ; \lim_{+\infty} \ln[= \mathbb{R}$.

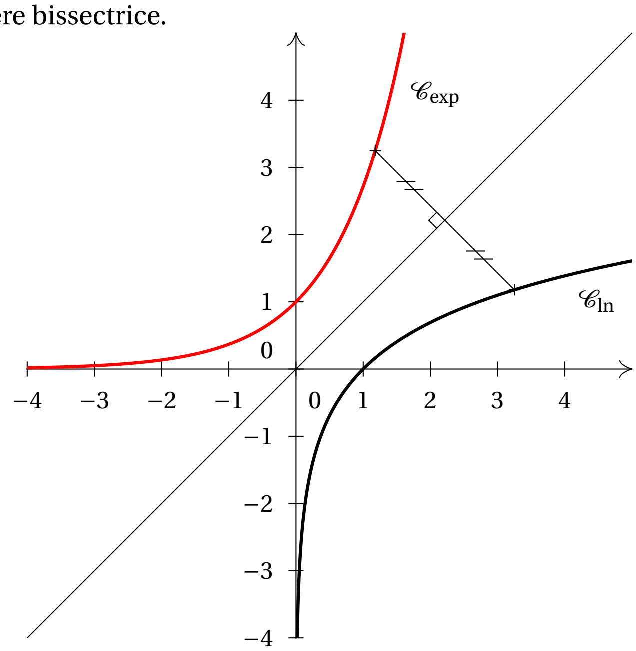
Définition 5.2

*La réciproque est appelée **fonction exponentielle** et notée* exp*, elle est définie par :*

$$\begin{array}{rccl} \exp : & \mathbb{R} & \rightarrow &]0;+\infty[\\ & x & \mapsto & \exp(x) = y \textit{ tel que } y > 0 \textit{ et } \ln(y) = x \end{array}.$$

Propriétés :

- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et continue, de plus $\exp(0) = 1$.
- La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée ne s'annule pas, donc la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\exp'(x) = \dfrac{1}{\ln'(\exp(x))} = \exp(x)}$.
- Dans un repère orthonormé, la courbe de la fonction exp et celle de la fonction ln sont symétriques par rapport à la première bissectrice.



Soient $x, y \in \mathbb{R}$, notons $X = \exp(x)$ et $Y = \exp(y)$ alors X et Y sont dans $]0;+\infty[$ on peut donc écrire $\ln(XY) = \ln(X) + \ln(Y)$ ce qui donne $x + y = \ln(XY)$, par conséquent $\exp(x+y) = XY = \exp(x)\exp(y)$, on peut donc énoncer :

Théorème 5.4 (Propriété fondamentale de l'exponentielle)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

Il en découle en particulier que $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

Notation : On déduit de ce théorème que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout réel x on a $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$. En particulier on a pour $x = 1$, $\exp(n) = [\exp(1)]^n$. On pose alors $\boxed{e = \exp(1)}$, d'où $\exp(n) = e^n$. On convient alors d'écrire pour tout réel x :

$$\boxed{\exp(x) = e^x}.$$

Les propriétés s'écrivent alors :
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$.
- $e^0 = 1$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $e^{nx} = [e^x]^n$.
- Si u désigne une fonction dérivable alors $[e^u]' = u' \times e^u$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant x + 1$.
  Preuve : Soit $X = e^x$, on sait que $\ln(X) \leqslant X - 1$ ce qui donne l'inégalité. □

Théorème 5.5 (Limites de la fonction exponentielle)

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0,\ \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty,\ \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Preuve : La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\mathrm{Im}(\exp) =]\lim_{-\infty}\exp;\lim_{+\infty}\exp[=]0;+\infty[$. Soit $X = e^x$ alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\ln(X)} = +\infty$. $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = \exp'(0) = 1$. □

Remarque 5.2 – *Il en découle que* $\lim_{x\to+\infty} x e^{-x} = 0$.

III FONCTIONS PUISSANCES

Les puissances entières sont supposées connues.

1) Puissance quelconque

Définition 5.3

Si α *est un réel et si* $x > 0$ *alors on pose* $x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)}$.

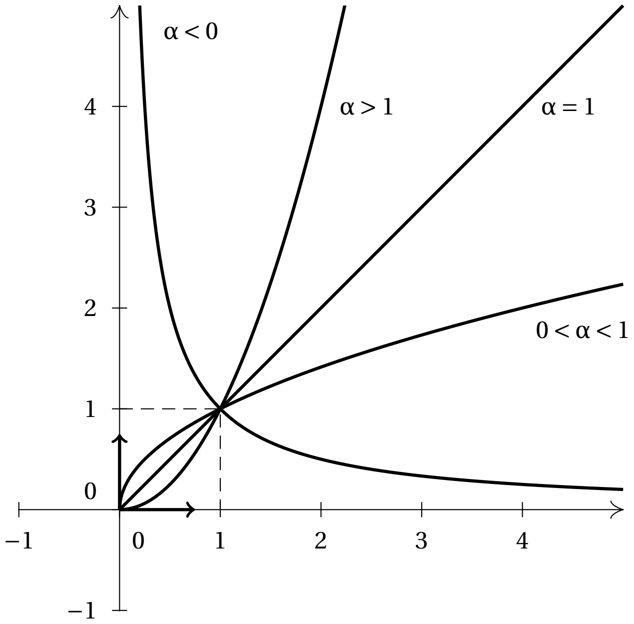
Cela définit une fonction f_α continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ avec la formule : $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Il en découle que si u est une fonction dérivable à valeurs strictement positives, alors la fonction u^α est dérivable et :

$$\boxed{(u^\alpha)' = \alpha \times u' \times u^{\alpha-1}}$$

On a $\lim_{x\to0} f_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$. Dans le premier cas on pose $0^\alpha = 0$, dans le second cas il y a une asymptote verticale.

Lorsque $\alpha > 0$: $\frac{x^\alpha - 0}{x} = e^{(\alpha-1)\ln(x)} \xrightarrow[x\to0]{} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$, lorsque $\alpha > 1$ on a une tangente horizontale et lorsque $\alpha < 1$ on a une tangente verticale.



Cas particuliers (avec $x>0$) :

a) Lorsque $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, on retrouve bien les puissances entières car $\exp(n\ln(x)) = \big(\exp(\ln(x))\big)^n = x^n$.

b) Lorsque $\alpha = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$: soit $y = x^\alpha$, on a $y^n = \exp(\frac{n}{n}\ln(x)) = x$, comme y est positif, on dit que y est la racine n^e de x. Notation pour $x>0$: $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$.

c) Lorsque $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$: soit $y = x^\alpha$, on a $y^q = \exp(q\frac{p}{q}\ln(x)) = x^p$, comme y est positif, y est la racine q^e de x^p. Autrement dit, pour $x>0$, $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$.

Théorème 5.6 (Propriétés)

Avec $x,\ y>0$ et $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$:

- $\ln(x^\alpha) = \alpha\ln(x)$.
- $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$, *et donc* $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$, *et* $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$.
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
- $(xy)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha$.
- *Pour* α *non nul,* $y = x^\alpha \iff x = y^{\frac{1}{\alpha}}$.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

★**Exercice 5.2**

1/ *Soient u et v deux fonctions dérivables avec $u>0$, calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto u(x)^{v(x)}$.*

2/ *Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.*

2) Croissance comparée de ces fonctions

Comparaison des puissances : si $\alpha < \beta$ alors x^α est négligeable devant x^β au voisinage de $+\infty$ et x^β est négligeable devant x^α au voisinage de 0, c'est à dire :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\beta}{x^\alpha} = 0}$$

Comparaison des puissances et des logarithmes : si α et β sont des réels **strictement positifs**, alors $[\ln(x)]^\alpha$ est négligeable devant x^β au voisinage de $+\infty$ et $|\ln(x)|^\alpha$ est négligeable devant $\frac{1}{x^\beta}$ au voisinage de 0, c'est à dire :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{[\ln(x)]^\alpha}{x^\beta} = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} x^\beta|\ln(x)|^\alpha = 0}$$

Preuve : $\frac{[\ln(x)]^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\frac{\alpha}{\beta}\ln(u)}{u}\right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\ln(u)}{u}\right)^\alpha$ avec $u = x^{\frac{\beta}{\alpha}}$, ce qui donne la première limite. La deuxième en découle avec le changement de variable $u = \frac{1}{x}$. □

Comparaison des puissances et des exponentielles : si α est un réel et si $\beta > 0$, alors x^α est négligeable devant $e^{\beta x}$ au voisinage de $+\infty$, c'est à dire :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0}.$$

Preuve : Lorsque $\alpha \leqslant 0$ il n'y a rien à démontrer. Lorsque $\alpha > 0$, $u = e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et on a $x^\alpha e^{-\beta x} = \frac{[\ln(u)]^\alpha}{u^\beta} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$. $\square$

★**Exercice 5.3** *Comparer x^α et e^{x^β} au voisinage de $+\infty$ avec α et β strictement positifs.*

IV FONCTIONS HYPERBOLIQUES

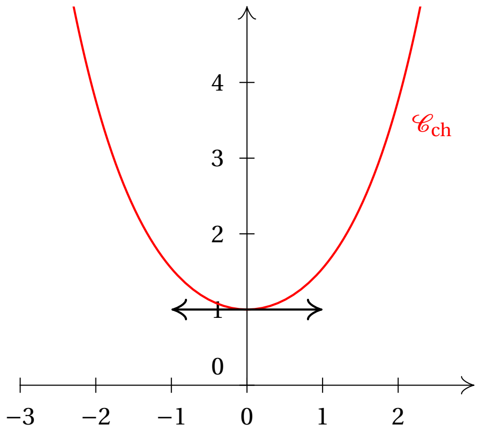
1) Définition

Définition 5.4

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ [cosinus hyperbolique], $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ [sinus hyperbolique] et $\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ [tangente hyperbolique].

Le cosinus hyperbolique : la fonction ch est paire, définie continue dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$, on en déduit le tableau de variation et la courbe :

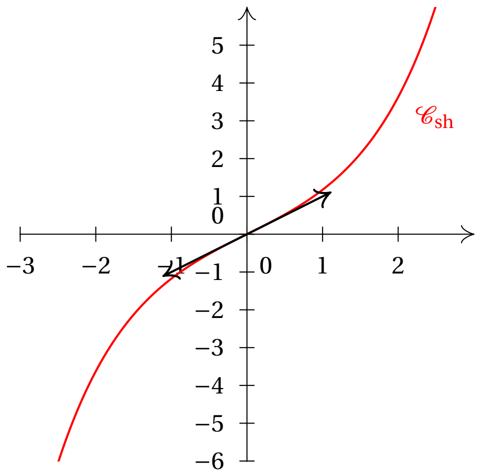
x	$-\infty$		0		$+\infty$
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



Quelques propriétés :
- $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) \geqslant 1$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{ch}(x)}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{ch}(x)}{e^x} = \frac{1}{2}$.

Le sinus hyperbolique : la fonction sh est impaire, définie continue dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$, on en déduit le tableau de variation et la courbe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Quelques propriétés :
- $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) \geqslant 1$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{ch}(x)}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{ch}(x)}{e^x} = \frac{1}{2}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = e^x$ et $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = e^{-x}$.

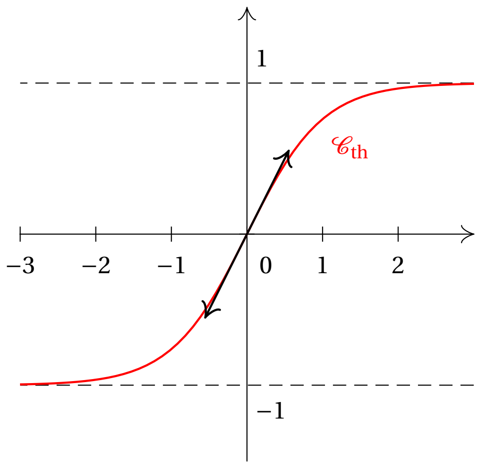
– $\forall x > 0, x < \text{sh}(x) < \text{ch}(x)$.
– $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\text{sh}(x)}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\text{sh}(x)}{e^x} = \frac{1}{2}$.

La tangente hyperbolique : la fonction th est impaire, définie continue dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\text{th}'(x) = \frac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = 1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$$

d'où les variations et la courbe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
th	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+1$



Quelques propriétés :
– $\forall x \in \mathbb{R}, -1 < \text{th}(x) < 1$.
– $\forall x > 0, \text{th}(x) < x$.

2) Trigonométrie hyperbolique

– $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.
– Formules d'addition : $\forall x, y \in \mathbb{R}$ on a :
  • $\text{ch}(x + y) = \text{ch}(x)\,\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\,\text{sh}(y)$.
  • $\text{sh}(x + y) = \text{sh}(x)\,\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\,\text{sh}(y)$.
  • $\text{th}(x + y) = \frac{\text{th}(x)+\text{th}(y)}{1+\text{th}(x)\text{th}(y)}$.

En particulier : $\boxed{\begin{array}{l} \text{ch}(2x) = 2\,\text{ch}^2(x) - 1 = 1 + 2\,\text{sh}^2(x) \\ \text{sh}(2x) = 2\,\text{sh}(x)\,\text{ch}(x) \\ \text{th}(2x) = \frac{2\text{th}(x)}{1+\text{th}^2(x)} \end{array}}$.

– Transformations de somme en produit : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, en posant $p = \frac{x+y}{2}$ et $q = \frac{x-y}{2}$, on a $x = p + q$ et $y = p - q$, on obtient :
  • $\text{ch}(x) + \text{ch}(y) = 2\,\text{ch}(\frac{x+y}{2})\,\text{ch}(\frac{x-y}{2})$.
  • $\text{ch}(x) - \text{ch}(y) = 2\,\text{sh}(\frac{x+y}{2})\,\text{sh}(\frac{x-y}{2})$.
  • $\text{sh}(x) + \text{sh}(y) = 2\,\text{sh}(\frac{x+y}{2})\,\text{ch}(\frac{x-y}{2})$.
  • $\text{th}(x) + \text{th}(y) = \frac{\text{sh}(x+y)}{\text{ch}(x)\,\text{ch}(y)}$.

V SOLUTION DES EXERCICES

Solution 5.1

1/ Il suffit de le démontrer pour x positif en étudiant la fonction $x \mapsto x - \sin(x)$, puis on intègre de 0 à x ce qui donne la deuxième inégalité.

2/ On étudie $x \mapsto x - \tan(x)$ sur $[0; \frac{\pi}{2}[$. Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}; 0]$, on applique l'inégalité précédente à $-x$.

Solution 5.2

1/ Comme l'exposant varie, on passe à la forme exponentielle : $u^v = e^{v\ln(u)}$, d'où la dérivée : $[u^v]' = [v\ln(u)]'e^{v\ln(u)} = v'\ln(u)u^v + v\frac{u'}{u}u^v = v'\ln(u)u^v + vu'u^{v-1}$.

2/ Comme l'exposant varie, on passe à la forme exponentielle : $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = e^{\frac{\ln(1+X)}{X}}$ avec $X = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, or on sait que $\lim\limits_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$, et donc la limite cherchée vaut $e^1 = e$ (par continuité de l'exponentielle).

Solution 5.3 *Il faut étudier la limite du quotient, c'et à dire la limite en* $+\infty$ *de* $x^{\alpha}e^{-x^{\beta}}$.

On pose $X = x^{\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, *on a alors* $x = X^{1/\beta}$ *et* $x^{\alpha}e^{-x^{\beta}} = X^{\alpha/\beta}e^{-X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$ *d'après les croissances comparées.*