1 Trabajo y Energia

1.1 Trabajo

El trabajo es igual al producto del desplazamiento por la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento.

$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr}$
$dW = \vec{F} \cdot ds \cdot \cos\theta$
$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_A^B \vec{F} \cdot ds \cdot \cos\theta$ ($|\vec{F}| = cte$ y $\theta = cte$)
$W = \oint \vec{F} \cdot \vec{dr} = 0$ (para F_c)

1.2 Potencia

La potencia es la rapidez con la que se efectua un trabajo.

$P = \frac{dW}{dt}$
$P = \vec{F} \cdot \frac{\vec{dr}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

1.3 Energia Cinetica

El trabajo efectuado sobre una particula es igual al cambio producido en su energia cinética.

$E_k = \frac{1}{2}mv^2$ o $E_k = \frac{p^2}{2m}$

1.4 Energia Potencial

La energia potencial es una funcion de las coordenadas tal que la diferencia entre sus valores en las posiciones inicial y final es igual al trabajo efectuado sobre la particula para moverla de su posicion inicial a la final.

$E_p = mgy$
$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$, $F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$, $F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$
$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$
$\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial r}\hat{r}$ ($\vec{F}$ depende de una sola coordenada siendo $\hat{r}$ dicha coordenada.)

La energia potencial asociada con una fuerza central depende solamente de la distancia de la particula al centro de fuerza y reciprocamente.

Siempre que la energia potencial depende del angulo, actua un torque sobre el sistema, *causando un cambio en el momento angular en direccion perpendicular al plano del angulo.*

El trabajo de la fuerza peso es independiente de la trayectoria seguida por la particula.

El trabajo de la fuerza peso si depende de los puntos inicial y final de la trayectopria.

Sobre una trayectoria cerrada, el trabajo de la fuerza peso es nulo.

1.5 Energia Mecanica

$E_m = E_p + E_c$
$W_{F_{cons}} = -\Delta E_p$ (para fuerzas conservativas)
$W = \Delta E_c$ (fuerzas conservativas y no conservativas)
$W_{F_c} + W_{F_{nc}} = \Delta E_c = \Delta E_m - \Delta E_p$
$W_{F_{nc}} = \Delta E_m$

1.6 Conservación de la energía de una partícula

Cuando las fuerzas son conservativas la energia total E de la particula permanece constante. La energia de la particula se conserva.

$E = E_k + E_p = const$
$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = const$

2 Fuerzas Centrales

Una fuerza sera central cuando la E_p asociada con la misma dependa solo del modulo del vector posicion $\vec{r}$ y no de su direccion.

3 Sistema de Partículas

3.1 Ecuaciones Fundamentales

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M \cdot \vec{a}_{cm}} \tag{1}$$

$$\boxed{\sum \vec{\tau}_{ext}^{sist} = \frac{d\vec{L}^{sist}}{dt} = \sum \vec{r}_{i-sist} \times \vec{F}_{ext}} \tag{2}$$

3.2 Cinematica del centro de masa de un sistema de particulas

Si un sistema de particulas esta aislado, las fuerzas externas son nulas.

El centro de masa de un sistema aislado se mueve con velocidad constante con relacion a un sistema inercial (suponiendo que las masas de las particulas son independientes de la velocidad.)

El centro de masa de un sistema de particulas se mueve como si fuyera una particula de masa igual a la masa total del sistema sujeta a la fuerza externa aplicada al sistema.

La fuerza externa sobre un sistema de particulas es la suma de las fuerzas externas sobre cada una de las particulas del sistema.

3.2.1 Posicion del centro de masa de un sistema de particulas

$$\boxed{\left.\begin{aligned} \vec{X}_{cm} &= \frac{\sum m_i \cdot x_i}{M} \\ \vec{Y}_{cm} &= \frac{\sum m_i \cdot y_i}{M} \\ \vec{Z}_{cm} &= \frac{\sum m_i \cdot z_i}{M} \end{aligned}\right\} \quad \vec{r}_{cm} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{M}} \tag{3}$$

$$\vec{r}_{i-cm} = \vec{r}_i - \vec{r}_{cm} \tag{4}$$

3.2.2 Velocidad del centro de masa de un sistema de particula

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\sum m_i \cdot d\vec{r}_i}{M} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{v}_i}{M}$$

$$\vec{v}_{i_{cm}} = \vec{v}_i - \vec{v}_{cm}$$

$$\boxed{\vec{v}_{cm} = \frac{\sum m_i \cdot (\vec{v}_{i_{cm}} + \vec{v}_{cm})}{M}} \therefore \sum m_i \cdot \vec{v}_{i_{cm}} = 0 \tag{5}$$

3.2.3 Aceleracion del centro de masa de un sistema de particulas

$$\vec{a}_{cm} = \frac{\sum m_i \cdot d\vec{v}_i}{M} = \sum \frac{m_i \cdot \vec{a}_i}{M}$$

$$\vec{a}_{i_{cm}} = \vec{a}_i - \vec{a}_{cm}$$

$$\boxed{\vec{a}_{cm} = \sum \frac{m_i \cdot (\vec{a}_{i_{cm}} + \vec{a}_{cm})}{M}} \therefore \sum m_i \cdot \vec{a}_{i_{cm}} = 0 \tag{6}$$

3.3 Dinamica del centro de masa de un sistema de particulas

3.3.1 Cantidad de movimiento lineal, momento lineal, o momentum de un centro de masa de un sistema de particulas

$$\boxed{\vec{p}_{sist} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \cdot \vec{v}_i} \tag{7}$$

3.3.2 Cantidad de movimiento angular o momento cinetico o momento de la cantidad de movimiento de un sistema de particulas

La rapidez de cambio del momento angular total de un sistema de particulsa, relativo a un punto arbitrario, es igual al torque total relativo al mismo punto, de las fuerzas externas actuantes sobre el sistema.

$$\boxed{\vec{L}^o = \sum \vec{r}_{i-o} \times \vec{p}_i = \sum \vec{r}_{i-o} \times m_i \cdot \vec{v}_i} \tag{8}$$

3.4 Impulso y cantidad de movimiento del sistema de particulas

$$\vec{J} = \int_0^t \vec{F} dt \tag{9}$$

$$\boxed{\sum \vec{J}_{ext} = \vec{P}_f - \vec{P}_o} \tag{10}$$

(15) nos dice que solo los impulsos de las fuerzas exteriores pueden cambiar la cantidad de movimiento de un SP o solo los impulsos exteriores pueden cambiar el estado de movimiento del CM de un SP.

3.5 Momento Angular o Cinetico para un Sp referido al CM

$$\vec{L}^o = \vec{r}_{cm} \times M\vec{v}_{cm} + \sum \vec{r}_{i-cm} \times m_i \vec{v}_{i-`cm} \tag{11}$$

$$\boxed{\vec{L}^o = \underbrace{\vec{L}^{cm}}_{orbital} + \underbrace{\vec{L}^{i-cm}}_{spin}} \tag{12}$$

(17) nos dice que el momento cinetico de un SP respecto a un punto fijo al LAB es igual a la suma del momento cinetico del CM mas el momento cinetico del SP relativo al CM.

3.6 Dinamica Impulsiva

$$\boxed{\sum \underbrace{\vec{r}_{i-o} \times \vec{J}_{ext}}_{impulsoangular} = \Delta \vec{L}^o} \tag{13}$$

3.6.1 Ecuaciones Universales de la Dinamica IMpulsiva de SP

$$\boxed{\sum \vec{J}_{ext} = \vec{P}_f - \vec{P}_o} \tag{14}$$

$$\boxed{\sum \vec{r}_{i-o} \times \vec{J}_{ext} = \Delta \vec{L}^o} \tag{15}$$

3.7 Trabajo y Energia en un Sistema de Particulas

3.7.1 Trabajo

En un sistema de particulas, estas se pueden mover libremente, entonces sus desplazamientos no son necesariamente iguales, por eso los trabajos no se anulan. Entonces el trabajo total es la suma de los trabajos de todas las fuerzas actuantes tanto interiores como exteriores al sistema.

3.7.2 Energia Potencial de un Sistema de Particulas

$$\boxed{E_p = M \cdot g \cdot y_{cm}} \tag{16}$$

Según (16), la energia potencial gravitatoria de un sistema de particulas es la energia potencial gravitatoria del centro de masa del sistema, como si toda la masa estuviera concentrada en ese punto.

3.7.3 Energia Cinetica de un Sistema de Particulas

$$E_c = \frac{1}{2} M {v_{cm}}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i \cdot {v_{i-cm}}^2 \tag{17}$$

$$\boxed{E_c = \underbrace{\frac{1}{2} M {v_{cm}}^2}_{E_{c_{traslacion}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum m_i \cdot {v_{ir}}^2}_{E_{c_{expansion}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum m_i \cdot {v_{itr}}^2}_{E_{c_{rotacion}}}} \tag{18}$$

$$\boxed{\Delta E_c = W_{F_c + F_{nc}}} \tag{19}$$

La ecuacion (19) nos dice que la variacion de la energia cinetica depende de las fuerzas conservativas y no conservativas

El cambio de energia cinetica de un sistema de particulas es igual al trabajo efectuado sobre le sistema por las fuerzas exteriores e interiores.´

3.7.4 Energia Mecanica de un Sistema de Particulas

$$\boxed{\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta {E_p}^{ext} + \Delta {E_p}^{int} = W_{F_{nc}}} \tag{20}$$

3.8 Teoremas de Conservacion

3.8.1 Conservacion de la cantidad de movimiento

Si la sumatoria de las fuerzas externas es nula, entonces se la cantidad de movimiento es constante (se conserva).

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = cte \Rightarrow \vec{v}_{cm} = cte} \tag{21}$$

Casos que cumplen el teorema

- Si el sistema esta aislado (no hay $\vec{F}_{ext}$)
- Las $\vec{F}_{ext}$ estan en equilibrio ($\sum \vec{F}_{ext} = 0$)
- Si la fuerza externa neta en una direccion es nula, se cumple el teorema, en esa direccion.
- En las colisiones que cumplen que $\sum \vec{J}_{ext} = 0$

3.8.2 Conservación del momento angular

$$\boxed{\sum \vec{\tau}_{ext}^{sist} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}^{sist}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}^{sist} = cte} \tag{22}$$

El momento angular total de un sistema aislado, o un sistema sobre el que atua un torque externo total nulo, es constante en magnitud y direccion.

En un MRU el momento cinetico se conserva.

En un sistema de particulas como seria el del Sol y la Tierra, el momento cinetico se conserva.

3.8.3 Conservacion de la energia

$$\boxed{\Delta E_m = W_{F_{nc}}^{int+ext} \Rightarrow E_m = cte \Leftrightarrow W_{F_{nc}}^{int+ext}} \tag{23}$$

El trabajo de la energia propia de un sistema de particulas es igual al trabajo efectuado sobre el sistema por las fuerzas externas.

La energia propia de un sisteema aislado de particulas permanece constante.

3.9 Colisiones

4 Cuerpo Rigido

4.1 Condicion de Rigidez

Un sistema es rigido si al considerar dos particulas cualesquiera de el se verifica que la distancia entre dichas particulas es un invariante, sin importar las interacciones externas o internas que soporten las particulas.

$$(\vec{v}_a - \vec{v}_b) \cdot (\vec{r}_a - \vec{r}_b) = 0 \tag{24}$$

$$\vec{v}_a \cdot (\vec{r}_a - \vec{r}_b) = \vec{v}_b \cdot (\vec{r}_a - \vec{r}_b) \tag{25}$$

$$v_a \cdot |\vec{r}_a - r_b| \cos\alpha = v_b \cdot |r_a - r_b| \cos\beta \tag{26}$$

$$\boxed{v_a \cdot \cos\alpha = v_b \cdot \cos\beta} \tag{27}$$

4.2 Cinematica del Cuerpo Rigido

4.2.1 Posicion del CM del Cuerpo Rigido

$$\boxed{\left.\begin{aligned} \vec{X}_{cm} &= \rho \int \vec{x} \cdot dV \\ \vec{Y}_{cm} &= \rho \int \vec{y} \cdot dV \\ \vec{Z}_{cm} &= \rho \int \vec{z} \cdot dV \end{aligned}\right\} \quad \vec{r}_{cm} = \rho \int \vec{r} \cdot dV} \tag{28}$$

4.2.2 Traslacion Pura en R^3

$$\boxed{\vec{v}_i = \vec{v}_{cm}} \tag{29}$$

$$\boxed{\vec{a}_i = \vec{a}_{cm}} \tag{30}$$

$\sum \vec{F} \neq 0$ *y* $\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow$ *el CR se encuentra en una traslacion pura*

Un CR se mueve con traslacion pura, cuando todos los puntos del mismo, en cada instante, tienen la misma velocidad y misma aceleracion. Es equivalente a pensar que el CR como un cuerpo puntual de masa M y en general se elije como punto representativo de este cuerpo al CM.

Esta traslacion puede implicar una trayectoria curvilinea y la aceleracion tendra entonces componentes normal y tangencial.

4.2.3 Rotacion Pura en R^3

$$\boxed{\vec{v}_i = \vec{\Omega} \times \vec{r}_{i-cm}} \tag{31}$$

$$\boxed{\vec{a}_i = \vec{\gamma} \times \vec{r}_{i-cm} + \vec{\Omega} \times \vec{v}_{i-cm}} \tag{32}$$

$\sum \vec{F} = 0$ *y* $\sum \vec{\tau} \neq 0 \Rightarrow$ *el CR se encuentra en una rotacion pura*

Si por lo menos dos de sus puntos tienen velocidad nula, todos los demas puntos realizan movimientos circulares al rededor del eje de rotacion.

Si hay tres puntos con velocidad nula y no alineados significa que el CR esta fijo.

La velocidad de cada punto del cuerpo tendra una direccion tangente a su trayectoria, es decir, perpendicular a la posicion de esa particula respecto al eje de rotacion

La aceleracion normal de cualquier punto que no estan en el eje de rotacion es no nula, es el caso contrario de aquellos que si estan en el eje de rotacion ya que $\vec{r}_{cm-cm} = 0$

4.2.4 Roto - Traslacion

$$\boxed{\vec{v}_i = \underbrace{\vec{v}_{cm}}_{traslacion} + \underbrace{\vec{\Omega} \times \vec{r}_{i-cm}}_{rotacion}} \tag{33}$$

$$\boxed{\vec{a}_i = \underbrace{\vec{a}_{cm}}_{traslacion} + \underbrace{\vec{\gamma} \times \vec{r}_{i-cm} + \vec{\Omega} \times \vec{v}_{i-cm}}_{rotacion}} \tag{34}$$

$\sum \vec{F} \neq 0$ *y* $\sum \vec{\tau} \neq 0 \Rightarrow$ *el CR se encuentra en una roto-traslacion.*

El cuerpo rota y se traslada al mismo tiempo.

La velocidad de un punto es la suma de la velocidad de traslacion mas la velocidad de rotacion.

4.2.5 Propiedades

- Todos los puntos en un eje paralelo al eje de rotacion tienen igual velocidad.
  - Si todos los puntos del eje tienen igual velocidad entonces un eje paralelo al de rotacion, tambien es un eje de rotacion.
- Puedo usar cualquier punto del CR para describir el movimiento como la suma de una traslacion mas una rotacion
  - $(\vec{v}_p - \vec{v}_p) = \Omega \times (\vec{r}_p - \vec{r}_p)$
- Puedo usar el CM del CR para describir el movimiento como la suma de una traslacion mas una rotacion
  - $\vec{V}_p = \vec{v}_{cm} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{p-cm} \therefore \vec{r}_{p-cm} = \vec{r}_p - \vec{r}_{cm}$ $\forall$Punto en el CR

4.3 Diagramas Vectoriales

4.3.1 Diagramas caracteristicos de la rotacion pura

Son dobletriangulares y simetricos.

4.3.2 Diagramas caracteristicos de la roto - traslacion

1) Se traslada mas rapido de lo que rota (CIR debajo del piso)
2) Rota mas rapido de lo que se traslada (CIR por encima del piso)
3) Rueda sin deslizar
   - Para que un cuerpo ruede sin deslizar es necesaria la existencia de un rozamiento, ya que sin este patinaria.
   - No hay desplazamiento entre las superficies, entre el cuerpo y el piso
   - La velocidad en el punto de contacto es nula ($0 = \vec{v}_p = \vec{\Omega} \times \vec{r}_{p-cm} + \vec{v}_e \Rightarrow \vec{v}_{cm} + (-\vec{\Omega} \cdot R)$)
   - $v_{cm} = \Omega \cdot R$
   - El rozamiento es estatico $|F_r| \leq \mu_e \cdot N$
   - Si el rozamiento es estatico su trabajo es nulo
4) Rueda con deslizamiento
   - Hay desplazamiento relativo entre superficies.
   - El rozamiento es dinamico y su modulo es $|F_{r_d} = \mu_d \cdot N$
   - El trabajo de una fuerza de rozamiento dinamica es no nulo (suele ser negativo).

4.3.3 Centro Instantaneo de Rotacion (CIR)

- Es el punto donde la velocidad es nula.
- En un CR que reuda sin deslizar el CIR es el punto de apoyo.
- Puede estar fuera del CR.
- Cuando el cuerpo rueda sin deslizar el CIR esta en el punto de apoyo, pero si desliza, puede estar abajo del piso o sobre el piso ($v_{cm} < \Omega \times R \Rightarrow$ arriba - $v_{cm} > \Omega \times R \Rightarrow$ abajo)

4.4 Dinamica del Cuerpo Rigido

4.4.1 Resultante de un Sistema de Fuerzas

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \sum \vec{F}_X = M \cdot \vec{a}_{cm_x} \\ \sum \vec{F}_Y = M \cdot \vec{a}_{cm_y} \\ \sum \vec{F}_Z = M \cdot \vec{a}_{cm_z} \end{array}\right\} \quad \sum \vec{F}_{ext} = M \cdot \vec{a}_{cm}} \tag{35}$$

4.4.2 Momento de Inercia

$$I_{cm} = \int r^2 dm \tag{36}$$

$$\boxed{I_{cm} = K^2 \cdot M} \tag{37}$$

El momento de inercia me da una idea de la distribucion de masa del CR respecto a un eje que en nuestro caso va a ser siempre el CM.

El momento de inersia es como una inersia de rotacion, como la resistencia que un cuerpo presenta a modificar su estado rotacional, es decir, a adquirir una aceleracion angular.

Por ejemplo, si un cuerpo tiene un ommento de inersia muy grande en comparacion con otro costara mucho frenar su giro, o en caso de que este quieto ponerlo a girar.

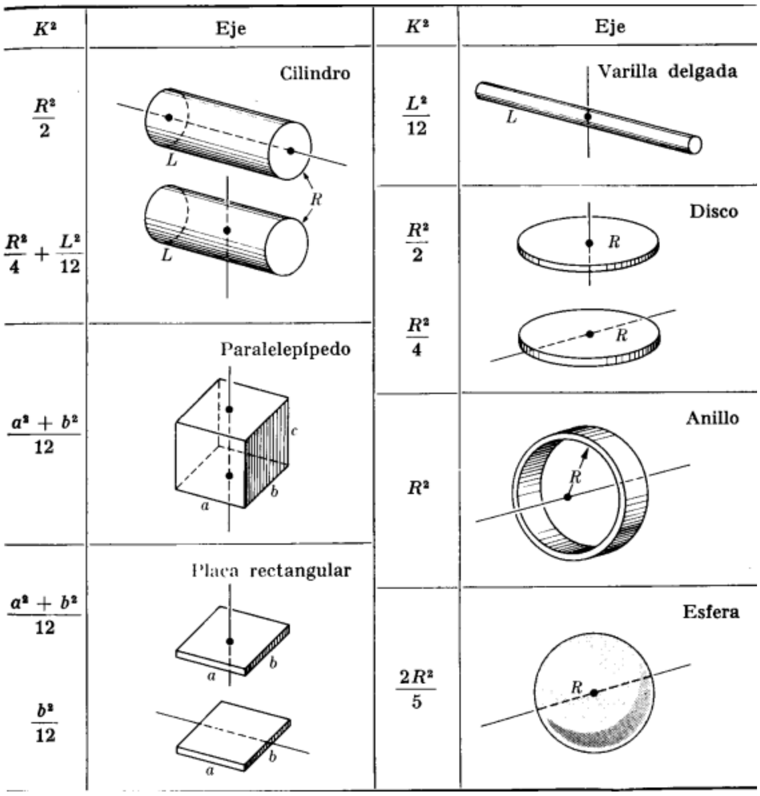
***Ejemplo de cambio de momento de inersia en el CM de una persona que esta girando:** al instante inicial los brazos y piernas estan extendidos, hay un momento de inersia inicial respecto al CM y una velocidad angular (porque esta girando) y la sumatoria de torques externos es cero porque solo esta el peso y actua sobre el centro de masa, entonces el momento cinetico se conserva cuando se encoge su momento de inersia disminuye ya que la masa esta mas cerca del CM entonces la velocidad angular tiene aumentar para que se mantenga el momento cinetico.*

Teorema de Steiner o de los ejes paralelos

$$I_e = I_{cm} + M \cdot d_2 \tag{38}$$

Permite encontrar el momento de inersia respecto al eje que no pasa por el CM con el momento de inercia de un eje que si pasa por el CM, con la condicion de que los ejes sean paralelos entre si.

Tabla de radios de giro



K^2	Eje	K^2	Eje
$\frac{R^2}{2}$ $\frac{R^2}{4}+\frac{L^2}{12}$	Cilindro	$\frac{L^2}{12}$	Varilla delgada
		$\frac{R^2}{2}$ $\frac{R^2}{4}$	Disco
$\frac{a^2+b^2}{12}$	Paralelepípedo	R^2	Anillo
$\frac{a^2+b^2}{12}$ $\frac{b^2}{12}$	Placa rectangular	$\frac{2R^2}{5}$	Esfera

Los momentos de inersia son aditivos y sustractivos

Para encontrar el momento de inersia de un cuerpo complejo podemos considerarlo como la suma o la diferencia, de dos cuerpos simples cuyos momentos de inersia conocemos.

4.4.3 Momento Cinetico

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{L}_e = \underbrace{I_{cm}\cdot\vec{\Omega}}_{orbital} + \underbrace{\vec{r}_{cm}\times M\cdot\vec{v}_{cm}}_{spin} \underbrace{\longrightarrow}_{steiner} \vec{L}_{cm} = I_{cm}\cdot\vec{\Omega} \\ \vec{L}_{cir} = \overbrace{I_{cm}\cdot\vec{\Omega}} + \overbrace{\vec{r}_{cm-cir}\times M\cdot\vec{v}_{cm-cir}} \underbrace{\longrightarrow}_{steiner} \vec{L}_{cir} = I_{cir}\cdot\vec{\Omega} \end{array}} \tag{39}$$

4.5 Trabajo y Energia del Cuerpo Rigido

4.5.1 Trabajo

$$\boxed{\left.\begin{aligned} W &= \int_{r_a}^{r_b} \vec{F} \cdot d\vec{r}_{cm} \\ W &= \int_{\theta_a}^{\theta_b} \vec{\tau_{cm}} \cdot d\vec{\theta} \\ W &= \int_{r_a}^{r_b} \vec{F} \cdot d\vec{r}_{cm} + \int_{\theta_a}^{\theta_b} \vec{\tau_{cm}} \cdot d\vec{\theta} \end{aligned}\right\} \quad W_{tot}} \tag{40}$$

El trabajo de las fuerzas interiores, para un CR es nulo po la condicion de rigidez.

4.5.2 Energia Cinetica de un Cuerpo Rigido

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot M \cdot V_{cm}^2 + \frac{1}{2} \cdot \Omega^2 \cdot \int r_{i-cm}^2 \cdot dm \tag{41}$$

$$\boxed{E_c = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot M \cdot V_{cm}^2}_{E_{c_{traslacion}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot I_{cm} \cdot \Omega^2}_{E_{c_{rotacion}}}} \tag{42}$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} \cdot I_{cir} \cdot \Omega^2} \tag{43}$$

4.5.3 Energia Potencial de un Cuerpo Rigid

$$\boxed{E_p = M \cdot g \cdot y_{cm}} \tag{44}$$

4.6 Teoremas de Conservacion

4.6.1 Conservacion de la cantidad de movimiento

Si la sumatoria de las fuerzas externas es nula, entonces se la cantidad de movimiento es constante (se conserva).

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = cte \Rightarrow \vec{v}_{cm} = cte} \tag{45}$$

4.6.2 Conservación del momento angular

$$\boxed{\sum \vec{\tau}_{ext}^{sist} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}^{sist}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}^{sist} = cte} \tag{46}$$

El momento angular total de un sistema aislado, o un sistema sobre el que atua un torque externo total nulo, es constante en magnitud y direccion.

En un MRU el momento cinetico se conserva.

En un sistema de particulas como seria el del Sol y la Tierra, el momento cinetico se conserva.

4.6.3 Conservacion de la energia

$$\boxed{\Delta E_m = W_{F_{nc}}^{int+ext} \Rightarrow E_m = cte \Leftrightarrow W_{F_{nc}}^{int+ext}} \tag{47}$$

El trabajo de la energia propia de un sistema de particulas es igual al trabajo efectuado sobre el sistema por las fuerzas externas.

La energia propia de un sisteema aislado de particulas permanece constante.

4.7 Ecuaciones Fundamentales del Cuerpo Rigido

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = M \cdot \vec{a}_{cm}} \tag{48}$$

$$\boxed{\sum \vec{\tau}_{cm}^{sist} = I_{cm} \cdot \vec{\gamma}} \tag{49}$$

$$\boxed{\sum W_{f_{nc}} = \Delta E_m} \tag{50}$$

5 Optica Geometrica

Es la parte de la fisica que estudia la luz. Denominamos luz a la pequeña porcion del espectro electromagnetico a la que nuestros ojos son sensibles.

Nuestros ojo detectan radiaciones entre 430 *y* 690 *nm de longitud de onda (*$1nm = 10^{-9}m$*)*

Rayo: *es una linea en el espacio que indica la direccion del flujo de energia luminosa emitido por una fuente. Describe la trayectoria de la luz.*

5.1 Leyes o Principios fundamentals de la Optica Geometrica

Cuando la luz llega a la superficie de discontinuidad de dos medios de diferente densidad optica, parte de la luz se refleja (vuelve al mismo medio), parte se refracta (parsa a otro medi), parte se absorbe y parte se difunde.

1) **Propagacion Rectilinea:** "La luz se propaga en linea recta." De una unica fuente sale un conjunto de rayos al que llamamos haz. Estos haces pueden ser DIVERGENTES, PARALELOS o CONVERGENTES.

2) **Leyes de Reflexion de la Luz:** Cuando un rayo incide en una superficie de discontinuidad se refleja de modo que:

i) "El rayo incidente **I**, la normal **N** y el rayo reflejado **R** son coplanares."

ii) "El angulo de incidencia **i** es igual al angulo de reflexion **r**."

No todas las reflexiones cumplen con estas leyes, la reflexion producida por aquellas que si cumplen con las leyes seran llamadas reflexion especular.

3) **Leyes de Refraccion de la Luz:** Cuando un rayo incide en una superficie de discontinuidad se refracta de modo que:

i) "El rayo incidente **I**, la normal **N**, y el rayo refractado **R** son coplanares."

ii) "El seno del angulo de incidencia **i** y el seno del angulo de refraccion **r** tienen, para cada color de la luz incidente, una relacion constante y positiva que se denomina indice de refraccion relativo del medio al cual penetra el rayo respecto del medio del cual proviene."

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$$

Ley de Snell: El indice de refraccion de un medio respecto al vacio (indice de refraccion absoluto) es adimensional $n = \frac{c}{v}$ en donde c es la velocidad de propagacion de la luz en el vacio y v la velocidad de propagacion de la luz en un medio. Luego el indice de refraccion del medio vale 1 y como la velocidad de la luz en medios transparentes es inferior a la velocidad de la luz en el vacio, los indices de refraccion resultan siempre mayores a 1. Si el medio en el que se propaga es homogeneo e isotropo el indice de refraccion es constante, pero, depende de la frecuencia o longitud de onda en medios dispersivos.

$$n_{aire} = 1,0029 \approx 1; n_{agua} = 1,33; 1,4 \leq n_{aire} \leq 1,5$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Puede pasar que para ciertos angulos incidentes sean de 90*, en ese caso no hay refraccion, hay solo reflexion.*

5.2 Objeto

Es un punto que es centro del haz de rayos incidente en un elemento optico (espejos, dioptras, lentes, etc) en estudio.

5.3 Imagen (de un punto objeto)

Es el centro del haz de rayos que sale del elemento optico de estudio (tambien se llama conjugado del punto objeto).

Si por el centro del haz pasan realmente los rayor, entonces el objeto o la imagen se llaman "reales". En cambio si lo que pasan son las prolongaciones de los rayos, que indican la direccion del haz, la imagen o el objeto se llaman "virtuales".

5.4 Espejos Planos

5.4.1 Fenomeno de reflexion

Las superficies en las cuales la luz incidente se refleja mas que lo que se refracta se las llama espejos.

5.4.2 Espejos Planos: Formacion de Imagenes

La traza del espejo es la interseccion del espejo con la superficie de la hoja.

Un espejo plano proporciona para todo objeto real una imagen que es siembre virtual, porque el haz reflejado en el espejo plano es divergente.

5.4.3 Campo del Espejo

El angulo visual esta formado por los rayos luminosos que partieno de los puntos extremos del objeto iluminado llegan al ojo. A medida que aumenta la distancia de nuestros ojos al objeto disminuye el angulo visual.

Denominamos campo del espejo respecto a un punto a la zona del espacio frente al espejo que puede verse por reflexion desde ese punto. El campo varia en cada punto. Esta limitado por el angulo visual de la traza del espejo desde ese punto del espacio.

5.5 Espejos Esfericos

5.5.1 Reflexion en Espejos Esfericos

Relacion de biunicidad: *a un punto imagen le corresponde uno y solo un punto objeto y viceversa.*

Aproximacion paraxial: *todo angulo* $\hat{\theta}$ *involucrado en la descripcion de la formacion de imagenes debe cumplir que* $\tan \hat{\theta} \approx \sin \hat{\theta} \approx \hat{\theta}$

El espejo esferico sera entonces un casquete de dimensiones muy pequeñas con respecto a la totalidad de la esfera de la que forma parte. Sus dimensiones seran mucho mas pequeñas que su radio de curvatura. Su concavidad o convexidad casi no se veran en la realidad. Sin embargo, en los graficos lo haremos mas evidente para poder distinguir un espejo concavo de uno convexo.

Por convencion tomaremos el sentido positivo contrario a la luz incidente.

5.5.2 Formula de los Espejos Esfericos

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{2}{R} \tag{51}$$

En donde x es la posicon del objeto, y x' es la posicon de la imagen y R es el radio de curvatura.

Si la posicion de la imagen es positiva entonces se trata de una imagen real, y si la posicion de la imagen es negatica entonces se trata de una imgaen virtual.

5.5.3 Focos

*Llamamos **F** al foco principal objeto al punto del eje principal que tiene su imagen en el infinito. Distancia focal objeto **f** es la posicion (en el eje x) del foco principal objeto respecto al vertice del espejo.*

*Llamamos **F'** al foco principal imagen al punto del eje principal de un objeto en el infinito. Distancia focal imagen **f'** es la posicion (en el eje x) del foco principal imagen respecto al vertice del espejo.*

$$x \to \infty \Rightarrow x = f \Rightarrow \qquad \underbrace{f = \frac{R}{2}}_{\text{Distancia focal objeto}} \tag{52}$$

$$x' \to \infty \Rightarrow x' = f' \Rightarrow \qquad \underbrace{f' = \frac{R}{2}}_{\text{Distancia focal imagen}} \tag{53}$$

5.5.4 Aumento o Agrandamiento Lateral de Espejos Esfericos

$$A = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x} \tag{54}$$

*Se denomina aumento lateral o agrandamiento lateral a la razon del tamaño de la imagen **(y')*** respecto al tamaño del objeto **(y)**.

5.5.5 Formacion de Imagenes en Espejos Esfericos

La imagen en un espejo concavo es generalmente real y en un convexo es generalmente virtual. La excepcion se produce cuando el objeto esta entre el foco y el espejo. El concavo es mas usado en el caso de excepcion como espejo de tocador (imagen virtual, derecha y mayor). El espejo convexo se usa como retrovisor de los autos o en las salidas de los estacionamientos para tener un mayor campo visual de los objetos reales (imagen virtual, derecha y menor).

1) **Espejos Cóncavos**
   Tomamos solo 2 rayos para encontrar las imagenes. E paralelo al eje principal que se refleja pasando por el foco y el que pasa por el centro de curvatura que se refleja sobre si mismo.

2) **Espejos Convexos**
El radio de curvatura y la distancia focal son negativos porque el foco F y el centro de curvatura C son virtuales (estan detras del espejo).

5.6 Dioptras Esfericas

Denominamos dioptra a la superficie de separacion de dos medios infinitos de distinta densidad optica que distinguiremos por sus indice de refraccion como n_1 y n_2.

Si la posicion de la fimagen queda del lado $+x$ la imagen sera virtual y la posicion de la imagen queda del lado $-x$ la imagen sera real.

Si el foco objeto queda del lado de donde viene la luz (positivo) entonces la dioptrea es convergente. Y si el foco objeto queda del lado de donde no viene la luz (negativo) la dioptra es divergente.

5.6.1 Fenomeno de Refraccion

En este fenomeno la luz proviene del primer medio y penetra en el segundo medio. Llamaremos R al radio de curvatura de la dioptra y C al centro de curvatura de la misma.

5.6.2 Formula de Descartes para las Dioptras Esfericas

$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = \frac{(n_2 - n_1)}{R} \tag{55}$$

$$\frac{1}{f} = -\frac{n_2 - n_1}{n_1 \cdot R} \tag{56}$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 \cdot R} \tag{57}$$

$$f + f' = R \tag{58}$$

A difrencia de los espejos vemos que los focos no coinciden y sus posiciones son diferentes y se halla a un lado y al otro del eje de cooredenadas.

Aproximacion paraxial: *todo angulo $\hat{\theta}$ involucrado en la descripcion de la formacion de imagenes debe cumplir que $\tan\hat{\theta} \approx \sin\hat{\theta} \approx \hat{\theta}$*

5.6.3 Aumento o Agrandamiento Lateral de Dioptras

$$A = \frac{y'}{y} = \frac{n_1 \cdot x'}{n_2 \cdot x} \tag{59}$$

5.7 Lentes Gruesas

Una lente gruesa es un medio transparente limitado por dos dioptras esfericas o planas centradas (con ejes principales coincidentes)

La distancia entre los vertices de las dioptras se denomina espesor y es una distancia medida desde el exterior.

Como tiene un espesor no despreciable el aumento lateral es:

$$A = \frac{x1'}{x} \cdot \frac{x'}{x_1' + e} \tag{60}$$

5.8 Lentes Delgadas

Denominamos lente delgada a toda lente cuyo espesor es despreciable frente a las otras dimensiones de la lente. Por ejemplo una lente de un telescopio que tiene 20cm de espesor y mas de 2m de diametro puede considerarse delgada.

Dado que el espesor es despreciable el aumento lateral es:

$$A = \frac{x'}{x} \tag{61}$$

5.8.1 Formula del constructor de las lentes delgadas

$$\frac{1}{f} = (\frac{n_v}{n_{medio}} - 1) \cdot (\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}) = -\frac{1}{f'} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x'} \tag{62}$$

5.8.2 Tipo de Lentes Delgadas

Las lentes delgadas pueden ser convergentes o divergentes

1. Convergentes:
   - Biconvexa: cuando $R_1 < 0$ y $R_2 > 0$.
   - Plano Convexa: cuando $R_1 < 0$ y $R_2 \to \infty$ o $R_2 > 0$ y $R_1 \to \infty$
   - Menisco Concavo-Convexo

   Para una lente convergente para objetos reales que se ubican entre un foco y el infinito de $+x$ las imagenes son reales. Para objetos reales pero que se ubiquen entre el foco y el origen de coordenadas (posicion de la lente) las imagenes van a ser virtuales. Para objetos virtuales todas las imagenes son reales.

2. Divergentes:
   - Biconcava: cuando $R_1 > 0$ y $R_2 < 0$.
   - Plano Concavo: $R_1 > 0$ y $R_2 \to \infty$ o $R_2 < 0$ y $R_1 \to \infty$

- Menisco Concavo-Convexo: $R_1 < 0$ y $R_2 \to \infty$ o $R_2 > 0$ y $R_1 \to \infty$

Para una lente divergente para todos los objetos reales las imagenes son virtuales.

Cuando el indice de refraccion del medio es menor que el indice de refraccion de la lente se cumple lo anterior. Pero cuando el indice de refraccion del medio es mayor que el indice de refraccion de la lente, se invierten los tipos.

5.8.3 Potencia de las Lentes Delgadas

$$P = \frac{1}{f} \tag{63}$$